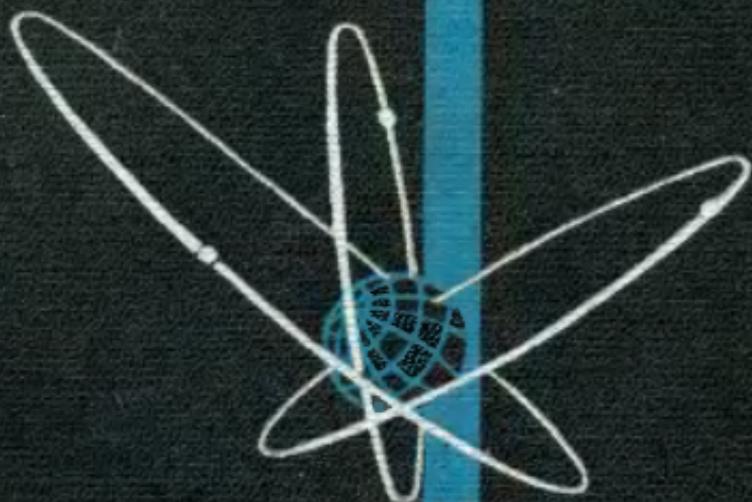


**Я.Л. АЛЬПЕРТ
А.В. ГУРЕВИЧ
А.Л. ПИТАЕВСКИЙ**



**ИСКУССТВЕННЫЕ
СПУТНИКИ
РАЗРЕЖЕННОЙ
ПЛАЗМЕ**

Я. Л. АЛЬПЕРТ, А. В. ГУРЕВИЧ,
Л. П. ПИТАЕВСКИЙ

ИСКУССТВЕННЫЕ
СПУТНИКИ
В РАЗРЕЖЕННОЙ
ПЛАЗМЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1964

АННОТАЦИЯ

В монографии рассмотрены различные явления, возникающие при движении искусственных спутников Земли в ионосфере и межпланетной среде. Наиболее полно исследован случай быстро движущегося тела, скорость которого значительно больше скорости частиц в плазме. Детально рассмотрена задача о рассеянии электромагнитных волн на «следе», который спутник образует при своем движении, дана строгая теория зонда.

Книга рассчитана на научных работников, студентов и аспирантов радиофизиков и геофизиков.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Основные обозначения	9
Г л а в а I. Введение	11
§ 1. Данные о свойствах верхней ионосферы	11
§ 2. Особенности взаимодействия движущихся тел с ионосферой	17
§ 3. Основные уравнения	23
Г л а в а II. Возмущение концентрации частиц без учета влияния электрического и магнитного полей	35
§ 4. Качественное рассмотрение возмущений, вызываемых быстро движущимся телом	35
§ 5. Область разрежения позади быстро движущегося тела произвольной формы	42
§ 6. Область сгущения впереди быстро движущегося шара	53
§ 7. Концентрация частиц вокруг шара, движущегося с произвольной скоростью	64
§ 8. Компоненты Фурье возмущений концентрации частиц для быстро движущегося шара	80
Г л а в а III. Влияние постоянного магнитного поля на возмущение концентрации ионов и электронов	85
§ 9. Функция распределения ионов	85
§ 10. Движение тела вдоль магнитного поля	89
§ 11. Движение тела поперек магнитного поля	93
§ 12. Произвольное направление движения	103
§ 13. Компоненты Фурье концентрации электронов	104
Г л а в а IV. Электрическое поле вокруг тела	110
§ 14. Приближенный расчет электрического поля	110
§ 15. Влияние электрического поля на движение ионов	130
§ 16. Общие свойства уравнений с учетом электрического поля	140

§ 17. Возмущения в окрестности точечного тела	148
§ 18. Возмущение плазмы высокочастотным электрическим полем	153
Г л а в а V. Учет влияния соударений между частицами на возмущение концентрации электронов и ионов	171
§ 19. Эффективное число соударений	171
§ 20. Упрощение уравнения с интегралом столкновений общего вида	175
§ 21. Решение уравнений с точными интегралами столкновений в различных предельных случаях	180
§ 22. Возмущения концентрации электронов и ионов в диффузионном приближении (нижняя ионосфера)	186
Г л а в а VI. Возмущение магнитного поля	195
§ 23. Расчет возмущения магнитного поля	195
§ 24. Влияние возмущений магнитного поля на движение ионов и электронов	205
Г л а в а VII. Рассеяние электромагнитных волн на «следе» быстро движущегося тела	209
§ 25. Эффективное сечение рассеяния в приближении теории возмущений	209
§ 26. Функция рассеяния	212
§ 27. Зависимость эффективного сечения рассеяния от высоты и от длины волны	223
§ 28. Характер поля рассеянной волны в точке наблюдения	240
§ 29. Эффективное сечение рассеяния в отсутствие внешнего магнитного поля	244
§ 30. Рассеяние на следе тела, движущегося в нижней ионосфере	248
Г л а в а VIII. Распределение частиц в центрально-симметричном поле	250
§ 31. Вводные замечания	250
§ 32. Особенности движения частиц в центрально-симметричном поле	255
§ 33. Решение кинетического уравнения	266
§ 34. Концентрация частиц в окрестности покоящегося тела	272
§ 35. Распределение частиц, совершающих финитное движение	286

Г л а в а IX. Возмущение плазмы и электрическое поле в окрестности покоящегося заряженного тела	298
§ 36. Основные уравнения	298
§ 37. Электрическое поле и структура плазмы в окрестности большого тела	301
§ 38. Двойной слой около поверхности большого тела	318
§ 39. Структура плазмы и электрическое поле при очень высоком потенциале поверхности большого тела	326
§ 40. Электрическое поле и структура плазмы в окрестности малого тела	337
§ 41. Структура возмущенной области в окрестности абсолютно отражающего тела	349
Г л а в а X. Поток частиц в окрестности тела	354
§ 42. Вводные замечания	354
§ 43. Поток нейтральных частиц	356
§ 44. Поток электронов и ионов в окрестности поглощающего тела	365
§ 45. К теории сферического зонда	371
Литература	380

ПРЕДИСЛОВИЕ

Запуск искусственных спутников и космических ракет и проводимые с их помощью исследования ионосферы и межпланетной среды усилили в современной физике интерес к изучению явлений, возникающих в сильно разреженной плазме в окрестности движущихся в ней тел. Теоретическому исследованию ряда задач, возникающих при рассмотрении этой проблемы и посвящена настоящая монография.

При описании движения тел в сильно разреженной среде, где длины свободного пробега частиц больше размеров тела, обычные методы гидродинамики или аэродинамики, как известно, уже неприменимы. Поэтому для решения этих задач необходимо использовать кинетическую теорию, учитывающую, что газ не сплошная среда, а совокупность отдельных частиц. Последовательный кинетический подход к рассматриваемым ниже вопросам и составляет основную особенность этой книги.

Наиболее подробно рассмотрен осуществляющийся в верхней ионосфере случай быстро движущегося тела, скорость которого много больше, чем тепловая скорость нейтральных частиц и ионов, т. е. больше скорости звука, а размер больше дебаевского радиуса. Однако некоторые разделы книги посвящены также исследованию явлений, имеющих место, когда размер тела становится соизмерим или меньше дебаевского радиуса, а скорость тела соизмерима со скоростью частиц. Такие условия, по-видимому, имеют место на границе земной ионосферы и в межпланетной среде.

В гл. II—VI приводятся результаты расчетов возмущения концентрации нейтральных частиц, ионов и электронов, а также возникающих вследствие этого электриче-

ского и магнитного полей в окрестности тела. Рассмотрению рассеяния радиоволн на образующемся таким образом следе тела посвящена гл. VII. Возмущения плазмы в окрестности покоящегося тела рассчитаны в гл. VIII, IX; это позволило, в частности, построить более строгую теорию зонда в разреженной плазме, результаты которой существенно отличаются от результатов используемых обычно приближенных теорий (гл. X). Исследован также вопрос о возмущении плазмы телами, размер которых меньше дебаевского радиуса (§§ 17, 40), и о влиянии на плазму переменного электрического поля (поля передающих антенн — § 18). Однако эти вопросы, как и вопрос о возмущении магнитного поля (гл. VI), рассмотрены менее детально. Это же относится и к изложению интересного вопроса о финитном движении заряженных частиц в окрестности малого тела (§ 35).

Для решения указанных выше задач важно знать характер взаимодействия поверхности тела с плазмой и падающими электромагнитным излучением и корпускулярными потоками. К сожалению, эти вопросы в настоящее время почти не изучены, тем более, что возникающие при этом явления очень сильно зависят от материала и способа обработки поверхности. По этой причине мы принимаем всюду в расчетах, что частицы взаимодействуют с поверхностью простейшим образом, а именно могут лишь отражаться или поглощаться. Мы пренебрегаем, в частности, такими процессами, как испарение и разрушение поверхности тела при столкновении с частицами среды или под воздействием потоков излучения, фотоэффектом и т. д. Большой интерес, проявляемый в настоящее время к исследованиям на спутниках и космических ракетах, позволяет надеяться, что изучение этих важных вопросов существенно продвинется в ближайшее время, особенно с экспериментальной стороны.

Монография, по-видимому, является лишь первой попыткой исследования и обобщения весьма сложной и многообразной проблемы, ставшей очень актуальной в современной физике и технике. Естественно поэтому, что в ней имеется ряд недочетов.

Следует отметить, что во многих случаях рассматриваются лишь те вопросы, решение которых может быть

получено в аналитическом виде, или требует минимальных численных расчетов. Разумеется, более широкое применение численных методов позволит в дальнейшем значительно обобщить и уточнить наши результаты.

Монография написана в основном по результатам работ авторов [1—10, 63—66]. В тех случаях, когда использовались результаты других исследований, в тексте даны соответствующие ссылки. Подробный список литературы, посвященной взаимодействию тела с плазмой и смежным вопросам, можно найти в обзорах [10, 11, 12].

В заключение авторы выражают благодарность рецензенту книги В. П. Силину за ряд замечаний, В. И. Краюшкиной, В. Л. Морозовой за существенную помощь в оформлении книги и Л. В. Парийской за проведение ряда численных расчетов.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- n — концентрация нейтральных частиц.
 n_0 — невозмущенная концентрация нейтральных частиц.
 N — концентрация электронов.
 N_0 — невозмущенная концентрация электронов и ионов.
 N_i — концентрация ионов.
 $\delta n, \delta N, \delta N_i$ — возмущения концентрации частиц.
 l_n — длина свободного пробега нейтральных частиц.
 $l_{i, e}$ — длина свободного пробега ионов, электронов.
 ν_{nn} — число столкновений между нейтральными частицами.
 ν_e, ν_n — число столкновений между электронами или ионами и нейтральными частицами.
 ν_{ii} — число столкновений между ионами.
 $\nu_n, \nu_{i, e}$ — тепловая скорость нейтральных частиц, ионов, электронов ($v_e = \sqrt{2kT/m}$).
 V_0 — скорость тела.
 k — постоянная Больцмана.
 $k_0 = \frac{\omega}{c}$ — волновое число в свободном пространстве.
 k — волновой вектор падающей волны.
 k' — волновой вектор рассеянной волны.
 $q = k - k'$ — разность между волновыми векторами падающей и рассеянной волн.
 T — температура.
 $-e$ — заряд электрона.
 m — масса электрона.
 M — масса тяжелой частицы (нейтральной частицы).
 M_i — масса иона.
 \mathcal{M} — момент количества движения.
 ω_0 — частота плазменных колебаний.
 D — дебаевский радиус.
 H_0 — напряженность внешнего постоянного магнитного поля Земли.
 Ω — ларморовская угловая частота иона.
 Ω_H — средний ларморовский радиус иона $\left(\frac{v_i}{\Omega} \right)$, Ω_{He} — то же для электрона $\left(\frac{v_e}{\Omega} \right)$.
 ω_H — ларморовская угловая частота электронов.

$f_{n, i, e}$ — функция распределения нейтральных частиц, ионов, электронов.

f_0 — максвелловская функция распределения.

α — угол между направлением движения тела (V_0) и магнитным полем (H_0).

ψ — угол между волновыми векторами k и k' .

ψ_1 — угол между электрическим полем E_0 падающей волны и волновым вектором k' рассеянной волны.

χ — угол между q и V_0 .

z — координата вдоль направления движения тела.

x, y — координаты вдоль ортогональных к движению тела направлений; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

r — радиус-вектор от центра тела в произвольном направлении.

R_0 — линейный размер тела, радиус шара.

S_0 — поперечное сечение тела.

dS — элемент поверхности.

r_s — радиус-вектор точки на поверхности тела.

n — нормаль к поверхности тела.

$d\sigma$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния.

ϵ — диэлектрическая проницаемость плазмы.

$\mathcal{E}_{n, i}$ — энергия частицы (молекулы, иона).

U — потенциальная энергия частицы.

u — скорость частиц в неподвижной системе координат.

v — скорость частиц относительно тела.

$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$ — функция вероятностей.

$Q(a) = \left(\sqrt{\pi} + 2i \int_0^a e^{x^2} dx \right) e^{-a^2}$.

Y — интеграл столкновений.

I — интеграл столкновений с телом.

$i_{n, i, e}$ — поток нейтральных частиц, ионов, электронов на единицу площади.

$J = \int j dS$ — полный поток частиц.

\hat{j} — плотность электрического тока.

φ — потенциал поля.

φ_0 — потенциал тела.

$\varphi^* = \frac{|\varphi| e}{\chi T}$ — безразмерное значение потенциала.

Г Л А В А I

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга, как уже говорилось, посвящена теоретическому исследованию ряда явлений, возникающих при движении тел (искусственных спутников и ракет) в верхней ионосфере или в межпланетной среде. Поэтому, прежде чем перейти к изложению существа изучаемых вопросов, представляется целесообразным привести здесь некоторые справочные данные о свойствах этих сред. Эти данные нами используются, в частности, при различных оценках и численных расчетах.

§ 1. Данные о свойствах верхней ионосферы

Верхняя ионосфера, как известно, представляет собой весьма разреженный, частично ионизованный газ (плазму). Концентрация нейтральных частиц, молекул и атомов резко убывает в ней с увеличением высоты: от 10^{13} *частиц/см³* на высоте 100 км до $\sim 10^5$ *частиц/см³* на высоте 1000 км (см. табл. I). Концентрация ионов и электронов на не слишком больших высотах сильно изменяется в зависимости от времени года и даже в течение суток. С увеличением высоты она убывает гораздо медленнее, чем концентрация молекул. Соответственно степень ионизации ионосферы резко растет с увеличением высоты. На высоте 100 км плазма еще очень слабо ионизована — отношение N_0/n_0 составляет всего лишь $10^{-8} \div 10^{-10}$, на высоте 300 км отношение $N_0/n_0 \sim 10$, а на высоте в 3000 км отношение N_0/n_0 уже $\sim 10^4$. Здесь атмосфера фактически уже полностью ионизована.

Молекулярный состав атмосферы до высот примерно в 100 км мало изменяется. С ростом высоты сначала

Таблица I*

Высота, км	r_0 , см-3	N_0 , см-3	T°	N_0/η_0	M_0	$H_0, \text{э}$
Ионосфера						
100	(2,5-4) · 10 ¹³	(2-100) · 10 ³	~230	10 ⁻¹⁰ ÷ 10 ⁻⁸	28	0,49
200	3 · 10 ¹⁰	(3-50) · 10 ⁴	450-800	10 ⁻⁵ ÷ 10 ⁻⁶	} 24	0,45
300	3 · 10 ⁹	(1-20) · 10 ⁵	1000	10 ⁻³ ÷ 10 ⁻⁴		0,44
400	5 · 10 ⁸	(5-15) · 10 ⁵	1500	10 ⁻² ÷ 10 ⁻³	} ~20	0,40
500	5 · 10 ⁷	(4-10) · 10 ⁵	~1800	10 ⁻² ÷ 10 ⁻¹		0,37
700	6 · 10 ⁶	(2-5) · 10 ⁵	~2000	~10 ⁻¹	} ~16	0,35
1000	10 ⁵	10 ⁵	~3000	~1		0,33
3000	1 (?)	(5-7) · 10 ³	~4000	~10 ⁴	~14	0,16
Межпланетный газ						
(3-4) R ⁰	?	(3-5) 10 ²	5 · 10 ³ (?)	?	1	(5-15) · 10 ⁻³
100 · R ⁰	?	10 ²	—	—	1	(5-10) · 10 ⁻⁴
Космическое пространство						
—	—	~1	10 ⁴ (?)	?	1	10 ⁻⁵

*) R⁰ — радиус Земли, n_0 — концентрация нейтральных частиц; N_0 — концентрация электронов, ионов; T — температура в градусах Кельвина; H_0 — напряженность магнитного поля Земли в эрстедах для случая, когда $H_0 \approx 0,5$ э около земной поверхности; M_0 — средний молекулярный вес нейтральных частиц, ионов.

диссоциируют молекулы кислорода, а затем — молекулы азота. В этой области ионосферы появляются также ионы окиси азота. На больших удалениях от Земли существенно возрастает относительная концентрация водорода.

Средняя температура в ионосфере возрастает с высотой примерно от 230 градусов на высоте 100 км до 3÷4 тысяч градусов на больших высотах. Существенное влияние на физические процессы в ионосфере оказывает магнитное поле Земли. Величина его медленно убывает с ростом высоты (см. табл. I).

В настоящее время далеко еще не ясно, где, собственно, кончается ионосфера, т. е. газовая оболочка,двигающаяся вместе с Землей, и где начинается межпланетная среда. Часто считают, что межпланетная среда начинается там, где основной составной тяжелой частицей плазмы являются протоны (ионизованный водород). Однако высота и этой границы до сих пор также неизвестна.

По разным данным можно полагать, что на расстоянии в 3—4 радиуса Земли мы уже имеем межпланетный газ. Поэтому ожидаемые свойства среды на этих расстояниях от Земли и в космическом пространстве нами также приводятся в таблицах.

Физические процессы в ионосферной плазме характеризуются целым рядом параметров. Прежде всего, это обычные газокинетические параметры: длина свободного пробега, средняя тепловая скорость, частота столкновений. В плазме всегда присутствуют по крайней мере три сорта частиц: нейтральные частицы, ионы и электроны. Соответственно каждый из них характеризуется своей длиной пробега, средней скоростью, частотой столкновений (табл. II). Другая группа параметров, относящихся лишь к заряженным частицам, характеризует электромагнитные процессы. Это плазменная (ленгмюровская) частота ω_0 , дебаевский радиус D , частота ларморовского вращения, средний ларморовский радиус электронов и ионов. Численные значения всех этих величин для разных высот в ионосфере приведены в табл. III.

Из табл. II видно, что длина пробега нейтральных частиц в верхней ионосфере весьма велика. Даже на сравнительно небольшой высоте в 200 км длина пробега $l_n \sim 80$ м. С ростом высоты l_n возрастает чрезвычайно резко

Таблица II *

Высота, км	l_n , см	l_e, i , см	v_n , сек ⁻¹	$v_e(n+1)$ сек ⁻¹	v_{ii} , сек ⁻¹	v_n, i , см/сек	v_e , см/сек
Ионосфера							
100	101	50	4·10 ³	2·10 ⁵	10 ³	4·10 ⁴	9,4·10 ⁶
200	8·10 ³	9·10 ³	9	2·10 ³	10 ²	7·10 ⁴	1,5·10 ⁷
300	10 ⁵	7·10 ³	0,9	3·10 ³	15	9·10 ⁴	1,9·10 ⁷
400	7·10 ⁵	2·10 ⁴	~10 ⁻¹	10 ³	7	10 ⁵	2,2·10 ⁷
500	6·10 ⁶	4·10 ⁴	~10 ⁻²	7·10 ²	3	1,4·10 ⁵	2,5·10 ⁷
700	5·10 ⁷	10 ⁵	~10 ⁻³	2·10 ²	1	1,6·10 ⁵	2,9·10 ⁷
1000	8·10 ⁸	8·10 ⁵	~10 ⁻⁴	40	~0,2	2,0·10 ⁵	3,4·10 ⁷
3000	2·10 ¹⁴	3·10 ⁶	~10 ⁻⁹	14	~0,1	2,3·10 ⁵	3,9·10 ⁷
Межпланетный газ							
(3—4) R ^o	—	3·10 ⁹	~0	~10 ⁻²	~5·10 ⁻⁴	~2·10 ⁶	4,4·10 ⁷
Космическое пространство							
—	—	7·10 ¹¹	~0	~10 ⁻⁴	~3·10 ⁻⁶	~3·10 ⁶	5,4·10 ⁷

*) v_n — число столкновений между нейтральными частицами; $v_e(n+i)$ — число столкновений электронов с ионами и нейтральными частицами; v_i — числостолкновений между ионами; v_n, i — тепловая скорость нейтральных частиц, ионов; v_e — тепловая скорость электронов; l_n — длина свободного пробега нейтральных частиц; l_e, i — длина свободного пробега электронов, ионов.

Таблица I.1)

Высота, км	ω_0 , сек ⁻¹ .	D, см	ω_H , сек ⁻¹	ω_H/ω_0	Q_{He} , см	Ω , сек ⁻¹	Q_H , см
Ионосфера							
100	$(3 \div 20) \cdot 10^6$	1	$8 \cdot 10^6$	~ 1	~ 1	}	$2 \cdot 10^2$
200	$(1 \div 4) \cdot 10^7$	$0,2 \div 1$	$7,9 \cdot 10^6$	$\sim 0,3$	~ 2		}
300	$(2 \div 8) \cdot 10^7$	$0,4 \div 0,7$	$7,7 \cdot 10^6$	}	~ 3	}	
400	$(4 \div 7) \cdot 10^7$	$0,2 \div 0,4$	$7,3 \cdot 10^6$				$\sim 0,1$
500	$6 \cdot 10^7$	$0,3 \div 0,6$	$7 \cdot 10^6$	}	~ 4	}	$8,2 \cdot 10^2$
700	$(2 \div 4) \cdot 10^7$	$0,4 \div 0,7$	$6,4 \cdot 10^6$				$\sim 0,2$
1000	$2 \cdot 10^7$	1	$5,7 \cdot 10^6$	$\sim 0,3$	~ 14	}	$\sim 2 \cdot 10^3$
3000	$5 \cdot 10^6$	4	$2,8 \cdot 10^6$	$\sim 0,5$			$\sim 10^2$
Межпланетный газ							
$(3-4) R^0$	$\sim 10^6$	30	$(1-3) \cdot 10^5$	$\sim 0,2$	$2 \cdot 10^2$	~ 50	$4 \cdot 10^4$
$100 R^0$	$\sim 5 \cdot 10^5$	50	$\sim 2 \cdot 10^4$	$\sim 3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^3$	~ 5	$4 \cdot 10^5$
Космическое пространство							
—	$\sim 5 \cdot 10^4$	700	$\sim 2 \cdot 10^2$	$\sim 3 \cdot 10^{-3}$	$\sim 3 \cdot 10^5$	$\sim 5 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^7$

*) ω_0 — частота плазменных колебаний; D — дебаевский радиус; ω_H — ларморовская частота электронов; Q_{He} — ларморовский радиус электронов; Ω — ларморовская частота ионов; Q_H — ларморовский радиус ионов.

и на высоте в 300 км $l_n \sim 1$ км, а на высоте в 1000 км $l_n \sim 8000$ км. Таким образом, на расстояниях от поверхности Земли порядка радиуса и меньше l_n существенно зависит от направления. Длина пробега ионов и электронов также достаточно велика; так, на высоте в 200 км $l_e \sim 0,1$ км, а на высоте 1000 км $l_e \sim 8$ км. Однако с высотой l_e изменяется гораздо медленнее. Причина этого состоит в том, что свободный пробег электронов и ионов на высотах, превышающих 200 км, определяется уже столкновениями между заряженными частицами, а их концентрация и тепловая скорость, как видно из табл. I, II, изменяются с высотой менее резко, чем концентрация нейтральных частиц.

Тепловые скорости нейтральных частиц и ионов имеют один и тот же порядок величины. Они возрастают с высотой благодаря увеличению температуры и уменьшению средней массы частиц, от $M_0 \sim 24$ на высоте порядка 200 км до $M_0 \sim 14$ на высоте ~ 1000 км. Тепловая скорость электронов в общем весьма велика — порядка 100—500 км/сек.

Дебаевский радиус, т. е. расстояние, на котором, как известно, из-за поляризации плазмы экранируется покоящийся электрический заряд, в ионосфере весьма мал. Он изменяется в пределах 0,1—4 см с ростом высоты от 100 до 3000 км. В межпланетном и межзвездном газе дебаевский радиус достигает нескольких метров.

Радиус ларморовского вращения электрона или иона в магнитном поле Земли характеризует влияние магнитного поля на различные процессы в плазме. Средний ларморовский радиус электронов в ионосфере невелик, порядка нескольких сантиметров; он возрастает с увеличением высоты и в межпланетном газе равен нескольким метрам. Средний радиус ларморовского вращения ионов всегда является довольно большой величиной; он изменяется в ионосфере в пределах 2—20 м.

В областях, находящихся на значительных расстояниях от поверхности Земли, имеется большое количество быстрых частиц, образующих радиационные пояса. Данные о количестве быстрых частиц в радиационных поясах и их энергии в настоящее время еще неполны. Внутренний радиационный пояс начинается на высотах 400—1000 км и простирается до высоты $\sim 10\,000$ км. В обла-

сти наибольшей интенсивности внутреннего пояса радиации поток протонов с энергиями больше 1 Мэв составляет $3 \cdot 10^4 \text{ протон/см}^2 \cdot \text{сек}$. Поток электронов с энергией свыше 20 кэв во внутреннем поясе порядка $10^{10} \text{ электр/см}^2 \cdot \text{сек}$. Внешний радиационный пояс начинается на высотах порядка $1,5\text{—}2$ радиусов Земли и простирается до высот в $10\text{—}14$ радиусов Земли. Максимальная интенсивность приходится в этом поясе на высоты в $3\text{—}4$ радиуса Земли. Здесь поток электронов с энергией выше 20 кэв порядка $10^8\text{—}10^9 \text{ электр/см}^2 \cdot \text{сек}$.

Интенсивность падающего на Землю электромагнитного излучения Солнца достигает в области частот, ионизирующей верхнюю ионосферу ($800\text{—}1100 \text{ \AA}$), примерно $0,5\text{—}1 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек}$. Такого же порядка поток рентгеновского излучения Солнца.

Подробные сведения о структуре и свойствах верхней ионосферы, методах ее исследования и т. д. читатель может найти в монографиях, специально посвященных ионосфере [13, 14] и в периодической литературе.

§ 2. Особенности взаимодействия движущихся тел с ионосферой

Характерный размер ракет или спутников, движущихся в верхней ионосфере, порядка одного или нескольких метров. Длина свободного пробега частиц здесь, как видно из табл. II, гораздо больше. Это означает, как уже указывалось выше, что при рассмотрении процессов в окрестности движущегося тела плазму нельзя рассматривать как сплошную среду, т. е. для описания таких эффектов нельзя использовать гидро- или аэродинамику, применяемую обычно в земных условиях или в нижней части ионосферы. Необходимо учитывать уже, что плазма состоит из совокупности отдельных частиц. Следовательно, при описании процессов в окрестности движущихся тел в ионосфере нужно использовать кинетическую теорию.

Столкновения между частицами в общем не оказывают существенного влияния на возмущения концентрации частиц в окрестности тела, размеры которого много меньше длины пробега. Они начинают сказываться лишь на больших расстояниях от тела, а именно на расстояниях

порядка длины пробега*). При столкновениях отраженные от тела частицы могут в принципе ионизовать и разогреть газ перед телом. Однако энергия отраженных нейтральных частиц и ионов лишь порядка 10—20 эв, а их скорость много меньше, чем скорость электронов в атомах. При таком условии вероятность ионизации мала**). Разогрев газа отраженными частицами, как легко видеть, мало существен при выполнении условия

$$l_n \gg \frac{V_0}{v_n} R_0, \quad (1.1)$$

где $v_n = \sqrt{2\kappa T/M}$ — тепловая скорость молекул газа, R_0 — размер тела. В самом деле, суммарная энергия частиц, отраженных за время Δt от поверхности тела, по порядку величины, очевидно, равна

$$\mathcal{E}_{\text{отр}} \sim MV_0^2 \cdot n_0 R_0^2 (V_0 \Delta t).$$

Эти частицы разлетаются без столкновений на расстояние порядка длины пробега l_n . Следовательно, они затормаживаются в объеме $\sim l_n^2 V_0 \Delta t$, если предположить, что $V_0 \Delta t \gg l_n$. Полное число частиц в этом объеме порядка $n_0 l_n^2 (V_0 \Delta t)$. Следовательно, в среднем энергия частиц невозмущенного газа из-за столкновений с отраженными частицами возрастает на величину $\Delta \mathcal{E} \sim MV_0^2 \frac{R_0^2}{l_n^2}$. Условие $\Delta \mathcal{E} \ll \kappa T$ и приводит к (1.1). Для тел, размеры которых порядка 100 см, условие (1.1) хорошо выполняется в ионосфере на высотах, превышающих 200 км.

Характерный размер интересующих нас тел в ионосфере, как видно из табл. IV, велик по сравнению

*) Столкновения играют определяющую роль для частиц, движущихся по финитным орбитам вокруг тела. Такое движение могут совершать заряженные частицы (электроны или ионы), притягиваемые электрическим полем тела. Оно возможно, однако, лишь в окрестности тела, размеры которой не превосходят дебаевского радиуса (см. табл. III). Подробно эти вопросы рассматриваются в гл. VIII.

**) Полученные в работе [15] большие значения дополнительной ионизации объясняются тем, что в ней ошибочно принято в качестве сечения ионизации газокинетическое сечение 10^{-16} см². На самом деле, по-видимому, сечение ионизации в указанных условиях не превосходит 10^{-40} см² (точные данные отсутствуют).

Таблица IV

Высо- та, км	$V_0, \frac{\text{см}}{\text{сек}}$	$V_0/v_{n,i}$	V_0/v_e	D/R_0	Q_H/R_0	Q_{He}/R_0			
Ионосфера									
100	} $\sim 8 \cdot 10^5$	} ~ 10	0,1	} 10^{-2}	} 2	10^{-2}			
200			$6 \cdot 10^{-2}$			4	$2 \cdot 10^{-2}$		
300			} $4 \cdot 10^{-2}$	} $(1-10) \cdot 10^{-3}$	} 5,5	} $3 \cdot 10^{-2}$			
400							$3 \cdot 10^{-2}$	8	
500			} $2 \cdot 10^{-2}$	} $4 \cdot 10^{-2}$	} 10	} $4 \cdot 10^{-2}$	} $4 \cdot 10^{-2}$		
700								5	} $5 \cdot 10^{-2}$
1000								4	
3000	3,5								
Межпланетный газ									
$(3-4)R^0$	$\sim 6 \cdot 10^5$	$\sim 0,3$	$\sim 10^{-2}$	0,3	$4 \cdot 10^2$	~ 2			
$100R^0$	$\sim 2 \cdot 10^5$	$\sim 0,1$	$\sim 5 \cdot 10^{-3}$	0,5	$4 \cdot 10^3$	~ 20			
Космическое пространство									
—		$\sim 3 \cdot 10^2$	$\sim 2 \cdot 10^{-3}$	7	$6 \cdot 10^5$	$\sim 3 \cdot 10^3$			

с дебаевским радиусом. Это, в частности, означает, что на распределение электрического поля и заряженных частиц около тела большое влияние оказывает дебаевская экранировка. Далее, сравнивая характерную скорость тел с тепловой скоростью ионов или молекул $v_{n,i}$ (табл. IV), мы убеждаемся, что в ионосфере скорость тела V_0 много больше, чем тепловые скорости нейтральных частиц и ионов. В межпланетном газе это условие может уже не выполняться. Поэтому условия, в которых находится движущееся тело при переходе в межпланетную среду, сильно изменяются.

Мы видим, что в ионосфере наиболее интересен случай, когда размер тела меньше длины свободного пробега и больше дебаевского радиуса, а скорость тела больше, чем тепловая скорость нейтральных частиц или ионов, и меньше, чем тепловая скорость электронов. Именно этот случай и рассмотрен ниже более подробно.

Сделаем также некоторые замечания по вопросу об излучении волн движущимися в ионосфере телами. Поскольку скорость тел сверхзвуковая ($V_0 \gg v_{n,i}$), то они могут излучать звуковые волны [16]. Однако эти волны слабо затухают, если их длина больше длины свободного пробега частиц. Поскольку при этом размер тела много меньше длины свободного пробега, то амплитуда слабо затухающих звуковых волн, излучаемых при движении тела, оказывается вообще малой. В области длин волн, меньших длины пробега, могли бы возбуждаться ионные плазменные волны. Однако их затухание в изотермической плазме очень велико (см. [17]). Электронные плазменные волны, вообще говоря, не должны генерироваться телом, так как скорость тела много меньше тепловой скорости электронов, а следовательно, много меньше и скорости соответствующих волн. Правда, здесь может играть роль рассеяние электрического поля тела на неоднородностях, которое в принципе также может привести к некоторому слабому возбуждению плазменных и даже электромагнитных волн [18]. Наряду с этим следует также иметь в виду, что из-за наличия магнитного поля Земли вопрос как о спектре возбуждаемых волн, так и об их затухании существенно усложняется; в частности, может оказаться выделенным случай продольного движения тела. Поэтому до создания последовательной теории делать какие-либо окончательные, даже качественные выводы по поводу излучения волн движущимся телом вряд ли возможно.

Значительный интерес представляет проблема устойчивости возмущенной зоны вблизи движущегося тела. Этот вопрос, как и в обычной гидродинамике, сводится к исследованию характера развития малых отклонений от стационарного распределения: если эти отклонения нарастают во времени, то рассматриваемая область неустойчива, если же любые возмущения затухают, то она устойчива. Такое исследование в настоящее время еще не произведено, поэтому мы можем здесь привести лишь некоторые общие соображения.

Неустойчивости различных неравновесных состояний плазмы бывают двух основных типов. Во-первых, существуют неустойчивости, связанные с отличием распределения частиц плазмы по скоростям от максвелловского.

Если немаксвелловским является распределение электронов, то плазма будет неустойчива в том случае, когда это распределение является немонотонным, т. е. когда функция распределения по скоростям будет иметь кроме максимума при скорости, равной нулю, и другие максимумы. Неустойчивости такого типа называют «пучковыми», поскольку характерным примером их является неустойчивость электронного пучка в плазме [45]. В этом случае функция распределения имеет дополнительный максимум в точке, соответствующей упорядоченной скорости пучка. Если немаксвелловским является распределение по скоростям ионов, например, если в плазме имеется ионный пучок, то неустойчивость возникает только тогда, когда упорядоченная скорость ионов относительно электронов делается порядка тепловой скорости электронов [46]. В нашем случае неустойчивости такого «пучкового» типа, вероятно, отсутствуют. Это связано с тем, что скорость движения тела много меньше тепловой скорости электронов, поэтому распределение электронов по скоростям почти не возмущается. Распределение же ионов возмущается достаточно сильно, однако максимальные скорости неравновесных ионов (например, ионов, отраженных от тела) оказываются порядка скорости тела, т. е. все же гораздо меньшими, чем тепловая скорость электронов. Особым является случай металлического тела или зонда, на который подан положительный потенциал. В этом случае тело притягивает электроны, и в плазме появляется направленный к телу электронный поток, что в определенных условиях приводит к неустойчивости [67].

Описанный выше тип неустойчивости свойствен однородной в пространстве плазме. В последнее время были изучены неустойчивости другого типа, связанные с неоднородностью в пространственном распределении концентраций частиц и температуры [47—49]. Оказалось, что неоднородная плазма в магнитном поле неустойчива. Начальные отклонения от стационарного состояния приводят в ней к нарастанию различного типа волн. В нашем случае плазма существенно неоднородна. Однако результаты работ [47—49] непосредственно применить к возмущенной области около тела нельзя. Это связано, во-первых, с тем, что тело быстро движется, так что

исследуемое на устойчивость распределение является нестационарным в системе координат, где плазма покоится. Такая нестационарность, вероятно, оказывает стабилизирующее влияние, поскольку не все возмущения успевают нарасти за время пролета тела. Здесь особым является движение тела вдоль магнитного поля. В этом случае, мы как увидим ниже, возмущенная область оказывается очень длинной, поэтому распределение изменяется со временем очень медленно, т. е. почти стационарно. Можно думать, что в этом случае неустойчивость действительно существует. Следует также иметь в виду, что уравнения в работах [47—49] выведены в предположении, что характерный размер неоднородности в плазме велик по сравнению с ларморовским радиусом ионов. В нашем случае это условие обычно не выполняется.

Если в результате дальнейших исследований окажется, что возмущенная область неустойчива, то это будет означать, что сзади тела образуется область беспорядочных нестационарных колебаний плазмы — «турбулентная дорожка». Такой турбулентный след будет излучать электромагнитный «шум» с частотами порядка характерных частот тех колебаний, которые оказываются неустойчивыми. Кроме того, турбулентность приведет к аномальному увеличению коэффициента диффузии плазмы поперек магнитного поля [50]. В результате будет происходить более быстрое рассасывание следа тела, т. е. уменьшится длина возмущенной области.

В заключение этого раздела отметим, что важное значение имеет вопрос о взаимодействии частиц плазмы, электромагнитного излучения Солнца и корпускулярных потоков с поверхностью тела. Процессы эти весьма разнообразны. Они существенно зависят от свойств поверхности: материала, температуры и способа обработки. Изучены эти явления еще совершенно недостаточно, особенно теоретически. Для надежного теоретического расчета они в большинстве случаев слишком сложны. С другой стороны, весьма трудно, а подчас вообще невозможно осуществлять в лаборатории те условия, которые имеют место в ионосфере. Результаты же исследований этих эффектов непосредственно на спутниках до сих пор нам неизвестны. По указанным причинам мы не

будем здесь останавливаться на этом круге вопросов, отсылая читателя к обзору [12], в котором подводятся итоги известным из мировой литературы экспериментальным данным, посвященным этой проблеме. В этой статье весьма обстоятельно изложены многие из указанных вопросов специально в применении к движению тел в ионосфере и межпланетной среде. Укажем также на монографии [19, 20], в которых приводится ряд сведений о взаимодействии частиц с поверхностью тел.

§ 3. Основные уравнения

Для изучения возмущений, вызываемых в среде в окрестности движущегося тела, мы должны воспользоваться методами кинетической теории газов. Это объясняется тем, что длины свободного пробега в интересующей нас части ионосферы значительно больше размеров тела, т. е.

$$l_n, l_i, l_e \gg R_0, \quad (1.2)$$

где индексы n , i и e относятся к нейтральной частице, иону и электрону.

Рассмотрим последовательно соответствующие уравнения.

а. Уравнение для функции распределения нейтральных частиц. Нейтральные частицы (молекулы, атомы) будут описываться функцией распределения *)

$$f_n(r, v, t),$$

смысл которой состоит в следующем. Произведение f_n на элемент объема в конфигурационном пространстве — в пространстве скоростей и координат, — т. е.

$$f_n(r, v, t) d^3v d^3r$$

(где $d^3v = dv_x dv_y dv_z$, $d^3r = dx dy dz$), есть число частиц, координаты которых лежат между x и $x + dx$, y и $y + dy$, z и $z + dz$, а компоненты скоростей находятся между v_x и $v_x + dv_x$, v_y и $v_y + dv_y$, v_z и $v_z + dv_z$. Через функцию f_n

*) Разумеется, если в среде имеются нейтральные частицы разного сорта (например, в ионосфере N_2 , O_2 , O , N , H и т. д.), то каждый из них описывается своей функцией распределения f_n .

выражаются концентрация частиц n и другие средние величины

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v.$$

Мы будем вести рассмотрение в системе координат, движущейся вместе с телом. При этом \mathbf{v} есть скорость частицы относительно тела. Она связана со скоростью \mathbf{u} в неподвижной системе координат формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{V}_0,$$

где \mathbf{V}_0 — скорость тела. Поскольку движение тела можно считать прямолинейным и равномерным, в нашей системе координат картина является стационарной и функция f_n не зависит от времени

$$f_n = f_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (1.3)$$

Функция распределения, как известно, подчиняется уравнению Больцмана

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{M} \mathbf{F} \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{v}} = Y, \quad (1.4)$$

где M — масса молекулы, \mathbf{F} — действующая на нее сила, Y — интеграл столкновений. Однако до тех пор, пока в задаче существенны расстояния, меньшие чем l_n , можно в силу условия (1.2) пренебречь влиянием столкновений на функцию распределения, т. е. положить $Y = 0$. Кроме того, вне тела на нейтральные частицы не действуют никакие силы. Далее, из (1.3) видно, что $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Поэтому уравнение (1.4) для всего пространства вне тела сводится просто к уравнению

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (1.5)$$

На больших расстояниях от тела газ невозмущен, так что при $r \rightarrow \infty$ функция f_n должна переходить в функцию распределения Максвелла $f_0(\mathbf{u})$:

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f_0(\mathbf{v} + \mathbf{V}_0) &= n_0 \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{M\mathbf{u}^2}{2kT} \right\} = \\ &= n_0 \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{M(\mathbf{v} + \mathbf{V}_0)^2}{2kT} \right\}, \quad (1.6) \end{aligned}$$

где n_0 — невозмущенная концентрация молекул в ионосфере, T — температура газа, κ — постоянная Больцмана. Граничное условие (1.6) в случае отсутствия соударений между частицами может вызвать некоторое недоумение, поскольку обычно установление максвелловского распределения в газе связано с соударениями. В отсутствие соударений, однако, столкнувшиеся с телом частицы быстро разлетаются. Поэтому на достаточно большом расстоянии от тела очень мало тех частиц, распределение которых возмущено телом, так что общее распределение близко к максвелловскому. Электрическое поле тела также достаточно быстро убывает с расстоянием и не может изменить распределение частиц на бесконечности. Разумеется, под бесконечно большими расстояниями в (1.6) следует понимать расстояния, большие по сравнению с возмущенной областью около тела, но много меньшие, чем длина свободного пробега.

б. Граничные условия на поверхности тела. Граничные условия на поверхности тела определяются характером отражения или рассеяния частиц этой поверхностью и представляют собой интегральное соотношение, связывающее на поверхности тела функцию распределения падающих на поверхность частиц с функцией распределения рассеянных частиц. При этом, если газ достаточно разрежен, это соотношение будет линейным. Падающие на поверхность частицы характеризуются тем, что для них $nv < 0$, где n — внешняя нормаль к поверхности тела, поскольку, разумеется, на поверхность падают лишь частицы, летящие по направлению к поверхности. Наоборот, для рассеянных частиц $nv > 0$.

Пусть $\omega(v, v_1, r_S)$ есть вероятность того, что попавшая со скоростью v_1 в точку r_S поверхности частица приобретает после рассеяния скорость v . Тогда очевидно, что поток рассеянных частиц с единицы поверхности будет выражаться через число падающих частиц формулой

$$- \int_{(nv_1) < 0} \omega(v, v_1, r_S)(nv_1) f(v_1) d^3v_1, \quad (1.7)$$

где r_S — точка на поверхности тела. С другой стороны, этот поток равен

$$f(v)(nv). \quad (1.8)$$

Поэтому искомое граничное соотношение имеет вид

$$(nv)f(r_S, v) = - \int_{(nv_1) < 0} \omega(v, v_1, r_S)(nv_1)f(r_S, v) d^3v_1, \quad (1.9)$$

где $(nv) > 0$.

Часто удобно решать кинетическое уравнение без граничных условий на теле, т. е. в неограниченном пространстве, а наличие поверхности учитывать добавлением в правую часть уравнения специального члена, отличного от нуля только на этой поверхности. Если поверхность тела задается уравнением

$$F(r_S) = 0, \quad (1.10)$$

то общий вид такого члена есть

$$A(r_S, v) \delta(F), \quad (1.11)$$

где $\delta(F)$ — дельта-функция и $A(r_S, v)$ — функция, описывающая взаимодействие частиц с поверхностью тела.

Раскроем смысл функции $A(r_S, v)$. Для этого учтем, что левая часть кинетического уравнения есть полная производная функции распределения по времени. Поэтому интеграл от выражения (1.11) по всему пространству есть изменение числа молекул, имеющих скорость v , в единицу времени. Интегрирование (1.11) по объему можно свести к интегрированию по $dS dn$, где dS — элемент поверхности тела, а dn — элемент длины в направлении нормали к поверхности. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int A(r_S, v) \delta(F) d^3r &= \int A(r_S, v) \delta(F) dS dn = \\ &= \int A(r_S, v) \delta(F) \frac{dF}{|\nabla F|} dS = \oint \frac{A(r_S, v)}{|\nabla F|} dS. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из (1.12) видно, что $\frac{A}{|\nabla F|}$ есть изменение в единицу времени числа частиц, имеющих скорость v из-за столкновений с единицей поверхности тела в точке r_S . Это число частиц равно, очевидно, разности между определяемым выражением (1.7), числом частиц, приобретающих в результате рассеяния скорость v , и числом падающих с этой

скоростью частиц, определяемым формулой (1.8). Поэтому

$$\frac{A}{|\nabla F|} = \begin{cases} - \int_{(nv_1) < 0} \omega(v, v_1, r_S) (nv_1) f(r_S, v_1) d^3v_1 & \text{при } nv > 0; \\ (nv) f(r_S, v) & \text{при } nv < 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Следовательно,

$$A(r_S, v) = \begin{cases} \int_{(v\nabla F)_S < 0} \omega(v, v_1, r_S) v_1 f(r_S, v_1) d^3v_1 & \text{при } (v\nabla F) > 0; \\ -vf(r_S, v) & \text{при } (v\nabla F) < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Здесь знак функции F выбран так, чтобы направление ∇F совпало с направлением внешней нормали n ; $(v\nabla F)_S$ означает, что величина $v\nabla F$ берется на поверхности S .

Рассмотрим теперь конкретный вид функции ω в различных случаях. Если имеет место зеркальное отражение частицы от поверхности, т. е. если угол падения частицы на поверхность (угол между v_1 и n) равен углу ее отражения (углу между v и n), то при рассеянии нормальная к поверхности компонента скорости частицы просто изменяет знак, так что

$$\omega(v, v_1, r_S) = \delta[v_1 - v + 2(vn)n], \quad (1.15)$$

где n — нормаль к поверхности в точке r_S . Функция $A(r_S, v)$ в этом случае имеет вид

$$A(r_S, v) = \begin{cases} (\nabla F v) f(r_S, v - 2(vn)n) & \text{при } (nv)_S > 0; \\ -(\nabla F v) f(r_S, v) & \text{при } (nv)_S < 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

В частности, для сферической поверхности $F = r - R_0$ и при зеркальном отражении член в правой части кинетического уравнения (1.5), описывающий взаимодействие частиц с поверхностью тела, принимает вид

$$A(r_S, v) \delta(F) = \begin{cases} \frac{rv}{r} \delta(r - R_0) f\left(r, v - \frac{2r(rv)}{r^2}\right) & \text{при } rv > 0; \\ \frac{rv}{r} \delta(r - R_0) f(r, v) & \text{при } rv < 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Если частицы при соударении с поверхностью тела рассеиваются диффузно, т. е. если поверхность тела сильно шероховатая, так что частица может с одинаковой вероятностью отразиться под любым углом к поверхности, то

$$\omega(v, v_1, r_S) = \frac{1}{2\pi v^2} \delta(v - v_1) \text{ при } nv_1 < 0. \quad (1.18)$$

Здесь принято, что рассеяние упругое, т. е. величина скорости частицы при отражении не меняется. Функция $A(r_S, v)$ в этом случае имеет вид

$$A(r_S, v) = \begin{cases} -\frac{\nabla F}{2\pi} \int_{(\nabla F v_1) < 0} do_1 v_1 f(r_S, v_1) & \text{при } (v \nabla F) > 0; \\ (v \nabla F) f(r_S, v) & \text{при } (v \nabla F) < 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

где do_1 — элемент телесного угла в направлении v_1 . Если рассеяние частиц при диффузном отражении не является упругим и частица может отдавать энергию поверхности, т. е., как говорят, имеет место частичная аккомодация, то

$$\omega(v, v_1, r_S) = \frac{1}{2\pi} p(v, v_1) \text{ при } nv_1 < 0, \quad (1.20)$$

где функция $p(v, v_1)$ описывает вероятность частичной аккомодации. В предельном случае, когда частицы после столкновения с поверхностью приходят с ней в тепловое равновесие, т. е. при полной аккомодации

$$p(v, v_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T_0} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{Mv^2}{2\kappa T_0} \right], \quad (1.21)$$

где T_0 — температура поверхности тела.

Если частицы полностью поглощаются поверхностью, то $\omega = 0$ и

$$A(r_S, v) = \begin{cases} 0 & \text{при } v \nabla F > 0; \\ -(v \nabla F) f & \text{при } v \nabla F < 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

При частичном поглощении правая часть уравнения имеет по-прежнему вид (1.14). Изменяется лишь норми-

ровка функции ω . Именно, имеет место соотношение

$$\int \omega(v, v_1, r_S) d^3v = R(v_1, r_S),$$

где R — коэффициент отражения, т. е. полная вероятность отражения частицы от поверхности тела (всегда $0 < R \leq 1$). При отсутствии поглощения $R \equiv 1$. Возможность испускания частиц поверхностью из-за ее испарения и разрушения под влиянием столкновений с другими частицами также может быть учтена с помощью функции ω . При этом интеграл в последней формуле может стать больше единицы.

в. Уравнения для функций распределения электронов и ионов и для электрического поля. Распределения ионов и электронов описываются функциями распределения $f_i(r, v)$ и $f_e(r, v)$. Кинетические уравнения для функций f_i и f_e отличаются от уравнения для функции f_n тем, что в них учитывается сила Лоренца, действующая на заряженную частицу:

$$v \frac{\partial f_i}{\partial r} + \frac{e}{M_i} \left(E + \frac{1}{c} [v + V_0, H] \right) \frac{\partial f_i}{\partial v} = A_i(r, v) \delta(F) + Y_i, \quad (1.23)$$

$$v \frac{\partial f_e}{\partial r} - \frac{e}{m} \left(E + \frac{1}{c} [v + V_0, H] \right) \frac{\partial f_e}{\partial v} = A_e(r, v) \delta(F) + Y_e. \quad (1.24)$$

Здесь e — заряд иона *), $-e$ — заряд электрона, M_i — масса иона, m — масса электрона, Y_i и Y_e — интегралы столкновений для ионов и электронов, $A_i(r, v)$ и $A_e(r, v)$ — функции, характеризующие взаимодействие ионов и электронов с поверхностью тела. Функции $A_i(r, v)$, $A_e(r, v)$ и $A_n(r, v)$, разумеется, могут существенно различаться. В частности, ион, имеющий не слишком высокую энергию, обычно имеет весьма большую вероятность захватить электрон при столкновении с поверхностью, т. е. превратиться в нейтральную частицу. Электроны с большой вероятностью могут поглощаться поверхностью. Поэтому ниже мы будем часто рассматривать случай,

*) Для простоты принимается, что все ионы однозарядны и одного сорта. Обобщение на случай нескольких типов ионов очевидно.

когда все заряженные частицы поглощаются при столкновении с поверхностью тела. В этом случае функции $A_i(r, v)$ и $A_e(r, v)$ имеют вид (1.22)*. Иногда будет учитываться частичное отражение ионов и электронов.

На большом расстоянии от тела.— в невозмущенной плазме — функции распределения ионов и электронов, естественно, максвелловские:

$$f_i = f_{0i} = N_0 \left(\frac{M_i}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{M_i(v+V_0)^2}{2\kappa T} \right\}, \quad (1.25)$$

$$f_e = f_{0e} = N_0 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m(v+V_0)^2}{2\kappa T} \right\}, \quad (1.26)$$

где N_0 — концентрация ионов и электронов в невозмущенной плазме.

Важно отметить, как указывалось выше в § 2, что нас интересует лишь случай, когда скорость движения тела много меньше средней тепловой скорости электронов, т. е.

$$V_0 \ll v_e = \sqrt{\frac{2\kappa T}{m}}. \quad (1.27)$$

Кроме того, обычно тело заряжается отрицательно, так что потенциал электрического поля на поверхности $\varphi_0(r_S)$ удовлетворяет условию

$$-e\varphi_0(r_S) \gg \kappa T \quad (1.28)$$

(см. § 14). Если, кроме того, направление движения тела не совпадает с направлением магнитного поля, то электроны успевают прийти в тепловое равновесие, поскольку скорость движущегося тела и поглощение электронов на его поверхности малы. Функция распределения электронов f_e с точностью до членов порядка $\frac{V_0}{v_e}$ и $\exp\left(\frac{e\varphi_0}{\kappa T}\right)$ является при этом просто функцией распределения Максвелла — Больцмана

$$f_e(r, v) = N_0 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{e\varphi(r)}{\kappa T} - \frac{m(v+V_0)^2}{2\kappa T} \right\}, \quad (1.29)$$

где $\varphi(r)$ — потенциал электрического поля в точке r .

* При этом в A_i нужно добавить член, описывающий «рождение» нейтральных частиц при столкновении ионов с поверхностью.

Электрическое и магнитное поля в уравнениях (1.23), (1.24) в общем случае определяются уравнениями Максвелла. Однако магнитное поле Земли в окрестности движущегося тела возмущается лишь незначительно. Влияние возмущений магнитного поля на движение электронов и ионов также невелико. Поэтому можно принять, что магнитное поле H в уравнениях (1.23), (1.24) есть просто постоянное поле Земли H_0 . Вопрос о возмущениях магнитного поля и их влиянии на движение заряженных частиц рассматривается в гл. VI.

Электрическое поле в окрестности тела создается как электрическим зарядом самого тела, так и объемным зарядом, возникающим в плазме из-за различия в концентрациях электронов и ионов. Таким образом, потенциал электрического поля φ определяется уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e \left\{ \int f_i(r, v) d^3v - \int f_e(r, v) d^3v \right\}. \quad (1.30)$$

На большом расстоянии от тела в невозмущенной плазме потенциал электрического поля, естественно, должен обращаться в нуль. На поверхности тела должны выполняться обычные граничные условия для φ . В частности, на поверхности металлического тела $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 — потенциал поверхности.

Уравнения (1.23), (1.24) и (1.30) при условии, что магнитное поле H постоянно ($H = H_0$), образуют полную систему уравнений, определяющую возмущение заряженных частиц в окрестности тела.

г. **Интеграл столкновений.** Выше указывалось, что в интересующих нас условиях длина пробега частиц велика по сравнению с размерами тела. Это означает, что влияние столкновений на возмущения, вызываемые в плазме движущимся телом, несущественно в большой области в окрестности тела. Поэтому при решении многих задач нет необходимости учитывать столкновения частиц.

Однако в том случае, когда в рассматриваемых явлениях играют роль удаленные от тела области ($r \gtrsim l$), как, например, при анализе вопроса о рассеянии

радиоволн на следе тела, столкновения существенны (см. гл. V). Далее, без учета столкновений вообще невозможно найти распределение ионов или электронов, совершающих финитное движение, т. е. частиц, движущихся по ограниченным в пространстве орбитам в окрестности тела (см. гл. VIII, § 35). В этих случаях в уравнения (1.23), (1.24) необходимо ввести интегралы столкновений, описывающие изменение функции распределения рассматриваемых частиц (например, ионов) за счет их столкновений друг с другом и со всеми другими частицами плазмы (с электронами, молекулами, атомами).

В общем случае интеграл столкновений Больцмана имеет вид [21]

$$Y = \int W(v, v'; v_1, v'_1) \{f(v)F(v') - f(v_1)F(v'_1)\} d^3v' d^3v_1 d^3v'_1, \quad (1.31)$$

где v — скорость рассматриваемой частицы, v' — скорость той частицы, с которой она соударяется (назовем ее частицей штрих), после столкновения v_1 и v'_1 — скорости частицы и частицы штрих до соударения, F — функция распределения частиц штрих, $W(v, v'; v_1, v'_1)$ — вероятность столкновения, при котором скорость частицы v_1 изменится на v и v'_1 на v' .

Таким образом, интеграл столкновений в общем виде является весьма сложным интегральным членом в кинетическом уравнении. Если при этом значительную роль играют столкновения между самими рассматриваемыми частицами, то $F(v') = f(v')$ и $F(v'_1) = f(v'_1)$, так что кинетическое уравнение становится также нелинейным. Весьма важны поэтому упрощенные выражения для интеграла столкновений, которые можно получить в различных конкретных случаях. Этим вопросам посвящена значительная литература. Ниже мы приведем лишь те выражения, которые будут использованы в дальнейшем.

Если частицы взаимодействуют по закону Кулона (столкновения ионов с ионами, электронов с ионами, электронов с электронами), то интеграл столкновений для них, как показано Ландау [22], может быть представлен

в форме

$$Y = -\operatorname{div}_v j = \sum_k \frac{\partial j_k}{\partial v_k}, \quad (1.32)$$

где

$$j_k = \frac{\pi e^4 \Lambda}{m} \sum_l \int \left[\frac{f(v)}{m'} \frac{\partial F(v')}{\partial v'_l} - \frac{F(v')}{m} \frac{\partial f(v)}{\partial v_l} \right] \left[\frac{\omega \delta_{lk} - w_l w_k}{\omega^3} \right] d^3 v'. \quad (1.33)$$

Здесь Λ — кулоновский логарифм

$$\Lambda = \ln \frac{D \kappa T}{e^2} = \frac{3}{2} \ln \frac{\kappa T}{e^2 N_0^{-1/3}} \quad (1.34)$$

(обычно $\Lambda \sim 10$), m — масса рассматриваемой частицы, m' — масса частицы штрих, $w = v - v'$.

Интеграл столкновений Ландау (1.33) существенно проще интеграла столкновений Больцмана (1.31), так как функции f и F в (1.33) зависят лишь от скоростей частиц v и v' после столкновения. Это упрощение возможно из-за того, что в случае кулоновского взаимодействия основную роль играют дальние столкновения. При таких столкновениях частицы пролетают на сравнительно большом расстоянии друг от друга (порядка D) и взаимодействуют слабо. Скорость частицы при каждом столкновении изменяется лишь незначительно. Благодаря этому v близко к v_1 , v' — к v'_1 и интеграл (1.31) можно представить в интегро-дифференциальной форме (1.32).

Оказывается справедливым и более общее утверждение (см., например, [23]): если функция распределения зависит лишь от таких переменных, которые мало изменяются при каждом столкновении частицы, то изменение функции распределения за счет столкновений описывается уравнением, совершенно аналогичным уравнению Фоккера — Планка для движения броуновской частицы. В этом случае, следовательно,

$$Y = -\operatorname{div} j,$$

где j — плотность потока частиц в пространстве скоро-

стей и координат, который вызван столкновениями. Например, если функция распределения f зависит лишь от энергии частицы \mathcal{E} , то

$$Y = -\operatorname{div} \mathcal{J}(\mathcal{E}) = -A(\mathcal{E}) \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{J}(\mathcal{E}), \quad (1.35)$$

где $A(\mathcal{E})$ — нормировочный коэффициент, а $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ — поток частиц в пространстве энергий. В частности, электроны при упругих столкновениях с нейтральными частицами мало изменяют свою энергию из-за того, что масса электрона много меньше массы молекулы. Это обстоятельство было использовано и позволило получить простые выражения вида (1.35) для интеграла столкновений электронов с молекулами (см. [24, 25]).

ГЛАВА II

ВОЗМУЩЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ БЕЗ УЧЕТА ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

§ 4. Качественное рассмотрение возмущений, вызываемых быстро движущимся телом

Прежде чем переходить к строгому расчету концентрации частиц на основе кинетического уравнения, рассмотрим чисто качественно ожидаемый характер возмущений в окрестности тела.

Пусть тело движется со скоростью V_0 . Будем проводить анализ в системе координат, связанной с телом. В этой системе тело неподвижно и на него налетает поток частиц со скоростью $-V_0$. Поскольку мы имеем всюду в виду, как уже отмечалось выше, что длина свободного пробега частиц l много больше линейных размеров тела, постольку в первом приближении можно не принимать во внимание столкновения между частицами. При этих условиях возмущения концентрации частиц будут иметь следующий характер.

а. Концентрация нейтральных частиц. Нейтральные частицы (молекулы, атомы) взаимодействуют лишь с поверхностью самого тела. После столкновения с поверхностью они разлетаются в различных направлениях. При этом впереди тела, естественно, образуется избыток частиц — «область сгущения»; сзади тела, напротив, возникает «область разрежения» (рис. 1).

Концентрация в «области сгущения» максимальна вблизи поверхности тела. При этом если частицы при столкновении с поверхностью тела рассеиваются

зеркально, то скорости налетающих на тело и рассеянных частиц одинаковы; в этом случае максимальное значение концентрации отраженных частиц n_2 , т. е. избыточной концентрации, равно концентрации частиц в набегающем потоке, т. е. в невозмущенном газе. При диффузном рассеянии и особенно при наличии аккомодации средняя скорость рассеянных частиц по направлению нормали к поверхности тела уменьшается и избыточная концентрация частиц возрастает.

На больших расстояниях от тела избыточные частицы разлетаются и их концентрация должна падать пропорционально $\frac{1}{r^2}$, где r — расстояние от тела. Действительно,

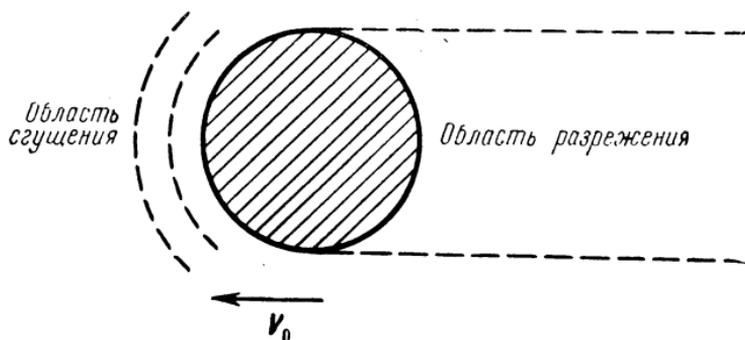


Рис. 1. Схематическое изображение возмущенных областей в окрестности тела.

количество частиц, соударившихся с телом за время Δt , по порядку величины равно $n_0 R_0^2 V_0 \Delta t$. После соударения частицы разлетаются в разные стороны с той же скоростью V_0 и на расстоянии r от тела заполнят по порядку величины объем $r^2 V_0 \Delta t$. Следовательно, избыточная концентрация

$$n_2 \approx \frac{n_0 R_0^2 V_0 \Delta t}{r^2 V_0 \Delta t} = n_0 \left(\frac{R_0}{r} \right)^2. \quad (2.1)$$

Отметим также, что концентрация частиц вблизи поверхности тела может возрасти из-за термического испарения поверхности, а также из-за ее разрушения (распыления) под воздействием налетающих частиц.

Позади тела возникает область разрежения. Эта область заполняется частицами набегающего потока из-за наличия теплового разброса скоростей. В самом деле,

если бы все набегающие частицы имели одинаковую скорость — V_0 , то они вообще не заполняли бы пространство за телом. Заполнение разреженного пространства происходит из-за наличия частиц со скоростями, имеющими произвольное направление. При этом ясно, что заполнение этой зоны происходит в основном из-за движения частиц с тепловой скоростью v_n в направлении, перпендикулярном к направлению движения потока, скорость которого — V_0 . Поэтому размер сильно разреженной области порядка $R_0 \frac{V_0}{v_n}$; в случае быстро движущегося тела $V_0 \gg v_n$ и область разрежения много больше, чем возмущенная область впереди тела. На больших расстояниях от тела (при $r \gg R_0 \frac{V_0}{v_n}$) концентрация молекул в разреженной зоне, естественно, близка к концентрации невозмущенного газа n_0 . Возмущенная область при этом расплывается, так что в направлении ϱ , ортогональном к направлению движения, ее линейные размеры $\Delta\varrho \sim r \frac{v_n}{V_0} \gg R$. Возмущение концентрации падает с ростом расстояния от тела пропорционально $1/r^2$, так как

$$|\delta n| = n_0 - n \approx \frac{R_0^2}{\Delta\varrho^2} \sim \left(\frac{V_0}{v_n}\right)^2 \left(\frac{R_0}{r}\right)^2. \quad (2.2)$$

На близких расстояниях от поверхности тела, где $r \ll R_0 \frac{V_0}{v_n}$, концентрация частиц в разреженной зоне очень мала. В самом деле, в точку, удаленную на расстояние r от максимального сечения тела, может попасть только частица, скорость которой $v \sim V_0 \frac{R_0}{r}$. Если при этом $r \ll R_0 \frac{V_0}{v_n}$, то и $v \gg v_n$, т. е. скорость частицы должна быть много больше, чем тепловая скорость v_n . Число таких частиц, естественно, мало, так как оно пропорционально $\exp\left[-\frac{Mv^2}{2\kappa T}\right]$. Следовательно, и концентрация вблизи поверхности тела при $V_0 \gg v_n$ экспоненциально мала:

$$n \sim n_0 \exp\left[-\frac{Mv^2}{2\kappa T}\right] \sim n_0 \exp\left[-\left(\frac{V_0}{v_n}\right)^2 \left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right]. \quad (2.3)$$

Естественно, n не может сделаться существенно меньше, чем $n_0 \exp[-(V_0/v_n)^2]$, так как концентрация частиц, движущихся быстрее тела, возмущается телом незначительно.

Важно подчеркнуть, что концентрация частиц в области разрежения определяется в основном свободно налетающими частицами; она не зависит, следовательно, от характера их взаимодействия с поверхностью тела.

б. Концентрация ионов. На концентрации заряженных частиц — ионов и электронов, — в отличие от нейтральных частиц, существенно влияет не только их взаимодействие с телом, но и электрическое и магнитное поля, имеющиеся в плазме. Для ионов важно, однако, что они, как и молекулы, набегают на тело с энергией $M_i V_0^2/2$, т. е. в случае быстро движущегося тела с энергией, во много раз превосходящей тепловую энергию kT . В то же время потенциальная энергия иона в электрическом поле $e\phi$, возникающем за счет возмущений в плазме, обычно всего лишь порядка тепловой энергии. Благодаря этому влияние электрического поля на движение ионов должно быть не очень сильным. Поэтому, если нет магнитного поля, то в качестве первого приближения можно считать, что ионы движутся так же, как и нейтральные частицы. Иначе говоря, возмущение концентрации ионов, вызванное их взаимодействием с телом, в отсутствие магнитного поля носит тот же характер, что и в случае нейтральных частиц.

С другой стороны, внешнее постоянное магнитное поле H_0 существенно влияет на движение ионов, а следовательно на заполнение ими разреженного пространства за телом. При наличии магнитного поля ионы, в отличие от нейтральных частиц, свободно движутся только в направлении, параллельном H_0 . В плоскости же, перпендикулярной к H_0 , ионы вращаются с гиромангнитной частотой $\Omega = \frac{eH_0}{M_i c}$. Понятно, однако, что магнитное поле существенно изменяет характер движения иона лишь за время $\Delta t \gtrsim \frac{2\pi}{\Omega}$. За это время поток

ионов, набегающих на тело со скоростью V_0 , переместится на расстояние $\Delta r \sim \frac{2\pi V_0}{\Omega}$. Поэтому в ближней к телу зоне на расстояниях $r \ll \frac{2\pi V_0}{\Omega}$ влияние магнитного поля практически отсутствует. В ионосфере эта зона порядка десяти и более метров. На расстояниях же $r \gg \frac{2\pi V_0}{\Omega}$ влияние магнитного поля весьма существенно. Правда, здесь возмущение концентрации ионов δN_i обычно не велико. Однако δN_i теперь убывает с ростом расстояния от тела r уже не пропорционально $1/r^2$, а как $1/r$, вследствие того, что ионы свободно заполняют возмущенную телом зону лишь по одному направлению — направлению магнитного поля. В самом деле, за время r/V_0 , в течение которого поток набегающих на тело ионов переместится на расстояние r , возмущенная телом область расплывается на расстояние $R_0 \frac{v_i}{V_0} \sin \alpha$, где α — угол между направлением движения тела и направлением магнитного поля, а v_i — средняя тепловая скорость ионов. Следовательно, возмущение концентрации ионов в дальней зоне равно

$$|\delta N_i| = N_0 - N_i \sim N_0 \frac{R_0 V_0}{r v_i \sin \alpha} \sim \frac{1}{r \sin \alpha} \quad (2.4)$$

и убывает с увеличением расстояния от тела пропорционально $1/r$, т. е. медленнее, чем возмущение концентрации нейтральных частиц.

Таким образом, возмущенная область — «след» тела, из-за влияния магнитного поля возрастает. Наряду с этим возмущение δN_i увеличивается с уменьшением угла α . Само собой разумеется, что при очень малых α оценка (2.4) не годится.

В особом случае, когда $\alpha = 0$, т. е. когда тело движется строго вдоль магнитного поля, ионы в дальней зоне не могут двигаться перпендикулярно к направлению движения тела. В этом случае без учета столкновений след вообще не должен заполняться частицами. Если же учесть столкновения, то след заполняется и возмущение концентрации убывает с увеличением расстояния от тела пропорционально $1/r$.

в. Концентрация электронов и потенциал электрического поля. Скорость тела в интересующих нас условиях, как уже отмечалось выше, всегда много меньше, чем скорость электронов. Кроме того, на поверхности тела обычно устанавливается значительный отрицательный потенциал. В этих случаях тело лишь очень слабо возмущает равновесное распределение электронов. Поэтому распределение концентрации электронов, как видно из (1.29), описывается обычно формулой Больцмана

$$N(r) = N_0 \exp \left[\frac{e\varphi}{\kappa T} \right],$$

где φ — потенциал электрического поля. Величина концентрации электронов в возмущенной зоне полностью определяется потенциалом электрического поля. Таким образом,

$$\varphi = -\frac{\kappa T}{e} \ln \frac{N_0}{N(r)}, \quad (2.5)$$

т. е. потенциал логарифмически зависит от отношения $N_0/N(r)$.

Из этой формулы видно, что если возмущение концентрации ионов и электронов порядка их невозмущенной концентрации, то величина потенциала поля, вообще говоря, порядка $-\kappa T/e$.

С другой стороны, потенциал электрического поля определяется концентрацией зарядов в среде, т. е. разностью концентраций электронов N и ионов N_i . Легко оценить эту разность. В самом деле, потенциал φ , возникающий из-за разности концентраций $N_i - N$ в области размером r , приближенно равен

$$\varphi \sim \frac{e(N_i - N)r^3}{r} \sim e(N_i - N)r^2.$$

Если теперь приравнять его к тепловому потенциалу $-\kappa T/e$, то находим, что

$$\frac{|N_i - N|}{N_0} \sim \frac{\kappa T}{e^2 r^2 N_0} \sim \left(\frac{D}{r} \right)^2, \quad (2.6)$$

т. е. относительная разность концентрации электронов и ионов при $r \gg D$ чрезвычайно мала.

Таким образом, концентрация электронов в возмущенной области фактически равна концентрации ионов.

Потенциал же электрического поля порядка $\sim \kappa T/e$. Однако в наиболее сильно возмущенной области, т. е. в области наибольшего разрежения вблизи поверхности тела, φ может достигнуть значительной величины. Здесь концентрация ионов пренебрежимо мала, так что $|N_i - N| \approx N$, и мы получаем, воспользовавшись приведенными выше соотношениями (2.5) и (2.6), что

$$\varphi \sim -\frac{\kappa T}{e} \ln \frac{N_0}{N} = -\frac{\kappa T}{e} \ln \frac{N_0}{(N-N_i)} \approx -\frac{\kappa T}{e} \ln \left(\frac{R_0}{D} \right)^2. \quad (2.7)$$

В ионосфере для тел с размерами порядка метра максимальное значение φ может быть на порядок выше теплового потенциала.

Вдали от тела, где возмущения концентраций заряженных частиц невелики $N - N_0 \ll N_0$, потенциал φ пропорционален этим возмущениям

$$N = N_0 \exp \left[\frac{e\varphi}{\kappa T} \right] \approx N_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{\kappa T} \right), \quad \varphi = \frac{\kappa T}{e} (N - N_0). \quad (2.8)$$

Следовательно, на больших расстояниях от тела потенциал электрического поля убывает так же, как и возмущения концентрации, т. е. пропорционально $1/r^2$ в отсутствие магнитного поля или как $1/r$ при наличии постоянного магнитного поля.

Подводя итоги проведенному выше анализу, можно заключить, что возмущения концентрации ионов образуются в основном из-за «затенения» телом набегающего потока ионов. Электроны же из-за большой тепловой скорости очень мало «затеняются», и концентрация электронов возмущается главным образом под влиянием электрического поля. Последнее устанавливается таким образом, что концентрация электронов близка к концентрации ионов. На движение ионов электрическое поле влияет слабо, так что в отсутствие постоянного магнитного поля возмущения концентрации ионов, а следовательно и электронов, не очень сильно отличаются от возмущений концентрации нейтральных частиц *).

*) Разумеется, при этом следует учитывать особенности взаимодействия частиц с поверхностью тела, что существенно сказывается, однако, лишь в области «сгущения».

В силу этого в настоящей главе рассматривается наиболее простой случай, когда возмущения в плазме вызываются лишь столкновениями частиц с поверхностью движущегося тела. Хотя такое представление строго справедливо только для нейтральных частиц, получаемые результаты в отсутствие магнитного поля в первом приближении верны и для ионов, а следовательно и для электронов. Влияние на движение заряженных частиц электрического и магнитного полей будет учтено в последующих главах.

§ 5. Область разрежения позади быстро движущегося тела произвольной формы

а. Функция распределения. Функция распределения нейтральных частиц в системе координат, связанной с движущимся телом, определяется уравнениями (1.5), (1.11)

$$v \frac{\partial f_n}{\partial r} = A_n \delta(F), \quad (2.9)$$

где $F(r) = 0$ — уравнение поверхности тела, а $A_n(r, v)$ — функция, характеризующая взаимодействие нейтральных частиц с телом.

На тело набегают поток частиц со скоростью $-V_0$; позади тела образуется разреженная область. Будем считать, что тело движется быстро, так что его скорость много больше тепловой скорости молекул v_n . В этом случае столкновения молекул с поверхностью тела при заполнении разреженной области маловероятны. Поэтому вдали от поверхности эти столкновения мало существенны. Это означает, что конкретная форма тела мало влияет на свойства разреженной зоны на расстояниях $z \gg R_0$; важно лишь, каково максимальное сечение тела в плоскости, ортогональной к набегающему потоку. При приближенном расчете, следовательно, можно заменить само тело его поперечным сечением. Например, сферическую поверхность можно заменить круглым диском радиуса R_0 , расположенным в точке $z = 0$. Тогда правая часть уравнения (2.9) отлична от нуля только при $z = 0$. Равновесная функция распределения (1.6) при $z = 0$ искажена

из-за взаимодействия с телом, а именно

$$f(x_0, y_0, 0; v_x, v_y, v_z) = \begin{cases} n_0 \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{M [v_x^2 + v_y^2 + (v_z + V_0)^2]}{2kT} \right\} \\ \quad \text{при любом } v_z, \text{ если точка } (x_0, y_0) \text{ ле-} \\ \quad \text{жит вне области } S_0, \text{ и при } v_z > 0, \text{ ес-} \\ \quad \text{ли точка } (x_0, y_0) \text{ лежит в области } S_0; \\ f_2(x_0, y_0, 0; v_x, v_y, v_z) \\ \quad \text{при } v_z < 0, \text{ если точка } (x_0, y_0) \text{ лежит} \\ \quad \text{в области } S_0. \end{cases}$$

Здесь S_0 — максимальное поперечное сечение тела. Ось z направлена по направлению движения тела; набегающий поток частиц движется в направлении $-z$. Далее, f_2 — функция распределения частиц, отраженных от тыльной стороны сечения S_0 и движущихся в направлении $-z$. В случае быстро движущегося тела, когда $V_0 \gg \gg \sqrt{2kT/M}$, число таких частиц n_2 экспоненциально мало, так как до отражения они должны были двигаться в сторону, противоположную потоку:

$$n_2 \sim n_0 \exp \left\{ -\frac{MV_0^2}{2kT} \right\}.$$

Поскольку конкретная форма поверхности тела здесь не учитывается, то отраженными частицами можно пренебречь. Экспоненциально мало и число частиц, имеющих скорость $v_z > 0$. Пренебрегая ими, можем записать функцию распределения при $z = 0$ в простом виде:

$$f(x_0, y_0, 0; v_x, v_y, v_z) = \begin{cases} n_0 \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{M [v_x^2 + v_y^2 + (v_z + V_0)^2]}{2kT} \right\}, \\ \quad \text{если } v_z < 0 \text{ и точка } (x_0, y_0) \\ \quad \text{лежит вне области } S_0; \\ 0, \\ \quad \text{если } v_z > 0 \text{ или точка } (x_0, y_0) \\ \quad \text{лежит в области } S_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Области разрежения соответствуют значения $z < 0$.

При $z < 0$ функция распределения определяется уравнением (1.5):

$$v_x \frac{\partial f_n}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_n}{\partial y} + v_z \frac{\partial f_n}{\partial z} = 0. \quad (2.11)$$

Решение этого уравнения легко находится методом характеристик. Уравнения характеристик

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

очевидно, имеют решение

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{v_x}{v_z} z &= x_0, \\ y - \frac{v_y}{v_z} z &= y_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.11) имеет вид

$$\begin{aligned} f_n(x, y, z; v_x, v_y, v_z) &= \\ &= F\left(x - \frac{v_x}{v_z} z, y - \frac{v_y}{v_z} z; v_x, v_y, v_z\right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где F — произвольная функция. Вид функции F определяется из условия, что при $z=0$ она должна совпадать с функцией распределения (2.10). Учитывая это, найдем, что функция распределения нейтральных частиц в области разрежения имеет вид

$$\begin{aligned} f_n &= f\left(x - \frac{v_x}{v_z} z, y - \frac{v_y}{v_z} z, 0; v_x, v_y, v_z\right) = \\ &= \left\{ \begin{aligned} &n_0 \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{M[v_x^2 + v_y^2 + (v_z + V_0)^2]}{2kT}\right\}, \\ &\text{если } v_z < 0 \text{ и точка } \left(x - \frac{v_x}{v_z} z; y - \frac{v_y}{v_z} z\right) \\ &\text{лежит вне области } S_0; \\ &0, \\ &\text{если } v_z > 0 \text{ или точка } \left(x - \frac{v_x}{v_z} z; y - \frac{v_y}{v_z} z\right) \\ &\text{лежит в области } S_0. \end{aligned} \right. \quad (2.14) \end{aligned}$$

б. Концентрация частиц. Чтобы найти концентрацию частиц в области разрежения, нужно лишь проинтегрировать функцию распределения (2.14) по скоростям, а именно:

$$n(x, y, z) = \int f\left(x - \frac{v_x}{v_z} z, y - \frac{v_y}{v_z} z, 0; v_x, v_y, v_z\right) dv_x dv_y dv_z. \quad (2.15)$$

В этом выражении при интегрировании по dv_x и dv_y удобно перейти к новым переменным

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x - \frac{v_x}{v_z} z, \\ y_0 &= y - \frac{v_y}{v_z} z, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

т. е.

$$v_x = \frac{x - x_0}{z} v_z, \quad v_y = \frac{y - y_0}{z} v_z.$$

При этом якобиан преобразования равен

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x_0} & \frac{\partial v_y}{\partial x_0} & \frac{\partial v_z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y_0} & \frac{\partial v_y}{\partial y_0} & \frac{\partial v_z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial v_x}{\partial v_z} & \frac{\partial v_y}{\partial v_z} & \frac{\partial v_z}{\partial v_z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v_z}{z} & 0 & \frac{x - x_0}{z} \\ 0 & -\frac{v_z}{z} & \frac{y - y_0}{z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{v_z^2}{z^2}. \quad (2.17)$$

Следовательно,

$$n(x, y, z) = \frac{1}{z^2} \int v_z^2 f\left(x_0, y_0, 0; \frac{x - x_0}{z} v_z, \frac{y - y_0}{z} v_z, v_z\right) dx_0 dy_0 dv_z. \quad (2.18)$$

В силу свойств функции f при $z = 0$ (см. (2.10)) интегрирование в (2.18) по $dx_0 dy_0$ ведется лишь по области вне сечения тела S_0 . Аналогичный интеграл, взятый по сече-

нию S_0 , очевидно, равен возмущению концентрации частиц

$$-\delta n(x, y, z) = n_0 - n(x, y, z),$$

поскольку интеграл по всей плоскости равен n_0 . Таким образом,

$$\begin{aligned} -\delta n(x, y, z) &= \frac{n_0}{z^2} \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \int_{S_0} dx_0 dy_0 \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 v_z^2 \exp \left\{ -\frac{M}{2\kappa T} \left[\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{z^2} v_z^2 + (v_z + V_0)^2 \right] \right\} dv_z. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Интегрируя в (2.19) по dv_z , получаем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 v_z^2 \exp \left\{ -\frac{M}{2\kappa T} \left[\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{z^2} v_z^2 + (v_z + V_0)^2 \right] \right\} dv_z = \\ &= \left(\frac{2\kappa T}{M} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \right) \int_0^{\infty} y^2 \exp(-d_0 y^2 - b_0 y) dy = \\ &= \left(\frac{2\kappa T}{M} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \right) \left\{ \frac{\sqrt{\pi} b_0^2}{8d_0^{5/2}} \left(1 + \frac{2d_0}{b_0} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 + \Phi \left(\frac{b_0}{2\sqrt{d_0}} \right) \right] \exp \left(\frac{b_0^2}{4d_0} \right) + \frac{b_0}{4d_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ — интеграл вероятностей,

$$d_0 = \frac{z^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{z^2}, \quad b_0 = 2 \left(\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \right)^{1/2}. \quad (2.21)$$

Далее можно учесть, что в области разрежения не слишком близко к сечению тела отношение $b_0^2/2d_0$ есть большая величина при $\frac{MV_0^2}{\kappa T} z^2 \gg (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$. Тогда, подставляя (2.20), (2.21) в (2.19) и пренебрегая экспонен-

циально малыми членами, находим окончательно, что

$$-\delta n(x, y, z) = \frac{n_0 M V_0^2}{2\pi\kappa T} z^3 \int_{S_0} [z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{-5/2} \times \\ \times \exp \left[-\frac{M V_0^2}{2\kappa T} \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right] dx_0 dy_0. \quad (2.22)$$

Эта формула определяет концентрацию частиц в области разрежения позади тела произвольной формы, максимальное сечение которого равно S_0 . При ее выводе само тело заменялось пластинкой S_0 и конкретный вид поверхности тела не учитывался. Поэтому она может быть справедливой лишь на значительном удалении от поверхности быстро движущегося тела. Вместе с тем вдали от тела при больших z , если выполнено условие

$$z^2 \gg (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

(точнее, если $z^2 > [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \left(\frac{M V_0^2}{2\kappa T}\right)^{1/2}$, где (x_0, y_0) — любая точка сечения), выражение (2.22) для δn существенно упрощается:

$$-\delta n(x, y, z) = \frac{n_0 M V_0^2}{2\pi\kappa T z^2} \exp \left(-\frac{M V_0^2}{2\kappa T} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) \times \\ \times \int_{S_0} \exp \left[-\frac{M V_0^2}{2\kappa T} \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0}{z^2} \right] dx_0 dy_0. \quad (2.23)$$

Формулу (2.23) можно получить непосредственно из (2.19), если учесть, что для быстро движущегося тела почти всегда $(v_z + V_0) \ll V_0$ и, следовательно, в (2.19) кроме скобки $(v_z + V_0)$ скорость v_z можно заменить на $-V_0$. При этом пренебрегается тепловым движением частиц по направлению движения тела в сравнении со скоростью тела V_0 , так как существенным для заполнения разреженной зоны является лишь тепловое движение частиц в плоскости, ортогональной к направлению движения тела. Поэтому задача приближенного определения концентрации частиц в разреженной зоне за быстро движущимся телом фактически двумерная: нужно лишь найти, как частицы заполняют во времени пустую

область, равную максимальному сечению тела в плоскости, ортогональной к направлению движения. Затем, учитывая, что за это же время t все частицы как целое смещаются по направлению z на расстояние $-V_0 t$, с помощью простой замены $t = -\frac{z}{V_0}$ можно перейти к системе координат, движущейся вместе с телом. Такой упрощенный способ расчета приводит к формуле (2.23).

Выражение (2.23) для возмущений концентрации нейтральных частиц имеет весьма простой и удобный для интегрирования вид. Ниже такое интегрирование проведено для случая, когда сечение тела в плоскости, ортогональной к направлению движения, является кругом или прямоугольником; кроме того, получено простое выражение для возмущения δn для тел произвольного сечения, справедливое на достаточно больших расстояниях от тела.

в. Тело кругового сечения. Пусть сечение тела есть круг радиуса R_0 . Понятно, что такое сечение имеет, в частности, и рассмотренное выше сферическое тело.

При вычислении δn , естественно, перейти в интеграле (2.23) к полярным координатам φ , $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и учесть, что $z < 0$. Если, кроме того, отсчитывать угол φ от направления (x, y) , так что $x_0 x + y_0 y = \varrho_0 \varrho \cos \varphi$, то вместо (2.23) мы получим

$$\begin{aligned} -\delta n(x, y, z) &= \frac{n_0 M V_0^2}{2\pi k T z^2} \exp \left[-\frac{M V_0^2}{2kT} \left(\frac{\varrho}{z} \right)^2 \right] \times \\ &\times \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \varrho_0 d\varrho_0 d\varphi \exp \left\{ -\frac{M V_0^2}{2kT} \left[\left(\frac{\varrho_0}{z} \right)^2 - \frac{2\varrho \varrho_0 \cos \varphi}{z^2} \right] \right\} = \\ &= 2n_0 \exp \left[-\frac{M V_0^2}{2kT} \left(\frac{\varrho}{z} \right)^2 \right] \int_0^{-\frac{R_0}{z} \sqrt{\frac{M V_0^2}{2kT}}} \tau e^{-\tau^2} \times \\ &\times I_0 \left(-\frac{\varrho}{z} \sqrt{\frac{2M V_0^2}{kT}} \tau \right) d\tau, \quad (2.24) \end{aligned}$$

где $I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-x \cos \theta} d\theta$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

На оси z это выражение существенно упрощается в этом случае $\varrho = 0$, $I_0 = 1$, так что

$$-\delta n(0, z) = n_0 - n(0, z),$$

где

$$n(0, z) = n_0 \exp\left(-\frac{MV_0^2 R_0^2}{2\kappa T z^2}\right). \quad (2.25)$$

При больших z

$$-\delta n(0, z) = n_0 \frac{MV_0^2 R_0^2}{2\kappa T z^2}. \quad (2.25a)$$

Значения $n(\varrho, z)/n_0$ для различных ϱ и z приведены в табл. V, а кривые, показывающие изменение концентрации в разреженной области, изображены на рис. 2.

Таблица V

Отношение концентрации частиц $n(\varrho, z)$ позади быстро движущегося тела к невозмущенной концентрации частиц n_0

ϱ/R_0	$\frac{z}{R_0} \sqrt{\frac{2\kappa T}{MV_0^2}}$										
	0	-0,2	-0,4	-0,6	-0,8	-1,0	-1,2	-1,5	-2,0	-4,0	-8,0
0,0	0	0	0	0,06	0,21	0,37	0,50	0,64	0,78	0,94	0,98
0,2	0	0	0,01	0,09	0,24	0,38	0,51	0,65	0,78	0,94	0,98
0,4	0	0	0,06	0,14	0,28	0,42	0,53	0,67	0,78	0,94	0,98
0,6	0	0,04	0,11	0,23	0,36	0,48	0,57	0,69	0,79	0,94	0,98
0,8	0	0,09	0,27	0,39	0,48	0,56	0,63	0,71	0,80	0,94	0,98
1,0	0,50	0,51	0,54	0,58	0,62	0,65	0,68	0,75	0,82	0,94	0,98
1,2	1,00	0,92	0,78	0,76	0,75	0,74	0,75	0,78	0,84	0,94	0,98
1,5	1,00	1,00	0,96	0,88	0,87	0,86	0,84	0,84	0,86	0,94	0,98
2,0	1,00	1,00	1,00	0,97	0,95	0,95	0,93	0,91	0,90	0,94	0,98
4,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,97	0,98
8,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99

Эти кривые, как и ряд кривых на последующих рисунках, построены в предположении, что отношение $\frac{V_0}{v_n} =$

$= \frac{V_0}{\sqrt{2\kappa T/M}} = 8$. Из рис. 2 видно, что зона, где возмущения велики, весьма растянута: $-\delta n \simeq \frac{n_0}{2}$ при $z \simeq 1,2R_0 \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \simeq 10R_0$; $-\delta n \simeq 0,1n_0$ при $z \simeq 25R_0$. Таким образом, позади тела образуется протяженная

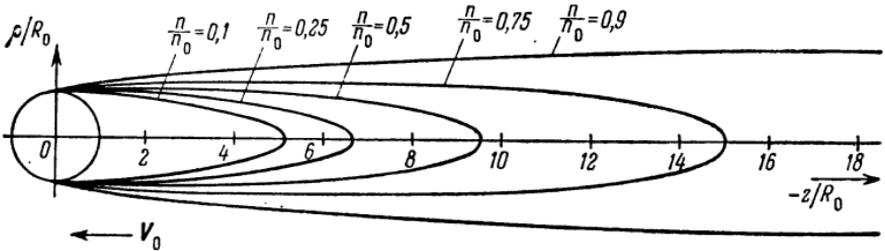


Рис. 2. Кривые постоянной концентрации частиц в области разрежения тела позади круглого сечения $\left(\frac{V_0}{\sqrt{2\kappa T/M}} = 8\right)$.

возмущенная область; с ростом z возмущение концентрации частиц убывает, как $1/z^2$.

г. Тело прямоугольного сечения. Рассмотрим теперь прямоугольное сечение тела размерами $2R_x, 2R_y$.

В этом случае интегрирование выражения (2.23) сразу легко провести, и мы получаем

$$\begin{aligned}
 -\delta n(x, y, z) &= \\
 &= \frac{n_0 MV_0^2}{2\pi\kappa T z^2} \int_{-R_x}^{R_x} \int_{-R_y}^{R_y} dx_0 dy_0 \exp \left[-\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{z^2} \right] = \\
 &= \frac{n_0}{\pi} \left| \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du \right| \times \left| \int_{u_3}^{u_4} e^{-u^2} du \right| = \frac{n_0}{4} \left| \Phi \left(\frac{x-R_x}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \Phi \left(\frac{x+R_x}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \right) \right| \left| \Phi \left(\frac{y-R_y}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \Phi \left(\frac{y+R_y}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \right) \right|, \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{x + R_x}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}}, \\ u_2 &= \frac{x - R_x}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}}, \\ u_3 &= \frac{y + R_y}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}}, \\ u_4 &= \frac{y - R_y}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}}. \end{aligned}$$

Здесь, по-прежнему, $z < 0$, а $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ — интеграл вероятностей.

На оси z , т. е. при $x = 0$, $y = 0$, выражение (2.26) несколько упрощается:

$$-\delta n(0, 0, z) = n_0 \Phi\left(\frac{R_x}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}}\right) \Phi\left(\frac{R_y}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}}\right). \quad (2.27)$$

На больших расстояниях от тела

$$-\delta n(0, 0, z) = n_0 \frac{4}{\pi} \frac{MV_0^2}{2\kappa T} \frac{R_x R_y}{z^2}. \quad (2.28)$$

Таким образом, с ростом z возмущения $|\delta n|$ убывают, как $1/z^2$. На рис. 3 изображено, как изменяется n/n_0 позади тела прямоугольного сечения.

д. **Возмущение концентрации частиц на больших расстояниях от тела произвольного сечения.** Формула (2.23) позволяет получить простое выражение для возмущения δn на больших расстояниях позади тела при произвольном сечении S_0 . При больших значениях z аргумент в экспоненциальном члене в интеграле (2.23) всегда мал, и сам этот член, следовательно, близок к единице. Поэтому в этом случае

$$-\delta n(x, y, z) = \frac{n_0 S_0 MV_0^2}{2\pi\kappa T z^2} \exp\left(-\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right), \quad (2.29)$$

если выполняется условие

$$z^2 \gg |\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2 - 2x\bar{x}_0 - 2y\bar{y}_0| \frac{MV_0^2}{2\kappa T}, \quad (2.30)$$

где

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} x_0 dx_0 dy_0, \quad \bar{y}_0 = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} y_0 dx_0 dy_0$$

и т. д.

На оси z , т. е. при $x = y = 0$, на большом расстоянии от тела, когда $z^2 \gg \frac{MV_0^2}{2\kappa T} (\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2)$, возмущение концентрации частиц имеет вид:

$$-\delta n = n_0 \frac{S_0 MV_0^2}{2\pi\kappa T z^2}. \quad (2.31)$$

Физический смысл этого выражения легко понять, используя рассуждение, приведенное на стр. 37 и 48. Возмущен-

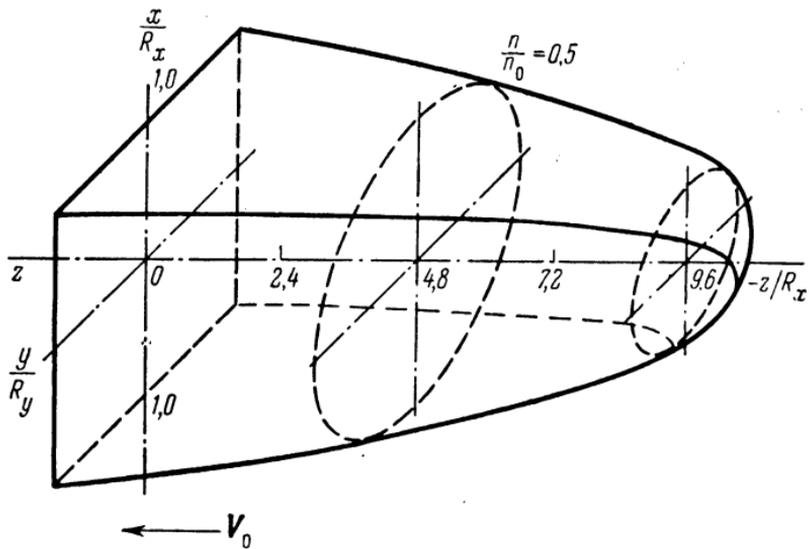


Рис. 3. Поверхность постоянной концентрации $n/n_0 = 0,5$ в области разрежения для тела квадратного сечения.

ная телом область равномерно расплывается в плоскости, ортогональной к направлению движения, со скоростью

$v_n = \sqrt{\frac{2\kappa T}{M}}$, т. е. через время $t = -z/V_0$ она размывается

по кругу радиуса $-\sqrt{\frac{2\kappa T}{M}} \frac{z}{V_0}$. Формула (2.31), разумеется,

совпадает с соответствующими выражениями (2.25а), (2.28), полученными для сечений конкретного вида. С ростом z в рассматриваемом общем случае возмущение концентрации также убывает, как $1/z^2$.

Из формулы (2.29) видно, что слабо возмущенная область позади тела может простирается на весьма большие расстояния. Например, $-\delta n = 0,1n_0$ на расстоянии

$|z| \approx 3,16 \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} R_0$, где $R_0 = \sqrt{S_0/\pi}$ — эффективный радиус

тела. В ионосфере $\sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \sim 8-10$ и соответствующее

расстояние $|z| \sim 25-30R_0$. На расстоянии $|z| \approx 10 \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} R_0$

(т. е. порядка $100R_0$) — $\delta n = 0,01n_0$, а при $|z| \approx 31,6 \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} R_0$

(т. е. на расстоянии порядка $300R_0$) — $\delta n = 10^{-3}n_0$.

§ 6. Область сгущения впереди быстро движущегося шара

Впереди тела образуется область сгущения: здесь концентрация возрастает за счет отраженных от поверхности тела частиц. Понятно, что на концентрацию избыточных частиц в случае быстро движущегося тела тепловое движение в набегающем потоке влияет мало и (в первом приближении) его можно не учитывать, т. е. принять, что все налетающие на тело частицы имеют одинаковую скорость — V_0 . С другой стороны, важную роль играет конкретный характер взаимодействия частиц с поверхностью тела, что уже отмечалось ранее. Ниже будут получены выражения для избыточной концентрации частиц при различном их взаимодействии с поверхностью тела. Последняя для простоты принимается сферой радиуса R_0 .

а. Зеркальное отражение. Предположим, что частица при столкновении с поверхностью тела рассеивается зеркально, т. е. угол падения частицы на поверхность (угол между направлением скорости частицы и нормалью к поверхности) равен углу ее отражения, а величина скорости частицы не меняется. Такое рассеяние изобра-

жено на рис. 4, а. В этом случае число частиц в малом объеме $dV_{\rho z}$ вблизи произвольной точки $A(\rho, z)$ равно числу частиц в соответствующем малом объеме dV_{ρ_0} в налетающем потоке (см. рис. 4, а). Следовательно, избыточная концентрация n_2 равна

$$n_2(\rho, z) = n_0 \frac{dV_{\rho_0}}{dV_{\rho z}}. \quad (2.32)$$

Учитывая, далее, что величина скорости при этом не изменилась, находим, что отношение объемов равно отношению их поперечных сечений

$$\frac{dV_{\rho_0}}{dV_{\rho z}} = \frac{\rho_0 d\rho_0}{\rho d\rho}, \quad (2.33)$$

где $d\rho_0$ и $d\rho$ показаны на рис. 4, а. Все эти величины могут быть выражены через ρ , z , R_0 и угол θ' — угол между нормалью к сфере в точке соударения и осью z , направленной, как обычно, параллельно скорости V_0 (см. рис. 4, б). В самом деле,

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= R_0 \sin \theta', \\ d\rho_0 &= R_0 \cos \theta' d\theta'. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Угол θ' , очевидно, связан с координатами точки $A(\rho, z)$ соотношением

$$\frac{\rho - R_0 \sin \theta'}{z - R_0 \cos \theta'} = \operatorname{tg} 2\theta'$$

или

$$R_0 = 2z \cos \theta' + 2\rho \sin \theta' - \frac{\rho}{\sin \theta'}. \quad (2.35)$$

Далее, пусть отраженные лучи для углов отражения θ' и $\theta' + d\theta'$ сходятся в точке B (см. рис. 4, б). Угол,

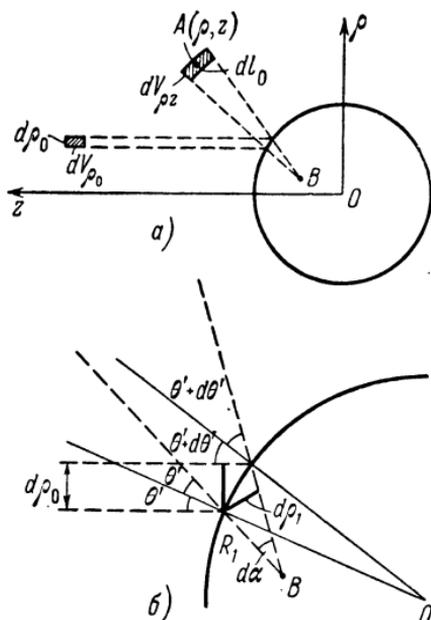


Рис. 4. К выводу концентрации отраженных частиц.

образованный этими лучами $d\alpha$, очевидно, равен

$$d\alpha = 2(\theta' + d\theta') - 2\theta' = 2d\theta',$$

и следовательно,

$$dl = 2R_{AB}d\theta', \quad (2.36)$$

где R_{AB} — расстояние между точками A и B . Это расстояние складывается из отрезка R_1 от точки B до поверхности тела и отрезка от поверхности тела до точки A (ϱ, z). Таким образом,

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R_1 + \sqrt{(\varrho - R_0 \sin \theta')^2 + (z - R_0 \cos \theta')^2} = \\ &= R_1 + (\varrho - R_0 \sin \theta') \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\theta'} = R_1 + \frac{\varrho - R_0 \sin \theta'}{\sin 2\theta'}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Наконец, используя равенство углов при отражении, находим, что

$$d\varrho_0 = d\varrho_1 = R_1 \cdot 2d\theta'.$$

Отсюда

$$R_1 = \frac{1}{2} \frac{d\varrho_0}{d\theta'} = \frac{R_0 \cos \theta'}{2}. \quad (2.38)$$

Итак,

$$dl = 2 \left(R_1 + \frac{\varrho - R_0 \sin \theta'}{\sin 2\theta'} \right) d\theta' = \frac{\varrho - R_0 \sin^3 \theta'}{\sin \theta' \cos \theta'} d\theta'. \quad (2.39)$$

Подставляя теперь (2.39) и (2.34) в (2.33) и (2.32), окончательно имеем, что

$$n_2(\varrho, z) = n_0 \frac{R_0^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \theta'}{\varrho^2 \left(1 - \frac{R_0}{\varrho} \sin^3 \theta' \right)}, \quad (2.40)$$

причем угол θ' выражается через ϱ, z и R_0 с помощью соотношения (2.35).

Впереди тела при $\varrho \rightarrow 0$, т. е. на его оси, из (2.35) следует, что

$$\sin \theta' \approx \frac{\varrho}{2z - R_0} \rightarrow 0, \quad \cos \theta' \rightarrow 1,$$

Таблица VI
 Отношение $n(\rho, z)/n_0$ впереди быстро движущегося тела при зеркальном отражении частиц

ρ/R_0	$\frac{z}{R_0}$																
	-1,0	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0
0	—	—	—	—	—	—	—	—	2,00	1,51	1,31	1,21	1,15	1,11	1,06	1,04	1,02
0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	1,92	1,49	1,30	1,20	1,14	1,11	1,06	1,04	1,02
0,4	—	—	—	—	—	—	—	—	1,72	1,41	1,26	1,19	1,13	1,10	1,06	1,04	1,02
0,6	—	—	—	—	—	—	—	2,00	1,53	1,33	1,22	1,16	1,12	1,10	1,06	1,04	1,02
0,8	—	—	—	—	—	—	2,00	1,56	1,38	1,25	1,19	1,14	1,11	1,09	1,05	1,04	1,02
1,0	1,0	1,0	1,0	1,33	1,67	1,55	1,45	1,35	1,26	1,20	1,15	1,12	1,10	1,08	1,05	1,04	1,02
1,2	1,02	1,11	1,16	1,24	1,31	1,32	1,28	1,22	1,18	1,15	1,13	1,11	1,09	1,07	1,04	1,03	1,02
1,4	1,03	1,10	1,13	1,16	1,19	1,20	1,19	1,17	1,15	1,13	1,11	1,09	1,08	1,06	1,04	1,03	1,02
1,6	1,04	1,08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,14	1,13	1,12	1,10	1,09	1,08	1,07	1,06	1,04	1,03	1,02
1,8	1,05	1,07	1,08	1,09	1,10	1,11	1,11	1,10	1,09	1,08	1,07	1,06	1,06	1,05	1,03	1,03	1,02
2,0	1,05	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,06	1,06	1,05	1,04	1,03	1,03	1,02
2,5	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,01

поэтому

$$\left. \begin{aligned} n_2(0, z) &= n_0 \frac{R_0^2}{(2z - R_0)^2}, \\ n(0, z) &= n_0 \left[1 + \frac{R_0^2}{(2z - R_0)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Отношение n/n_0 в зависимости от расстояния от тела в направлении его движения на оси z и в ортогональном к нему направлении на оси ρ изображено на рис. 5.

Распределение концентрации частиц в области сгущения для различных ρ и z , рассчитанное по формуле (2.40), приведено в табл. VI и на рис. 6. Из рисунка и таблицы видно, что концентрация отраженных частиц вблизи поверхности тела весьма значительна. Около поверхности $n_2/n_0 \approx 1$, $n/n_0 \approx 2$, при $z \approx 1,2R_0$ $n_2/n_0 \approx 0,5$, при $z = 1,5R_0$ $n_2/n_0 \approx 0,2$ и при $z = 2R_0$ значение $n_2/n_0 \approx 0,1$. По мере удаления от поверхности тела возмущение концентрации в области сгущения убывает быстрее, чем в области разрежения.

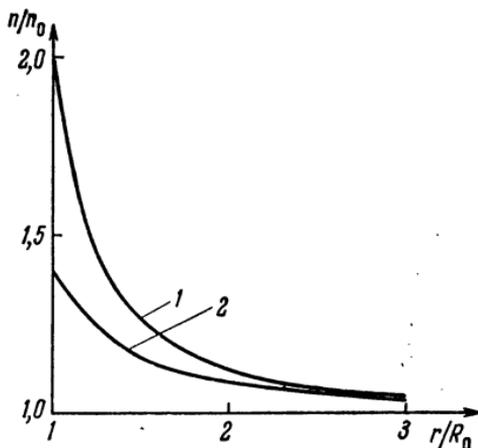


Рис. 5. Зависимость концентрации от расстояния до центра тела в области сгущения в случае зеркального отражения на оси z —кривая 1 и при $z=0$ —кривая 2.

б. Диффузное рассеяние. Предположим теперь, что частицы при соударении с поверхностью тела рассеиваются диффузно, т. е. что поверхность тела сильно шероховатая, так что частица может с одинаковой вероятностью отразиться под любым углом. В этом случае элемент поверхности dS вблизи точки поверхности rS за время dt рассеивает dn_S частиц, где

$$dn_S = -(V_0 n) n_0 dS dt = n_0 V_0 \cos \theta' dS dt. \quad (2.42)$$

Здесь n — внешняя нормаль к поверхности тела в точке rS , θ' — по-прежнему угол между скоростью V_0 и нормалью n (см. рис. 7).

Скорость отраженной частицы при упругом рассеянии направлена с равной вероятностью под любым углом к поверхности, но сохраняется по абсолютной величине. Поэтому все частицы, рассеянные в момент t_0 за время dt

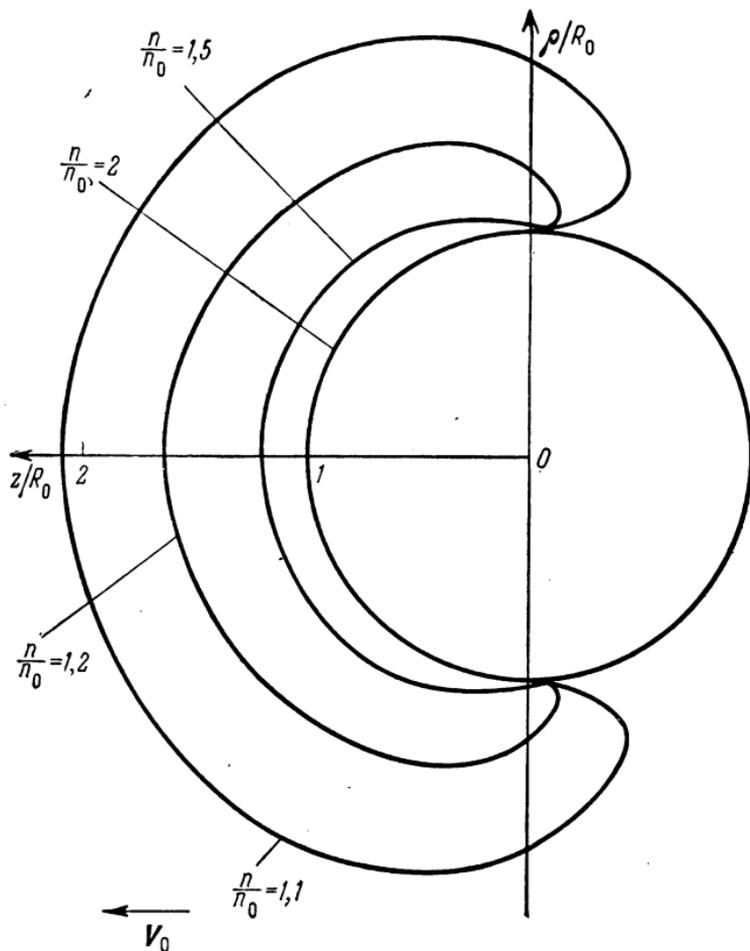


Рис. 6. Кривые постоянной концентрации в области сгущения при зеркальном отражении.

элементом поверхности dS , по истечении времени $(t - t_0)$ равномерно распределяется в полусферическом слое, центр которого расположен в точке рассеяния r_S . Радиус этого слоя равен $V_0(t - t_0)$, а его толщина равна $V_0 dt$.

Следовательно,

$$dn_S = 2\pi V_0^2 (t - t_0)^2 V_0 dt dn_2(A) = 2\pi R_{SA}^2 V_0 dt dn_2(A), \quad (2.43)$$

где $dn_2(A)$ — концентрация частиц вблизи точки $A(\rho, z)$, рассеянных элементом поверхности dS , и $R_{SA} = V_0(t - t_0)$ — расстояние от точки r_S до точки A . Приравнивая теперь (2.42) и (2.43), находим, что

$$dn_2(A) = n_0 \frac{\cos \theta' dS}{2\pi R_{SA}^2}. \quad (2.44)$$

Полная концентрация рассеянных частиц вблизи точки A получится, естественно, интегрированием $dn_2(A)$ по всей поверхности тела S_A , которая видна из точки A (с учетом, разумеется, того, что поток набегающих частиц рассеивает лишь передняя часть поверхности).

Для сферической поверхности $dS = R_0^2 \sin \beta d\beta d\varphi$ и

$$R_{SA}^2 = r^2 + R_0^2 - 2R_0 r \cos \beta = R_0^2 \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} - 2 \frac{\cos \beta}{\sin \theta} \right),$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, β — угол между r -направлением на точку A и r_S , а 2θ — угол, под которым сфера видна из точки A (см. рис. 10)

$$\sin \theta = \frac{R_0}{r} = \frac{R_0}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Следовательно, концентрация рассеянных сферой частиц

$$n_2(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \frac{n_0(\theta') \cos \theta' \sin \beta d\beta}{1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} - 2 \frac{\cos \beta}{\sin \theta}}, \quad (2.45)$$

где $n_0(\theta')$ — концентрация частиц в набегающем на поверхность тела потоке — она отлична от нуля лишь на

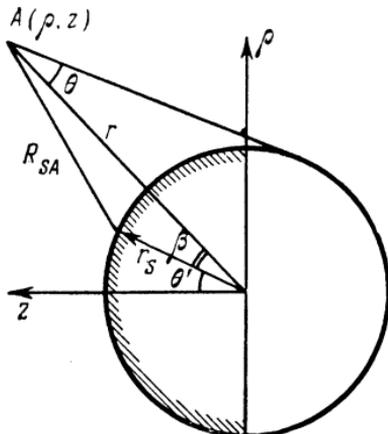


Рис. 7. К выводу концентрации частиц при диффузном рассеянии.

передней поверхности тела, заштрихованной на рис. 7:

$$n_0(\theta') = \begin{cases} n_0 & \text{при } \theta' \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } \theta' > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.46)$$

Угол θ' , как ясно из рис. 7, связан с углом β соотношением

$$\cos \theta' = \frac{z}{r} \cos \beta + \frac{\varrho}{r} \sin \beta \cos \varphi. \quad (2.47)$$

В зоне непосредственно впереди тела (при $\varrho \leq R_0$) концентрация $n_0(\theta') = n_0$, так как из любой точки, лежащей в этой области, видна лишь передняя поверхность тела. В этом случае интегрирование в формуле (2.45) проводится элементарно:

$$\begin{aligned} n_2(\varrho, z) &= \frac{n_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \frac{\left(\frac{z}{r} \cos \beta + \frac{\varrho}{r} \sin \beta \cos \varphi \right) \sin \beta d\beta}{1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \beta}{\sin \theta}} = \\ &= \frac{n_0 z}{2r} \sin \theta \int_{\sin \theta}^1 \frac{\cos \beta d(\cos \beta)}{\frac{\sin \theta}{2} \mp \frac{1}{2 \sin \theta} - \cos \beta} = \\ &= \frac{n_0 z}{4r} \sin \theta \left[\left(\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} \right) \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \theta - 2 \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\sin \theta = R_0/r$, находим окончательно, что при $\varrho \leq R$

$$n_2(\varrho, z) = \frac{n_0 z R_0^2}{4r^3} \cdot \left[\left(1 + \frac{r^2}{R_0^2} \right) \ln \left(\frac{r+R_0}{r-R_0} \right) + 2 - 2 \frac{r}{R_0} \right], \quad (2.48)$$

где $r = \sqrt{\varrho^2 + z^2}$. В частности, на оси z

$$n_2(0, z) = \frac{n_0 R_0^2}{4z^2} \left[\left(1 + \frac{z^2}{R_0^2} \right) \ln \left(\frac{z+R_0}{z-R_0} \right) + 2 - 2 \frac{z}{R_0} \right]. \quad (2.49)$$

Аналогично интегрируется выражение (2.45) и для точек, лежащих на оси ϱ (т. е. при $z=0$). В этом случае

$$n_2(\varrho, 0) = \frac{n_0}{2\pi} \left\{ \left(1 + \frac{R_0^2}{\varrho^2} \right) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{R_0}{\varrho} \right) + \right. \\ \left. + \frac{R_0}{\varrho} \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{\varrho^2}} - \left(1 - \frac{R_0^2}{\varrho^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{arctg} \left[\frac{R_0 + \varrho}{\varrho - R_0} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{R_0}{\varrho} \right) \right] \right\}.$$

Отношение полной концентрации частиц $n = n_0 + n_2$ к n_0 впереди тела на осях z и ϱ при диффузном рассеянии изображено на рис. 8,

а распределение концентрации частиц в окрестности сферы изображено на рис. 9. Из рисунков видно, что при диффузном рассеянии поток отраженных частиц оказывается более направленным, чем при зеркальном рассеянии (см. рис. 5, 6). Поэтому концентрация частиц непосредственно впереди тела при диффузном рассеянии выше, чем при зеркальном. Например, на оси z на больших расстояниях от тела, как следует из формулы (2.49), концентрация отраженных частиц $n_2 = \frac{n_0}{2} \left(\frac{R_0}{z} \right)^2$, в то время как при зеркальном рассеянии $n_2 = \frac{n_0}{4} \left(\frac{R_0}{z} \right)^2$. Однако наиболее сильно n_2 возрастает вблизи поверхности тела. Так, при $(r - R_0) \ll R_0$

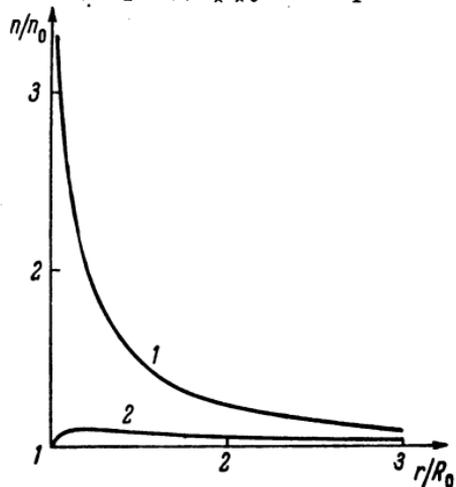


Рис. 8. Зависимость концентрации от расстояния до центра тела в области сгущения в случае диффузного рассеяния на оси z — кривая 1 и при $z=0$ — кривая 2.

возрастает вблизи поверхности тела. Так, при $(r - R_0) \ll R_0$

$$n_2 \approx \frac{n_0 z}{2R_0} \ln \frac{2R_0}{r - R_0},$$

так что при $r \rightarrow R_0$ концентрация отраженных частиц логарифмически растет и может сделаться значительно

больше концентрации частиц

в набегающем потоке. Значения n/n_0 на оси z вблизи поверхности тела приведены в табл. VII.

Таблица VII

$(z - R_0)/R_0$	n/n_0	$(z - R_0)/R_0$	n/n_0
0,0001	5,95	0,01	3,56
0,001	4,80	0,02	3,26
0,002	4,46	0,05	2,74
0,005	4,00	0,1	2,34

в. Аккомодация, поглощение и эмиссия частиц. Выше рассматривались лишь упругие столкновения частиц с поверхностью тела.

Вместе с тем обычно частица отражается от поверхности, сохранив лишь часть своей первоначальной энергии.

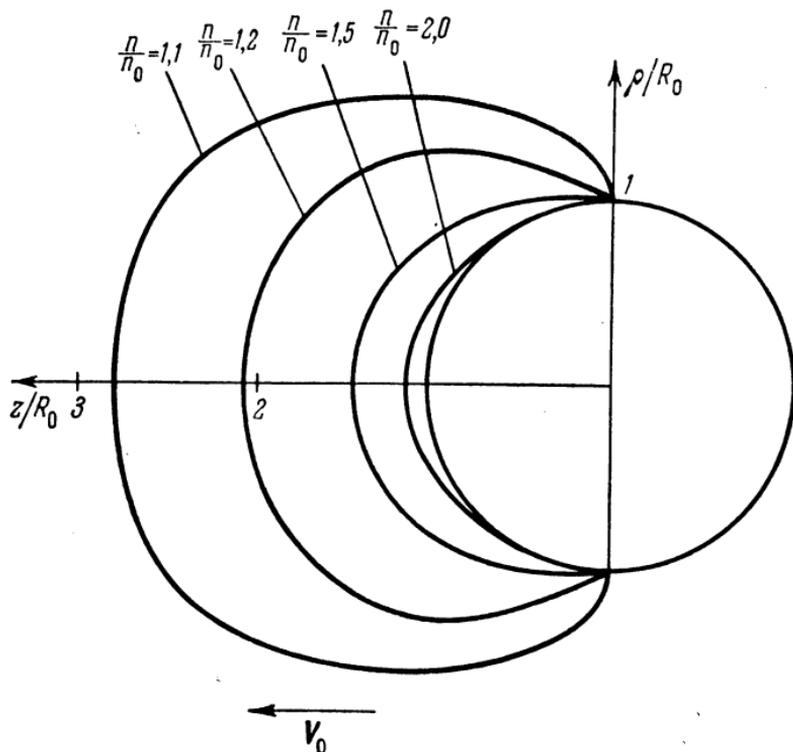


Рис. 9. Кривые постоянной концентрации частиц в области сгущения при диффузном рассеянии.

гии. Этот процесс неупругого рассеяния называется аккомодацией. В общем случае, как указано в § 3б,

его следует характеризовать функцией рассеяния $\omega_n(v, v_0, r_S)$, т. е. вероятностью того, что частица, сталкивающаяся с поверхностью в точке r_S , изменит свою начальную скорость v_0 на скорость v . Однако о функции ω_n в настоящее время известно еще очень мало. Процесс неупругого рассеяния характеризуется обычно эффективным коэффициентом аккомодации — средней величиной отношения энергии, переданной стенке к начальной кинетической энергии частицы:

$$p_a = \frac{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = 1 - \frac{v^2}{v_0^2},$$

где \mathcal{E}_0 и \mathcal{E} соответственно значения кинетической энергии частицы до и после отражения. Величина коэффициента аккомодации существенно зависит от отношения массы M налетающей частицы к массе M_S частиц, из которых состоит стенка, от температуры тела и других параметров (см. [19]). В среднем, по-видимому, можно считать, что $p_a \sim \frac{1}{2} \frac{M}{M_S}$; заметим, что в ионосфере и тем более в межпланетном газе M меньше или много меньше M_S и коэффициент аккомодации p_a , по-видимому, невелик, т. е. рассеяние близко к упругому. (Упругому отражению частицы от стенки соответствует значение $p_a = 0$, полная потеря энергии частицы при столкновении дает $p_a = 1$.)

Влияние средней аккомодации на плотность отраженных от тела частиц учитывается очень просто. Достаточно лишь учесть, что средняя скорость отраженных частиц теперь равна

$$v = v_0(1 - p_a)^{1/2}.$$

Следовательно, концентрация отраженных частиц $n_2(r)$ в выражениях (2.40), (2.45) и т. д. при учете аккомодации в среднем увеличивается в $(\sqrt{1 - p_a})^{-1}$ раз.

Концентрация отраженных частиц существенно зависит от поглощения их на поверхности тела, а также от обратного процесса, т. е. эмиссии этих частиц. Как уже указывалось выше, эти процессы весьма сложны и мало изучены, что не позволяет детально учесть их при рассмотрении структуры возмущенной зоны. Можно лишь заметить, что эмиссионные процессы из-за невы-

сокой температуры тела и сравнительно малой энергии налетающих частиц в верхней ионосфере, по-видимому, не очень существенны. Напротив, вероятность нейтрализации ионов, налетающих на тело с небольшой энергией $3 \sim 5$ эв, обычно велика: например, коэффициент отражения ионов от чистого металла лишь порядка процента (см. [19]). Следовательно, число отраженных от тела ионов может быть весьма малым, что существенно скажется на их концентрации в области сгущения. В среднем этот процесс нейтрализации ионов можно учесть, вводя коэффициент отражения R_i ионов от тела. В этом случае концентрация отраженных от тела ионов $N_{2i}(r)$ определяется соотношением

$$N_{2i}(r) = R_i n_2(r) \frac{N_0}{n_0}, \quad (2.50)$$

где $n_2(r)$ — концентрация отраженных нейтральных частиц, определенная формулами (2.40), (2.45) и др., N_0 — концентрация ионов в невозмущенной плазме. В ряде случаев ниже мы будем вообще пренебрегать отраженными от тела ионами, считая коэффициент отражения ионов R_i малым.

§ 7. Концентрация частиц вокруг шара, движущегося с произвольной скоростью

а. Функция распределения. В предыдущих параграфах анализировались эффекты в окрестности быстро движущегося тела. Здесь будет рассмотрен случай шара, движущегося с произвольной скоростью.

Представим себе, как обычно, что шар с центром в точке O движется со скоростью V_0 . В системе координат, где шар покоится, вся картина симметрична относительно оси z , проходящей через O в направлении V_0 . Выберем точку $A(\varrho, z)$ и введем, как обычно, угол ϑ между OA и осью z и угол 2θ , под которым шар виден из точки A (рис. 10), т. е.

$$\sin \vartheta = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} = \frac{\varrho}{r}, \quad \sin \theta = \frac{R_0}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} = \frac{R_0}{r}. \quad (2.51)$$

Пусть OA будет осью сферической системы координат в пространстве скоростей. Тогда попавшие в точку A

частицы, скорости которых образуют с OA угол β больший, чем θ , очевидно, попали в точку A , минуя шар, а частицы, скорости которых образуют с OA угол $\beta < \theta$, попали в точку A после столкновения с поверхностью шара. Тогда уравнения (2.9), (1.14) для функции распределения нейтральных частиц записываются в виде

$$v \frac{\partial f_n}{\partial r} = \frac{r}{r} \delta(r - R_0) \begin{cases} \int \omega_n(v, v_1, r_S) v_1 d^3 v_1, & \beta < \theta, \\ -vf, & \beta > \pi - \theta, \\ 0, & \pi - \theta > \beta > \theta. \end{cases} \quad (2.52)$$

Здесь учтено, что уравнение поверхности сферы есть $F = r - R_0 = 0$, и что условие $\beta < \theta$ означает одновременно, что $vr_S > 0$, а условие $\beta > \pi - \theta$, что $vr_S < 0$. Функция ω_n есть вероятность рассеяния для нейтральных частиц (см. § 3б). Если поверхность однородна, то ω_n не зависит от r_S . В этом случае решение уравнения (2.52), как нетрудно убедиться прямой подстановкой, имеет вид

$$f_n = \begin{cases} f_0(v + V_0) = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} n_0 \exp\left[-\frac{M(v + V_0)^2}{2kT}\right], & \beta > \theta, \\ -\frac{1}{(nv)} \int f_0(v_1 + V_0) (nv_1) \omega_n(v, v_1) d^3 v_1, & \beta < \theta, \end{cases} \quad (2.53)$$

где f_0 — невозмущенная (максвелловская) функция распределения (1.6), n — внешняя нормаль к сфере в точке соударения частицы с поверхностью. В самом деле, функция распределения (2.53) не зависит от пространственных координат всюду, кроме точек на поверхности, определяемой условием $\theta = \pi/2$, т. е. на поверхности сферы $r = R_0$.

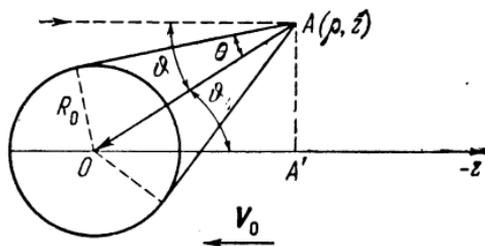


Рис. 10.

На этой поверхности функция распределения (2.53) терпит разрыв; следовательно, $\frac{\partial f}{\partial r} = n\delta(r - R_0) \Delta f$, где Δf — скачок функции распределения. При $\beta > \pi/2$, как ясно из (2.53), этот скачок Δf

просто равен $-f_0$, а при $\beta < \pi/2$ равен $\frac{1}{nv} \int f_0 nv_1 \omega_n d^3v_1$, и следовательно, функция распределения (2.53) удовлетворяет уравнению (2.52).

Концентрация частиц в произвольной точке A , которую можно характеризовать координатами ρ и z или углами ϑ и θ (см. (2.51) и рис. 10), складывается из концентрации прямых частиц n_1 , не испытавших столкновения с телом, и концентрации отраженных частиц n_2 , т. е. $n = n_1 + n_2$, где

$$n_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta}^{\pi} \sin \beta d\beta \int_0^{\infty} v^2 f_0(v + V_0) dv, \quad (2.54)$$

$$n_2 = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta} \sin \beta d\beta \int_0^{\infty} \frac{v^2 dv}{(nv)} \int f_0(v_1 + V_0) (nv_1) \omega_n(v, v_1) d^3v_1, \quad (2.55)$$

а φ и β — азимутальный и полярный углы с осью OA в сферической системе координат.

б. Концентрация прямых частиц. Выпишем прежде всего выражение для концентрации прямых частиц n_1 . Учитывая, что

$$(v + V_0)^2 = v^2 + V_0^2 + 2vV_0(-\cos \vartheta \cos \beta + \sin \vartheta \sin \beta \cos \varphi),$$

имеем

$$n_1(\vartheta, \theta) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta}^{\pi} \sin \beta d\beta \int_0^{\infty} v^2 n_0 \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{M}{2kT} [V_0^2 + v^2 + 2vV_0(-\cos \vartheta \cos \beta + \sin \vartheta \sin \beta \cos \varphi)] \right\} dv. \quad (2.54a)$$

Выражая теперь интеграл по $d\varphi$ через функцию Бесселя, от мнимого аргумента получаем

$$n_1 = n_0 \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{\theta}^{\pi} \sin \beta d\beta \times \\ \times \int_0^{\infty} v^2 \exp \left[-\frac{M}{2kT} (V_0^2 + v^2 - 2vV_0 \cos \vartheta \cos \beta) \right] \times \\ \times I_0 \left(\frac{MvV_0}{kT} \sin \vartheta \sin \beta \right) dv. \quad (2.56)$$

В точках на оси z значения $\sin \vartheta = 0$ и интеграл по $d\beta$ вычисляется элементарно, а именно

$$\begin{aligned}
 n_1(0, \theta) &= n_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \frac{\kappa T}{MV_0} \int_0^\infty v \exp \left[-\frac{M(V_0^2 + v^2)}{2\kappa T} \right] \times \\
 &\times \left\{ \exp \left(\frac{MvV_0 \cos \theta}{\kappa T} \right) - \exp \left(-\frac{MvV_0}{\kappa T} \right) \right\} dv = \\
 &= n_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}}} e^{-x^2} dx + \cos \theta e^{-\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \sin^2 \theta} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \cos \theta}} e^{-x^2} dx \right) \right] = \\
 &= \frac{n_0}{2} \left\{ 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \right) + \cos \theta e^{-\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \sin^2 \theta} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[1 + \Phi \left(\sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \cos \theta} \right) \right] \right\}, \quad (2.56a)
 \end{aligned}$$

где, как обычно, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ — интеграл вероятности.

Рассмотрим случай больших расстояний от тела, таких, где

$$\theta \ll 1 \quad \text{и} \quad \theta \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \ll 1. \quad (2.57)$$

Тогда $\int_0^\pi \{ \dots \} d\beta$ удобнее представить в виде

$$\int_0^\pi \{ \dots \} d\beta = \int_0^\pi \{ \dots \} d\beta - \int_0^\theta \{ \dots \} d\beta.$$

Очевидно, что член с $\int_0^\pi \{ \dots \} d\beta$ равен n_0 , так как интегрирование в нем ведется по всему пространству

скоростей. Таким образом,

$$n_1 = n_0 - n_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} 2\pi \int_0^\theta \sin \beta \, d\beta \times \\ \times \int_0^\infty v^2 \exp \left[-\frac{M}{2\kappa T} (V_0^2 + v^2 - 2vV_0 \cos \vartheta \cos \beta) \right] \times \\ \times I_0 \left(\frac{MvV_0}{\kappa T} \sin \vartheta \sin \beta \right) dv. \quad (2.58)$$

В силу условия (2.57) мы можем теперь в подынтегральном выражении положить везде, кроме множителя $\sin \beta$, $\beta = 0$, а $\sin \beta$ заменить на β . Тогда

$$n_1 = n_0 - n_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \pi \theta^2 \int_0^\infty v^2 \times \\ \times \exp \left[-\frac{M}{2\kappa T} (V_0^2 + v^2 - 2vV_0 \cos \vartheta) \right] dv = \\ = n_0 - n_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \frac{\pi R_0^2}{r^2} \int_0^\infty v^2 \times \\ \times \exp \left[-\frac{M}{2\kappa T} (V_0^2 + v^2 - 2vV_0 \cos \vartheta) \right] dv, \quad (2.59)$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Отсюда видно, что на больших расстояниях от тела возмущения концентрации прямых частиц убывают всегда, как $1/r^2$.

в. Концентрация отраженных частиц. Концентрация отраженных частиц, как ясно из (2.55), существенно зависит от закона рассеяния частиц поверхностью. При зеркальном отражении функция рассеяния ω_n определена выражением (1.15):

$$\omega_n = \delta(v_1 - v + 2n(nv)),$$

где n — нормаль к поверхности в точке рассеяния. В этом случае

$$n_2(r) = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\theta \sin \beta \, d\beta \int_0^\infty \frac{v^2 dv}{(nv)} \int f_0(v_1 + V_0)(nv_1) \omega_n d^3v_1 = \\ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\theta \sin \beta \, d\beta \int_0^\infty v^2 f_0(v + V_0) \exp \left[\frac{2M(nv)(nv_0)}{\kappa T} \right].$$

Можно получить также несколько иное выражение для $n_2(r)$, проведя вначале интегрирование по d^3v . Учтем при этом, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\theta \sin \beta d\beta \int_0^\infty v^2 \delta(v_1 - v + 2n(nv)) dv = \begin{cases} \frac{d^3r_1}{d^3r}, & \theta < \beta_1 < \pi, \\ 0, & 0 < \beta_1 < \theta, \end{cases} \quad (2.60)$$

где d^3r — элементарный объем вблизи точки r , который занимают частицы, занимавшие объем d^3r_1 до столкновения с поверхностью и имевшие скорость v_1 . Следовательно,

$$n_2(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi d\beta_1 \sin \beta_1 \int_0^\infty v_1^2 f_0(v_1 + V_0) \frac{d^3r_1}{d^3r} dv. \quad (2.61)$$

Это выражение имеет простой физический смысл. Его можно сразу получить, не решая кинетического уравнения, а воспользовавшись теоремой Лиувилля. В самом деле, согласно теореме Лиувилля концентрация частиц в шестимерном пространстве v, r не изменяется при рассеянии, т. е.

$$f_2(v, r) d^3v d^3r = f_0(v_1 + V_0) d^3v_1 d^3r_1,$$

где f_2 — функция распределения для отраженных частиц, f_0 — функция распределения падающих на поверхность частиц. Следовательно,

$$n_2 = \int f_2 d^3v = \int f_0(v_1 + V_0) \frac{d^3r_1}{d^3r} d^3v_1.$$

Учитывая теперь, что в выбранной нами системе координат полярный угол β для скорости отраженных частиц v изменяется лишь от 0 до θ и соответственно полярный угол скорости v_1 изменяется от θ до π , приходим сразу к выражению (2.61) для концентрации отраженных частиц.

Таким образом, для того чтобы найти n_2 , достаточно определить отношение $\frac{d^3r_1}{d^3r}$, т. е. найти как связаны между собой объемы до и после столкновения. Но такая

задача уже решалась выше при определении концентрации частиц в области сгущения для быстро движущегося тела (см. § 6а). Разница состоит лишь в том, что теперь налетающие на тело частицы движутся под любым углом к оси z . Используя (2.40) и (2.35), имеем

$$\frac{d^3 r_1}{d^3 r} = \frac{R_0^2 \cos^2 \theta' \sin^2 \theta'}{q' (q' - R_0 \sin^3 \theta')}, \quad (2.40a)$$

где q' и z' — координаты точки r в системе координат, у которой ось z' параллельна скорости налетающей частицы v_1 . Угол θ' связан с q' и z' соотношением

$$R_0 = 2z' \cos \theta' + 2q' \sin \theta' - \frac{q'}{\sin \theta'}. \quad (2.35a)$$

Учитывая теперь, что

$$\frac{q'}{\sqrt{q'^2 + z'^2}} = \sin \beta_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{q'^2 + z'^2}} = -\cos \beta_1,$$

можем окончательно записать выражение (2.40a) для $\frac{d^3 r_1}{d^3 r}$ в виде

$$\frac{d^3 r_1}{d^3 r} = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta' \sin^2 \theta'}{\sin^2 \beta_1 - \sin \beta_1 \sin \theta \sin^3 \theta'}, \quad (2.62)$$

где угол θ определен формулой (2.51), а θ' связано с θ и β_1 соотношением

$$\sin \beta_1 = -2 \sin \theta' \cos (\beta_1 + \theta') - \sin \theta \sin \theta'. \quad (2.63)$$

При диффузном рассеянии, если вероятность рассеяния дается общим выражением (1.20)

$$w_n = \frac{1}{2\pi} p(v, v_1),$$

то

$$n_2(r) = -\frac{1}{2\pi} \int d\Omega \int_0^\infty \frac{v^2 dv}{(nv)} \int f_0(v_1 + V_0)(nv_1) p(v, v_1) d^3 v_1. \quad (2.64)$$

Здесь интегрирование в пространстве скорости v ведется внутри угла, под которым видна из точки r рассеивающая поверхность S . В общем случае удобно перейти к интегрированию по поверхности S . Учтем, что

$d\Omega = \frac{dS}{R_{Sr}^2} \frac{(nv)}{v}$, где R_{Sr} — расстояние от точки r до точки рассеяния r_s , а n — нормаль к поверхности в точке рассеяния. Тогда

$$n_2(r) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{dS}{R_{Sr}^2} \int_0^\infty v dv \int f_0(v_1 + V_0) (nv_1) p(v, v_1) d^3v_1, \quad (2.65)$$

где интегрирование по dS ведется по всей области поверхности, которая видна из точки r .

В случае упругого диффузного рассеяния (в отсутствие аккомодации)

$$p(v, v_1) = \frac{1}{v^2} \delta(v - v_1)$$

(см. (1.18)). Для сферической поверхности, кроме того,

$$dS = R_0^2 \sin \beta d\beta d\varphi, \quad R_{Sr}^2 = R_0^2 \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \beta}{\sin \theta} \right), \quad (2.66)$$

где β — полярный угол, отсчитываемый от направления на точку r (см. рис. 7); следовательно, в этом случае

$$n_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \frac{\sin \beta d\beta}{1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \beta}{\sin \theta}} \times \\ \times \int_{(v_1 n) < 0} \cos(v_1 n) f_0(v_1 + V_0) d^3v_1. \quad (2.67)$$

Угол θ здесь по-прежнему определен формулой (2.51).

г. Быстро движущийся шар. В случае, когда скорость шара много больше средней тепловой скорости частиц, т. е.

$$\sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \gg 1,$$

полученные выше выражения можно существенно упростить.

Рассмотрим прежде всего область разрежения на большом расстоянии сзади тела, так что

$$\frac{r}{z}, \frac{R_0}{z} \ll \sqrt[4]{\frac{\kappa T}{MV_0^2}} \ll 1. \quad (2.68)$$

В этой области вклад отраженных частиц, как указывалось в § 5, экспоненциально мал, так как частица, отражающаяся от тела позади, должна до отражения иметь скорость $\sim V_0$, а таких частиц очень мало. Поэтому $n \approx n_1$. При условии (2.68), т. е. когда

$$\vartheta, \theta \ll \sqrt[4]{\frac{\kappa T}{MV_0^2}} \ll 1, \quad (2.69)$$

можно в формуле (2.56) положить

$$\sin \vartheta \approx \vartheta, \quad \sin \beta \approx \beta, \quad \cos \vartheta \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}, \quad \cos \beta \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} n = n_0 - n_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} 2\pi \int_0^\theta \beta \, d\beta \times \\ \times \int_0^\infty v^2 \exp \left[-\frac{M}{2\kappa T} [(v - V_0)^2 + \right. \\ \left. + vV_0(\beta^2 + \vartheta^2)] \right] I_0 \left(\frac{MvV_0\beta\vartheta}{\kappa T} \right) dv. \quad (2.70) \end{aligned}$$

Далее, выполнение условия $\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \gg 1$ означает, что множитель $\exp \left[-\frac{M}{2\kappa T} (v - V_0)^2 \right]$ имеет резкий максимум при $v \approx V_0$. Это позволяет везде, кроме этого множителя, заменить v на V_0 , а нижний предел интегрирования по dv на $-\infty$, т. е.

$$\begin{aligned} n = n_0 - 2n_0 \left(\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \right) e^{-\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \vartheta^2} \times \\ \times \int_0^\theta e^{-\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \beta^2} I_0 \left(\frac{MV_0^2}{\kappa T} \vartheta \beta \right) \beta \, d\beta. \quad (2.71) \end{aligned}$$

Учитывая, что $\vartheta \approx \frac{q}{z}$, $\theta \approx \frac{R_0}{z}$, и полагая переменную интегрирования $\beta = \sqrt{\frac{2\kappa T}{MV_0^2}} \tau$, находим, что формула (2.71) совпадает с (2.24).

Рассмотрим теперь область позади тела на небольших расстояниях от его поверхности, но вдали от оси z . Именно, мы будем считать, что

$$\vartheta < \theta, \quad \frac{2\kappa T}{MV_0^2} \ll \vartheta \sim 1. \quad (2.72)$$

В этой области число как прямых, так и отраженных частиц экспоненциально мало. Вычислим для примера n_1 . При этом удобнее непосредственно исходить из формулы (2.54). При условии (2.72), как легко видеть, показатель в подынтегральном выражении в (2.54а) имеет максимальное значение при $\varphi = \pi$. Интеграл по φ можно вычислить методом перевала. Производя разложение по $x = \varphi - \pi$ и заменяя пределы интегрирования по x на $x = \infty$ получаем

$$\begin{aligned} n_1 &= n_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^2 dv \int_{-\infty}^\infty dx \times \\ &\times \exp \left[-\frac{MvV_0}{\kappa T} \sin \beta \sin \vartheta x^2 \right] \int_0^\pi \exp \left[-\frac{M}{2\kappa T} (v^2 + V_0^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{MvV_0}{\kappa T} (\cos \beta \cos \vartheta + \sin \beta \sin \vartheta) \right] \sin \beta d\beta \approx \\ &\approx \frac{n_0}{\sqrt{V_0 \sin \vartheta}} \frac{M}{2\pi\kappa T} \int_0^\infty v^{3/2} dv \times \\ &\times \int_0^\pi \sqrt{\sin \beta} \exp \left[\frac{MvV_0}{\kappa T} \cos(\beta - \vartheta) \right] d\beta. \quad (2.73) \end{aligned}$$

В интеграле по $d\beta$ главный вклад дают значения β , близкие к ϑ . Полагая

$$\cos(\beta - \vartheta) \approx \cos(\theta - \vartheta) - \sin(\theta - \vartheta)(\beta - \theta),$$

получаем, заменяя верхний предел в интеграле по $d(\beta - \theta)$ на ∞ :

$$\begin{aligned}
 n_1 &= n_0 \frac{M}{2\pi\kappa T} \sqrt{\frac{\sin \theta}{V_0 \sin \vartheta}} \int_0^\infty v^{3/2} \exp \left[-\frac{M}{2\kappa T} (V_0^2 + v^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2vV_0 \cos(\theta - \vartheta)) \right] dv \int_0^\infty \exp \left[-\frac{MvV_0 \sin(\theta - \vartheta)}{\kappa T} \beta \right] d\beta = \\
 &= \frac{n_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\sin \theta}{V_0^3 \sin \vartheta}} \frac{1}{\sin(\theta - \vartheta)} \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty v^{1/2} \exp \left\{ -\frac{M}{2\kappa T} [V_0^2 + v^2 - 2vV_0 \cos(\theta - \vartheta)] \right\} dv. \quad (2.74)
 \end{aligned}$$

В интеграле по dv показатель имеет резкий максимум при значении $v = V_0 \cos(\theta - \vartheta)$; учитывая это, окончательно имеем

$$n_1 = n_0 \left(\frac{\kappa T}{2\pi M V_0^2} \right)^{1/2} \frac{\sin \theta \cos(\theta - \vartheta)}{\sin \vartheta \sin^2(\theta - \vartheta)} \exp \left[-\frac{M V_0^2}{2\kappa T} \sin^2(\theta - \vartheta) \right]. \quad (2.75)$$

Наконец, на оси z вблизи от поверхности шара ($(z - R_0) \ll R_0$), как это следует непосредственно из (2.56а),

$$\begin{aligned}
 n_1 &= n_0 \left(\frac{\kappa T}{2\pi M V_0^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{M V_0^2}{2\kappa T}} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi M V_0^2}{\kappa T} \frac{z - R_0}{R_0} \right)^{1/2} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp \left[\frac{M V_0^2 (z - R_0)}{\kappa T R_0} \right] \left[1 + \Phi \left(\sqrt{\frac{M V_0^2 (z - R_0)}{\kappa T R_0}} \right) \right] \right\}. \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

При этом если $\frac{M V_0^2}{2\kappa T} \frac{z - R_0}{R_0} \gg 1$, то

$$n_1(0, z) = n_0 \frac{\sqrt{z^2 - R_0^2}}{z} \exp \left[-\frac{M V_0^2 R_0^2}{2\kappa T z^2} \right]. \quad (2.77)$$

Определим теперь концентрацию отраженных частиц n_2 позади тела в области разрежения в случае зеркального отражения [26]. Рассмотрим n_2 на оси z . В этом

случае выражение (2.61) переписывается в виде

$$n_2 = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T} \right)^{3/2} e^{-\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \int_0^\infty v_1^2 e^{-\frac{Mv_1^2}{2\kappa T}} dv_1 \times \\ \times \int_0^\pi \frac{d^3 r_1}{d^3 r} \sin \beta_1 e^{\frac{Mv_1 V_0}{\kappa T} \cos \beta_1} d\beta_1. \quad (2.78)$$

Из дальнейшего будет видно, что основной вклад в n_2 вносят частицы, имеющие скорости $v_1 \approx V_0 \cos \theta$. Поэтому коэффициент при $\cos \beta_1$ в показателе экспоненты во втором интеграле, который мы обозначаем через b , можно переписать в виде

$$b = \frac{Mv_1 V_0}{\kappa T} \approx \frac{MV_0^2}{\kappa T} \cos \theta = \frac{MV_0^2}{\kappa T} \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{z^2}}. \quad (2.79)$$

Не слишком близко к поверхности тела значение $b \gg 1$. При $b \gg 1$ второй интеграл в (2.78) главным образом определяется значениями $\beta_1 = \theta + x$, где $x \ll 1$. В этом случае из (2.63) следует, что $\theta' = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$. Отсюда, подставляя в (2.62), находим, что

$$\frac{d^3 r_1}{d^3 r} = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta' \sin^2 \theta'}{\sin^2 \beta_1 - \sin \beta_1 \sin \theta \sin^3 \theta'} \approx \frac{1}{4} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x. \quad (2.80)$$

Область, не очень удаленная от тела, определяется значениями угла θ :

$$\sin \theta = \frac{R_0}{z} \gg \sqrt{\frac{2\kappa T}{MV_0^2}}. \quad (2.81)$$

Подставляя (2.80) и β_1 во второй интеграл (2.78) и обозначая его через d , имеем

$$d = \int_0^\pi \frac{d^3 r_1}{d^3 r} \sin \beta_1 e^{b \cos \beta_1} d\beta_1 = \\ = \frac{1}{4} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} e^{b \cos \theta} \int_0^\infty x e^{-b \sin \theta x} dx = \frac{1}{4} \frac{e^{b \cos \theta}}{b^2 \cos \theta}.$$

Учитывая, что при выполнении условия (2.80) показатель экспоненты имеет резкий максимум при $v_1 = V_0 \cos \theta$,

находим окончательно

$$n_2 = \frac{n_0}{4} \frac{\kappa T}{MV_0^2 \cos \theta} e^{-\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \sin^2 \theta} = \frac{n_0}{4} \frac{\kappa T}{MV_0^2} \frac{z}{\sqrt{z^2 - R_0^2}} \exp \left[-\frac{MV_0^2 R_0^2}{2\kappa T z^2} \right]. \quad (2.82)$$

Концентрация прямых частиц в тех же условиях дается формулой (2.77). Сравнивая (2.77) и (2.82), убеждаемся, что $n_2 \ll n_1$. Вообще всюду позади тела, кроме области, непосредственно прилегающей к его поверхности, $(z - R_0) \ll R_0 \sqrt{\frac{2\kappa T}{MV_0^2}}$, концентрация отраженных частиц много меньше, чем концентрация прямых частиц. Заметим, что главную часть отраженных частиц составляют частицы, направления скоростей которых близки к касательным к шару, проведенным через точку наблюдения.

Рассмотрим теперь область впереди тела. Здесь число прямых частиц отличается от n_0 лишь на экспоненциально малую величину, так как телом затеняются только те частицы, которые имеют скорость больше скорости тела. Поэтому $n = n_1 + n_2 \approx n_0 + n_2$. Найдем n_2 для случая зеркально отражающей поверхности. При условии $MV_0^2/2\kappa T \gg 1$ показатель экспоненты в выражении для f_0 в (2.61) имеет максимум при $\beta_1 = \vartheta$. При $\beta_1 = \vartheta$ ось z' совпадает с осью z , и угол θ' вновь определяется уравнением (2.35), так как $z' = z$ и $q' = q$, т. е.

$$R_0 = 2z \cos \theta' + 2q \sin \theta' - \frac{q}{\sin \theta'}. \quad (2.35)$$

Поэтому можно вынести $\frac{d^3 r_1}{d^3 r}$ из-под интегралов. Кроме того, можно заменить нижний предел в интеграле по $d\beta_1$ на 0, так как при $0 < \beta_1 < \theta$ подынтегральная функция все равно очень мала. Тогда двойной интеграл оказывается равным просто n_0 , и мы получаем из (2.61) формулу (2.40):

$$n_2 = n_0 \left(\frac{R_0}{q} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta' \cos^2 \theta'}{1 - \frac{R_0}{q} \sin^3 \theta'}.$$

При диффузном рассеянии, учитывая, что направления налетающих на тело частиц близки к $-V_0$, т. е.

в формуле (2.67) $\cos(v_1 n) \approx \cos(V_0, n) = \cos \theta'$, сразу получаем из (2.67) выражение (2.45).

д. Влияние формы поверхности на структуру области разрежения в случае быстро движущегося тела. В § 5 были получены общие приближенные выражения для

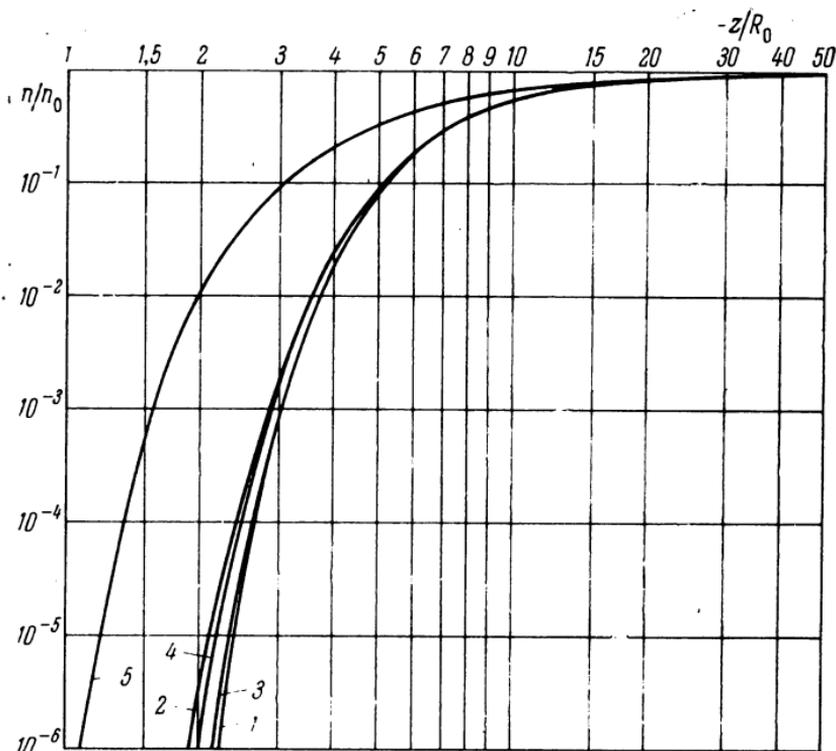


Рис. 11. Концентрация частиц на оси z позади быстро движущегося тела $\left(V_0 / \sqrt{\frac{2\kappa T}{M}} = 8\right)$ при одинаковом сечении тела $S = \pi R_0^2$: 1—шар, 2—диск, 3—тело круглого сечения, 4—тело квадратного сечения, 5—тело прямоугольного сечения ($R_x = 4R_y$).

концентрации частиц в разреженной зоне вдали от быстро движущегося тела. Сравним с ними результаты точного решения задачи для быстро движущегося шара. На оси z позади шара радиуса R_0 концентрация частиц дается формулой (2.77):

$$n(0, z) = n_0 \frac{\sqrt{z^2 - R_0^2}}{z} \exp \left[-\frac{MV_0^2 R_0^2}{2\kappa T z^2} \right]. \quad (2.77)$$

Аналогичный расчет $n_1(0, z)$ с помощью формулы (2.22) позади диска того же радиуса R_0 приводит к выражению

$$n(0, z) = n_0 \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_0^2}} \exp \left[-\frac{MV_0^2}{2\kappa T} \frac{R_0^2}{z^2 + R_0^2} \right]. \quad (2.83)$$

Приближенная формула (2.23) для тела, максимальное сечение которого есть круг радиуса R_0 , имеет вид (см. 2.25)

$$n(0, z) = n_0 \exp \left[-\frac{MV_0^2 R_0^2}{2\kappa T z^2} \right]. \quad (2.25)$$

Значения концентрации частиц на оси z позади шара, диска и тел любой формы, максимальные сечения которых $S_0 = \pi R_0^2$ и имеют форму круга, квадрата или прямоугольника, при $V_0/\sqrt{2\kappa T/M} = 8$ приведены в табл. VIII и

Таблица VIII

Значения отношений концентрации частиц n/n_0 в разреженной зоне для тел с различной формой сечения

z/R_0	Шар	Диск	Сечение круг	Сечение квадрат	Сечение прямо- угольник $R_y = 4R_x$
1	$5,65 \cdot 10^{-30}$	$8,98 \cdot 10^{-15}$	$1,60 \cdot 10^{-28}$	$2,28 \cdot 10^{-23}$	$5,40 \cdot 10^{-7}$
2	$9,75 \cdot 10^{-8}$	$2,44 \cdot 10^{-6}$	$1,12 \cdot 10^{-7}$	$1,07 \cdot 10^{-6}$	0,012
3	$7,77 \cdot 10^{-4}$	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$8,25 \cdot 10^{-4}$	$1,74 \cdot 10^{-3}$	0,095
4	0,0177	0,0226	0,0183	0,0247	0,211
5	0,0757	0,0836	0,0773	0,0894	0,316
6	0,167	0,176	0,169	0,188	0,404
7	0,269	0,273	0,270	0,282	0,477
8	0,365	0,370	0,368	0,378	0,537
9	0,452	0,456	0,455	0,463	0,589
10	0,524	0,527	0,527	0,532	0,634
12	0,640	0,642	0,642	0,644	0,708
14	0,720	0,721	0,722	0,724	0,764
16	0,778	0,779	0,779	0,781	0,807
18	0,820	0,821	0,821	0,822	0,839
20	0,852	0,852	0,852	0,853	0,865
25	0,903	0,903	0,903	0,903	0,908
30	0,931	0,931	0,931	0,931	0,934
35	0,949	0,949	0,949	0,949	0,951
40	0,961	0,961	0,961	0,961	0,962

на рис. 11. Из рисунка и таблицы видно, что вблизи поверхности тела, в области, где концентрация частиц

мала, существенно влияние формы сечения тела; вдали от поверхности тела возмущение концентрации определяется лишь величиной сечения.

Пусть R_0 — эффективный радиус максимального сечения тела $R_0 = \sqrt{S_0/\pi}$. В зависимости от отношения z/R_0 можно выделить четыре области.

1) Дальняя область: $\frac{z}{R_0} > \frac{V_0}{\sqrt{2\kappa T/M}}$. Здесь существенна лишь величина сечения S_0 . Возмущения концентрации в этой области невелики; они определяются формулой (2.29).

2) Промежуточная область: $\frac{V_0}{\sqrt{2\kappa T/M}} > \frac{z}{R_0} > \sqrt{\frac{V_0}{2\kappa T/M}}$. Здесь существенна не только величина, но и форма максимального сечения тела. Возмущения концентрации в этой области уже весьма велики, так что концентрация частиц n гораздо меньше, чем невозмущенная концентрация n_0 . Возмущение концентрации определяется общей формулой (2.23), а для тел, имеющих конкретно сечением круг или прямоугольник, — формулами (2.24), (2.26).

3) Область вблизи тела: $\frac{z}{R_0} < \sqrt{\frac{V_0}{2\kappa T/M}}$. Здесь заметно влияние формы поверхности тела, а не только форма сечения*). Концентрация частиц в этой области мала:

$$n < n_0 \exp \left[- \sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} \right].$$

Для сферической поверхности она определяется формулой (2.77), для диска — формулой (2.83).

4) Область, непосредственно примыкающая к поверхности тела, $(z - R_0) < R_0 \sqrt{\frac{\kappa T}{MV_0^2}}$. Здесь существенны как прямые, так и отраженные частицы. Концентрация частиц в этой области ничтожно мала:

$$n \sim n_0 \exp \left[- \frac{MV_0^2}{2\kappa T} \right].$$

*) Заметим, что граница между областями 2 и 3 изменяется в зависимости от продольного размера тела.

§ 8. Компоненты Фурье возмущений концентрации частиц для быстро движущегося шара

Для решения задачи о рассеянии радиоволн необходимо определить возмущение концентрации электронов в следе тела. При этом, как мы увидим ниже, в расчетные формулы входит не само возмущение концентрации, как функция координат, а компоненты Фурье возмущения.

Концентрация электронов в окрестности большого тела ($R_0 \gg D$), как указывалось выше в § 4, совпадает с концентрацией ионов, а концентрация ионов, в отсутствие магнитного поля и в пренебрежении влиянием электрического поля, определяется теми же формулами, что и концентрация нейтральных частиц. Иными словами, в этом приближении концентрации ионов и электронов описываются выражениями, полученными в предыдущих параграфах — нужно лишь заменить n_0 на N_0 и M на M_i , где N_0 — концентрация ионов в невозмущенной плазме, а M_i — масса ионов. Для вычисления компонент Фурье электронной плотности достаточно провести преобразование Фурье над $N(r)$. Однако удобнее вычислять N_q , решая непосредственно уравнение (2.9) для функции распределения, которое можно в этом случае записать в виде

$$v \frac{\partial f_i}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{rv}{r} f_i(v) \delta(r - R_0) & \text{при } rv < 0, \\ 0 & \text{при } rv > 0. \end{cases} \quad (2.84)$$

Здесь принято, что ионы полностью нейтрализуются при соударении с поверхностью (см. (1.22)). В правой части уравнения (2.84) $f_i(v)$ можно заменить на

$$f_{oi} = \left(\frac{M_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} N_0 \exp \left[-\frac{M_i(v + V_0)^2}{2kT} \right],$$

так как наличие тела, очевидно, никак не влияет на налетающие ионы. Кроме того, при большой скорости шара, как мы видели выше в §§ 5, 7, можно заменить в правой части уравнения v на $-V_0$, поэтому вместо (2.84) имеем

$$v \frac{\partial f_i}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{r}{r} V_0 f_{oi}(v) \delta(r - R_0), & rV_0 < 0, \\ 0, & rV_0 > 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

Для вычисления компоненты Фурье функции распределения f_i умножим (2.85) на e^{iqr} и проинтегрируем по d^3r . Получаем

$$iqvf_q = - \int \frac{r}{r} V_0 f_{0i}(v) \delta(r - R_0) e^{-iqr} d^3r, \quad (2.86)$$

где

$$f_q = \int f_i(r) e^{-iqr} d^3r,$$

$$f_i = f_i - f_{0i}.$$

Отметим здесь, что, как мы увидим в гл. VII, в задаче о рассеянии радиоволн на следе тела вектор q оказывается равным изменению волнового вектора волны при рассеянии, т. е. $q = k' - k$, где k — волновой вектор падающей, а k' — рассеянной волны. Если же нас интересует возмущение функции распределения $f'_i(r)$ в координатном пространстве, то, зная f_q , его, разумеется, можно найти по формуле обратного преобразования Фурье

$$f'(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_q e^{iqr} d^3q.$$

Здесь уже q пробегает все возможные значения. Интеграл в (2.86) справа удобно брать в сферических координатах с осью вдоль V_0 . Пусть χ — угол между q и V_0 . Тогда

$$qr = qr (\cos \vartheta \cos \chi + \sin \vartheta \sin \chi \cos \varphi)$$

и

$$\begin{aligned} f_q &= i \frac{R_0^2 V_0 f_{0i}}{qv} \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \exp [iqR_0 (\cos \vartheta \cos \chi + \\ &+ \sin \vartheta \sin \chi \cos \varphi)] = i \frac{V_0 f_{0i}}{qv} \pi R_0^2 2 \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta \times \\ &\times \exp [iqR_0 \cos \vartheta \cos \chi] J_0(qR_0 \sin \vartheta \sin \chi) d\vartheta = \\ &= i \frac{V_0 f_{0i}}{qv} \pi R_0^2 G(qR_0 \chi), \quad (2.87) \end{aligned}$$

где

$$G(qR_0, \chi) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta \exp [iqR_0 \cos \vartheta \cos \chi] \times \\ \times J_0(qR_0 \sin \vartheta \sin \chi) d\vartheta, \quad (2.88)$$

а J_0 — функция Бесселя действительного аргумента.

Из (2.87) находим N_q — компоненту Фурье концентрации ионов или электронов:

$$N_q = \int \delta N(r) e^{-iqr} d^3r = \int f_q d^3v = iV_0 \pi R_0 G \int \frac{f_{0i}}{qv} d^3v. \quad (2.89)$$

Для вычисления интеграла в правой части (2.89) перейдем от интегрирования по d^3v к интегрированию по d^3u , где $u = v + V_0$. Тогда

$$\int \frac{f_{0i}}{qv} d^3v = \int \frac{f_{0i} d^3u}{q(u - V_0)} = N_0 \left(\frac{M_i}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \times \\ \times \int \frac{\exp \left[-\frac{M_i}{2\kappa T} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right]}{qu_x - qV_0} du_x du_y du_z = \\ = N_0 \left(\frac{M_i}{2\pi\kappa T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[-\frac{M_i u_x^2}{2\kappa T} \right]}{qu_x - qV_0} du_x. \quad (2.90)$$

В (2.90) ось x направлена вдоль q .

Интеграл (2.90) — несобственный, так как подынтегральное выражение имеет полюс в точке

$$u_x = \frac{qV_0}{q}.$$

Поэтому, чтобы выражение (2.90) имело смысл, необходимо указать способ взятия интеграла. Способ этот выбирается, исходя из физических соображений. Очевидно, что рассматриваемая нами теория, в которой пренебрегается столкновениями, есть предельный случай теории, учитывающей столкновения. В гл. V мы увидим, что при учете столкновений величина qV_0 входит во все формулы в комбинации $qV_0 + iv$, где ν — эффективное число соударений (см. формулы (5.6) и (5.12)). Все интегралы при этом сходятся. Чтобы перейти затем к случаю отсутствия столкновений, нужно устремить ν к нулю.

После этого ответ уже не будет зависеть от v . Приведенные рассуждения показывают, что для правильного взятия интеграла мы должны заменить в нем qV_0 на $qV_0 + i\delta$, где $\delta \rightarrow +0$ — бесконечно малая положительная величина. Иными словами, несобственный интеграл (2.90) надо брать с обходом полюса по u_x в комплексной плоскости снизу. Это правило обхода полюсов было установлено Ландау [22]. Дальнейшие преобразования выражения (2.90) можно произвести с помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u-a-i\delta} du = i\sqrt{\pi} Q(a), \quad (2.91)$$

где

$$Q(a) = \left(\sqrt{\pi} + 2i \int_0^a e^{x^2} dx \right) e^{-a^2}. \quad (2.92)$$

Тогда

$$N_q = -N_0 \frac{\pi R_0^2}{q} G(qR_0, \chi) \left(\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T} \right)^{1/2} Q(a), \quad (2.93)$$

где

$$a = \frac{(qV_0)}{q\sqrt{2\kappa T/M_i}} = \frac{q_z V_0}{q\sqrt{2\kappa T/M_i}}.$$

При $qR_0 = 0$, $G(0, \chi) = 1$ и, следовательно,

$$N_q = \frac{N_0 \pi R_0^2}{q} \left(\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T} \right)^{1/2} Q(a). \quad (2.94)$$

Это выражение для N_q является фурье-преобразованием возмущения концентрации $\delta N(r)$ (см. формулу (2.29)). В самом деле, используя выражение (2.29) для возмущения концентрации частиц, имеем

$$N_q = \int \delta N(r) e^{-iqr} d^3r = -\frac{N_0 R_0^2 M_i V_0^2}{2\kappa T} \int_{z < 0} \frac{1}{z^2} \times \\ \times \exp \left\{ -i(q_x x + q_y y + q_z z) - \frac{M_i V_0^2}{2\kappa T} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right\} dx dy dz.$$

Здесь учтено, что $S_0 = \pi R_0^2$. Воспользовавшись формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-d_0 x^2 - i c_0 x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{d_0}} e^{-\frac{c_0^2}{4d_0}},$$

находим после интегрирования по x и y :

$$N_q = -N_0 \pi R_0^2 \int_{-\infty}^0 dz \exp \left\{ -\frac{(q_x^2 + q_y^2) \kappa T}{2M_i V_0^2} z^2 - i q_z z \right\} =$$

$$= -\frac{N_0 \pi R_0^2}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}} \left(\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T} \right)^{1/2} Q(a_1), \quad (2.95)$$

где $a_1^2 = \frac{M_i V_0^2 q_z^2}{2\kappa T (q_x^2 + q_y^2)}$. Мы видим, что (2.95) совпадает с (2.94), если учесть, что формула (2.29) справедлива лишь на больших расстояниях позади тела, когда

$$z^2 \gg x^2 + y^2, \text{ т. е. } q_z^2 \ll q_x^2 + q_y^2.$$

В этом случае, когда $\mathbf{q} \perp \mathbf{V}_0$ ($\chi = \frac{\pi}{2}$),

$$G\left(qR_0, \frac{\pi}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta J_0(qR_0 \sin \vartheta) d\vartheta =$$

$$= \int_0^1 x J_0(qR_0 x) dx = 2 \frac{J_1(qR_0)}{qR_0}. \quad (2.96)$$

При $\mathbf{q} \parallel \mathbf{V}_0$ ($\chi = 0$)

$$G(qR_0, 0) = 2 \left[\frac{e^{iqR_0} - 1}{(qR_0)^2} - i \frac{e^{iqR_0}}{qR_0} \right]. \quad (2.97)$$

ГЛАВА III

ВЛИЯНИЕ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ВОЗМУЩЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ИОНОВ И ЭЛЕКТРОНОВ

§ 9. Функция распределения ионов

Поскольку постоянное магнитное поле H_0 сильно влияет на движение ионов в плазме, то естественно, что наличие H_0 существенно сказывается на распределении ионов в затененной телом зоне*). При этом в случае быстро движущегося тела, рассматриваемого в этой главе, столкновениями частиц с поверхностью тела в области разрежения, как было показано выше в §§ 5, 7, можно пренебречь, а тело можно заменить его поперечным сечением в плоскости, перпендикулярной к направлению движения. Исходя из этого уравнения для функции распределения ионов (1.23) в области разрежения, т. е. при $z < 0$, при наличии постоянного магнитного поля можно записать в виде

$$v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{e}{M_i c} [H_0, v + V_0] \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (3.1)$$

если пренебречь влиянием электрического поля на движение ионов. Граничное условие при $z = 0$ для уравнения (3.1)

*) На расстоянии от тела $r \lesssim 2\pi V_0/\Omega$ в ближней зоне влияние магнитного поля, как уже отмечалось (см. § 4), малосущественно. В ионосфере это расстояние r весьма велико: так, для ионов кислорода и азота оно превосходит 200 м, для водорода — порядка 20 м. Поэтому влияние магнитного поля на концентрацию ионов в области сгущения, размеры которой сравнительно невелики (см. § 6), здесь для простоты не рассматривается.

имеет вид (2.10)

$$f(x_0, y_0, 0; v_x, v_y, v_z) =$$

$$= \begin{cases} N_0 \left(\frac{M_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{M_i(v+V_0)^2}{2kT} \right], & \text{если } v_z < 0 \text{ и точка } (x_0, y_0) \text{ находится} \\ & \text{вне } S_0; \\ 0, & \\ \text{если } v_z > 0 \text{ или точка } (x_0, y_0) \text{ нахо-} & \\ \text{дится внутри } S_0, & \end{cases} \quad (3.2)$$

где S_0 — поперечное сечение тела.

Линейное уравнение (3.1) будем решать методом характеристик. Уравнениями характеристик являются, естественно, уравнения движения иона; они имеют вид

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{e}{M_i c} [H_0, v + V_0],$$

где время t — свободный параметр.

Выберем ось z , как обычно, по направлению движения тела, ось y — ортогонально к плоскости (H_0, V_0) , ось x — в плоскости (H_0, V_0) ортогонально к направлению V_0 . В этих координатах уравнения характеристик записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \\ \frac{dv_x}{dt} = -\Omega v_y \cos \alpha, \quad \frac{dv_y}{dt} = \\ = \Omega v_x \cos \alpha - \Omega (v_z + V_0) \sin \alpha, \quad \frac{dv_z}{dt} = \Omega v_y \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Здесь α — угол между направлением движения тела V_0 и магнитным полем H_0 , $\Omega = \frac{eH_0}{M_i c}$ — гиромагнитная частота.

Решение характеристической системы уравнений (3.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + [v_{x0} \sin \alpha - (v_{z0} + V_0) \cos \alpha] t \sin \alpha - \\
 &\quad - \frac{u_{\perp}}{\Omega} \cos \alpha [\sin (\Omega t - \varphi_0) + \sin \varphi_0], \\
 y &= y_0 + \frac{u_{\perp}}{\Omega} [\cos (\Omega t - \varphi_0) - \cos \varphi_0], \\
 z &= z_0 - V_0 t + [v_{x0} \sin \alpha - (v_{z0} + V_0) \cos \alpha] t \cos \alpha + \\
 &\quad + \frac{u_{\perp}}{\Omega} \sin \alpha [\sin (\Omega t - \varphi_0) + \sin \varphi_0], \\
 v_x &= v_{x0} \sin^2 \alpha - (v_{z0} + V_0) \cos \alpha \sin \alpha - \\
 &\quad - u_{\perp} \cos \alpha \cos (\Omega t - \varphi_0), \\
 v_y &= -u_{\perp} \sin (\Omega t - \varphi_0), \\
 v_z &= -V_0 + v_{x0} \sin \alpha \cos \alpha - (v_{z0} + V_0) \cos^2 \alpha + \\
 &\quad + u_{\perp} \sin \alpha \cos (\Omega t - \varphi_0).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

В (3.4) x_0 , y_0 и z_0 — начальные координаты; v_{x0} , v_{y0} и v_{z0} — начальные скорости; $u_{\perp} = \sqrt{v_{y0}^2 + [v_{x0} \cos \alpha + (v_{z0} + V_0) \sin \alpha]^2}$ — проекция скорости $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{i0} + V_0$ на плоскость, перпендикулярную к H_0 ; а $\sin \varphi_0 = \frac{v_{y0}}{u_{\perp}}$.

Зная уравнения характеристик и вид функции распределения на границе области разрежения (3.2), нетрудно найти ее во всей области разрежения, т. е. при любых $z < 0$. Для этого необходимо лишь выразить начальные значения координат и скоростей через их значения в момент t . Учтем при этом, что ионы свободно вращаются в плоскости, ортогональной к H_0 . Поэтому в системе координат, связанной с H_0 , полная энергия иона, а также проекция его скорости на плоскость, ортогональную к H_0 , сохраняются во времени, т. е.

$$(v_z + V_0)^2 + v_x^2 + v_y^2 = (v_{z0} + V_0)^2 + v_{x0}^2 + v_{y0}^2, \tag{3.5a}$$

$$\begin{aligned}
 u_{\perp}^2 &= v_y^2 + [v_x \cos \alpha + (v_z + V_0) \sin \alpha]^2 = \\
 &= v_{y0}^2 + [v_{x0} \cos \alpha + (v_{z0} + V_0) \sin \alpha]^2.
 \end{aligned} \tag{3.5б}$$

Учитывая соотношения (3.5) и то, что при вращении иона всегда

$$\sin \varphi = \frac{v_y}{u_{\perp}}, \quad (3.6)$$

где $\varphi = \varphi_0 - \Omega t$, находим из (3.4), что

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x - [u_{\perp} \cos \alpha \cos \varphi + v_x] t + \\ &\quad + \frac{u_{\perp}}{\Omega} \cos \alpha [\sin (\Omega t + \varphi) - \sin \varphi], \\ y_0 &= y + \frac{u_{\perp}}{\Omega} [\cos (\varphi + \Omega t) - \cos \varphi], \\ z_0 &= z - v_z t + (u_{\perp} \sin \alpha \cos \varphi) t - \\ &\quad - \frac{u_{\perp} \sin \alpha}{\Omega} [\sin (\Omega t + \varphi) - \sin \varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Теперь можно написать решение уравнения (3.1), удовлетворяющее граничному условию (3.2):

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z; v_x, v_y, v_z) &= \\ &= f \left\{ x - (u_{\perp} \cos \alpha \cos \varphi + v_x) t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{\perp}}{\Omega} \cos \alpha [\sin (\Omega t + \varphi) - \sin \varphi], \right. \\ &\quad \left. y + \frac{u_{\perp}}{\Omega} [\cos (\Omega t + \varphi) - \cos \varphi], 0; v_x^2 + v_y^2 + (v_z + V_0)^2 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

где функция в правой части (3.8) определяется формулой (3.2). Параметр t определяется из соотношения $z_0 = 0$, т. е. из уравнения

$$z - v_z t + (u_{\perp} \sin \alpha \cos \varphi) t - \frac{u_{\perp} \sin \alpha}{\Omega} [\sin (\Omega t + \varphi) - \sin \varphi] = 0. \quad (3.9)$$

В формулах (3.7)–(3.9) скорость u_{\perp} и угол φ выражаются через скорости v_x, v_y, v_z с помощью формул (3.5б), (3.6).

В отсутствие магнитного поля функция распределения (3.8), естественно, совпадает с (2.14). Интегрируя полученное выражение для функции распределения по ско-

ростям, можно определить концентрацию ионов в затененной зоне. Эта концентрация, естественно, существенно зависит от угла α между направлением магнитного поля и направлением движения тела.

§ 10. Движение тела вдоль магнитного поля

Рассмотрим вначале простой случай, когда тело движется вдоль магнитного поля H_0 , т. е. $\alpha = 0$. Примем при этом, что сечение тела есть круг радиуса R_0 . Выражение (3.8) для функции распределения принимает тогда вид

$$f(x, y, z; v_x, v_y, v_z) = \begin{cases} N_0 \left(\frac{M_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{M_i (v + V_0)^2}{2kT} \right] \\ \quad \text{при} \left\{ x + \frac{u_{\perp}}{\Omega} \left[\sin \left(\Omega \frac{z}{v_z} + \varphi \right) - \sin \varphi \right] \right\}^2 + \\ \quad \quad + \left\{ y + \frac{u_{\perp}}{\Omega} \left[\cos \left(\Omega \frac{z}{v_z} + \varphi \right) - \cos \varphi \right] \right\}^2 \geq R_0, \\ \\ 0 \\ \\ \quad \text{при} \left\{ x + \frac{u_{\perp}}{\Omega} \left[\sin \left(\Omega \frac{z}{v_z} + \varphi \right) - \sin \varphi \right] \right\}^2 + \\ \quad \quad + \left\{ y + \frac{u_{\perp}}{\Omega} \left[\cos \left(\Omega \frac{z}{v_z} + \varphi \right) - \cos \varphi \right] \right\}^2 < R_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Здесь учтено, что $t = z/v_z$ при $\alpha = 0$ и

$$u_{\perp} = v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (3.11)$$

Для вычисления концентрации ионов в точке r необходимо проинтегрировать функцию распределения (3.10) по скоростям dv_x , dv_y и dv_z . При интегрировании по dv_x и dv_y удобно перейти к новым переменным u и φ_1 , которые определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u_{\perp} \cos \left(\frac{\Omega z}{2v_z} + \varphi \right) &= \frac{u \cos \varphi_1 - \varrho \Omega}{2 \sin \left(\frac{\Omega z}{2v_z} \right)}, \\ u_{\perp} \sin \left(\frac{\Omega z}{2v_z} + \varphi \right) &= \frac{u \sin \varphi_1}{2 \sin \left(\frac{\Omega z}{2v_z} \right)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

где, как обычно, $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Так как $dv_x dv_y = \frac{u du d\varphi_1}{4 \sin^2\left(\frac{\Omega z}{2v_z}\right)}$, то, вводя переменную $v' = \frac{v}{\sqrt{2\kappa T/M_i}}$, получаем $\left(V'_0 = \frac{V_0}{\sqrt{2\kappa T/M_i}}\right)$

$$N_i(\varrho, z) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 dv'_z \exp[-(V'_0 + v'_z)^2] \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \times$$

$$\times \frac{\int_{R_0}^{\infty} \frac{du' u'}{4 \sin^2\left(\frac{\Omega z}{2v_z}\right)} \exp\left[-\frac{\left(u' \cos \varphi_1 - \frac{\varrho}{\varrho_H}\right)^2 + u'^2 \sin^2 \varphi_1}{\left(2 \sin \frac{\Omega z}{2v_z}\right)^2}\right]}{2\rho_H \sin \frac{\Omega z}{2v_z}},$$

или после интегрирования по φ_1 :

$$N_i(\varrho, z) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 dv'_z \exp[-(V'_0 + v'_z)^2] \times$$

$$\times \left\{ 2 \exp\left[-\frac{\varrho^2}{\left(2\varrho_H \sin\left(\frac{\Omega z}{2v_z}\right)\right)^2}\right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_{R_0}^{\infty} \frac{u' e^{-u'^2} I_0\left(\frac{\varrho u'}{\varrho_H \sin\left(\frac{\Omega z}{2v_z}\right)}\right) du'}{2\rho_H \sin\left(\frac{\Omega z}{2v_z}\right)} \right\}. \quad (3.13)$$

Здесь $\varrho_H = \frac{\sqrt{2\kappa T/M_i}}{\Omega} = \frac{c \sqrt{2\kappa T M_i}}{e H_0}$ имеет смысл среднего ларморовского радиуса иона, I_0 — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. Учитывая далее, что $V_0 \gg \sqrt{\kappa T/M_i}$, т. е. $V'_0 \gg 1$, можно при не очень больших $|z| \ll 2\pi V_0^2/\Omega \sqrt{\kappa T/M_i}$ заменить везде в фигурной скобке

v_z на $-V_0$. Интегрируя теперь по dv'_z получаем

$$N_i(\varrho, z) = 2N_0 \exp \left[-\frac{\varrho^2}{\left[2\varrho_H \sin \left(\frac{\Omega z}{2V_0} \right) \right]^2} \right] \times \\ \times \frac{\int_{-R_0}^{\infty} u e^{-u^2} I_0 \left(\frac{-\varrho u}{\varrho_H \sin \frac{\Omega z}{2V_0}} \right) du. \quad (3.14)}{2\varrho_H \sin \left(\frac{\Omega z}{2V_0} \right)}$$

На небольших расстояниях от тела при $-z \ll V_0/\Omega$

$$\sin \frac{\Omega z}{2V_0} \approx \frac{\Omega z}{2V_0},$$

и формула (3.14) совпадает с (2.24). Это подтверждает сделанное выше предположение, что влияние магнитного поля в ближней зоне (при $-z \ll V_0/\Omega$) несущественно. При $-z \gg V_0/\Omega$ влияние магнитного поля наоборот очень велико. Из (3.14) очевидно, что $N_i(\varrho, z)$ является периодической функцией z с периодом, равным $2\pi V_0/\Omega$.

Характер изменения концентрации ионов в затененной зоне существенно зависит от соотношения между радиусом сечения тела R_0 и средним ларморовским радиусом для ионов ϱ_H . Если размеры тела очень велики, т. е. $R_0 \gg \varrho_H$, то возмущенная зона представляет собой полубесконечный цилиндр радиуса R_0 , внутри которого концентрация ионов равна нулю — лишь вблизи границы цилиндра концентрация ионов несколько изменяется на расстояниях порядка ϱ_H .

Для тел небольших размеров, когда $R_0 < \varrho_H$, концентрация ионов в затененной зоне наоборот очень сильно изменяется на протяжении периода $2\pi V_0/\Omega$.

На оси z (при $\varrho = 0$) выражение (3.14) принимает особенно простой вид:

$$N_i(0, z) = N_0 \exp \left[-\frac{R_0^2}{4\varrho_H^2 \sin^2 \left(\frac{\Omega z}{2V_0} \right)} \right]. \quad (3.15)$$

Для рассматриваемого здесь случая $V_0 \parallel H_0$ характер изменения возмущения концентрации ионов $-\frac{\delta N_i}{N_0} = \frac{N_0 - N_i(\varrho, z)}{N_0}$ вдоль оси z при $\varrho = 0$ виден из рис. 12

и рис. 13, на которых построены кривые равных значений $N_i(\varrho, z)/N_0$. Соответствующие кривые рассчитаны для

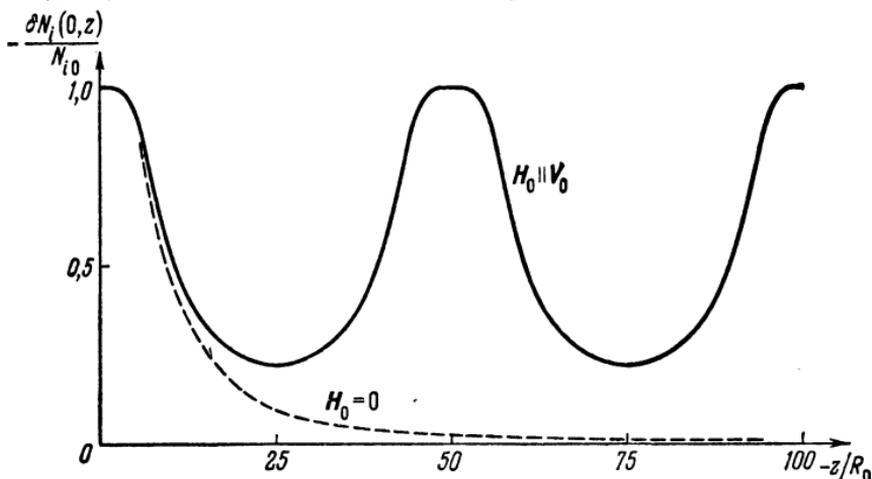


Рис. 12. Возмущение концентрации ионов $\delta N_i/N_0$ на оси z в области разрежения в случае, когда сферическое тело движется параллельно магнитному полю: $V_0 \parallel H_0$, $\frac{\varrho_H}{R_0} = 1$, $\frac{V_0}{\sqrt{2\kappa T/M}} = 8$. Пунктирная кривая — тоже для $H_0 = 0$.

$R_0 = \varrho_H$ и $\sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} = 8$. В этом случае период изменения $\delta N_i/N_0$, выраженный в радиусах шара R_0 или ϱ_H , равен 50,24.

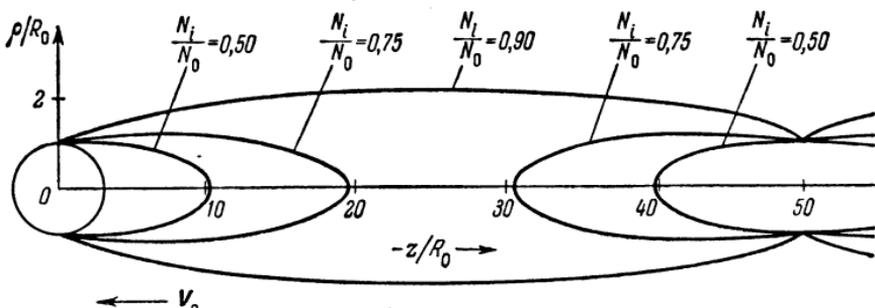


Рис. 13. Кривые постоянной концентрации ионов в области разрежения при $V_0 \parallel H_0$, $\frac{\varrho_H}{R_0} = 1$, $\frac{V_0}{\sqrt{2\kappa T/M}} = 8$.

Следует отметить, что строгая периодическая структура разреженной области позади движущегося тела

получилась здесь из-за того, что в (3.13) приближенно интегрируя по dv'_z , мы пренебрегли тепловым движением ионов вдоль оси z . С учетом теплового движения периодическая структура размывается. Она ярко выражена лишь до расстояний $|z|$ порядка $2\pi V_0^2/\Omega\sqrt{\kappa T/M_i}$.

§ 11. Движение тела поперек магнитного поля

Примем теперь, что тело движется в направлении, ортогональном к H_0 , т. е. что $\alpha = \pi/2$. В этом случае осевая симметрия в задаче отсутствует и выражение для концентрации ионов в случае, если сечение тела круг, имеет очень сложный вид. Более простые и наглядные формулы получаются, если сечение тела в плоскости, перпендикулярной к направлению движения — прямоугольник с размерами $(2R_x, 2R_y)$.

Выражение (3.8) для функции распределения принимает в этом случае вид

$$f(x, y, z; v_x, v_y, v_z) = \begin{cases} N_0 \left(\frac{M_i}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{M_i(v+V_0)^2}{2\kappa T} \right], & \text{если } R_x \geq |x - v_x t| \\ & \text{и } R_y \geq \left| y - \frac{u_\perp}{\Omega} [\cos(\Omega t + \varphi) - \cos \varphi] \right|; \\ 0, & \text{если } R_x < |x - v_x t| \\ & \text{и } R_y < \left| y - \frac{u_\perp}{\Omega} [\cos(\Omega t + \varphi) - \cos \varphi] \right|, \end{cases} \quad (3.16)$$

причем параметр t определен соотношением (3.9):

$$z - v_z t + u_\perp \cos \varphi t - \frac{u_\perp}{\Omega} [\sin(\Omega t + \varphi) - \sin \varphi] = 0, \quad (3.17)$$

где

$$u_\perp = \sqrt{v_y^2 + (v_z + V_0)^2}, \quad \sin \varphi = \frac{v_y}{u_\perp}.$$

Искомая концентрация ионов в затененной зоне определится после интегрирования функции распределения

(3.16) по скоростям. Будем, как обычно, разыскивать возмущения концентрации частиц:

$$-\delta N_i(x, y, z) = N_0 - N_i(x, y, z), \quad (3.18)$$

где

$$\delta N_i(x, y, z) = \int \left\{ f(x, y, z; v_x, v_y, v_z) - N_0 \left(\frac{M_i}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{M_i(v+V_0)^2}{2\kappa T} \right] \right\} dv_x dv_y dv_z. \quad (3.19)$$

Интегрирование по dv_x проводится так же, как и в отсутствие магнитного поля (см. (2.26)). Учитывая это, имеем

$$-\delta N_i(x, y, z) = \frac{N_0}{2} \int dv_y dv_z \frac{M_i}{2\pi\kappa T} \exp \left[-\frac{M_i[v_y^2 + (v_z + V_0)^2]}{2\kappa T} \right] \times \\ \times \left| \Phi \left(\frac{x - R_x}{t} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}} \right) - \Phi \left(\frac{x + R_x}{t} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}} \right) \right| \times \\ \times \begin{cases} 1 & \text{при } R_y \leq \left| y - \frac{u_{\perp}}{\Omega} [\cos(\Omega t + \varphi) - \cos \varphi] \right|, \\ 0 & \text{при } R_y > \left| y - \frac{u_{\perp}}{\Omega} [\cos(\Omega t + \varphi) - \cos \varphi] \right|. \end{cases} \quad (3.20)$$

Здесь по-прежнему параметр t определен соотношением (3.17). Представляя его в виде

$$t = -\frac{z}{V_0} + \frac{v_z + V_0 - u_{\perp} \cos \varphi}{V_0} t + \frac{u_{\perp}}{V_0} \frac{\sin(\Omega t + \varphi) - \sin \varphi}{\Omega}$$

и учитывая, что $v_z + V_0 \sim \sqrt{\kappa T/M_i}$ и $u_{\perp} \sim \sqrt{\kappa T/M_i}$, а $V_0 \gg \sqrt{\kappa T/M_i}$, находим выражение для t методом последовательных приближений:

$$t = -\frac{z}{V_0} + \\ + \left[\frac{u_{\perp}}{V_0} \frac{-\sin \varphi + \sin \left(-\frac{\Omega z}{V_0} + \varphi \right)}{\Omega} - \frac{z}{V_0} \frac{v_z + V_0 - u_{\perp} \cos \varphi}{V_0} \right] + \dots, \quad (3.21)$$

т. е. фактически в виде ряда по степеням $\sqrt{\kappa T/M_i V_0^2}$. Ниже, при вычислении концентрации ионов, мы воспользуемся первым приближением $t = -z/V_0$, что эквивалентно пренебрежению тепловым движением частиц по направлению z .

Дальнейшее интегрирование в (3.20) удобнее произвести в новых переменных (u , φ), где

$$u = \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}} u_{\perp} = \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T} [v_y^2 + (v_z + V_0)^2]}. \quad (3.22)$$

Тогда получается, что

$$\begin{aligned} -\delta N_i(x, y, z) &= \\ &= \frac{N_0}{2} \left| \Phi \left(\frac{x-R_x}{z} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \right) - \Phi \left(\frac{x+R_x}{z} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \right) \right| \times \\ &\times \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} u e^{-u^2} du \left\{ \begin{array}{l} 1, R_y \geq |y - \varrho_H u [\cos(\Omega t + \varphi) - \cos \varphi]|, \\ 0, R_y < |y - \varrho_H u [\cos(\Omega t + \varphi) - \cos \varphi]| \end{array} \right. = \\ &= \frac{N_0}{2} \left| \Phi \left(\frac{x-R_x}{z} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \right) - \Phi \left(\frac{x+R_x}{z} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \right) \right| \times \\ &\quad \times \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [e^{-u_-^2(\varphi)} - e^{-u_+^2(\varphi)}], \quad (3.23) \end{aligned}$$

где по-прежнему $\varrho_H = \frac{c \sqrt{2M_i \kappa T}}{eH}$, а u_- и u_+ — граничные значения для u , определенные условиями:

$$\left. \begin{aligned} -R_y \leq y - \varrho_H u \left[\cos \left(-\Omega \frac{z}{V_0} + \varphi \right) - \cos \varphi \right] \leq R_y, \\ u \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Учитывая, что $\cos \left(-\Omega \frac{z}{V_0} + \varphi \right) - \cos \varphi = 2 \sin \left(-\frac{\Omega z}{2V_0} \right) \times \sin \left(-\frac{\Omega z}{2V_0} + \varphi \right)$, находим, что $u_{\pm}^2(\varphi) \sim 1/\sin^2 \left(-\frac{\Omega z}{2V_0} + \varphi \right)$. Поэтому в последнем интеграле, естественно, перейти к новой переменной $x = \sin^{-2} \left(-\frac{\Omega z}{2V_0} + \varphi \right)$. Тогда $d\varphi =$
 $= -\frac{1}{2x \sqrt{x-1}}$ и, если учесть равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{dx e^{-bx}}{x \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} [1 - \Phi(|\sqrt{b}|)], \quad (3.25)$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [e^{-u^2(\varphi)} - e^{-u_+^2(\varphi)}] = \\ = \frac{1}{2} \left| \Phi \left(\frac{y - R_y}{2Q_H \sin \left(\frac{\Omega z}{2V_0} \right)} \right) - \Phi \left(\frac{y + R_y}{2Q_H \sin \left(\frac{\Omega z}{2V_0} \right)} \right) \right|. \quad (3.26) \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно выражение (3.23) для концентрации ионов в затененной зоне принимает вид

$$\begin{aligned} -\delta N_i(x, y, z) = N_0 - N_i(x, y, z) = \\ = \frac{N_0}{4} \left| \Phi \left(\frac{x - R_x}{z} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \right) - \Phi \left(\frac{x + R_x}{z} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \right) \right| \times \\ \times \left| \Phi \left(\frac{y - R_y}{2Q_H \sin \left(\frac{\Omega z}{2V_0} \right)} \right) - \Phi \left(\frac{y + R_y}{2Q_H \sin \left(\frac{\Omega z}{2V_0} \right)} \right) \right|. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае $V_0 \perp H_0$ зависимость δN_i от x имеет тот же вид, что и в случае, когда $H_0 = 0$ (см. (2.26)), в то время как зависимость от y из-за влияния магнитного поля существенно изменяется.

На небольших расстояниях от тела, когда $z \ll \frac{2\pi V_0}{\Omega}$, формула (3.27) совпадает с формулой (2.26), полученной в отсутствие магнитного поля, что, естественно, и должно быть. Если же $z \gg \frac{2\pi V_0}{\Omega}$, влияние магнитного поля очень велико; второй множитель в (3.27) является, как и в случае $V_0 \parallel H_0$, периодической функцией z с периодом $2\pi V_0/\Omega$.

На оси z выражение N_i принимает простой вид

$$N_i(0, 0, z) = N_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{R_x}{z} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \right) \Phi \left(\frac{R_y}{2Q_H \sin \left(\frac{\Omega z}{2V_0} \right)} \right) \right]. \quad (3.28)$$

На достаточно большом расстоянии среднее значение возмущения δN_i , как уже отмечалось выше, убывает с ростом z как $1/z$, в то время как в отсутствие магнитного поля та же величина убывает, как $1/z^2$. В случае

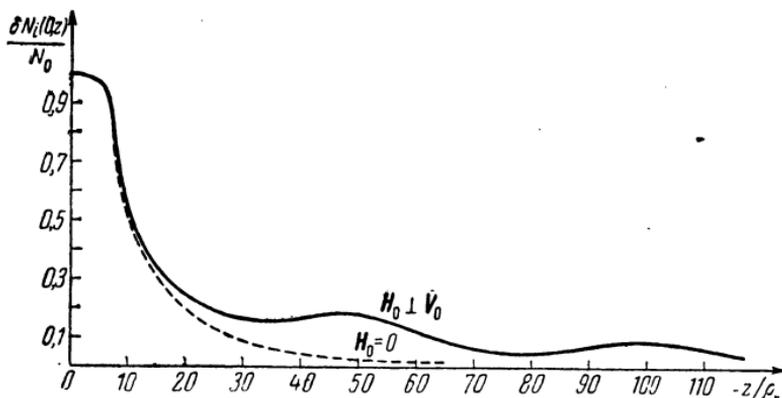


Рис. 14. Возмущения концентрации ионов $\delta N_i/N_0$ на оси z в области разрезания тела квадратного сечения; $V_0 \perp H_0$, $R_x = R_y = \rho H$. Пунктирная кривая — то же для $H_0 = 0$.

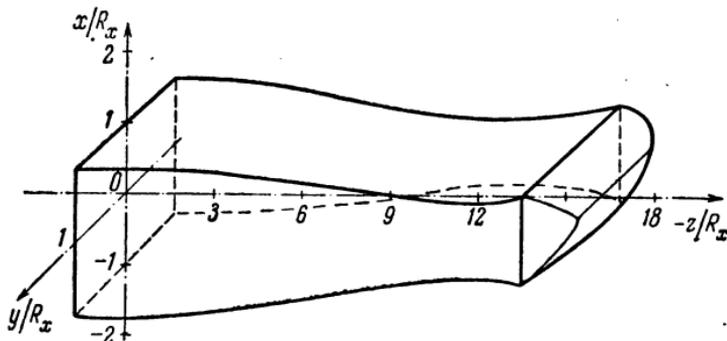


Рис. 15. Общий вид поверхности постоянной концентрации ионов $\frac{N_i(x, y, z)}{N_0} = 0,5$ в области разрезания тела квадратного сечения; $\rho_H = 0,3R_x$, $V_0 \perp H_0$, $H_0 \parallel OX$.

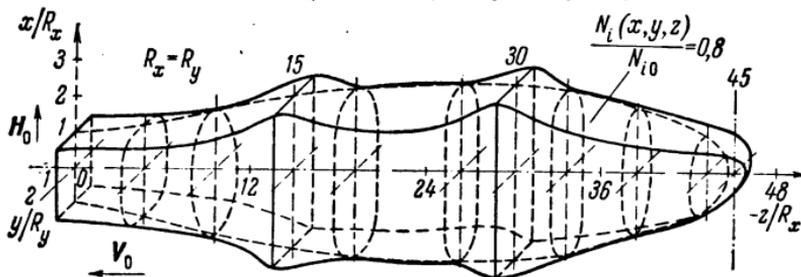


Рис. 16. Общий вид поверхности постоянной концентрации ионов $\frac{N_i(x, y, z)}{N_0} = 0,8$ в области разрезания тела квадратного сечения; $\rho_H = 0,3R_x$.

движения тела вдоль поля ($V_0 \parallel H_0$) возмущение в среднем вообще не убывает с увеличением $|z|$.

Распределение концентрации ионов в затененной зоне, благодаря влиянию магнитного поля имеет довольно

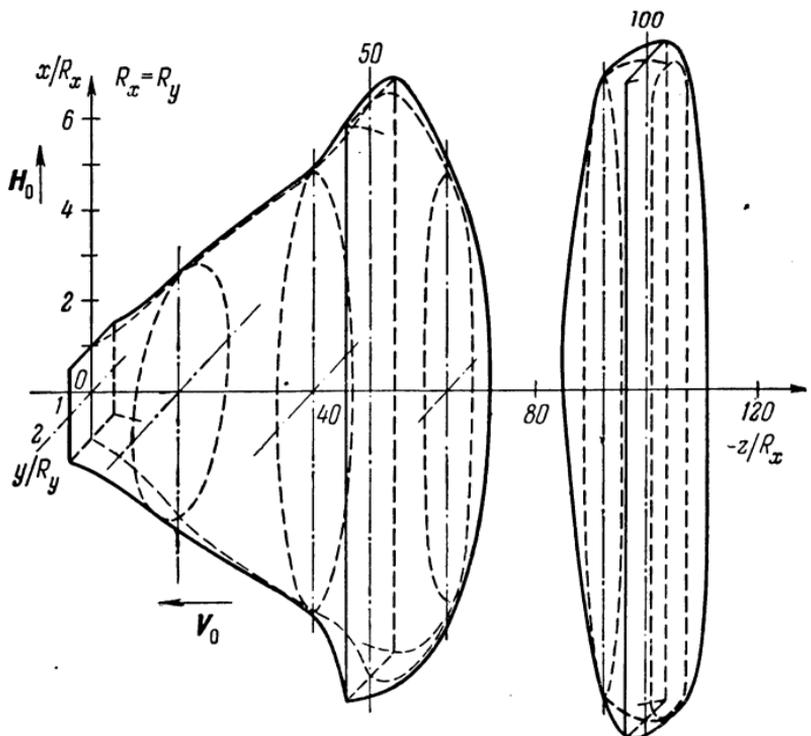


Рис. 17. Общий вид поверхности постоянной концентрации ионов $\frac{N_i(x, y, z)}{N_0} = 0,935$ в области разрежения тела квадратного сечения; $q_H = R_x$.

сложный вид. Характер возмущения концентрации ионов можно уяснить из рис. 14 — 20.

Зависимость $-\delta N_i/N_0$ вдоль оси z (формула (3.28)) в случае, когда сечение тела есть квадрат: $R_x = R_y = q_H$ и $\sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} = 8$, изображена на рис. 14. В отличие от случая продольного движения тела ($V_0 \parallel H_0$) возмущение не остается в среднем постоянным, а убывает с расстоянием пропорционально $1/z$.

Поверхности равных значений N_i/N_0 в разреженной зоне позади движущегося тела квадратного сечения изображены на рис. 15—18. Вид соответствующих

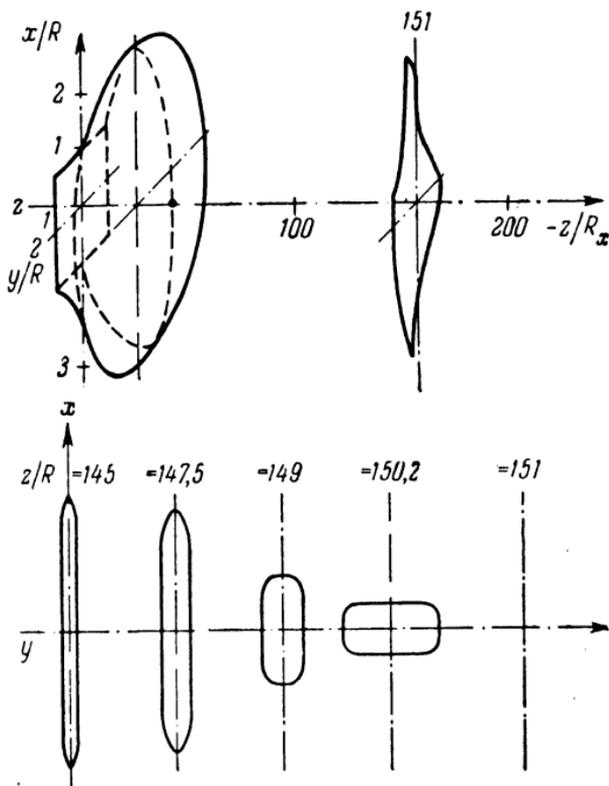


Рис. 18. Общий вид поверхности постоянной концентрации ионов $\frac{N_i(x, y, z)}{N_0} = 0,940$ в области разрежения тела квадратного сечения; $Q_H = 3R_x$. Внизу сечения той же поверхности в плоскости xy для разных значений z/R_x , указанных на рисунке.

поверхностей $N_i/N_0 = \text{const}$ в общем весьма сложен; появляются даже не связанные друг с другом поверхности (рис. 17, 18). Сложность структуры этих поверхностей отражает наличие периодических сгущений и разрежений концентраций частиц позади движущегося тела. В отличие от случая продольного движения тела

возмущения концентрации при $V_0 \perp H_0$ в среднем убывают с увеличением расстояния от тела. Магнитное поле сильно влияет на структуру возмущенной зоны лишь на

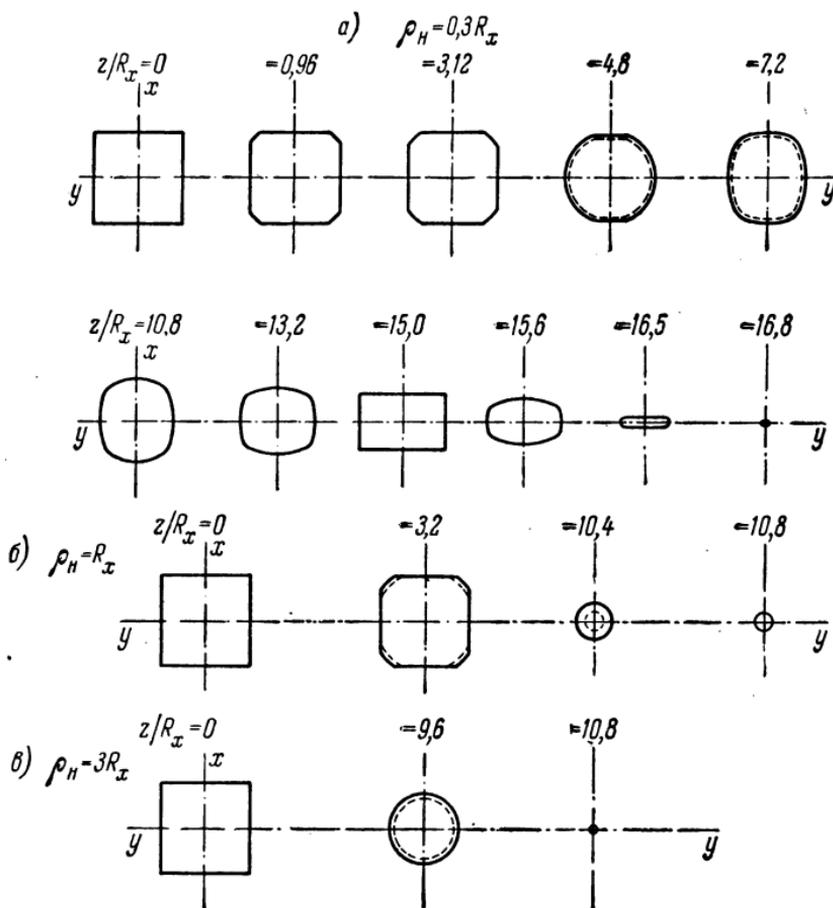


Рис. 19. Сечения в плоскости xy поверхности постоянной концентрации ионов $\frac{N_i(x, y, z)}{N_0} = 0,5$ в области разрежения для различных значений z/R_x , указанных на рисунке. Сечение тела квадрат $R_x = R_y$. Пунктирные кривые — то же в отсутствие магнитного поля.

a) $\rho_H = 0,3R_x$, б) $\rho_H = R_x$, в) $\rho_H = 3R_x$.

больших расстояниях. Поэтому с увеличением отношения $N_i(x, y, z)/N_0$ вид поверхностей постоянной концентрации усложняется, что ясно видно из приведенных

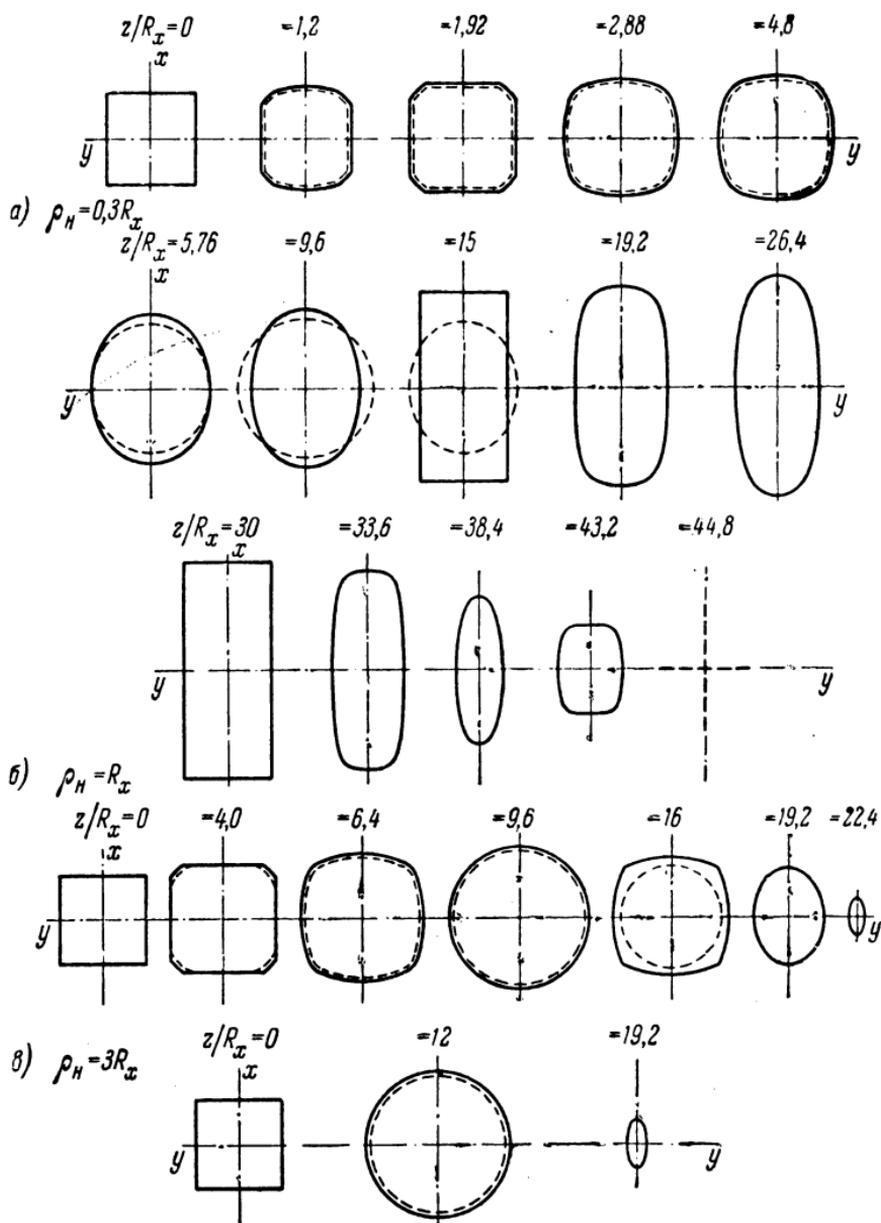


Рис. 20. Сечения в плоскости xy поверхности постоянной концентрации ионов $\frac{N_i(x, y, z)}{N_0} = 0,8$ в области разрежения для различных значений z/R_x , указанных на рисунке. Сечение тела квадрат $R_x = R_y$. Пунктирные кривые — то же в отсутствие магнитного поля. а) $\rho_H = 0,3R_x$; б) $\rho_H = R_x$; в) $\rho_H = 3R_x$.

рисунков. Влияние размеров тела, т. е. отношения R/ϱ_H , на концентрацию ионов N_i можно также усмотреть из рис. 19 и 20, на которых, соответственно для $\varrho_H = 0, 3R_x = 0, 3R_y$ а), $\varrho_H = R_x = R_y$ б) и $\varrho_H = 3R_x = 3R_y$ в) изображены сечения поверхности $N_i/N_0 = 0,5$ (рис. 19) и $N_i/N_0 = 0,8$ (рис. 20) на различных расстояниях позади тела. Пунктиром на этих же рисунках изображены для сравнения соответствующие сечения в случае, когда

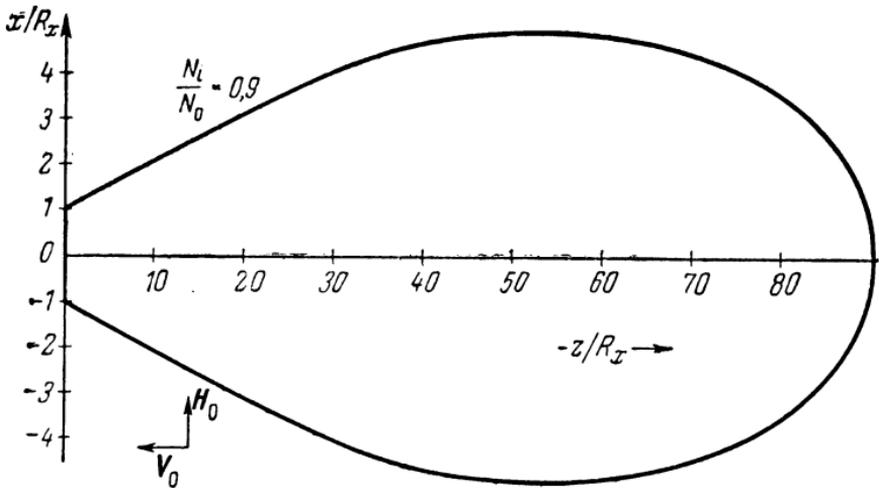


Рис. 21. Сечение в плоскости xy поверхности постоянной концентрации ионов $\frac{N_i(x, y, z)}{N_0} = 0,9$ в области разрежения, когда $R_y \gg \varrho_H$, $V_0 \perp H_0$, $H_0 \parallel Ox$.

$H_0 = 0$. Из рисунков видно, что с увеличением отношения R/ϱ_H влияние магнитного поля на структуру возмущенной зоны усиливается. В частности, когда линейный размер тела велик в сравнении с ларморовским радиусом ионов ($R_y \gg \varrho_H$), возмущенная зона имеет форму тонкого лепестка, лежащего в плоскости xz , т. е. в плоскости $V_0 H_0$, а именно:

$$N_i(x, y, z) \approx N_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left| \Phi \left(\frac{x - R_x}{z} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \right) - \Phi \left(\frac{x + R_x}{z} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \right) \right| \begin{cases} 0, & |y| > R_y \\ 1, & |y| < R_y \end{cases} \right]. \quad (3.29)$$

Толщина лепестка изменяется периодически с амплитудой порядка ϱ_H и с периодом $2\pi V_0/\Omega$. Вид лепестка

в плоскости xz изображен на рис. 21. Отметим также, что из приведенных выше рисунков видно, что благодаря влиянию магнитного поля возмущение концентраций частиц еще значительно на большом расстоянии от тела.

§ 12. Произвольное направление движения

В этом общем случае при вычислении концентрации ионов, т. е. при интегрировании функции распределения (3.8) по скоростям, удобно перейти от скоростей v_x , v_y ,

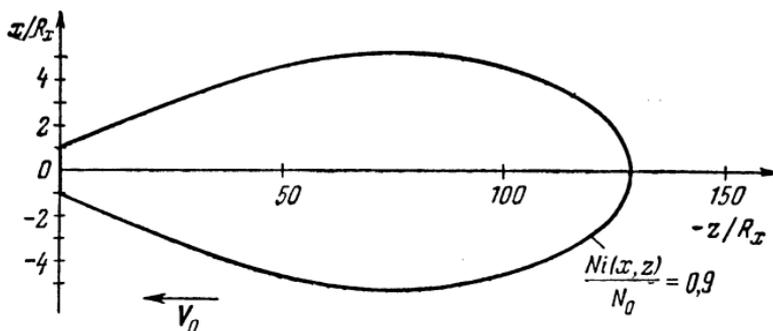


Рис. 22. Сечение в плоскости xz поверхности постоянной концентрации ионов $\frac{N_i(x, y, z)}{N_0} = 0,9$ в области разрежения, когда $R_y \gg \varrho_H$ и тело движется под углом 45° к направлению магнитного поля.

v_z к скорости u_\perp (см. (3.56)), углу φ и скорости $v_{||}$, параллельной магнитному полю. При этом на больших расстояниях от тела ($-z \gg V_0/\Omega$, где влияние магнитного поля наиболее существенно, для концентрации ионов получается следующее простое выражение:

$$N_i(x, y, z) = N_0 \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left| \Phi \left(\frac{x - R_x}{z \sin \alpha + x \cos \alpha} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2kT}} \right) - \Phi \left(\frac{x + R_x}{z \sin \alpha + x \cos \alpha} \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2kT}} \right) \right| \times \right. \\ \left. \times \left| \Phi \left(\frac{y - R_y}{2\varrho_H \sin \left(\frac{\Omega z}{2V_0} \right)} \right) - \Phi \left(\frac{y + R_y}{2\varrho_H \sin \left(\frac{\Omega z}{2V_0} \right)} \right) \right| \right\} \quad (3.30)$$

при условии, что угол α не очень мал, а именно $\sin \alpha > 2R_x/z$. Вид возмущений зоны в этом случае,

естественно, весьма сложен. На рис. 22 изображена для сравнения с рис. 21 кривая $N_i/N_0 = 0,9$ в плоскости xz , когда угол α между V_0 и H_0 равен 45° и $R_y \gg \rho_H$. В этом случае возмущенная зона асимметрична относительно оси z . Кроме того, протяженность области $N_i/N_0 = 0,9$ увеличивается примерно в 1,5 раза, что является следствием уменьшения угла α между направлением магнитного поля и направлением движения тела. В целом длина возмущенной зоны растет с уменьшением угла α пропорционально $1/\sin \alpha$. Среднее возмущение концентрации ионов при любом $\alpha \neq 0$ убывает с ростом $|z|$ пропорционально $1/|z| \sin \alpha$. Случай строго продольного движения является, следовательно, существенно выделенным

§ 13. Компоненты Фурье концентрации электронов

Перейдем теперь к вычислению компонент Фурье концентрации электронов N_q . Соответствующие формулы для N_q используются в гл. VII при вычислении рассеяния электромагнитных волн на следе тела. Как и прежде, в случае, когда размеры тела много больше дебаевского радиуса, возмущение концентрации электронов равно возмущению концентрации ионов, и для определения N_q достаточно вычислить возмущение функции распределения ионов. Как и в предыдущей главе, рассмотрим случай быстро движущегося металлического шара, который нейтрализует все падающие на его поверхность ионы. В этом случае функция распределения ионов удовлетворяет уравнению (2.85), в левую часть которого, как и в § 9, добавляется член с действующей на ионы силой Лоренца $\frac{e}{c} [uH_0]$, $u = v + V_0$. Таким образом, уравнение (3.1) в случае поглощающей сферы имеет вид

$$(u - V_0) \frac{\partial f'_i}{\partial r} + \frac{e}{M_i c} [uH_0] \frac{\partial f'_i}{\partial u} = \begin{cases} -\frac{rV_0}{r} f_{0i}(u) \delta(r - R_0), & \text{если } rV_0 < 0; \\ 0, & \text{если } rV_0 > 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

а $f'_i = f_i - f_{0i}$.

Для компонент Фурье получаем уравнение

$$\frac{e}{M_{ic}} [uH_0] \frac{\partial f_q}{\partial u} + iq(u - V_0) f_q = \pi R_0^2 V_0 f_{oi} G(qR_0, \chi), \quad (3.32)$$

где $f_q = \int f_i e^{-iqr} d^3r$ (см. начало § 8), а $G(qR_0, \chi)$ по-прежнему определяется формулой (2.88).

Перепишем уравнение (3.31) в цилиндрических координатах в пространстве скоростей с осью u_{\parallel} вдоль направления магнитного поля. Введем векторы q_{\perp} и u_{\perp} , т. е. проекции векторов q и u , на плоскость, перпендикулярную к магнитному полю, и угол β между q_{\perp} и u_{\perp} . Тогда уравнение (3.31) принимает вид

$$\frac{\partial f_q}{\partial \beta} - i(\mu + \gamma \cos \beta) f_q = \frac{\pi R_0^2 V_0 f_{oi} G}{\Omega}. \quad (3.33)$$

При этом используются обозначения

$$\Omega = \frac{eH_0}{M_{ic}}, \quad \mu = \frac{q_{\parallel} u_{\parallel} - qV_0}{\Omega}, \quad \gamma = \frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega}, \quad q_{\parallel} = \frac{qH_0}{H_0}, \quad u_{\parallel} = \frac{uH_0}{H_0}.$$

Общее решение уравнения (3.33) равно

$$f_q = \exp[i(\mu\beta + \gamma \sin \beta)] \int_C^{\beta} \exp[i(\mu t + \gamma \sin t)] dt \frac{\pi R_0^2 V_0 f_{oi} G}{\Omega}. \quad (3.34)$$

При этом постоянную C в (3.34) надо подобрать так, чтобы получить решение, периодическое по β с периодом 2π , так как изменение угла β на 2π означает поворот на 2π вектора u_{\perp} , т. е. приводит к тому же значению вектора u . Периодичность по β выражает, таким образом, однозначность функции $f_q(u)$. Легко видеть, что $C = \infty$. Действительно, полагая $C = \infty$ и $t = x + \beta$, получаем

$$f_q = -\frac{\pi R_0^2 V_0 f_{oi} G}{\Omega} \int_0^{\infty} \exp[-i\{\mu x + \gamma [\sin(\beta + x) - \sin \beta]\}] dx, \quad (3.35)$$

и периодичность выражения (3.35) по β очевидна. Таким образом, выражение (3.35) определяет искомую компо-

ненту Фурье функции распределения. Интегрируя (3.35) по d^3u и подставляя вместо μ и γ их значения, имеем

$$N_q = \int f_q d^3u = -\frac{\pi R_0^2 V_0 G}{\Omega} \int f_{0i}(u) \exp \left[-i \left\{ \frac{q_{||} u_{||} - q V_0}{\Omega} x + \frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} [\sin(\beta + x) - \sin \beta] \right\} \right] dx u_{\perp} du_{\perp} du_{||} d\beta. \quad (3.36)$$

Интегрирование по β в (3.36) ведется от 0 до 2π , и в силу периодичности функции f_q мы можем заменить β на $\beta - x/2$. Тогда

$$N_q = -\frac{N_0 \pi R_0^2 V_0 G}{\Omega} \left(\frac{M_i}{2\pi \kappa T} \right)^{3/2} \times \\ \times \int \exp \left[-i \left(\frac{q_{||} u_{||} - q V_0}{\Omega} x + \frac{2q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} \cos \beta \sin \frac{x}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{M_i}{2\kappa T} (u_{\perp}^2 + u_{||}^2) \right] dx u_{\perp} du_{\perp} du_{||} d\beta. \quad (3.37)$$

Интегралы по $du_{||}$ и $u_{\perp} du_{\perp} d\beta$ можно вычислить в элементарных функциях. Действительно, в плоскости вектора u_{\perp} , поскольку $q_{\perp} u_{\perp} \cos \beta = q_{\perp} u_{\perp}$, имеем

$$\left(\frac{M_i}{2\pi \kappa T} \right) \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \exp \left(-\frac{M_i}{2\kappa T} u_{\perp}^2 - 2i \frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} \cos \beta \sin \frac{x}{2} \right) u_{\perp} du_{\perp} d\beta = \\ = \left(\frac{M_i}{2\pi \kappa T} \right) \int \exp \left(-\frac{M_i}{2\kappa T} u_{\perp}^2 - 2i \frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} \sin \frac{x}{2} \right) d^2 u_{\perp}.$$

Теперь, как и в § 11, переходя от интегрирования по $d^2 u_{\perp}$ к интегрированию по $d^2 w$, где $w = u_{\perp} + 2q_{\perp} \frac{\kappa T \sin \frac{x}{2}}{M_i \Omega}$, получаем

$$\left(\frac{M_i}{2\pi \kappa T} \right) \exp \left(-\frac{2\kappa T}{M_i \Omega^2} q_{\perp}^2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \int \exp \left[-\frac{M_i w^2}{2\kappa T} \right] d^2 w = \\ = \exp \left(-\frac{2\kappa T}{M_i \Omega^2} q_{\perp}^2 \sin^2 \frac{x}{2} \right). \quad (3.38)$$

Наконец, учитывая, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{M_i}{2\pi\kappa T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\frac{q_{\parallel}u_{\parallel}}{\Omega}x - \frac{M_i}{2\kappa T}u_{\parallel}^2\right) du_{\parallel} = \\ = \exp\left(-\frac{\kappa T}{2M_i\Omega^2}q_{\parallel}^2x^2\right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

находим окончательно

$$\begin{aligned} N_q = -\frac{\pi R_0^2 N_0 V_0 G}{\Omega} \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp\left[i\frac{qV_0}{\Omega}x - \frac{\kappa T}{2M_i\Omega^2}\left(q_{\parallel}^2x^2 + 4q_{\perp}^2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right] dx. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Магнитное поле, вообще говоря, оказывает существенное влияние на величину N_q . Однако, как было показано в § 10, роль магнитного поля мала при выполнении условия $z\frac{\Omega}{V_0} \ll 1$. В компонентах Фурье это условие переписывается в виде

$$q_{\parallel} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \gg \Omega = \frac{eH_0}{M_{ic}}. \quad (3.41)$$

Если выполняется условие (3.41), то подынтегральная функция в (3.40) при $x \gg 1$ быстро затухает. В этом случае в интеграле существенны значения $x \ll 1$ и можно положить $\sin^2\frac{x}{2} \approx \frac{x^2}{4}$. Тогда

$$N_q = -\frac{\pi R_0^2 N_0 V_0 G}{\Omega} \int_0^{\infty} \exp\left(i\frac{qV_0}{\Omega}x - \frac{\kappa T}{2M_i\Omega^2}q^2x^2\right) dx. \quad (3.42)$$

Используя теперь тождество

$$\int_0^{\infty} \exp\left(ita - \frac{t^2}{4}\right) dt = \left(\sqrt{\pi} + 2i \int_0^a e^{t^2} dt\right) e^{-a^2} = Q(a), \quad (3.43)$$

мы прямо приводим (3.42) к виду (2.93). Таким образом, при выполнении условия (3.41) магнитное поле действительно несущественно. Наибольшую роль оно играет в обратном предельном случае, когда

$$q_{\parallel} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \ll \Omega. \quad (3.44)$$

Этот случай мы и рассмотрим. В силу периодичности по z возмущения концентрации $\delta N_i(x, y, z)$ с периодом $2\pi V_0/\Omega$ (см. §§ 10, 11) компоненты Фурье N_q должны иметь резкие максимумы, когда значения qV_0/Ω близки к целым числам. Исследуем поведение N_q в окрестности этих максимумов. Иначе говоря, будем считать, что

$$\frac{qV_0}{\Omega} = p + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.45)$$

Для этого перепишем (3.40), введя величину ε . Тогда

$$N_q = -\frac{\pi R_0^2 N_0 V_0 G}{\Omega} \times \\ \times \int_0^\infty \exp\left(i\varepsilon x - \frac{\kappa T}{2M_i \Omega^2} q_{||}^2 x^2\right) \exp\left(ipx - \frac{2\kappa T}{M_i \Omega^2} q_{\perp}^2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) dx. \quad (3.46)$$

Если удовлетворяются условия (3.44) и (3.45), то периодическая функция $\exp\left(ipx - \frac{2\kappa T}{M_i \Omega^2} q_{\perp}^2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)$ является быстро осциллирующей по сравнению с остальными множителями в подынтегральном выражении. Поэтому мы можем заменить эту функцию на ее среднее значение по периоду, т. е. произвести замену:

$$\exp\left(ipx - \frac{2\kappa T}{M_i \Omega^2} q_{\perp}^2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(ipx - \frac{2\kappa T}{M_i \Omega^2} q_{\perp}^2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) dx = \\ = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) \int_0^{2\pi} \exp\left(ipx + \frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2} \cos x\right) dx = \\ = \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_p\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right), \quad (3.47)$$

где I_p — функция Бесселя от мнимого аргумента. Преобразуя после этого интеграл (3.46) с помощью формулы (3.43), получаем

$$N_q = -\frac{\pi R_0^2 N_0 V_0 G}{q_{||}} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}} Q(a_1) \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_p\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right), \quad (3.48)$$

где

$$a_1 = \frac{\varepsilon\Omega}{q_{\parallel}} \sqrt{\frac{M_i}{\kappa T}} = \frac{qV_0 - p\Omega}{q_{\parallel}} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}}. \quad (3.49)$$

Из (3.48) следует, что если $q_{\parallel} \rightarrow 0$ и $qV_0 \rightarrow p\Omega$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), так, что a_1 остается конечным, то N_q обращается в бесконечность $\sim 1/q_{\parallel}$.

Особым, как указывалось выше, является случай тела, движущегося строго вдоль вектора магнитного поля, когда $V_{0\perp} = 0$, $qV_0 = q_{\parallel}V_0$ и при $p = 0$ $a_1 = V_0 \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}}$.

Пользуясь тем, что $\sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \gg 1$, и учитывая, что

$$Q(a_1) \approx 2ie^{-a_1^2} \int_a^{a_1} e^{t^2} dt \approx \frac{i}{a_1} \quad \text{при } a_1 \gg 1, \quad (3.50)$$

получаем

$$N_q = -\frac{\pi R_0^2 N_0 G}{q_{\parallel}} i \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_0\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right). \quad (3.51)$$

Таким образом, в случае, когда тело движется строго по направлению поля, $N_q \rightarrow \infty$ при $q_{\parallel} \rightarrow 0$ независимо от значения q_{\perp} . Этот результат имеет простой физический смысл. Действительно, при движении тела вдоль магнитного поля, как мы видели в § 10, возмущенная область, образующаяся за телом, не может рассасываться из-за поля. Поэтому след имеет форму полубесконечного цилиндра с осью вдоль H_0 , что и приводит к бесконечной величине N_q при $q \perp H_0$, т. е. при $q_{\parallel} \rightarrow 0$. Разумеется, обращение N_q в бесконечность во всех рассмотренных случаях не имеет физического смысла и связано тем, что мы пренебрегали влиянием электрического поля на движение ионов и столкновениями между частицами. При учете этих факторов, как мы увидим далее, N_q принимает конечное, хотя и довольно большое значение.

ГЛАВА IV

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ВОКРУГ ТЕЛА

§ 14. Приближенный расчет электрического поля

а. Вводные замечания. Возмущения концентраций электронов и ионов вокруг движущегося тела нарушают квазинейтральность плазмы. В результате здесь возникает электрическое поле, которое, естественно, само влияет на распределение заряженных частиц. Поэтому расчет концентрации электронов и ионов, а также электрического поля требует совместного решения уравнения для потенциала поля (1.30) с уравнениями для функций распределения ионов (1.23) и электронов (1.24). Если учесть также разнообразие граничных условий для частиц и поля на поверхности тела, то становится ясным, что полное решение такой задачи весьма затруднительно.

Можно, однако, существенно упростить систему уравнений (1.23), (1.24), (1.30), если принять во внимание ряд обстоятельств, осуществляемых в ионосфере.

Во-первых, важно учесть, что скорость тела много меньше тепловой скорости электронов, его поверхность заряжена отрицательно, а потенциал $|\varphi_0| \gg \kappa T/e$. В этом случае, как указывалось в §§ 3в, 4в, электроны распределены по закону Больцмана, и, таким образом, отпадает необходимость решения уравнения (1.24)*).

Далее, в ионосфере вплоть до самых больших высот, дебаевский радиус мал по сравнению с характерным размером движущихся тел, что видно, например, из

*) Мы не рассматриваем здесь особых условий, когда на поверхность тела специально подается положительный потенциал см. гл. IX, X).

табл. IX, где приведены соответствующие значения отношения R_0/D для $R_0 = 1$ м. Поэтому мы будем всюду считать, что $R_0 \gg D$.

Таблица IX

	N_0	T	D , см	R_0/D	$(R_0/D)^2$	$\ln (R_0/D)^2$
Слой E	10^5	$3 \cdot 10^2$	0,4	$2,5 \cdot 10^2$	$6 \cdot 10^4$	11
Слой F	10^6	10^3	0,2	$5 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^5$	13
1000 км	10^5	$3 \cdot 10^3$	1	10^2	10^4	9
3000 км	$7 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	4	25	$6 \cdot 10^2$	6,5

В этих условиях очень важную роль играет дебаевская экранировка, из-за которой в большей части возмущенной зоны концентрации электронов и ионов близки друг к другу. Это обстоятельство, как мы увидим ниже, позволяет получить весьма простое выражение для потенциала электрического поля, пригодное в большей части возмущенной области. Так как дебаевский радиус мал, то можно отдельно рассматривать двойной слой у границы тела. Тем самым существенно упрощается вопрос о потоке притягивающихся частиц (ионов) на тело, а следовательно, и о потенциале поля на его поверхности. Кроме того, вблизи тела, размер которого велик по сравнению с дебаевским радиусом, не возникает финитных орбит, не проходящих через его поверхность. Это означает, что в осуществляющемся обычно случае, когда заряженные частицы поглощаются (нейтрализуются) поверхностью тела, нет необходимости учитывать частицы, совершающие финитное движение (подробнее эти вопросы рассмотрены ниже в гл. VIII, IX).

Наконец, поскольку скорость тела значительно больше тепловой скорости ионов, то возмущение ионов происходит в основном из-за их взаимодействия с самим телом. Поэтому в первом приближении можно также пренебречь влиянием электрического поля на движение ионов. Строго говоря, это положение справедливо лишь для зоны впереди тела, т. е. в области «сгущения». На частицы, заполняющие область разрежения позади тела, электрическое поле уже действует достаточно долго, так

что влияние его, в общем, оказывается существенным. Поэтому в области разрежения результаты расчетов без учета влияния электрического поля справедливы лишь с точностью до множителя порядка нескольких единиц. Можно их, правда, несколько уточнить, если учитывать влияние поля на движение ионов в гидродинамическом приближении. Таким путем получены простые приближенные выражения для потенциала ϕ . Для области же, сильно удаленной от поверхности тела, в последующих параграфах дано строгое решение задачи с учетом влияния электрического поля на движение ионов.

б. Потенциал поля на поверхности тела. На поверхности тела электроны могут поглощаться, а ионы нейтрализоваться. При этом само тело в общем случае заряжается, так как число попадающих на него электронов и ионов неодинаково. Число поглощающихся электронов и ионов существенно зависит от потенциала на поверхности тела, ее свойств и от состояния плазмы. Понятно, что тело будет заряжаться до тех пор, пока число поглощающихся на его поверхности в единицу времени электронов и ионов не станет одинаковым. Иначе говоря, полный ток на тело должен быть равным нулю; этим условием и определяется потенциал поля на поверхности тела *).

В рассматриваемом здесь случае быстро движущегося тела ($V_0 \gg v_i$), размер которого много больше дебаевского радиуса ($R_0 \gg D$), как ионы, так и электроны захватываются в основном передней частью поверхности тела: ионы набегают спереди на тело из-за большой скорости его движения, налетанию же электронов сзади тела препятствует возникающая здесь область с высоким отрицательным потенциалом (см. ниже).

Поток ионов на переднюю поверхность тела в рассматриваемых условиях почти не отличается от потока нейтральных частиц. Последний, как показано ниже

*) Разумеется, поверхность тела можно специально зарядить до любого потенциала, тогда ток не будет равен нулю. Определение зависимости силы тока от потенциала поверхности тела и составляет одну из задач зондовых измерений и теории зонда в плазме (см. гл. X).

в гл. X, определяется выражением (10.8)

$$j_i = N_0 \left\{ (V_0 n) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{V_0 n}{\sqrt{2\kappa T/M_i}} \right) \right] + \sqrt{\frac{\kappa T}{2\pi M_i}} \exp \left[-\frac{M_i (V_0 n)^2}{2\kappa T} \right] \right\}, \quad (4.1)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности тела (на передней поверхности всегда $V_0 n > 0$). Для сферического тела $V_0 n = V_0 \cos \theta'$, где для заданной точки поверхности θ' — полярный угол, отсчитываемый от оси z (т. е. от направления V_0). Для углов θ' , не слишком близких к $\pi/2$: $\frac{V_0 \cos \theta'}{\sqrt{2\kappa T/M_i}} \gg 1$ и

$$j_i \simeq N_0 V_0 \cos \theta'. \quad (4.2)$$

Поток электронов на переднюю часть определяется просто выражением

$$j_e = N_0 \sqrt{\frac{\kappa T_e}{2\pi m}} \exp \left(\frac{e\varphi_S}{\kappa T} \right), \quad (4.3)$$

справедливым для покоящегося тела (см. (10.42)), так как скорость тела V_0 мала по сравнению с тепловой скоростью электронов $v_e = \sqrt{2\kappa T/m}$. В (4.3) φ_S — потенциал рассматриваемой точки r_S поверхности тела.

Если поверхность тела — диэлектрик, то в каждой точке поверхности должно соблюдаться равенство потоков поглощаемых электронов и ионов, т. е.

$$(1 - R_i) j_i = (1 - R_e) j_e,$$

где R_e и R_i — коэффициенты отражения электронов и ионов. Отсюда следует, что потенциал на поверхности равен

$$\varphi_S = -\frac{\kappa T}{e} \times$$

$$\times \ln \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\kappa T}{2\pi m}} (1 - R_e)}{(1 - R_i) (V_0 n) \left[\frac{1}{2} + \frac{A}{2} \right] + (1 - R_i) \sqrt{\frac{\kappa T}{2\pi M_i}} \exp \left[-\frac{M_i (V_0 n)^2}{2\kappa T} \right]} \right\}, \quad (4.4)$$

где

$$A = \Phi \left(\frac{V_0 n}{\sqrt{2\kappa T/M_i}} \right).$$

Здесь, как обычно, принято, что $N_{i0} = N$ и температуры ионов и электронов одинаковы. В частности, для сферического тела при углах θ' , не слишком близких к $\pi/2$,

$$\varphi_S(\theta') \simeq -\frac{\kappa T}{e} \ln \left[\sqrt{\frac{\kappa T}{2\pi M V_0^2}} \frac{1-R_e}{(1-R_i) \cos \theta'} \right], \quad (4.5)$$

т. е. φ_S увеличивается с увеличением угла θ' . Максимальное значение φ_S достигается при $\theta' = \pi/2$, оно равно

$$\varphi_{\max} = -\frac{\kappa T}{e} \ln \left(\sqrt{\frac{M_i}{m}} \frac{1-R_e}{1-R_i} \right). \quad (4.6)$$

Если поверхность тела металлическая, то потенциал поля на ней постоянен и равен φ_0 . Величина φ_0 , естественно, определяется из условия равенства нулю полного тока на поверхность тела, т. е.

$$J_i = \int j_i dS = J_e = \int j_e dS.$$

Для сферического тела, используя (4.1) и (4.3), получаем при условии $V_0 \gg \sqrt{2\kappa T/M_i}$, что

$$N_0 V_0 \pi R_0^2 (1-R_i) = N_0 \sqrt{\frac{\kappa T}{2\pi m}} 2\pi R_0^2 (1-R_e).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_0 = -\frac{\kappa T}{e} \ln \left[\sqrt{\frac{2\kappa T}{\pi m V_0^2}} \frac{1-R_e}{1-R_i} \right]. \quad (4.7)$$

Естественно, что полученные выражения для потенциала тела имеют приближенный характер. Для точного расчета φ_0 необходимо учитывать множество других процессов, приводящих к изменению тока на поверхности тела, таких, как термоэлектронная эмиссия, фотоэффект, выбивание электронов или ионов из поверхности под влиянием корпускулярного излучения, из-за столкновений с нейтральными атомами среды. Эффективность этих процессов сильно зависит от материала поверхности тела.

В рассматриваемых нами областях ионосферы, если коэффициенты отражения электронов и ионов не близки

к единице, потенциал поверхности тела (4.6), (4.7) порядка $0,2 \div 0,4$ в. При $R_i \rightarrow 1$ потенциал φ_0 логарифмически возрастает.

В литературе имеются указания, основанные на прямых измерениях, что отрицательный потенциал спутника достигает нескольких вольт. Причина появления столь больших отрицательных потенциалов до сих пор остается неясной*).

в. Электрическое поле в области сгущения. Поверхность тела, как мы видели выше, может иметь довольно большой отрицательный потенциал $\varphi \sim -(3 \div 4) \kappa T/e$. Поэтому тело поглощает лишь небольшую часть падающих на него электронов. Кроме того, скорость тела значительно меньше тепловой скорости электронов $V_0 \ll \sqrt{2\kappa T/m}$. Все это приводит к тому, что в окрестности тела, кроме малой области, непосредственно примыкающей к его поверхности, как указывалось выше, для электронов справедливо распределение Больцмана:

$$N = N_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{\kappa T}\right). \quad (4.8)$$

Таким образом, потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению (1.30):

$$\Delta\varphi = -4\pi e \left[N_i - N_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{\kappa T}\right) \right]. \quad (4.9)$$

*) Действительно, основные процессы, неучтенные при выводе формул (4.6), (4.7) (термоэлектронная эмиссия, фотоэффект), приводят лишь к уменьшению абсолютной величины отрицательного потенциала. Считать, что ракета или спутник сохраняет большой отрицательный потенциал, приобретенный по той или иной причине в нижних слоях атмосферы, можно лишь в том случае, если ионы чрезвычайно слабо нейтрализуются на поверхности тела. В самом деле, из-за ионного тока время релаксации потенциала поверхности

$$\Delta t \sim \frac{C\varphi_0}{eJ_i} \sim \frac{\varphi_0}{e\pi R_0 V_0 N_0} \frac{1}{1-R_i},$$

где $C = R_0$ — емкость шара. Мы видим, что Δt увеличивается лишь, когда R очень близко к единице. Например, даже при $\varphi_0 = 100$ в, $1 - R_i = 10^{-5}$, $R_0 \sim 1$ м, $\Delta t \sim 1$ сек, т. е. еще достаточно мало.

Перепишем уравнение (4.9) в безразмерных переменных $\varphi^* = \frac{e|\varphi|}{\kappa T}$, $\xi = r/R_0$:

$$\Delta_{\xi}\varphi^* = \left(\frac{R_0}{D}\right)^2 \left[\frac{N_i}{N_0} - \exp(-\varphi^*) \right], \quad (4.10)$$

где $D = \sqrt{\kappa T / 4\pi e^2 N_0}$ — дебаевский радиус и значения $(R_0/D)^2$ для $R_0 = 1$ м в ионосфере приведены выше в табл. IX. Из этой же таблицы видно, что в интересующих нас условиях перед правой частью уравнения (4.10) всегда стоит большая величина. Решение уравнения естественно искать поэтому в виде ряда по степеням малого параметра $(D/R_0)^2$. Основную роль при этом в уравнении (4.10) играет нелинейный член $e^{-\varphi^*}$ и его удобнее переписать в виде

$$\varphi^* = -\ln \left[\frac{N_i(\xi)}{N_0} - \left(\frac{D}{R_0}\right)^2 \Delta_{\xi}\varphi^* \right]. \quad (4.11)$$

Разлагая решение в ряд по степеням $(D/R_0)^2$, т. е. принимая

$$\varphi^* = \varphi_0^* + \varphi_{(1)}^* \left(\frac{D}{R_0}\right)^2 + \dots,$$

имеем

$$\varphi_0^* = \ln \frac{N_0}{N_i(\xi)}. \quad (4.12)$$

Можно, далее, определить и другие члены ряда, а именно $\varphi_{(1)}^*$ и т. д. Этот ряд хорошо сходится, если

$$\left(\frac{D}{R_0}\right)^2 \frac{N_0}{N_i} \frac{\Delta_{\xi} \ln \frac{N_0}{N_i}}{\ln \frac{N_0}{N_i}} \ll 1. \quad (4.13)$$

Впереди тела из-за отражения концентрация ионов несколько выше, чем N_0 , и условие (4.13) выполняется всюду, кроме области, непосредственно примыкающей к поверхности тела толщиной порядка дебаевского радиуса (ее называют обычно двойным слоем). Таким образом, всюду впереди тела, кроме области двойного слоя, потенциал электрического поля дается выражением

$$\varphi = \frac{\kappa T}{e} \ln \frac{N_i(r)}{N_0}. \quad (4.14)$$

Физический смысл выражения (4.14) чрезвычайно прост. В самом деле, при таком поле концентрация электронов (4.8) тождественно совпадает с концентрацией ионов. Следовательно, электрическое поле (4.14) — это поле, которое обеспечивает квазинейтральность плазмы. Так и должно быть в условиях, когда размеры возмущенной области гораздо больше дебаевского радиуса (см. § 4).

Полная концентрация ионов впереди тела равна

$$N_i(r) = N_0 + N_{i2}(r) + \delta N_i(r),$$

где $N_{i2}(r)$ — концентрация отраженных от тела ионов, а $\delta N_i(r)$ изменение концентрации частиц в набегающем потоке, вызванное влиянием электрического поля. Легко убедиться, однако, что из-за большой энергии набегающих на тело ионов $MV_0^2/2 \gg \kappa T \sim e|\varphi|$ величина δN_i мала в сравнении с N_0 , так что ею можно пренебречь. По той же причине и относительная концентрация отраженных от тела ионов при одинаковом законе отражения совпадает с относительной концентрацией нейтральных частиц n_2/n_0 — нужно лишь учесть частичную нейтрализацию ионов на поверхности тела, т. е. соотношение

$$\frac{N_{i2}(r)}{N_0} = R_i \frac{n_2(r)}{n_0},$$

где R_i — коэффициент отражения ионов от поверхности тела. Таким образом, впереди тела

$$\varphi = \frac{\kappa T}{e} \ln \left[1 + R_i \frac{n_2(r)}{n_0} \right]. \quad (4.15)$$

Отношение $n_2(r)/n_0$, как было показано выше, существенно зависит от характера рассеяния частиц на поверхности тела. Выражения для $n_2(r)/n_0$ при зеркальном отражении и диффузном рассеянии приведены выше в § 6.

Кривые равных значений потенциала (формулы (4.15)) в случае зеркального отражения ионов от поверхности тела при R_i , близком к единице, изображены на рис. 23*).

*) Как уже говорилось, при R_i , близком к единице, потенциал поверхности тела логарифмически растет. Однако даже при $1 - R_i \sim 0,01$ потенциал оказывается не очень высоким. Это возрастание φ , кроме того, сказывается лишь в двойном слое около поверхности.

Из рисунка видно, что электрическое поле впереди тела невелико — порядка $\kappa T/e$. При малых коэффициентах отражения, а также на значительном расстоянии от

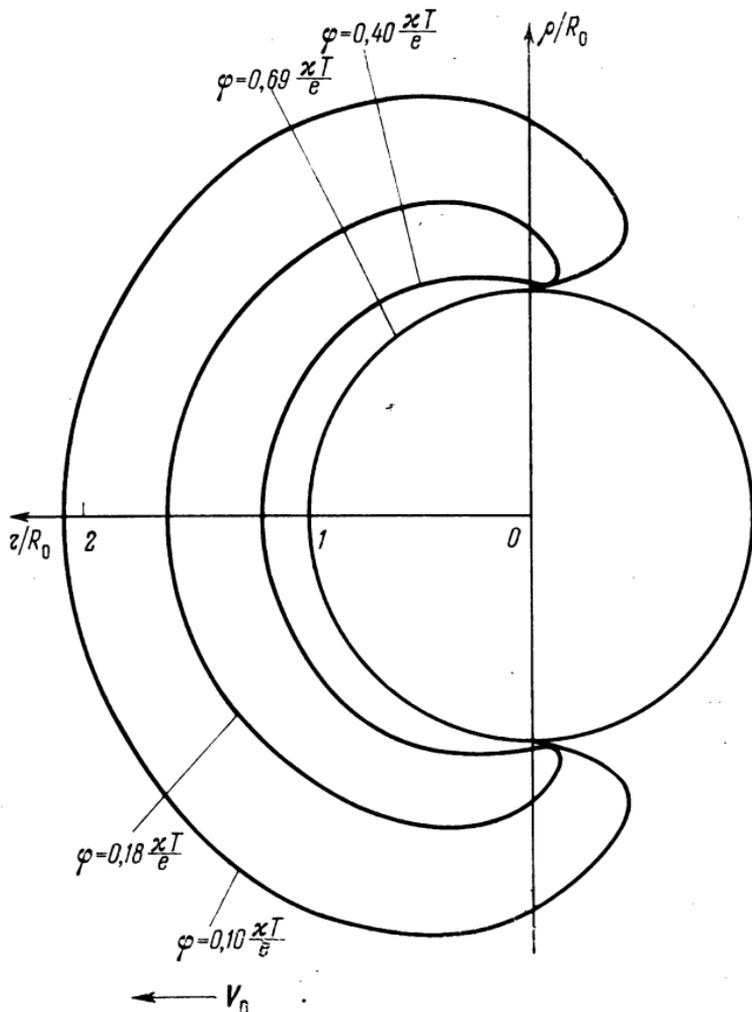


Рис. 23. Линии равного потенциала впереди сферы при зеркальном отражении ионов от поверхности тела.

поверхности тела (если только $R_i n_2/n_0 \ll 1$) потенциала поля пропорционален избыточной концентрации

$$\varphi = \frac{\kappa T}{e} R_i \frac{n_2(r)}{n_0}. \quad (4.16)$$

Таким образом поле убывает с ростом расстояния от тела, так же как и $n_2(r)$, т. е. пропорционально $(R_0/r)^2$ (см. § 6).

г. **Двойной слой впереди тела.** Вблизи поверхности тела квазинейтральность плазмы нарушается — здесь образуется двойной слой. На протяжении этого слоя происходит падение потенциала от его значения на поверхности, определяемого формулами § 14б, до тех значений, которые потенциал имеет в квазинейтральной области около тела (см. § 14в, д). Задача вычисления распределения потенциала в таком двойном слое рассматривалась Ястровым и Пирсом [55]. В этой работе численно интегрировалось уравнение Пуассона для потенциала, причем предполагалось, что распределение частиц и поля является сферически симметричным и что электроны распределены по Больцману, а концентрация ионов равна своему невозмущенному значению. Эти предположения совершенно необоснованы, поскольку движение тела сильно возмущает концентрацию ионов и распределение отнюдь не является сферически симметричным. Поэтому результаты [55] могут быть справедливы лишь качественно. Более корректно задача о распределении потенциала в плоском двойном слое рассматривалась Гинцбургом [56]. В этой работе, однако, не учтено поглощение электронов на поверхности тела. Как мы увидим ниже, характер двойного слоя существенно различен впереди тела — в области сгущения, и позади тела — в области разрежения. В настоящем разделе мы рассмотрим слой впереди тела. Двойной слой в области разрежения будет рассмотрен в § 14е.

Потенциал поля в двойном слое описывается уравнением (1.30). При этом в интересующих нас условиях, когда $R_0 \gg D$, толщина этого слоя мала. В этом случае основную роль в левой части уравнения (1.30) играет член, описывающий изменение потенциала в направлении нормали к поверхности, так что уравнение превращается в одномерное. Обозначая через x расстояние по нормали до поверхности, получаем тогда вместо (1.30) *

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi e (N_i - N_e). \quad (4.17)$$

*) Разумеется, поверхность предполагается достаточно гладкой, так что ее радиус кривизны везде $\gg D$.

Концентрация ионов изменяется существенно лишь на расстоянии порядка размеров тела, и следовательно, на протяжении тонкого двойного слоя она постоянна, т. е. *)

$$N_i = N_0 \left(1 + R_i \frac{n_2(r_S)}{n_0} \right). \quad (4.18)$$

В случае зеркального отражения $n_2(r_S)/n_0 = 1$ и $N_i = N_0(1 + R_i)$. Выражение для концентрации электронов N_e в двойном слое вблизи частично поглощающего электроны тела будет выведено в гл. IX (см. (9.16a)). Воспользуемся здесь этой формулой:

$$N_e = N_0 \frac{1}{2} e^{\frac{e\varphi}{\kappa T}} \left[1 + R_e + (1 - R_e) \Phi \left(\sqrt{\frac{e(\varphi - \varphi_0)}{\kappa T}} \right) \right]. \quad (4.19)$$

Здесь, как обычно, $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ — интеграл вероятностей, R_e — коэффициент отражения электронов. Распределение электронов (4.19) отличается от распределения Больцмана (4.8) из-за того, что в нем учтено поглощение части электронов на поверхности тела. За пределами двойного слоя, если отрицательный потенциал тела достаточно велик $\left(-\frac{e(\varphi_0 - \varphi)}{\kappa T} \gg 1 \right)$, распределение (4.19) совпадает с (4.8) с точностью до экспоненциально малых членов.

Подставляя выражения (4.18) и (4.19) для N_i и N_e в уравнение (4.17) и переходя к безразмерным переменным $\varphi^* = \frac{e|\varphi|}{\kappa T}$, $\zeta = \frac{x}{D}$, перепишем (4.17) в виде

$$\frac{d^2\varphi^*}{d\zeta^2} = 1 + R_i \frac{n_2(rs)}{n_0} - \frac{1}{2} e^{-\varphi^*} \left[1 + R_e + (1 - R_e) \Phi \left(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*} \right) \right]. \quad (4.20)$$

*) Здесь, как и раньше, предполагается выполненным условие $e|\varphi| \ll MV_0^2$, в силу которого влиянием поля на движение ионов можно пренебречь; результаты этого раздела, впрочем без особого труда можно обобщить и на случай когда условие $e|\varphi| \ll MV_0^2$ не выполнено.

Граничные условия имеют следующий вид: $\varphi^* = \varphi_0^* = \frac{e|\varphi_0|}{\kappa T}$ при $\zeta = 0$ и $\varphi^* = \varphi_1^*$ при $\zeta \rightarrow \infty$, где значение φ_1^* на внешней границе двойного слоя определяется, естественно, уравнением квазинейтральности $N_i = N_e$, т. е.

$$1 + R_i \frac{n_2(r_S)}{n_0} = \frac{1}{2} e^{-\varphi_1^*} [1 + R_e + (1 - R_e) \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi_1^*})]. \quad (4.21)$$

При достаточно больших отрицательных значениях φ_0 ($\varphi_0^* \gg 1$) из уравнения (4.21) получаем, что

$$\varphi_1^* = \ln \left[1 + R_i \frac{n_2(r_S)}{n_0} \right]. \quad (4.22)$$

Это значение φ_1^* совпадает с (4.15).

Поскольку правая часть уравнения (4.20) не зависит от ζ , то решение его находится путем элементарного интегрирования:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_0^*} \frac{d\varphi^*}{\left[\int_{\varphi_1^*}^{\varphi^*} f(\varphi^*) d\varphi^* \right]^{1/2}}, \quad (4.23)$$

где

$$f(\varphi^*) = 1 + R_i \frac{n_2(r_S)}{n_0} - \frac{1}{2} [1 + R_e + (1 - R_e) \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})] e^{-\varphi^*}. \quad (4.24)$$

Учитывая также, что

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_0^*} \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*}) e^{-\varphi^*} d\varphi^* = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*} - \sqrt{\varphi_0^* - \varphi_1^*}) e^{-\varphi_0^*} - e^{-\varphi_0^*} \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*}) + \\ + e^{-\varphi_1^*} \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi_1^*}) \approx e^{-\varphi_0^*} - e^{-\varphi_0^*} \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

(в последнем выражении учтено, что $\varphi_0^* \gg 1$), имеем окончательно

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_0^*} \frac{d\varphi^*}{A}, \quad (4.26)$$

где

$$A = \left\{ \left(1 + R_i \frac{n_2(rS)}{n_0} \right) (\varphi^* - \varphi_1^*) - \frac{1+R_e}{2} (e^{-\varphi_1^*} - e^{-\varphi^*}) - \frac{1-R_e}{2} [e^{-\varphi_1^*} - e^{-\varphi^*} \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})] \right\}^{1/2}.$$

В случае полностью поглощающего тела $R_i = 0$, $R_e = 0$ и, следовательно, $\varphi_1^* = 0$. Тогда вместо (4.26) получаем, что

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\varphi^*}^{\varphi_0^*} \frac{d\varphi^*}{\left\{ \varphi^* - 1 + \frac{1}{2} e^{-\varphi^*} [1 + \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})] \right\}^{1/2}}. \quad (4.27)$$

Эта формула в неявном виде определяет зависимость $\varphi^*(\zeta)$, т. е. зависимость потенциала от расстояния до поверхности тела. Эта зависимость показана на рис. 24 для

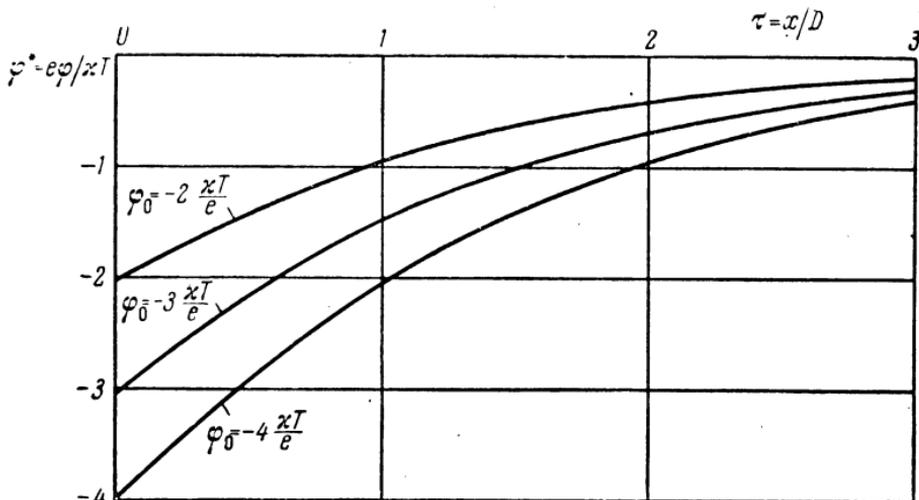


Рис. 24. Зависимость потенциала поля φ от расстояния x/D в двойном слое около передней поверхности тела при различных значениях потенциала φ_0 на поверхности. Все величины на рисунке безразмерные.

значений $\frac{e\varphi_0}{\kappa T} = -\varphi_0^* = -2, -3, -4$. Из рисунка видно, что толщина двойного слоя в этом случае порядка $1 \div 2$ дебаевских радиусов. Из формулы (4.27) следует,

что при больших значениях потенциала поля на теле толщина двойного слоя растет пропорционально $\sqrt{\varphi_0^*}$.

Напряженность электрического поля равна

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\kappa T}{eD} \frac{d\varphi^*}{d\xi} = \frac{\kappa T}{eD} \left(\frac{d\xi}{d\varphi^*} \right)^{-1}.$$

При больших значениях потенциала φ_0^* на поверхности тела, как видно из (4.26),

$$\frac{d\xi}{d\varphi^*} = -\frac{1}{\sqrt{B}},$$

где

$$B = 2 \left(1 + R_i \frac{n_2(r_S)}{n_0} \right) (\varphi^* - \varphi_1^*) - (1 + R_e)(e^{-\varphi_1^*} - e^{-\varphi^*}) - (1 - R_i) [e^{-\varphi_1^*} - e^{-\varphi^*} \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})].$$

Следовательно,

$$E = -\sqrt{C}, \quad (4.28)$$

где

$$C = 4\pi N_0 \kappa T \left\{ 2 \left(1 + R_i \frac{n_2(r_S)}{n_0} \right) (\varphi^* - \varphi_1^*) - (1 + R_e) \times \right. \\ \left. \times (e^{-\varphi_1^*} - e^{-\varphi^*}) - (1 - R_i) [e^{-\varphi_1^*} - e^{-\varphi^*} \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})] \right\}.$$

В ионосфере $D \sim 0,1$ см, так что напряженность поля вблизи поверхности тела порядка нескольких вольт на сантиметр, если φ_0 порядка нескольких десятых вольта. Зависимость напряженности электрического поля на поверхности тела от φ_0 изображена на рис. 25.

д. Электрическое поле в области разрежения. Уравнение (4.10), разумеется, справедливо и в области разрежения. При выполнении условия (4.13)

$$\left(\frac{D}{R_0} \right)^2 \frac{N_0}{N_i} \frac{\Delta \xi \ln \frac{N_0}{N_i}}{\ln \frac{N_0}{N_i}} \ll 1. \quad (4.13)$$

Мы имеем, таким образом, что потенциал поля в области разрежения равен

$$\varphi = \frac{\kappa T}{e} \ln \frac{N_i(r)}{N_0}. \quad (4.14)$$

На значительных расстояниях позади тела отношение N_i/N_0 не слишком мало. В этом случае условие (4.13) хорошо выполняется. В частности, как показано в гл. II,

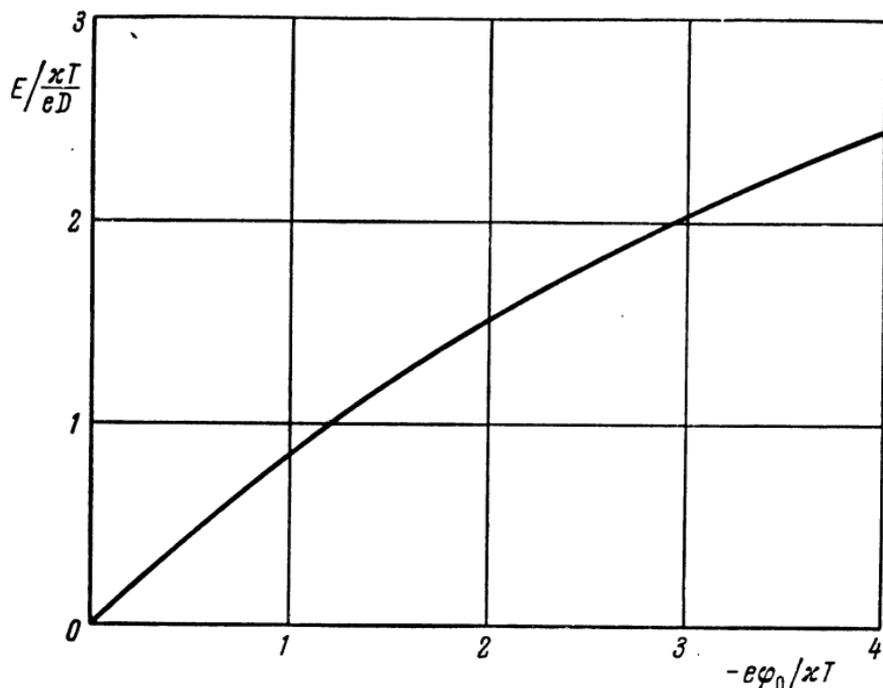


Рис. 25. Зависимость напряженности электрического поля E на передней поверхности тела от его потенциала φ_0 . Все величины на рисунке безразмерные.

на больших расстояниях позади тела при $z > R_0 V_0/v_i$

$$-\delta N_i = N_0 - N_i \ll N_0.$$

В этой области потенциал поля пропорционален возмущениям концентрации ионов

$$\varphi = \frac{\kappa T}{e} \frac{\delta N_i(r)}{N_0}. \quad (4.29)$$

На расстоянии от тела порядка R_0 разрежение очень велико, так что условие (4.13) нарушается. Следовательно, область двойного слоя позади быстро движущегося тела порядка размеров самого тела, т. е. гораздо больше, чем впереди. Она показана пунктиром на рис. 26.

Концентрация ионов позади тела была рассчитана в гл. II, III без учета влияния электрического поля на движение ионов. Используя соответствующие выражения для концентрации ионов в формуле (4.14), можно найти

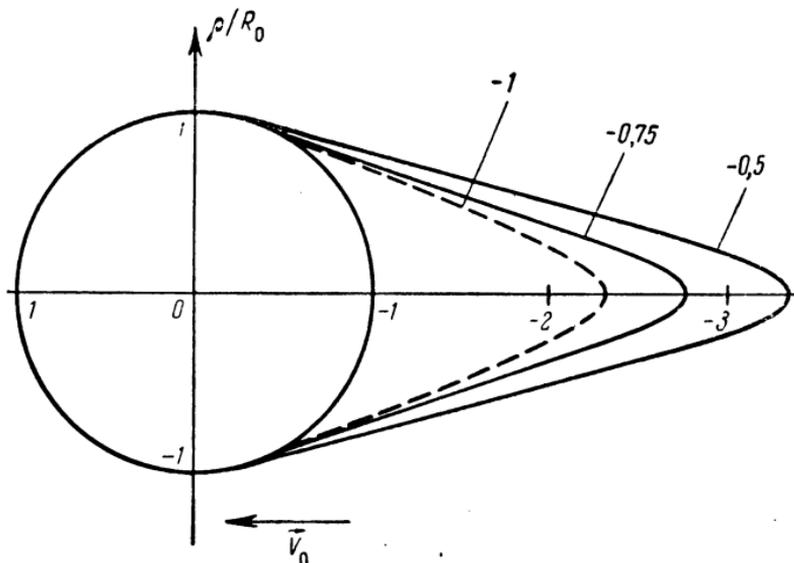


Рис. 26. Линии равного потенциала позади сферы, полностью отражающей частицы $\left(\frac{V_0}{\sqrt{2\kappa T/M_i}} = 8\right)$. Значения $e\varphi/\kappa T \ln(R_0/D)^2$ указаны на рисунке.

потенциал электрического поля. Например, в отсутствие магнитного поля на больших расстояниях, когда $z > R_0 V_0/v_i$, позади быстро движущегося тела с сечением S , с помощью (2.29) получаем

$$\varphi = -\frac{S_0 M_i V_0^2}{2\pi e z^2} \exp\left(-\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T} \cdot \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right). \quad (4.30)$$

Вид эквипотенциальных поверхностей позади тела в отсутствие магнитного поля изображен на рис. 26. Из рисунка и из формулы (4.14) видно, что при приближении к телу потенциал поля нарастает (по абсолютной величине); максимальное значение φ достигает у границы двойного слоя, где оно равно

$$\varphi_{\text{макс}} \approx -\frac{\kappa T}{e} \ln\left(\frac{R_0}{D}\right)^2. \quad (4.31)$$

В ионосфере $\ln \left(\frac{R_0}{D} \right)^2 \sim 10$, так что потенциал ϕ вблизи границы двойного слоя на порядок больше, чем $\frac{\kappa T}{e}$, т. е. $\phi \sim 1 \div 2e$. Впереди тела, как было показано ранее, ϕ лишь порядка $\frac{\kappa T}{e}$.

Выше не учитывалось влияние электрического поля на движение ионов. Вместе с тем потенциал поля в области разрежения сравнительно велик, и поле действует на ионы, заполняющие зону разрежения достаточно долго вследствие большой длины этой зоны. Благодаря этому скорость заполнения области разрежения ионами существенно зависит от поля, так что результаты, полученные без учета влияния электрического поля, справедливы лишь с точностью до множителя порядка единиц.

Когда для плазмы применимо приближение гидродинамики, влияние собственного электрического поля на движение ионов учитывается очень просто, так как электрическое поле как бы увеличивает давление ионов. Вместе с тем само поле вызвано электронами. Поэтому действие электрического поля на ионы в гидродинамике эквивалентно замене ионного давления на полное давление в плазме, которое равно $\kappa(N_e T_e + N_i T_i)$. Если концентрации и температуры ионов и электронов равны, то влияние поля приводит к эффективному удвоению ионной температуры.

В нашем случае гидродинамическое приближение, конечно, неприменимо, и влияние электрического поля на движение ионов нельзя полностью учесть изменением температуры ионов. Однако все же учет эффективного удвоения температуры ионов при рассмотрении возмущений концентрации ионов в области разрежения оказывается полезным и позволяет оценить влияние электрического поля на движение ионов. В этом приближении концентрации ионов и электронов в разреженной области позади тела по-прежнему определяются выражениями, полученными в гл. II, III; нужно только заменить в них T на $2T$. Это приводит к сжатию в $\sqrt{2}$ раз всей возмущенной области. Сравнение результатов приближенного расчета возмущения концентрации ионов позади тела

(кривая e) с решением, полученным при учете влияния электрического поля на движение ионов в области слабо возмущенной плазмы (кривая a , см. также § 15), приведено на рис. 27. На этом же рисунке кривая b есть результат расчета в гидродинамическом приближении.

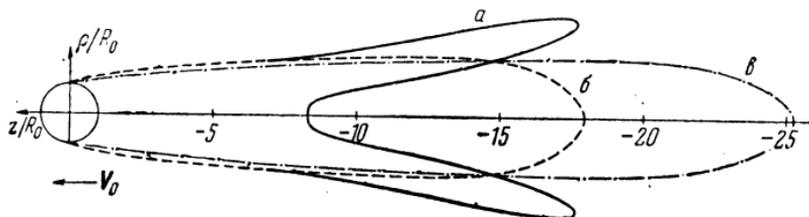


Рис. 27. Линии равного потенциала $\varphi = -0,1 \frac{\kappa T}{e}$, вычисленные в различных приближениях.

е. Двойной слой позади тела. Концентрация ионов в двойном слое позади тела в области максимального разрежения ничтожно мала. На границе двойного слоя, как мы видели (см. (4.31)), потенциал поля достаточно велик, а так как он отрицателен, то концентрация электронов в этой области мала и не превосходит значения

$$N \ll N_0 \exp\left(\frac{e\varphi_{\max}}{\kappa T}\right) \approx N_0 \left(\frac{D}{R_0}\right)^2. \quad (4.32)$$

Поэтому влияние свободных зарядов на электрическое поле в двойном слое позади тела невелико и с точностью до логарифмического члена $O\left(\frac{1}{\ln(R_0/D)^2}\right)$ этим влиянием можно пренебречь. Уравнение (4.9) запишется тогда в виде

$$\Delta\varphi = 0. \quad (4.33)$$

При этом граничные условия имеют следующий вид:

$$\varphi = -\frac{\kappa T}{e} \ln\left(\frac{R_0}{D}\right)^2$$

на границе области максимального разрежения и

$$\varphi = \varphi(r_s)$$

на поверхности тела, где значение $\varphi(r_s)$ определяется

так, как это показано в параграфе § 14б. В частности, для металлического тела потенциал $\varphi(r_S) = \varphi_0$, а φ_0 определяется из условия равенства нулю полного тока на поверхность тела (4.7).

Решение уравнения (4.33) при заданных граничных условиях можно получить численно с помощью обычных методов электростатики. Кривые равных значений потенциала φ для металлической поверхности при

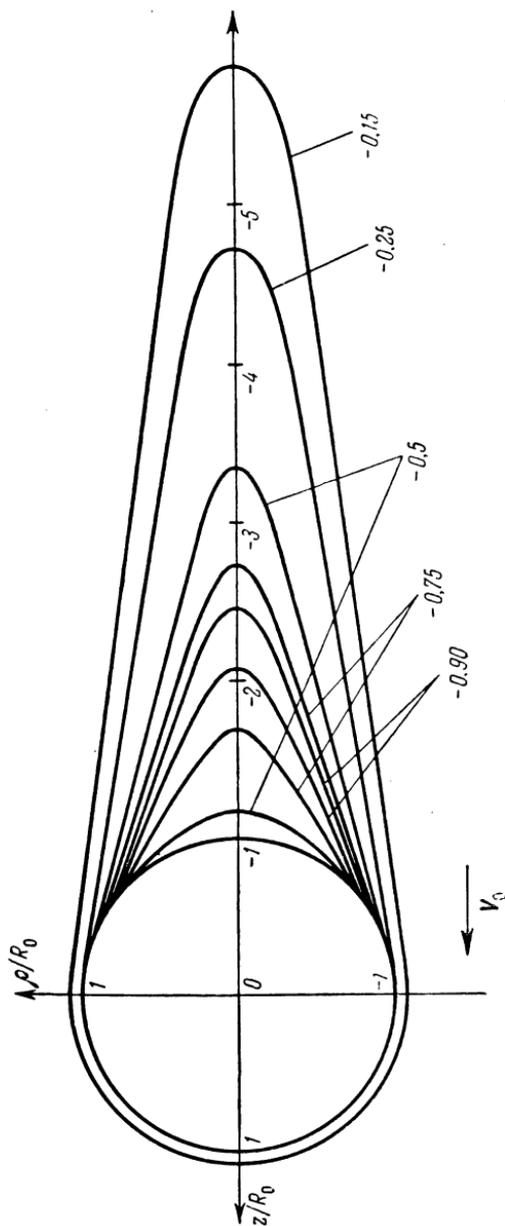
$$\sqrt{\frac{MV_0^2}{2\kappa T}} = 8 \text{ и } \varphi_0 = 0,25 \frac{\kappa T}{e} \ln\left(\frac{R_0}{D}\right)^2 \text{ приведены на}$$

рис. 28, а. Из рисунка видно, что в рассматриваемом случае потенциал поля сначала растет (по абсолютной величине) с удалением от тела до границы двойного слоя; максимальное значение φ на границе двойного слоя равно

$$\varphi_{\text{макс}} \approx -\frac{\kappa T}{e} \ln\left(\frac{R_0}{D}\right)^2.$$

Зависимость напряженности электрического поля около поверхности сферического тела в разреженной зоне от угла θ' изображена на рис 28, б. Значение E минимально в направлении, противоположном направлению движения тела, т. е. при $\theta' = 180^\circ$. С приближением к $\theta' = 90^\circ$ E значительно возрастает — до значения порядка $\frac{\kappa T}{eD}$, где D — дебаевский радиус. В противоположной стороне, как было показано в § 14г, напряженность поля имеет другой знак; по абсолютной величине она также порядка $\frac{\kappa T}{eD}$.

Потенциал поля в общем должен сохранить свой вид и при наличии других условий на поверхности тела; например, если поглощается лишь часть ионов или электронов или при учете фотоэмиссии, термоэмиссии и т. д. От условий на поверхности существенно зависит лишь вид потенциала φ в области двойного слоя. Разумеется, сказанное справедливо только в случае, если размер тела много больше дебаевского радиуса. Заметим также, что формулы (4.14) применимы при учете постоянного магнитного поля (если только тело не движется строго по направлению магнитного поля), если подставить



a)

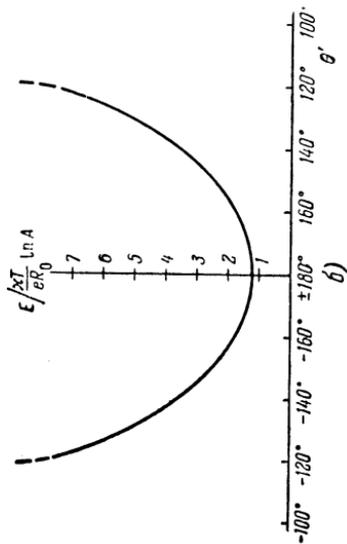


Рис. 28. а) Линии равного потенциала в окрестности металлической сферы, поглощающей падающие на нее частицы $\left(\Phi_0 = 0,25 \frac{\kappa T}{e} \ln \left(\frac{R_0}{D} \right)^2 \right)$. Значения $\epsilon \Phi / \left[\kappa T \ln \left(\frac{R_0}{D} \right)^2 \right]$ указаны на рисунке. б) Зависимость напряженности поля от направления на поверхности металлического тела.

для $N_i(\mathbf{r})$ выражения, полученные в гл. III. Напомним, что магнитное поле существенно влияет на концентрацию ионов лишь на довольно больших расстояниях от тела, где потенциал уже мал.

§ 15. Влияние электрического поля на движение ионов

В предыдущем параграфе было вычислено электрическое поле, возникающее в окрестности движущегося в плазме тела. При этом пренебрегалось влиянием поля на движение ионов. Вместе с тем в области разрежения, как указывалось выше, электрическое поле существенно влияет на движение ионов. Поэтому для строгого решения задачи здесь необходимо искать совместное решение системы уравнений (1.23), (1.24) и (1.30), описывающих функции распределения электронов и ионов и электрическое поле в среде. В общем случае решение этой системы уравнений найти не удастся, и ее можно исследовать путем численных расчетов для конкретных случаев.

Однако на больших расстояниях от тела возмущения плазмы невелики. Мало здесь и электрическое поле. Поэтому в некоторой области систему уравнений (1.23), (1.24), (1.30) можно линеаризовать. Кроме того, если тело не движется вдоль магнитного поля, то на больших расстояниях от тела распределение электронов всегда равновесное (1.29) и потенциал электрического поля определяется уравнением (4.9). Линеаризованная система уравнений (1.23), (4.9) имеет в этом случае вид

$$v \frac{\partial f'_i}{\partial r} + \frac{e}{\kappa T} f_{0i} \frac{\partial \Phi}{\partial r} (v + V_0) + \frac{e}{M_{ic}} [v + V_0, \mathbf{H}_0] \frac{\partial f'_i}{\partial v} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{rV_0}{r} f_{0i} \delta(r - R_0), & rV_0 < 0, \\ 0, & rV_0 > 0, \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\Delta \Phi = -4\pi e \left(\delta N_i - N_0 \frac{e\Phi}{\kappa T} \right). \quad (4.35)$$

Здесь $f'_i = f_i - f_{0i}$ — возмущение функции распределения ионов, $\delta N_i = N_i - N_0$ — возмущение концентрации ионов:

$$\delta N_i = \int f'_i d^3v. \quad (4.36)$$

В уравнениях (4.34), (4.35) учтено, что f_{0i} — максвеллов

ская функция распределения и оставлены лишь члены нулевого или первого порядка малости по f_i и φ . Строгое аналитическое решение системы уравнений (4.34), (4.35) удастся получить, и оно рассматривается ниже.

а. Немагнитная плазма. Рассмотрим вначале для простоты случай тела, движущегося в немагнитной плазме ($H_0 = 0$). Заметим при этом, что удобнее определять не сами функции $f_i(r, v)$ и $\varphi(r)$, а их компоненты Фурье по координатам $f_q(v)$, φ_q . После этого f_i и φ можно найти путем обратного преобразования Фурье. Однако общий характер влияния электрического поля можно увидеть уже из формул для N_q .

Переходя в отсутствие магнитного поля в уравнении (4.34) к компонентам Фурье, получаем

$$iqvf_q + iq(v + V_0)\varphi_q f_{0i} \frac{e}{\kappa T} = -f_{0i}V_0\pi R_0^2 G, \quad (4.37)$$

Для малых q , когда $qR_0 \ll 1$, $G(qR_0, \chi) = 1$, так что уравнение приобретает вид

$$iqvf_q + iq(v + V_0)\varphi_q f_{0i} \frac{e}{\kappa T} = -f_{0i}V_0\pi R_0^2. \quad (4.38)$$

В следующем параграфе мы увидим, что уравнение, аналогичное (4.38), для малых q можно получить строго, без пренебрежения нелинейными по полю эффектами. При малых q , кроме того, как следует из (4.35),

$$N_q = \frac{N_0 e}{\kappa T} \varphi_q. \quad (4.39)$$

Подставляя (4.39) в (4.38), находим

$$f_q + \frac{q(v + V_0)}{qv} \frac{f_{0i}}{N_0} N_q = \frac{if_{0i}V_0\pi R_0^2}{qv}. \quad (4.40)$$

Интегрируя обе части (4.40) по d^3v и учитывая (4.36), получаем, что

$$N_q = \frac{i\pi R_0^2 V_0 \int f_{0i} \frac{d^3v}{qv}}{2 + \frac{qV_0}{N_0} \int f_{0i} \frac{d^3v}{qv}} = \frac{i\pi R_0^2 V_0 \int f_{0i} \frac{d^3u}{qu - qV_0 - i\delta}}{2 + \frac{qV_0}{N_0} \int_{(\delta \rightarrow +0)} f_{0i} \frac{d^3u}{qu - qV_0 - i\delta}}.$$

Чтобы придать смысл несобственным интегралам, мы в соответствии с рассуждениями на стр. 83 заменили

qV_0 на $qV_0 + i\delta$ ($\delta \rightarrow +0$). С помощью формул (2.90) и (2.91) имеем окончательно

$$N_q = \frac{\pi R_0^2 N_0 \left(\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T} \right) Q(a)}{q [2 + iaQ(a)]}, \quad (4.41)$$

где функция $Q(a)$ по-прежнему определена формулой (2.92). При конечных значениях q величина N_q приближенно равна выражению (4.41), умноженному на функцию $G(qR_0, \chi)$. Формула (4.41) отличается от формулы (2.93), полученной без учета влияния электрического поля, наличием знаменателя, зависящего от угла χ между q и V_0 . При этом если

$$a = \sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \cos \chi \gg 1 \quad (4.42)$$

(что во всяком случае выполняется, когда угол χ не близок к $\pi/2$), то

$$Q(a) \approx \frac{i}{a} \quad (4.43)$$

и знаменатель равен единице, т. е. при таком условии электрическое поле несущественно. Если же

$$a \ll 1, \text{ т. е. } \cos \chi \ll \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i V_0^2}}, \quad (4.44)$$

то знаменатель равен двум, т. е. в этом случае электрическое поле уменьшает N_q вдвое. Интересно отметить, что последний результат соответствует как раз гидродинамическому приближению, рассмотренному в предыдущем параграфе.

Полученные результаты имеют простой физический смысл. Действительно, электрическое поле может существенно повлиять на движение иона только в том случае, если поле меняется не слишком быстро, т. е. за время существенного изменения поля ион успеет пройти расстояние порядка длины волны. Частота компоненты поля в неподвижной системе координат равна qV_0 . Поэтому поле может существенно влиять на движение иона только, если $\frac{v_i}{qV_0} \sim \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \frac{1}{qV_0} \gtrsim 1/q$, т. е. когда $a \lesssim 1$. Мы видим, что электрическое поле, хотя и не изменяет

качественно результатов, полученных без его учета, все же может заметно изменить величину N_q . При этом следует иметь в виду, что линейное приближение, вероятно, несколько завышает влияние электрического поля, так как в нем фактически принимается, что в области, где поле достаточно велико, концентрация ионов близка к N_0 . В действительности концентрация ионов в области максимального значения поля меньше N_0 , что должно привести к уменьшению действия поля.

Отметим, что если мы заменим в знаменателе (4.41) a на $\frac{\omega}{q} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}}$ и приравняем этот знаменатель нулю, то мы получим дисперсионное уравнение, описывающее распространение ионных плазменных волн, т. е. уравнение, определяющее связь частоты ω с волновым вектором q в такой волне. Это обстоятельство не имеет, однако, в данном случае большого значения, так как ионные плазменные волны сильно затухают, а следовательно, нули знаменателя лежат в комплексной плоскости далеко от действительной оси и не сказываются при действительных ω и q . Если бы, однако, температура электронов в плазме была много выше температуры ионов (в ионосфере для такого предположения, по-видимому, нет оснований), то эти волны затухали бы гораздо слабее, что привело бы к дополнительным максимумам в выражениях для f_q , N_q , φ_q в условиях, когда $\frac{qV_0}{q}$ равнялось бы скорости ионной плазменной волны.

Из формул для N_q можно получить выражение для $\delta N(r)$, производя обратное преобразование Фурье. Это преобразование нельзя до конца провести аналитически. Для того чтобы оценить влияние, которое оказывает на $\delta N(r)$ электрическое поле, мы произведем соответствующий расчет для больших расстояний от тела, где возмущения плотности убывают $\sim 1/r^2$. Здесь мы можем прямо воспользоваться формулой (4.41) для малых q . Из (4.41) видно, что N_q имеет вид

$$N_q = \frac{B (a_0 \cos \chi)}{q} a_0^2 \pi R_0^2 N_0, \quad (4.45)$$

где $a_0 = (M_i V_0^2 / 2\kappa T)^{1/2}$, а χ — угол между q и V_0 .

Поэтому

$$\delta N(r) = \frac{a_0^2 \pi R_0^2 N_0}{(2\pi)^3} \int \frac{B}{q} e^{iqr} d^3q. \quad (4.46)$$

Вводя сферическую систему координат с осью вдоль V_0 и обозначая по-прежнему через ϑ угол между r и V_0 , имеем:

$$d^3q = \cos \chi \, d\chi \, d\varphi q^2 \, dq, \quad qr = \\ = qr (\cos \vartheta \cos \chi + \sin \vartheta \sin \chi \cos \varphi). \quad (4.47)$$

Подставляя (4.47) в (4.46) и интегрируя по $d\varphi$, получаем

$$\delta N(r) = \frac{a_0^2 \pi R_0^2 N_0}{(2\pi)^3} \int B(a_0 \cos \chi) \exp(iqr \cos \vartheta \cos \chi) \times \\ \times J_0(qr \sin \vartheta \sin \chi) q \, dq \sin \chi \, d\chi. \quad (4.48)$$

Интеграл по dq в (4.48) расходится при больших q . Это связано с тем, что выражение (4.45) для N_q справедливо лишь при малых q , так что в действительности подынтегральное выражение убывает при больших q и интеграл сходится. Поэтому, чтобы придать правильный смысл интегралу по dq , мы должны сделать его сходящимся. Для этого произведем замену в показателе экспоненты

$$\cos \vartheta \cos \chi \rightarrow \cos \vartheta \cos \chi + i\delta \quad (\delta \rightarrow +0). \quad (4.49)$$

Теперь интеграл по dq можно взять с помощью формулы

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} J_0(\beta t) t \, dt = \frac{\gamma}{(\gamma^2 + \beta^2)^{3/2}} \quad (\text{Re } \gamma > 0). \quad (4.50)$$

После простых вычислений получаем при $\cos \alpha < 0$, т. е. позади тела:

$$\delta N(r) = \\ = \frac{a_0^2 \pi R_0^2 N_0}{r^2 (2\pi)^3} i \int_0^\pi \frac{\cos \vartheta B(a_0 \cos \chi) \cos \chi \sin \chi \, d\chi}{(\sin \vartheta - \cos \chi + i\delta)^{3/2} (\sin \vartheta + \cos \chi + i\delta)^{3/2}}, \quad (4.51)$$

где $\delta \rightarrow +0$. Обозначая интеграл через $-i 8\pi^2 B_1(\vartheta, a_0)$, имеем

$$\delta N(r) = -\frac{R_0^2 N_0 M_i V_0^2}{2r^2 \kappa T} B_1(\vartheta, a_0) . \quad (4.52)$$

В отсутствие электрического и магнитного полей $B_1(\vartheta_1, a_0)$ согласно (2.29) дается формулой

$$B_1 = \exp(-a_0^2 \vartheta^2) = \exp\left(-\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T} \vartheta^2\right) . \quad (4.53)$$

Если влияние поля учитывается в гидродинамическом приближении, то

$$B_1 = \frac{1}{2} \exp(-a_0^2 \vartheta^2) . \quad (4.54)$$

Интеграл в (4.52) можно вычислить численно, график функции $B_1(\vartheta, a_0)$ в полярных координатах при значении $a_0 = 8$ дан на рис. 29. Для сравнения пунктиром нанесена соответствующая кривая (4.53) без учета

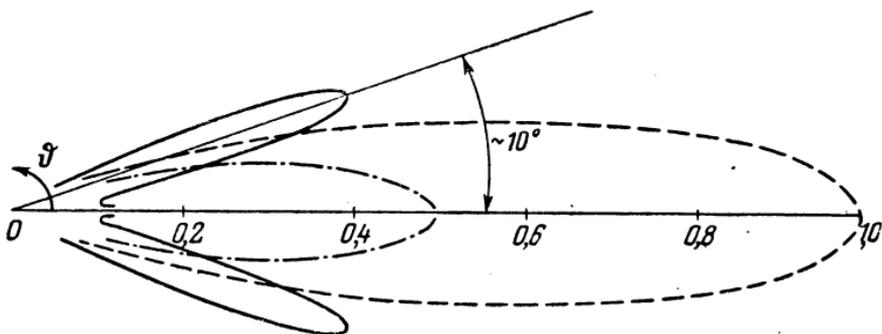


Рис. 29. Функция $B_1(\vartheta)$ для $a_0 = \frac{V_0}{\sqrt{2\kappa T/M_i}} = 8$.

влияния электрического поля и штрих-пунктиром — с учетом поля в гидродинамическом приближении (4.54). Из рисунка видно, что электрическое поле существенно изменяет концентрацию частиц. В частности, наибольшее разрежение достигается теперь уже не на оси z . Можно сказать, что электрическое поле приводит к некоторой

фокусировке частиц к оси. Порядок же величины возмущения позади тела, разумеется, сильно не изменяется.

Отметим в заключение, что влияние электрического поля на движение ионов рассматривалось в работе [57] Девисом и Гаррисом. В этой работе производилось совместное численное интегрирование уравнений движения ионов и уравнения Пуассона. Авторы пренебрегли, однако, тепловым движением ионов, что, по нашему мнению, недопустимо, так как именно тепловые скорости играют определяющую роль в заполнении зоны разрежения. Поэтому нельзя ожидать, чтобы результаты этой работы, представленные в виде довольно запутанных графиков, давали количественно верное описание возмущенной области. Тем не менее эта работа интересна, поскольку ясно, что полное количественное решение проблемы взаимодействия тела с плазмой может быть получено только с помощью численных расчетов. Поэтому всякие попытки разработки эффективных методов таких расчетов имеют большое значение. Интересно, что результаты [57] также указывают на некоторую фокусировку ионов полем. Упомянем также работу Сенгупта [58]. В этой работе возмущения вокруг движущегося в плазме цилиндра вычисляются в предположении, что функция распределения f может быть представлена в виде произведения двух множителей, один из которых зависит только от координат, а другой — от скоростей. Такой вид функция f имеет только в случае равновесного бальцмановского распределения. Поэтому полученные автором поправки к этому распределению вряд ли имеют реальный смысл.

б. Плазма в магнитном поле. Учтем теперь влияние электрического поля на движение ионов в случае, когда плазма находится во внешнем магнитном поле. Вычисление будет проводиться, как и выше, в линейном приближении. Уравнение (4.34) в фурье-компонентах записывается в виде

$$\frac{e}{M_i e} [uH_0] \frac{\partial f_q}{\partial u} + iq(u - V_0) f_q + iqu\Phi_q \frac{f_{0i}}{N_0} \frac{e}{\chi T} = -\pi R_0^2 f_{0i} G, \quad (4.55)$$

или при $qR_0 \rightarrow 0$

$$\frac{e}{M_0 c} [u H_0] \frac{\partial f_q}{\partial u} + i q (u - V_0) f_q + i q u \varphi_a \frac{e}{\kappa T} \frac{f_{0i}}{N_0} = -\pi R_0 V_0 f_{0i}. \quad (4.56)$$

Решая это уравнение точно так же, как уравнение (3.32) (см. (4.39)), находим N_q :

$$N_q = -\frac{\pi R_0^2 V_0}{\Omega} \frac{\int_0^\infty \int f_{0i}(u) \exp A d^3 u dx}{1 + \frac{i}{\Omega N_0} \int_0^\infty \int f_{0i}(u) B \exp A d^3 u dx}. \quad (4.57)$$

Здесь

$$A = \left[-i \left(\frac{q_{\parallel} u_{\parallel} - q V_0}{\Omega} x + \frac{2q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} \sin \frac{x}{2} \right) \right],$$

$$B = \left[q_{\parallel} u_{\parallel} + q_{\perp} u_{\perp} \cos \left(\beta + \frac{x}{2} \right) \right].$$

Интеграл по dx в знаменателе можно проинтегрировать по частям. При этом следует подставить

$$q_{\perp} u_{\perp} \cos \left(\beta + \frac{x}{2} \right) = q_{\perp} u_{\perp} \cos \beta \cos \frac{x}{2} - q_{\perp} u_{\perp} \sin \beta \sin \frac{x}{2}$$

и учесть, что интеграл от второго члена равен нулю из-за нечетности подынтегральной функции по β . В результате получаем

$$N_q = -\frac{\pi R_0^2 V_0}{\Omega} \frac{\int_0^\infty \int f_{0i}(u) \exp A d^3 u dx}{2 + \frac{i q V_0}{\Omega N_0} \int_0^\infty \int f_{0i}(u) \exp A d^3 u dx}, \quad (4.58)$$

где, как и выше,

$$A = \left[-i \left(\frac{q_{\parallel} u_{\parallel} - q V_0}{\Omega} x + \frac{2q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} \sin \frac{x}{2} \right) \right].$$

Вычисляя теперь интеграл по $d^3 u$ с помощью формул

(3.38) — (3.39), окончательно имеем

$$N_q = - \frac{\pi R_0 N_0 V_0}{\Omega} \frac{\int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{iqV_0}{\Omega} x - \frac{\kappa T}{2M_i \Omega} C \right] dx}{2 + \frac{iqV_0}{\Omega} \int_0^{\infty} \exp \left[\frac{iqV_0}{\Omega} x - \frac{\kappa T}{2M_i \Omega} C \right] dx}, \quad (4.59)$$

где

$$C = \left(q_{\parallel}^2 x^2 + 4q_{\perp}^2 \sin^2 \frac{x}{2} \right).$$

Выражение (4.59) отличается от (3.40), полученного без учета электрического поля, наличием знаменателя. Как мы увидим далее, этот знаменатель может играть существенную роль.

Как и в гл. III, мы проведем более подробное исследование формулы (4.59) при условии $q_{\parallel} \rightarrow 0$, $\frac{qV_0}{\Omega} \rightarrow p$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Преобразуя в этом случае интеграл с помощью формул (3.47) и (3.43), получаем

$$\left. \begin{aligned} N_q &= - \frac{\pi R_0^2 N_0 V_0}{q_{\parallel}} \times \\ &\times \frac{\sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}} Q(a_1) \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_p\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right)}{2 + i \frac{qV_0}{q_{\parallel}} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}} Q(a_1) \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_p\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right)}, \\ a_1 &= \frac{qV_0 - p\Omega}{q_{\parallel}} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

Поведение выражения (4.60), однако, различно в случае, когда $p = 0$ и $p \neq 0$. Пусть $p = 0$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} N_q &= - \frac{\pi R_0^2 N_0 V_0}{q_{\parallel}} \times \\ &\times \frac{\sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}} Q(a_2) \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_0\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right)}{2 + ia_2 Q(a_2) \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_0\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

где $a_2 = \frac{qV_0}{q_{\parallel}} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}}$ и функция $Q(a_2)$ определяется формулой (2.92). Если $q_{\parallel} \rightarrow 0$, а a_2 остается конечным, то N_q , как и в случае отсутствия электрического поля, стремится к бесконечности $\sim 1/q_{\parallel}$. Если тело движется вдоль поля, то вместо (3.51) мы получаем

$$N_q = - \frac{\pi R_0^2 N_0}{q_{\parallel}} \frac{i \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_0\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right)}{2 - \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_0\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right)}. \quad (4.62)$$

Если же $p \neq 0$, то, когда $q_{\parallel} \rightarrow 0$, а $a_1 \rightarrow \text{const}$, стремящиеся к бесконечности интегралы в числителе и знаменателе сокращаются и

$$N_q = \frac{i\pi R_0^2 N_0 V_0}{q V_0} = \frac{i\pi R_0^2 N_0 V_0}{p \Omega}, \quad (4.63)$$

$$q_{\parallel} \rightarrow 0, \quad a_1 \rightarrow \text{const}. \quad (4.64)$$

Таким образом, в этом случае влияние электрического поля весьма существенно. Благодаря его действию N_q остается конечным при условии (4.64), в то время как без учета поля N_q стремилось бы к бесконечности. Отсюда следует, что электрическое поле необходимо учитывать при расчете рассеяния электромагнитных волн на следе тела. Это, конечно, не означает, что электрическое поле оказывает столь же сильное влияние на величину $\delta N(r)$. Дело в том, что бесконечность N_q при условии (4.64) связана со строгой периодичностью $\delta N(r)$ в пространстве. Электрическое поле несколько нарушает эту периодичность, что сразу приводит к исчезновению бесконечностей, кроме случая $p=0$. Между тем для всякого рода измерений, связанных с распределением ионов в пространстве, эти небольшие изменения периодичности не очень существенны, так что для $\delta N(r)$ разумно пользоваться формулами гл. III. К сожалению, для того чтобы совершить обратное преобразование Фурье над N_q , даваемой формулой (4.59), и получить $\delta N(r)$ с учетом электрического и магнитного полей,

требуются очень громоздкие численные расчеты. Заметим, однако, что при движении тела под углом к полю возмущения и при учете электрического поля по-прежнему убывают пропорционально $1/r$.

§ 16. Общие свойства уравнений с учетом электрического поля

а. Влияние нелинейных эффектов. В настоящем параграфе мы исследуем вопрос о том, насколько свойства полученных в предыдущем параграфе решений линеаризованных уравнений близки к свойствам решений точных уравнений. При этом удобнее пользоваться уравнениями для фурье-компонент. Мы исследуем свойства этих уравнений при $q \rightarrow 0$, т. е. на больших расстояниях от тела.

Рассмотрим прежде всего уравнение без магнитного поля. Для этого положим в точном уравнении (1.23) $f_i = f_{0i} + f'_i$, $H_0 = 0$ и перейдем к компонентам Фурье, т. е. выразим f'_i через f_q , умножим уравнение на e^{-iqr} и проинтегрируем по d^3r . Получаем

$$\begin{aligned} iqv f_q - \frac{e}{M_i} \frac{\partial f_{0i}}{\partial v} i q \Phi_q = \\ = \frac{e}{(2\pi)^3 M_i} \int i q_1 \Phi_{q_1} \frac{\partial f'_{q-q_1}}{\partial v} d^3 q + \oint \frac{A_i}{|\nabla F|} e^{-iqr} dS. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Перейдем теперь в (4.65) к $q \rightarrow 0$. При этом в правой части мы можем просто положить $q = 0$. Для этого необходимо, чтобы интеграл по $d^3 q_1$ сходиллся при $q = 0$. Но мы увидим далее, что при малых q функции f_q и $\Phi_q \sim 1/q$, так что интеграл сходится. Таким образом, при $q \rightarrow 0$

$$iqv f_q + \frac{e}{\kappa T} i u q f_{0i} \Phi_q = I(v), \quad (4.66)$$

где

$$\begin{aligned} I(v) = \oint \frac{A_i}{|\nabla F|} dS + \frac{e}{(2\pi)^3 M_i} \int i q \Phi_q \frac{\partial f_{-q}}{\partial v} d^3 q = \\ = \oint \frac{A_i}{|\nabla F|} dS + \frac{e}{M_i} \int \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial f'_i}{\partial v} d^3 r, \end{aligned} \quad (4.67)$$

Уравнение (4.66) имеет тот же вид, что и уравнение (4.56), с той только разницей, что $-\pi R_0 V_0 f_{0i}$ в правой части (4.56) заменено на функцию $I(v)$, зависящую от свойств электрического поля в ближней зоне, на сравнительно небольших расстояниях от тела.

Выпишем теперь уравнения (4.9) для потенциала и разложим $\exp\left(\frac{e\varphi}{\kappa T}\right)$ по степеням φ , тогда

$$\Delta\varphi - 4\pi e N_0 \left[\frac{e\varphi}{\kappa T} + \frac{1}{2} \left(\frac{e\varphi}{\kappa T} \right)^2 + \dots \right] = -4\pi e \int f_i d^3v.$$

Переходя к компонентам Фурье, находим

$$\left(q^2 + 4\pi e N_0 \frac{e}{\kappa T} \right) \varphi_q + \frac{1}{2} \frac{e^2}{(\kappa T)^2} \int \varphi_{q_1} \varphi_{q-q_1} \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} + \dots = 4\pi e \int f_q d^3v.$$

При малых q линейный по φ_q член имеет порядок $1/q$, а все высшие члены стремятся при $q \rightarrow 0$ к постоянным, и ими можно пренебречь, так же как и членом с q^2 . Поэтому при малых q равенство (4.39)

$$N_q = N_0 \frac{e\varphi_q}{\kappa T}$$

является строгим. Решая совместно (4.66) и (4.39), получаем

$$N_q = \frac{-i \int \frac{I(v)}{qv - i\delta} d^3v}{2 + iaQ(a)} \quad (\delta \rightarrow +0), \quad (4.68)$$

где

$$a = \frac{qV_0}{q} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}}.$$

Из (4.68) непосредственно видно, что при учете нелинейных по электрическому полю эффектов N_q при малых q также ведет себя, как $1/q$. Тем самым строго доказано, что на больших расстояниях от тела возмущения концентрации и потенциал убывают, как $1/r^2$.

Функцию $I(v)$, разумеется, невозможно вычислить в общем виде. В том случае, когда рассеяние ионов поверхностью тела является упругим, можно получить для $I(v)$ полезную формулу, которая выражает $I(v)$

через закон рассеяния частиц на теле и на электрическом поле вокруг него.

Действительно, из самого вида уравнения (4.66) ясно, что $I(v) d^3v$ есть число ионов, приобретающих в единицу времени из-за рассеяния на теле и окружающем его поле скорость v . Напоминаем при этом, что левая часть кинетического уравнения есть полная производная функции распределения по времени. Это позволяет получить формулу для $I(v)$, повторяя рассуждения, проводимые обычно для нахождения интеграла столкновений.

Пусть ион, пролетающий вблизи тела с прицельным параметром ϱ и азимутальным углом φ , приобретает после рассеяния скорость v . Тогда начальная скорость иона есть $v_1(v, \varrho, \varphi)$, где функция $v_1(v, \varrho, \varphi)$ определяется законом рассеяния, а число ионов, приобретающих в единицу времени скорость v , есть просто число падающих ионов со скоростью $v_1(v, \varrho, \varphi)$, т. е.

$$\varrho d\varrho d\varphi v N_0 \left(\frac{M_i}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{M_i [v_1(v, \varrho, \varphi) + V_0]^2}{2\kappa T} \right\}. \quad (4.69)$$

При написании (4.69) учитывается, что падающие ионы распределены на бесконечности в неподвижной системе отсчета по закону Максвелла и что рассеяние упругое, т. е. $v_1 = v$. Для того чтобы определить $I(v)$, необходимо еще вычесть из (4.69) число столкнувшихся с телом ионов, имевших до столкновения скорость v . Оно равно

$$\varrho d\varrho d\varphi v N_0 \left(\frac{M_i}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{M_i (v + V_0)^2}{2\kappa T} \right].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I(v) &= N_0 \left(\frac{M_i}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} v \int \varrho d\varrho d\varphi \times \\ &\times \left\{ \exp \left\{ - \frac{M_i [v_1(v, \varrho, \varphi) + V_0]^2}{2\kappa T} \right\} - \exp \left\{ - \frac{M_i [v + V_0]^2}{2\kappa T} \right\} \right\} = \\ &= f_{0i}(u) v \int \varrho d\varrho d\varphi \left\{ \exp \left[- \frac{V_0 \delta v(v, \varrho, \varphi)}{\kappa T} \right] - 1 \right\}, \quad (4.70) \end{aligned}$$

где $\delta v = v_1 - v$ — изменение скорости иона при рассеянии. Из (4.70) видно, что $I(v)$ естественно представить в виде

$$I(v) = - f_{0i} v S_0(v), \quad (4.71)$$

где $S_0(v)$ — эффективное сечение рассеяния телом частиц со скоростью v .

Мы видим, что $I(v)$ можно просто вычислить, если знать закон рассеяния частиц на теле с учетом электрического поля. Разумеется, формула (4.70) не позволяет вычислить $I(v)$ в общем случае, хотя бы потому, что само электрическое поле вокруг тела неизвестно. Тем не менее она удобна для приближенных вычислений.

До сих пор мы рассматривали случай немагнитной плазмы. Если же движение тела происходит в магнитном поле, то аналогичные вычисления, хотя и требующие более сложного обоснования, приводят к уравнению для f_q , отличающемуся от (4.66) лишь добавлением члена с магнитным полем

$$\frac{\partial f_q}{\partial u} \frac{e}{M_i c} [u H_0] + i q v f_q + \frac{e}{\kappa T} i q u f_{0i} \Phi_q = I(v). \quad (4.72)$$

При этом функция $I(v)$ дается той же формулой (4.67), однако конкретная зависимость I от v в магнитном поле может быть совершенно иной, чем без поля. Если магнитное поле не слишком сильное, т. е.

$$R_H = \frac{c \sqrt{M_i 2 \kappa T}}{e H_0} \gg R_0, \quad (4.73)$$

то оно вообще не влияет на движение ионов на расстояниях $\sim R_0$, которые дают наибольший вклад в интеграл (4.67). Поэтому при условии (4.73) функцию $I(v)$ можно вычислять, решая нелинейную задачу без магнитного поля. Решение уравнения (4.72) имеет вид

$$N_q = \frac{\frac{1}{\Omega} \int_0^\infty \int I(v) \exp A dx d^3u}{2 + \frac{i q V_0}{\Omega} \int_0^\infty \exp \left[i \frac{q V_0}{\Omega} x - \frac{\kappa T}{2 M_i \Omega^2} C \right] dx}, \quad (4.74)$$

где

$$A = \left\{ -i \left[\frac{q_{\parallel} u_{\parallel} - q V_0}{\Omega} + \frac{2 q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} \cos \left(\beta + \frac{x}{2} \right) \sin \frac{x}{2} \right] \right\},$$

$$C = \left(q_{\parallel}^2 x^2 + 4 q_{\perp}^2 \sin^2 \frac{2x}{2} \right).$$

Нетрудно показать, что формула (4.74), независимо от вида функции $I(v)$, приводит к тем же качественным особенностям поведения N_q , что и (4.59). В частности, по-прежнему на больших расстояниях от тела в плоскости $(v_0 H_0)$ возмущение концентрации ионов $\delta N(r)$ убывает по закону $1/r$.

В заключение этого раздела отметим, что функция $I(v)$ простым образом связана с действующей на тело силой торможения. Действительно, возвращаясь к координатному пространству, вместо (4.66) и (4.72) имеем

$$\frac{df_i}{dt} = I(v) \delta(r), \quad (4.75)$$

где $\frac{df_i}{dt}$ — полная производная функции распределения по времени. Умножая (4.75) на $M_i v$ и интегрируя по d^3v , получаем слева производную по времени от полного импульса ионов, т. е. взятую с обратным знаком силу, действующую на тело вследствие взаимодействия с ионами. Таким образом,

$$F_i = -M_i \int v I(v) d^3v. \quad (4.76)$$

Для получения полной силы надо добавить к (4.76) аналогичное выражение для нейтральных частиц. При этом нейтральные частицы нужно учитывать даже в том случае, когда невозмущенная плазма почти полностью ионизована, так как нейтральные частицы могут образовываться при нейтрализации ионов на поверхности тела. Импульсы таких улетающих от тела нейтральных частиц дают вклад в силу F .

б. Связь возмущений концентрации с диэлектрической проницаемостью плазмы. Мы уже упоминали, что из-за наличия в уравнениях для f_q членов, линейных по электрическому полю, в выражениях для N_q появляется знаменатель, нули которого связаны с законом дисперсии продольных колебаний плазмы. Сейчас мы покажем, что этот знаменатель появляется не случайно. Точнее, что линейные по потенциалу члены приводят к умножению N_q при малых q на множитель, просто связанный с диэлектрической проницаемостью плазмы. Доказательство будет дано в форме, пригодной также

для случая, когда имеется внешнее магнитное поле и соударения между частицами.

Как было показано в предыдущем разделе, при малых q компоненты Фурье функции распределения f_q удовлетворяют уравнению, которое символически можно записать в виде

$$L[f_q] = -iquf_{0i} \frac{e}{\kappa T} \Phi_q + I(v), \quad (4.77)$$

где $L[f]$ — действующий на функции скорости v линейный оператор. Уравнение вида (4.77) справедливо при наличии магнитного поля с учетом столкновений. Дело в том, что столкновения при условии (1.2) существенны лишь на очень больших расстояниях от тела, где возмущения малы. Поэтому интеграл столкновений во всяком случае может быть линеаризован.

Из (4.77) следует, что

$$f_q = -\frac{ie}{\kappa T} \Phi_q L^{-1}[quf_{0i}] + L^{-1}[I(v)], \quad (4.78)$$

где L^{-1} — оператор, обратный L . Интегрируя (4.78) по d^3v и учитывая (4.39), находим

$$N_q = \frac{\int L^{-1}[I(v)] d^3v}{1 + \int L^{-1}\left[qu \frac{f_{0i}}{N_0}\right] d^3v} = \frac{\int f_1(v) d^3v}{1 + \int f_2(v) d^3v}, \quad (4.79)$$

где функции f_1 и f_2 удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} L[f_1] &= I(v), \\ L[f_2] &= iqu \frac{f_{0i}}{N_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

Чтобы связать функцию f_2 с диэлектрической проницаемостью, наложим на плазму внешнее продольное электрическое поле

$$E = E_0 e^{iqr} = -iq\Phi.$$

Под влиянием этого поля концентрация электронов изменится на величину

$$\delta N = N_0 \frac{e\Phi}{\kappa T}.$$

Изменение же концентрации ионов $\delta N_i = \int f d^3v$, определяется с помощью уравнения $L[f] = iquf_{0i} \frac{e}{\kappa T} \varphi$. Используя (4.80), получаем

$$\delta N_i = -\frac{N_0 e \varphi}{\kappa T} \int f_2 d^3v. \quad (4.81)$$

Как известно, дивергенция диэлектрической поляризации среды равна с обратным знаком концентрации возникающих под действием поля зарядов, т. е.

$$\operatorname{div} P = -e (\delta N_i - \delta N) = \frac{N_0 e^2 \varphi}{\kappa T} \left\{ \int f_2 d^3v + 1 \right\}.$$

С другой стороны, компоненты P определяются из соотношений

$$P_l = \sum_k \frac{\varepsilon_{lk} - \delta_{lk}}{4\pi} E_k = -i \sum_k \frac{\varepsilon_{lk} q_k - q_l}{4\pi} \varphi,$$

где $\varepsilon_{lk}(q)$ — тензор диэлектрической проницаемости среды с учетом пространственной дисперсии. Таким образом,

$$\int f_2 d^3v + 1 = -iD^2 \sum_{l, k} (\varepsilon_{lk} q_l q_k - q^2) \approx -iD^2 \sum_{l, k} \varepsilon_{lk} q_l q_k, \quad (4.82)$$

и окончательно *)

$$N_q = \frac{\int f_1(v) d^3v}{\sum_{l, k} \varepsilon_{lk} q_l q_k D^2}. \quad (4.83)$$

Вспомним теперь, что мы производим вычисления в системе координат, связанной с телом. При переходе в неподвижную систему координат статическое в движущейся системе координат поле с волновым вектором q

*) Аналогичные вычисления можно произвести и для случая, когда условие $qD \ll 1$ не выполняется. В этом случае формула (4.83) справедлива именно для возмущения электронов N_q ; а N_{qi} связано с N_q формулой

$$N_{qi} = \frac{N_q}{(1 + q^2 D^2)}.$$

приобретает частоту $\omega = qV_0$. Поэтому

$$\varepsilon_{lk} = \varepsilon_{lk}(qV_0, q), \quad (4.84)$$

где $\varepsilon_{lk}(\omega, q)$ — тензор диэлектрической проницаемости неподвижной плазмы. Как известно, связь частоты и волнового вектора распространяющихся в плазме продольных волн определяется уравнением*)

$$\sum_{l, k} q_l q_k \varepsilon_{lk}(\omega, q) = 0.$$

Если закон дисперсии, определяемый из этого уравнения, есть $\omega = \omega(q)$, то при тех значениях q , которые удовлетворяют соотношению

$$qV_0 = \omega(q), \quad (4.85)$$

выражение для N_q будет иметь полюс. Поскольку нас интересуют лишь вещественные q , эти полюсы существенны лишь для вещественных значений q или комплексных с малой мнимой частью.

Для этого необходимо, во-первых, чтобы $\omega(q)$ была почти вещественна, т. е. чтобы волны слабо затухали. Во-вторых, необходимо, чтобы фазовая скорость волн в области слабого затухания была меньше скорости движения тела. Действительно, из (4.85) следует, что

$$qV_0 = qV_0 \cos \chi = \omega(q), \quad V_0 > \frac{\omega(q)}{q}. \quad (4.86)$$

Если (4.85) имеет почти вещественный корень, то это приведет к сильному рассеянию радиоволн для значения волнового вектора q , близкого к этому корню. В пространственном распределении $\delta N(r)$ в этом случае

*) Действительно, для продольных волн из уравнения $\text{div } D = 0$ следует, что

$$i \sum_{l, k} q_l \varepsilon_{lk} E_k = i \sum_{l, k} q_l q_k \varepsilon_{lk} \Phi = 0.$$

Таким образом, Φ не равно нулю, только если

$$\sum_{l, k} q_l q_k \varepsilon_{lk} = 0.$$

появятся сравнительно слабо затухающие осциллирующие члены. Условие (4.86), как это и должно быть, совпадает с условием черенковского излучения, при котором тело возбуждает в плазме волны.

§ 17. Возмущения в окрестности точечного тела

В этом параграфе мы рассмотрим возмущения, создаваемые быстро движущимся заряженным точечным телом, т. е. телом с размерами, много меньшими дебаевского радиуса. При этом мы будем интересоваться лишь большими по сравнению с дебаевским радиусом расстояниями от тела. Вычисления будут производиться в компонентах Фурье. Функция f_q удовлетворяет, естественно, общему уравнению (4.66) без магнитного поля и уравнению (4.72) с магнитным полем. В уравнении же для потенциала поля нужно, конечно, добавить в правую часть (4.9) член с зарядом тела $-4\pi eZ\delta(r)$, где заряд тела eZ будем считать достаточно малым (см. ниже условие (4.93)). Линеаризуя (4.9), получаем

$$\Delta\varphi = 4\pi \frac{e^2\varphi}{\kappa T} N_0 - 4\pi e \int f_i d^3v - 4\pi eZ\delta(r),$$

$$-q^2\varphi_q = 4\pi N_0 \frac{e\varphi_q}{\kappa T} - 4\pi eN_q - 4\pi eZ.$$

Пренебрегая членом с q^2 , вместо (4.39) имеем

$$\frac{e\varphi_q}{\kappa T} = \frac{N_q}{N_0} + \frac{Z}{N_0}. \quad (4.87)$$

Выражения для φ_q и N_q , как мы знаем, содержат члены $\sim 1/q$, большие при малых q . Однако когда заряд eZ мал, эти члены содержат малый множитель e^2Z^2 , поэтому есть большая область значений q , где оба члена в правой части (4.87) одного порядка. Отметим, что если заряд eZ не мал, то в (4.87) нельзя уже оставлять член eZ , так как это превышает точность использованного приближения. Решая совместно (4.66) и (4.87), получаем

$$N_q = \frac{-i \int \frac{I(v) - iquf_{0i}Z}{qvN_0} d^3v}{2 + iaQ(a)}, \quad (4.88)$$

где

$$a = \frac{qV_0}{q} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}}.$$

Согласно (4.71) имеем по порядку величины, что

$$I(v) \sim f_{i0} V_0 S_{\text{кул}}. \quad (4.89)$$

В формуле (4.89) $S_{\text{кул}}$ есть эффективное сечение рассеяния ионов со скоростью v на кулоновском поле заряда. Поэтому второй член под интегралом в (4.88) является главным на расстояниях

$$r = \frac{1}{q} \ll \sqrt{\frac{2\kappa T}{M_i V_0^2}} \frac{Z}{N_0 S_{\text{кул}}}. \quad (4.90)$$

В обратном предельном случае главным является именно первый член.

Отметим здесь, что рассмотренная задача решалась ранее Краусом и Ватсоном [44]. Используемая ими система уравнений отличается от нашей отсутствием члена с $I(v)$, так что их ответ можно получить из (4.88), положив $I(v) = 0$. Из сказанного выше ясно поэтому, что результаты [44] верны лишь при значениях r , удовлетворяющих неравенству (4.90) и неверны в обратном предельном случае, т. е. на больших расстояниях от тела. Это объясняется тем, что авторы [44] вели расчет по теории возмущений, т. е. разлагали решение по степеням заряда Z , ограничиваясь первым членом. Между тем величина $I(v)$, как мы увидим ниже (формула (4.96)), пропорциональна Z^2 . Если же произвести вычисления, аналогичные вычислениям Крауса и Ватсона во втором приближении теории возмущений, т. е. удерживая члены порядка Z^2 , то, разумеется, получится результат, совпадающий с нашим.

Для вычисления $I(v)$ мы воспользуемся формулой (4.66). При этом следует иметь в виду, что в интеграле (4.70) по $d\varrho$ главный вклад вносят значения ϱ , много меньшие дебаевского радиуса. На таких расстояниях поле является чисто кулоновским. Угол рассеяния иона в кулоновском поле дается формулой Резерфорда (см. стр. 70 в [27]). Если заряд тела достаточно мал, угол рассеяния иона ϑ , т. е. угол между v и v_1 , тоже мал.

В этом случае формулу Резерфорда можно приближенно представить в виде

$$\vartheta = \frac{2Ze^2}{M_i v^2} \frac{1}{\varrho} \approx \frac{2Ze^2}{M_i V_0^2 \varrho}. \quad (4.91)$$

Разложим правую часть (4.70) по ϑ до членов $\sim \vartheta^2$. Такое разложение возможно, если содержащиеся ϑ члены в показателе экспоненты в (4.70) малы. Это приводит к условию

$$\sqrt{\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}} \vartheta \sim \frac{Ze^2}{\sqrt{M_i V_0^2 2\kappa T}} \frac{1}{\varrho} \ll 1, \quad (4.92)$$

которое должно выполняться, во всяком случае, при $\varrho \ll D$. В результате накладывається следующее условие на заряд:

$$\frac{Ze^2}{\sqrt{M_i V_0^2 2\kappa T}} \frac{1}{D} \ll 1. \quad (4.93)$$

Разлагая и интегрируя (4.70) по $d\varphi$, получаем

$$\begin{aligned} I(v) = 2\pi f_{0i} V_0 \left\{ -\frac{M_i V_0^2}{2\kappa T} + \frac{M_i}{(2\kappa T)^2} [V_0^2 v^2 - (V_0 v)^2] \right\} \times \\ \times \int \vartheta^2(\varrho) \varrho d\varrho = -2\pi f_{0i} V_0 \left\{ \frac{M_i V_0^2}{2\kappa T} - \frac{M_i}{(2\kappa T)^2} \times \right. \\ \left. \times [V_0^2 u^2 - (V_0 u)^2] \right\} \int \vartheta^2(\varrho) \varrho d\varrho. \quad (4.94) \end{aligned}$$

Интеграл в правой части (4.94) расходится логарифмически. На больших расстояниях ϱ его следует обрезать при $\varrho \sim D$, а на малых — при тех значениях ϱ , при которых перестает выполняться условие (4.92), т. е. при

$$\varrho \sim \varrho_1 = \frac{Ze^2}{\sqrt{M_i V_0^2 2\kappa T}}. \quad (4.95)$$

Окончательно мы имеем, что *)

$$I(v) = -\frac{4\pi Z^2 e^4}{M_i \kappa T V_0^3} f_{0i} \cdot \ln \frac{D}{\varrho_1} \left\{ V_0^2 - \frac{M_i}{2\kappa T} [V_0^2 u^2 - (V_0 u)^2] \right\}. \quad (4.96)$$

*) Из (4.86) видно, что сечение $S_{\text{кул}}$, входящее в оценку (4.89) и неравенство (4.90), равно по порядку величины

$$S_{\text{кул}} \sim \frac{4\pi Z^2 e^4}{M_i \kappa T V_0^2} \ln \frac{D}{\varrho_1}.$$

При вычислении (4.94) предполагалось, что поле является чисто кулоновским вплоть до расстояний $\varrho \sim \varrho_1$, для чего размер тела должен удовлетворять условию

$$R_0 \ll \varrho_1 = \frac{Ze^2}{\sqrt{M_i V_0^2 2\kappa T}}. \quad (4.97)$$

Если размер тела R_0 больше, чем значение ϱ_1 , даваемое формулой (4.95), то в качестве нижнего предела нужно, очевидно, брать не ϱ_1 , а R_0 .

Подставляя (4.96) в (4.88) и выражая, как обычно, интеграл в числителе через функцию вероятности от мнимого аргумента $Q(a)$, получаем окончательно

$$N_q = -\frac{K}{2 + iaQ(a)}, \quad (4.98)$$

где

$$K = \{(2\pi Z^2 e^4 N_0) / [qV_0^3 (2\kappa^3 T^3 M_i)^{1/2}]\} \ln \frac{D}{\varrho_1} [V_0^2 - (V_0 n)^2] \times \\ \times [(1 - 2a^2) Q(a) + 2ia] + Z, \\ n = q/q.$$

При наличии внешнего магнитного поля совместное решение (4.72) и (4.87) дает

$$N_q = \frac{\frac{1}{\Omega} \int_0^\infty \int [I(v) - iquf_{0i} Z/N_0] \exp\{A\} dx d^3u}{2 + \frac{iqV_0}{\Omega} \int_0^\infty \exp\{B\} dx}, \quad (4.99)$$

где

$$A = -i \left[\mu x + 2\gamma \cos \left(\beta + \frac{x}{2} \right) \sin \frac{x}{2} \right],$$

$$B = i \frac{qV_0}{\Omega} x - \frac{\kappa T}{2M_i \Omega^2} \left(q_{\parallel}^2 x^2 + 4q_{\perp}^2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)$$

(обозначения в (4.99) те же, что и в (3.33)). Если ларморовский радиус ионов больше, чем D , магнитное поле не изменяет вида $I(v)$. Производя интегрирование по

d^3u в числителе, где $I(v)$ дается формулой (4.96), находим окончательно

$$N_q = \frac{\frac{2\pi Z^2 e^4 N_0}{V_0^3 (2\kappa^3 T^3 M_i)^{1/2}} \ln \frac{D}{\varrho_1} \left[\frac{2\kappa T}{M_i \Omega^2} \int_0^\infty C(x) dx + Z \right]}{2 + i \frac{qV_0}{\Omega} \int_0^\infty \exp B dx}, \quad (4.100)$$

где выражение для B дано на стр. 151, а

$$C(x) = \left[V_0^2 \left(q_{\parallel}^2 x^2 + q_{\perp}^2 4 \sin^2 \frac{x}{2} \right) - \left(q_{\parallel} V_{0\parallel} x + q_{\perp} V_{1\perp} 2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 \exp B \right].$$

Здесь $V_{1\perp}$ — вектор, получающийся из $V_{0\perp}$ поворотом на угол $-x/2$.

Вопрос о движении точечного заряда в плазме в магнитном поле рассматривался также Грейфингером [51]. Автор производил расчет в первом приближении по Z , т. е. как и в [44], пренебрегая членом с $I(v)$. Кроме того, он пренебрегал тепловым движением ионов, поэтому его результаты имеют смысл только в том случае, когда температура ионов много меньше, чем температура электронов ($T_i \ll T_e$). Чтобы получить из (4.98) и (4.100) выражения для $N(r)$, необходимо произвести обратное преобразование Фурье. При этом первый член в (4.98) приводит к убыванию возмущения с расстоянием, как $1/r^2$, а второй, как $1/r^3$. Для определения угловой зависимости $N(r)$ нужны численные расчеты, аналогичные тем, которые были сделаны при расчете $N(r)$ по формуле (4.51). Аналитическое выражение для той части $N(r)$, которая пропорциональна $1/r^3$, было получено в [44] для случая, когда $T_i \ll T_e$.

При движении в магнитном поле в выражении $\delta N(r)$ также имеется два члена. Один убывает с расстоянием в плоскости $V_0 \mathbf{H}_0$, как $1/r$, а второй, как $1/r^2$. При удалении от этой плоскости возмущения убывают экспоненциально.

Отметим в заключение, что кроме возмущений около движущегося точечного заряда может представить интерес и вопрос о возмущениях, вызываемых движением тонкого цилиндра, например антенны. Такая задача рассматривалась Рендом [52]. Автор пользовался приближением, аналогичным, по существу, приближению Крауса и Ватсона. В частности, его результаты также неверны на больших расстояниях от цилиндра.

§ 18. Возмущение плазмы высокочастотным электрическим полем

На небольших расстояниях от излучающей антенны, помещенной в плазме, напряженность высокочастотного электрического поля может быть весьма значительной. Это приведет к давлению поля на заряженные частицы и, следовательно, к возмущению однородной плазмы [28]. Рассмотрению этих возмущений посвящен настоящий параграф *).

Для решения такой задачи необходимо, как обычно, исследовать систему уравнений (1.23), (1.24), (1.25), определяющую функции распределения электронов и ионов и электрическое поле в плазме. При этом на поверхности антенны задается переменное электрическое поле частоты ω , создаваемое внешними источниками.

Наша задача сводится к определению усредненных по времени возмущений функций распределения электронов и ионов, постоянного электрического поля, амплитуды переменного электрического поля, амплитуды переменного электрического поля частоты ω и амплитуд соответствующих переменных возмущений функций распределения. Вначале мы определим средние по времени возмущения функций распределения и постоянное электрическое поле в зависимости от амплитуды переменного электрического поля в плазме. Затем уже для ряда конкретных случаев будет найдена и амплитуда переменного поля.

*) Этот эффект впервые был рассмотрен Гетманцевым и Денисовым [29].

а. Сила, действующая на электрон в неоднородном переменном электрическом поле. Как уже указывалось выше, прежде всего необходимо вычислить среднее, точнее говоря, усредненное по периоду поля, возмущение плазмы, вызываемое переменным электрическим полем, т. е. постоянную составляющую этого возмущения. Для этого определим среднее значение силы, действующей на заряженные частицы в неоднородном переменном электрическом поле. Естественно, что средняя сила, действующая на ионы, в m/M_i раз меньше, чем сила, действующая на электроны, так как в быстро осциллирующем поле она обратно пропорциональна массе частицы (см. ниже формулу (4.96), а также [27], стр. 120). Поэтому нужно учитывать непосредственное влияние переменного поля только на движение электронов. Движение ионов изменится лишь из-за кулоновского взаимодействия с электронами*).

Выражение для силы, действующей на электроны в единице объема в неоднородном переменном электрическом поле, имеет вид (см. [30])

$$f = \sum_{i, k} \frac{1}{16\pi} \text{grad} \left[E_i^* E_k \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial N} N \right] - \frac{1}{16\pi} \sum_{i, k} \frac{E_i^* E_k}{16\pi} \text{grad} \varepsilon_{ik}, \quad (4.101)$$

где E_k — комплексная амплитуда электрического поля, E_i^* — комплексно сопряженная ей величина, ε_{ik} — тензор диэлектрической проницаемости среды и N — концентрация электронов.

Производную $\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial N}$ можно преобразовать, если воспользоваться тем обстоятельством, что тензор $\frac{\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}}{4\pi}$

*) Здесь рассматривается только переменное поле, частота которого значительно больше ларморовской частоты ионов ($\omega \gg \Omega$) и плазменной частоты ионов ($\omega \gg \Omega_0 = \frac{m}{M_i} \omega_0$). Разумеется, в случае низких частот, когда $\omega \lesssim \Omega$ или $\omega \lesssim \Omega_0$, переменное поле оказывает гораздо более существенное влияние на движение ионов.

есть тензор поляризуемости плазмы, пропорциональный концентрации электронов. Так, например, в отсутствие магнитного поля

$$\varepsilon_{ik}^1 = \left(1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2} \right) \delta_{ik}$$

или

$$\frac{\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}}{4\pi} = \frac{e^2}{m\omega^2} N. \quad (4.102)$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial N} (\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}) = \frac{\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}}{N}, \quad N \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial N} = \varepsilon_{ik} - \delta_{ik}, \quad (4.103)$$

так что средняя сила, действующая на единицу объема,

$$f = \frac{1}{16\pi} \sum_{i, k} (\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}) \text{grad } E_i^* E_k. \quad (4.104)$$

В немагнитной плазме ($H_0 = 0$)

$$f = -\frac{e^2 N}{4m\omega^2} \text{grad } E^* E, \quad (4.105)$$

и для отнесенной к одной частице силы f/N получается формула Миллера [28]:

$$F = \frac{f}{N} = -\text{grad} \left(\frac{e^2 |E|^2}{4m\omega^2} \right). \quad (4.106)$$

Покажем, что выражение (4.106) имеет простой физический смысл. Для этого рассмотрим движение электрона в переменном поле $E \cos \omega t$. Под воздействием поля электрон колеблется с частотой ω ; переменная составляющая его скорости

$$v_\infty = \frac{eE}{m\omega} \sin \omega t.$$

Энергия колебательного движения электрона, усредненная за период поля, очевидно, равна

$$\bar{\mathcal{E}}_\infty = \frac{m}{2} \overline{v_\infty^2} = \frac{e^2 |E|^2}{2\omega^2 m} \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{e^2 |E|^2}{4m\omega^2}.$$

Следовательно, если электрическое поле неоднородно, т. е. если амплитуда его E изменяется в пространстве $E = E(r)$, то на электрон действует средняя сила

$$F = -\text{grad} \bar{\mathcal{E}}_\infty = -\text{grad} \frac{e^2 |E|^2}{4m\omega^2}.$$

Понятно также, что выражение (4.106) для средней силы, действующей на электрон, справедливо лишь в предположении, что амплитуда поля мало изменяется на расстоянии, которое электрон проходит за период колебаний. Это приводит к условиям

$$R \gg \frac{v_e}{\omega}, \quad R \gg \left(\frac{e|E|}{m\omega} \right) \frac{1}{\omega}, \quad (4.107)$$

где $v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ — тепловая скорость электронов, $\frac{e|E|}{m\omega}$ — упорядоченная скорость электронов и R — характерное расстояние, на котором существенно изменяется амплитуда электрического поля. Условие (4.107) приводит, в частности, к ограничению на напряженность поля

$$|E| \ll \frac{m\omega^2 R}{e}. \quad (4.108)$$

Совершенно аналогично можно найти среднюю силу, действующую на электрон в переменном электрическом поле при наличии в плазме постоянного магнитного поля H_0 . Тензор диэлектрической проницаемости в этом случае имеет следующий вид (см. [31]):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 - \omega_H^2)}, \\ \epsilon_{23} &= -\epsilon_{32} = -\frac{i4\pi e^2 N}{m} \frac{\omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, \\ \epsilon_{12} &= \epsilon_{21} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

где ось 1 направлена вдоль магнитного поля и $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$ — ларморовская частота электронов. Подставляя (4.109) в (4.101) и учитывая соотношение (4.103), находим, что

$$\mathbf{F} = \frac{f}{N} = -\text{grad} \sum_{i, k} \frac{e^2 E_i^* E_k \alpha_{ik}}{4m\omega^2}, \quad (4.110)$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{m(\delta_{ik} - \epsilon_{ik})\omega^2}{4\pi N e^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2} & i \frac{\omega_H \omega}{\omega^2 - \omega_H^2} \\ 0 & -i \frac{\omega_H \omega}{\omega^2 - \omega_H^2} & \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \end{pmatrix}. \quad (4.111)$$

В отсутствие магнитного поля $\alpha_{ik} = \delta_{ik}$, и выражение (4.110) совпадает с (4.106).

б. Влияние неоднородного переменного электрического поля на плазму. Мы видели выше, что если выполнены условия (4.106), (4.107), то при наличии в плазме переменного электрического поля на электроны действует дополнительная сила. Поэтому в кинетическом уравнении для средней по времени части функции распределения электронов вместо силы $-eE = \text{grad } e\varphi$ нужно учитывать полную силу, действующую на электрон, т. е.

$$F = \text{grad} \left[e\varphi - \sum_{i, k} \frac{\alpha_{ik} e^2 E_i^* E_k}{4m\omega^2} \right]. \quad (4.112)$$

Следовательно, в формуле распределения Больцмана, определяющей обычно концентрацию электронов, необходимо заменить $e\varphi$ на полное выражение в квадратной скобке (4.112). Таким образом,

$$N = N_0 \exp \left(\frac{e\varphi - \sum_{i, k} \frac{\alpha_{ik} e^2 E_i^* E_k}{4m\omega^2}}{\kappa T} \right), \quad (4.113)$$

и уравнение Пуассона (4.9) принимает вид

$$\Delta\varphi = -4\pi e \left[\int f_i d^3v - N_0 \exp \left(\frac{e\varphi - \sum_{i, k} \frac{\alpha_{ik} e^2 E_i^* E_k}{4m\omega^2}}{\kappa T} \right) \right], \quad (4.114)$$

где f_i — по-прежнему функция распределения ионов. Следовательно, задача сводится к совместному решению уравнения (4.114) и уравнения для функции распределения ионов (1.23). Кроме того, разумеется, необходимо определить из уравнения Максвелла комплексную амплитуду переменного электрического поля.

Предположим теперь, что характерный размер неоднородности (например, радиус антенны) много больше дебаевского радиуса. В этом случае на достаточно большом расстоянии от поверхности антенны (вне образующегося у этой поверхности переходного слоя) можно, как это уже делалось в § 14в, пренебречь членом $\Delta\varphi$

в уравнении Пуассона. Из (4.114) следует тогда

$$\varphi = \frac{\kappa T}{e} \ln \frac{N_i}{N_0} + \sum_{i, k} \alpha_{ik} \frac{eE_i^* E_k}{4m\omega^2}. \quad (4.115)$$

Это соотношение заменяет собой формулу (4.14), полученную в отсутствие переменного электрического поля.

Нахождение распределения ионов требует решения кинетического уравнения для f_i со значением φ , определяемым (4.115). Мы рассмотрим для простоты лишь случай антенны, покоящейся в плазме. Предположим также, что поглощением ионов на поверхности (нейтрализацией) можно пренебречь. Тогда распределение ионов, как и распределение электронов, в окрестности антенны можно считать равновесным. Это означает, что концентрация ионов дается формулой Больцмана

$$N_i = N_0 \exp\left(-\frac{e\varphi}{\kappa T}\right). \quad (4.116)$$

В этом случае, как ясно из (4.115), потенциал постоянного электрического поля

$$\varphi = \sum_{i, k} \alpha_{ik} \frac{eE_i^* E_k}{8m\omega^2}. \quad (4.117)$$

Соответственно концентрации электронов и ионов равны

$$N_e = N_i = N_0 \exp\left(-\sum_{i, k} \alpha_{ik} \frac{e^2 E_i^* E_k}{8\kappa T m \omega^2}\right). \quad (4.118)$$

В частности, в отсутствие магнитного поля $\alpha_{ik} = \delta_{ik}$ и (см. [29]):

$$N_i = N_e = N_0 \exp\left(-\frac{e^2 |E|^2}{8\kappa T m \omega^2}\right). \quad (4.119)$$

Отсюда видно, что при достаточно больших значениях амплитуды переменного поля, т. е. когда

$$|E| \gtrsim \sqrt{8\kappa T m} \frac{\omega}{e} \approx 2,0 \frac{\omega}{10^8} \sqrt{\frac{T}{1000^\circ}} \text{ в/см}, \quad (4.120)$$

возмущение, вызываемое полем в плазме, весьма велико.

При наличии магнитного поля H_0 , если антенна направлена параллельно H_0 , то напряженность

переменного электрического поля ортогональна к H_0 и

$$N_i = N_e = N_0 \exp \left\{ -\frac{e^2}{8\pi k T (\omega^2 - \omega_H^2)} \times \right. \\ \left. \times \left(|E|^2 + \frac{i\omega_H}{\omega} \frac{[E^*E] H_0}{H_0} \right) \right\}. \quad (4.121)$$

Если антенна направлена перпендикулярно к H_0 , то

$$N_i = N_e = N_0 \exp \left\{ -\frac{e^2}{8\pi k T} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{|E_{\parallel}|^2}{\omega^2} + \frac{|E_{\perp}|^2}{\omega^2 - \omega_H^2} + \frac{i\omega_H}{\omega (\omega^2 - \omega_H^2)} \frac{[E^*E] H_0}{H_0} \right) \right\}.$$

в. Амплитуда переменного электрического поля в плазме. В предыдущем разделе возмущения концентраций электронов и ионов выражены через комплексную амплитуду переменного электрического поля. Теперь необходимо вычислить эту амплитуду. Как мы увидим ниже, вблизи поверхности антенны образуется переходной слой, распределение поля в котором имеет сложный характер. В этом разделе мы будем предполагать, что точка наблюдения находится вне этого слоя.

Амплитуду поля можно вычислить независимо от определения $N(r)$ только в том случае, когда частота поля много больше ларморовской частоты плазмы ω_0 :

$$\omega \gg \omega_0. \quad (4.122)$$

В этом случае при определении $E(r)$ можно считать диэлектрическую проницаемость плазмы равной единице, т. е. вычислять $E(r)$ по тем же формулам, что и в пустоте. Если же условие (4.122) не выполняется, то возмущение $N(r)$ изменяет диэлектрическую проницаемость плазмы. Поскольку $N(r)$ само зависит от E , уравнения для E становятся нелинейными. Как известно, во всякой нелинейной задаче возможно появление гармоник основной частоты, т. е. колебаний с частотами 2ω , 3ω и т. д. Учет этих гармоник сильно усложнил бы решение задачи. Мы покажем, однако, что при условии (4.97) амплитуда гармоник мала и их можно не учитывать. Для доказательства выпишем уравнение для переменной составляющей

функции распределения электронов. Именно это уравнение оказывается нелинейным в сильном поле. Учтем, что при условии (4.97) в этом уравнении можно пренебречь членом с производными по координатам. После этого уравнение имеет вид *)

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{\partial f_e}{\partial v} \frac{eE}{m} = 0.$$

Умножая это уравнение на $-ev$ и интегрируя по d^3v , приводим его к виду

$$\frac{\partial \hat{j}}{\partial t} - \frac{e^2}{m} N_e(r) E = 0, \quad (4.123)$$

где $\hat{j} = -e \int v f_e d^3v$ — плотность тока.

При условии (4.97), как уже говорилось, $N_e = N_i$. Но из-за большой массы ионов переменное поле мало влияет на их движение. Поэтому $N_i(r)$ равно своему среднему по времени значению и не содержит высокочастотной составляющей. Таким образом, уравнение, связывающее \hat{j} с E , оказывается уравнением с не зависящим от времени (хотя и зависящим от амплитуды E) коэффициентом, так что высшие гармоники не возникают. Из (4.123) следует также, что при условии (4.97) \hat{j} связано с E обычной формулой, в которой под N следует понимать среднее значение $N(r)$. Это означает, что мы можем пользоваться для E обычными макроскопическими уравнениями поля в среде, в которых диэлектрическая проницаемость выражена через среднюю концентрацию $N(r)$, определяемую формулами (4.113) или (4.118). В последнем случае

$$\varepsilon_{ik}(r) = \delta_{ik} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \exp\left(-\frac{e^2}{8m\omega^2\kappa T} \alpha_{lm} E^* E_m\right) \alpha_{ik}.$$

Если магнитное поле отсутствует,

$$\varepsilon(r) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \exp\left(-\frac{e^2}{8m\omega^2\kappa T} |E|^2\right). \quad (4.124)$$

*) Для простоты мы приводим доказательство без магнитного поля.

На расстояниях от антенны, малых по сравнению с ее длиной и по сравнению с длиной излучаемой волны, электрическое поле можно считать направленным перпендикулярно к антенне. Его амплитуда зависит лишь от расстояния ϱ до антенны. В этом случае для определения поля нам достаточно лишь одного из уравнений Максвелла, а именно уравнения

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = 0$$

(\mathcal{D} — вектор электрической индукции), которое в этом случае сводится к уравнению

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \varrho \mathcal{D} = 0. \quad (4.125)$$

Интегрируя (4.125), получаем

$$\varrho \mathcal{D} = C, \quad (4.126)$$

или, учитывая, что $\mathcal{D} = \varepsilon E$,

$$\varrho \varepsilon E = C, \quad (4.126a)$$

где C — постоянная интегрирования.

Для определения постоянной C рассмотрим некоторую точку вблизи поверхности тела, но вне переходного слоя. В этой точке можно положить

$$\varrho = \varrho_0, \quad \varepsilon(\varrho) = \varepsilon(\varrho_0),$$

где ϱ_0 — радиус антенны.

Электрическое поле в этой точке выражается через поверхностную плотность заряда σ_0 на антенне с помощью известной из электростатики формулы

$$E(\varrho_0) = \frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon(\varrho_0)}.$$

Подставляя это равенство в (4.126), находим, что

$$C = 4\pi\sigma_0\varrho_0.$$

С другой стороны, на самой поверхности антенны, в самом начале переходного слоя, где плазма еще не поляризовалась и не заэкранировала заряд, поверхностная плотность σ_0 связана с напряженностью поля таким же

соотношением, что и в пустоте, т. е.

$$\sigma_0 = \frac{E_0}{4\pi},$$

где E_0 — напряженность поля на самой поверхности, определяемая внешним источником возбуждения антенны. Подставляя два последних соотношения в (4.126) и (4.126а), находим окончательно

$$\mathcal{D}(\varrho) = \frac{\varrho_0}{\varrho} E_0 \quad (4.127)$$

и

$$E(\varrho) = \frac{\varrho_0}{\varrho} \frac{E_0}{\varepsilon(\varrho)}. \quad (4.128)$$

Зависимость $\varepsilon(\varrho)$ определяется через $N(\varrho)$, т. е. в конечном счете формулой (4.119). Поэтому формулы (4.128) и (4.119) представляют собой систему уравнений, совместное решение которых позволяет определить $N(\varrho)$ и $E(\varrho)$. Ниже мы приводим это решение для некоторых частных случаев. Напомним, что формулы (4.119) и (4.128) пригодны только вне переходного слоя у поверхности. Структура этого слоя требует специального рассмотрения и описана в § 18е.

г. Возмущения, вызываемые в плазме переменным электрическим полем высокой частоты. Рассмотрим высокочастотное электрическое поле $\omega \gg \omega_0$, когда

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx 1,$$

так что поле в плазме

$$E = \frac{\varrho_0}{\varrho} E_0. \quad (4.129)$$

Здесь, как и обычно, E_0 — поле на поверхности антенны, ϱ_0 — радиус антенны и ϱ — расстояние от оси антенны. Используя выражение (4.129) в формулах (4.112), (4.117) и др., можно определить концентрацию электронов и ионов. В частности, в окрестности покоящейся антенны

$$N_i = N_e = N_0 \exp \left\{ -\frac{e^2 E^2}{8\pi T m \omega^2} \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2} \right\}. \quad (4.130)$$

Отсюда видно, что если амплитуда поля на поверхности

антенны

$$E_0 \gtrsim \sqrt{8\kappa T m} \frac{\omega}{e} \approx 2,0 \frac{\omega}{10^8} \sqrt{\frac{T}{1000^\circ}} \text{ в/см}, \quad (4.131)$$

то переменное поле сильно возмущает плазму на расстояниях порядка ϱ_0 . При больших ϱ возмущение убывает пропорционально $1/\varrho^2$.

Если антенна движется, то потенциал постоянного электрического поля вблизи антенны согласно (4.114) определяется выражением

$$\varphi = \frac{eE_0^2 \varrho_0^2}{4m\omega^2 \varrho^2} + \frac{\kappa T}{e} \ln \frac{N_i}{N_0}. \quad (4.132)$$

Расчет возмущения концентрации ионов и электронов требует теперь рассмотрения лишь кинетического уравнения для функции распределения ионов (1.23) с потенциалом электрического поля, выражаемым формулой (4.132). Такая задача до сих пор не решалась.

Заметим, однако, что потенциал φ оказывает влияние на возмущение ионов вокруг быстро движущегося тела лишь в случае, когда

$$e\varphi \gtrsim \frac{M_i V_0^2}{2}.$$

Поэтому высокочастотное поле сильно возмущает ионы вокруг быстро движущейся антенны, если

$$E_0 \gtrsim \sqrt{M_i m} \frac{\omega V_0}{e}. \quad (4.133)$$

д. Возмущения, вызываемые в плазме электрическим полем произвольной частоты. Резонансное усиление эффекта при $\omega \approx \omega_0$. Рассмотрим переменное электрическое поле произвольной частоты ω , которое будем считать достаточно слабым. Условие, ограничивающее при этом амплитуду поля, будет указано ниже. В этом случае при определении амплитуды переменного поля в плазме его влиянием на плазму в первом приближении можно пренебречь, и мы получаем согласно (4.128), что

$$E = \frac{E_0 \varrho_0}{\varrho e} = \frac{E_0 \varrho_0}{\varrho (1 - \omega_0^2/\omega^2)}, \quad (4.134)$$

где $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N_0/m$. Подставляя это выражение в (4.112), (4.114) и (4.116), можно определить возмущения концентрации электронов и ионов. В частности, в окрестности покоящейся антенны

$$\delta N_i = \delta N_e = -N_0 \frac{e^2 E_0^2 Q_0^2 \omega^2}{8\kappa T m Q^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (4.135)$$

При высоких частотах $\omega^2 \gg \omega_0^2$ это выражение для δN , разумеется, совпадает с (4.130).

В окрестности ленгмюровской частоты (при $\omega \rightarrow \omega_0$) как амплитуда электрического поля, так и вызываемые им возмущения резонансно возрастают. В этой области нельзя полностью пренебречь влиянием переменного электрического поля на концентрацию частиц в плазме. Амплитуда поля определяется теперь совместно уравнениями (4.128) и (4.124). Если поле является слабым, то экспоненту в (4.124) можно разложить, и мы получаем (при $\omega \rightarrow \omega_0$)

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 + \frac{e^2}{8m\omega_0^2\kappa T} |E|^2 = \varepsilon_0 + \beta |E|^2, \quad (4.136)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &\approx \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0}, \\ \beta &= \frac{e^2}{(8m\omega_0^2\kappa T)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.137)$$

Подставляя (4.136) в (4.128), находим уравнение для амплитуды поля

$$\varepsilon_0 E + \beta |E|^2 E = E_0 \frac{Q_0}{Q}. \quad (4.138)$$

Умножая это уравнение на комплексно-сопряженное, получаем

$$(\varepsilon_0 + \beta |E|^2)^2 = \frac{Q_0^2}{Q^2} |E_0|^2. \quad (4.139)$$

Интересно отметить, что это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение для амплитуды вынужденных колебаний ангармонического осциллятора без трения вблизи резонанса (см. [27], стр. 113). Уравнение (4.139) — кубическое относительно $|E|^2$ и имеет в общем случае три корня — $|E_1|^2$, $|E_2|^2$, $|E_3|^2$. Зависимость этих корней от ε_0

схематически изображена на рис. 30, а. Мы видим, что если ϵ_0 больше некоторого значения ϵ_K , то одному значению $|E_0|^2$ соответствует одно значение $|E|^2$. Если же $\epsilon < \epsilon_K$, то каждому значению амплитуды поля вне плазмы соответствуют три значения поля внутри плазмы, т. е. имеет место гистерезис.

Можно, однако, показать, что состояния, соответствующие среднему корню $|E_3|^2$, неустойчивы и не могут осуществляться. Для определения критического значения ϵ_K заметим, что при

$$\epsilon = \epsilon_K, \quad \frac{d\epsilon_0}{d|E|^2} = 0.$$

Дифференцируя (4.139) по $|E|^2$, получаем

$$(\epsilon_0 + \beta |E|^2) + 2|E|^2 \left(\frac{d\epsilon_0}{d|E|^2} + \beta \right) = 0. \quad (4.140)$$

Полагая $\frac{d\epsilon_0}{d|E|^2} = 0$ и решая совместно (4.139) и (4.140), находим

$$\epsilon_K = -\frac{3}{2^{2/3}} (\beta |E|^2)^{2/3}. \quad (4.141)$$

При этом значении ϵ_0 величина $|E|^2$ может принимать два значения $|E_{1K}|^2$ и $|E_{2K}|^2$:

$$|E_{1K}|^2 = \frac{|E_0|^2}{2^{2/3} \epsilon_K^{2/3}}, \quad |E_{2K}|^2 = 2 |E_{1K}|^2.$$

Нетрудно показать, что корень $|E_2|^2$ неограниченно возрастает с уменьшением ϵ_0 . Это, однако, связано с пренебрежением затуханием, т. е. диссипацией энергии. При учете диссипации вторая и третья ветви сливаются

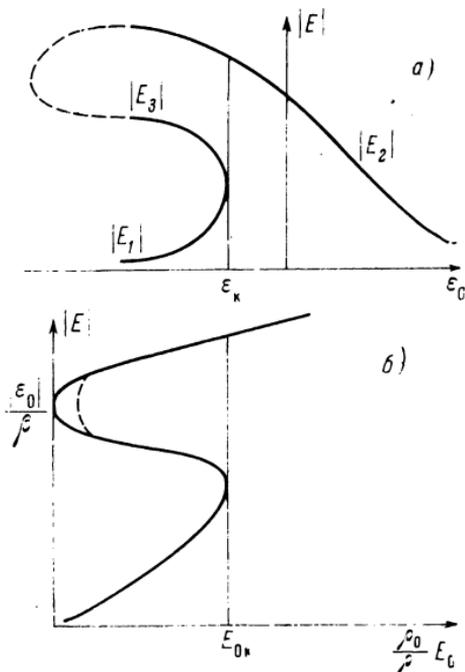


Рис. 30. Зависимость напряженности поля в плазме от ϵ_0 (или частоты) — кривая а и от амплитуды внешнего поля — кривая б.

при некотором отрицательном значении ϵ_0 , как это показано пунктиром на рисунке.

Зависимость амплитуды поля от $(q_0/q)|E_0|$ имеет существенно различный характер в зависимости от знака ϵ_0 . При $\epsilon_0 > 0$ эта зависимость носит монотонный и однозначный характер. При $\epsilon_0 < 0$ имеет место гистерезис. Поскольку всегда $q_0/q \leq 1$, гистерезисная область существует лишь при достаточно сильном поле на поверхности антенны, т. е. когда

$$|E_0| > E_{0к} = \frac{2^{1/2} |\epsilon_0|^{3/4}}{3^{3/4} \beta^{1/2}} (\epsilon_0 < 0). \quad (4.142)$$

Зависимость $|E|$ от $\left(\frac{q_0}{q}\right)|E_0|$ при $\epsilon_0 < 0$ изображена схематически на рис. 30, б (пунктиром изображен ход кривой с учетом затухания). При точном резонансе, т. е. когда $\epsilon_0 = 0$, $|E|$ дается формулой

$$|E| = \left(\frac{q_0 |E_0|}{\beta}\right)^{1/3} \frac{1}{q^{1/3}}. \quad (4.143)$$

Мы видим, что в резонансе электрическое поле убывает с увеличением расстояния от антенны очень медленно — по закону $q^{-1/3}$ (а не по закону q^{-1} как вдали от резонанса).

е. Переходный слой для переменного электрического поля. Как уже говорилось, полученные выше на основе макроскопической теории формулы для E и δN непригодны в переходном слое непосредственно вблизи поверхности антенны. Как мы увидим ниже, толщина этого слоя сильно возрастает при $\omega \rightarrow \omega_0$. Именно этим, наиболее интересным случаем мы и ограничимся. Для расчета структуры переходного слоя необходимо кроме нелинейных поправок к ϵ , которые мы учитывали до сих пор, учесть и поправки другого рода, связанные с зависимостью E от координат, т. е. с пространственной дисперсией. Пространственная дисперсия проявляется в зависимости ϵ не только от частоты ω , но и от волнового вектора q . При малых q , когда

$$qD \ll 1, \quad (4.144)$$

можно разложить ε по q . Это разложение имеет вид (см. [17], стр. 88)

$$\varepsilon(\omega, q) \approx \varepsilon(\omega) - 3(qD)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^4. \quad (4.145)$$

До тех пор пока нелинейные поправки и поправки по q малы, их можно учитывать независимо. Окончательное выражение для ε имеет поэтому при $\omega \approx \omega_0$ вид

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 + \beta |E|^2 - 3(qD)^2. \quad (4.146)$$

Формула (4.146) означает, что электрическая индукция $\mathcal{D}(r)$ связана с $E(r)$ соотношением

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 E + \beta |E|^2 E + 3D^2 \Delta E, \quad (4.147)$$

так как в координатном пространстве $q^2 E$ эквивалентно $-\Delta E$. В случае осевой симметрии

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 E + \beta |E|^2 E + 3D^2 \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \varrho \frac{dE}{d\varrho}.$$

Подставляя последнее выражение для \mathcal{D} в (4.127), получаем уравнение, определяющее распределение поля в плазме

$$3D^2 \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \varrho \frac{dE}{d\varrho} + \varepsilon_0 E + \beta |E|^2 E = \frac{\varrho_0}{\varrho} E_0. \quad (4.148)$$

Уравнение (4.148) следует решать с граничным условием $E = E_0$ при $\varrho = \varrho_0$ (т. е. на границе плазмы).

Поскольку, однако, значение E внутри плазмы при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ гораздо больше, чем E_0 , можно с требуемой точностью считать граничное значение E равным нулю

$$E = 0, \quad \varrho = \varrho_0. \quad (4.149)$$

При $\varrho \rightarrow \infty$ E должно стремиться к нулю. Перепишем (4.148) в безразмерных переменных. Для этого положим

$$E = \frac{E_0}{(\beta E_0^2)^{1/3}} y, \quad \varrho = \frac{D \sqrt{3}}{(\beta E_0^2)^{1/6}} t, \quad \varrho_0 = \frac{D \sqrt{3}}{(\beta E_0^2)^{1/6}} t_0, \quad (4.150)$$

после чего (4.148) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} t \frac{dy}{dt} + \mu y + y^3 &= \frac{t_0}{t}, \\ \mu &= \frac{\varepsilon_0}{(\beta E_0^2)^{1/3}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.151)$$

Из (4.151) видно, что если $\mu \gg 1$, иными словами, если

$$\varepsilon_0 \gg (\beta E_0^2)^{1/3} = \left(\frac{e^2 E_0^2}{8m\omega_0^2 \kappa T} \right)^{1/3}, \quad (4.152)$$

то можно пренебречь в уравнении нелинейным членом. В этом случае распределение поля определяется линейным уравнением

$$3D^2 \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \varrho \frac{dE}{d\varrho} + \varepsilon_0 E = \frac{\varrho_0 E_0}{\varrho}. \quad (4.153)$$

Мы не будем выписывать решение этого уравнения, выражающееся через бесселевы функции.

Если нас интересуют расстояния от поверхности антенны, малые по сравнению с ее радиусом, так что

$$x = \varrho - \varrho_0 \ll \varrho_0, \quad (4.154)$$

то (4.151) приближенно записывается в виде

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \mu y + y^3 = 1,$$

где

$$\xi = \frac{(\beta E_0^2)^{1/6}}{D \sqrt{3}} x. \quad (4.155)$$

Вместо (4.153) в этом случае имеем

$$3D^2 \frac{d^2 E}{dx^2} + \varepsilon_0 E = E_0. \quad (4.156)$$

Это уравнение с граничным условием $E = 0$, $x = 0$ имеет решение

$$\left. \begin{aligned} E &= \left(\frac{E_0}{\varepsilon_0} \right) \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{x}{D} \right) \sqrt{\frac{|\varepsilon_0|}{3}} \right] \right\}, & \varepsilon_0 < 0, \\ E &= \left(\frac{E_0}{\varepsilon_0} \right) \left\{ 1 - \exp \left[\left(\frac{ix}{D} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{3}} \right] \right\}, & \varepsilon_0 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.157)$$

Выражения (4.157), как и должно быть, совпадают с полученными для этого случая Ландау непосредственно с помощью кинетического уравнения [32]. Отметим, однако, что во второй формуле (4.157) отсутствует малый член затухания Ландау. Уравнения (4.148) и (4.156)

не описывают этого затухания. С учетом затухания

$$E = \left(\frac{E_0}{\varepsilon_0} \right) \left\{ 1 - \exp \left[\left(\frac{ix}{D} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{3}} - \left(\frac{3x}{D} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon_0}} \exp \left(-\frac{3}{2\varepsilon_0} \right) \right] \right\}. \quad (4.157a)$$

Из формул (4.157), (4.157a) видно, что при уменьшении ε_0 амплитуда поля и толщина переходного слоя возрастают. Характерный размер X , на котором изменяется поле, оказывается порядка

$$X \sim D \sqrt{\frac{3}{|\varepsilon_0|}} \gg D.$$

Это неравенство оправдывает допустимость разложения (4.145); а следовательно и всех дальнейших вычислений. При очень малых ε_0 , однако, линейное уравнение (4.156) неприменимо. Аналитическое решение более общего уравнения (4.155) можно получить только для случая действительного y . Это решение имеет сложный вид, и мы не будем его выписывать. Если ε_0 так мало, что выполняется неравенство

$$\mu \ll 1,$$

обратное неравенству (4.152), то можно пренебречь членом с μ в (4.155). В этом случае поле определяется не содержащим параметров уравнением

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + y^3 = 1. \quad (4.158)$$

Из (4.150) и (4.158) видно, что амплитуда поля в плазме и характерное расстояние, на котором она существенно изменяется, равны соответственно:

$$\left. \begin{aligned} E &\sim \frac{E_0}{(\beta E_0^2)^{3/2}}, \\ X &\sim \frac{D \sqrt{3}}{(\beta E_0^2)^{1/6}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.159)$$

Из (4.159) следует, что для того чтобы можно было считать поле слабым и разлагать экспоненту в (4.124),

необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\beta |E_0|^2 \ll 1 \quad (4.160)$$

или

$$\frac{|E_0|^2}{16\pi} \ll 2\kappa T N_0. \quad (4.161)$$

Отметим, что при условии (4.160) необходимое неравенство $X \gg D$ выполняется автоматически*).

В заключение этого параграфа приведем без вывода полученную в [32] в линейном приближении формулу для распределения поля вблизи плоской границы плазмы при частоте, далекой от ω_0 . Эта формула имеет вид

$$E(x) = \frac{E_0}{\epsilon} + \frac{2E_0}{\sqrt{3}\epsilon^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2/3} \left(\frac{x}{D}\right)^{2/3} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{3}{4} \left(\frac{\omega x}{\omega_0 D}\right)^{2/3} + i \left[\frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\omega x}{\omega_0 D}\right)^{2/3} + \frac{2\pi}{3} \right] \right\}. \quad (4.162)$$

Здесь, как обычно, $\epsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$, $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N_0/m}$. Отсюда видно, что с удалением от поверхности тела амплитуда переменного электрического поля быстро приближается к постоянной величине E_0/ϵ_0 . Толщина переходного слоя при этом порядка дебаевского радиуса D и лишь в случае низкочастотного поля $\omega \ll \omega_0$ она несколько возрастает пропорционально ω_0/ω .

*) Рассмотренный здесь эффект резонансного возмущения плазмы переменным полем при $\omega \approx \omega_0$ должен, естественно, проявиться при зондовых исследованиях плазмы с помощью высокочастотного поля. В частности, можно показать, что при $\omega \rightarrow \omega_0$ и постоянном E_0 резонансно возрастает постоянная составляющая зондового тока. Возможно, что этот эффект наблюдался на опыте (см., например, [67]). Нам неизвестны, однако, конкретные условия этих экспериментов.

ГЛАВА V

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ СОУДАРЕНИЙ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ НА ВОЗМУЩЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ИОНОВ

§ 19. Эффективное число соударений

В предыдущих главах мы видели, что компонента Фурье электронной концентрации N_q делается очень большой, когда произведение qV_0 и продольная составляющая $q_{||}$ стремятся к нулю, если плазма находится в магнитном поле. В отсутствие магнитного поля N_q быстро возрастает, когда $q \rightarrow 0$. Однако при этих значениях q полученные ранее формулы неприменимы, так как резкое возрастание N_q в этих случаях связано с тем, что в интеграле для N_q начинают играть роль очень большие области, размер которых может сравниться с длиной свободного пробега ионов. Поэтому при малых qV_0 и $q_{||}$ (или малых q без магнитного поля) необходимо учитывать столкновения ионов между собой и с другими частицами. Строгое решение задачи со столкновениями из-за очень сложного вида интегралов столкновений (1.31), (1.32) возможно, однако только в некоторых предельных случаях (см. § 21). Поэтому, чтобы получить сравнительно простую общую формулу, мы воспользуемся широко применяемым в физике методом эффективного числа соударений. Разумеется, что при таком методе расчета получаемые формулы имеют лишь интерполяционный характер.

Обычно эффективное число соударений ν вводят, добавляя в правую часть кинетического уравнения член $Y = -\nu(f - f_{oi})$. Такой вид интеграла столкновений,

однако, неудовлетворителен в нашем случае, поскольку он нарушает закон сохранения числа частиц ($\int Y d^3v \equiv 0$), а это может привести к существенной ошибке при вычислении распределения ионов в пространстве. Поэтому мы запишем интеграл столкновений в виде

$$Y_{\text{эфф}} = -v \left(f_i - \frac{f_{0i}}{N_0} \int f_i d^3v \right) = -v \left(f_i - \frac{f_{0i}}{N_0} \int f_i d^3v \right). \quad (5.1)$$

Из (5.1) непосредственно видно, что

$$\int Y_{\text{эфф}} d^3v = 0. \quad (5.2)$$

Эффективное число соударений v по порядку величины равно сумме столкновений ионов с нейтральными частицами и ионами, т. е. (см. [34], [35])

$$v = 2,2n_0\sigma_{in} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} + \frac{5e^4 N_0 \Lambda}{(\kappa T)^{3/2} M_i^{1/2}}. \quad (5.3)$$

В этой формуле σ_{in} — эффективное сечение столкновений иона с нейтральными частицами, а Λ — кулоновский логарифм, т. е.

$$\Lambda = \ln \left(0,37 \frac{\kappa T}{e^2 N_0^{1/3}} \right).$$

Добавляя выражение (5.1) к правой части уравнения (4.72), получаем

$$\begin{aligned} \frac{e}{M_{ic}} [uH_0] \frac{\partial f_q}{\partial u} + iqv f_q + iqu \frac{e}{\kappa T} f_{0i} \Phi_q = \\ = I(v) - v \left(f_q - \frac{f_{0i}}{N_0} \int f_q d^3v \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Поскольку

$$\int f_q d^3v = N_q = N_0 \frac{e\Phi_q}{\kappa T},$$

то (5.4) можно привести к виду

$$\frac{e}{M_{ic}} [uH_0] \frac{\partial f_q}{\partial u} + i(qv - iv) f_q + i(qu + iv) \frac{e}{\kappa T} f_{0i} \Phi_q = I(v). \quad (5.5)$$

Это уравнение подобно уравнению (4.56), и его можно решить тем же способом. Если взять $I(v)$ согласно (4.56), то окончательный ответ имеет вид

$$N_q = - \frac{\frac{\pi R_0^2 N_0 V_0}{\Omega} \int_0^\infty \exp A dx}{2 + \frac{iqV_0 - 2v}{\Omega} \int_0^\infty \exp A dx}, \quad (5.6)$$

где

$$A = \left[\frac{iqV_0 - v}{\Omega} x - \frac{\kappa T}{2M_i \Omega^2} \left(q_{\parallel}^2 x^2 + 4q_{\perp}^2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \right].$$

Из (5.6) непосредственно видно, что влиянием столкновений на распределение ионов и электронов можно пренебречь в том случае, когда

$$qV_0 \gg v. \quad (5.7)$$

Наиболее же существенно влияние столкновений при малых qV_0 и q_{\parallel} , когда

$$qV_0 \lesssim v \ll \Omega, \quad q_{\parallel} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \ll v \ll \Omega. \quad (5.8)$$

Отметим здесь, что условие $v \ll \Omega$ выполняется в ионосфере на всех интересующих нас высотах.

При выполнении условий (5.8) периодический множитель $\exp\left(-\frac{2q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2} \sin^2 \frac{x}{2}\right)$ под интегралом быстро осциллирует (см. стр. 108), и его можно заменить средним значением по периоду. В этом случае те же вычисления, что и при выводе формулы (4.60), приводят к результату:

$$N_q = - \frac{\frac{\pi R_0^2 N_0 V_0}{q_{\parallel}} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}} Q(a_2) B}{2 + \frac{iqV_0 - 2v}{iqV_0 - v} ia_2 Q(a_2) B}, \quad (5.9)$$

где

$$B = \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_0\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right)$$

и

$$a_2 = \frac{qV_0 + iv}{q_{\parallel}} \sqrt{\frac{M_i}{2\kappa T}}. \quad (5.10)$$

Если теперь устремить qV_0 и q_{\parallel} к нулю, то N_q уже не обращается в бесконечность, а определяется с помощью следующей формулы:

$$N_q = - \frac{\frac{\pi R_0^2 N_0 V_0}{2\nu} \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_0\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right) I_0\left(\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}\right)}. \quad (5.11)$$

Рассмотрим здесь кратко также формулы для N_q с учетом столкновений, но без магнитного поля. Формулы эти имеют лишь методическое значение, поскольку условие (3.41) в верхней ионосфере является более жестким, чем (5.7), так что магнитное поле всегда сказывается сильнее, чем столкновения. Добавляя $Y_{эфф}$ в правую часть уравнения (4.37) и решая его, находим

$$N_q = - \frac{i \int \frac{I(v)}{qv - iv} d^3v}{2 + \frac{iqV_0 - 2\nu}{N_0} \int \frac{f_{0i}}{iqv + v} d^3v}. \quad (5.12)$$

Если

$$qV_0 \ll \nu, \quad q \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \ll \nu, \quad (5.13)$$

то

$$N_q = \frac{\int I(v) d^3v - \frac{iq}{\nu} \int uI(v) d^3v}{\left(-iqV_0 + \frac{2q_{\perp}^2 \kappa T}{\nu M_i}\right)}. \quad (5.14)$$

Подставляя в (5.12) $I(v)$ в виде $-\pi R_0^2 V_0 f_{0i}$, получаем

$$N_q = - \frac{\pi R_0^2 N_0 V_0}{q} \frac{\left(\frac{M_i}{2\kappa T}\right)^{1/2} Q(a_3)}{2 + (a_3 + iv \sqrt{M_i/2\kappa T}) Q(a_3)}, \quad (5.15)$$

где

$$a_3 = \frac{qV_0 + iv}{q} \left(\frac{M_i}{2\kappa T}\right)^{1/2}.$$

Отметим здесь, что выражение (5.14) совпадает с формулами для N_q , которые мы получим в § 22 из уравнения диффузии ионов. Такой результат является вполне естественным, так как (5.13) как раз и есть условие применимости диффузионного приближения.

§ 20. Упрощение уравнения с интегралом столкновений общего вида

Мы видели в предыдущем параграфе, что при выполнении условий (5.8) решение кинетического уравнения с эффективным числом столкновений можно значительно упростить. Это не является случайным. Мы покажем сейчас, что условия (5.8) позволяют произвести упрощения прямо в кинетическом уравнении общего вида. Эти упрощения позволяют, в частности, в некоторых предельных случаях получить решения уравнения с точным интегралом столкновений и сравнить их с решением уравнения с приближенным интегралом столкновений (5.1).

Прежде всего отметим, что поскольку на тех расстояниях от тела, на которых существенны столкновения, возмущения функций распределения уже малы, то мы можем линеаризовать интеграл столкновений, т. е. положить в нем все функции распределения равными

$$f_i = f_{0i} + f'_i$$

и пренебречь членами, квадратичными по f'_i . После этого интеграл столкновений станет линейным оператором, действующим на функцию f'_i .

Для упрощения дальнейших вычислений удобно воспользоваться доказанной в § 166 теоремой, согласно которой в кинетическом уравнении можно опустить член с потенциалом ϕ , учитывая влияние ϕ введением диэлектрической проницаемости. Из формул (4.79) — (4.83) следует, что N_q можно представить в виде

$$N_q = \frac{\int f_1 d^3v}{1 + \int f_2 d^3v} = \frac{\int f_1 d^3v}{\sum_{l, k} \varepsilon_{lk} q_l q_k D^2}. \quad (5.16)$$

При этом если раскрыть в (4.80) смысл оператора L , то в рассматриваемом нами случае f_1 и f_2 удовлетворяют

уравнениям:

$$i(qu - qV_0) f_1 + \frac{e}{M_{ic}} [uH_0] \frac{\partial f_1}{\partial u} = I(u), \quad (5.17)$$

$$i(qu - qV_0) f_2 + \frac{e}{M_{ic}} [uH_0] \frac{\partial f_2}{\partial u} = iqu \frac{f_{0i}}{N_0}. \quad (5.18)$$

Мы видим, что для определения N_q необходимо по отдельности определить две функции f_1 и f_2 . Перейдем к решению этой задачи.

В цилиндрических координатах уравнение (5.17) принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta} - i(\mu + \gamma \cos \beta) f_1 + \frac{1}{\Omega} Y[f_1(u')] = \frac{I(u)}{\Omega}, \quad (5.19)$$

где

$$\mu = \frac{q_{\parallel} u_{\parallel} - qV_0}{\Omega}, \quad \gamma = \frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega}.$$

Сделаем теперь замену переменных

$$f_1(u) = \exp(i\gamma \sin \beta) g(u). \quad (5.20)$$

Тогда $g(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} - i\mu g = -\exp(-i\gamma \sin \beta) \frac{1}{\Omega} Y[\exp(i\gamma' \sin \beta') g(u')] - \exp(-i\gamma \sin \beta) \frac{I(u)}{\Omega}, \quad (5.21)$$

где

$$\gamma' = \frac{q_{\perp} u'_{\perp}}{\Omega}.$$

Чтобы прийти к искомому упрощению, разложим $g(u)$ в ряд Фурье по β :

$$g(u) = g_0(u_{\parallel}, u_{\perp}) + g_1(u_{\parallel}, u_{\perp}) e^{i\beta} + g_{-1}(u_{\parallel}, u_{\perp}) e^{-i\beta} + \dots \\ \dots + g_m(u_{\parallel}, u_{\perp}) e^{im\beta} + \dots \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.22)$$

Оценим теперь порядок отдельных членов в (5.22) при условии (5.8). Порядок всех членов ряда, кроме нулевого, можно найти, сравнивая наибольший первый член

в левой части (5.21) с правой частью. Таким образом,

$$g_m \sim \frac{I(u)}{m\Omega} \quad (m \neq 0).$$

Для нулевого же члена производная $\frac{\partial g_0}{\partial \beta}$ исчезает и необходимо оценивать g_0 , сравнивая с правой частью второй или третий член. При этом, если выполняются условия (5.8),

$$g_0 \sim \frac{\Omega}{qV_0} \frac{I(u)}{\Omega} \gg g_m.$$

В результате мы можем ограничиться в g только членом g_0 , взяв нулевую компоненту Фурье от уравнения (5.21), т. е. усреднив его по углу β . Окончательно $g = g_0(u_{\parallel}, u_{\perp})$ удовлетворяет уравнению*)

$$\begin{aligned} i(q_{\parallel} u_{\parallel} - qV_0)g(u_{\parallel}, u_{\perp}) - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \exp(-i\gamma \sin \beta) Y[\exp(i\gamma' \sin \beta')g(u'_{\parallel}, u'_{\perp})] = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\gamma \sin \beta) I(u) d\beta. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Если, как мы будем считать далее, $I(u)$ не зависит от угла β , например, имеет вид $-\pi R_0^2 V_0 f_{0i}$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\gamma \sin \beta) I(u) d\beta = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\gamma \sin \beta) d\beta I(u) = J_0(\gamma) I(u). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Аналогичному упрощению можно подвергнуть уравнение

*) Идея сделанного приближения аналогична идее приближения, развитого Будкером и Беляевым [36, 37]. Мы, однако, не предполагаем, что f_i и ϕ медленно изменяются в перпендикулярном к полю направлении. Поэтому наши формулы переходят в формулы, полученные в [36, 37] лишь в предельном случае $\gamma \ll 1$.

(5.18)*). Для этого нужно ввести новую искомую функцию $h(u_{\parallel}, u_{\perp})$, связанную с f_2 соотношением

$$f_2 = \frac{f_{i0}}{N_0} + h(u_{\parallel}, u_{\perp}) \exp\left(i \frac{q_{\parallel} u_{\perp}}{\Omega} \sin \beta\right). \quad (5.25)$$

Уравнение для введенной таким образом функции h отличается от уравнения для g только заменой

$$I \rightarrow \frac{iqV_0}{N_0} f_{0i}. \quad (5.26)$$

Поэтому все формулы для h можно получить без дополнительных вычислений из формул для g . Эти формулы, однако, нам не понадобятся, так как в двух предельных случаях, которые мы подробно разберем в этом параграфе, можно сразу написать ответ для выражения $1 + \int f_2 d^3v$, которое входит в искомую формулу (5.16) для N_q . Действительно, если

$$q_{\perp} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \ll \Omega, \quad q_{\parallel} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \ll qV_0, \quad (5.27)$$

то правая часть уравнения (5.18), а вместе с нею и функция f_2 , оказывается малой, так что интегралом от f_2 можно пренебречь. Поэтому

$$\sum_{l, k} \varepsilon_{lk} q_l q_k D^2 = 1 + \int f_2 d^3v \approx 1. \quad (5.28)$$

В другом предельном случае, когда

$$q_{\perp} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \gg \Omega, \quad (5.29)$$

из-за быстрых осцилляций экспоненты $\exp(i\gamma \sin \beta)$ правая часть уравнения для h становится малой. Поэтому

*) Если мы хотели бы непосредственно, не пользуясь соотношениями § 16б, упростить уравнение для f_q , то мы должны были бы положить

$$f_q = -\frac{e}{\kappa T} \Phi_q f_{0i} + \exp(i\gamma \sin \beta) g_q(u_{\parallel}, u_{\perp})$$

и усреднить по β уравнение для g_q .

в (5.25) можно пренебречь вторым членом, содержащим h . Следовательно, $f_2 \approx \frac{f_{0i}}{N_0}$ и

$$\sum_{l, k} \varepsilon_{lk} q_l q_k D^2 = 1 + \int f_2 d^3v \approx 2. \quad (5.30)$$

Для иллюстрации развитого здесь приближения применим уравнение (5.23) к интегралу столкновений (5.2), для которого в предыдущем параграфе уже было получено точное решение. Подставляя (5.2) в (5.23) и вычисляя интегралы по $d\beta$, имеем

$$[i(q_{\parallel} u_{\parallel} - qV_0) + v] g - v \frac{f_{0i}}{N_0} J_0(\gamma) \int J_0\left(\frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega}\right) g d^3u = J_0(\gamma) I(u). \quad (5.31)$$

Отсюда находим, что

$$\int f_1 d^3v = \int J_0\left(\frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega}\right) g d^3u = \frac{\frac{1}{i} \int \frac{J_0^2\left(\frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega}\right) I(u)}{i(q_{\parallel} u_{\parallel} - qV_0) + v} d^3u}{1 - \frac{v}{N_0} \int \frac{J_0^2\left(\frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega}\right) f_{0i}}{i(q_{\parallel} u_{\parallel} - qV_0) + v} d^3u}.$$

Выписывая аналогичную формулу для функции f_2 и вычисляя интегралы по d^3u , непосредственно получаем, как это и должно быть, формулу (5.9)*.

В том случае, когда $\frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} \sim \frac{q_{\perp}}{\Omega} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \gg 1$, можно воспользоваться асимптотическими выражениями для J_0^2 :

$$J_0^2(x) \approx \frac{2 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi x} = \frac{1}{\pi x} \left[1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (5.32)$$

Второй член в квадратной скобке $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ вносит

*) Для вычисления интегралов по du_{\perp} при этом надо воспользоваться формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} J_0^2(at) t dt = \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{2}} I_0\left(\frac{a^2}{2}\right).$$

малый вклад в интеграл, и его можно опустить. Учитывая (5.30), окончательно имеем

$$N_q = \frac{\Omega}{2q_{\perp}\pi} \int \frac{I(u)}{i(q_{\parallel}u_{\parallel} - qV_0) + v} \frac{d^3u}{u_{\perp}}. \quad (5.33)$$

В другом предельном случае, когда $q_{\parallel} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \ll qV_0$ и $q_{\perp} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \ll \Omega$, после простых вычислений получаем

$$N_q = \frac{\int I(u) d^3u}{-iqV_0 - \frac{vq_{\perp}^2 \kappa T}{\Omega^2 M_i}}. \quad (5.34)$$

В следующем параграфе мы сравним формулы (5.33) и (5.34) с формулами, получаемыми из уравнений с точными интегралами столкновений.

§ 21. Решение уравнений с точными интегралами столкновений в различных предельных случаях

В настоящем параграфе мы выведем формулы для N_q с помощью уравнений с точными интегралами столкновений (1.31) и (1.32). При этом в явном виде ответ можно получить для предельных случаев, даваемых неравенствами (5.27) и (5.29).

Допустим первоначально, что выполняется неравенство (5.29), и рассмотрим случай столкновений ионов с нейтральными частицами, т. е. интеграл столкновений (1.31). Линеаризуя это выражение и подставляя его в уравнение (5.23), получаем

$$\begin{aligned} & i(q_{\parallel}u_{\parallel} - qV_0)g + g \int W f_{0n}(u') d^3u' d^3u_1 d^3u'_1 - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\gamma \sin \beta) d\beta \int W g(u_1) f_{0n}(u') \exp(i\gamma_1 \sin \beta_1) \times \\ & \times d^3u' d^3u_1 d^3u'_1 = J_0(\gamma) I(u), \quad \gamma_1 = \frac{q_{\perp} u_{1\perp}}{\Omega}. \quad (5.35) \end{aligned}$$

Здесь $W = W(v, v', v_1, v'_1)$ — вероятность столкновения частиц, при котором скорость частиц v_1 изменяется

на v , и v'_1 — на v' . Учтем теперь, что при условии (5.29) $\exp(i\gamma \sin \beta)$ является быстро осциллирующей функцией. Поэтому интегралы по β от выражений, содержащих эту функцию, оказываются малыми. Таким малым членом является третий член в левой части (5.35), так что им можно пренебречь. После этого (5.35) приводится к виду уравнения с эффективным числом соударений, а именно:

$$[i(q_{\parallel} u_{\parallel} - qV_0) + v_{in}^{(1)}(u)] g = J_0(\gamma) I(u). \quad (5.36)$$

Зависящее теперь от скорости эффективное число соударений дается формулой

$$v_{in}^1 = \int W f_{0n}(u') d^3u' d^3u_1 d^3u'_1. \quad (5.37)$$

Решая уравнение (5.36) и заменяя J_0 асимптотическим выражением (5.32), получаем, что

$$N_q = \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega}{q_{\perp}} \int \frac{I(u)}{i(q_{\parallel} u_{\parallel} - qV_0) + v_{in}^{(1)}(u)} d^3u. \quad (5.38)$$

Формула (5.38) аналогична формуле (5.33), с той только разницей, что теперь v зависит от скорости.

Перейдем теперь к случаю столкновений между ионами, т. е. к интегралу столкновений (1.32). Заранее ясно, что те члены в интеграле столкновений Y , в которых неизвестная функция интегрируется по v' , опять окажутся малыми из-за осциллирующего множителя. Поэтому можно сразу написать Y в виде

$$Y = - \sum_k \frac{1}{M_i} \frac{\partial j_k}{\partial u_k},$$

$$j_k = \sum_i \frac{\pi e^4 \Lambda}{M_i} \int \left[f_q \frac{\partial f_{0i}(u_1)}{\partial u_{1l}} - f_{0i}(u_1) \frac{\partial f_q}{\partial u_{1l}} \right] \frac{\omega^2 \delta_{lk} - \omega_l \omega_k}{\omega^3} d^3u_1 =$$

$$= - \frac{\pi e^4 \Lambda}{M_i} \sum_l \left[\frac{\partial f_q}{\partial u_{1l}} + \frac{M_i u_{1l}}{\kappa T} f_q \right] A_{lk}, \quad (5.39)$$

где

$$A_{lk} = \int f_{0i}(u_1) \frac{\omega^2 \delta_{lk} - \omega_l \omega_k}{\omega^3} d^3u_1, \quad \omega = u - u_1.$$

Интеграл в A_{lk} можно выразить через интеграл вероятности. Опуская эти преобразования, выпишем сразу ответ:

$$A_{lk} = N_0 \sqrt{\frac{\kappa T}{2\pi M_i}} \left[a (u^2) \frac{u_l u_k}{u^2} + b \delta_{lk} \right], \quad (5.40)$$

где

$$a = \left[\left(\frac{M_i u^2}{\kappa T} - 3 \right) \sqrt{\frac{\pi \kappa T}{2 M_i u^2}} \Phi \left(\sqrt{\frac{M_i u^2}{2 \kappa T}} \right) + \right. \\ \left. + 3 \exp \left(-\frac{M_i u^2}{2 \kappa T} \right) \right] u^{-2},$$

$$b = \left[\left(\frac{M_i u^2}{\kappa T} + 1 \right) \sqrt{\frac{\pi \kappa T}{2 M_i u^2}} \Phi \left(\sqrt{\frac{M_i u^2}{2 \kappa T}} \right) - \right. \\ \left. - \exp \left(-\frac{M_i u^2}{2 \kappa T} \right) \right] u^{-2},$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Возвращаясь теперь к уравнению (5.23), заметим, что

$$\gamma \sin \beta = \frac{q_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} \sin \beta = \frac{q_1 u_{\perp}}{\Omega}, \quad (5.41)$$

где q_1 — вектор, перпендикулярный к q_{\perp} и H_0 , а $|q_1| = |q_{\perp}|$. Подставляя (5.39) и (5.41) в (5.23), учтем, что в том случае, когда $\frac{q_{\perp}}{\Omega} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}}$ велико, мы должны дифференцировать по u только экспоненту. Интегрирование же по $d\beta$ сводится к усреднению по всем направлениям вектора q_1 в плоскости, перпендикулярной к H_0 . Поэтому второй член в левой части уравнения (5.23) приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \exp(-i\gamma \sin \beta) Y[\exp(i\gamma' \sin \beta') g] = \\ = \frac{\pi e^4 \Lambda}{M_i^2 \Omega^2} g \sum_{l, k} \overline{q_{1l} q_{1k}} A_{lk} = \frac{\pi e^4 \Lambda}{M_i^2 \Omega^2} q_{\perp}^2 \left(b + \frac{1}{2} a \frac{u_{\perp}^2}{u^2} \right) \times \\ \times N_0 \left(\frac{\kappa T}{2\pi M_i} \right)^{1/2} g = \frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2} v_{ii}^{(1)}(u), \quad (5.42)$$

где

$$v_{ii}^{(1)} = \frac{e^4 \Lambda N_0}{M_i} \left(\frac{\pi \kappa T}{2M_i} \right)^{1/2} \left(b + \frac{1}{2} a \frac{u_{\perp}^2}{u^2} \right).$$

Подставляя (5.42) в (5.23) и решая полученное таким образом уравнение, имеем

$$N_q = \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega}{q_{\perp}} \int \frac{I(u)}{i(q_{\parallel} u_{\parallel} - qV_0) + \frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2} v_{ii}^{(1)}(u)} \frac{d^3 u}{u_{\perp}}. \quad (5.43)$$

Формула (5.43) отличается от (5.33) не только зависимостью v от u , но и большим множителем $\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}$ перед v . Это означает, что в той области, где истинный интеграл столкновений имеет вид (1.32), интерполяционная формула (5.6) дает завышенные значения N_q при $\frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2} \gg 1$.

Перейдем теперь к другому предельному случаю, когда

$$q_{\perp} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \ll 1, \quad q_{\parallel} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \ll qV_0. \quad (5.27)$$

В этом случае, как мы увидим ниже, столкновения существенны лишь тогда, когда

$$qV_0 \sim \frac{v q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2} \ll v. \quad (5.44)$$

Введем теперь опять вектор q_1 (см. (5.41)), разложим левую часть (5.23) по $q_1 u$ и пренебрежем членом с $q_{\parallel} u_{\parallel}$. Тогда

$$-iqV_0 g - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \left(1 - \frac{iq_1 u}{\Omega} \right) Y \left[\left(1 + \frac{iq_1 u'}{\Omega} \right) g \right] = I(u). \quad (5.45)$$

Для оценки функции g проинтегрируем (5.45) по $d^3 u$. При этом главный член, содержащий Y , выпадает в силу тождества (5.2). Поэтому

$$\int g d^3 u \sim \frac{\int I d^3 u}{qV_0}, \quad g \sim \frac{I}{qV_0}. \quad (5.46)$$

Если подставить величину такого порядка в (5.45), то в левой его части возникает большой член $\sim \frac{v}{qV_0} I$, так что левая часть уравнения оказывается значительно больше, чем правая. Следовательно, для того чтобы уравнение имело решение, функция $Y[g]$ должна тождественно обратиться в нуль. Поэтому надо искать решение в виде

$$g = \frac{N_q}{N_0} f_{0i}. \quad (5.47)$$

После этого $Y[g]$ исчезает, так как $Y[f_{0i}] \equiv 0$. Коэффициент при f_{0i} в (5.47) сразу подобран таким образом, чтобы выполнялось соотношение $N_q = \int g d^3u$, которое в рассматриваемом случае следует из (5.16) и (5.28). Подставив (5.47) в (5.45) и проинтегрировав по d^3u , получаем

$$N_q = \frac{\int I(u) d^3u}{-iqV_0 + v_i^{(2)} \frac{q_{\perp}^2 \kappa T}{M_i \Omega^2}}, \quad (5.48)$$

где

$$v_i^{(2)} = -\frac{M_i}{2\kappa T N_0} \int d^3u u_{\perp} Y[u'_{\perp} f_{0i}(u')]. \quad (5.49)$$

Формула (5.49) имеет тот же вид, что и формула (5.33), полученная с помощью эффективного числа соударений. Отметим, что из (5.48) видно, что столкновения действительно существенны при выполнении условия (5.44).

Вычислим теперь $v_i^{(2)}$ отдельно для соударений ионов с нейтральными ($v_{in}^{(2)}$) и заряженными ($v_{ie}^{(2)}$) частицами. Подставляя в (5.49) интеграл столкновений Y , определяемый формулой (1.31), находим, что

$$v_i^{(2)} = v_{in}^{(2)} = -\frac{M_i}{2\kappa T N_0} \times \\ \times \int W [u'_{\perp} f_{0i}(u) f_{0n}(u') - (u_{\perp} u_{1\perp}) f_{0i}(u_1) f_{0n}(u'_1)] \times \\ \times d^3u d^3u' d^3u_1 d^3u'_1. \quad (5.50)$$

Несколько сложнее ситуация в той области, где главную роль играют столкновения заряженных частиц. Интеграл столкновений ионов с ионами удовлетворяет закону сохранения импульса, в силу которого

$$\int p Y_{ii} d^3u = \int \frac{u}{M_i} Y_{ii} d^3u = 0. \quad (5.51)$$

Поэтому Y_{ii} выпадает из (5.50) и под Y в этой формуле следует понимать только интеграл столкновений Y_{ie} ионов с электронами. После линеаризации Y_{ie} имеет вид

$$Y = -\frac{1}{M_i} \sum_k \frac{\partial j_k}{\partial u_k}, \quad (5.52)$$

где

$$j_k = \sum_l \frac{\pi e^4 \Lambda}{M_i} \left[\frac{\partial f_q}{\partial u_l} + \frac{M_i u_l f_q}{\kappa T} \right] B_{lk}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_{lk} &= \int f_{0e}(u') \frac{\omega^2 \delta_{lk} - \omega_l \omega_k}{\omega^3} d^3u' \approx \\ &\approx \int f_{0e}(u') \frac{u'^2 \delta_{lk} - u'_l u'_k}{u'^3} d^3u' = \\ &= \frac{2}{3} \delta_{lk} \int f_{0e} \frac{d^3u}{u} = \frac{4}{3} N_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi\kappa T}} \delta_{lk}, \end{aligned}$$

если учесть, что $w = u - u' \approx -u'$, так как скорость электронов много больше скорости ионов. Подставляя (5.52) в (5.49), получаем

$$v^2 = v_{ie}^{(2)} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2\pi e^4 \Lambda}}{\sqrt{M_i} (\kappa T)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{M_i}} N_0. \quad (5.53)$$

Это выражение по порядку величины в $\sqrt{m/M_i}$ раз меньше, чем эффективное число соударений ν . Таким образом, в то время как при больших $\frac{q_{\perp}}{\Omega} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}}$ формула (5.6) дает преувеличенное значение N_q при столкновениях заряженных частиц, в области $\frac{q_{\perp}}{\Omega} \sqrt{\frac{\kappa T}{M_i}} \ll 1$ формула (5.6) дает преуменьшенное значение N_q .

§ 22. Возмущения концентрации электронов и ионов в диффузионном приближении (нижняя ионосфера)

Движение тела в нижних слоях ионосферы происходит в условиях, когда длина свободного пробега уже не так велика. Поэтому может представлять интерес вычисление возмущений на расстояниях от тела, значительно больших длины свободного пробега. Этот вопрос представляет особый интерес для задачи о рассеянии радиоволн на «следе» тела. В § 19 уже видно было, что влиянием столкновений на компоненту Фурье электронной плотности N_q , через которую и вычисляется эффективное сечение рассеяния, можно пренебречь, если (см. (5.7)) $qV_0 \gg v$, где v — число соударений ионов. Между тем рассеяние радиоволн возрастает с уменьшением q : В нижней же ионосфере вполне реален случай, когда выполняются обратные неравенства:

$$q \sqrt{\frac{2\kappa T}{M_i}} \ll v_{in}, \quad \text{т.е. } \lambda \gg 2\pi l_i, \quad qV_0 \ll v_{in}, \quad (5.54)$$

который и рассмотрен в настоящем параграфе*).

Для расчета возмущений при выполнении условий (5.54) мы могли бы, естественно, воспользоваться уже полученным ранее решением кинетического уравнения с эффективным интегралом соударений (5.1). В этом, однако, нет надобности. Действительно, неравенства (5.54) выражают собой тот факт, что характерное расстояние $1/q$, на котором изменяется концентрация частиц, велико по сравнению с длиной пробега. Но это как раз и есть условие применимости макроскопической теории. Поэтому можно решать эту задачу с помощью макроскопических уравнений диффузии электронов и ионов**). При этом, поскольку возмущения электронной и ионной концентрации на больших расстояниях от тела малы, эти уравнения, естественно, можно линеаризовать.

*) Предполагается, что главную роль играют соударения электронов и ионов с нейтральными частицами.

***) Так как на движение нейтральных частиц не влияет магнитное поле, их концентрация выравнивается гораздо быстрее, чем концентрации электронов и ионов, и движением нейтральных частиц можно пренебречь.

Уравнение стационарной диффузии для ионов имеет вид

$$\operatorname{div} j^i = \tilde{I} \delta(r), \quad (5.55)$$

где j^i — плотность потока ионов, \tilde{I} — взятое с обратным знаком полное число ионов, поглощающихся телом в единицу времени. Дельта-функция $\delta(r)$ в правой части (5.55) выражает собой тот факт, что ионы поглощаются только в точке, где находится тело. Величина \tilde{I} связана с интегралом столкновений ионов с телом $I(v)$ очевидным соотношением

$$\tilde{I} = \int I(v) d^3v. \quad (5.56)$$

Поэтому если, как обычно, считать, что $I(v) = -\pi R_0^2 V_0 f_{0i}$, то

$$\tilde{I} = -\pi R_0^2 N_0 V_0. \quad (5.57)$$

Плотность потока ионов j^i в диффузионном приближении может зависеть только от первых производных концентрации ионов по координатам и от компонент напряженности электрического поля. Кроме того, как уже говорилось, мы должны линеаризовать уравнение. Поэтому все эти величины должны входить в j^i линейно и общее выражение для j^i , обладающее такими свойствами, имеет вид

$$j_m^i = -N_i V_{0m} - \sum_k \left(D_{mk}^i \frac{\partial N_i}{\partial x_k} - F_{mk}^i e E_k N_0 \right), \quad (5.58)$$

где D_{mk}^i — тензор коэффициентов диффузии иона в магнитном поле, F_{mk}^i — тензор подвижности ионов и $E = -\operatorname{grad} \varphi$ — напряженность электрического поля. Первый член (5.58) описывает движение всех ионов, как целого, относительно тела. Переходя теперь в (5.55) и (5.58) к компонентам Фурье по координатам, получаем

$$iqj_q^i = \tilde{I},$$

где, как всегда,

$$j_q^i = \int e^{-iqr} j(r) d^3r \quad (5.59)$$

и

$$j_{qm}^i = -N_{qi}V_{0m} - i \sum_k (D_{mk}^i q_k N_{qi} + F_{mk}^i q_k e \varphi_q N_0). \quad (5.60)$$

Отметим теперь, что тензоры D_{mk}^i и F_{mk}^i , как известно, не являются независимыми. Между ними существует связь, называемая соотношением Эйнштейна. Это соотношение определяется требованием, чтобы поток ионов в неподвижной системе координат обращался в нуль в состоянии равновесия, т. е. когда N_{qi} и φ_q связаны формулой распределения Больцмана

$$N_{qi} = -\frac{eN_0}{\kappa T} \varphi_q. \quad (5.61)$$

Если подставить (5.61) в (5.60) и приравнять нулю, в силу сказанного выше, последние два члена в (5.60), то

$$\sum_k F_{mk} q_k = \sum_k \kappa T D_{mk}^i q_k. \quad (5.62)$$

В итоге, используя (5.62), (5.60) и (5.59), находим следующее уравнение для N_{qi} :

$$\left[-iqV_0N_{qi} + \left(N_{qi} + \frac{eN_0}{\kappa T} \varphi_q \right) \sum_{m,k} q_m q_k D_{mk}^i \right] = \tilde{I}. \quad (5.63)$$

Соответствующее уравнение для N_{qe} , естественно, отличается от (5.63) только знаком заряда и заменой D_{mk}^i на D_{mk}^e . Источник же \tilde{I} в правой части остается тем же, так как число электронов, поглощаемых телом, в стационарном случае равно числу поглощаемых ионов. Таким образом,

$$\left[-iqV_0N_{qe} + \left(N_{qe} - \frac{eN_0}{\kappa T} \varphi_q \right) \sum_{m,k} q_m q_k D_{mk}^e \right] = \tilde{I}. \quad (5.64)$$

К уравнениям (5.62) и (5.63) необходимо еще добавить уравнение Пуассона для потенциала. Однако, как мы неоднократно отмечали, когда $Dq \ll 1$, из уравнения Пуассона следует, что $\delta N_i = \delta N_e$ и

$$N_{qi} = N_{qe} = N_q. \quad (5.65)$$

Поэтому исключая φ_q из уравнений (5.63), (5.64), находим, что

$$N_q = \frac{\tilde{I}}{-iqV_0 + D_a q^2}, \quad (5.66)$$

где D_a определяется формулой

$$\frac{1}{D_a} = \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{\sum_{m,k} D_{mk}^i q_m q_k} + \frac{1}{\sum_{m,k} D_{mk}^e q_m q_k} \right). \quad (5.67)$$

Коэффициент D_a , зависящий от направления q относительно магнитного поля, естественно назвать коэффициентом амбиполярной диффузии ионов и электронов в магнитном поле*).

Из соображений симметрии очевидно, что квадратичные формы $\sum_{m,k} D_{mk}^i q_m q_k$ и $\sum_{m,k} D_{mk}^e q_m q_k$ содержат компоненты q лишь в комбинациях q_{\parallel}^2 и q_{\perp}^2 . Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m,k} D_{mk}^i q_m q_k &= D_{\parallel}^i q_{\parallel}^2 + D_{\perp}^i q_{\perp}^2 = q^2 (D_{\parallel}^i \sin^2 \vartheta_1 + D_{\perp}^i \cos^2 \vartheta_1), \\ \sum_{m,k} D_{mk}^e q_m q_k &= D_{\parallel}^e q_{\parallel}^2 + D_{\perp}^e q_{\perp}^2 = q^2 (D_{\parallel}^e \sin^2 \vartheta_1 + D_{\perp}^e \cos^2 \vartheta_1), \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

где D_{\parallel}^i и D_{\perp}^e — коэффициенты продольной диффузии ионов и электронов, D_{\perp}^i и D_{\parallel}^e — коэффициенты поперечной диффузии, а ϑ_1 — угол между q и плоскостью, перпендикулярной к магнитному полю. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_a(\vartheta_1)} &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D_{\parallel}^i \sin^2 \vartheta_1 + D_{\perp}^i \cos^2 \vartheta_1} + \frac{1}{D_{\parallel}^e \sin^2 \vartheta_1 + D_{\perp}^e \cos^2 \vartheta_1} \right). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Если магнитное поле отсутствует, то $D_{\parallel}^i = D_{\perp}^i = D^i$, $D_{\parallel}^e = D_{\perp}^e = D^e$ и $D^i \ll D^e$, так что $D_a \approx 2D^i$. Подставляя это

*) Вопрос о совместной диффузии электронов и ионов в магнитном поле впервые строго рассматривался в [34].

равенство в (5.66), получаем

$$N_q = \frac{\tilde{I}}{-iqV_0 + 2D^i q^2}.$$

Эта формула совпадает, как это и должно быть, с формулой (5.14), полученной из кинетического уравнения.

Коэффициенты D_{\parallel} и D_{\perp} можно по порядку величины выразить через эффективные числа соударений электронов и ионов с нейтральными частицами [34], т. е.

$$\left. \begin{aligned} D_{\parallel}^i &\approx \frac{\kappa T}{M_i v_{in}}, & D_{\perp}^i &\approx \frac{\kappa T}{M_i v_{in} [1 + (\Omega/v_{in})^2]}, \\ D_{\parallel}^e &\approx \frac{\kappa T}{m v_{en}}, & D_{\perp}^e &\approx \frac{\kappa T}{m v_{en} [1 + (\omega_H/v_{en})^2]}. \end{aligned} \right\} \quad (5.70)$$

Отсюда видно, что между этими коэффициентами существует неравенство

$$\frac{D_{\parallel}^i}{D_{\parallel}^e} \sim \sqrt{\frac{m}{M_i}} \ll 1, \quad \frac{D_{\perp}^i}{D_{\parallel}^e} \ll 1. \quad (5.71)$$

Формулы (5.66) и (5.69) решают задачу о вычислении компонент Фурье возмущений концентраций ионов и электронов. Определим теперь эти возмущения в координатном пространстве. Для этого произведем обратное преобразование Фурье

$$\delta N(r) = \int N_q e^{iqr} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{\tilde{I}}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{iqr} d^3q}{-iqV_0 + D_a(\vartheta_1) q^2}. \quad (5.72)$$

Для вычисления интеграла по d^3q введем систему координат (x, y, z) с осью z вдоль V_0 и осью y — перпендикулярно к плоскости V_0, H_0 . Тогда

$$qV_0 = q_z V_0$$

и

$$\sin \vartheta_1 = \frac{q_z \cos \alpha + q_x \sin \alpha}{q},$$

где α — угол между V_0 и H_0 . Поскольку след сильно вытянут вдоль оси z , заранее ясно, что в интеграле (5.72) существенны малые q_z . Поэтому под интегралом

МОЖНО ПОЛОЖИТЬ

$$\left. \begin{aligned} q^2 &\approx q_x^2 + q_y^2, \\ \sin \vartheta_1 &\approx \frac{q_x}{q} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5.73)$$

После этого интегрирования по q_z сводится к взятию вычета в точке

$$q_z = -i \frac{D_a(\vartheta_1) q^2}{V_0},$$

так что

$$\delta N(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{I}}{V_0} \int \exp \left[-z \frac{D_a(\vartheta_1)}{V_0} (q_x^2 + q_y^2) + i(q_x x + q_y y) \right] dq_x dq_y. \quad (5.74)$$

Вычислим интеграл (5.74) в двух случаях, когда тело движется точно по полю и не слишком близко к направлению магнитного поля. Пусть сначала

$$\sin^2 \alpha \gg \frac{D_{\perp}^i}{D_{\parallel}^e},$$

т. е. тело движется не точно по направлению H_0 , тогда из (5.73) следует, что

$$\vartheta_1^2 \sim \alpha^2 \gg \frac{D_{\perp}^e}{D_{\parallel}^i}. \quad (5.75)$$

При условии (5.75) из неравенства (5.71) видно, что в (5.69) можно пренебречь членом, содержащим коэффициенты диффузии электронов. Поэтому

$$\begin{aligned} q^2 D_a &= q^2 (D_{\parallel}^i \sin^2 \vartheta_1 + D_{\perp}^i \cos^2 \vartheta_1) = \\ &= (D_{\parallel}^i \sin^2 \alpha + D_{\perp}^i \cos^2 \alpha) q_x^2 + D_{\perp}^i q_y^2. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Подставляя (5.76) в (5.74) и вычисляя интегралы по dq_x и dq_y по формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 + it} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-1/4\alpha},$$

имеем окончательно

$$\delta N(r) = \frac{\tilde{\gamma}}{8\pi z} \frac{\exp \left[-\frac{V_0}{8z} \left(\frac{x^2}{D_{\parallel}^i \sin^2 \alpha + D_{\perp}^i \cos^2 \alpha} + \frac{y^2}{D_{\perp}^i} \right) \right]}{\sqrt{D_{\perp}^i (D_{\parallel}^i \sin^2 \alpha + D_{\perp}^i \cos^2 \alpha)}}. \quad (5.77)$$

Из формулы (5.77) следует, что благодаря столкновениям, расплывание следа сзади тела замедляется. Это видно уже из того, что возмущения концентраций электронов и ионов убывают с ростом расстояния от тела на оси z пропорционально $1/z$ как при наличии магнитного поля, так и в его отсутствие (при $D_{\parallel} = D_{\perp}$), в то время как без столкновений в отсутствие магнитного поля возмущения концентраций убывали гораздо быстрее, а именно, как $1/z^2$. Поверхности постоянной концентрации имеют по-прежнему форму лепестка, сильно вытянутого в направлении движения тела (ось z) и сплюснутого в направлении, ортогональном к плоскости $V_0 H_0$ (ось y). Сечения лепестка в плоскости xy — эллипсоиды, малая полуось которых направлена по оси y , большая — по оси z .

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = 0$ или, точнее говоря, $\alpha^2 \ll \frac{D_{\perp}^i}{D_{\parallel}^e}$ и тело движется строго по направлению магнитного поля. Если $\alpha = 0$, то $\vartheta_1 = 0$ (см. (5.73)) и с учетом (5.71) имеем, что

$$q^2 D_a \approx 2(q_x^2 + q_y^2) \frac{D_{\perp}^i D_{\perp}^e}{D_{\perp}^i + D_{\perp}^e}.$$

Подставляя последнее равенство в (5.74), находим

$$\delta N(r) = \frac{\tilde{\gamma}}{8\pi z} \frac{D_{\perp}^i + D_{\perp}^e}{D_{\perp}^i D_{\perp}^e} \exp \left[-\frac{1}{8} \frac{(x^2 + y^2) (D_{\perp}^i + D_{\perp}^e) V_0}{z D_{\perp}^i D_{\perp}^e} \right]. \quad (5.78)$$

Если число соударений электронов достаточно мало, так что

$$v_{en} \ll \omega_H, \quad (5.79)$$

то, как видно из (5.70),

$$D_{\perp}^e \ll D_{\perp}^i$$

и, следовательно,

$$D_a = \frac{2D_{\perp}^i D_{\perp}^e}{D_{\perp}^i + D_{\perp}^e} \approx 2D_{\perp}^e.$$

В этом случае (5.78) приобретает вид

$$\delta N(r) = \frac{\tilde{I}}{8\pi z D_{\perp}^e} \exp \left[-\frac{1}{8} \frac{(x^2 + y^2) V_0}{z D_{\perp}^e} \right]. \quad (5.80)$$

В эту формулу, как мы видим, входит только коэффициент поперечной диффузии электронов. В формулу же (5.77) входят лишь коэффициенты диффузии ионов.

Из формул (5.78), (5.80) следует, что при $\alpha = 0$ след еще сильнее вытягивается в направлении движения тела. Действительно, формула (5.80) приводит к еще большим значениям δN , чем (5.77), поскольку (5.79) содержит малую величину D_{\perp}^e в знаменателе. Это связано с тем, что частицам, заполняющим разреженное пространство за телом, приходится теперь двигаться поперек магнитного поля, а такое движение затруднено. Кроме того, сама скорость движения частиц поперек магнитного поля в случае $\alpha = 0$ сильно уменьшается в сравнении со скоростью движения частиц поперек магнитного поля в случае $\alpha \neq 0$. В то время как в случае $\alpha \neq 0$ частицы движутся со скоростью поперечной диффузии ионов, в случае $\alpha = 0$ при условии (5.79) они движутся со скоростью поперечной диффузии электронов, т. е. приблизительно в $\sqrt{M_i/m}$ раз медленнее (см. (5.70)). Благодаря столь медленному заполнению частицами разреженной зоны размеры следа при продольном движении тела в нижней ионосфере чрезвычайно велики. Например, на высоте 100 км $v_{en} \approx 10^5$, $T \approx 250^\circ$, $\omega_H \approx 10^7$. В этих условиях возмущение концентрации позади тела размером $R_0 \sim 1$ м достигает 1% от N_0 на расстоянии $z = 10^2 m \omega_H^2 \pi R_0^2 V_0 / 8 \kappa T v_{en} \sim 20$ км и 0,1% от N_0 — на расстоянии $z \sim 200$ км от тела.

Исключив из уравнений (5.63)–(5.65) N_q , можно найти φ_q , а совершив обратное преобразование Фурье — определить $\varphi(r)$. Мы не будем производить этих вычислений. Отметим лишь, что при $\alpha = 0$, т. е. при движении вдоль поля, заряд следа оказывается положительным, в то время как обычно он отрицателен. Это связано с тем, что при диффузии поперек поля более подвижными частицами являются ионы, которые в этом случае первыми заполняют след и «тянут» за собой электроны.

В настоящей главе мы рассмотрели лишь влияние столкновений на распределение частиц на больших расстояниях от тела. Как уже говорилось во введении, столкновения важны также при определении функции распределения частиц, совершающих финитное движение около тела. Этот вопрос будет рассмотрен в гл. VIII.

ГЛАВА VI

ВОЗМУЩЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 23. Расчет возмущения магнитного поля

В предыдущих главах мы ставили своей целью рассчитать возмущения концентраций заряженных частиц и связанного с этими возмущениями электрического поля. При этом магнитное поле считалось равным магнитному полю Земли H_0 . Однако при движении тела в плазме возникает движущийся пространственный заряд. Движение зарядов создает электрический ток, что приводит к появлению дополнительного, связанного с этим током магнитного поля, т. е. к возмущению магнитного поля. В настоящей главе мы исследуем это возмущение. Такое исследование представляет интерес с различных точек зрения. Во-первых, на спутниках и ракетах устанавливаются чувствительные приборы для измерения магнитного поля. Возмущения поля могут в принципе исказить показания этих приборов. Поэтому важно иметь представление о возможной величине этих искажений [68]. Во-вторых, добавочное магнитное поле может в свою очередь повлиять на движение ионов и электронов, что приводит к поправкам в формулах возмущений концентраций частиц и их также необходимо оценить. Кроме того, точное исследование структуры магнитного поля вокруг тела может служить методом изучения возмущенной зоны.

Для вычисления возмущения магнитного поля, как и для решения всех рассмотренных нами ранее вопросов, необходимо пользоваться кинетической теорией. Работы, в которых эти возмущения вычисляются на основе уравнений магнитной гидродинамики, имеют для случая тела, движущегося в плазме, лишь методическое

значение. В других случаях, разумеется, применение магнитной гидродинамики может быть вполне оправдано. Мы не будем поэтому подробно обсуждать эти работы, упомянем лишь сравнительно недавние работы Рейтца и Фолди [53] и Дормана и Михайлова [54]. В них рассматривалось движение проводящего шара в проводящей жидкости, находящейся в магнитном поле. При этом в работе [53] вычислялись возмущения магнитного поля для случая, когда шар движется в направлении магнитного поля, а в [54] — для произвольного направления движения. Движение жидкости предполагалось потенциальным, а возмущения магнитного поля — малыми и не влияющими на это движение. В последней работе рассмотрен также пограничный слой вблизи поверхности тела. Возмущения магнитного поля H' при движении тела вдоль поля имеют вид

$$H'_r = \frac{3\pi\hat{\sigma}V_0R_0}{c^2} \left(\frac{R_0^4}{5r^4} - \frac{R_0^2}{3r^2} \right) (3 \cos \vartheta - 1),$$

$$H'_\vartheta = \frac{3\pi\hat{\sigma}V_0R_0}{5c^2} \frac{R_0^4}{r^4} \sin 2\vartheta,$$

где $\hat{\sigma}$ — проводимость жидкости, а возмущения записаны в сферической системе координат с осью вдоль направления движения. Мы видим, что на больших расстояниях от тела возмущения убывают по закону $1/r^2$. Эта формула не годится, однако, для очень больших расстояний от тела, так как в этой области необходимо учитывать влияние H' на движение жидкости. Ладфорд и Мюррей [59] показали, что асимптотический закон убывания магнитного поля с расстоянием имеет вид

$$H'_r \sim H'_\vartheta \sim \exp \left[- \frac{2\pi\hat{\sigma}V_0R_0}{c^2} (1 - \cos \vartheta) \right].$$

После этих предварительных замечаний переходим к вычислению возмущений магнитного поля в окрестности движущегося тела.

В системе координат, связанной с телом, плотность тока, создаваемого движением электронов и ионов, выражается через функцию распределения следующим

образом:

$$\hat{j} = e \int v [f_i(v) - f_e(v)] d^3v. \quad (6.1)$$

При этом, так как вся картина в этой системе координат стационарна, \hat{j} удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\operatorname{div} \hat{j} = 0. \quad (6.2)$$

Напряженность возникающего дополнительного магнитного поля H' определяется через \hat{j} с помощью уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} H' = \frac{4\pi}{c} \hat{j}. \quad (6.3)$$

Применяя к обеим частям этого уравнения операцию rot и учитывая, что $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$, приводим (6.3) к более удобному виду

$$\Delta H' = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \hat{j}. \quad (6.4)$$

Как и при расчете функции распределения ионов с учетом электрического поля, при вычислении возмущений магнитного поля оказывается возможным получить замкнутые выражения лишь для компонент Фурье этих возмущений. Расчет H' в координатном пространстве требует численного интегрирования, однако уже сами по себе формулы для компонент Фурье H' позволят сделать определенные заключения о величине и характере возмущений.

Вводя компоненты Фурье H' и \hat{j} в виде

$$H_q = \int e^{-iqr} H' d^3r, \quad \hat{j}_q = \int e^{-iqr} \hat{j} d^3r,$$

имеем вместо (6.1)

$$\hat{j}_q = e \int v [f_{qi}(v) - f_{qe}(v)] d^3v. \quad (6.5)$$

Из (6.4) следует, что

$$H_q = i \frac{4\pi}{cq^2} [q\hat{j}_q]. \quad (6.6)$$

Вычислим прежде всего H_q для случая движения тела в плазме, когда внешнее магнитное поле отсутствует. Для этого определим сначала фурье-компоненты плотностей тока ионов и электронов.

Для плотности тока ионов имеем

$$\begin{aligned} \hat{j}_{qi} &= e \int v f_{qi} d^3v = e \int u f_{qi} d^3v - e V_0 \int f_{qi} d^3v = \\ &= e \int u f_{qi} d^3u - e V_0 N_{qi}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Интеграл $\int u f_{qi} d^3u$ легко вычислить, если вспомнить, что f_{qi} (см. (4.40)) содержит u лишь в комбинации qu . Поэтому ясно, что $\int u f_{qi} d^3u$ есть вектор, направленный по q , так что

$$\left. \begin{aligned} \int u f_{qi} d^3u &= bq, \\ \hat{j}_{qi} &= e(bq - V_0 N_{qi}), \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

где b — некоторый коэффициент. Коэффициент b возможно найти без сложных вычислений из уравнения непрерывности $\text{div } \hat{j}_i = e \tilde{I} \delta(r)$. Здесь $(-\tilde{I})$ — полное число ионов, поглощаемых телом в единицу времени (см. (5.56)):

$$\tilde{I} = \int I(u) d^3u \approx -\pi R_0^2 V_0 N_0.$$

В компонентах Фурье уравнение непрерывности имеет вид

$$q \hat{j}_{qi} = -ie \tilde{I}.$$

Используя (6.8), имеем

$$q \hat{j}_{qi} = e(bq^2 - N_{qi} V_0 q) = -ie \tilde{I},$$

следовательно,

$$b = \frac{V_0 q}{q^2} N_{qi} - \frac{i \tilde{I}}{q^2}.$$

Таким образом,

$$\hat{j}_{qi} = e N_{qi} \left[\frac{(V_0 q) q}{q^2} - V_0 \right] - ie \tilde{I} \frac{q}{q^2} = e N_{qi} [(l V_0) l - V_0] - \frac{ie \tilde{I} l}{q}, \quad (6.9)$$

где $l = q/q$ — единичный вектор в направлении q . Аналогичным образом находим

$$\hat{j}_{qe} = -eN_{qe} [(lV_0)l - V_0] + ie\tilde{I} \frac{l}{q}.$$

Таким образом, окончательно

$$\hat{j}_q = e [(lV_0)l - V_0] (N_{qi} - N_{qe}). \quad (6.10)$$

Отметим, что в этом случае ток \hat{j}_q пропорционален разности $(N_{qi} - N_{qe})$, которая, как показано в § 14, является малой величиной.

Используя теперь уравнение Пуассона

$$-q^2\varphi_q = -4\pi e(N_{qi} - N_{qe}) \quad (6.11)$$

и подставляя (6.11) в (6.10), получаем

$$\hat{j}_q = \frac{1}{4\pi} [(V_0q)q - V_0q^2] \varphi_q. \quad (6.12)$$

Далее, из (6.12) и (6.6) следует, что

$$H_q = -\frac{i}{c} [qV_0] \varphi_q = -\frac{1}{c} [V_0E_q], \quad (6.13)$$

где E_q — компонента Фурье напряженности электрического поля. Мы видим, что, когда отсутствует внешнее магнитное поле,

$$H' = -\frac{1}{c} [V_0E]. \quad (6.14)$$

Поскольку в рассматриваемом случае на больших расстояниях от тела поле E убывает по закону $1/r^3$, по такому же закону убывает и H' . Отметим, что если по релятивистским формулам преобразования полей совершить переход к неподвижной системе координат, то из (6.14) следует, что в ней $H' = 0$.

Перейдем теперь к движению во внешнем магнитном поле. Здесь имеется много различных случаев в зависимости от соотношения компонент q с дебаевским радиусом, размерами тела и ларморовскими радиусами ионов и электронов. Мы ограничимся лишь практически интересным случаем, когда $1/q$ велико по сравнению с дебаевским радиусом, с ларморовским радиусом электронов и

размерами тела. В соответствии с этим примем, что

$$q \ll D^{-1}, \quad q_{He}^{-1}, \quad R_0^{-1}, \quad (6.15)$$

$$q V_0 \ll \omega_H. \quad (6.16)$$

Отметим, что при вычислении возмущений в координатном пространстве r по компонентам Фурье этих возмущений в интеграле обратного преобразования Фурье обычно существенны значения $q \sim 1/r$. В этом смысле получаемые ниже при условиях (6.15), (6.16), т. е. при малых q , формулы описывают возмущения магнитного поля на больших расстояниях от тела.

При условиях (6.15), (6.16) выражение для плотности тока, создаваемого электронами, можно получить почти без вычислений. Действительно, как показано в гл. V, функцию распределения электронов можно усреднить по направлениям вектора u_{\perp} . Поэтому $f_{qe} \approx f_{qe}(u_{\parallel}, u_{\perp})$. Это означает, в частности, что интеграл $\int u f_{qe} d^3u$ направлен по внешнему магнитному полю

$$\int u f_{qe} d^3u = b_1 l_1,$$

где $l_1 = H_0/H_0$ — единичный вектор по направлению внешнего магнитного поля.

Таким образом,

$$\hat{j}_{qe} = -e \int (u - V_0) f_{qe} d^3u = -e b_1 l_1 + e V_0 N_{qe}. \quad (6.17)$$

Коэффициент b_1 снова определяем из условия $q \hat{j}_{qe} = ie \tilde{I}$ или условия

$$-e b_1 (l_1 q) + e (V_0 q) N_{q0} = ie \tilde{I},$$

так что

$$b_1 = \frac{V_0 q}{q_{\parallel}} N_{qe} + \frac{i \tilde{I}}{q_{\parallel}}.$$

Окончательно

$$\hat{j}_{qe} = e \left[V_0 - \frac{l_1 (V_0 q)}{q_{\parallel}} \right] N_{qe} + ie \tilde{I} \frac{l_1}{q_{\parallel}}. \quad (6.18)$$

Формулы для \hat{j}_{qi} , естественно, получаются различными, в зависимости от того, рассматриваются ли

значения $1/q$ большие или малые по сравнению с ларморовским радиусом ионов. Пусть сначала

$$q \gg \varrho_{Ni}, \quad (6.19)$$

где ϱ_{Ni} — ларморовский радиус ионов. При таком условии постоянное магнитное поле мало влияет на движение ионов, и мы можем прямо воспользоваться для \hat{j}_{qi} полученным ранее выражением (6.9). При этом можно положить $N_{qi} = N_{qe} = N_q$, пренебрегая малым отличием концентрации ионов от концентрации электронов. Фурье-компонента полной плотности тока \hat{j}_q поэтому равна

$$\hat{j}_q = \hat{j}_{qi} + \hat{j}_{qe} = e \left(\frac{l}{q} - \frac{l_1}{q_{\parallel}} \right) [(qV_0) N_q - i\tilde{I}]. \quad (6.20)$$

Следовательно,

$$H_q = \frac{i4\pi e}{cq^2} [qV_0 - i\tilde{I}] \frac{[ql_1]}{q_{\parallel}} N_q. \quad (6.21)$$

Мы видим, что H' естественным образом разбивается на два члена: $H' = H'_1 + H'_2$, причем

$$H'_{1q} = i \frac{4\pi e (qV_0)}{cq^2} N_q \frac{[ql_1]}{q_{\parallel}}, \quad H'_{2q} = \frac{4\pi e \tilde{I}}{cq^2} \frac{[ql_1]}{q_{\parallel}}. \quad (6.22)$$

Легко убедиться в том, что оба члена, вообще говоря, одного порядка. Когда тело движется в направлении, близком к направлению внешнего магнитного поля, в (6.22) можно положить $(qV_0)l_1 = q_{\parallel}V_0$. После этого, используя обратное преобразование Фурье, (6.22) переписывается в виде

$$\Delta H'_1 = \frac{4\pi e}{c} [\nabla (\delta N) V_0]. \quad (6.23)$$

Представим теперь уравнение (6.23) в другом виде, введя скалярную функцию координат ψ , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta \psi = -4\pi e \delta N.$$

При этом необходимо подчеркнуть, что ψ , естественно, не есть потенциал электрического поля вокруг тела. В уравнении для потенциала справа стояло бы выражение $(\delta N_i - \delta N_e)$.

Из последней формулы следует, что H' равно

$$H'_1 = \frac{1}{c} [V_0 \nabla \psi].$$

Ясно, что в рассматриваемом случае из-за осевой симметрии δN (а следовательно и ψ) магнитными силовыми линиями являются окружности концентрические вокруг направления V_0 . Если тело движется со скоростью гораздо большей, чем тепловая скорость ионов, выражение для H' можно еще более упростить. Для этого введем вектор $\mathbf{p} = -\nabla\psi$. Вектор \mathbf{p} , очевидно, лежит в плоскости V_0 . Абсолютная величина H' связана с \mathbf{p} равенством

$$H'_1 = \frac{1}{c} V_0 p_{\perp},$$

где p_{\perp} — проекция \mathbf{p} на перпендикулярную к V_0 плоскость. Видно, что вектор \mathbf{p} удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \mathbf{p} = 4\pi e \delta N$. Если, однако, значение V_0 достаточно велико, так что $V_0 \gg \sqrt{\frac{kT}{M}}$, след тела сильно вытянут и производные \mathbf{p} по z малы (z — координата вдоль V_0). В этом случае $\operatorname{div} \mathbf{p}$ можно записать в виде $\nabla_{\rho} p_{\perp} = 4\pi e \delta N$, где ρ — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной к V_0 , а ∇_{ρ} — оператор дифференцирования по этому радиус-вектору. Интегрируя теперь последнее выражение по площади круга радиуса ρ и применяя теорему Гаусса, получаем

$$p_{\perp}(\rho, z) = \frac{4\pi e}{\rho} \int_0^{\rho} \delta N(\rho', z) \rho' d\rho' \quad (6.24)$$

или окончательно

$$H'_1(\rho, z) = \frac{4\pi e V_0 [\rho V_0]}{c \rho} \int_0^{\rho} \delta N(\rho', z) \rho' d\rho'.$$

Используя выражения для $\delta N(\rho, z)$, полученные выше в § 5 и в гл. III, можно теперь вычислить возмущение H' магнитного поля, численно интегрируя (6.24). Легко, однако, показать без специальных вычислений, что значение H' незначительно во всей области действия фор-

мулы (6.24) и достигает в ионосфере лишь нескольких γ ($\gamma \sim 10^{-5}$ эрстед). Действительно, максимальное значение интеграла, входящего в формулу (6.24), соответствует значению $\delta N/N = 1$ и равно $q^2/2$. Поэтому максимально возможное значение возмущения магнитного поля

$$H'_1 \sim \frac{4\pi e V_0 N}{c} \frac{q}{2} \approx 8 \cdot 10^{-14} N q \text{ э.} \quad (6.24a)$$

Вдоль оси, совпадающей с направлением вектора V_0 , значение $H'_1 = 0$. С другой стороны, с увеличением q $\delta N \rightarrow 0$. Поэтому H' имеет максимум в некоторой промежуточной области значений q , где δN максимально. Из данных, приводимых в § 5 и в гл. III видно, что эта область значений q порядка размеров самого тела. Поскольку в ионосфере максимально $N \sim 5 \cdot 10^6$, а размеры спутников порядка 10^2 см, то мы получаем, что $H'_{1 \text{ макс}} \sim 4\gamma$.

Для того чтобы вычислить H'_2 , необходимо знать правило обхода полюса при интегрировании по $q_{||}$. Можно показать, что это правило не имеет универсального вида и зависит от конкретной формы тела. Мы не будем останавливаться на этом вопросе. Окончательный ответ для случая плоской пластинки имеет вид

$$H'_2 = \frac{\pm 2e\pi R_0^2 V_0 N_0 [l_1 r]}{r_1^2}.$$

Знак в этой формуле совпадает со знаком $(l_1 V_0)$. Мы видим, что H'_2 есть поле линейного тока с силой $e\pi R_0^2 V_0$, текущего от тела вдоль магнитного поля H_0 .

Рассмотрим теперь случай самых малых q , когда

$$q \ll q_{\hat{N}i}, \quad q V_0 \ll \Omega. \quad (6.25)$$

Для \hat{j}_{qe} мы по-прежнему можем воспользоваться выражением (6.18). Такое же выражение с заменой $-e$ на e приближенно справедливо при условии (6.25) и для \hat{j}_{qi} . Если мы, однако, возьмем \hat{j}_{qi} в таком приближении, полная плотность тока окажется равной нулю. Это означает, что мы должны вычислить \hat{j}_{qi} с точностью до членов порядка $(q_{\perp} q_{\hat{N}i})$. Для этого воспользуемся тем (см. примечание на стр. 178), что функцию распределения ионов

при условии (6.25) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 f_{qi} &= -f_{oi} \frac{e}{\kappa T} \varphi_q + \exp\left(\frac{iq_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} \sin \beta\right) g_q(u_{\parallel}, u_{\perp}) \approx \\
 &\approx -f_{oi} \frac{e}{\kappa T} \varphi_q + \left(1 + \frac{iq_{\perp} u_{\perp}}{\Omega} \sin \beta\right) g_q(u_{\parallel}, u_{\perp}) = \\
 &= -f_{oi} \frac{e}{\kappa T} \varphi_q + \left(1 + iq_{\perp} \frac{u_{\perp} l_3}{\Omega}\right) g_q(u_{\parallel}, u_{\perp}),
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

где l_3 — единичный вектор, перпендикулярный к H_0 и q_{\perp} . Умножив теперь (6.26) на $e(V_0 + u)$ и интегрируя по d^3u , получаем, что первые его два члена прямо дают \hat{j}_{qe} . Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \hat{j}_{qi} &= -\hat{j}_{qe} + \frac{e}{\Omega} i \int q_{\perp}(u_{\perp} l_3) u_{\perp} g_q(u_{\parallel}, u_{\perp}) d^3u = \\
 &= -\hat{j}_{qe} + il_3 \frac{eq_{\perp}}{2\Omega} \int u_{\perp}^2 g_q(u_{\parallel}, u_{\perp}) d^3u
 \end{aligned}$$

и

$$\hat{j}_q = \hat{j}_{qe} + \hat{j}_{qi} = \frac{il_3 eq_{\perp}}{2\Omega} \int u_{\perp}^2 g_q(u_{\parallel}, u_{\perp}) d^3u. \tag{6.27}$$

Функция $g_q(u_{\parallel}, u_{\perp})$ определяется интегралом столкновений с телом $I(u)$ (см. (5.23)*). Если принять, как обычно, что

$$I(u) = -\pi R_0^2 V_0 f_{oi},$$

то $g_q(u_{\parallel}, u_{\perp})$ будет зависеть от u_{\perp} по закону

$$\exp\left(-\frac{M_i u_{\perp}^2}{2\kappa T}\right).$$

В этом случае (6.27) можно переписать в виде

$$\hat{j}_q = \frac{l_3 i e q_{\perp} \kappa T}{M_i \Omega} \int g_q(u_{\parallel}, u_{\perp}) d^3u. \tag{6.28}$$

Чтобы найти $\int g_q d^3u$, проинтегрируем по d^3u формулу (6.26), опуская при этом малые члены порядка $q_{\perp} \Omega n_i$.

* Отметим здесь, что в этой главе всюду пренебрегается соударениями между частицами, т. е. мы принимаем $Y=0$.

Получаем

$$\int f_{qi} d^3u = N_q = -\frac{eN_0}{\kappa T} \varphi_q + \int g_q(u_{||}, u_{\perp}) d^3u$$

или

$$\int g_q(u_{||}, u_{\perp}) d^3u = N_q + \frac{eN_0}{\kappa T} \varphi_q = \frac{2eN_0}{\kappa T} \varphi_q. \quad (6.29)$$

Мы опускаем здесь индекс «*i*» у N_q , поскольку расчет ведется в приближении $N_{qi} = N_{qe} = N_q$. Подставляя (6.29) в (6.28), окончательно имеем

$$\begin{aligned} \hat{j}_q &= \frac{l_3 i 2e^2 N_0 q_{\perp}}{M_i \Omega} \varphi_q = \\ &= \frac{i}{2\pi D^2} \frac{\kappa T q_{\perp} l_3 \varphi_q}{M_i \Omega} = \frac{\kappa T}{2\pi D^2 M_i \Omega} [E_q l_1]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Используя (6.30), находим, что компоненты Фурье магнитного поля равны

$$H_q = \frac{2\kappa T}{c(Dq)^2 M_i \Omega} [E_q q_{||} - l_1 (q E_q)]. \quad (6.31)$$

Из (6.31) видно, что при удалении от тела напряженность магнитного поля в плоскости $V_0 H_0$ убывает по тому же закону, что и напряженность электрического поля, т. е. как $1/r^2$. Не представляет принципиальных трудностей получить также формулы для компонент Фурье магнитного поля при произвольных значениях q . Однако мы не приводим эти весьма громоздкие формулы, тем более, что для того чтобы получить из них $H'(r)$, т. е. произвести обратное преобразование Фурье, требуются трудоемкие численные расчеты.

§ 24. Влияние возмущений магнитного поля на движение ионов и электронов

До сих пор возмущения магнитного поля были рассчитаны для заданного движения ионов, т. е. пренебрегалось обратным влиянием магнитных возмущений на движение ионов. Разумеется, такой расчет приводит к приближенным результатам. При строгом рассмотрении этой задачи в кинетическое уравнение следует добавить

действующую на единицу заряда добавочную силу вида

$$\frac{1}{c} [vH'] = \frac{1}{c} [u - V_0 H'].$$

Этот член можно, однако, считать малым хотя бы потому, что он сам пропорционален δN ; кроме того, он содержит в знаменателе скорость света. Поэтому в уравнениях нужно оставить лишь его произведение на множитель

$$\frac{\partial f_{0i}}{\partial u} = -\frac{M_i u}{\kappa T} f_{0i} \quad \text{или} \quad \frac{\partial f_{0e}}{\partial u} = -\frac{m u}{\kappa T} f_{0e}.$$

При этом член с векторным произведением $[uH']$ исчезает. Окончательно приходим к тому, что учет обратного влияния возмущений магнитного поля сводится к замене произведения $-iq\varphi_q$ в уравнениях для функций распределения электронов и ионов на

$$-iq\varphi_q - \frac{1}{c} [V_0 H_q]. \quad (6.32)$$

Отсюда видно, что пренебрегать обратным влиянием возмущений магнитного поля можно только в том случае, когда первый член в этой формуле много больше второго. При условии (6.19), как видно из (6.22),

$$H_q \sim \frac{V_0}{cD^2q} \frac{E_q}{q_{\parallel}}$$

и условие, позволяющее пренебрегать влиянием магнитных возмущений, имеет в этой области значений q вид

$$\frac{V_0^2}{c^2 D^2 q q_{\parallel}} \ll 1 \quad \left(\varrho_{He} \ll \frac{1}{q} \ll \varrho_{Hi} \right). \quad (6.33)$$

При выполнении неравенства (6.25) из (6.31) мы получаем, что

$$H_q \sim \frac{\kappa T}{M_i D^2 q \Omega} E_q.$$

В итоге искомое условие имеет в этом случае вид

$$\frac{\kappa T q V_0}{M_i c^2 \Omega (Dq)^2} \ll 1 \quad \left(\frac{1}{q} \gg \varrho_{Hi} \right). \quad (6.34)$$

Можно, однако, показать, что в том приближении, в каком получена формула (6.30), возмущения магнитного поля влияют лишь на распределение тока в плазме и не

влиять на распределение концентраций ионов и электронов. Поэтому поправки к N_q оказываются лишь порядка

$$\frac{\kappa T q \tilde{V}_0}{M_i c^2 \Omega (Dq)^2} \sqrt{\frac{\kappa T q^2}{M_i \Omega^2}}. \quad (6.35)$$

Получение формул, свободных от ограничений (6.33), (6.34), т. е. учитывающих влияние возмущений магнитного поля на движение частиц, связано с довольно сложными вычислениями. Мы проведем эти вычисления лишь для случая (6.19), когда ларморовский радиус ионов много больше $1/q$. Случай произвольных значений q рассмотрен в [66].

Заметим прежде всего, что выражение (6.21) для возмущения магнитного поля справедливо и при учете обратного его влияния на концентрацию зарядов. Это ясно из того, что при выводе указанного выражения использован лишь закон сохранения заряда и самые общие свойства уравнений для функции распределения частиц. С помощью (6.21) силу, действующую на единичный заряд, можно представить в виде

$$F = -i \left(q\varphi_q + f \frac{N_q \kappa T}{N_0 e} \right) - f \frac{(q\kappa T \tilde{I})}{e N_0 (qV_0)}, \quad (6.36)$$

где

$$f = \frac{qV_0}{c^2 (Dq)^2} \frac{[V_0 [q l_1]]}{qq_{||}}. \quad (6.37)$$

Эти соотношения позволяют легко связать N_q с φ_q . Для этого выпишем прежде всего уравнение для функции распределения электронов, усреднив его предварительно по углу β . Мы можем непосредственно получить это уравнение из (4.66), положив $I=0$ и заменив e на $-e$ и $-iq\varphi_q$ на F . Кроме того, мы можем положить $qV_0=0$, так как V_0 много меньше скорости движения электронов. Окончательно уравнение имеет вид

$$iq_{||} u_{||} f_{qe} = -\frac{e}{\kappa T} f_{0e} \overline{uF}. \quad (6.38)$$

Отсюда видно, что

$$N_q = \int f_{qe} d^3u = -\frac{eN_0}{\kappa T} \frac{(l_1 F)}{iq_{||}}$$

и

$$\varphi_q = \frac{\kappa T}{e N_0} \left[1 - \frac{f l_1}{q_{\parallel}} \right] N_q + \frac{i \kappa \tilde{I}}{e N_0 (q V_0)} (f l_1). \quad (6.39)$$

Соотношение (6.39) заменяет для электронов формулу распределения Больцмана, которой мы везде пользовались раньше. Для функции распределения ионов мы имеем теперь уравнение

$$i (q u - q V_0) f_{qi} = \frac{e}{\kappa T} f_{oi} u F + I(u),$$

откуда следует, что

$$N_q = \int \frac{I}{i (q u - q V_0)} d^3 u + \frac{e}{\kappa T} \int \frac{f_{oi}(lu)}{i (q u - q V_0)} d^3 u (l F). \quad (6.40)$$

Решая совместно (6.40), (6.39) и (6.37), получаем окончательно

$$N_q = \frac{\pi R_0^2 N_0}{q} \frac{\left(\frac{M_i V_0^2}{2 \kappa T} \right)^{1/2} Q(a) + \gamma [a Q(a) - i] \left(\frac{q V_0}{q V_0} \right)}{1 + (1 - \gamma) [1 + i a Q(a)]}, \quad (6.41)$$

где

$$\gamma = \frac{[(q V_0) (q_{\perp} V_0) (q_{\perp} q)]}{[(c D q)^2 q^2 q_{\parallel}]}. \quad (6.42)$$

Формула (6.42) переходит в полученную в гл. IV формулу (4.41) при $\gamma \ll 1$. Это условие, как и должно быть, совпадает с условием (6.33).

ГЛАВА VII

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА «СЛЕДЕ» БЫСТРО ДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА

§ 25. Эффективное сечение рассеяния в приближении теории возмущений

Возмущение электронной концентрации приводит к изменению диэлектрической проницаемости плазмы в окрестности тела. Образующий вследствие этого «след» тела — область измененной диэлектрической проницаемости — вызывает рассеяние падающих на тело электромагнитных волн. Разумеется, электромагнитные волны будут рассеиваться и на самом теле, например металлическом шаре. Однако рассеяние на теле описывается обычными формулами теории дифракции и нас здесь не интересует. Для вычисления же рассеяния на следе воспользуемся теорией возмущений (см., например, [33], стр. 486).

Будем предполагать, что частота рассеиваемой волны много больше ларморовской частоты электронов ω_H :

$$\omega \gg \omega_H = \frac{eH_0}{mc}, \quad (7.1)$$

так что диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon(\omega, r)$ дается формулой

$$\varepsilon(\omega, r) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} N(r). \quad (7.2)$$

Воспользуемся, далее, уравнениями Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} E &= i \frac{\omega}{c} H, \\ \operatorname{rot} H &= -i \frac{\omega}{c} D. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Исключая H из (7.3), получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = \frac{\omega^2}{c^2} D, \quad (7.4)$$

где $D = \varepsilon(\omega, r) E$ — вектор электрической индукции.

Представим теперь ε в виде

$$\varepsilon(\omega, r) = \bar{\varepsilon}(\omega) + \delta\varepsilon(\omega, r), \quad (7.5)$$

где $\bar{\varepsilon}(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость невозмущенной плазмы, т. е.

$$\bar{\varepsilon}(\omega) = 1 - \frac{4\pi N_0 e^2}{m\omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2. \quad (7.6)$$

Здесь ω_0 — плазменная частота ионосферы на той высоте, где находится тело. Учитывая, что $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$, и подставляя (7.5) в (7.4), приводим уравнение для D к виду

$$\Delta D + k^2 D = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} D, \quad (7.7)$$

где

$$k^2 = \bar{\varepsilon} \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Электрическое поле E мы представим в виде

$$E = E_1 + E_2, \quad (7.8)$$

где $E_1 = E_0 e^{i(kr - \omega t)}$ — поле падающей волны, E_2 — поле рассеянной волны, k — волновой вектор падающей волны ($|k| = k$). Вектор индукции D мы также запишем в виде

$$D = D_1 + D_2 = \bar{\varepsilon} E_1 + D_2.$$

Приближение теории возмущений состоит в том, что $\delta\varepsilon$, E_2 и D_2 принимаются малыми, что позволяет пренебрегать их произведениями. В силу этого мы имеем

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} D = \delta\varepsilon E \approx \delta\varepsilon E_1. \quad (7.9)$$

Подставляя (7.9) в (7.7), приводим последнее уравнение к виду

$$\Delta D_2 + k^2 D_2 = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} (E_1 \delta\varepsilon). \quad (7.10)$$

Таким образом, D_2 описывается линейным неоднородным уравнением с известной правой частью. Его решение, как известно, имеет вид

$$D_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \{\text{rot rot } \delta\varepsilon(\mathbf{r}') E_1(\mathbf{r}')\} d^3r' = \\ = \frac{1}{4\pi} \text{rot rot} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \delta\varepsilon(\mathbf{r}') E_1(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (7.11)$$

На больших расстояниях от тела, где $kr \gg 1$, можно положить

$$k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx kr - \frac{krr_1}{r} = kr - k'r',$$

где k' — волновой вектор рассеянной волны; на больших расстояниях от тела направление k' совпадает с r . В итоге

$$D_2 = \text{rot rot} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int e^{-ik'r'} E_1(\mathbf{r}') \delta\varepsilon(\mathbf{r}') d^3r' = \\ = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left[k' \left[k' \int e^{-ik'r'} E_1(\mathbf{r}') \delta\varepsilon(\mathbf{r}') d^3r' \right] \right], \quad (7.12)$$

если опустить при дифференцировании члены $\sim 1/r^2$. Из (7.2) видно, что

$$\delta\varepsilon = -\frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \delta N = -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \frac{\delta N}{N_0} \quad (\delta N = N - N_0). \quad (7.13)$$

Естественно, что на больших расстояниях от тела при ($r \rightarrow \infty$)

$$\delta\varepsilon \rightarrow 0, \quad D_2 = \bar{\varepsilon} E_2.$$

Подставляя (7.13) в (7.12), окончательно имеем

$$E_2 = \frac{e^2}{m\omega^2 \bar{\varepsilon}} \frac{e^{ikr}}{r} [k' [k' E_0] N_q], \quad (7.14)$$

где N_q — компонента Фурье возмущения электронной плотности, т. е.

$$N_q = \int \delta N(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r, \quad (7.15)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \quad |\mathbf{q}| = 2k \sin \frac{\psi}{2} =$$

$$= 2 \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \sin \frac{\psi}{2}. \quad (7.16)$$

Здесь ψ — угол рассеяния, т. е. угол между волновыми векторами падающей и рассеянной волны.

Величина $\frac{|E_2|^2}{|E_1|^2} r^2 d\sigma$ определяет, какая доля энергии волны, падающей на единицу площади позади тела, рассеивается в элементе телесного угла $d\sigma$. Эта величина называется дифференциальным эффективным сечением рассеяния $d\sigma$. Таким образом,

$$d\sigma = \frac{|E_2|^2}{|E_1|^2} r^2 d\sigma = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^4 \frac{|N_q|^2}{N_0^2} \sin^2 \psi_1 d\sigma, \quad (7.17)$$

где ψ_1 — угол между E_0 и k' .

Для применимости использованного здесь приближения теории возмущений необходимо, чтобы на тех расстояниях, которые вносят главный вклад в интеграл в формулах (7.11) или (7.15), выполнялось неравенство

$$|E_2| \ll |E_0|. \quad (7.18)$$

Проверка выполнения этого неравенства требует довольно детального исследования выражения (7.11) с конкретной функцией $\delta\epsilon$. В заключение отметим, что в пределах применимости использованного приближения электрические поля, образуемые вследствие рассеяния самим телом и его следом, просто складываются. В общем случае это отнюдь не обязательно.

§ 26. Функция рассеяния

Из формулы (7.17) предыдущего параграфа видно, что эффективное сечение рассеяния электромагнитных волн определяется компонентой Фурье N_q возмущения электронной концентрации. Формулы для N_q , основанные на различных приближениях и справедливые в разных областях значений параметров, получены нами в §§ 8, 13 и др. Все эти формулы, однако, довольно сложны. Поэтому для численного расчета эффективного сечения $d\sigma$ необходимо прибегнуть к численному интегрированию. Такие числовые расчеты удобнее производить на основе наиболее общей формулы, которая дает значение N_q в широкой области изменения q и других параметров. Такой формулой является формула

(5.6), полученная при учете магнитного поля и столкновений. При этом, разумеется, приходится мириться с интерполяционным характером этой формулы, о чем говорилось в конце § 21.

Формула (5.6) была выписана для случая $qR_0 \ll 1$. Чтобы учесть конечность размера тела, необходимо умножить правую часть (5.6) на функцию $G(qR_0, \chi)$, определяемую формулой (2.88). Вычисляя теперь квадрат модуля правой части (5.6) (для этого необходимо отделить действительную и мнимую части в числителе и знаменателе (5.6)), умножая его на $|G|^2$ и подставляя в правую часть (7.17), приводим $d\sigma$ к виду

$$d\sigma = \frac{1}{16} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^4 \frac{R_0^4 V_0^2}{\Omega^2} \sin^2 \psi_1 F_3(\tau, \eta, \zeta, \delta) |G(qR_0, \chi)|^2 d\omega. \quad (7.19)$$

В этой формуле

$$F_3(\tau, \eta, \zeta, \delta) = \frac{F_1^2 + F_2^2}{(2 - 2\eta F_1 - \tau F_2)^2 + (\tau F_1 - 2\eta F_2)^2}, \quad (7.20)$$

$$F_1 = \exp(-\delta) \int_0^\infty \cos(\tau x) \exp(-\eta x - \zeta x^2 + \delta \cos x) dx, \quad (7.21)$$

$$F_2 = \exp(-\delta) \int_0^\infty \sin(\tau x) \exp(-\eta x - \zeta x^2 + \delta \cos x) dx. \quad (7.22)$$

Безразмерные параметры η , τ , ζ , δ выражаются через физические величины соотношениями

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{qV_0}{\Omega} = \frac{qV_0}{\Omega} \cos \chi, & \eta &= \frac{\nu}{\Omega}, & \zeta &= \frac{\kappa T}{2M_i \Omega^2} q_{\parallel}^2, \\ \delta &= \frac{\kappa T}{M_i \Omega^2} q_{\perp}^2, \end{aligned} \quad (7.23)$$

где χ — угол между q и V_0 .

Направление вектора $q = k' - k$, определяющего изменение волнового вектора падающей волны при рассеянии, мы будем задавать с помощью угла ψ_1 , образуемого вектором q с плоскостью, перпендикулярной к H_0 , и угла φ между плоскостями qH_0 и V_0H_0 . Эти углы показаны на рис. 31. Точка S на этом рисунке есть точка излучения, точка E — точка наблюдения, O — точка,

где находится тело. Волновые векторы k и k' направлены соответственно по лучам SO и OE , а вектор q — по биссектрисе угла SOE . Угол ϑ_1 считается положительным, если q и H_0 образуют между собой острый

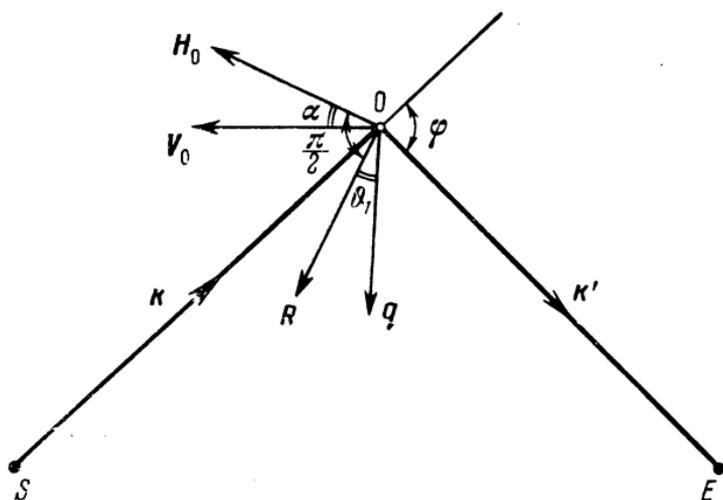


Рис. 31. Схема расположения векторов в пространстве.

угол. Параметры τ , ζ , δ выражаются через углы ϑ_1 , φ и угол α между V_0 и H_0 формулами, непосредственно получаемыми из (7.23), а именно:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{qV_0}{\Omega} (\cos \alpha \sin \vartheta_1 + \sin \alpha \cos \vartheta_1 \cos \varphi), \\ \zeta &= \frac{\kappa T q^2}{2M_i \Omega^2} \sin^2 \vartheta_1, \quad \delta = \frac{\kappa T q^2}{M_i \Omega^2} \cos^2 \vartheta_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Интегралы (7.21) и (7.22) не выражаются через известные специальные функции и их необходимо вычислять численными методами. Аналогичным образом функция $G(qR_0, \cos \chi)$ также не выражается через специальные функции.

Табулирование функции $F_3(\tau, \eta, \zeta, \delta)$, которую мы будем в дальнейшем называть функцией рассеяния, при различных значениях τ , η , ζ , δ позволило выяснить характер ее поведения в зависимости от высоты ионосферы, длины волны, температуры и направления движе-

ния тела. Соответствующие результаты приведены подробно в следующих параграфах. Здесь же целесообразно обсудить некоторые общие свойства F_3 , необходимые для дальнейшего.

Основной особенностью функции $F_3(\tau, \eta, \zeta, \delta)$ является ее осциллирующий характер. Максимумы и минимумы F_3 соответствуют определенным значениям τ . При использованных нами значениях параметров наряду с главным максимумом у F_3 выявились еще 6—8 максимумов и 6—8 минимумов, расположенных при $\alpha = 0$ симметрично относительно главного максимума. Главный максимум F_3 (назовем его также максимумом нулевого порядка (0)) имеет место при

$$\tau = 0. \quad (7.25)$$

Боковые максимумы M и минимумы m (обозначим их соответственно $(\pm 1M)$, $(\pm 2M)$, $(\pm 3M)$, $(\pm 4M)$... и $(\pm 1m)$, $(\pm 2m)$, $(\pm 3m)$ и $(\pm 4m)$...) при $\alpha = 0$ определяются значениями

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\text{макс}} &\approx \pm 1,22, \quad \pm 2,18, \quad \pm 3,15, \quad \pm 4,23, \\ \tau_{\text{мин}} &\approx \pm 0,73, \quad \pm 1,70, \quad \pm 2,91, \quad \pm 3,86. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Значение F_3 в главном максимуме ($\tau = 0$) наибольшее, когда $\alpha = 0$ или $\vartheta_1 = 0$. При других значениях α или ϑ_1 функция F_3 при $\tau = 0$ может быть меньше, чем F_3 в максимуме первого порядка ($\tau = \pm 1,22$). В случае, когда $\alpha = 0$, т. е. скорость тела V_0 и магнитное поле H_0 коллинеарны, значение F_3 при $\tau = 0$, т. е. главный максимум, всегда больше боковых максимумов, значения которых убывают с ростом их номера. Число боковых максимумов зависит существенно от η и ζ , определяющих скорость сходимости интегралов (7.21) и (7.22). Естественно, что решающую роль в сходимости этих интегралов играет значение ζ — коэффициента при квадратичном члене в экспонентах подынтегральных выражений. Укажем для примера, что при $\kappa T q^2 / M_i \Omega^2 \approx 1$ практически исчезает уже максимум третьего порядка ($\tau \approx 3,5$, $\vartheta_1 = 17,5^\circ$ при $\alpha = 0$). Если же $\vartheta_1 = 0$, то в этом случае еще заметны максимумы третьего и четвертого порядков. На рис. 32 приводятся для иллюстрации две кривые $F_3(\tau)$, рассчитанные для $\kappa T q^2 / M_i \Omega^2 = 1$, $\eta \approx 0,06$

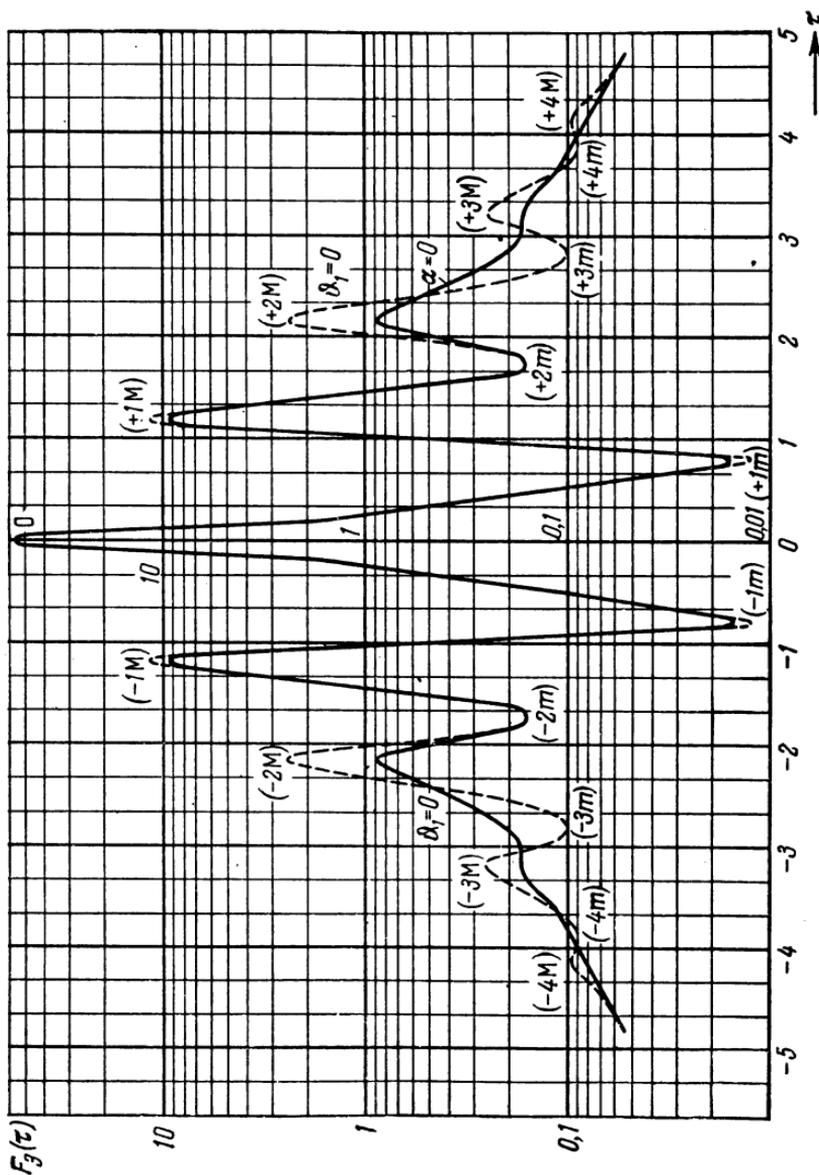


Рис. 32. Ход функции $F_3(\tau)$ для случая $\alpha=0$, $\Phi_1 \neq 0$ и случая $\alpha \neq 0$, $\Phi_1=0$. На рисунках отмечены максимумы и минимумы различного порядка: (0), ($\pm 1m$), ($\pm 2m$), ($\pm 3m$) и т. д.

и $qV_0/\Omega \approx 14$. Более подробно результаты соответствующих расчетов можно найти в таблицах следующего параграфа.

Если $\alpha = 0$, то, как видно из (7.24), значение τ , а следовательно и $F_3(\tau)$, не зависит от φ . На рис. 33

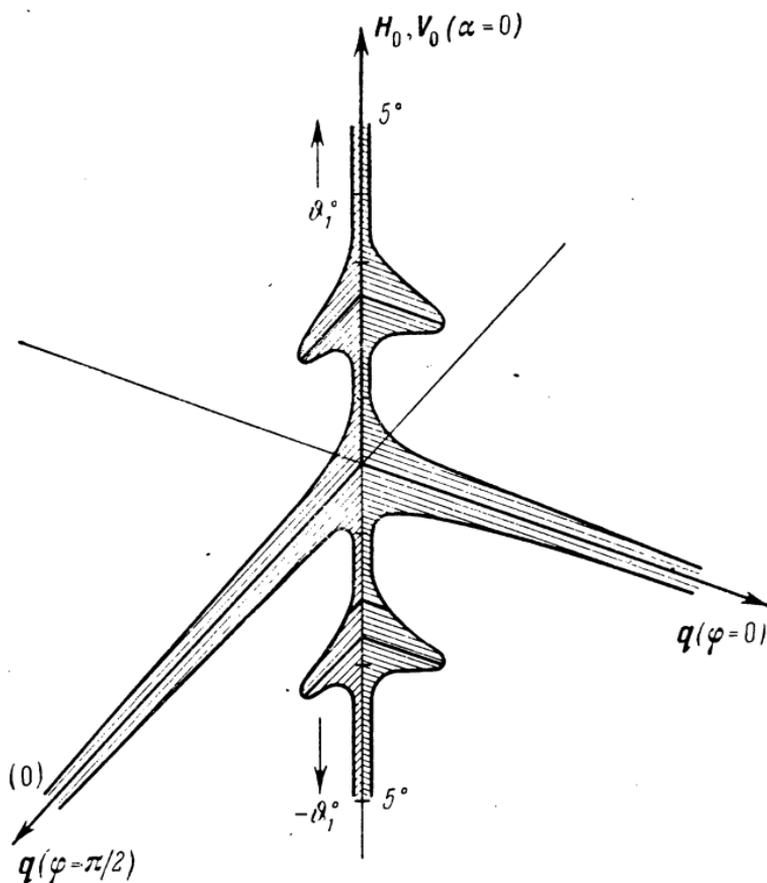
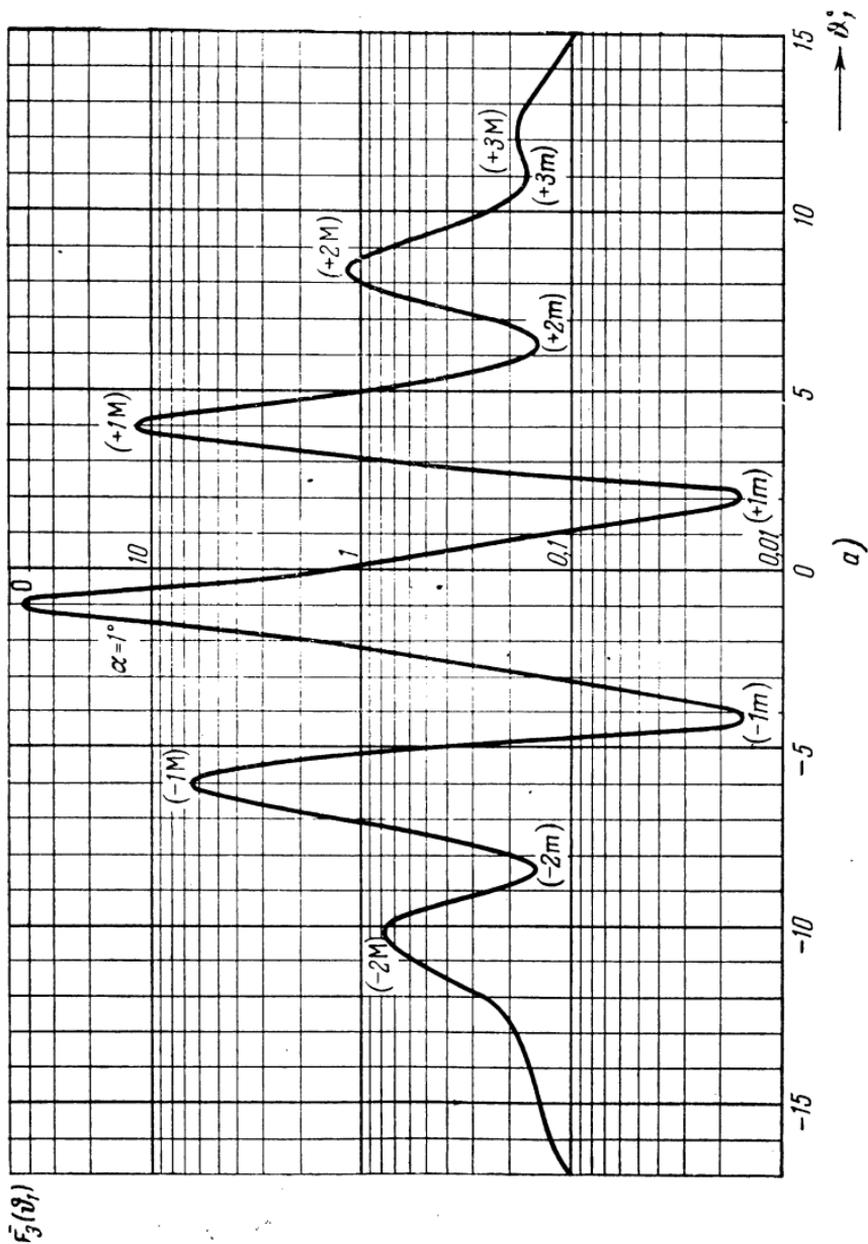


Рис. 33. Поверхность $F_3 = F_3(\vartheta_1, \varphi)$ в цилиндрических координатах при $V_0 \parallel H_0$ ($\alpha = 0$).

поверхность $F_3 = F_3(\vartheta_1, \varphi)$ при $\alpha = 0$ показана в цилиндрических координатах, причем угол ϑ_1 отложен по вертикальной оси, радиус-вектор цилиндрической системы координат пропорционален величине F_3 , а угол φ выбран в качестве азимутального угла. Так как при $\alpha = 0$ F_3 не зависит от φ , поверхность $F_3 = F_3(\vartheta_1, \varphi)$ является



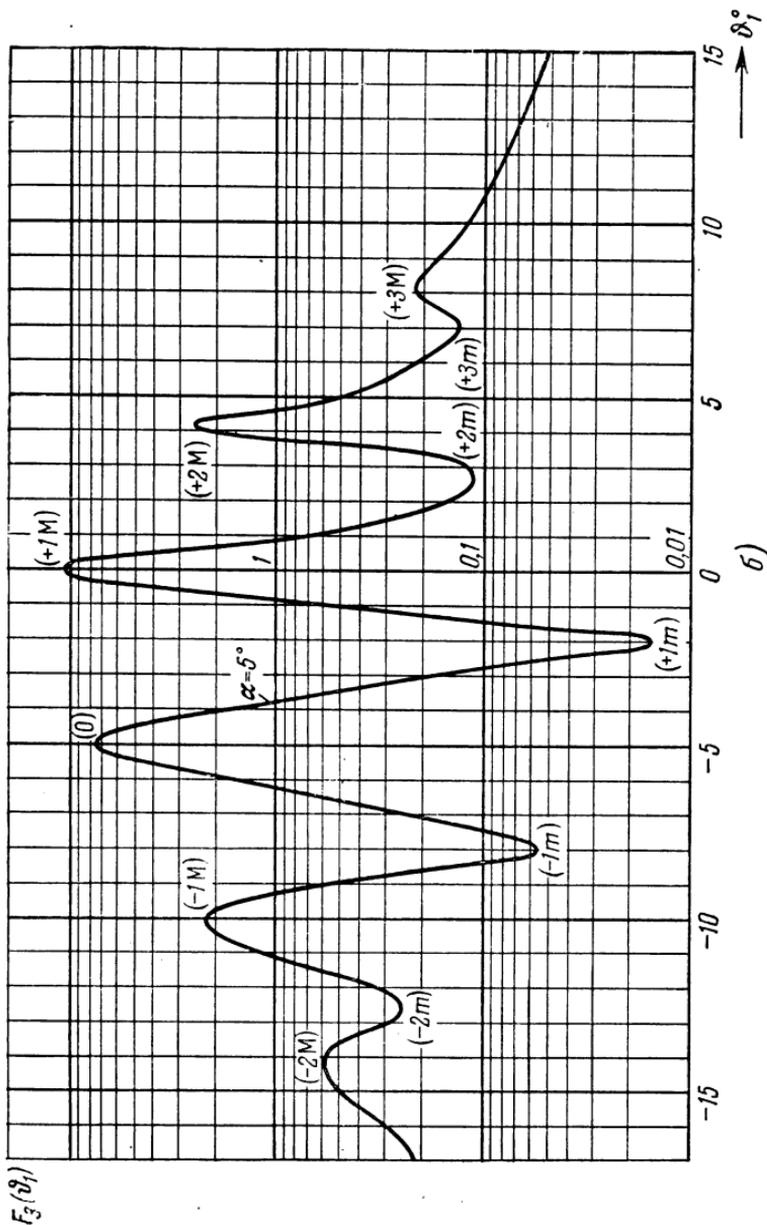


Рис. 34. Ход функции $F_3(\delta_1, \Phi=0)$ при $\alpha=1^\circ$ и 5° . Отмечены максимумы и минимумы различного порядка: (0) , $(\pm 1m)$, $(\pm 2m)$, $(\pm 3m)$, $(\pm 4m)$ и т. д.

поверхностью вращения вокруг вертикальной оси. На рисунке видны сечения этой поверхности плоскостями $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$. Из рис. 32, 33 видно, что F_3 быстро изменяется в зависимости от угла ϑ_1 (или от угла α при фиксированном значении ϑ_1). При этом ширина главного

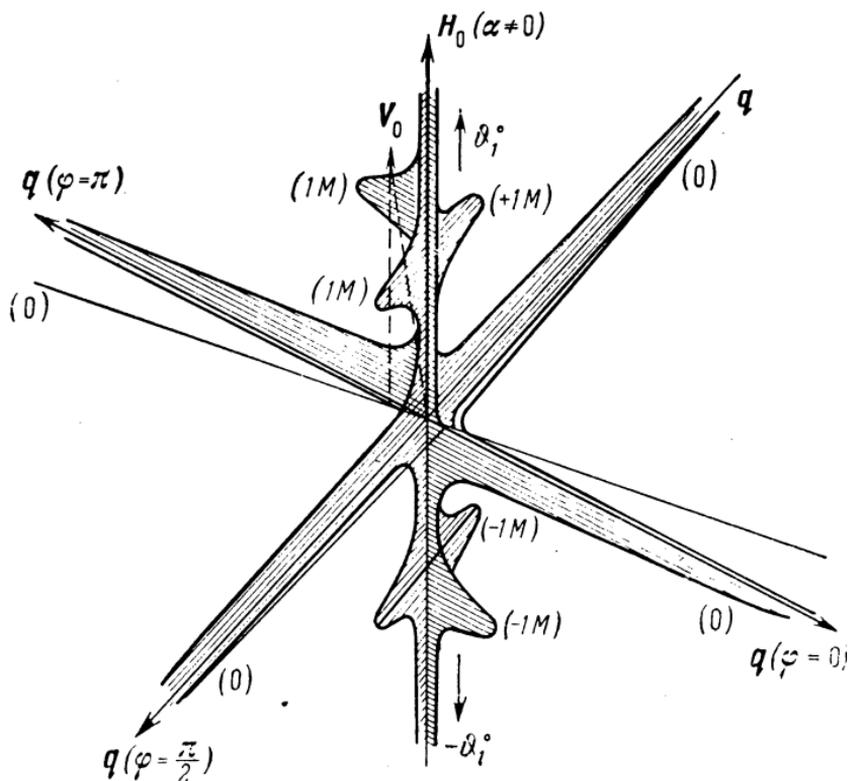


Рис. 35. Сечения поверхности $F_3(\vartheta_1, \varphi)$ в случае, когда $\alpha \neq 0$ при $\varphi = 0$ и $\pi/2$.

и боковых максимумов порядка доли градуса или одного-двух градусов. С увеличением величины главного максимума, что соответствует росту T и уменьшению ν (увеличению высоты, на которой двигается тело, см. таблицы § 1), ширина его уменьшается и одновременно увеличивается его отношение к максимуму первого и других порядков. На рис. 32, где кривые $F_3(\tau)$ построены в логарифмическом масштабе, быстрые осцилляции функции рассеяния сильно сглажены,

Симметричность функции $F_3(\tau)$ относительно угла φ нарушается, когда направление скорости V_0 не совпадает с направлением H_0 ($\alpha \neq 0$). В этом случае τ зависит

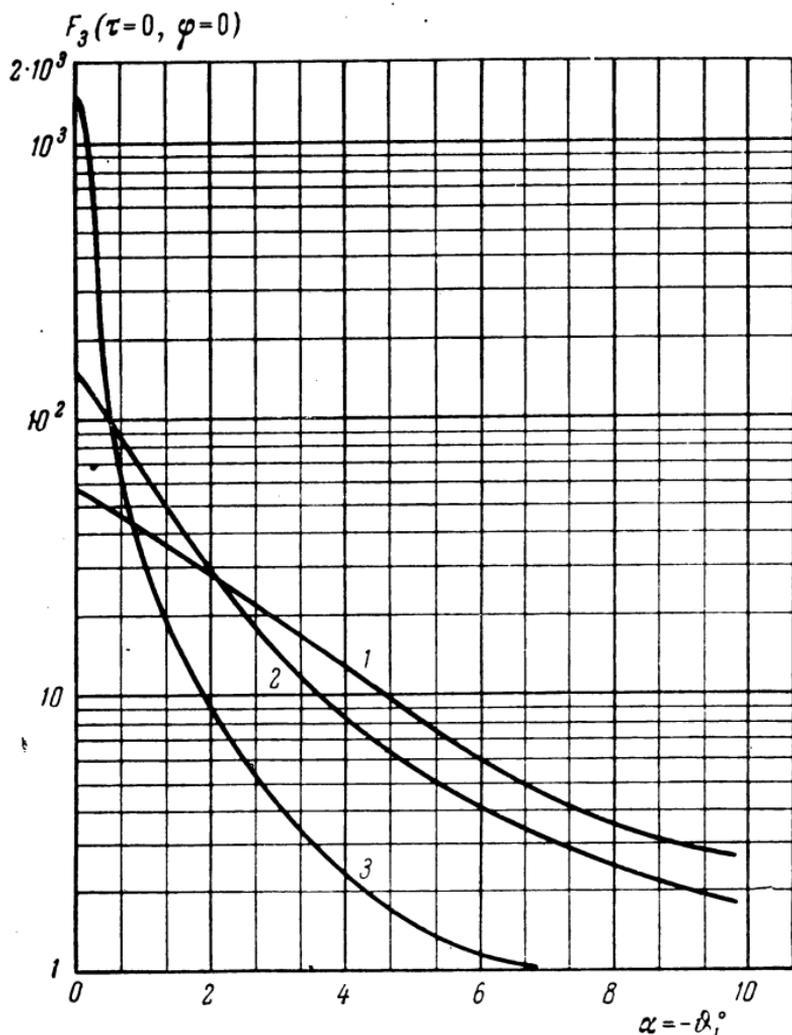


Рис. 36. Зависимость главного максимума $F_3(\tau=0)$ от α при $\alpha = -\theta_1$ и $\varphi = 0$ для $h = 300$ км (1), $h = 400$ км (2) и $h = 700$ км (3).

от угла φ между плоскостями $V_0 H_0$ и $q H_0$. Если $\alpha > 0$, а угол φ лежит в области $\varphi < \pi/2$ или $3\pi/2 < \varphi$, то условие $\tau = 0$ выполняется при отрицательных значениях θ_1 .

Поэтому, если, как на рис. 33, построить поверхность $F_3 = F_3(\vartheta_1, \varphi)$, то главный максимум, при тех же зна-

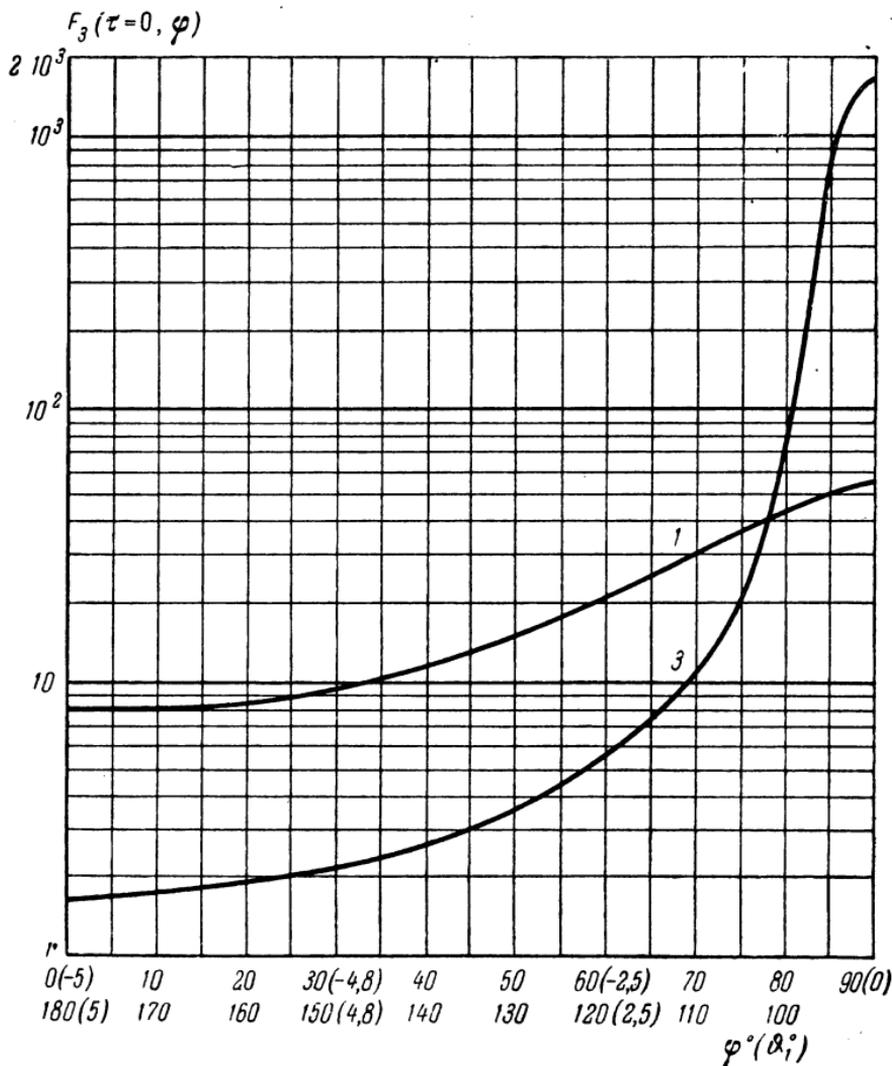


Рис. 37. Зависимость значения главного максимума $F_3(\tau=0)$ от угла φ между плоскостями V_0H_0 и qH_0 при $\alpha=5^\circ$ для $h=300$ км (1) и $h=700$ км (3).

чениях φ , лежит ниже плоскости $\vartheta_1=0$. Линия, образуемая на поверхности $F_3(\vartheta_1, \varphi)$ главными максимумами, не является окружностью, лежащей в плоскости $\vartheta_1=0$

как в случае $\alpha = 0$, а представляет собой неплоскую кривую эллиптического типа, пересекающую плоскость $\vartheta_1 = 0$, когда $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$. В этих двух точках максимум нулевого порядка имеет те же значения, что и в случае, когда $\alpha = 0$. Характер изменения $F_3(\vartheta_1, \varphi = 0)$ при $\alpha \neq 0$ можно проследить по рис. 34, а и 34, б, где для $\kappa T q^2 / M_i \Omega^2 = 1$, $qV_0 / \Omega = 14$, $\eta = 0,06$ изображены эти кривые при $\alpha = 1^\circ$ и 5° . На рис. 34 отмечены максимумы и минимумы соответствующего порядка. Кривые $F_3(\vartheta_1)$ при $\varphi = 0, \pi/2$ показаны на рис. 35. Зависимости величины максимума нулевого порядка $F_3(\tau = 0)$ от $\alpha = -\vartheta_1$ при $\varphi = 0$ и от φ при $\alpha = 5^\circ$ изображены на рис. 36, 37. В скобках около значений φ (рис. 37) написаны соответствующие им значения ϑ_1 при $\alpha = 5^\circ$. Видно, что с увеличением φ от 0 до $\pi/2$ $F_3(\tau = 0)$ возрастает. Как уже отмечалось, в этом случае значение ϑ_1 при $\tau = 0$ отрицательно. При $\varphi = \pi/2$ функция $F_3(\tau = 0)$ имеет максимум, равный максимуму F_3 при $\alpha = 0$; при этом максимум лежит в плоскости $\vartheta_1 = 0$. В интервале $\pi/2 < \varphi < \pi$ максимум $F_3(\tau = 0)$ уменьшается. Величина τ принимает теперь значение, равное нулю при положительных значениях ϑ_1 . При этом одинаковые значения $F_3(\tau = 0)$ соответствуют попарно значениям $\varphi = \pi/2 + \varphi_m$, $\vartheta_1 = \vartheta_{1m}$ и $\varphi = \pi/2 - \varphi_m$, $\vartheta_1 = -\vartheta_{1m}$. Естественно, что при заданном значении φ_m значение ϑ_{1m} определяется из условия $\tau = 0$. Положение максимумов более высокого порядка при $\alpha \neq 0$ изменяется аналогичным образом. Их угловые координаты ϑ, φ при заданном значении α легко определить с помощью формул (7.26) и (7.24).

§ 27. Зависимость эффективного сечения рассеяния от высоты и от длины волны

Из предыдущего следует, что дифференциальное эффективное сечение $d\sigma$, определяющее интенсивность рассеянной следом тела электромагнитной волны, естественным образом представляется в виде произведения трех множителей, а именно:

$$d\sigma = \left\{ \frac{1}{16} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^4 \frac{R_0^4 V_0^2}{\Omega^2} \right\} F_3(\tau, \eta, \zeta, \delta) |G(qR_0, \chi)|^2 \sin^2 \psi_1 d\omega, \quad (7.27)$$

где ψ_1 — угол между E_0 и k' . Для анализа свойств ds необходимо табулировать два из этих множителей, т. е. функции F_3 и G . Соответствующие расчеты были выполнены для трех высот ионосферы $h = 300, 400$ и 700 км.

Для этих высот при $V_0 = 8$ км/сек и значениях параметров ионосферы, приведенных в табл. I и III, значения величины, заключенной в фигурные скобки в формуле (7.27), даются в табл. X.

Таблица X

$$\text{Значения } \left\{ \frac{1}{16} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^4 \frac{R_0^4 V_0^2}{\Omega^2} \right\}$$

		День			Ночь		
$h, \text{ км}$	$R_0, \text{ м}$	300	400	700	300	400	700
0,5		$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$
1		0,3	0,2	$2 \cdot 10^{-2}$	10^3	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$
2		4,8	3,2	0,32	$1,6 \cdot 10^{-2}$	0,32	$4,8 \cdot 10^{-2}$
3		24	16	1,6	$8 \cdot 10^{-2}$	1,6	0,24

Третий множитель в (7.27) легко вычислить, если учесть, что он довольно плавно зависит от угла χ . Нас интересуют главным образом малые значения τ , т. е. значения χ , близкие к $\pi/2$. Поэтому нам достаточно знать $G(qR_0, \pi/2)$. В этом случае можно воспользоваться формулой (2.88), согласно которой

$$|G(qR_0, \pi/2)|^2 = \left(\frac{J_1(qR_0)}{qR_0} \right)^2. \quad (7.28)$$

Значения функции (7.28) приведены в табл. XI. Что же касается основного множителя в формуле (7.27), т. е. функции рассеяния F_3 , то она рассчитана достаточно подробно для указанных высот и различных длин волн в зависимости от углов α , ϑ_1 и φ с помощью электронно-вычислительных машин.

Отметим прежде всего, что когда $V_0 \parallel H_0$, т. е. $\alpha = 0$, главный максимум эффективного сечения рассеяния лежит

в направлении «зеркального отражения» волны от направления магнитного поля Земли (это видно из предыдущего анализа). В этом случае биссектриса угла (k, k') , т. е. вектор q , совпадает с нормалью к H_0 . Если же $\alpha \neq 0$, то вектор q повернут относительно нормали к H_0 на угол ϑ_1 , определяемый из уравнения $\tau(\alpha, \vartheta_1, \varphi) = 0$ для

Таблица XI

Значения функции $|G(qR_0, \pi/2)|^2$

qR_0	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$ G ^2$	1,00	0,999	0,995	0,99	0,97	0,96	0,94	0,91
qR_0	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3
$ G ^2$	0,88	0,84	0,81	0,77	0,55	0,33	0,16	0,05
qR_0	3,5	3,83	4	4,5	5	5,5	5,54	6
$ G ^2$	$6 \cdot 10^{-3}$	—	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$
qR_0	6,5	7,01	7,5	8	8,5	8,64	9	9,5
$ G ^2$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	—	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$

заданных значений α и φ . Таким образом, q составляет в этом случае с H_0 угол $\pi/2 - \vartheta_1$. Например, при $\alpha = 5^\circ$ и $\varphi = 0$ максимальное рассеяние будет происходить вдоль вектора k' , выбранного таким образом, чтобы вектор q составлял с H_0 угол $\pi/2 - 5^\circ$. Положение максимумов более высокого порядка, т. е. углы ϑ_1 , на которые они повернуты, определяется из соответствующих значений $\tau_{\text{макс}}$ (см. (7.26) и формулы (7.24)). Например, при $\varphi = 0$, $\alpha = 0$ и использованном в расчетах значении $\frac{qV_0}{\Omega} = 14$ главному максимуму и максимумам $\pm 1, 2, 3$ -го порядков соответствуют значения углов

$$\vartheta_{1 \text{ макс}} \approx 0^\circ; \pm 5^\circ; \pm 9^\circ; \pm 13^\circ, \quad (7.29)$$

а при $\alpha = 1^\circ$, $\varphi = 0$ максимумам этого же порядка соответствуют углы

$$\vartheta_{1 \text{ макс}} \approx 1^\circ; (+4^\circ, -6^\circ); (+8^\circ, -10^\circ); (+12^\circ, -14^\circ). \quad (7.30)$$

Детальное представление о характере изменений F_3 можно получить из табл. XII—XVI. На рис. 38, 39, 40 при-

водятся кривые $F_3(\vartheta_1, \varphi=0)$ для длины волны $\lambda=30$ м для высот соответственно $h=300, 400, 700$ км при $\alpha=0$, а на рис. 41 для $h=300$ км и $\alpha=5^\circ$. Эти кривые $F_3(\vartheta_1, \varphi=0)$, построенные в отличие от кривых F_3 , при-

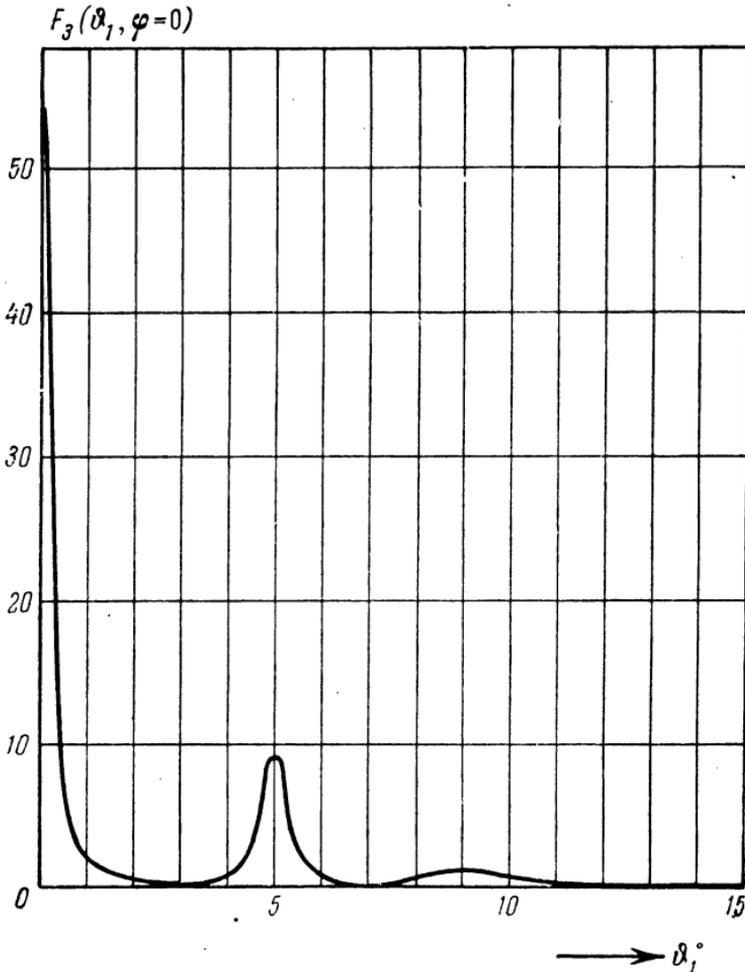


Рис. 38. Зависимость $F_3(\vartheta_1, \varphi=0)$ от ϑ_1 для $\lambda=30$ м, $\alpha=0$ и $h=300$ км.

водимых на рис. 32, 34 в линейном масштабе, дают представление о ширине отдельных максимумов. Зависимость главного максимума от длины волны λ изображена на рис. 42. Оценить ширину максимума при

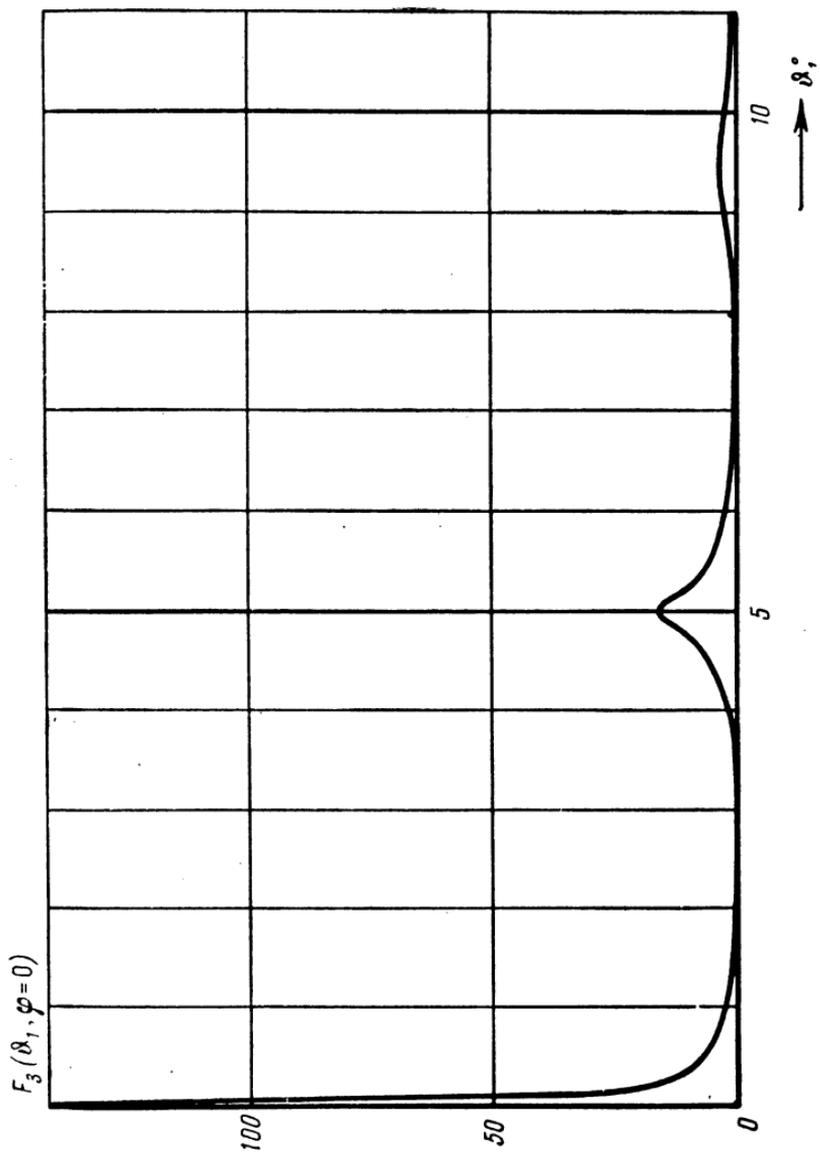


Рис. 39. Зависимость $F_3(\theta_1, \varphi=0)$ от θ_1 для $\lambda=30$ м, $\alpha=0$ и $h=400$ км.

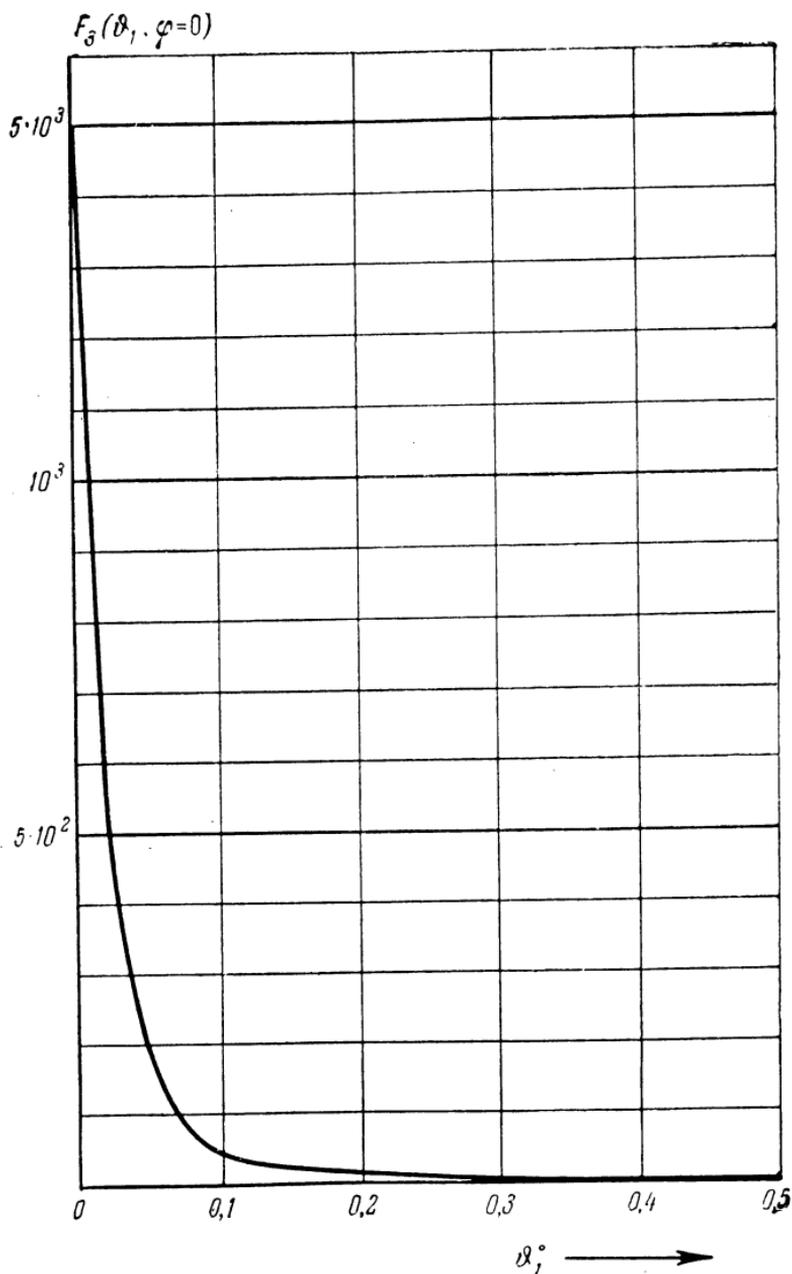


Рис. 40. Зависимость $F_3(\vartheta_1, \varphi=0)$ от ϑ_1 для $\lambda=30$ м, $\alpha=0$ и $h=700$ км.

Таблица XII

Значения $F_3(\alpha, \phi_1)$ при $\lambda = 30$ м, $\varphi = 0$ на различных высотах h

$h, \text{ км.}$	$\phi_1 = 0$				$\alpha = 0$				$\alpha = -\phi_1$			
	300	400	700		300	400	700		300	400	700	
$\alpha, \phi_1, \text{ град}$												
0	53,46	134,4	1535		53,46	134,4	1535		53,46	134,4	1535	
0,02	—	—	613,9		—	—	—		—	—	—	
0,03	—	—	355,1		—	—	—		—	—	—	
0,05	—	—	150,7		—	—	—		—	—	—	
0,1	49,20	103,2	40,8		—	—	—		—	—	—	
0,2	39,72	60,86	10,31		—	—	—		—	—	—	
0,3	22,44	23,10	4,56		—	—	—		—	—	—	
0,5	12,98	11,30	1,58		—	—	—		—	—	—	
1,0	5,44	4,20	0,32		5,39	4,14	1,53		49,62	101,1	109,6	
1,5	1,32	0,94	0,31		1,30	0,92	0,31		41,25	61,65	32,14	
2,0	0,47	0,31	—		—	—	—		—	—	—	
3,0	0,17	0,10	0,019		0,17	0,999	0,018		—	—	9,30	
3,5	0,015	0,011	0,037		0,013	7,8 · 10 ⁻³	0,023		—	14,01	3,99	
4,0	0,15	0,18	—		—	—	—		—	—	—	
4,5	0,85	0,67	0,56		0,98	0,69	0,68		—	—	—	
5,0	2,48	2,22	1,30		—	—	—		—	—	—	
5,5	9,39	13,18	3,18		10,26	12,61	3,41		7,95	5,85	1,48	
6,0	2,58	2,71	1,29		—	—	—		—	—	—	
7	0,88	1,44	0,28		0,77	0,61	0,19		—	—	—	
8	0,18	0,10	0,025		0,18	0,11	0,010		5,96	4,23	—	
9	0,22	0,18	0,14		0,26	0,053	0,10		4,63	3,20	—	
	0,89	0,98	0,45		2,48	5,31	28,9		3,71	2,52	—	
									3,04	2,03	—	

Продолжение табл. XII

$h, \text{ км}$ $\alpha, \phi_1, \text{ град}$	$\phi_1=0$			$\alpha=0$			$\alpha=-\phi_1$		
	300	400	700	300	400	700	300	400	700
	9,5	0,83	1,15	0,62	0,78	1,05	1,57	—	—
10	0,53	0,70	0,53	0,45	0,52	0,47	—	—	—
11	0,25	0,25	0,21	0,23	0,22	—	—	—	—
12	0,19	0,19	0,18	0,10	0,046	—	—	—	—
12,5	0,187	0,20	—	0,32	0,89	—	—	—	—
13	0,18	0,21	0,24	0,28	0,47	—	—	—	—
13,5	0,17	0,21	0,25	0,19	0,25	—	—	—	—
14	0,16	0,19	0,25	0,16	0,19	—	—	—	—
15	0,12	0,14	0,20	0,12	0,13	—	—	—	—
16	0,10	0,11	—	0,088	0,086	—	—	—	—
16,5	—	—	—	—	0,058	—	—	—	—
17	—	0,091	—	—	0,16	—	—	—	—
17,5	0,077	—	—	0,091	0,080	—	—	—	—
18	0,071	0,078	—	0,080	0,010	—	—	—	—
18,5	0,067	—	—	0,072	0,16	—	—	—	—
19	0,062	0,067	—	0,067	—	—	—	—	—
20	0,054	0,058	—	0,062	0,070	—	—	—	—
21	—	—	—	0,054	0,057	—	—	—	—
22	—	—	—	0,048	—	—	—	—	—
23	—	—	—	0,044	—	—	—	—	—
24	—	—	—	0,039	—	—	—	—	—
				0,036	—	—	—	—	—
				—	—	—	2,54	—	—
				—	—	—	—	4,68	—
				—	—	—	—	—	0,39

Таблица XIII
 Значения $F_3(\Phi_1)$ в окрестности главного максимума при $\alpha=0$, $\Phi=0$, различных длинах волн λ и высотах h

$h, \text{ км}$	300				400				700			
	30	20	15	10	30	20	15	10	30	20	15	
0	53,46	14,07	4,82	1,72	134,4	31,05	14,10	5,20	1535	479,3	241,3	
0,02	—	—	—	—	—	—	—	—	613,9	—	—	
0,03	—	—	—	0,080	—	—	—	0,063	355,1	—	—	
0,05	49,20	9,75	3,96	—	103,2	20,54	7,71	—	150,7	25,3	8,67	
0,1	39,72	7,16	2,58	—	60,86	10,2	3,27	—	40,8	6,58	2,20	
0,2	22,44	3,46	—	—	23,10	3,36	—	—	10,3	1,63	—	
0,3	12,98	1,83	0,51	—	11,30	1,55	0,42	—	4,56	0,70	—	
0,5	5,44	0,68	0,16	0,016	4,20	0,52	0,12	0,011	1,58	0,22	0,056	
1,0	1,32	0,11	0,01	0,020	0,94	0,074	0,005	0,017	0,32	0,027	0,001	
1,5	0,47	—	0,03	—	0,31	—	0,027	—	—	8·10 ⁻⁵	0,023	
2	0,17	0,031	0,48	0,016	0,10	3,6·10 ⁻³	—	0,010	0,019	0,027	—	

Таблица XIV
 Значения главного максимума F_3 ($\tau=0$) и углов Φ' при различных углах Φ между плоскостями V_0H_0 и qH_0

Φ , град	0	15	30	60	75	90	105	150	180
Φ_1 , град	-5	-4,8	-4,3	-2,5	-1,3	0	1,3	4,3	5
h , км									
300	7,95	8,38	9,88	20,38	35,98	53,46	35,98	9,88	7,95
700	1,48	—	—	5,67	19,74	1535	19,74	—	1,48

Таблица XV
 Зависимость F_3 (Φ_1) при различных значениях α , $\Phi=0$ и $\lambda=30$ м

h , км	$\alpha=5^\circ$						$\alpha=1^\circ$			$\alpha=0,5^\circ$
	300	400	700	300	700	300	700	700	700	
Φ_1 , град										
0	10,26	12,61	3,41	1,30	0,31	1531				
+0,5	1,94	6,24	0,57	5,44	0,090	1,58	0,31	109,6		
+1	0,77	0,75	0,19	0,75	0,019	32,14	0,091	1,77		

Продолжение табл. XV

h, км φ ₁ , град		α=5°			α=1°			α=0,5°					
		300	400	700	300	700	300	700	700				
+2,	-2	0,18	0,014	0,11	0,009	0,01	0,027	0,014	1,37	0,027	0,36	—	0,10
+3,	-3	0,12	0,18	0,10	0,10	0,14	0,020	0,68	0,18	0,64	0,020	0,22	—
+4,	-4	2,18	1,62	6,50	1,29	2,70	0,59	11,69	0,018	7,45	0,051	1,55	0,22
+5,	-5	0,47	7,95	0,56	5,85	0,69	1,48	0,86	0,64	0,25	0,48	1,24	1,10
+6,	-6	0,22	1,93	0,21	1,59	0,084	0,55	0,18	6,70	0,013	1,73	0,056	1,26
+7,	-7	0,15	0,21	0,14	0,13	0,09	0,032	0,21	0,94	0,14	0,31	0,058	0,066
+8,	-8	0,22	0,258	0,28	0,057	0,34	0,078	1,05	0,19	0,56	0,041	0,28	0,070
+9,	-9	0,16	0,53	0,20	0,48	0,41	0,28	0,53	0,24	0,64	0,15	0,71	0,26
+10,	-10	0,12	2,09	0,13	1,66	0,19	0,45	0,24	0,77	0,18	0,38	0,32	—
+11,	-11	0,094	1,28	—	1,03	—	—	0,18	0,53	—	—	—	—
+12,	-12	0,082	0,31	—	0,23	—	—	0,19	0,26	—	—	—	—
+13,	-13	0,072	0,30	—	0,26	—	—	0,16	0,19	—	—	—	—
+14,	-14	0,062	0,53	—	0,51	—	—	0,12	0,18	—	—	—	—
+15,	-15	0,054	0,49	—	0,54	—	—	0,096	0,15	—	—	—	—
+16,	-16	0,045	0,29	—	0,32	—	—	0,082	0,12	—	—	—	—
+17,	-17	0,043	0,21	—	0,046	—	—	0,072	0,097	—	—	—	—
+18,	-18	0,039	0,18	—	0,21	—	—	0,062	0,082	—	—	—	—
+19,	-19	0,036	0,15	—	0,17	—	—	0,054	0,071	—	—	—	—
+20,	-20	0,032	0,12	—	0,14	—	—	0,048	0,062	—	—	—	—

Таблица XVI

Зависимость $F_3(\theta_1)$ в окрестности главного максимума при $\lambda=30$ м и различных значениях угла φ между плоскостями V_0H_0 и qH_0

$h=300$ км, $\varphi=0^\circ$, $\alpha=5^\circ$							
θ_1^0		-3,5	-4	-5	-6	-6,5	
F_3		0,51	1,62	7,95	1,93	0,64	
$h=300$ км, $\varphi=15^\circ$, $\alpha=4,8^\circ$							
θ_1^0	-3,3	-3,8	-4,3	-4,8	-5,3	-5,8	-6,3
F_3	0,47	1,61	6,02	8,38	5,18	1,90	0,67
$h=300$ км, $\varphi=30^\circ$, $\alpha=4,3^\circ$							
θ_1^0	-2,8	-3,3	-3,8	-4,3	-4,8	-5,3	-5,8
F_3	0,46	1,52	6,28	9,88	5,61	1,85	0,65
$h=700$ км, $\varphi=0^\circ$, $\alpha=5^\circ$							
θ_1^0	-3,5	-4	-4,5	-5	-5,5	-6	-6,5
F_3	0,11	1,29	1,47	5,85	1,06	0,54	0,18
$h=700$ км, $\varphi=15^\circ$, $\alpha=4,8^\circ$							
θ_1^0	-3,3	-3,8	-4,3	-4,8	-5,3	-5,8	-6,3
F_3	0,10	0,59	1,47	1,58	1,12	0,56	0,20
$h=700$ км, $\varphi=30^\circ$, $\alpha=4,3^\circ$							
θ_1^0	-7,8	-3,3	-3,8	-4,3	-4,8	-5,3	-5,8
F_3	0,093	0,53	1,87	1,98	1,32	0,59	0,20
$h=700$ км, $\varphi=60^\circ$, $\alpha=2,5^\circ$							
θ_1^0	—	-1,5	-2	-2,5	-3	-3,5	—
F_3	—	0,34	2,68	2,67	2,5	0,56	—
$h=700$ км, $\varphi=75^\circ$, $\alpha=1,3^\circ$							
θ_1^0	—	-0,3	-0,8	-1,3	-1,8	-2,3	-2,8
F_3	—	0,32	11,70	19,74	2,57	0,39	0,10

различных λ можно по данным табл. XII'. При этом везде считается, что $\psi = \pi$, так что

$$q = \frac{2\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^2} = \frac{4\pi\lambda}{c}. \quad (7.31)$$

Изменение температуры T и соответственно числа столкновений ν_{ii} естественно приводит к изменению η , ζ и δ

$F_3(\vartheta_1, \varphi=0)$

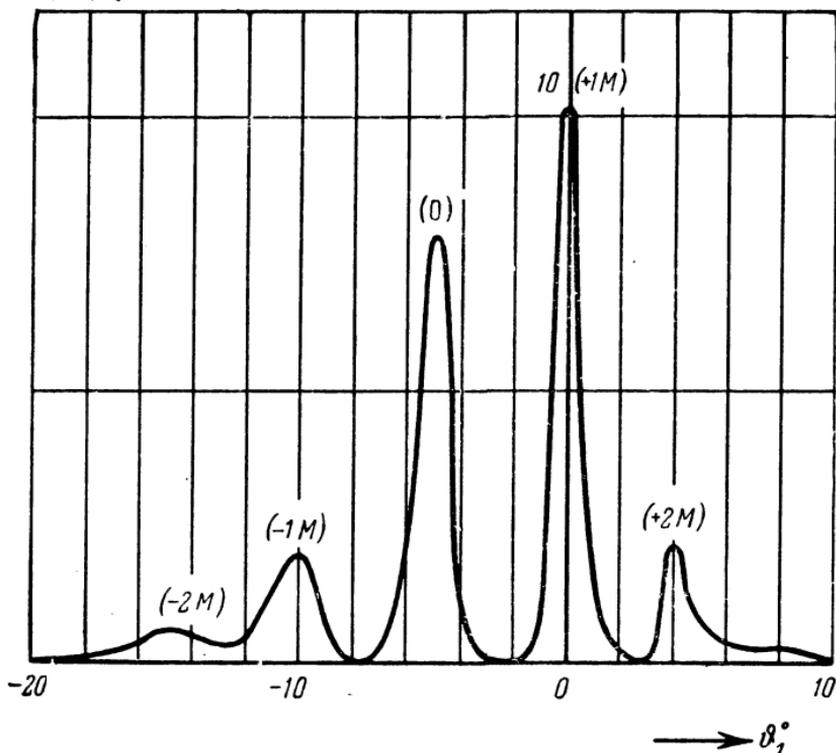


Рис. 41. Зависимость $F_3(\vartheta_1, \varphi=0)$ от ϑ_1 для $\lambda=30$ м, $\alpha=5^\circ$ и $h=300$ км.

(см. (7.23), (7.24)). Некоторые данные, содержащиеся в табл. XVII, дают представление о величине изменения F_3 , обусловленного изменением T .

С помощью табл. (X—XVII) рассчитано эффективное сечение $d\sigma$ для шара радиуса $R_0=0,5; 1; 2$ и 3 м при выбранных выше значениях h и для различных длин волн.

Эти данные приведены в табл. XVIII и на рис. 43. В таблице приводится также отношение дифференциального эффективного сечения на следе $d\sigma$ к умножен-

$$F_3 (\alpha=0, \varphi=0, \tau=0)$$

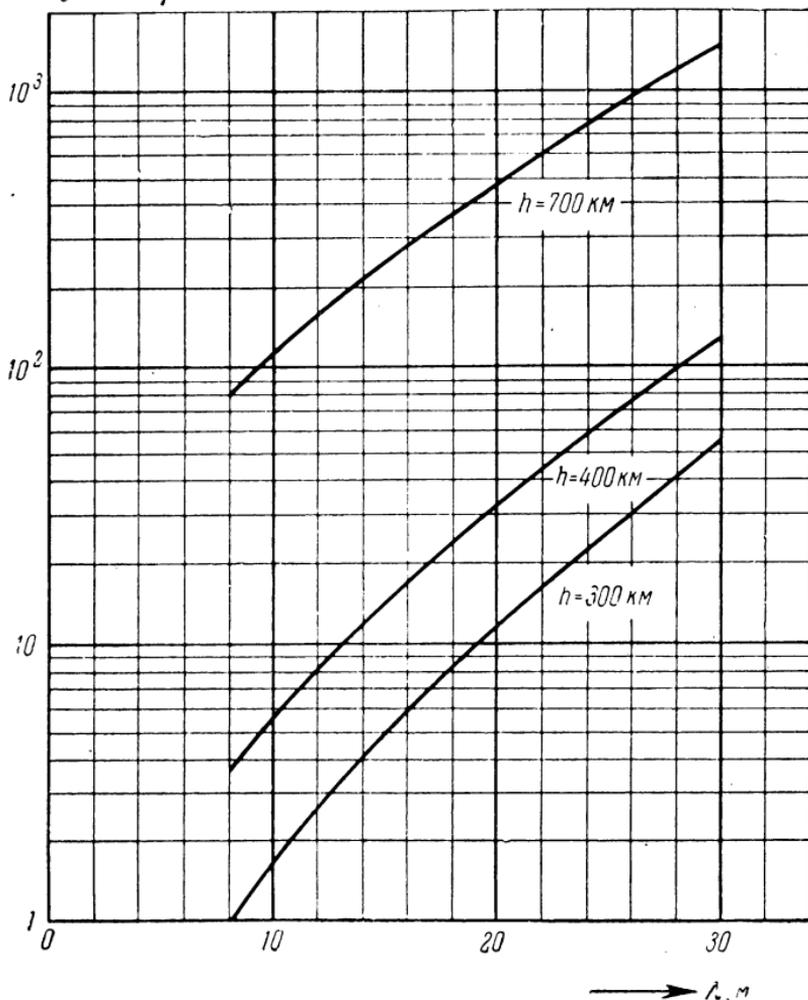


Рис. 42. Зависимость F_3 ($\vartheta_1=0$, $\varphi=0$) от длины волны λ при $\alpha=0$ и $h=300, 400$ и 700 км.

ному на 4π дифференциальному эффективному сечению рассеяния на идеально проводящем шаре радиуса R_0 , т. е. величина

$$\beta_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{d\sigma}{d\sigma_0}.$$

Значение $d\sigma_0$, так же как и $d\sigma$, берется для рассеяния назад, т. е. когда угол $\psi = \pi^*$).

Из этих данных видно, что днем, а в ряде случаев и ночью дифференциальное эффективное сечение главного

Таблица XVII

Величина главного максимума $F_3(\alpha, \theta_1=0)$ для различных значений температуры T при $\lambda=30$ м и $h=300, 400$ км

T°			T°			
α°	800	1600	2000	α°	1000	2000
$h=300$ км				$h=400$ км		
0°	53,46	14,04	9,67	0°	134,4	38,14
5°	10,26	4,12	—	5°	12,61	3,16

максимума $d\sigma$ «следа» спутника намного превышает эффективное сечение металлического шара $d\sigma_0$ и достигает многих десятков и даже сотен квадратных метров. Однако поскольку эти значения соответствуют лишь одному направлению волны, то при оценке истинного эффекта рассеяния необходимо учесть ширину соответствующего лепестка. Рассеяние растет в области высот 400—700 км, с уменьшением длины волны эффективное сечение сильно падает.

Отметим здесь, что рассеяние от «следа», вообще говоря, мало зависит от свойств и формы самого тела и характера его поверхности, а определяется лишь скоростью тела и его линейным размером R_0 . В то же время рассеяние от самого тела существенно зависит от его свойств. В этом отношении гладкий металлический шар является, в рассматриваемом диапазоне частот, наиболее сильно рассеивающим телом. Другие тела, аналогичного размера с другим характером поверхности, имеют значительно меньшее значение $d\sigma_0$. Отметим также, что относительный эффект рассеяния неоднородного

*) Для малого проводящего шара ($kR_0 \ll 1$) $d\sigma_0(\psi=\pi) = \frac{9R_0^6\omega^4}{4c^4} d\sigma$ (см. [33], стр. 383).

Таблица XVIII

Дифференциальное эффективное сечение «следа» в направлении главного максимума;
 $\beta_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega_0}$, $d\sigma_0$ — эффективное сечение металлического шара

$h, \text{ км}$ $\lambda, \text{ м}$	300						400			700		
	30	20	15	30	20	15	30	20	15	30	20	15
1	$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}$ 0,97	0,20	0,08	1,60	0,36	0,2	1,8	0,6	0,3	2400	160	0,3
	β_0 1380	47	7	2290	90	14	2400	160	22			22
	$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}$ 15	3	1	26	5,6	2	30	8	4			4
2	β_0 350	14	1,6	590	25	3	630	36	5			5
	$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}$ 210	35	10	350	65	20	400	100	34			34
	β_0 72	3	0,3	120	5	0,6	134	79	1,2			1,2
3	$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}$ 810	98	18	1420	184	35	1620	280	60			60
	β_0 28	1	0,30	50	2	0,5	58	2,8	0,83			0,83
0,5	$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}$ $3 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	0,2	0,04	0,02	0,3	$8 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$			$4 \cdot 10^{-2}$
	β_0 4,3	0,2	0,02	229	9	1,4	373	22	3,61			3,61
	$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}$ 0,05	10^{-2}	$3 \cdot 10^{-3}$	2,6	0,61	0,2	4,6	1,3	0,6			0,6
1	β_0 1	0,05	0,014	60	2,5	0,3	96	57	0,8			0,8
	$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_0}$ 0,7	0,1	0,03	35	6,5	2,0	61	15	5,3			5,3
	β_0 0,24	$3 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	12	0,5	0,06	20	1,2	0,2			0,2
2	$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_0}$ 2,7	0,3	0,06	140	18	3,5	240	51	9			9
	β_0 0,1	$4 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$	5	0,2	0,05	8,5	0,6	0,8			0,8
3												

Прод.

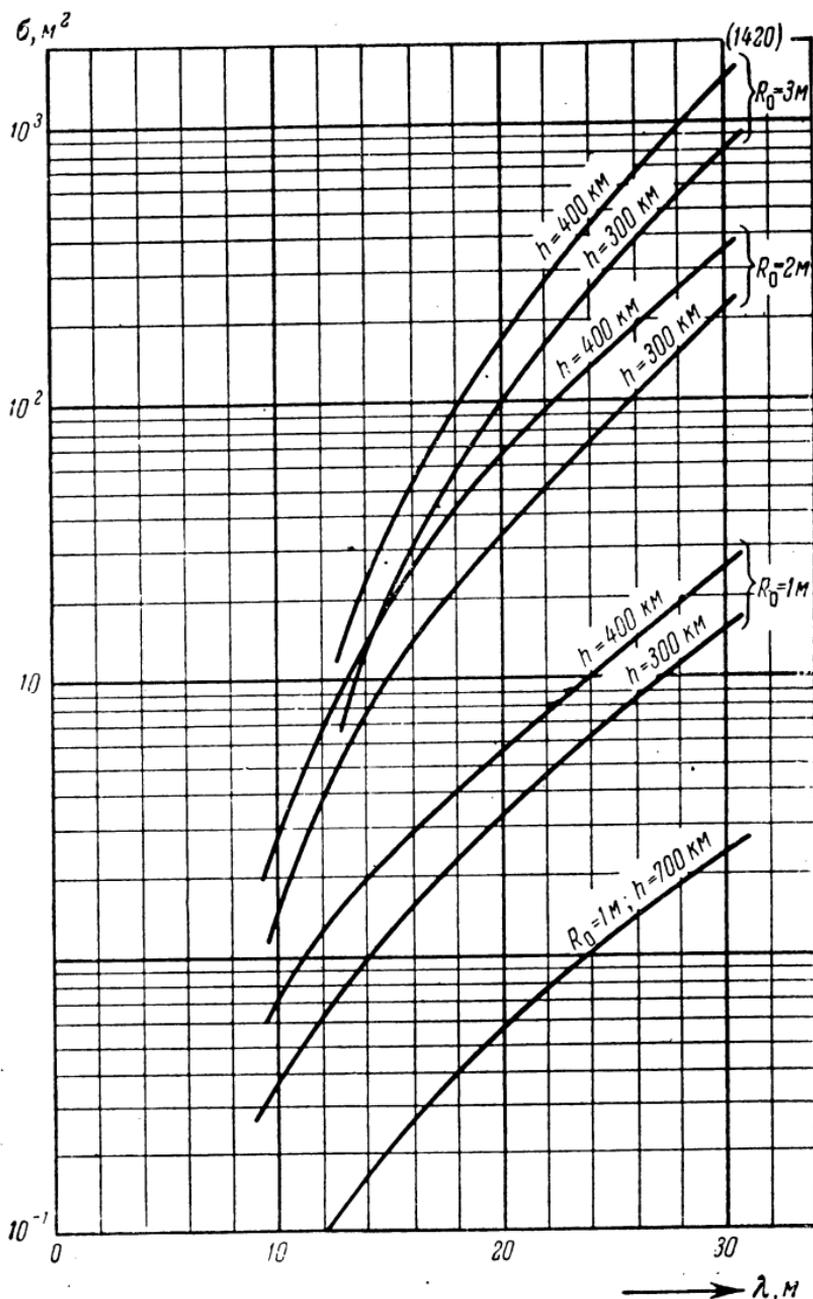


Рис. 43. Зависимость эффективного сечения $\frac{d\sigma}{d\omega}$ днем от длины волны λ для высот $h = 300, 400, 700 \text{ км}$ и радиуса шара $R_0 = 1, 2, 3 \text{ м}$.

образования, т. е. отношение β_0 быстро увеличивается с уменьшением радиуса шара R_0 .

Действительно, при $\frac{2\pi R_0}{\lambda} \ll 1$

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} \sim \frac{R_0^6}{\lambda^4}, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim R_0^4 \quad \text{и} \quad \beta_0 \sim \frac{1}{R_0^2} \rightarrow \infty,$$

а при $R_0 \rightarrow \infty$

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} \sim R_0^2, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim R_0 \quad \text{и} \quad \beta_0 \sim \frac{1}{R_0} \rightarrow 0.$$

§ 28. Характер поля рассеянной волны в точке наблюдения

Рассмотрим теперь общую картину эффекта рассеяния в точке наблюдения и подведем некоторые итоги приведенным выше результатам расчетов. Первоначально предположим, что тело движется так, что вектор его скорости близок к направлению постоянного магнитного поля H_0 , а волновой вектор k падающей электромагнитной волны нормален к H_0 или V_0 . Диаграмма рассеяния имеет в этом случае, как мы видели, многолепестковую структуру, так что главный ее лепесток направлен вдоль нормали к V_0 или H_0 , а боковые лепестки симметрично расположены относительно этой нормали. При этом угловой створ, заполняемый несколькими лепестками, составляет не более $15-20^\circ$ с нормалью к H_0 . Затем интенсивность поля рассеянной волны убывает монотонно с увеличением угла ϑ_1 . Таким образом, в какой-либо точке около земной поверхности по мере приближения тела будет наблюдаться следующая картина. Первоначально монотонно увеличивается поле рассеяния, затем происходят всплески интенсивности, соответствующие положительным боковым максимумам ($\dots +2M, +1M$), главному максимуму (0), отрицательным максимумам ($-1M, -2M\dots$), после чего поле вновь монотонно убывает. Поскольку эффективное сечение рассеяния достаточно велико лишь в главном и одном или двух боковых максимумах, постольку практически поле рассеянной волны достаточно интенсивно в точке наблюдения лишь в течение нескольких коротких отрезков времени δt . Оценим

значения δt , когда для определенности тело проходит на высоте $h \approx 400$ км. В этом случае в главном максимуме при радиусе тела $R_0 \approx 2$ м на волне $\lambda \approx 30$ м, $d\sigma/d\phi \approx \approx 350$ м², а ширина главного лепестка, если ее определить по убыванию $d\sigma/d\phi$ до значения $\frac{1}{4\pi} \frac{d\sigma_0}{d\phi}$, составляет примерно

$\delta\phi_1 \approx 0,6^\circ$. Поэтому за время пробегания главного лепестка мимо точки наблюдения, т. е. за время $\delta t \sim \frac{h\delta\phi_1}{V_0} \approx 0,5$ сек,

средняя интенсивность рассеянной волны в точке наблюдения определяется по значению $d\sigma/d\phi \sim 170$ м², поскольку $d\sigma/d\phi$ изменяется в этом интервале ϕ_1 примерно по линейному закону. Два первых боковых максимума ($-1 M$) также еще достаточно интенсивны, так как для них $d\sigma_1/d\phi$ соизмеримо с $d\sigma_0/d\phi$. Лепестки же более высокого порядка уже трудно обнаружить на общем фоне поля рассеяния самого тела. Мы видим, что эффект рассеяния в точке наблюдения проявляется в виде всплесков принимаемой волны.

Естественно, что при различных размерах, характере и форме поверхности тела, в зависимости от чувствительности индикаторов, продолжительность и относительная интенсивность эффекта будут изменяться.

Схематически на рис. 44, а показано, как облучается отдельными лепестками поля рассеяния поверхность

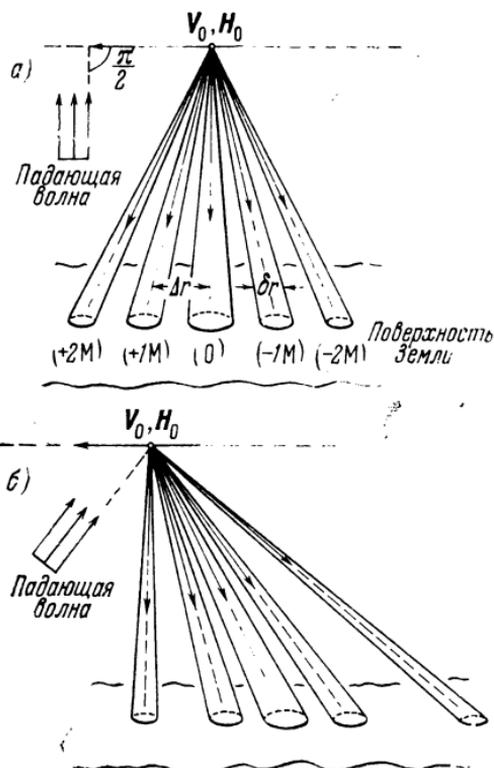


Рис. 44. Схематическое изображение областей, облучаемых на земной поверхности рассеянной волной: а) $V_0 \parallel H_0$; б) $V_0 \perp H_0$.

Земли, когда $V_0 \parallel H_0$, если падающая волна нормальна к V_0 , а на рис. 44, б — когда падающая волна направлена под углом к V_0 (или H_0). В последнем случае направления всех лепестков поворачиваются относительно нормали к магнитному полю таким образом, что главный максимум лежит в направлении зеркального отражения волны от вектора H_0 .

Предположим теперь, что движение тела происходит не вдоль магнитного поля, а под некоторым не слишком большим углом к нему. В этом случае диаграмма рассеяния имеет более сложную форму. Ее лепестки искривляются. Однако общий характер структуры поля около поверхности Земли сохраняется. Количественные же изменения могут быть весьма существенными. Так, если точки излучения и наблюдения — лучи OS и OE (см. рис. 31) лежат в одной плоскости с V_0 и H_0 ($\varphi = 0$ или π), то наблюдается больше одинаковых лепестков меньшей интенсивности (см. рис. 41). Если же лучи OS и OE лежат в плоскости, перпендикулярной к плоскости $V_0 H_0$ ($\varphi = \pi/2$, или $\varphi = 3\pi/2$), то поле будет примерно таким же, как и при $V_0 \parallel H_0$, и главный максимум остается по величине таким же. Следовательно, если облучение тела и прием рассеянного поля происходят в плоскости, нормальной к $V_0 H_0$, то эффект рассеяния в точке наблюдения не уменьшается по сравнению с эффектом в случае продольного движения тела.

В заключение в табл. XIX приводятся для различных высот ионосферы и различных длин волн данные о всплесках рассеяния на поверхности Земли при пролете тела. При этом рассчитаны случаи, когда интенсивность поля рассеяния от «следа» больше интенсивности поля рассеяния от металлического шара соответствующего размера или соизмерима с ним ($\beta_0 \geq 1$). В таблице δr — ширина освещаемой площадки, $\delta t = \delta r/V_0$ — продолжительность всплеска в точке наблюдения, а Δr и Δt — расстояние между центрами отдельных освещаемых рассеянным полем площадок и интервалы времени между следующими друг за другом всплесками в точке наблюдения.

Из табл. XIX следует, что всплески интенсивности поля рассеянной волны при одном пролете тела чередуются в точке наблюдения через несколько секунд,

а продолжительность одного всплеска порядка и меньше одной секунды. Естественно, что теоретически такая

Таблица XIX

Характеристика всплесков интенсивности, вызванных в точке наблюдения волной, рассеянной «следом» тела днем ($\alpha=0$, $V_0 \parallel H_0$)

h, км	λ , м	R_0 , м	Данные всплесков						
			номер лепестка	β_0	δt , сек	δr , км	Δt , сек		
300	30	1	(0)	175	0,6	5	—		
			(-1 M)	35	—	—	3,4		
		2	(0)	36	1	8	—		
			(±1 M)	7	0,8	—	3,4		
		3	(0)	14	1,2	9	—		
			(±1 M)	2,8	1,0	—	3,4		
400	30	1	(0)	293	0,4	3,5	—		
			(±1 M)	29	—	—	4,5		
		2	(0)	60	0,8	6,5	—		
			(±1 M)	6	0,4	3,5	4,5		
		700	30	1	(0)	29	—	—	—
				2	(0)	6	0,15	1,2	—
300	20	1	(0)	6,8	—	—	—		
		2	(0)	1,4	0,25	2	—		
400	20	1	(0)	12,7	—	—	—		
		2	(0)	2,6	0,25	2	—		

картина имеет место лишь при облучении тела плоской волной в одном направлении. Если, однако, облучать тело из нескольких точек (S_1, S_2, S_3, \dots) под различными

углами, то в] одной точке E около земной поверхности будет наблюдаться несколько рассеянных волн

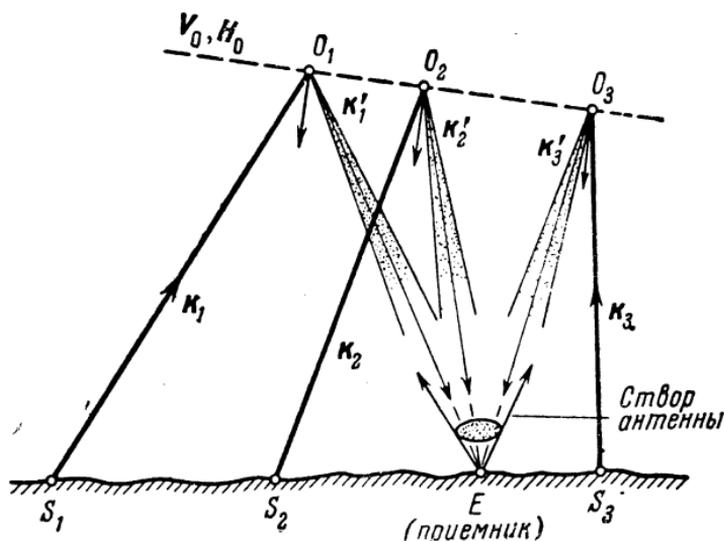


Рис. 45. Схематическое изображение поля рассеяния при облучении тела из различных точек.

(рис. 45), приходящих под различными углами, и время наблюдения эффекта рассеяния существенно увеличится.

§ 29. Эффективное сечение рассеяния в отсутствие внешнего магнитного поля

Рассмотрим в заключение результаты расчетов эффективного сечения в том случае, когда в плазме отсутствует внешнее постоянное магнитное поле H_0 . Соответствующая формула получается при предельном переходе $H_0 \rightarrow 0$ в формуле (7.20). Разумеется, аналогичную формулу можно прямо получить, если подставить в (7.17) N_q , определяемое формулой (4.41). При этом можно также положить в (7.20) $\nu = 0$, так как в отсутствие магнитного поля учет столкновений мало влияет на эффективное сечение рассеяния. В результате $d\sigma$ имеет вид

$$d\sigma = \left\{ \frac{1}{16} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^4 \frac{R_0^4}{q^2} \right\} F(a_0, \chi) |G(qR_0, \chi)|^2 \sin^2 \psi_1 d\omega, \quad (7.32)$$

где

$$F(a_0, \chi) = \frac{\frac{\pi}{4} a_0^2 \exp(-2a_0^2 \cos^2 \chi) + [a_0 W(a_0 \cos \chi)]^2}{\frac{\pi}{4} a_0^2 \cos^2 \chi \exp(-2a_0^2 \cos^2 \chi) + [1 - a_0 \cos \chi W(a_0 \cos \chi)]^2}. \quad (7.33)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} W(x) &= e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt, \\ \cos \chi &= \frac{qV_0}{qV_0} \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

и в дополнение к обозначениям, принятым в (7.20),

$$a_0 = \frac{M_i V_0^2}{2\kappa T}. \quad (7.35)$$

В ионосфере для $h = 300, 400$ и 700 км получаются соответственно значения a_0 , равные 9,8; 8,6 и 6,2.

Для этих a_0 зависимость функции $F(a_0, \chi)$ от угла χ приводится в табл. XX и на рис. 46. При этом значение $F_a(\chi)$, соответствующее какому-либо углу χ , характеризует интенсивность рассеянной волны в направлении

Т а б л и ц а X X

Зависимость функции $F(a_0, \chi)$ от угла χ на различных высотах h ионосферы

χ , град	$h=300$ км	$h=400$ км	$h=700$ км	χ , град	$h=300$ км	$h=400$ км	$h=700$ км
20	1,16	1,18	1,20	80	95,70	98,25	50,18
30	1,37	1,39	1,43	81	120,1	108,35	46,09
40	1,77	1,80	1,88	82	135,6	108,74	43,00
50	2,55	2,70	2,79	83	133,4	100,89	39,48
60	4,37	4,80	5,17	84	121,0	90,26	37,06
65	6,37	6,59	8,66	85	106,8	80,86	34,83
70	10,56	11,26	17,70	86	93,4	73,09	33,00
72	12,83	15,05	25,84	87	62,5	67,39	31,75
74	19,08	21,50	37,80	88	79,8	63,77	30,87
76	29,30	34,86	50,04	89	76,6	61,50	30,35
78	50,88	61,2	54,60	90	75,4	60,79	30,18

k' при заданном направлении падающей волны k . Таким образом, интенсивность рассеянной волны изменяется

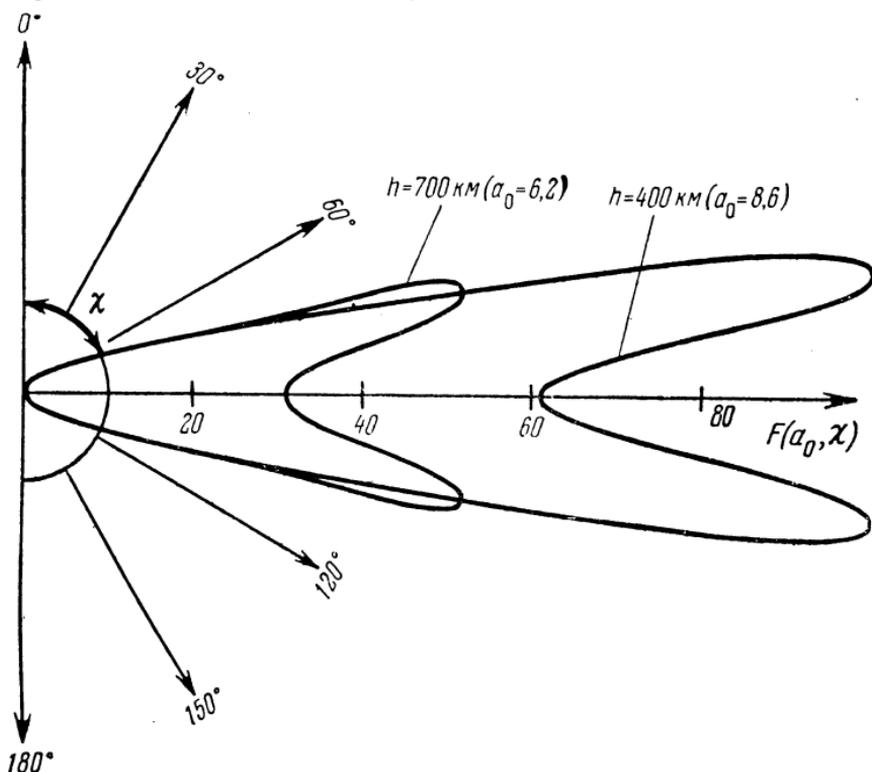


Рис. 46. Зависимость функции рассеяния $F(a_0, \chi)$ от угла χ для различных значений a_0 ($h=300, 400, 700$ км) в случае, когда $H_0=0$.

в направлении рассеяния так, как показано на рис. 47-Поле рассеиваемых движущимся телом волн представляет собой размытое «зеркальное отражение» от направления скорости V_0 , так что диаграмма рассеяния образует в пространстве двугорбую поверхность вращения.

Осью вращения этой поверхности является скорость V_0 . Точно при зеркальном отражении, т. е. для вектора k' , для которого $q \perp V_0$, функция $F(a_0, \chi)$ имеет минимум. Полуширина сечения этой поверхности $\delta\chi/2$, если отсчитать ее от направления $\chi = \pi/2$ и определять по значению χ , при котором $F(a_0, \chi) = 10^{-1} F(a_0, \chi)_{\text{макс}}$, изменяется на различных высотах следующим образом: для $h=300$,

400 и 700 км $\delta\chi/2$ равно соответственно 18, 20 и 30 градусам.

Мы видим, что ширина лепестка увеличивается с ростом высоты. При этом с изменением h значения $F(a_0, \chi)_{\text{макс}}$, $F(a_0, \pi/2)$ и угла $\frac{\delta\chi_{\text{макс}}}{2}$ между направлением максимума F и направлением $F(a_0, \pi/2)$ изменяются соответственно данным табл. XXI.

Для указанных значений $F(a_0, \chi)_{\text{макс}}$ и $F(a_0, \pi/2)$, характеризующих область максимального рассеяния лишь для тел очень малого размера, получают значения эффективно-го сечения $d\sigma/d\sigma$ в направлении максимального рассеяния, превышающие соответствующую величину $d\sigma_0/d\sigma$ рассеяния от металлического шара. Так, например, при $\lambda = 30$ м и

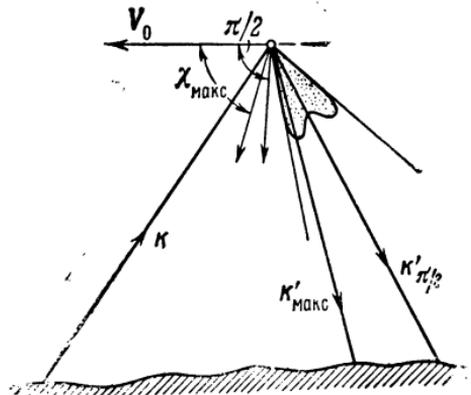


Рис. 47. Схематическое изображение поля рассеяния в случае, когда $H_0 = 0$.

Таблица XXI

h , км	300	400	700
$F(a_0, \chi)_{\text{макс}}$	135,6	108,8	54,6
$F(a_0, \pi/2)$	75,4	60,1	30,2
$(\delta\chi_{\text{макс}}/2)^\circ$	8	8	12

$h = 300$ км для шара радиусом $R_0 = 0,5$ м $d\sigma_{\text{макс}}/d\sigma \sim 5 \cdot 10^{-3}$ м² и $\beta_0 \sim 7$, т. е. неоднородное образование рассеивает сильнее, чем шар, а уже при $R_0 = 1$ м $d\sigma_{\text{макс}}/d\sigma \sim 2 \cdot 10^{-2}$ м и $\beta_0 \sim 0,5$, так что шар рассеивает сильнее, чем «след» тела. Отметим в заключение, что с уменьшением диэлектрической проницаемости ϵ плазмы, как это следует из (7.17), $d\sigma(\chi) \sim 1/\epsilon$. Поэтому рассеяние должно сильно возрастать, если тело

находится в области, где ε близко к нулю. Однако этот случай требует особого рассмотрения, и без специального анализа делать количественные выводы относительно величины $d\sigma$ в области $\varepsilon \rightarrow 0$ вряд ли возможно.

Отметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно ожидать появления своеобразного резонанса в рассеянии, аналогично квантовомеханическому резонансу на близком к нулю уровне [69].

§ 30. Рассеяние на следе тела, движущегося в нижней ионосфере

В предыдущих параграфах мы вычислили эффективное сечение рассеяния радиоволн на следе тела, используя полученные из кинетического уравнения выражения для N_q . Если, однако, тело движется в нижних слоях ионосферы, где длина свободного пробега ионов не очень велика, то N_q можно вычислить с помощью уравнений диффузии. Это и сделано в § 22. Воспользуемся теперь полученными в § 22 формулами для эффективного сечения рассеяния. Прежде всего вычислим $|N_q|^2$. Умножая правую часть (5.66) на комплексно сопряженную величину, получаем

$$|N_q|^2 = \frac{\tilde{I}^2}{(qV_0)^2 + D_a^2 (\vartheta_1) q^4} = \frac{\tilde{I}^2}{q^2 V_0^2 \left(\cos^2 \chi + \frac{q_0^2 D_a^2}{V_0^2} \right)}. \quad (7.36)$$

Полагая

$$\tilde{I} = -\pi R_0^2 V_0 N_0$$

и подставляя (7.36) в формулу (7.17) для $d\sigma$, находим*

$$d\sigma = \frac{R_0^4}{16\varepsilon q^2} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^4 \frac{\sin^2 \psi_1}{\cos^2 \chi + \frac{q_0^2 D_a^2}{V_0^2}} d\omega, \quad (7.37)$$

*) Отметим, что при движении в нижней ионосфере может идти речь о рассеянии радиоволн такой низкой частоты, что условие (7.4) уже не будет выполняться. В этом случае формула (7.17) неверна. Мы, однако, не приводим здесь очень громоздкую формулу для $d\sigma$ при $\omega \sim \omega_H$.

где, как и выше,

$$\cos \chi = \cos \alpha \sin \vartheta_1 + \sin \alpha \cos \vartheta_1 \cos \varphi.$$

Если угол ϑ_1 не слишком мал, так что

$$\sin^2 \vartheta_1 \gg \frac{D_{\perp}^i}{D_{\parallel}^e},$$

то

$$D_a \approx 2 (D_{\parallel}^i \sin^2 \vartheta_1 + D_{\perp}^i \cos^2 \vartheta_1)$$

и

$$d\sigma = \frac{R_0^4 \omega_0^4}{16\epsilon c^4 q^2} \frac{\sin^2 \psi_1}{\cos^2 \chi + \frac{4q^2}{V_0^2} (D_{\parallel}^i \sin^2 \vartheta_1 + D_{\perp}^i \cos^2 \vartheta_1)^2} d\omega. \quad (7.38)$$

Когда тело движется близко к направлению магнитного поля ($\alpha \ll 1$), максимальное значение $d\sigma$ имеет место при $\vartheta_1 = 0$ и равно

$$d\sigma_{\text{макс}} = \frac{R_0^4 \omega_0^4 V_0^2}{64\epsilon c^4 q^4} \frac{\sin^2 \psi_1}{(D_{\perp}^i)^2} d\omega = \frac{R_0^4}{2^{10} \pi^4 \epsilon} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^4 \frac{V_0^2}{(D_{\perp}^i)^2} \sin^2 \psi_1 d\omega. \quad (7.39)$$

при $\sin^2 \vartheta_1 \ll \frac{D_{\perp}^i}{D_{\parallel}^e}$,

$$D_a = \frac{2D_{\perp}^i D_{\perp}^e}{D_{\perp}^i + D_{\perp}^e}. \quad (7.40)$$

Когда $\omega_H \gg \nu_{en}$ (см. § 22), $D_{\perp}^i \gg D_{\perp}^e$ и $D_a \approx 2D_{\perp}^e$, максимальное значение $d\sigma_{\text{макс}}$ при условии (7.40) равно

$$d\sigma_{\text{макс}} = \frac{R_0^4 \omega_0^4 V_0^2}{64\epsilon c^4 q^4} \frac{\sin^2 \psi_1}{(D_{\perp}^e)^2} = \frac{R_0^4}{2^{10} \pi_0 \epsilon} \left(\frac{\omega_e}{\omega} \right)^4 \frac{V_0^2}{(D_{\perp}^e)^2} \sin^2 \psi_1, \quad (7.41)$$

т. е. больше, чем (7.39), так как содержит в знаменателе малую величину квадрата коэффициента поперечной диффузии электронов D_{\perp}^e .

ГЛАВА VIII

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ

§ 31. Вводные замечания

В предыдущих главах рассматривалось лишь быстро движущееся тело большого размера ($R_0 \gg D$, $V_0 \gg v_i$). В этом особом случае электрический заряд тела не очень сильно влияет на структуру возмущенной зоны вследствие того, что потенциал поля на расстояниях порядка дебаевского радиуса от поверхности тела быстро спадает до величины порядка $\kappa T/e$. Влияние же потенциала $\varphi \sim \kappa T/e$ мало из-за того, что энергия набегающих на тело ионов $MV_0^2/2$ велика в сравнении с $e\varphi$. Понятно, что для медленно движущегося тела ($V_0 \lesssim v_i$) и особенно для тела малых размеров ($R_0 \lesssim D$) эти особые условия уже не выполняются и влияние электрического заряда тела становится очень существенным и даже определяющим.

Особенно важную роль играет при этом поле, притягивающее частицы — ионы или электроны*). В таком поле частицы, имеющие вблизи притягивающего тела сравнительно небольшие скорости, вращаются вокруг него, т. е. движутся по финитным орбитам. Такие частицы накапливаются вблизи тела. Благодаря этому концентрация

*) Вообще говоря, тело в плазме заряжается отрицательно, так что притягивающимися к телу частицами являются ионы, отталкивающимися — электроны. Возможно, однако, что на тело специально подан положительный относительно плазмы потенциал φ_0 , тогда притягивающимися частицами будут электроны. В настоящей главе, как и в последующих главах, мы не ограничиваем величины потенциала электрического поля на поверхности тела φ_0 . При этом предполагается, что магнитное поле $H_0 = 0$.

притягивающихся частиц вблизи тела может сильно возрасти. Например, в случае равновесного распределения концентрация частиц в точке r в окрестности покоящегося тела

$$N(r) = N_0 \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right], \quad (8.1)$$

где N_0 — концентрация в невозмущенной области вдали от тела, T — температура среды, κ — постоянная Больцмана и $U(r)$ — потенциальная энергия частицы в поле. На бесконечности, очевидно, U равно нулю. Ясно, что при достаточно больших значениях величины $-U(r)/\kappa T$ концентрация частиц в точке r гораздо больше, чем N_0 . При этом $N(r)$ определяется в основном частицами, совершающими финитное движение, так как число частиц, движущихся инфинитно, т. е. имеющих положительную полную энергию $\mathcal{E} = Mv^2/2 + U(r) > 0$, при $-U(r)/\kappa T \gg 1$ пренебрежимо мало.

Однако само притягивающее тело нарушает равновесное распределение концентрации частиц (8.1), если попадающие на его поверхность частицы поглощаются (нейтрализуются). Поэтому если газ достаточно разрежен, так что длина пробега частиц l велика в сравнении с размерами возмущенной телом области, то характер распределения частиц даже в окрестности покоящегося тела может сделаться существенно неравновесным. Концентрация в точке r при этом может сильно отличаться как от равновесной концентрации (8.1), так и от концентрации невозмущенного газа N_0 . В этих условиях, естественно, и распределение частиц по скоростям отличается от равновесного (максвелловского) и необходимо, как и в рассматривавшемся выше случае быстро движущегося тела, прежде всего определить функцию распределения частиц в пространстве скоростей и координат, используя для этого кинетическое уравнение.

Существенная особенность возникающих при этом задач состоит в наличии двух процессов выравнивания возмущения функции распределения частиц, вызываемого телом. Один из них является следствием непрерывного притока частиц из невозмущенных, т. е. сильно удаленных от тела областей. Характерное время для этого

процесса выравнивания $t \sim R/v$, где R — эффективный размер возмущенной области, v — средняя скорость частиц. Второй процесс выравнивания обусловлен столкновениями между частицами. Характерным временем для этого процесса, естественно, является время свободного пробега $1/v$. Если столкновения достаточно редки, то $1/v \gg R/v$ и основную роль играет выравнивание за счет налетающих из бесконечности частиц, что и учитывалось ранее. Однако это справедливо лишь для частиц, совершающих инфинитное движение. Частицы же, совершающие финитное движение, без столкновений, не могут обмениваться с частицами, приходящими из бесконечности, так как последние не могут быть захвачены на конечные орбиты, если они не отдадут часть своей энергии. Отсюда ясно, что как бы ни были редки столкновения, именно ими определяется число и характер распределения частиц на финитных орбитах. Вместе с тем, как уже указывалось выше, благодаря частицам, имеющим финитные орбиты, концентрация вблизи притягивающегося тела может сильно возрасти. Поэтому столкновения, даже если они очень редки, играют принципиально важную роль в тех случаях, когда существенно финитное движение. Это обстоятельство составляет вместе с тем основную трудность рассматриваемых задач, так как решение кинетического уравнения с учетом столкновений наиболее сложно.

Электрическое поле в окрестности тела складывается из поля, создаваемого зарядом тела и поля пространственного заряда, возникающего в возмущенной зоне. Если движущееся тело — шар, то это суммарное поле обладает осевой симметрией вокруг направления движения. В случае покоящегося шара поле центрально-симметрично; то же, естественно, имеет место в первом приближении, когда тело медленно движется (если $V_0 \ll v_i$). Кроме того, электрическое поле центрально-симметрично при произвольной скорости движения тела, если можно пренебречь полем пространственного заряда в сравнении с полем заряда тела; эти условия осуществляются, в частности, при движении в плазме малого заряженного шара, радиус которого много меньше дебаевского радиуса. В силу сказанного ясно, что случай центрально-симмет-

ричного поля часто реализуется на опыте. В настоящей главе выводятся общие выражения, описывающие распределение частиц разреженного газа, находящегося в центрально-симметричном поле. В последующих главах эти выражения используются для выяснения характера возмущения плазмы в окрестности покоящегося тела.

Вопрос о распределении заряженных частиц и об электрическом поле в окрестности тела, находящегося в разреженной плазме, представляет существенный интерес не только для задач, связанных с исследованиями ионосферы и межпланетной среды, но и для теории зондовых измерений, широко применяемых в лабораторной плазме. Поэтому их теоретическому исследованию посвящен целый ряд работ (см., например, [39 — 43, 60 — 62]). Основная цель этих работ — вычисление потока частиц на заряженное тело в плазме, так как исходными при обработке результатов измерений по методу зондов Ленгмюра являются измерения потока. Однако для определения потока притягивающихся к телу частиц необходимо знать ход поля, а следовательно, и распределение электронов и ионов в окрестности тела. Вместе с тем строгое решение этой задачи встречает существенные трудности. Поэтому авторы предыдущих работ были вынуждены использовать ряд недостаточно обоснованных приближений.

Так широко известные работы Ленгмюра [60, 39] основаны на предположении, что вблизи заряженного тела, помещенного в плазму, образуется область пространственного заряда, полностью экранирующего поле тела. При этом на внешней границе этой области потенциал поля обращается в нуль, так что плазма за пределами этой области не возмущена. Им принято также, что в области пространственного заряда нет отталкивающих полей тела частиц, а притягивающиеся частицы движутся лишь в радиальном направлении. Тепловое движение этих частиц не учитывалось и пренебрегалось также частицами, совершающими финитное движение. При таких предположениях концентрацию притягивающихся частиц в области пространственного заряда легко выразить через потенциал поля. Полученное уравнение для поля было решено Ленгмюром и Блуджетт [39],

и таким образом найдено распределение поля в области пространственного заряда и определен поток частиц на поверхность тела.

В дальнейшем, однако, выяснилось, что электрическое поле проникает не только в область пространственного заряда, но и в квазинейтральную плазму на значительные по сравнению с размером тела расстояния. Распределение поля в области квазинейтральной плазмы было исследовано Бомом, Бархопом и Месси [40]. При этом по-прежнему полностью пренебрегалось тепловым движением притягивающихся частиц. Это предположение в области квазинейтральной плазмы является грубо приближенным, так как здесь энергия частицы в поле не превосходит ее тепловой энергии. Результаты работы [40] более точны в условиях, когда температура отталкивающихся частиц — электронов (предполагается, что тело заряжено отрицательно) гораздо больше, чем температура притягивающихся частиц — ионов. Именно для этого случая Бомом, Бархопом и Месси получен важный результат, а именно ими показано, что при $T_e \gg T_i$ поток ионов зависит лишь от температуры электронов (T_e).

Дальнейшему развитию теории в разнотемпературной плазме посвящены работы Венцля [61], Кагана и Переля [43], Аллена, Бойда и Рейнолдса [62], Бернштейна и Рабиновича [41]. В частности, в работах [62, 41] задача решалась численно без разделения возмущенной области в окрестности тела на область квазинейтральной плазмы и область пространственного заряда. При этом в наиболее последовательной работе Бернштейна и Рабиновича [41] задача формулировалась в рамках кинетической теории. Правда, при вычислении концентрации ионов для упрощения расчетов предполагалось, что ионы в невозмущенной плазме имеют не максвелловское, а моноэнергетическое распределение по скоростям, т. е. что $f_i = C \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)$, где δ — дельта-функция, $\mathcal{E}_0 = \frac{3}{2} k T_i$ — средняя энергия ионов. Расчет проводился при этом лишь для $T_e \gg T_i$ ($T_e = 10 T_i$, $20 T_i$ и $100 T_i$), так как при $T_e \sim T_i$ нет никаких оснований для последнего предположения.

Таким образом, вопрос о структуре возмущенной зоны в окрестности заряженного тела в плазме оставался

в значительной мере не решенным. Во-первых, отсутствовало сколько-нибудь последовательное решение задачи в однотемпературной плазме при $T_e \sim T_i$. Во-вторых, при исследовании области пространственного заряда предполагалось, что частицы движутся лишь в радиальном направлении. Это предположение оказывается правильным в случае большого тела, размер которого R_0 гораздо больше дебаевского радиуса в плазме. Для малого же тела, когда $R_0 \ll D$, осуществляются иные условия. В-третьих, во всех предыдущих работах не принимались в расчет частицы, совершающие финитное движение в окрестности заряженного тела, а их роль может быть существенной и даже определяющей. Наконец, не исследовалась устойчивость возмущенной зоны в окрестности тела.

§ 32. Особенности движения частиц в центрально-симметричном поле

Прежде чем переходить к рассмотрению кинетического уравнения, полезно указать на некоторые особенности движения частиц в центрально-симметричном поле, которые существенны для дальнейшего изложения.

Частица массы M в центрально-симметричном поле $U(r)$ движется все время в одной плоскости rv , где v — скорость частицы и r — радиус-вектор, проведенный из центра сил O (рис. 48). Ее положение и скорость в плоскости движения характеризуются расстоянием от центра r , углом θ_1 и двумя проекциями скорости v_r и v_θ на направление радиус-вектора r и на ортогональное к нему направление.

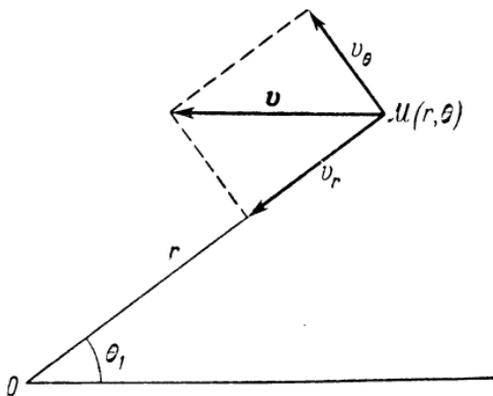


Рис. 48. Схема компонент скорости частицы.

При движении частицы всегда сохраняются: момент

количества движения относительно центра сил

$$\mathcal{M} = Mrv_{\theta}, \quad (8.2)$$

и полная энергия

$$\mathcal{E} = \frac{M}{2} (v_r^2 + v_{\theta}^2) + U(r) = \frac{Mv_r^2}{2} + \frac{\mathcal{M}^2}{2Mr^2} + U(r). \quad (8.3)$$

Здесь M — масса частицы, а $U(r)$ — потенциальная энергия частицы в поле. Естественно принять, что на бесконечности $U \rightarrow 0$. Тогда, поскольку при притяжении сила $F = \frac{dU}{dr} < 0$, притягивающий потенциал всегда меньше нуля, т. е. $U(r) < 0$; наоборот, отталкивающий потенциал $U(r) > 0$. Из формулы (8.3) видно, что характер изменения составляющей скорости v_r полностью зависит от свойств эффективной потенциальной энергии

$$U_{\text{эфф}}(r) = \frac{\mathcal{M}^2}{2Mr^2} + U(r). \quad (8.4)$$

Основные особенности движения частиц в центрально-симметричном поле становятся поэтому понятными, если проанализировать выражение $U_{\text{эфф}}(r)$. Нам важно, в частности, знать, как разделяются области финитного и инфинитного движений, поскольку, как указывалось выше, функция распределения частиц в этих областях может иметь совершенно различный вид.

Притягивающий потенциал. Притягивающий потенциал $U(r) < 0$, следовательно, эффективная потенциальная энергия $U_{\text{эфф}}(r)$ может быть как меньше, так и больше нуля. Рассмотрим различные характерные случаи изменения потенциала $U(r)$.

Случай 1. Если $U(r)$ убывает (по модулю) с ростом r достаточно медленно, так что убывание $U(r)$ не происходит быстрее, чем $1/r^2$, то при любом значении момента \mathcal{M} уравнение

$$\frac{dU_{\text{эфф}}}{dr} = -\frac{\mathcal{M}^2}{Mr^3} + \frac{dU}{dr}, \quad \text{т. е. } r^3 \frac{dU}{dr} = \frac{\mathcal{M}^2}{M} \quad (8.5)$$

имеет один корень. В самом деле, функция $r^3 \frac{dU}{dr}$ в этом случае монотонно возрастает с ростом r (см. кривую 1

на рис. 49), так что всегда существует лишь один корень у уравнения (8.5). Функция $U_{\text{эфф}}(r)$ имеет, соответственно, один минимум в точке $r_{\text{мин}}$, которая

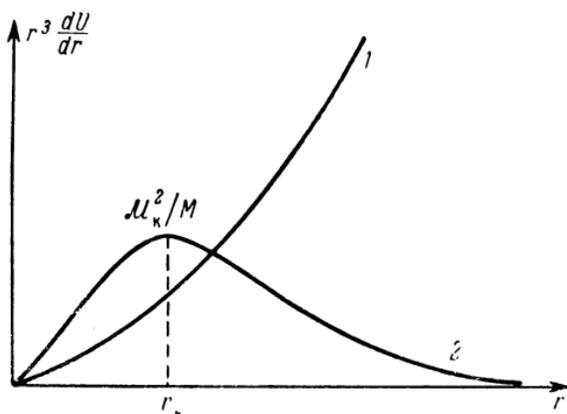


Рис. 49. К рассмотрению свойств потенциальной энергии частицы $U(r)$.

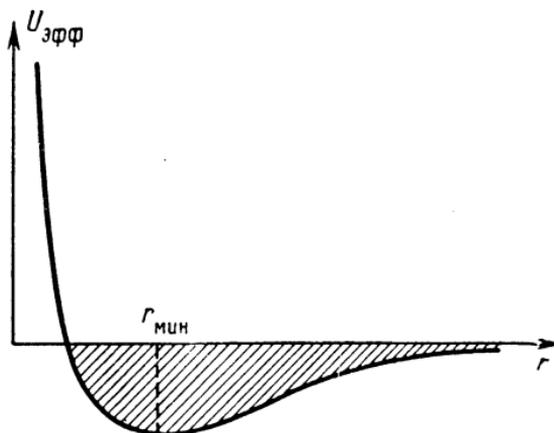


Рис. 50. Вид эффективной потенциальной энергии $U_{\text{эфф}}(r)$ для медленно убывающего поля (случай 1). Область финитного движения заштрихована.

определяется соотношением (8.5) (см. рис. 50). Частицы, совершающие финитное движение, в рассматриваемом случае имеют отрицательную полную энергию

$$\mathcal{E} = \frac{Mv_r^2}{2} + U_{\text{эфф}}(r) < 0. \quad (8.6)$$

Область финитного движения на рис. 50 заштрихована. Полная энергия частиц, совершающих инфинитное движение, наоборот, всегда положительна. Следовательно, в пространстве скоростей v_r и v_θ в произвольной точке r области финитного и инфинитного движений разделены кривой

$$v_r^2 + v_\theta^2 = -\frac{2}{M} U(r), \quad (8.7)$$

т. е. «разделяющая» кривая в пространстве скоростей v_r , v_θ является в этом случае окружностью радиуса

$$\sqrt{-\frac{2}{M} U(r)}.$$

Случай 2. Пусть $U(r)$ убывает (по модулю) с ростом r при малых r медленнее, чем $1/r^2$, а при больших r — быстрее, чем $1/r^2$. В этом случае функция $r^3 \frac{dU}{dr}$ уже не является монотонно возрастающей функцией r ; это видно из кривой 2 на рис. 49. Уравнение (8.5) при небольших значениях момента \mathcal{M} , меньших критического значения \mathcal{M}_K , определяемого ниже, имеет теперь два корня. Соответственно эффективная потенциальная энергия $U_{\text{эфф}}(r)$ обладает не только минимумом, но и максимумом. Зависимость $U_{\text{эфф}}$ от r изображена на рис. 51. Минимум эффективной потенциальной энергии находится в точке $r = r_{\text{мин}}$, которая всегда расположена ближе к центру, чем точка максимума r_0 . При очень малых значениях момента \mathcal{M} , как ясно из рис. 49, точка $r_{\text{мин}}$ стремится к нулю, а значение r_0 , наоборот, неограниченно возрастает. Когда значение момента \mathcal{M} растет, приближаясь к значению \mathcal{M}_K , то расстояние между точками $r_{\text{мин}}$ и r_0 , наоборот, становится все меньше. При $\mathcal{M} = \mathcal{M}_K$ оба корня сливаются в точке r_K . Значение r_K определяется из условия

$$\frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dU}{dr} \right)_{r_K} = 0$$

или

$$3 \frac{dU}{dr} (r_K) + r_K \frac{d^2U}{dr^2} (r_K) = 0. \quad (8.8)$$

Расстояние r_K однозначно определяется потенциалом $U(r)$. Точка $r = r_{\text{мин}}$, где эффективная потенциальная энергия

имеет минимум, всегда ближе расположена к центру, чем r_K . Наоборот, расстояние r_0 , где $U_{\text{эфф}}$ имеет максимум, всегда больше, чем r_K .

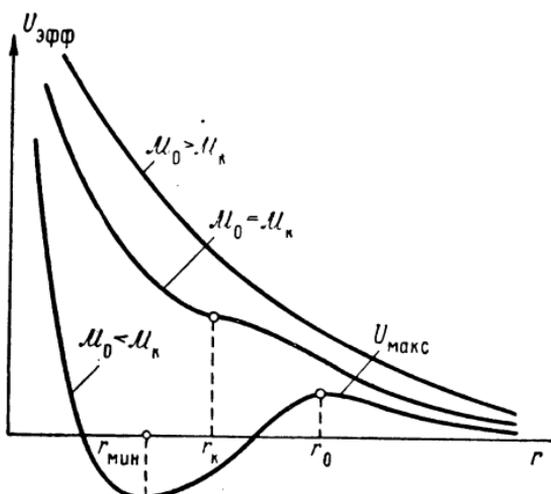


Рис. 51. Вид эффективной потенциальной энергии $U_{\text{эфф}}(r)$ (случай 2) для различных значений момента количества движения M .

Критическое значение момента $M = M_K$, как ясно из (8.5), равно

$$M_K = \sqrt{Mr_K^3 \frac{dU}{dr}(r_K)}. \quad (8.9)$$

Значение M_K также однозначно определяется потенциалом $U(r)$. Если $M > M_K$, то эффективная потенциальная энергия $U_{\text{эфф}}(r)$ монотонно возрастает с уменьшением r , как это видно из рис. 51. Отмеченные особенности в поведении эффективной потенциальной энергии существенно сказываются на характере движения частиц. Во-первых, как ясно из рис. 51, финитное движение могут совершать лишь частицы, имеющие момент $M < M_K$. Во-вторых, полная энергия частицы, движущейся по финитной орбите, может быть как отрицательной, так и положительной. Необходимо лишь, чтобы выполнялось условие

$$\mathcal{E} = \frac{Mv^2}{2} + U_{\text{эфф}}(r) \leq U_{\text{макс}} \text{ при } r \leq r_0, \quad (8.10)$$

где $U_{\text{макс}} = U_{\text{эфф}}(r_0)$ — значение эффективной потенциальной энергии в точке максимума. Разумеется, значение $U_{\text{макс}}$ зависит от момента частицы. Частица, совершающая финитное движение, отражается в области резкого градиента потенциала $U(r)$, даже если ее полная энергия $\mathcal{E} > 0$. Аналогичное отражение имеет место и для частиц, совершающих инфинитное движение. Из рис. 51

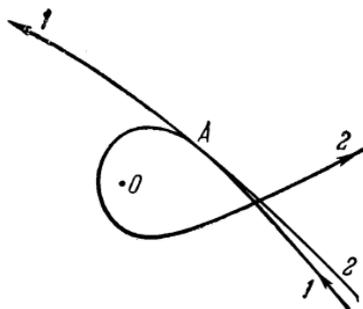


Рис. 52. Траектории частицы, имеющей в точке A энергию $\mathcal{E} < U_{\text{макс}}$ (траектория 1) и $\mathcal{E} > U_{\text{макс}}$ (траектория 2).

видно, что частицы, налетающие из бесконечности и имеющие момент $\mathcal{M} < \mathcal{M}_K$ и энергию $\mathcal{E} < U_{\text{макс}}$, отражаются в точке $r_{\text{п}} \geq r_0 > r_K$. Точка $r_{\text{п}}$, таким образом, есть точка поворота частицы. Естественно, что $r_{\text{п}}$ есть минимальное расстояние траектории частицы от центра сил. С увеличением энергии частицы, когда $\mathcal{E} < U_{\text{макс}}$, при фиксированном моменте \mathcal{M} точка поворота приближается к r_0 . При $\mathcal{E} \geq U_{\text{макс}}$ точка поворота скачком перемещается в область

малых значений $r < r_{\text{мин}}$. При этом совершенно изменяется траектория частицы, что видно из рис. 52, где показаны траектории двух частиц, имеющих в точке A одинаковые моменты \mathcal{M} , но различные значения энергии: $\mathcal{E} < U_{\text{макс}}$ (траектория 1) и $\mathcal{E} > U_{\text{макс}}$ (траектория 2). Таким образом, при $\mathcal{E} = U_{\text{макс}}$ скачкообразно изменяется характер траектории и положение точки поворота частиц, совершающих инфинитное движение и имеющих момент $\mathcal{M} < \mathcal{M}_K$. С увеличением момента \mathcal{M} и, следовательно, с уменьшением расстояния между корнями уравнения (8.5) $r_{\text{мин}}$ и r_0 величина скачка точки поворота уменьшается. При $\mathcal{M} \geq \mathcal{M}_K$, когда оба корня сливаются, положение точки поворота более не испытывает скачка и непрерывно изменяется с изменением энергии или момента частицы.

Установим теперь в пространстве скоростей v_r, v_θ вид кривой, разделяющей в заданной точке r области финитного и инфинитного движений. Как ясно из (8.10),

финитное движение совершают частицы, полная энергия которых

$$\mathcal{E} = \frac{Mv_r^2}{2} + \frac{Mv_\theta^2}{2} + U(r) \leq U_{\text{макс}}. \quad (8.10a)$$

Здесь $U_{\text{макс}}$ — значение эффективной потенциальной энергии $U_{\text{эфф}}$ в точке максимума r_0 , т. е.

$$U_{\text{макс}} = U(r_0) + \frac{\mathcal{M}^2}{2Mr_0^2} = U(r_0) + \frac{Mv_\theta^2 r^2}{2r_0^2}, \quad (8.4a)$$

$$r_0^3 \frac{dU}{dr_0} = \frac{\mathcal{M}^2}{M} = Mv_\theta^2 r^2, \quad (8.5a)$$

причем r_0 — больший из двух корней последнего уравнения. Точка максимума r_0 и само значение $U_{\text{макс}}$ изменяются в зависимости от момента частицы. Следовательно, кривая, разделяющая области финитного и инфинитного движений в пространстве скоростей v_r , v_θ для данной точки r , также зависит от момента частицы и является параметрическим решением уравнений (8.10a), (8.4a), (8.5a) с параметром r_0 , т. е. дается выражениями

$$v_r^2 = -\frac{2}{M} [U(r) - U(r_0)] - \frac{r_0}{M} \frac{dU}{dr}(r_0) \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right), \quad (8.11a)$$

$$v_\theta^2 = \frac{r_0^3}{Mr^2} \frac{dU}{dr}(r_0). \quad (8.11b)$$

Параметр r_0 в уравнениях (8.11) изменяется от некоторого минимального значения, обозначаемого нами через ϱ_0 до ∞ . Поскольку уменьшение r_0 соответствует убыванию скорости v_r^2 , то ясно, что r_0 минимально при $v_r^2 = 0$. Следовательно, ϱ_0 является максимальным корнем уравнения (8.11a) при $v_r^2 = 0$, т. е.

$$U(\varrho_0) - U(r) - \frac{\varrho_0}{2} \frac{dU}{dr}(\varrho_0) \left(\frac{\varrho_0^2}{r^2} - 1 \right) = 0. \quad (8.12)$$

Отсюда видно, что ϱ_0 зависит от r . В частности, $\varrho_0 = r$ всегда является корнем уравнения (8.12). При $r > r_k$ этот корень единственный. Если же $r < r_k$, то уравнение (8.12) имеет и другой корень $\varrho_0(r)$, который всегда больше чем r_k (поскольку ϱ_0 является одним из значений r_0 , а r_0 — максимальный корень уравнения (8.5) и всегда $r_0 \geq r_k$).

В частности, при малых $r \rightarrow 0$ уравнение (8.12) принимает вид

$$-r^2 U(r) = \frac{Q_0^3}{2} \frac{dU}{dr}(Q_0). \quad (8.12a)$$

Поскольку при $r \rightarrow 0$ потенциальная энергия растет (по модулю) медленнее, чем $1/r^2$, то $r^2 U(r) \rightarrow 0$. С другой стороны, при больших r потенциал падает быстрее, чем

$1/r^2$, и следовательно, правая часть уравнения (8.12a) стремится к нулю при $Q_0 \rightarrow \infty$. Таким образом, при $r \rightarrow 0$ функция $Q_0(r) \rightarrow \infty$. Для дебаевского потенциала $U(r) = -U_0 \frac{D}{r} \exp(-r/D)$ зависимость Q_0 от r изображена на рис. 53.

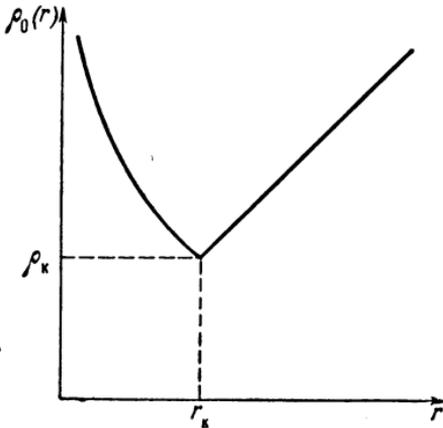


Рис. 53. Зависимость Q_0 от r в случае дебаевского потенциала (8.13).

Из (8.11) ясно, что кривая $v_r(v_\theta)$, разделяющая области финитного и инфинитного движений, в любой точке r существенно зависит теперь не только от значения U

в точке r , как это было в рассмотренном выше случае 1 медленно убывающего потенциала $U(r)$, но и от всего хода потенциала U от ∞ до точки $Q_0(r)$. При

этом при $r_0 \rightarrow \infty$ $v_\theta = 0$ и $v_r = \sqrt{-\frac{2}{M} U(r)}$. С ростом v_θ функция $v_r(v_\theta)$ убывает; однако кривая $v_r(v_\theta)$ идет выше,

чем разделяющая кривая (8.7) $v_r = \sqrt{-\frac{2}{M} U(r) - v_\theta^2}$ (штрих-пунктир на рис. 54); значение v_r обращается

в нуль при $v_\theta = v_{\theta 0} = \left(\frac{Q_0^3}{Mr^2} \right) \frac{dU}{dr}(Q_0)$.

Заметим, что при $r \leq r_k$ уравнения (8.11) имеют решение лишь при $v_\theta \leq v_{\theta 0}$. Если же $r > r_k$, то решение существует и при $v_\theta > v_{\theta 0}$. Правда, это решение получается уже при значениях параметра r_0 , меньших чем $Q_0(r) = r$,

и следовательно, соответствующий участок кривой $v_r(v_\theta)$, показанный пунктиром на рис. 54, б, в, уже не разделяет области финитного и инфинитного движений, так как при $v_\theta > v_{\theta 0}$ финитное движение невозможно. Однако частицы, совершающие инфинитное движение, при этом неэквивалентны: часть из них, как мы видели выше, имеет точку поворота в области больших $r > r_0 \geq r_K$, а остальные — в области малых $r < r_{\min} \leq r_K$.

Указанная пунктиром кривая как раз и разделяет две группы частиц.

Рассмотрим в качестве примера дебаевский потенциал

$$U(r) = -U_0 \frac{D}{r} \exp\left(-\frac{r}{D}\right), \quad (8.13)$$

который как раз убывает с ростом r : при малых r мед-

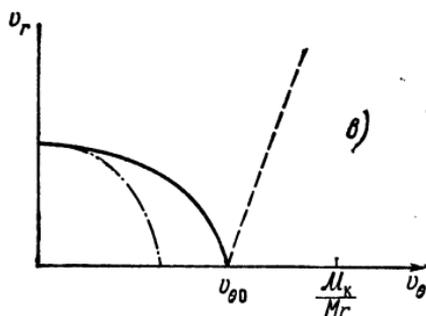
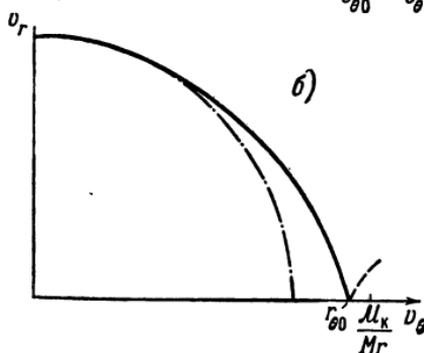
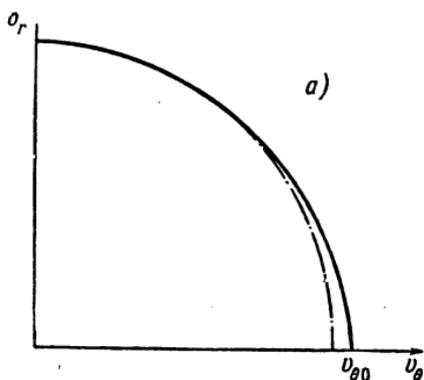


Рис. 54. Граница областей финитного инфинитного движений при различных значениях r для дебаевского потенциала (8.13): а) $r=D$; б) $r=2D$; в) $r=4D$. Штрих-пунктиром показана разделяющая кривая (окружность) в случае медленно падающего потенциала.

леннее, а при больших r быстрее, чем $1/r^2$. Решая уравнение (8.8), находим, что в этом случае

$$r_K = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} D \simeq 1,61D$$

и

$$\mathcal{M}_K = \left(\frac{9}{4} + \sqrt{5} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right) D V \overline{M U_0} \simeq 0,94 D V \overline{M U_0}.$$

Параметрическое решение уравнений (8.11а), (8.11б) принимает при этом вид

$$\frac{M v_r^2}{U_0} = 2 \frac{D}{r} e^{-\frac{r}{D}} - \frac{D^2}{r^2} e^{-x} \left[x(x+1) - \frac{r^2}{D^2} \frac{x-1}{x} \right],$$

$$\frac{M v_\theta^2}{U_0} = \frac{D^2}{r^2} x(x+1) e^{-x},$$

где параметр x изменяется от $q_0(r)$ до ∞ . Вид кривой $q_0(r)$ приведен на рис. 53, а вид разделяющих кривых при значениях $r = D$ (т. е. $r < r_K$), $r = 2D$ и $r = 4D$ (т. е. при $r > r_K$) изображен на рис. 54.

Случай 3. Пусть $U(r)$ убывает при больших значениях $r \rightarrow \infty$ строго, как $1/r^2$, а при небольших значениях r падает вначале медленнее, а затем быстрее, чем $1/r^2$. Именно этот случай наиболее интересен для рассматриваемых нами в этой книге вопросов. Действительно, как было показано выше в гл. IV (см. также гл. IX), на очень больших расстояниях от тела, когда $r \gg R_0$, $r \gg D$, электрическое поле всегда убывает строго, как $1/r^2$. На расстояниях, сравнимых с дебаевским радиусом, из-за дебаевской экранировки поле падает экспоненциально резко, т. е. гораздо быстрее, чем $1/r^2$. Наконец, если размер тела мал в сравнении с дебаевским радиусом в его ближайшей окрестности ($r < D$), экранировка не существенна и поле убывает по кулоновскому закону, т. е. медленнее, чем $1/r^2$.

Этот случай хотя и близок к рассмотренному выше, однако между ними имеется некоторая разница. В самом деле, из хода эффективной потенциальной энергии $U_{\text{эфф}}(r)$, изображенного для различных значений момента \mathcal{M} на рис. 55, видно, что максимум у функции $U_{\text{эфф}}(r)$ отсутствует теперь не только при значениях $\mathcal{M} > \mathcal{M}_K$, но и при $\mathcal{M} < \mathcal{M}_0$, где \mathcal{M}_0 — некоторое выделенное значение момента. Его легко определить, учитывая, что при больших значениях r потенциальная энергия $U(r)$ убывает строго, как $1/r^2$. Действительно, $U(r) = -\frac{C}{r^2} + U_1(r)$,

где $U_1(r)$ — функция, убывающая по модулю с ростом r быстрее, чем $1/r^2$. Подставляя это выражение в (8.4), имеем

$$U_{\text{эфф}}(r) = \left(\frac{\mathcal{M}^2}{2M} - C \right) \frac{1}{r^2} + U_1(r).$$

Отсюда ясно, что максимум или минимум у эффективной

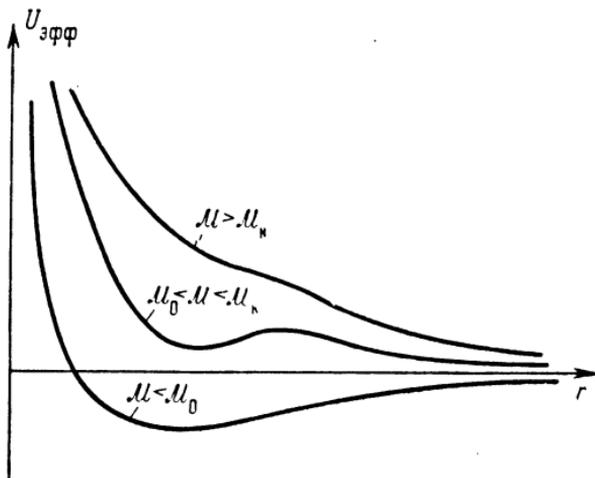


Рис. 55. Вид $U_{\text{эфф}}(r)$ (случай 3) для различных значений момента \mathcal{M} .

потенциальной энергии возможны только тогда, когда

$$\mathcal{M} > \mathcal{M}_0 = \sqrt{2MC}.$$

Области финитного и инфинитного движений при значениях момента $\mathcal{M} < \mathcal{M}_0$, как и в случае 1, отделены кривой $\mathcal{E} = 0$, т. е.

$$v_r^2 + v_\theta^2 = -\frac{2}{M} U(r). \quad (8.7)$$

При $\mathcal{M} > \mathcal{M}_0$ граница областей финитного и инфинитного движений определяется, как и в случае 2, условиями (8.11). Если поле при больших r падает быстрее, чем $1/r^2$, то $C = 0$, $\mathcal{M}_0 = 0$, и рассматриваемый здесь случай 3 совпадает со случаем 2. Если поле убывает строго как $1/r^2$, то

$$\mathcal{M}_0 = \sqrt{2MC} = \sqrt{-2Mr^2 U(r)},$$

т. е. граница областей финитного и инфинитного движений определяется условием (8.7), как и в случае 1.

Отталкивающий потенциал. В этом случае $U(r)$ — монотонная положительная функция ($U(r) \geq 0$). Следовательно, $U_{\text{эфф}}(r)$ также положительная, монотонно убывающая функция r , и движение частиц в таком поле всегда инфинитно.

§ 33. Решение кинетического уравнения

а. Кинетическое уравнение в случае центрально-симметричного поля. В центрально-симметричном поле $U(r)$ функция распределения, естественно, зависит от r , θ_1 и скоростей v_r , v_θ , изображенных на рис. 48. Существенно, однако, что эта система координат не является инерционной — скорости v_r и v_θ изменяются во времени из-за поворота системы координат при движении частицы по траектории. С учетом этого замечания кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} + \left(-\frac{1}{M} \frac{dU}{dr} + \left[\frac{dv_r}{dt} \right] \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} + \left[\frac{dv_\theta}{dt} \right] \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + Y = 0, \quad (8.14)$$

где Y — интеграл столкновений (см. § 3), а члены $\left[\frac{dv_r}{dt} \right]$ и $\left[\frac{dv_\theta}{dt} \right]$ описывают изменение скоростей v_r и v_θ , вызванное поворотом системы координат.

Чтобы определить $\left[\frac{dv_r}{dt} \right]$ и $\left[\frac{dv_\theta}{dt} \right]$, рассмотрим, как изменяются скорости v_r и v_θ , если частица перемещается по траектории за время dt из точки r в $r + dr$ (рис. 56, а). Система координат при этом поворачивается на угол $d\theta_1$, причем $\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{v_\theta}{r}$. При повороте системы координат на угол $d\theta_1$ изменяются также проекции скорости v на направления v_r и v_θ (рис. 56, б). В результате, как это видно из рис. 56, б,

$$v_r = v'_r + v'_\theta d\theta_1 + O(d\theta_1^2),$$

$$v_\theta = v'_\theta - v'_r d\theta_1 + O(d\theta_1^2).$$

Учитывая теперь, что $v_r = v_r(t + dt)$, $v_\theta = v_\theta(t + dt)$, а $v'_r = v_r(t)$ и $v'_\theta = v_\theta(t)$, находим

$$\left[\frac{dv_r}{dt} \right] = \frac{v_r(t + dt) - v_r(t)}{dt} = v_\theta \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{v_\theta^2}{r},$$

$$\left[\frac{dv_\theta}{dt} \right] = \frac{v_\theta(t + dt) - v_\theta(t)}{dt} = -\frac{v_r v_\theta}{r}.$$

Таким образом, кинетическое уравнение в центрально-симметричном поле в переменных r , θ_1 , v_r , v_θ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{v_\theta^2}{r} - \frac{1}{M} \frac{dU}{dr} \right) \times$$

$$\times \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_\theta v_r}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + Y = 0. \quad (8.15)$$

б. Стационарное решение кинетического уравнения в отсутствие столкновений. Стационарная функция распределения в отсутствие столкновений удовлетворяет уравнению

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} +$$

$$+ \left(\frac{v_\theta^2}{r} - \frac{1}{M} \frac{dU}{dr} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} -$$

$$- \frac{v_\theta v_r}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\theta} = 0. \quad (8.16)$$

Уравнение (8.16) линейное и решается методом характеристик. Иными словами, решение (8.16) является произвольной функцией от интегралов характеристических уравнений

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dv_r}{\frac{v_\theta^2}{r} - \frac{1}{M} \frac{dU}{dr}}, \quad (8.17)$$

$$\frac{dr}{v_r} = -\frac{r dv_\theta}{v_\theta v_r}, \quad (8.18)$$

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta_1}{v_\theta}. \quad (8.19)$$

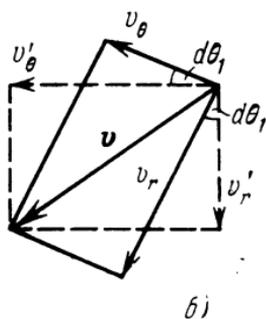
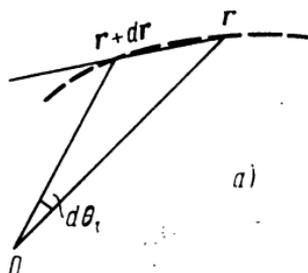


Рис. 56. Изменение скоростей v_r и v_θ при движении частицы по траектории.

Уравнение (8.18) сразу интегрируется, откуда получается

$$r = \frac{C_1}{v_\theta} = \frac{\mathcal{M}}{Mv_\theta}; \quad Mv_\theta r = \mathcal{M}. \quad (8.20)$$

Подставляя $v_\theta = \frac{\mathcal{M}}{Mr}$ в (8.17) и интегрируя его, находим

$$\frac{M}{2} v_r^2 + \frac{\mathcal{M}^2}{2Mr^2} + U(r) = C_2 = \mathcal{E}. \quad (8.21)$$

Выражая теперь скорость v_r через \mathcal{E} и \mathcal{M} , можно проинтегрировать и последнее уравнение (8.19), откуда следует, что

$$\theta_1 - \frac{\mathcal{M}}{(2M)^{1/2}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\mathcal{E} - U(r) - \frac{\mathcal{M}^2}{2Mr^2}}} = \text{const} = \theta_{10}. \quad (8.22)$$

Таким образом, характеристическими поверхностями для уравнения (8.16) являются интегралы движения частицы, т. е. энергия и момент частицы, а также константа (8.22), равная θ_{10} .

В итоге мы получаем, что решением уравнения (8.16) является произвольная функция энергии, момента и угла θ_{10} , т. е.

$$f = f \left[\frac{M}{2} (v_r^2 + v_\theta^2) + U(r); \right. \\ \left. rv_\theta; \theta_1 - \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{2M}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\mathcal{E} - U(r) - \frac{\mathcal{M}^2}{2Mr^2}}} \right]. \quad (8.23)$$

Точный вид функции $f(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \theta_{10})$ определяется граничными или начальными условиями задачи. Он существенно различен для частиц, совершающих инфинитное и финитное движения.

Для частиц, совершающих инфинитное движение, граничное условие надо налагать на бесконечности. Вместе с тем на бесконечности поле $U(r)$ исчезает и движение частиц не возмущено; функция распределения при этом максвелловская. Пусть, например, на бесконечности газ

покоится относительно центра сил. В этом случае

$$f_{r \rightarrow \infty} = N_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T} \right] = \\ = N_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\mathcal{E}}{\kappa T} \right), \quad (8.24)$$

где N_0 — концентрация частиц в невозмущенном газе. Следовательно, во всей области инфинитного движения

$$f_{\text{инф}}(v_r, v_\theta, r) = N_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\mathcal{E}}{\kappa T} \right) = \\ = N_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T} - \frac{U(r)}{\kappa T} \right]. \quad (8.25)$$

Распределение (8.25) установится при любом начальном распределении частиц в возмущенной области конечных размеров из-за их перемешивания с другими частицами, приходящими из невозмущенного пространства. С течением времени начальное возмущение концентрации инфинитных частиц убывает при этом пропорционально $(R/vt)^3 \sim 1/t^3$.

Частицы, совершающие финитное движение в отсутствие столкновений, никак не связаны с частицами, совершающими инфинитное движение, а следовательно, и с условиями на бесконечности. Их распределение определяется начальными условиями. Можно рассмотреть, например, такую постановку физической задачи. Пусть в начальный момент возмущающее поле $U = 0$ и частицы распределены по Максвеллу. Допустим теперь, что медленно включается поле $U(r)$, так что $\frac{1}{U} \frac{dU}{dt} \ll v/R$, где v — средняя скорость частиц и R — размер возмущенной области. Тогда в области положительных энергий всегда будет осуществляться равновесие и распределение будет максвелл-больцмановским. При этом частиц с отрицательной энергией не появится. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$f_{\text{фин}}(v_r, v_\theta, r) = \\ = \begin{cases} N_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T} - \frac{U(r)}{\kappa T} \right], & \mathcal{E} \geq 0, \\ 0, & \mathcal{E} < 0. \end{cases} \quad (8.26)$$

Заметим, что граница, отделяющая области финитного и инфинитного движений, зависит лишь от энергии и момента частиц, так что при любой функции $f_{\text{фин}}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ полная функция распределения удовлетворяет уравнению (8.16).

в. Влияние поглощающей поверхности. Наличие поглощающей поверхности можно было бы учесть, вводя специальный член ((1.11), (1.22)) в правую часть кинетического уравнения. Воспользуемся здесь, однако, граничным условием, записанным в ином виде. Учтем, что в данной точке r будут отсутствовать те частицы, траектория которых проходила через поглощающую поверхность S , т. е. через сферу радиуса R_0 . Тогда из закона сохранения энергии (уравнение (8.3)) следует, что

$$\frac{Mv_r^2}{2} + \frac{\mathcal{M}^2}{2Mr^2} + U(r) = \frac{Mv_{r_0}^2}{2} + \frac{\mathcal{M}^2}{2MR_0^2} + U(R_0). \quad (8.3a)$$

Поскольку частицы, проходившие через поверхность, отсутствуют, то $f(v_r, v_\theta, r, \theta_1) = 0$, когда $v_{r_0} \geq 0$. Если учесть (8.3a), то это условие можно переписать в виде

$$f_{\text{инф}}(v_r, v_\theta, r, \theta_1) = 0, \quad (8.27)$$

если

$$v_r^2 + v_\theta^2 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) + \frac{2}{M} [U(r) - U(R_0)] \geq 0, \quad (8.28a)$$

$$v_r \geq 0. \quad (8.28b)$$

Уравнение (8.28a) определяет гиперболу, которая изображена на рис. 57, а для притягивающего, а на рис. 57, б для отталкивающего потенциалов.

На рисунке заштрихованы косо те области, в которых функция распределения обращается в нуль из-за того, что частицы поглощаются телом (условия (8.28a) и (8.28b)).

Частицы, совершающие финитное движение, не поглощаются только в том случае, когда их орбита не проходит через поверхность тела. Следовательно, $f_{\text{фин}} = 0$ и при $v_r < 0$, если только выполняется условие (8.28a). На рис. 57, а область, где обращается в нуль функция $f_{\text{фин}}$, показана прямой штриховкой.

Ясно, что с увеличением радиуса поглощающей поверхности размер области, в которой возможно финитное движение, уменьшается. При $R_0 \geq r_k$, где r_k — характерный размер, определяемый формулой (8.8), финитное

движение вообще невозможно, так как при финитном движении минимальное расстояние частицы от центра тела всегда меньше r_k . Следовательно, r_k является важной характеристикой финитного движения. Поэтому можно считать тело *большим*, если $R_0 \gg r_k$, и *малым*, когда $R_0 \ll r_k$. В частности, в плазме при $\varphi \sim \frac{\kappa T}{e}$

$r_k \sim D$ (см. ниже § 34), так что тело является большим, если $R_0 \gg D$, и малым, если $R_0 \ll D$.

г. Об учете влияния столкновений. Поскольку столкновения редки, то в области инфинитного движения учет столкновений приводит к малым поправочным членам порядка R/l , где l — длина свободного пробега частиц. Следовательно, влиянием столкновений на функцию распределения инфинитных частиц можно пренебречь при достаточно больших значениях l . Существенно иная картина наблюдается в области финитного движения. Здесь в приближении, не учитывающем столкновений, мы устанавливаем лишь, что функция распределения есть некоторая функция интегралов движения частицы

$$f_{\text{фин}} = f_{\text{фин}}(\mathcal{E}, \mathcal{M}). \quad (8.29)$$

Точный вид функции $f_{\text{фин}}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ можно найти, лишь решая стационарное уравнение (8.15) с учетом интеграла столкновений. Правда, если частицы не поглощаются поверхностью тела, то в области финитного движения всегда устанавливается равновесное распределение Максвелла—Больцмана. Однако в наиболее интересном

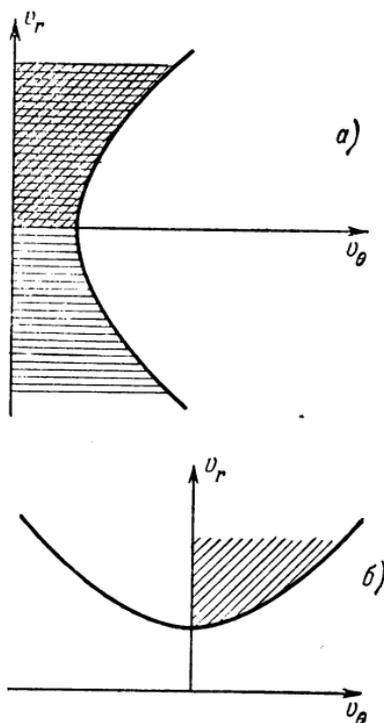


Рис. 57. Области, в которых функция распределения обращается в нуль из-за поглощения частиц на поверхности тела: а) притягивающиеся частицы; б) отталкивающиеся частицы.

случае поглощающей поверхности распределение существенно неравновесно. При этих условиях имеется обусловленный столкновениями стационарный поток частиц из области инфинитного движения в область финитного движения, а оттуда на поверхность тела. Функция распределения $f_{\text{фин}}$ является решением стационарного уравнения (8.15) при наличии такого потока. При этом поскольку функция распределения (8.29) обращает в нуль бесстолкновительную часть уравнения (8.15), то оно сводится к виду

$$\bar{Y} [f_{\text{фин}}] = 0, \quad (8.30)$$

где \bar{Y} — усредненный интеграл столкновений, записанный в пространстве энергии и момента. В самом деле, столкновения в рассматриваемом нами случае редки, так что от столкновения до столкновения происходит всегда некоторое перемешивание между разными координатными точками из-за движения частиц, это перемешивание и должно быть учтено указанным усреднением. Такое усреднение в обычном интеграле столкновений проводится фактически за время t , такое, что $\frac{1}{\nu} \gg t \gg \frac{1}{\omega}$, где $1/\nu$ — время свободного пробега, а ω — частота вращения частицы, совершающей финитное движение. Общее доказательство возможности такого усреднения и явный вид усредненного оператора \bar{Y} для ряда случаев можно найти, например, в [36, 37]. Разумеется, вид оператора \bar{Y} после усреднения зависит от потенциала поля $U(r)$ и от характера столкновений частиц. Соответствующие вычисления для наиболее простого случая приведены ниже в § 35.

§ 34. Концентрация частиц в окрестности покоящегося тела

Концентрация частиц в окрестности покоящегося тела

$$N(r) = 2\pi \int_{\text{инф}} f_{\text{инф}}(v_r, v_\theta, r) v_\theta dv_\theta dv_r + \\ + 2\pi \int_{\text{фин}} f_{\text{фин}}(v_r, v_\theta, r) v_\theta dv_\theta dv_r$$

естественно определяется двумя интегралами соответственно по областям финитного (фин) и инфинитного (инф) движений частиц.

Граница, разделяющая области финитного и инфинитного движений, как уже показано выше, определена условиями (8.7) и (8.11). В этом параграфе мы рассчитаем концентрацию частиц, совершающих инфинитное движение — $N_{\text{инф}}$. Заметим, что граница, разделяющая области инфинитного и финитного движений для притягивающихся частиц, существенно зависит от характера изменения потенциала поля. (Концентрацию притягивающихся частиц, совершающих инфинитное движение, будем обозначать через $N_{\text{инф}}^+$.) Соответственно изменяются и выражения для $N_{\text{инф}}^+$. Поэтому расчет концентрации притягивающихся частиц необходимо провести отдельно для каждого из трех рассмотренных выше характерных случаев изменения притягивающего потенциала $U(r)$.

Случай 1. $U(r)$ падает (по модулю) с ростом r всегда медленнее, чем $1/r^2$.

Примем вначале, что размер поглощающего тела бесконечно мал, т. е. рассмотрим поле притягивающего центра. Граница области инфинитного движения определена условием (8.7). Интегрируя в этой области функцию распределения (8.25), имеем

$$\begin{aligned}
 N_{\text{инф}}^+(r) &= \\
 &= \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T} \right)^{3/2} \int\int_{\text{инф}} \exp \left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T} - \frac{U(r)}{\kappa T} \right] v_\theta \, dv_\theta \, dv_r = \\
 &= \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] \times \\
 &\times \int\int_{\substack{v_r^2 + v_\theta^2 \geq -\frac{2}{M} U(r); \\ v_\theta \geq 0}} \exp \left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T} \right] v_\theta \, dv_\theta \, dv_r = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} N_0 \left(\frac{M}{\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \int_0^{\sqrt{-\frac{2}{M}U(r)}} \exp\left(-\frac{Mv_r^2}{2\kappa T}\right) dv_r \int_{\sqrt{-\frac{2}{M}U(r)-v_r^2}}^{\infty} \times \right. \\ & \times \exp\left(-\frac{Mv_\theta^2}{2\kappa T}\right) v_\theta dv_\theta + \int_{\sqrt{-\frac{2}{M}U(r)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{Mv_r^2}{2\kappa T}\right) dv_r \times \\ & \left. \times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{Mv_\theta^2}{2\kappa T}\right) v_\theta dv_\theta \right\}, \end{aligned}$$

или после простых вычислений

$$\begin{aligned} N_{\text{инф}}^+(r) = N_0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} + \right. \\ \left. + \exp\left[-\frac{U(r)}{\kappa T}\right] \left[1 - \Phi\left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}}\right) \right] \right\}, \quad (8.31) \end{aligned}$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей.

Важно отметить, что в рассматриваемом случае концентрация частиц в точке r полностью определяется значением потенциала U в той же точке r . При больших значениях $-\frac{U(r)}{\kappa T}$ концентрация частиц растет, как $\sqrt{-U(r)/\kappa T}$, а при малых $-\frac{U(r)}{\kappa T}$ значение $N(r)$ близко к N_0 , так, если $-\frac{U(r)}{\kappa T} \ll 1$, то

$$N_{\text{инф}}^+(r) = N_0 \left[1 - \frac{U(r)}{\kappa T} + \dots \right], \quad (8.31a)$$

а для $-\frac{U(r)}{\kappa T} \gg 1$

$$N_{\text{инф}}^+(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_0 \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \left[1 - \frac{\kappa T}{2U(r)} - \frac{(\kappa T)^2}{4U^2(r)} - \dots \right]. \quad (8.31b)$$

Если мы имеем не просто силовой центр, а поглощающее тело, то при вычислении средних нужно учесть еще и обрезание функции распределения из-за поглощения частиц, указанное в предыдущем параграфе. В этом случае область интегрирования определена условиями

(8.7) и (8.28а), (8.28б), (см. рис. 57), т. е. для шара радиуса R_0

$$v_r^2 + v_\theta^2 \geq -\frac{2}{M} U(r) \quad (8.7)$$

и

$$v_r^2 + v_\theta^2 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \leq -\frac{2}{M} [U(r) - U(R_0)] \text{ при } v_r \geq 0. \quad (8.28)$$

Интегрируя теперь функцию распределения (8.25), находим, что

$$\begin{aligned} N_{\text{инф}}^+(r) &= \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T}\right)^{3/2} \iint \exp\left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T} - \frac{U(r)}{\kappa T}\right] \times \\ &\quad \times v_\theta dv_\theta dv_r = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{U(r)}{\kappa T}\right] \times \\ &\quad \times \left\{ \iint_{\substack{v_r \leq 0 \\ v_r^2 + v_\theta^2 \geq -\frac{2}{M} U(r)}} \exp\left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T}\right] v_\theta dv_\theta dv_r + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{\substack{v_r > 0 \\ v_r^2 + v_\theta^2 \geq -\frac{2}{M} U(r)}} \exp\left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T}\right] v_\theta dv_\theta dv_r \right\}. \\ &\quad v_r^2 + v_\theta^2 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \leq -\frac{2}{M} [U(r) - U(R_0)] \end{aligned}$$

В первом члене интегрирование проводится так же, как и выше при выводе формулы (8.31), так что

$$\begin{aligned} N_{\text{инф}}^+(r) &= N_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} + \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{U(r)}{\kappa T}\right] \right\} \times \\ &\quad \times \left[1 - \Phi\left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}}\right) \right] + \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{U(r)}{\kappa T}\right] \times \\ &\quad \times \sqrt{-\frac{2}{M} [U(r) - U(R_0)]} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{Mv_r^2}{2\kappa T}\right) dv_r \times \right. \\ &\quad \times \int_{\sqrt{-\frac{2}{M} U(r) - v_r^2}}^\infty \exp\left(-\frac{Mv_\theta^2}{2\kappa T}\right) v_\theta dv_\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{Mv_r^2}{2\kappa T}\right) dv_r \times \\
& \sqrt{-\frac{2}{M}\left[U(r) - \frac{R_0^2}{r^2}U(R_0)\right]} \\
& \times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{Mv_\theta^2}{2\kappa T}\right) v_\theta dv_\theta \Big\} \cdot \\
& \sqrt{\frac{v_r^2 + \frac{2}{M}[U(r) - U(R_0)]}{\frac{r^2}{R_0^2} - 1}}
\end{aligned}$$

Все интегралы легко вычисляются. Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
N_{\text{инф}}^+(r) = N_0 \Big\{ & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{R_0^2 U(R_0)}{r^2 U(r)}}\right) + \\
& + \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{U(r)}{\kappa T}\right] \left[1 - \Phi\left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}}\right)\right] + \\
& + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \exp\left[-\frac{r^2 U(r) - R_0^2 U(R_0)}{(r^2 - R_0^2)\kappa T}\right] \times \\
& \times \left[1 - \Phi\left(\sqrt{-\frac{r^2 U(r) - R_0^2 U(R_0)}{(r^2 - R_0^2)\kappa T}}\right)\right] \Big\}. \quad (8.32)
\end{aligned}$$

Из (8.32) видно, что концентрация частиц в точке r при наличии поглощающей поверхности зависит уже не только от значения потенциала U в той же точке r , но и от значения U на поверхности шара, а также от отношения r/R_0 . С увеличением отношения r/R_0 , когда $r/R_0 \rightarrow \infty$, роль поглощения становится несущественной и формула (8.32) совпадает с (8.31):

$$\begin{aligned}
N_{\text{инф}}^+ \Big|_{r/R_0 \rightarrow \infty} (r) = N_0 \Big\{ & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} + \\
& + \exp\left[-\frac{U(r)}{\kappa T}\right] \left[1 - \Phi\left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}}\right)\right] \Big\}.
\end{aligned}$$

Наоборот, при $r \rightarrow R_0$

$$\begin{aligned}
N_{\text{инф}}^+ \Big|_{r/R_0 \rightarrow 1} (r) = \frac{N_0}{2} \Big\{ & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} + \\
& + \exp\left[-\frac{U(r)}{\kappa T}\right] \left[1 - \Phi\left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}}\right)\right] \Big\},
\end{aligned}$$

т. е. концентрация частиц вблизи поверхности из-за поглощения уменьшается вдвое.

Случай 2. Потенциал U падает (по модулю) с ростом r , при малых r медленнее, а при больших r быстрее, чем $1/r^2$. Опять рассмотрим вначале поле притягивающего центра. В этом случае граница области инфинитного движения определяется теперь условиями (8.11) (см. рис. 54). Интегрируя функцию распределения (8.25) в этой области, находим, что концентрация частиц

$$\begin{aligned}
 N_{\text{инф}}^+(r) &= \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T} \right)^{3/2} \int \int \exp \left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T} - \frac{U(r)}{\kappa T} \right] \times \\
 &\quad \times v_\theta \, dv_\theta \, dv_r = \frac{2N_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] \times \\
 &\quad \times \left\{ \int_{\sqrt{-\frac{2}{M}U(r)}}^{\infty} \exp \left(-\frac{Mv_r^2}{2\kappa T} \right) dv_r \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{Mv_\theta^2}{2\kappa T} \right) v_\theta \, dv_\theta + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\sqrt{-\frac{2}{M}U(r)}} \exp \left(-\frac{Mv_r^2}{2\kappa T} \right) dv_r \int_{v_\theta(v_r)}^{\infty} \exp \left(-\frac{Mv_\theta^2}{2\kappa T} \right) v_\theta \, dv_\theta \right\} = \\
 &= N_0 \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] \left\{ 1 - \Phi \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \right) \right\} + \\
 &+ \sqrt{\frac{2M}{\pi\kappa T}} \int_0^{\sqrt{-\frac{2}{M}U(r)}} \exp \left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2(v_r))}{2\kappa T} \right] dv_r, \quad (8.33)
 \end{aligned}$$

где $v_\theta(v_r)$ определяется уравнением (8.11). В последнем интеграле можно перейти к новой переменной r_0 , связанной с $v_\theta(v_r)$ соотношением (8.11). В результате исчезает неявная функция $v_\theta^2(v_r)$. Действительно, из (8.11а) мы имеем, что

$$\frac{dv_r}{dr_0} = \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2U}{dr_0^2} \right)}{2M^{1/2} \sqrt{2[U(r_0) - U(r)] - r_0 \frac{dU(r_0)}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right)}},$$

причем при $v_r \rightarrow 0$, $r_0 \rightarrow \varrho_0(r)$, и при $v_r \rightarrow \sqrt{-\frac{2}{M}U(r)}$, $r_0 \rightarrow \infty$ (см. § 32). Поэтому

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2M}{\pi\kappa T}\right)^{1/2} \int_0^{\sqrt{-\frac{2}{M}U(r)}} \exp\left[-\frac{M(v_r^2 + v_0^2(v_r))}{2\kappa T}\right] dv_r = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa T}} \int_{\varrho_0(r)}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2U}{dr_0^2}\right)}{\left[U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)\right]^{1/2}} \times \\ & \quad \times \exp\left\{-\frac{M}{2\kappa T} \left[\frac{2}{M}U(r_0) - \frac{2}{M}U(r) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{r_0}{M} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right) + \frac{r_0^3}{Mr^2} \frac{dU}{dr_0}\right]\right\} dr_0 = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa T}} \exp\left[\frac{U(r)}{\kappa T}\right] \times \\ & \quad \times \int_{\varrho_0(r)}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2U}{dr_0^2}\right)}{\left[U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)\right]^{1/2}} \times \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0}\right] dr_0. \end{aligned}$$

Используя последнее преобразование, имеем окончательно,

$$\begin{aligned} N_{\text{инф}}^+(r) = N_0 \left\{ \exp\left[-\frac{U(r)}{\kappa T}\right] \left[1 - \Phi\left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}}\right)\right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa T}} \int_{\varrho_0(r)}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2U}{dr_0^2}\right)}{\left[U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)\right]^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0}\right] dr_0 \right\}, \quad (8.34) \end{aligned}$$

где $\varrho_0(r)$ — максимальный корень уравнения (8.12).

Корень $\varrho_0(r)$, как указывалось выше (см. § 32 и рис. 53), всегда больше, чем r_K . Поэтому во всей области изменения параметра r_0 в интегральном члене в формуле

(8.34) потенциал $U(r_0)$ падает с ростом r_0 быстрее, чем $1/r_0^2$, т. е. всегда $-U(r_0) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} < 0$, и экспоненциальный член меньше единицы. Если во всей области изменения параметра r_0 выполнено соотношение

$$\frac{U(r_0)}{\kappa T} + \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0} \ll 1, \quad (8.35)$$

то, разлагая экспоненту в выражении (8.34), находим, что

$$\begin{aligned} N_{\text{инф}}^+(r) = N_0 \left\{ \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] \left[1 - \Phi \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa T}} \int_{\rho_0(r)}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2U}{dr_0^2}\right)}{\left[U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)\right]^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{U(r_0) + \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0}}{\kappa T} + \frac{\left(U(r_0) + \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0}\right)^2}{2(\kappa T)^2} - \dots \right] dr_0 \right\} = \\ = N_0 \left\{ \left[1 - \Phi \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \right) \right] \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi\kappa T}} \left[\sqrt{U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)} \right]_{\rho_0(r)}^{\infty} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \left[\frac{A_1(r)}{\kappa T} - \frac{B_1(r)}{(\kappa T)^2} + \dots \right] \right\} = \\ = N_0 \left\{ \left[1 - \Phi \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \right) \right] \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \left[1 - \frac{A_1(r)}{\kappa T} + \frac{B_1(r)}{(\kappa T)^2} - \dots \right] \right\}, \quad (8.36) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1(r) = \frac{1}{4} \int_{\rho_0(r)}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2U}{dr_0^2}\right) \left(U(r_0) + \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0}\right)}{\sqrt{U^2(r) - U(r) U(r_0) + \frac{r_0}{2} U(r) \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)}} dr_0, \\ B_1(r) = \frac{1}{8} \int_{\rho_0(r)}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2U}{dr_0^2}\right) \left(U(r_0) + \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0}\right)^2}{\sqrt{U^2(r) - U(r) U(r_0) + \frac{r_0}{2} U(r) \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)}} dr_0. \end{aligned}$$

Для малых значений r , т. е. когда $r \ll r_K$ и $\varrho_0(r) \rightarrow \infty$ (см. § 32, рис. 53 и формулу (8.12a)), условие (8.35) всегда

выполняется. В этом случае, если пренебречь в формуле (8.36) поправочными членами $A_1(r)$ и $B_1(r)$, то она совпадает с формулой (8.31), т. е.

$$N_{\text{инф}}^+(r) = N_1(r) = N_0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} + \left[1 - \Phi \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \right) \right] \times \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] \right\}. \quad (8.36a)$$

Этот ответ понятен, поскольку потенциал $U(r)$ убывает быстрее, чем $1/r^2$, лишь начиная с точки r_K . Поэтому, если $r \ll r_K$, то наличие области быстрого падения потенциала не сказывается на концентрации частиц в точке r .

Поскольку фактически экспоненциальный член всегда меньше единицы, то на любом расстоянии r концентрация частиц $N_{\text{инф}}^+(r)$ меньше, чем $N_1(r)$. Это объясняется тем, что в формуле (8.34) учитывается наличие области резкого падения

потенциала $U(r)$, вследствие чего часть частиц, приходящих из бесконечности, не долетает до точки r_K , а «отражается» на больших расстояниях от центра (см. § 32).

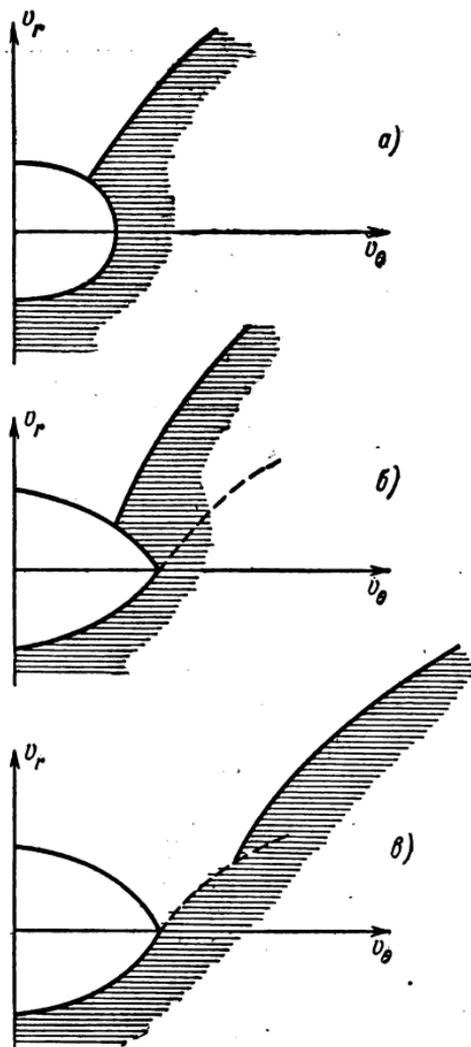


Рис. 58. Область интегрирования в пространстве скоростей при различных значениях r .

Важно подчеркнуть, что в отличие от рассматриваемого выше случая медленно падающего потенциала $U(r)$ значение концентрации частиц в точке r теперь существенно зависит от всего хода потенциала $U(r)$, а не только от значения U в точке r .

При наличии поглощающего тела для вычисления концентрации теперь, как и выше, необходимо учитывать обрезание функции распределения частиц, вызванное их поглощением на поверхности тела — сфере радиуса R_0 . Область интегрирования в пространстве скоростей v_r и v_θ определяется тогда уравнениями (8.11), (8.28). Она изображена для различных расстояний от центра тела r на рис. 58 (заштрихованная область). При этом характер области интегрирования различен в зависимости от соотношения между расстоянием r , размером тела R_0 и расстоянием r_k , характеризующим изменение потенциала поля $U(r)$ (см. § 32). При $r < r_k$ потенциал $U(r)$ убывает (по модулю) с ростом r медленнее, а при $r > r_k$ — быстрее, чем $1/r^2$. На рис. 58, а область интегрирования изображена для расстояния $r < r_k$, а на рис. 58, б и в для $r > r_k$. При этом в случае, изображенном на рис. 58, б, радиус тела R_0 меньше, чем $R_{0k}(r)$, где R_{0k} определено соотношением

$$-U(R_{0k}) + U(r) + \frac{r}{2} \frac{dU}{dr} \left(1 - \frac{r^2}{R_{0k}^2} \right) = 0,$$

вытекающим из условия (8.11а) при $v_r = 0$. В случае же, изображенном на рис. 58, в, напротив, $R_0 > R_{0k}(r)$. Как ясно из последнего рисунка, в этом случае существенна не только кривая, разделяющая области инфинитного и финитного движений (сплошная линия), но и кривая в области инфинитного движения (пунктир на рис. 58, б, в), разделяющая частицы, точки поворота которых находятся в ближней и дальней от центра тела областях (см. § 32, рис. 52, 54, б, в). Интегрируя так же, как и ранее, функцию распределения (8.25), получаем, что

$$N_{\text{инф}}^+(r) = \frac{N_0}{2} \left\{ \left[1 - \Phi \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \right) \right] \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{q_0^3(R_0)}{2R_0^3 \kappa T} \frac{dU}{dr} (q_0(R_0)) - \frac{U(r) - U(R_0)}{\kappa T \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right)}} \right) \right] \right\} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left[\frac{R_0^2 U(R_0) - r^2 U(r)}{(r^2 - R_0^2) \kappa T} \right] + \\
& \left\{ \frac{1}{2 \sqrt{\pi \kappa T}} \int_{\rho_0(r)}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2 U}{dr_0^2}\right)}{\left[U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)\right]^{1/2}} \times \right. \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2 \kappa T} \frac{dU}{dr_0} \right] dr_0 + \frac{1}{2 \sqrt{\pi \kappa T}} \times \\
& \quad \times \int_{\rho_0(r)}^{\rho(R_0)} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2 U}{dr_0^2}\right)}{\left[U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)\right]^{1/2}} \times \\
& \quad \left. \times \exp \left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2 \kappa T} \frac{dU}{dr_0} \right] dr_0 \right\}. \quad (8.37)
\end{aligned}$$

Значение $N_{\text{инф}}^+(r)$, определяемое формулой (8.37), всегда меньше, чем соответствующее значение $N_{\text{инф}}^+(r)$ в отсутствие поглощающей поверхности, определяемое формулой (8.34). При $R_0/r \rightarrow 0$, когда радиус поверхности мал, формулы (8.37) и (8.34) становятся одинаковыми; если же $r \rightarrow R_0$, то из-за наличия поглощающей поверхности концентрация частиц уменьшается вдвое. Если радиус тела $R_0 \ll r_K$, то (8.37), естественно, переходит в (8.32). Если же потенциал $U(r)$ резко спадает вблизи поверхности тела, то в области, где $-U(r)/\kappa T \ll 1$,

$$N_{\text{инф}}^+(r) = \frac{N_0}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \right).$$

Случай 3. Потенциал $U(r)$ падает (по модулю) с ростом r вначале медленнее, затем быстрее, чем $1/r^2$, а при больших r строго, как $1/r^2$. Иначе говоря, пусть при $r \rightarrow \infty$

$$U(r) = -\frac{C}{r^2} = -C_0 \frac{\kappa T R_0^2}{r^2},$$

где C_0 — безразмерная постоянная, определяющая характер изменения потенциала $U(r)$ при больших значениях r .

В этих случаях, при малых значениях момента $\mathcal{M} < \mathcal{M}_0 = \sqrt{2MC}$ граница области инфинитного движения определяется условием (8.7), а при $\mathcal{M} > \mathcal{M}_0$ — условием (8.11). Интегрируя, как обычно, функцию распре-

деления по области инфинитного движения в поле притягивающего центра, находим

$$\begin{aligned}
 N_{\text{инф}}^+(r) = N_0 \left\{ \left[1 - \Phi \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \right) \right] \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] + \right. \\
 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} - \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T} - C_0 \frac{R_0^2}{r^2}} \right) + \\
 \left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa T}} \int_{\rho_0(r)}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2U}{dr_0^2}\right)}{\left[U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right) \right]^{1/2}} \times \right. \\
 \left. \times \exp \left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0} \right] dr_0 \right\}. \quad (8.38)
 \end{aligned}$$

Формула (8.38) отличается от (8.34) тем, что появляется дополнительное слагаемое из-за интегрирования по моментам $\mathcal{M} < \mathcal{M}_0$. Если потенциал поля на больших расстояниях r падает быстрее, чем $1/r^2$, то $C_0 = 0$ и формула (8.38) переходит в (8.34). Если же $U(r)$ всегда падает как $1/r^2$, то $-\frac{U(r)}{\kappa T} - C_0 \frac{R_0^2}{r^2} \equiv 0$ и, кроме того, интегральный член равен нулю, так что формула (8.38) переходит в этом случае в (8.31).

С учетом поглощающей поверхности область интегрирования задается условием (8.28), а также условиями (8.7) при $v_0 < \sqrt{\frac{2C_0\kappa TR_0^2}{Mr^2}}$ и (8.11) при $v_0 > \sqrt{\frac{2C_0\kappa TR_0^2}{Mr^2}}$.

В результате интегрирования для $N_{\text{инф}}^+(r)$ получается выражение, отличающееся от (8.37) лишь дополнительным членом,

$$\Delta N_{\text{инф}}^+ = \frac{N_0}{2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} - \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T} - C_0 \frac{R_0^2}{r^2}} \right) \right\} \quad (8.37a)$$

при $R_0 > R_{0\kappa}(r)$ и

$$\begin{aligned}
 \Delta N_{\text{инф}}^+ = \frac{N_0}{2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} + \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T} + \frac{R_0^2 U(R_0)}{r^2 \kappa T}} - \right. \right. \\
 \left. \left. - 2 \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T} - C_0 \frac{R_0^2}{r^2}} \right) + \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\times \left[\Phi \left(\sqrt{\frac{\rho_0^3(R_0)}{2R_0^2 \kappa T} \frac{dU}{dr}(\rho_0(R_0)) - \frac{U(r) - U(R_0)}{\kappa T} \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right)} \right) - \right. \\ \left. - \Phi \left(\sqrt{\frac{R_0^2 U(R_0) - r^2 U(r)}{(r^2 - R_0^2) \kappa T}} \right) \right] \exp \left[\frac{R_0^2 U(R_0) - r^2 U(r)}{(r^2 - R_0^2) \kappa T} \right] \} \quad (8.376)$$

при $R_0 < R_{0к}(r)$. Например, в случае, когда $R_0 > R_{0к}(r)$

$$N_{\text{инф}}^+(r) = \frac{N_0}{2} \left\{ \left[1 - \Phi \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \right) \right] \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} - \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T} - C_0 \frac{R_0^2}{r^2}} \right) + \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\rho_0^3(R_0)}{2R_0^2 \kappa T} \frac{dU}{dr}(\rho_0(R_0)) - \frac{U(r) - U(R_0)}{\kappa T} \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right)} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left[\frac{R_0^2 U(R_0) - r^2 U(r)}{(r^2 - R_0^2) \kappa T} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa T}} \int_{\rho_0(r)}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2 U}{dr_0^2}\right)}{\left[U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)\right]^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0} \right] dr_0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa T}} \int_{\rho_0(r)}^{\rho_0(R_0)} \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2 U}{dr_0^2}\right)}{\left[U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)\right]^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0} \right] dr_0 \right\}. \quad (8.39)$$

Таким образом, мы видим, что в зависимости от характера изменения потенциал $U(r)$ в окрестности покоящегося тела (случай 1—3) существенно изменяет вид формул, определяющих концентрацию частиц. При этом естественно, что при наличии поглощающей поверхности тела формулы становятся более сложными. Важно при этом отметить, что во всех случаях концентрация частиц существенно зависит от потенциала поля и может быть определена только, если известна функция $U(r)$. В про-

стных случаях формулы для концентрации частиц содержат табулированные функции, а в более сложных также одномерные интегралы, требующие численного интегрирования.

До сих пор мы рассматриваем поведение притягивающихся частиц. Перейдем теперь к отталкивающимся частицам. В этом случае потенциал $U(r) > 0$ и движение частиц, как указывалось выше, всегда инфинитно. В поле отталкивающего центра справедливо поэтому распределение Максвелла — Больцмана, так что концентрация частиц $N^-(r)$ равна

$$N^-(r) = N_0 \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right]. \quad (8.40)$$

При учете поглощения частиц на поверхности сферы радиуса R_0 область интегрирования ограничена условиями (8.28)

$$v_r^2 + v_\theta^2 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) \geq \frac{2}{M} [U(R_0) - U(r)] \text{ при } v_r > 0 \quad (8.28)$$

(см. также рис. 57, б). В этом случае концентрация частиц

$$\begin{aligned} N^-(r) &= \frac{N_0}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \left(\frac{M}{\kappa T} \right)^{3/2} \times \\ &\times \iint \exp \left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T} - \frac{U(r)}{\kappa T} \right] v_\theta dv_\theta dv_r = \frac{N_0}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \left(\frac{M}{\kappa T} \right)^{3/2} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2}{M} [U(R_0) - U(r)]}} \exp \left(-\frac{Mv_r^2}{2\kappa T} \right) dv_r \times \right. \\ &\quad \times \int_0^\infty v_\theta \exp \left(-\frac{Mv_\theta^2}{2\kappa T} \right) dv_\theta + \int_0^\infty \exp \left(-\frac{Mv_r^2}{2\kappa T} \right) dv_r \times \\ &\quad \times \left. \int_0^\infty \frac{v_\theta \exp \left(-\frac{Mv_\theta^2}{2\kappa T} \right) dv_\theta}{\sqrt{\frac{2}{M} [U(r) - U(R_0)] + v_r^2}} \right\} \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right]. \end{aligned}$$

Интегрируя, получаем

$$N^-(r) = \frac{N_0}{2} \left\{ 1 + \Phi \left(\sqrt{\frac{U(R_0) - U(r)}{\kappa T}} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{r^2 U(R_0) - r^2 U(r)}{(r^2 - R_0^2) \kappa T}} \right) \right] \right\} \times \\ \times \exp \left[\frac{R_0^2 U(R_0) - R_0^2 U(r)}{(r^2 - R_0^2) \kappa T} \right] \exp \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \right]. \quad (8.41)$$

При $r \rightarrow R_0$, $U(r) \rightarrow U(R_0)$ и $N^-(r) \rightarrow \frac{N_0}{2} \exp[-U(r)/\kappa T]$;

при $r/R_0 \rightarrow \infty$, $U(r) \ll U(R_0)$ и

$$N^-(r) \rightarrow N_0 \exp[-U(r)/\kappa T].$$

§ 35. Распределение частиц, совершающих финитное движение

Выше уже указывалось, что характер распределения частиц на финитных орбитах в окрестности поглощающего тела определяется столкновениями частиц. Функция распределения удовлетворяет при этом уравнению (8.30)

$$\bar{Y}(f_{\text{фин}}) = 0, \quad (8.30)$$

где \bar{Y} — усредненный интеграл столкновений. Его вид, естественно, зависит от характера столкновений частиц.

а. Усредненный интеграл столкновений. Остановимся на наиболее простом случае, когда притягивающиеся к центру частицы сталкиваются с частицами, на которые поле не действует. Такой случай осуществляется в слабо ионизированной плазме, где заряженные частицы сталкиваются с нейтральными частицами, распределение которых не зависит от поля. Уравнение (8.30) будет тогда линейным. Если при этом рассматривать притягивающий центр, т. е. бесконечно малое тело, поверхность которого поглощает частицы, и принять, что оно заряжено положительно, так что притягивающимися частицами являются электроны, то вид интеграла столкновений существенно упрощается.

Из-за малости массы электрона, при каждом упругом его столкновении с нейтральными частицами, импульс

электрона изменяется сильно, а его энергия изменяется лишь незначительно. Среднее относительное изменение энергии при одном ударе в m/M раз меньше, чем относительное изменение импульса электрона. Это приводит к тому, что равновесное распределение электронов по энергии устанавливается гораздо медленнее, чем по другим переменным. Следовательно, неравновесная функция распределения зависит в основном лишь от энергии электрона.

При каждом ударе электрон отдает лишь малую часть своей энергии. Это позволяет представить интеграл столкновений в пространстве энергии в дифференциальной форме в виде (1.35). Само кинетическое уравнение является при этом уравнением типа Фоккера — Планка, т. е. уравнением диффузии в пространстве энергий

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -A(\mathcal{E}) \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} [I(\mathcal{E})], \quad (8.42)$$

где $I(\mathcal{E})$ — поток частиц в пространстве энергии, а A — нормировочный коэффициент, также зависящий от энергии \mathcal{E} . Поток $I(\mathcal{E})$ должен обращаться в нуль в случае равновесного распределения Больцмана. Следовательно,

$$I(\mathcal{E}) = -\frac{D(\mathcal{E})}{2A(\mathcal{E})} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} + \frac{1}{\kappa T} f \right) \quad (8.43)$$

(см., например, [23]), где $D(\mathcal{E})$ — также некоторый коэффициент, смысл которого будет выяснен ниже.

Таким образом, в рассматриваемом случае функция распределения частиц на финитных орбитах зависит лишь от их энергии и определяется уравнением (8.30), которое записывается теперь в виде

$$\bar{Y}(f) = A(\mathcal{E}) \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \left\{ \frac{D(\mathcal{E})}{2A(\mathcal{E})} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} + \frac{1}{\kappa T} f \right] \right\} = 0. \quad (8.44)$$

Нам необходимо определить лишь неизвестные функции $A(\mathcal{E})$ и $D(\mathcal{E})$.

Уравнение типа Фоккера — Планка, как указывалось в § 3, применимо не только в случае слабо ионизированной плазмы для описания столкновений электронов с нейтральными частицами, но и в гораздо более широких условиях, например, в сильно ионизированной плазме при кулоновском взаимодействии между частицами. При

этом функция распределения финитных частиц зависит, вообще говоря, уже не только от энергии, но и от момента частицы. Поэтому уравнение (8.44) в общем случае, когда применимо приближение Фоккер — Планка для интеграла столкновений, представляется в виде

$$\bar{Y}(f) = A(\mathcal{E}, \mathcal{M}) \operatorname{div}_{\mathcal{E}, \mathcal{M}} I(\mathcal{E}, \mathcal{M}), \quad (8.45)$$

где $A(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ — по-прежнему нормировочный коэффициент, а $I(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ — поток частиц в пространстве энергии и момента.

б. Определение нормировочного коэффициента. Нормировочный коэффициент $A(\mathcal{E})$ в уравнении (8.44) — величина, обратная объему конфигурационного пространства (r, v) при заданной энергии \mathcal{E} . Действительно, пусть N есть полное число финитных частиц, энергия которых изменяется между значениями \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , т. е.

$$N = \int_{\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_2} f d\Gamma = \int_{\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_2} f dv_x dv_y dv_z dx dy dz.$$

Изменение N в единицу времени в силу закона сохранения числа частиц равно разности потоков частиц в конфигурационном пространстве r, v через поверхности постоянной энергии \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , т. е.

$$\frac{dN}{dt} = I(\mathcal{E}_1) - I(\mathcal{E}_2).$$

С другой стороны, интегрируя уравнение (8.42) по объему $d\Gamma$ между уровнями энергии \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , получаем

$$\frac{dN}{dt} = \int_{\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_2} A(\mathcal{E}) \frac{dI}{d\mathcal{E}} d\Gamma = \int_{\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_2} A(\mathcal{E}) \frac{dI}{d\mathcal{E}} d\mathcal{E} \int \frac{d\Gamma}{d\mathcal{E}}. \quad (8.46)$$

Поскольку правая часть этого выражения должна иметь вид $I(\mathcal{E}_1) - I(\mathcal{E}_2)$, то

$$A(\mathcal{E}) \int \frac{d\Gamma}{d\mathcal{E}} = 1.$$

Таким образом, $A(\mathcal{E})$ — действительно величина, обратная объему конфигурационного пространства при заданной энергии \mathcal{E} :

$$A(\mathcal{E}) = \left[\int \frac{d\Gamma}{d\mathcal{E}} \right]^{-1} = \left\{ \int \delta[\mathcal{E} - \mathcal{E}(v, r)] d^3v d^3r \right\}^{-1}. \quad (8.47)$$

Учитывая, что мы рассматриваем движение в центрально-симметричном поле $U(r)$, находим

$$\begin{aligned} A(\mathcal{E}) &= \left\{ \int \delta \left[\mathcal{E} - \frac{mv^2}{2} - U(r) \right] d^3v d^3r \right\}^{-1} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \int v^2 r^2 \delta \left[\mathcal{E} - \frac{mv^2}{2} - U(r) \right] dv dr \right\}^{-1} = \\ &= \frac{m^{3/2}}{16\pi^2 \sqrt{2}} \left[\int \sqrt{\mathcal{E} - U(r)} r^2 dr \right]^{-1}. \quad (8.48) \end{aligned}$$

Интегрирование в последнем выражении ведется по области r , в которой $\mathcal{E} - U(r) \geq 0$. Коэффициент $A(\mathcal{E})$ при $\mathcal{E} < 0$ отличен от нуля только для притягивающихся частиц, т. е. когда $U(r) < 0$. Если у функции $U(r)$ имеется область, где она падает более резко, чем $1/r^2$, то финитное движение возможно и при положительных энергиях $\mathcal{E} > 0$ (см. § 32). В этом случае, однако, граница областей финитного и инфинитного движений, определяемая условиями (8.11), зависит как от энергии, так и от момента частицы. Если же $U(r)$ всегда падает медленнее, чем $1/r^2$, то финитное движение возможно лишь при $\mathcal{E} < 0$ (см. (8.7)).

Рассмотрим, например, кулоновский центр с зарядом eZ . Тогда

$$U(r) = -\frac{e^2 Z}{r}. \quad (8.49)$$

Из (8.48) следует, при использовании (8.49), что

$$A(\mathcal{E}) = \frac{m^{3/2} |\mathcal{E}|^{5/2}}{\sqrt{2} \pi^3 Z^3 e^6}. \quad (8.50)$$

Здесь учтено равенство

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} x^{3/2} dx = \frac{\pi}{16}.$$

Аналогичным образом, коэффициент $A(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ в общем уравнении (8.45) имеет вид

$$\begin{aligned} A(\mathcal{E}, \mathcal{M}) &= \left[\int \frac{d^2\Gamma}{d\mathcal{E} d\mathcal{M}} \right]^{-1} = \\ &= \frac{m^{5/2}}{8\sqrt{2}\pi^2\mathcal{M}} \left[\int \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} - U(r) - \frac{\mathcal{M}^2}{2mr^2}}} \right]^{-1}. \quad (8.51) \end{aligned}$$

Интегрирование здесь ведется по той области значений r , в которой подкоренное выражение больше нуля. В частности, для кулоновского поля (8.49) при $\mathcal{E} < 0$ находим

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} + \frac{e^2 Z}{r} - \frac{\mathcal{M}^2}{2mr^2}}} = \frac{\pi e^2 Z}{2 |\mathcal{E}|^{3/2}}. \quad (8.52)$$

Следовательно, в этом случае

$$A(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = \frac{m^{5/2} |\mathcal{E}|^{3/2}}{4 \sqrt{2} \pi^3 Z e^2 \mathcal{M}}. \quad (8.53)$$

в. Определение коэффициента $D(\mathcal{E})$. Чтобы выяснить смысл коэффициента D в уравнении (8.44), подставим в него функцию распределения f , описывающую моноэнергетические частицы с энергией \mathcal{E} , т. е. примем, что

$$f = f_{\mathcal{E}} = A(\mathcal{E}) \delta \left[\mathcal{E} - \frac{mv^2}{2} - U(r) \right], \quad (8.54)$$

где $A(\mathcal{E})$ — определенный выше нормировочный коэффициент. Из формулы (8.47), определяющей $A(\mathcal{E})$, видно, что $f_{\mathcal{E}}$ нормировано на одну частицу, т. е. $\int f_{\mathcal{E}} d\Gamma = 1$.

Умножим теперь левую и правую части уравнения (8.42) на $(\Delta \mathcal{E})^2$, где

$$(\Delta \mathcal{E})^2 = [\mathcal{E}(v, r) - \mathcal{E}]^2, \quad (8.55)$$

и проинтегрируем его по $d\Gamma$. В результате слева мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int f_{\mathcal{E}} (\Delta \mathcal{E})^2 d\Gamma \right] = \frac{\partial (\Delta \mathcal{E})^2}{\partial t}, \quad (8.56)$$

т. е. квадрат изменения энергии частицы в единицу времени, усредненный по распределению (8.54). Правая часть этого уравнения дает

$$\int (\Delta \mathcal{E})^2 A(\mathcal{E}) \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \left[\frac{D(\mathcal{E})}{2A(\mathcal{E})} \left(\frac{\partial f_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{E}} + \frac{1}{\kappa T} f_{\mathcal{E}} \right) \right] d\Gamma = D(\mathcal{E}), \quad (8.57)$$

если проинтегрировать дважды по частям и учесть, что функция $f_{\mathcal{E}}$ определена с помощью (8.54). Таким образом,

$$D(\mathcal{E}) = \frac{\partial (\Delta \mathcal{E})^2}{\partial t}, \quad (8.58)$$

т. е. $D(\mathcal{E})$ есть средний квадрат изменения в единицу времени энергии частицы за счет столкновений. Иначе говоря, $D(\mathcal{E})$ является коэффициентом диффузии частицы в пространстве энергий.

Для вычисления величины $\frac{\overline{\partial(\Delta\mathcal{E})^2}}{\partial t}$ необходимо уже конкретно рассмотреть процесс столкновения частиц, захваченных на финитные орбиты. Будем считать, как уже указывалось выше, что захваченные частицы — это электроны, которые сталкиваются с нейтральными частицами. Столкновение электрона в этом случае есть процесс быстрый в сравнении с частотой обращения электрона вокруг центра сил, т. е. вокруг тела*). Поэтому электрон можно рассматривать как свободную частицу и написать сразу $\frac{\overline{\partial(\Delta\mathcal{E})^2}}{\partial t}$ как среднее от произведения квадрата изменения энергии $(\Delta\mathcal{E})^2$ при одном столкновении на число столкновений в единицу времени, т. е.

$$\frac{\overline{\partial(\Delta\mathcal{E})^2}}{\partial t} = n_0 \left[v_e \int (\Delta\mathcal{E})_n^2 d\sigma \right]_e, \quad (8.59)$$

где n_0 — концентрация нейтральных частиц, v_e — скорость электрона, $d\sigma$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния электрона атомом. В формуле (8.59) первое усреднение проводится по скоростям нейтральных частиц, а второе по скоростям электронов. Здесь учтено также, что скорость электрона v_e много больше скорости нейтральной частицы v_n .

Учтем теперь, что величина относительной скорости электрона не меняется при соударении (см. [27], стр. 60)

$$(v_e - v_n)^2 = (v'_e - v'_n)^2,$$

где v_e и v_n — скорости этих частиц после столкновения. Поэтому

$$v_e'^2 - v_e^2 = 2(v'_e v'_n - v_e v_n) \simeq 2v_n(v'_e - v_e),$$

*) Если a — размер нейтральной частицы и R — радиус орбиты электрона, то при $R \gg a$ это условие всегда выполняется. Поскольку R не меньше размера тела R_0 , то для всякого макроскопического тела $R_0 \gg a$ и тогда условие $R \gg a$ заведомо выполнено.

если учесть, что скорость нейтральной частицы вообще мало изменяется при соударении с электроном.

Таким образом,

$$(\Delta \mathcal{E})^2 = \frac{1}{4} m^2 (v_e'^2 - v_e^2)^2 \simeq m^2 [(v_n v_e)^2 + (v_n v_e')^2 - 2(v_n v_e)(v_n v_e')]. \quad (8.60)$$

Это выражение нужно теперь усреднить по скоростям атома. Учитывая, что $\overline{v_n^2} = 3\kappa T/M$ и

$$\begin{aligned} \overline{(v_n v_e)_n^2} &= \overline{(v_n v_e \cos \theta_1)_n^2} = \frac{1}{3} \overline{v_n^2} v_e^2 = \frac{\kappa T}{M} v_e^2, \\ \overline{[(v_n v_e)(v_n v_e')]_n} &= \frac{1}{3} \overline{v_n^2} (v_e v_e') = \frac{\kappa T}{M} (v_e v_e'), \end{aligned}$$

имеем

$$\overline{(\Delta \mathcal{E})_n^2} = \frac{2\kappa T m^2}{M} (v_e^2 - v_e v_e') = \frac{2\kappa T m^2}{M} v_e^2 (1 - \cos \theta_2), \quad (8.61)$$

где θ_2 — угол между скоростями v_e и v_e' . Подставляя теперь $\overline{(\Delta \mathcal{E})_n^2}$ в выражение (8.59), находим, что

$$D(\mathcal{E}) = \frac{\partial \overline{(\Delta \mathcal{E})^2}}{\partial t} = \frac{2\kappa T m^2 n_0}{M} \overline{[\sigma^*(v_e) v_e^3]_e}, \quad (8.62)$$

где $\sigma^*(v_e)$ — транспортное эффективное сечение столкновения электрона с атомом, т. е.

$$\sigma^*(v_e) = \int (1 - \cos \theta_2) d\sigma. \quad (8.63)$$

Среднее в выражении (8.62) берется по распределению электронов (8.54):

$$\begin{aligned} \overline{[\sigma^*(v_e) v_e^3]_e} &= \int v^3 \sigma^*(v) A(\mathcal{E}) \delta \left[\mathcal{E} - \frac{mv^2}{2} - U(r) \right] d\Gamma = \\ &= 16\pi^2 A(\mathcal{E}) \int v^5 \sigma^*(v) r^2 \delta \left[\mathcal{E} - \frac{mv^2}{2} - U(r) \right] dv dr. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Принимая для простоты, что поле $U(r)$ кулоновское (8.49) и что транспортное сечение σ^* не зависит от скорости электрона v , имеем (при $\mathcal{E} < 0$)

$$\overline{[\sigma^*(v) v^3]_e} = \sigma^* \overline{[v^3]_e} = \frac{64\pi^2}{3} \frac{e^3 Z^3 \sigma^*}{m^3 |\mathcal{E}|} A(\mathcal{E}). \quad (8.65)$$

Подставляя это выражение в (8.62) и учитывая (8.50), находим, что

$$D(\mathcal{E}) = \frac{64 \sqrt{2} m^{1/2} \kappa T |\mathcal{E}|^{3/2} \sigma^* n_0}{3\pi M} = \frac{64 \sqrt{2} m^{1/2} \kappa T |\mathcal{E}|^{3/2}}{3\pi M l}. \quad (8.66)$$

В последнем выражении учтено, что длина свободного пробега электрона

$$l = \frac{1}{\sigma^* n_0}.$$

Коэффициент $D(\mathcal{E})$, таким образом, существенно зависит от характера столкновений захваченных частиц. В общем случае уравнение диффузии в пространстве энергии \mathcal{E} и момента \mathcal{M} (8.45) характеризуется уже не одним, а тремя коэффициентами диффузии $D_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, $D_{\mathcal{M}\mathcal{M}}$, $D_{\mathcal{E}\mathcal{M}}$, которые можно найти тем же методом, вычисляя $(\Delta\mathcal{E})^2$, $(\Delta\mathcal{M})^2$ и $(\Delta\mathcal{E} \Delta\mathcal{M})$.

г. Решение кинетического уравнения. Кинетическое уравнение (8.30), описывающее распределение частиц, совершающих финитное движение в слабо ионизированной плазме около положительного кулоновского центра, записывается в виде (8.44)

$$\bar{Y}(f) = A(\mathcal{E}) \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \left[\frac{D(\mathcal{E})}{2A(\mathcal{E})} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} + \frac{1}{\kappa T} f \right) \right] = 0. \quad (8.44)$$

Коэффициенты $A(\mathcal{E})$ и $D(\mathcal{E})$ определены формулами (8.50) и (8.66). На границе области финитного движения, где $\mathcal{E} = 0$, функция распределения финитных частиц должна совпадать с функцией распределения (8.25) инфинитных частиц

$$f(0) = N_0 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2}. \quad (8.67)$$

Уже указывалось выше в § 33, что функция распределения финитных частиц является решением уравнения (8.30) при наличии стационарного потока частиц, вызванного столкновениями из области инфинитного движения в область финитного движения. Общее стационарное решение уравнения (8.44) с отличным от нуля полным

потоком I имеет вид

$$f = I \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{\kappa T}\right) \int_C^{\mathcal{E}} \frac{2A(\mathcal{E})}{D(\mathcal{E})} \exp\left(\frac{\mathcal{E}}{\kappa T}\right) d\mathcal{E}, \quad (8.68)$$

где C — произвольная постоянная. Для определения этой постоянной необходимо использовать граничные условия. Поскольку все рассмотрение проводится здесь в предположении, что поверхность тела полностью поглощает падающие на нее частицы, то, как уже указывалось выше в § 33, функция распределения финитных частиц, траектории которых проходят через поверхность тела, тождественно равна нулю. Следовательно, если $U(R_0) = -\frac{e^2 Z}{R_0}$ — потенциал поверхности тела, то при энергиях $\mathcal{E} < U(R_0)$ функция распределения $f(\mathcal{E})$ равна нулю. Иными словами, постоянная C в формуле (8.68) равна $U(R_0)$. Отметим, что такое граничное условие аналогично граничному условию обычного уравнения диффузии вблизи поглощающей поверхности (см., например, [38]). При этом если потенциал поверхности тела $U(R_0)$ достаточно велик $|U(R_0)| \gg \kappa T$, то в области энергий $\mathcal{E} > U(R_0)$ при выполнении условия $\mathcal{E} - U(R_0) \gg \kappa T$ величина $U(R_0)$ лишь экспоненциально слабо влияет на функцию распределения, а следовательно и на интересующие нас значения концентрации и потока частиц. Можно положить, следовательно, $U(R_0) = -\infty$. Учитывая граничное условие (8.67), мы получаем тогда из (8.68), что полный поток частиц на центр

$$I = \frac{N_0}{2} \left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} \left\{ \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{\mathcal{E}}{\kappa T}\right) \frac{A(\mathcal{E})}{D(\mathcal{E})} d\mathcal{E} \right\}^{-1} =$$

$$= \frac{m^{3/2} N_0}{4 \sqrt{2\pi}^{3/2} (\kappa T)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{A(\mathcal{E})}{D(\mathcal{E})} \exp\left(-\frac{|\mathcal{E}|}{\kappa T}\right) d|\mathcal{E}|}. \quad (8.69)$$

д. Концентрация и поток частиц, совершающих финитное движение. Учитывая, что в слабо ионизированной плазме коэффициент $D(\mathcal{E})$ для электронов имеет вид (8.66), находим из (8.68), что функция распределения электро-

нов, совершающих финитное движение в окрестности кулоновского центра с зарядом eZ , дается выражением

$$f = N_0 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \left(\frac{|e|}{\kappa T} + 1 \right). \quad (8.70)$$

Членами порядка $\exp \left[\frac{U(R_0)}{\kappa T} \right]$ мы здесь, естественно, пренебрегаем.

Интегрируя функцию распределения (8.70), находим концентрацию финитных частиц в точке r

$$\begin{aligned} N_{\text{фин}}(r) &= \int f d^3v = \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} N_0 \left(\frac{e^2 Z}{r\kappa T} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{5} \frac{e^2 Z}{r\kappa T} + 1 \right). \end{aligned} \quad (8.71)$$

Концентрация инфинитных частиц в тех же условиях дается выражением (8.31). Подставляя в него $U(r) = -\frac{e^2 Z}{r}$, имеем

$$\begin{aligned} N_{\text{инф}}^+(r) &= N_0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{e^2 Z}{r\kappa T}} + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{e^2 Z}{r\kappa T}} \right) \right] \exp \left(\frac{e^2 Z}{r\kappa T} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Сравнивая формулы (8.71) и (8.72), можно убедиться, что в слабом поле, когда $\frac{e^2 Z}{r\kappa T} \ll 1$, концентрация инфинитных частиц превосходит концентрацию финитных частиц. С ростом поля концентрация финитных частиц растет, однако, значительно быстрее, так что в сильных полях, когда $\frac{e^2 Z}{r\kappa T} \gg 1$, она уже гораздо больше, чем концентрация инфинитных частиц. При $\frac{e^2 Z}{r\kappa T} \gg 1$

$$\frac{N_{\text{фин}}(r)}{N_{\text{инф}}^+(r)} = \frac{4}{15} \left(\frac{e^2 Z}{r\kappa T} \right)^2 = \frac{4}{15} \left(-\frac{U(r)}{\kappa T} \right)^2.$$

Здесь

$$U(r) = -e^2 Z/r$$

— потенциал поля в точке r .

Следует подчеркнуть, что концентрация финитных частиц при наличии поглощающего центра радикальным образом отличается от равновесной концентрации (8.1). Отсюда ясно, что как бы ни было мало тело, поглощение частиц на его поверхности сильно влияет на характер стационарного распределения финитных частиц даже в дальней окрестности тела. Это утверждение, доказанное здесь для конкретного случая, является общим. Вид стационарной функции распределения частиц в окрестности тела определяется характером столкновений частиц. При степенной зависимости сечения столкновения от энергии частицы, как ясно из (8.68), функция распределения также является лишь степенной функцией энергии. Соответственно концентрация финитных частиц с ростом потенциала поля растет лишь по степенному, а не по экспоненциальному закону (8.1).

Полный поток на кулоновский центр электронов, совершающих финитное движение в слабо ионизированной плазме, равен

$$I_{\text{фин}} = \frac{N_0 m^{3/2}}{4 \sqrt{2\pi}^{3/2} (\kappa T)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{A(|\mathcal{E}|)}{D(|\mathcal{E}|)} \exp\left(-\frac{|\mathcal{E}|}{\kappa T}\right) d|\mathcal{E}|} = \frac{16 \sqrt{2\pi}}{3} \frac{e^6 Z^3 m^{1/2} N_0}{M (\kappa T)^{5/2} l}. \quad (8.73)$$

Здесь использовано выражение (8.66) для коэффициента $D(|\mathcal{E}|)$. Полный поток на тело притягивающихся электронов, совершающих инфинитное движение, согласно (10.30), (10.38), (10.41), равен

$$I_{\text{инф}} = \pi R_0^2 N_0 \sqrt{\frac{8\kappa T}{\pi m}} \left(1 + \frac{e^2 Z}{R_0 \kappa T}\right), \quad (8.74)$$

где R_0 — радиус поглощающей поверхности (здесь учтено, что $U(R_0) = -e^2 Z/R_0$). Сравнивая (8.73) и (8.74) при $e^2 Z/\kappa T R_0 = -U(R_0)/\kappa T \gg 1$, имеем

$$\frac{I_{\text{фин}}}{I_{\text{инф}}} = \frac{8}{3} \frac{R_0}{l} \frac{m}{M} \left(\frac{e^2 Z}{\kappa T R_0}\right)^2 = \frac{8}{3} \frac{R_0}{l} \frac{m}{M} \left(-\frac{U(R_0)}{\kappa T}\right)^2. \quad (8.75)$$

Из (8.75) следует, что поток финитных электронов мал по сравнению с потоком инфинитных электронов, так как $\frac{R_0}{l} \ll 1$, $\frac{m}{M} \ll 1$. Однако с ростом потенциала поля на поглощающей поверхности или с уменьшением размеров поверхности поток финитных частиц растет быстрее так, что при

$$R_0 < \left(\frac{e^2 Z}{\kappa T} \right)^2 \frac{m}{M l}$$

он становится больше, чем поток инфинитных частиц.

ГЛАВА IX
**ВОЗМУЩЕНИЕ ПЛАЗМЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ
 В ОКРЕСТНОСТИ ПОКОЯЩЕГОСЯ
 ЗАРЯЖЕННОГО ТЕЛА**

§ 36. Основные уравнения

Рассмотрим покоящийся шар радиуса R_0 , находящийся в безграничной разреженной плазме. Размер тела, как всегда, будем считать малым в сравнении с длиной пробега частиц. Пусть поверхность шара имеет потенциал φ_0 . Плазма в окрестности тела при этом, естественно, возмущена, так как образуется пространственный заряд, экранирующий поле тела. Для исследования возмущенной области необходимо определить суммарное поле, создаваемое телом и пространственным зарядом, а также распределение электронов и ионов, т. е. найти соответствующие функции распределения и потенциал поля $\varphi(r)$.

Функции распределения ионов f_i и электронов f_e в силу сферической симметрии задачи зависят лишь от r , v_r , v_θ (см. § 33) и определяются кинетическими уравнениями (8.15):

$$v_r \frac{\partial f_i}{\partial r} + \left(\frac{v_\theta^2}{r} + \frac{e}{M_i} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \frac{\partial f_i}{\partial v_r} - \frac{v_\theta v_r}{r} \frac{\partial f_i}{\partial v_\theta} + Y(f_i) = 0, \quad (9.1)$$

$$v_r \frac{\partial f_e}{\partial r} + \left(\frac{v_\theta^2}{r} - \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \frac{\partial f_e}{\partial v_r} - \frac{v_\theta v_r}{r} \frac{\partial f_e}{\partial v_\theta} + Y(f_e) = 0, \quad (9.2)$$

где v_r и v_θ — радиальная и тангенциальная составляющие скорости частицы, M_i — масса иона, m — масса электрона,

— e — заряд электрона, e — заряд иона, $Y(f_i)$ и $Y(f_e)$ — интегралы столкновений для ионов и электронов. Уравнение для потенциала поля (1.30) в силу сферической симметрии имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -4\pi e \left[\int f_i d^3v - \int f_e d^3v \right]. \quad (9.3)$$

Уравнения (9.1) — (9.3) следует решать с учетом граничных условий на поверхности тела и на бесконечности (см. § 3). Для потенциала поля на поверхности тела

$$\varphi(R_0) = \varphi_0; \quad (9.4)$$

на бесконечности

$$\varphi_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (9.5)$$

На бесконечности функции распределения являются максвелловскими (1.26). На поверхности тела, если все электроны поглощаются, а ионы нейтрализуются при столкновении с телом, функция $f(v_r, v_\theta, r)_{r=R_0} = 0$, причем для частиц, совершающих инфинитное движение, это условие должно выполняться лишь при $v_r > 0$ (см. § 33). Если частицы отражаются от тела, то граничное условие на поверхности тела существенно зависит от характера отражения, т. е. от того, имеет ли место зеркальное отражение, диффузное рассеяние и т. п. (см. § 3). Ниже всюду (за исключением § 41) мы рассматриваем случай полностью поглощающего тела.

Решение уравнений (9.1) — (9.3) можно искать следующим образом: найти функции распределения f_i и f_e в произвольном центрально-симметричном поле, вычислить концентрации ионов и электронов $N_i(r, \varphi)$, $N_e(r, \varphi)$, а затем провести интегрирование уравнения (9.3) для потенциала поля.

Выражения для концентрации притягивающихся и отталкивающихся частиц в произвольном центрально-симметричном поле при наличии поглощающего тела получены в гл. VIII, где показано также, что функцию распределения, а следовательно и концентрацию притягивающихся частиц, удобно записать отдельно для частиц, совершающих финитное и инфинитное движение. Уравнение (9.3),

таким образом, в общем случае имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -4\pi e^2 [N_{\text{фин}}^+(r, U) + N_{\text{инф}}^+(r, U) - N^-(r, U)], \quad (9.3a)$$

где $U(r) = -e|\phi|$, N^+ — концентрация притягивающихся, а N^- — концентрация отталкивающихся частиц. Учтено, что финитное движение могут совершать только притягивающиеся частицы. Какие из частиц притягиваются — электроны или ионы, разумеется, зависит от знака заряда самого тела.

В гл. VIII было показано, что концентрация отталкивающихся частиц в данной точке r зависит лишь от значения потенциала поля в этой точке и на поверхности тела. Концентрация же притягивающихся частиц зависит от всего хода потенциала поля в окрестности тела. Очень существенно при этом, как убывает поле с увеличением расстояния от тела — быстрее или медленнее, чем $1/r^2$. Например, если поле от поверхности тела падает всегда быстрее, чем $1/r^2$, то финитных траекторий, не проходящих через поверхность тела, нет, и следовательно, концентрация $N_{\text{фин}}^+(r, U)$ в уравнении (9.3a) в этом случае равна нулю.

В плазме на расстояниях, меньших дебаевского радиуса $D = \left(\frac{\kappa T}{4\pi e^2 N_0} \right)^{1/2}$, потенциал поля убывает по кулоновскому закону, т. е. медленнее, чем $1/r^2$. На расстояниях, больших по сравнению с D , важную роль играет дебаевская экранировка, которая приводит к гораздо более резкому падению поля. Отсюда следует, что поведение поля и структура плазмы в окрестности больших или малых тел, т. е. когда $R_0 \gg D$ или $R_0 \ll D$, существенно различна. Оба эти случая рассмотрены ниже. Важно подчеркнуть, что на больших расстояниях от поглощающего тела, превышающих его размер и дебаевский радиус, т. е. когда $r \gg R_0$, $r \gg D$, потенциал электрического поля ϕ , как показано в § 16, убывает всегда строго, как $1/r^2$. Такую зависимость ϕ от r легко также понять и из простых соображений. В самом деле, в областях $r \gg D$ определяющую роль играет дебаевская экранировка, так что плазма квазинейтральна и концентрации

электронов и ионов близки друг к другу, т. е. $N_i \approx N_e$. При этом потенциал поля пропорционален возмущению концентрации (см. § 14), так что $\varphi \sim \delta N = |N - N_0|$, где N_0 — невозмущенная концентрация электронов или ионов. Поскольку возмущение является следствием поглощения частиц на поверхности тела, то на больших расстояниях от тела при $r \gg R_0$ возмущение концентрации частиц пропорционально углу, под которым видно тело из данной точки r , т. е. пропорционально R_0^2/r . Таким образом, на больших расстояниях от тела всегда $\varphi \sim \delta N \sim 1/r^2$, т. е.

$$\varphi = \varphi_\infty \frac{R_0^2}{r^2}, \quad (9.6)$$

где φ_∞ — асимптотическое значение потенциала, характеризующее ход поля на больших расстояниях от тела.

§ 37. Электрическое поле и структура плазмы в окрестности большого тела

а. Преобразование исходного уравнения. При не очень больших значениях потенциала на поверхности большого тела поле в его окрестности падает быстрее, чем $1/r^2$, так что концентрация финитных частиц $N_{\text{фин}}^+$ равна нулю. Уравнение (9.3а) записывается в этом случае в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -4\pi e^2 [N_{\text{инф}}^+(r, U) - N^-(r, U)]. \quad (9.7)$$

В уравнении (9.7) $N_{\text{инф}}^+$ обозначает концентрацию притягивающихся частиц, совершающих инфинитное движение. Она определена выражением (8.39)

$$\begin{aligned} N_{\text{инф}}^+(r, U) = & \frac{N_0}{2} \left\{ \left[1 - \Phi \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} \right) \right] \exp \left[-\frac{Ur}{\kappa T} \right] + \right. \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T}} - \sqrt{-\frac{U(r)}{\kappa T} - \frac{e\varphi_\infty R_0^2}{\kappa T r^2}} \right) + \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \times \\ & \times \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{R_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr}(R_0) - \frac{U(r) - U(R_0)}{\kappa T \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right)}} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[\frac{R_0^2 U(R_0) - r^2 U(r)}{(r^2 - R_0^2) \kappa T} \right] + X(r, R_0) - X(\infty, r) \left. \right\}. \quad (9.8) \end{aligned}$$

Здесь функция $X(a, b)$ определяется формулой

$$X(a, b) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa T}} \int_b^a \frac{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2U}{dr_0^2}\right) \exp A}{\left[U(r_0) - U(r) - \frac{r_0}{2} \frac{dU}{dr_0} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)\right]^{1/2}} dr_0,$$

где

$$A = \left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0} \right].$$

При выводе этой формулы было принято, что потенциал поля в окрестности тела убывает быстрее, чем $1/r^2$, а на большом расстоянии строго, как $1/r^2$ (см. § 34). Кроме того, учтено, что в случае большого тела $R_0 \gg D$ и, следовательно, $R_0 > r_k$, $r > r_k$, где r_k — расстояние, характеризующее изменение потенциала поля $U(r)$ (см. (8.8)); в этих условиях, как показано в § 32, $\varrho_0(R_0) = R_0$ и $\varrho_0(r) = r$.

Концентрация отталкивающихся частиц согласно (8.41) равна

$$N^-(r, U) = \frac{N_0}{2} \left\{ 1 + \Phi \left(\sqrt{\frac{U(r) - U(R_0)}{\kappa T}} \right) + \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \times \right. \\ \times \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{r^2 U(r) - R_0^2 U(R_0)}{(r^2 - R_0^2) \kappa T}} \right) \right] \times \\ \left. \times \exp \left[\frac{R_0^2 U(r) - R_0^2 U(R_0)}{(r^2 - R_0^2) \kappa T} \right] \right\} \exp \left[\frac{U(r)}{\kappa T} \right]. \quad (9.9)$$

Здесь учтено, что потенциальная энергия отталкивающихся частиц равна $e|\varphi| = -U(r)$.

Мы видим, что с учетом выражений (9.8) и (9.9) уравнение Пуассона (9.7) в рассматриваемом случае весьма сложно. В безразмерных переменных $\xi = \frac{r}{R_0}$,

$\varphi^* = -\frac{U}{\kappa T} = \frac{e|\varphi|}{\kappa T}$ оно переписывается в виде

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\varphi^*}{d\xi} \right) = \left(\frac{R_0}{D} \right)^2 \left\{ \frac{N_{\text{инф}}^+(\xi, \varphi^*)}{N_0} - \frac{N^-(\xi, \varphi^*)}{N_0} \right\}. \quad (9.10)$$

Поскольку здесь рассматривается лишь большое тело $R_0 \gg D$, то перед правой частью уравнения (9.10) стоит большой параметр. Отсюда ясно, что везде, где

производная $d\varphi^*/d\xi$ не очень велика, так что

$$\frac{d\varphi^*}{d\xi} \ll \frac{R_0}{D} \varphi^*, \quad (9.11)$$

решение уравнения (9.10) с точностью до малых членов порядка $\left(\frac{D}{R_0\varphi^*} \frac{d\varphi^*}{d\xi}\right)^2$ совпадает с решением уравнения квазинейтральности (ср. § 14):

$$N_{\text{инф}}^+(\xi, \varphi^*) = N^-(\xi, \varphi^*). \quad (9.12)$$

Условие (9.11) в окрестности большого тела при не слишком больших φ_0 не выполняется лишь в двойном слое толщины порядка дебаевского радиуса вблизи поверхности тела. Поскольку $D \ll R_0$, то ясно, что структура плазмы в окрестности тела в общем определяется уравнением (9.12).

Весьма важно, однако, что выражения для $N_{\text{инф}}^+$ и N^- зависят от значения потенциала поля и даже от напряженности поля на поверхности тела. Вместе с тем на границе тела имеется двойной слой, в котором потенциал поля резко изменяется от значения φ_0 до некоторого другого значения $\varphi_1(\varphi_0)$. Потенциал φ_1 , естественно, является решением уравнения (9.12) при $r \rightarrow R_0$, т. е. при $\xi \rightarrow 1$. Учитывая, что в выражении (9.8) для $N_{\text{инф}}^+$ последний интегральный член $X(r, R_0)$ и последний неинтегральный член, пропорциональный $\sqrt{1 - R_0^2/r^2}$, при $r \rightarrow R_0$ исчезают, находим, что потенциал φ_1 определяется уравнением

$$\begin{aligned} e^{-\varphi_1^*} [1 + \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi_1^*})] = \\ = e^{\varphi_1^*} [1 - \Phi(\sqrt{\varphi_1^*})] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\varphi_1^*} - C_1(1, \varphi_1^*). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Здесь $\varphi_0^* = \frac{e|\varphi_0|}{\kappa T}$, $\varphi_1^* = \frac{e|\varphi_1|}{\kappa T}$, а константа $C_1(1, \varphi_1^*)$ равна

$$C_1(1, \varphi_1^*) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \frac{(1 - \xi_0^2) \left(3 \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} + \xi_0 \frac{d^2\varphi^*}{d\xi_0^2} \right) (1 - \exp A)}{\left[\varphi_1^* - \varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} (\xi_0^2 - 1) \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} \right]^{1/2}} d\xi_0, \quad (9.14)$$

где

$$A = \left[\varphi^* (\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} \right].$$

При вычислении (9.14) учтено, что

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{\xi_0^2}{\xi^2}\right) \left(3 \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} + \xi_0 \frac{d^2\varphi^*}{d\xi_0^2}\right) d\xi_0}{\left[\varphi^*(\xi) - \varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right) \frac{d\varphi^*}{d\xi_0}\right]^{1/2}} = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\varphi^*(\xi) - \varphi_{\infty}^*}, \quad (9.14a) \end{aligned}$$

где $\varphi_{\infty}^* = e\varphi_{\infty}/kT$, а φ_{∞} определяется из (9.6). Уравнения (9.13) и (9.14) показывают, что само граничное значение потенциала φ_1^* существенно зависит от всего хода поля в плазме в окрестности тела.

Таким образом, при $D/R_0 \rightarrow 0$ потенциал поля на границе тела изменяется скачком и имеется, следовательно, два граничных значения φ_0^* и φ_1^* . Необходимо теперь выяснить, какое из этих значений φ^* входит в выражения для $N_{\text{инф}}^+(\xi, \varphi^*)$ и $N^-(\xi, \varphi^*)$. Из формулы (8.37) в § 34 следует, что при наличии тонкого двойного слоя толщины D у границы тела, т. е. слоя, в котором потенциал поля резко возрастает, концентрация притягивающихся частиц вне слоя весьма слабо меняется в зависимости от хода поля в слое — добавляются лишь члены порядка $(D/R_0)^2 \ln^2(R_0\varphi_0^*/D)$. При $D/R_0 \rightarrow 0$ концентрация притягивающихся частиц вне слоя вообще не зависит от хода потенциала в слое. Это заключение легко понять непосредственно, так как если имеется тонкий слой на границе тела, в котором потенциал поля изменяется очень резко и, следовательно, очень велики силы притяжения, то всякая частица, попавшая на границу слоя, попадает и на поверхность тела и на ней поглощается. Наличие такого слоя эквивалентно, следовательно, увеличению размеров тела на величину D , так что при $D \ll R_0$ наличие слоя не сказывается на распределении притягивающихся частиц вне слоя. Для отталкивающихся частиц картина, разумеется, совершенно иная: резкий рост силы, отталкивающей частицы в двойном слое, приводит к тому, что большинство из них отражается, не достигнув поверх-

ности тела. Граничным значением поля для них, разумеется, является значение потенциала на поверхности тела.

Таким образом, в выражении для N^- в уравнении (9.12) $\varphi^*(R_0) = \varphi_0^*$, где φ_0^* — заданное значение потенциала поля на поверхности тела, а в выражении для $N_{\text{инф}}^+$ в том же уравнении $\varphi^*(R_0) = \varphi_1^*$, где φ_1^* — граничное значение потенциала, определенное соотношением (9.13). Разумеется, φ_1^* и $\frac{d\varphi^*}{d\xi}$ (1) можно определить лишь из решения уравнения (9.12). С учетом указанных условий на границе ($r = R_0$, т. е. $\xi = 1$) уравнение (9.12) становится замкнутым: решая его, можно определить электрическое поле в окрестности большого тела, т. е. при $R_0 \gg D$.

В двойном слое концентрации электронов и ионов существенно различаются, и здесь необходимо решать уже полное уравнение (9.10). При этом, однако, поскольку речь идет лишь об очень малых расстояниях от поверхности тела ($r - R_0 \sim D \ll R_0$), то кривизна поверхности несущественна, благодаря чему выражения (9.8) и (9.9) для концентраций притягивающихся и отталкивающихся частиц существенно упрощаются*)

$$N_{\text{инф}}^+(\varphi^*) = \frac{N_0}{2} \left\{ e^{\varphi^*} [1 - \Phi(\sqrt{\varphi^*})] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{\varphi^*} - \sqrt{\varphi^* - \varphi_\infty^*}) + C(\varphi^*) \right\}, \quad (9.15)$$

$$N^-(\varphi^*) = \frac{N_0}{2} e^{-\varphi^*} \{1 + \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})\}. \quad (9.16)$$

*) Заметим, что формула (9.16) легко обобщается на тот случай, когда отталкивающиеся частицы частично отражаются при их столкновении с поверхностью тела. Так, если отражение зеркальное, то

$$N^- = \frac{N_0}{2} e^{-\varphi^*} \{1 + \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*}) + R [1 - \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})]\}, \quad (9.16a)$$

где R — коэффициент отражения отталкивающихся частиц от поверхности тела. В случае полного поглощения $R = 0$, и формула (9.16a) совпадает с (9.16). При полном отражении $R = 1$, и концентрация отталкивающихся частиц, естественно, определяется формулой Больцмана.

Здесь функция $C(\varphi^*)$ равна

$$C(\varphi^*) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} \frac{(1-\xi_0^2) \left(3 \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} + \xi_0 \frac{d^2\varphi^*}{d\xi_0^2} \right) \exp A}{\left[\varphi^* - \varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} (\xi_0^2 - 1) \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} \right]^{1/2}} d\xi_0, \quad (9.15a)$$

где

$$A = \left[\varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} \right].$$

Таким образом, уравнение (9.7) в двойном слое в безразмерных переменных $\varphi^* = \frac{e|\varphi|}{\kappa T}$, $\zeta = \frac{r-R_0}{D}$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi^*}{d\xi^2} = & \frac{1}{2} \left\{ e^{\varphi^*} [1 - \Phi(\sqrt{\varphi^*})] + \right. \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{\varphi^*} - \sqrt{\varphi^* - \varphi_\infty^*}) + \\ & \left. + C(\varphi^*) - e^{-\varphi^*} [1 + \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})] \right\}. \quad (9.17) \end{aligned}$$

Граничные условия: при $\zeta = 0$, $\varphi^* = \varphi_0^*$, а при $\zeta \rightarrow \infty$, $\varphi^* \rightarrow \varphi_1^*$, где φ_1^* — значение потенциала поля на границе двойного слоя, определенное соотношением (9.13). Разумеется, при $\varphi^* \rightarrow \varphi_1^*$ правая часть уравнения (9.13) обращается в нуль.

Следует подчеркнуть, что мы рассматриваем здесь лишь случай большого тела, т. е. тела, размер которого гораздо больше толщины двойного слоя. Несмотря на это, конкретная форма тела все же влияет на концентрацию, а следовательно и на потенциал электрического поля в двойном слое: вид функции $C(\varphi^*)$ изменяется в зависимости от формы поверхности тела. Причина этого состоит в том, что электрическое поле, которое существует не только в двойном слое, но и в квазинейтральной плазме в окрестности тела, разумеется, зависит от формы тела. Влияние этого поля на концентрацию притягивающихся частиц в двойном слое и учитывает функция $C(\varphi^*)$.

б. Решение уравнения квазинейтральности. Потенциал поля в окрестности тела определяется уравнением (9.12). Решение его, разумеется, может быть получено лишь

численно. Рассмотрим вначале для простоты случай сильно заряженного тела, когда $\Phi_0^* = e |\Phi_0| / \kappa T \gg 1$. В этом случае выражение (9.9) для концентрации отталкивающихся частиц упрощается

$$N^- = N_0 e^{-\Phi^*}, \tag{9.18}$$

и уравнение (9.12) принимает вид

$$\Phi^* = \ln \frac{2}{A}, \tag{9.19}$$

где

$$A = e^{\Phi^*} \left[1 - \Phi(\sqrt{\Phi^*}) \right] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\Phi^*} - \sqrt{\Phi^* - \frac{\Phi_\infty^*}{\xi^2}} \right) + \\ + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\Phi^* - \Phi_1^*}{1 - 1/\xi^2} - \frac{1}{2} \frac{d\Phi^*}{d\xi}(1)} \right) \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{\xi^2 \Phi^* - \Phi_1^*}{\xi^2 - 1} \right] + X(r, R_0) - X(\infty, r).$$

Здесь X — интегральные члены (9.8), Φ_1^* — значение Φ^* при $\xi = 1$, а Φ_∞^* — асимптотическое значение, определяющее поведение функции $\Phi^*(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$ (см. (9.6)).

При решении уравнения (9.19) естественно воспользоваться методом итераций. Успех этого метода существенно зависит от выбора начальной функции $\Phi_0^*(\xi)$. Чтобы определить $\Phi_0^*(\xi)$, напомним вместо (9.19) простое приближенное уравнение и найдем его решение. Для этого необходимо заменить сложные интегральные члены в уравнении (9.19), т. е. в формуле (9.8) для $N_{\text{инф}}^+(\xi, \Phi^*)$ простыми приближенными выражениями.

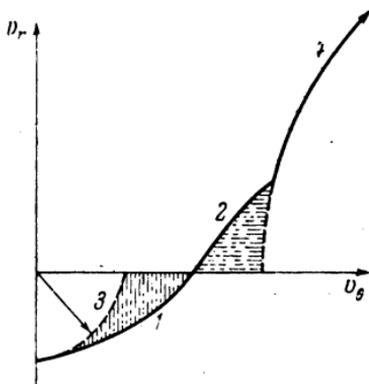


Рис. 59. Область интегрирования в пространстве скоростей.

Выражение (9.8) для концентрации притягивающихся частиц было получено в § 34 в результате интегрирования максвелловской функции распределения в пространстве скоростей по области, граница которой изображена жирной кривой на рис. 59. Первый и второй интеграль-

ные члены возникают в результате интегрирования по областям, граница которых отмечена цифрами 1 и 2 на рисунке. Для получения приближенного выражения для концентрации притягивающихся частиц естественно продолжить окружность 3 (см. (8.7)) и гиперболу 4 (см. (8.28)) до пересечения с осью v_θ . Тогда получается, что

$$N_{(0)\text{инф}}^+ = \frac{N_0}{2} \left\{ e^{\varphi^*} [1 - \Phi(\sqrt{\varphi^*})] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\varphi^*} + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \exp\left(\frac{\xi^2 \varphi^* - \varphi_1^*}{\xi^2 - 1}\right) \right\}. \quad (9.20)$$

Формула (9.20) и является искомым простым приближенным выражением для $N_{\text{инф}}^+$.

Уравнение (9.19) переписывается в виде

$$\varphi^* = \ln \frac{2}{B - C_1[\xi, \varphi^*(\xi)] + C_2[\xi, \varphi^*(\xi)]}, \quad (9.21)$$

где

$$B = e^{\varphi^*} [1 - \Phi(\sqrt{\varphi^*})] + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\varphi^*} + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \exp\left(\frac{\xi^2 \varphi^* - \varphi_1^*}{\xi^2 - 1}\right),$$

а $C_1[\xi, \varphi^*(\xi)]$ и $C_2[\xi, \varphi^*(\xi)]$ — поправочные члены, возникающие в результате интегрирования по заштрихованным областям, а именно:

$$C_1[\xi, \varphi^*(\xi)] = \\ = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{\xi_0^2}{\xi^2}\right) \left(3 \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} + \xi_0 \frac{d^2\varphi^*}{d\xi_0^2}\right) \left(1 - \exp\left[\varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi_0}\right]\right)}{\left[\varphi^*(\xi) - \varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right) \frac{d\varphi^*}{d\xi_0}\right]^{1/2}} d\xi_0, \quad (9.22)$$

$$C_2[\xi, \varphi^*(\xi)] = \\ = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^1 \frac{\left(1 - \frac{\xi_0^2}{\xi^2}\right) \left(3 \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} + \xi_0 \frac{d^2\varphi^*}{d\xi_0^2}\right) \exp\left[\varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi_0}\right]}{\left[\varphi^*(\xi) - \varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right) \frac{d\varphi^*}{d\xi_0}\right]^{1/2}} d\xi_0 - \\ - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \Phi\left(\sqrt{\frac{\varphi^* - \varphi_1^*}{1 - 1/\xi^2} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi}(1)}\right) \exp\left(\frac{\xi^2 \varphi^* - \varphi_1^*}{\xi^2 - 1}\right). \quad (9.23)$$

Уравнение (9.21) с учетом выражений (9.22), (9.23) для $C_1[\xi, \varphi^*]$ и $C_2[\xi, \varphi^*]$ (см. также (9.14а)) тождественно совпадает с уравнением (9.19).

Решение уравнения (9.21), как уже указывалось выше, находится методом итераций. В нулевом приближении полагаем C_1 и C_2 равными нулю. Функция $\varphi_{(0)}^*(\xi)$ легко находится тогда как решение трансцендентного уравнения (9.21) при $C_1=0$, $C_2=0$. Она приведена в табл. XXII и на рис. 60, а и б. Затем функция $\varphi_{(0)}^*(\xi)$ подставляется в выражения (9.22), (9.23) для C_1 и C_2 и вычисляются поправочные функции

$$C_{10}(\xi) = C_1[\xi, \varphi_{(0)}^*(\xi)], \quad C_{20}(\xi) = C_2[\xi, \varphi_{(0)}^*(\xi)].$$

Функции $C_{10}(\xi)$ и $C_{20}(\xi)$ подставляются в уравнение (9.21). Решая теперь полученное трансцендентное уравнение для φ^* , находим функцию первого приближения $\varphi_{(1)}^*(\xi)$. Она также приведена в табл. XXII и на рис. 60. Из

Т а б л и ц а XXII

Зависимость потенциала $\varphi^* = \frac{e|\varphi|}{\kappa T}$ от расстояния $\xi = \frac{r}{R_0}$
для последовательных итераций

ξ	$\varphi_{(0)}^*$	$\varphi_{(1)}^*$	$\varphi_{(2)}^*$	$\varphi_{(3)}^*$	$\varphi_{(4)}^*$	φ^*
1,0	0,439	0,506	0,553	0,594	0,633	0,690
1,001	0,435	0,498	0,538	0,570	0,602	0,658
1,002	0,432	0,492	0,530	0,559	0,587	0,638
1,004	0,426	0,484	0,520	0,542	0,565	0,610
1,006	0,421	0,476	0,508	0,527	0,544	0,591
1,01	0,411	0,463	0,493	0,509	0,520	0,569
1,02	0,392	0,437	0,462	0,477	0,484	0,536
1,04	0,369	0,397	0,417	0,429	0,436	0,480
1,06	0,335	0,366	0,383	0,393	0,399	0,430
1,1	0,295	0,318	0,331	0,338	0,343	0,362
1,2	0,227	0,241	0,248	0,252	0,256	0,261
1,4	0,151	0,157	0,161	0,162	0,164	0,164
1,6	0,110	0,113	0,115	0,116	0,118	0,117
2,0	0,066	0,0668	0,069	0,069	0,070	0,068
2,5	0,041	0,041	0,042	0,042	0,043	0,041
3,0	0,028	0,028	0,028	0,028	0,029	0,028
φ_{∞}^*	0,219	0,226	0,231	0,233	0,235	0,237

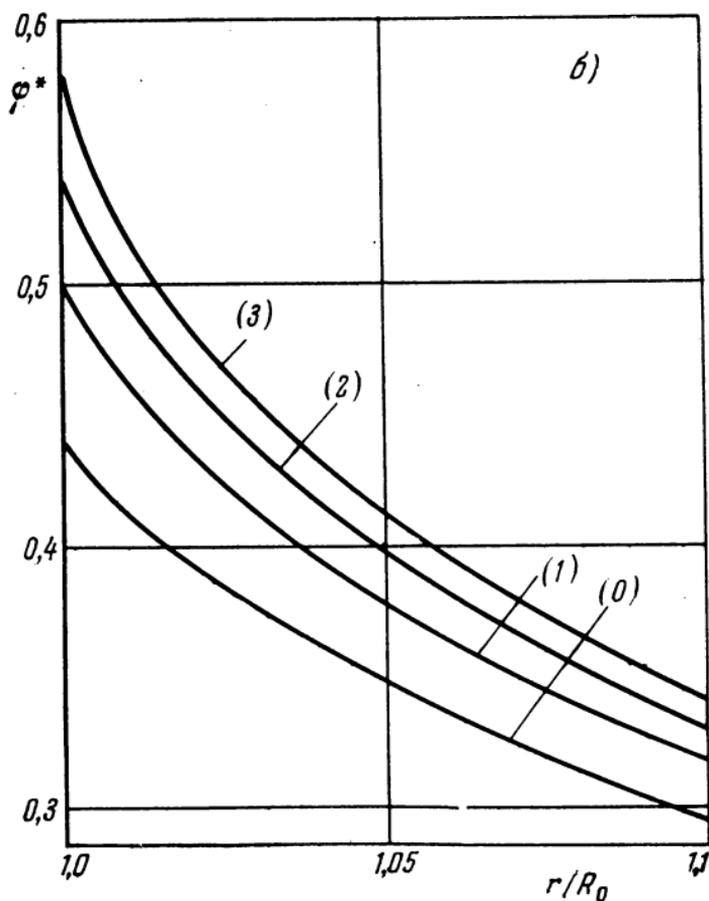
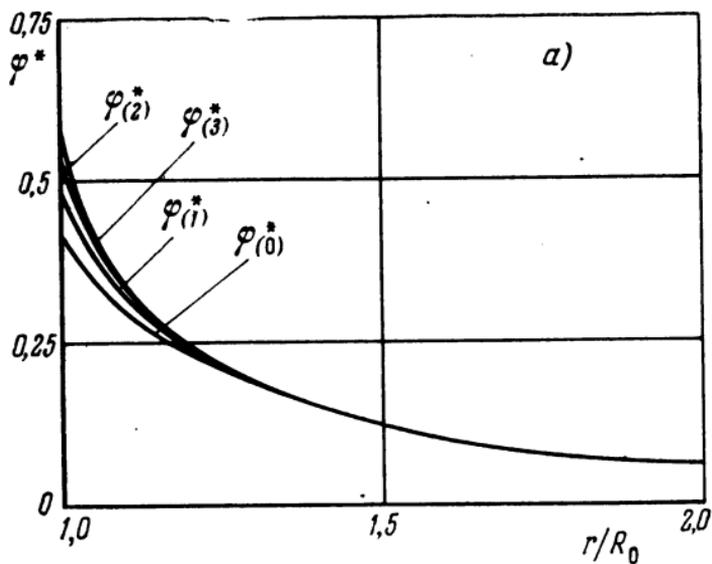


Рис. 60. а) Изменение потенциала поля в окрестности тела при $\frac{e\varphi_0}{kT} \gg 1$. Различные кривые являются последовательными итерациями. б) Те же кривые в ближней к телу зоне.

таблицы и рисунка видно, что расхождение между $\varphi_{(0)}^*(\xi)$ и $\varphi_{(1)}^*(\xi)$ невелико и, следовательно, нулевое приближение выбрано нами правильно.

Подставляя теперь $\varphi_{(1)}^*(\xi)$ в выражения (9.22) и (9.23), находим поправочные функции $C_{11}(\xi)$ и $C_{21}(\xi)$:

$$C_{11}(\xi) = C_1[\xi, \varphi_{(1)}^*(\xi)], \quad C_{21}(\xi) = C_2[\xi, \varphi_{(1)}^*(\xi)].$$

Подставляя функции $C_{11}(\xi)$ и $C_{21}(\xi)$ в уравнение (9.21) и решая его, находим функцию второго приближения $\varphi_{(2)}^*(\xi)^*$ и т. д.

* При численном расчете функций $C_1[\xi, \varphi^*(\xi)]$ и $C_2[\xi, \varphi^*(\xi)]$, по-видимому, удобнее переписать интегральные члены в виде

$$C_1[\xi, \varphi^*(\xi)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\varphi^*(\xi) - (\varphi_{\infty}^*/\xi^2)}} \left[\left(1 - \exp - \tau_{\xi}^2 + \varphi^*(\xi) + \frac{\xi_0^3}{2\xi^2} \frac{d\varphi^*(\xi_0)}{d\xi_0} \right) \right] d\tau_{\xi},$$

$$C_2[\xi, \varphi^*(\xi)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau_{\xi}^{(1)}} \exp \left[-\tau_{\xi}^2 + \varphi^*(\xi) + \frac{\xi_0^3}{2\xi^2} \frac{d\varphi^*(\xi_0)}{d\xi_0} \right] d\tau_{\xi} - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \Phi \left(\sqrt{\frac{\varphi^* - \varphi_1^*}{1 - 1/\xi^2} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi}(1)} \right) \exp \left(\frac{\xi^2 \varphi^* - \varphi_1^*}{\xi^2 - 1} \right),$$

где

$$\tau_{\xi}(\xi_0) = \sqrt{\varphi^*(\xi) - \varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0^3}{2\xi^2} \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2} \right)}$$

и $\xi_0(\tau_{\xi})$ — функция, обратная функции $\tau_{\xi}(\xi_0)$. Такое преобразование интеграла избавляет от необходимости дважды дифференцировать функцию $\varphi^*(\xi)$, что при численном расчете затруднительно. Заметим также, что производная $(d\varphi^*/d\xi)$ при $\xi \rightarrow 1$ обращается в бесконечность. Однако рост этот весьма слаб: $d\varphi/d\xi \sim \ln(\xi - 1)$. При численном расчете удобно поэтому пользоваться приведенным выше выражением (9.23) для $C_2[\xi, \varphi^*(\xi)]$, которое учитывает, что производная $d\varphi^*/d\xi$ при $\xi \rightarrow 1$ конечна. При этом вычисление интеграла в (9.23) ведется лишь до значения ξ_0 , близкого к 1 (например, до $\xi_0 = 1,0001$), и в качестве производной $d\varphi^*/d\xi$ при $\xi = 1$ подставляется $d\varphi^*/d\xi$ при $\xi = 1,0001$. Результат, разумеется, не зависит от выбора граничного значения ξ_0 , если только это значение достаточно близко к единице. Приведенное в этой сноске преобразование можно также использовать при вычислении констант в формулах (9.24) и (9.30).

Этот метод приводит к сходящейся последовательности функций $\varphi_{(0)}^*(\xi)$, $\varphi_{(1)}^*(\xi)$, $\varphi_{(2)}^*(\xi)$... Приходится, однако, провести большое количество итераций, прежде чем удастся определить путем экстраполяции окончательное решение; определение окончательных значений функции $\varphi^*(\xi)$ вблизи $\xi = 1$ именно и составляет основную трудность этих расчетов из-за большого градиента функции $\varphi^*(\xi)$ вблизи точки $\xi = 1$. Результаты первых четырех итераций и окончательные значения функции $\varphi^*(\xi)$ приведены в табл. XXII, а также на рис. 16, а.

Легко определить асимптотический ход функции $\varphi^*(\xi)$ при больших значениях ξ . Действительно, потенциал $\varphi^*(\xi)$ и его производная $d\varphi^*/d\xi$ в этих условиях малы. Поэтому, разлагая выражение (9.21) в ряд по степеням φ^* и $1/\xi^2$, находим, что при $\xi \rightarrow \infty$ потенциал φ^* убывает, как $1/\xi^2$, что и должно быть.

При этом

$$\varphi_{\xi \rightarrow \infty}^* = \frac{\varphi_{\infty}^*}{\xi^2} = \frac{1}{\xi^2} \frac{1}{4} \left\{ \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} + \left(\varphi_1^* + \frac{1}{2} \right) [1 - \Phi(t)] + C_0 \right\}, \quad (9.24)$$

где $t = \sqrt{\varphi_1^* - \frac{1}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi}}(1)$, а

$$C_0 = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \times \int_1^{\infty} \frac{\xi_0 \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} \left(3 \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} + \xi_0 \frac{d^2\varphi^*}{d\xi_0^2} \right) \exp \left(\varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} \right)}{\left[-\varphi^*(\xi_0) - \frac{\xi_0}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} \right]^{1/2}} d\xi_0. \quad (9.25)$$

В рассматриваемом здесь случае $\varphi_{\infty}^* = 0,237$ и, следовательно,

$$\varphi_{\xi \rightarrow \infty} = 0,237/\xi^2. \quad (9.26)$$

Используя результаты расчетов потенциала поля в окрестности тела, определим теперь концентрации ионов и электронов с помощью формулы (9.18)

$$N = N^- = N_{\text{инф}}^- = N_0 \exp[-\varphi^*(\xi)].$$

Соответствующая зависимость N от $\xi = r/R_0$ изображена на рис. 61. Из рисунка видно, что вблизи поверхности тела возмущение концентрации заряженных частиц зна-

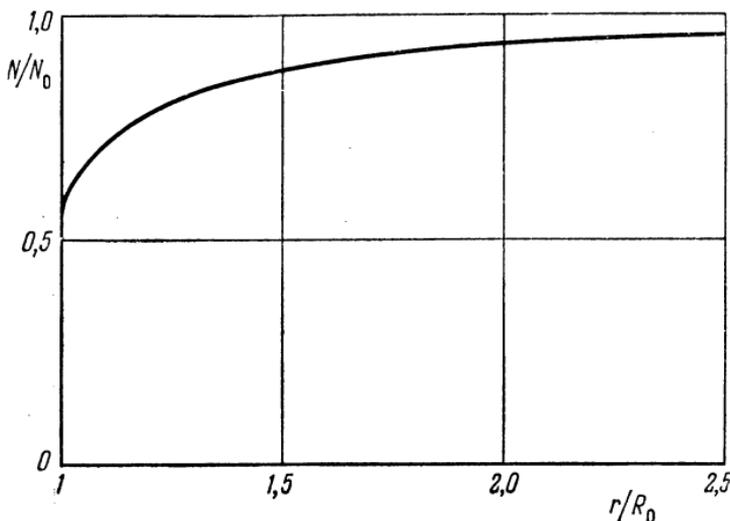


Рис. 61. Кривая изменения концентрации частиц в окрестности тела при $\frac{e\varphi_0}{\kappa T} \gg 1$.

чительно. На больших расстояниях от тела $-\delta N = N_0 - N$ убывает пропорционально $1/r^2$, а именно:

$$-\delta N_{\xi \rightarrow \infty} = N_0 \frac{\varphi_{\infty}^*}{\xi^2} = \frac{0,237}{\xi^2} N_0.$$

Напряженность электрического поля в окрестности тела представлена на рис. 62.

в. Возмущенная зона в окрестности тела при произвольном потенциале на его поверхности. Выше задача решалась в предположении, что потенциал поля на поверхности велик: $\varphi_0^* = \frac{e|\varphi_0|}{\kappa T} \gg 1$. При произвольном значении φ_0^* уравнение (9.12) записывается в виде

$$\varphi^* = \ln \left\{ \frac{A}{B - C_1[\xi, \varphi^*(\xi)] + C_2[\xi, \varphi^*(\xi)]} \right\}, \quad (9.27)$$

где

$$A = 1 + \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*}) + \\ + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\varphi_0^* - \varphi^*}{1 - 1/\xi^2}}\right) \right] \exp\left(\frac{\varphi_0^* - \varphi^*}{\xi^2 - 1}\right), \\ B = e^{\varphi^*} [1 - \Phi(\sqrt{\varphi^*})] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\varphi^*} + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \exp\left(\frac{\xi^2 \varphi^* - \varphi_1^*}{\xi^2 - 1}\right),$$

$\varphi_1^* = \varphi^*(1)$, а C_1 и C_2 по-прежнему определены выражениями (9.22) и (9.23).

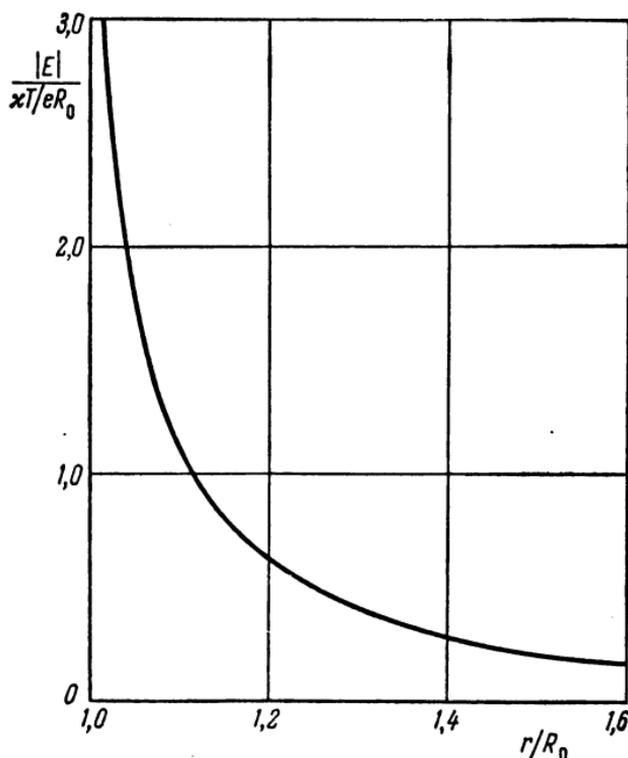


Рис. 62. Кривая изменения напряженности поля в окрестности тела при $\frac{e\varphi_0}{\kappa T} \gg 1$.

Решение уравнения (9.27) при произвольном значении φ_0^* находится совершенно аналогично решению уравне-

ния (9.21), рассмотренному выше. Результаты соответствующего расчета функции $\varphi^*(\xi)$ для значений $\varphi_0^* = 0,25; 0,50; 0,75; 1,0$ и для $\varphi_0^* \gg 1$ изображены на рис. 63 и 64. Воспользовавшись найденными значениями функций $\varphi^*(\xi)$, с помощью формулы (9.9) нетрудно опреде-

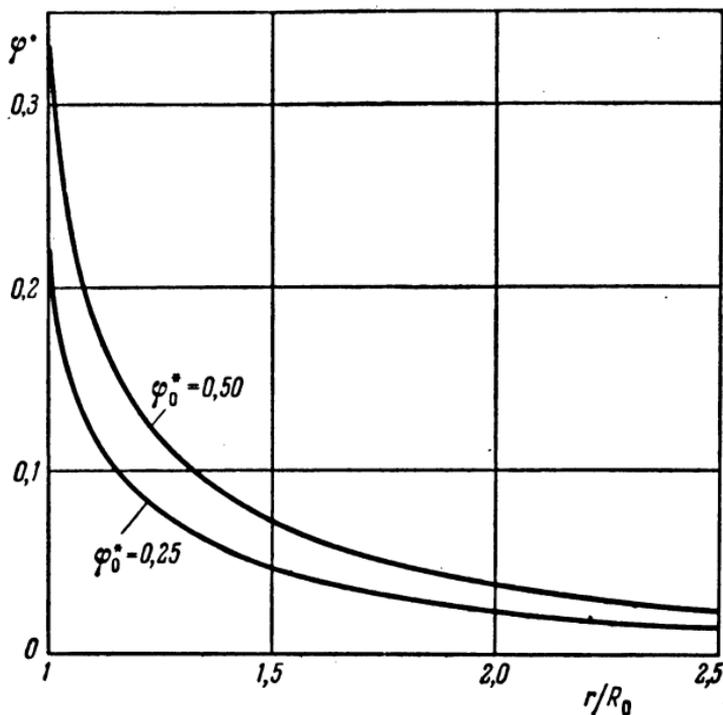


Рис. 63. Кривые изменения потенциала электрического поля в окрестности тела при $|\varphi_0| = 0,25 \frac{\kappa T}{e}$ и $|\varphi_0| = 0,5 \frac{\kappa T}{e}$.

лить и концентрации электронов и ионов в возмущенной зоне. В частности, на больших расстояниях от тела, как следует из выражений (9.8), (9.9),

$$N_{\text{инф}}^+ = N_0 \left\{ 1 + \varphi^* - \frac{1}{2\xi^2} \left[\left(\varphi_1^* + \frac{1}{2} \right) (1 - \Phi(t)) + \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} + C_0 \right] \right\} \quad (9.28)$$

$$N^- = N_0 \left\{ 1 - \varphi^* + \frac{1}{2\xi^2} \left[\left(\varphi_0^* - \frac{1}{2} \right) (1 - \Phi(\sqrt{\varphi_0^*})) - \frac{\sqrt{\varphi_0^*}}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi_0^*} \right] \right\}. \quad (9.29)$$

Здесь по-прежнему $t = \sqrt{-\varphi_1^* - \frac{1}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi}} (1)$, а константа

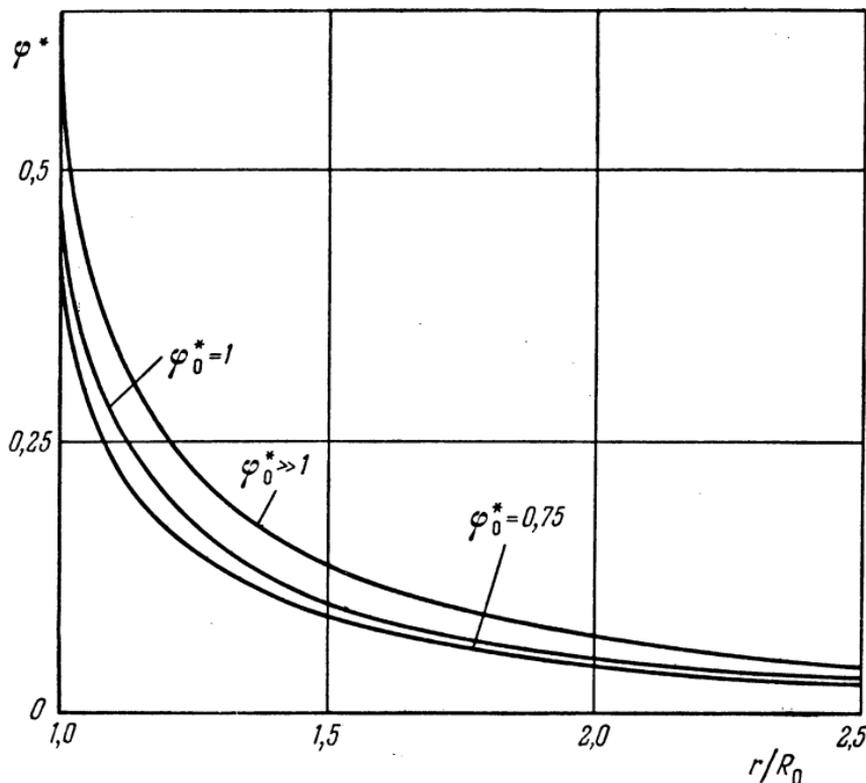


Рис. 64. Кривые изменения потенциала электрического поля в окрестности тела при $|\varphi_0| = 0,75 \frac{\kappa T}{e}$, $\frac{\kappa T}{e}$ и $|\varphi_0| \gg \frac{\kappa T}{e}$.

C_0 определена выражением (9.25). Следовательно, при $\xi \gg 1$, $\varphi^* = \varphi_\infty^*/\xi^2$, где

$$\varphi_\infty^* = \frac{1}{4} \left\{ \left(\varphi_1^* + \frac{1}{2} \right) [1 - \Phi(t)] + \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} + C_0 + \left(\varphi_0^* - \frac{1}{2} \right) [1 - \Phi(\sqrt{\varphi_0^*})] - \frac{\sqrt{\varphi_0^*} e^{-\varphi_0^*}}{\sqrt{\pi}} \right\}. \quad (9.30)$$

Возмущение концентрации частиц при этом равно

$$N_0 - N_{\xi \rightarrow \infty} = -\delta N_{\xi \rightarrow \infty} = \frac{N_0}{4\xi^2} \left\{ \left(\varphi_1^* + \frac{1}{2} \right) [1 - \Phi(t)] + \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} + C_0 - \left(\varphi_0^* - \frac{1}{2} \right) [1 - \Phi(\sqrt{\varphi_0^*})] + \frac{\sqrt{\varphi_0^*}}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi_0^*} \right\}.$$

Значения φ_∞^* и $\delta N_\infty = -\frac{\xi^2 \delta N_{\xi \rightarrow \infty}}{N_0}$ в зависимости от потенциала на поверхности тела φ_0 приведены в табл. XXIII

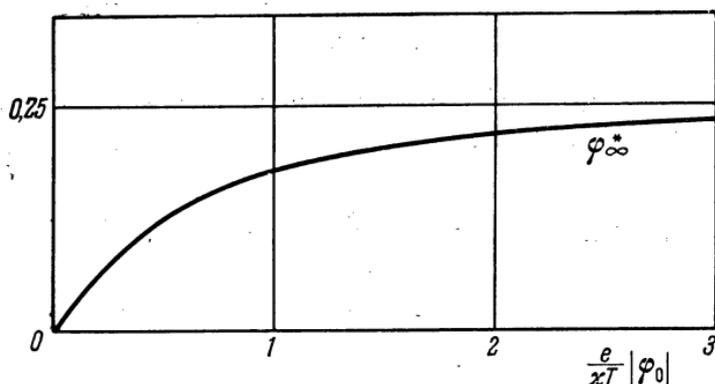


Рис. 65. Асимптотическое значение, характеризующее поведение поля на больших расстояниях от тела (φ_∞^*) в зависимости от потенциала поля на поверхности тела.

Таблица XXIII

Основные константы, характеризующие электрическое поле и концентрацию частиц при различных значениях потенциала поля на поверхности тела

φ_0^*	φ_1^*	φ_∞^*	δN_∞
0	0	0	0,25
$\varphi_0^* \ll 1$	φ_0^*	$\varphi_0^*/2$	0,25
0,25	0,22	0,082	0,25
0,50	0,37	0,13	0,25
0,75	0,47	0,16	0,25
1,0	0,53	0,18	0,24
$\varphi_0^* \gg 1$	0,69	0,24	0,24

(см. также рис. 65). Там же приведены и значения потенциала поля φ_1^* на внешней границе двойного слоя. Заметим, что при малых значениях потенциала поля на поверхности тела ($\varphi_0^* \ll 1$) его значение на внешней границе двойного слоя φ_1^* совпадает с φ_0^* , т. е.

$$\frac{\varphi_0^* - \varphi_1^*}{\varphi_0^*} \rightarrow 0 \text{ при } \varphi_0^* \rightarrow 0.$$

§ 38. Двойной слой около поверхности большого тела

Изменение потенциала поля в двойном слое около поверхности большого тела определяется уравнением (9.17)

$$\frac{d^2\varphi^*}{d\zeta^2} = \frac{1}{2} \left\{ e^{\varphi^*} [1 - \Phi(\sqrt{\varphi^*})] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{\varphi^*} - \sqrt{\varphi^* - \varphi_\infty^*}) + C(\varphi^*) - e^{-\varphi^*} [1 + \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})] \right\}. \quad (9.17)$$

Здесь $\zeta = \frac{r - R_0}{D}$, $\varphi_0^* = \frac{e|\Phi_0|}{\kappa T}$ — потенциал на поверхности тела (при $\zeta = 0$), а $\varphi_\infty^* = \frac{e\Phi_\infty}{\kappa T}$ — вычисленное выше асимптотическое значение потенциала (9.6), характеризующее поведение поля на больших расстояниях от тела. Функция же $C(\varphi^*)$ в (9.17) определяется выражением (9.15а).

Вид функции $C(\varphi^*)$ зависит от характера изменения потенциала поля в окрестности тела, т. е. от функции $\varphi^*(\xi)$, которая определена в предыдущем параграфе для различных значений φ_0^* . Используя функцию $\varphi^*(\xi)$, можно вычислить с помощью формулы (9.15а) функцию $C(\varphi^*)$.

Результаты соответствующего расчета приведены на рис. 66 для $\varphi_0^* \gg 1$ (кривая 1). На этом же рисунке нанесена зависимость $\int C(\varphi^*) d\varphi^*$ (кривая 2) от φ^* , которая необходима для расчета потенциала поля в двойном слое (см. (9.32)).

На внешней границе двойного слоя, т. е. при $\zeta \rightarrow \infty$, потенциал поля φ^* , естественно, должен совпадать с граничным значением функции $\varphi^*(\xi)$. Иначе говоря,

$$\varphi_{\zeta \rightarrow \infty}^*(\zeta) = \varphi_{\xi \rightarrow 1}^*(\xi) = \varphi_1^*,$$

где φ_1^* — рассчитанное выше значение потенциала поля

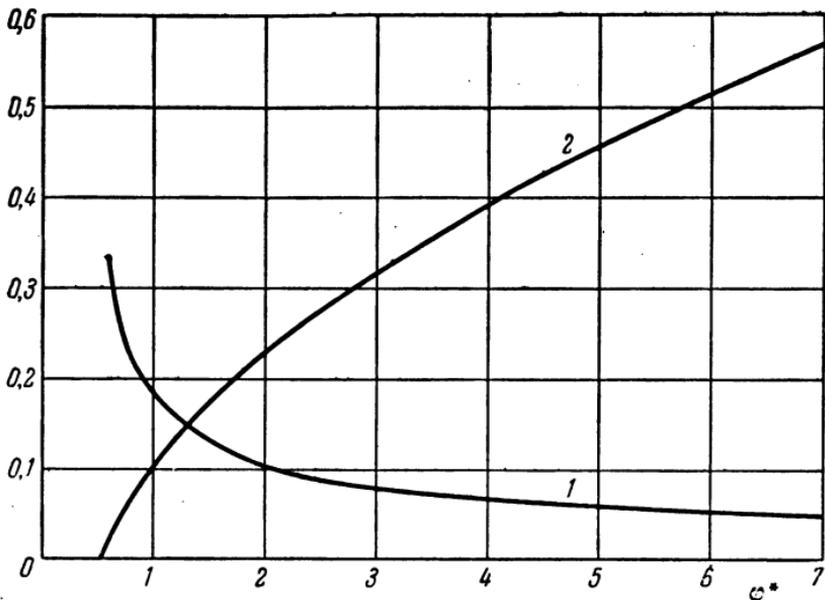


Рис. 66. Функция $C(\varphi^*)$ (кривая 1) и $\int_{\varphi_1^*}^{\varphi^*} C(\varphi^*) d\varphi^*$ (кривая 2).

на внешней границе двойного слоя. При $\varphi^*(\zeta) \rightarrow \varphi_1^*$ правая часть уравнения (9.17), естественно, обращается в нуль, т. е. плазма на внешней границе двойного слоя при $\zeta \rightarrow \infty$ является квазинейтральной, как это и должно быть.

Учитывая граничные условия

$$\varphi^* = \varphi_0^* \quad \text{при} \quad \zeta = 0$$

и

$$\varphi^* = \varphi_1^* \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty,$$

находим после интегрирования решение уравнения (9.17)

(см. § 14) в неявном виде

$$\zeta = \int_{\varphi_1^*}^{\varphi_0^*} \frac{d\varphi^*}{\sqrt{2 \int_{\varphi_1^*}^{\varphi^*} f(\varphi^*) d\varphi^*}}. \quad (9.31)$$

Здесь функция $f(\varphi^*)$ — правая часть уравнения (9.17). Подставляя $f(\varphi^*)$, получаем, что интеграл под корнем в формуле (9.31) равен

$$\begin{aligned} Z(\varphi^*) = 2 \int_{\varphi_1^*}^{\varphi^*} f(\varphi^*) d\varphi^* = e^{-\varphi^*} [1 + \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})] + \\ + e^{\varphi^*} [1 - \Phi(\sqrt{\varphi^*})] + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} [\varphi^{3/2} - (\varphi^* - \varphi_\infty^*)^{3/2}] + \\ + \frac{2\sqrt{\varphi^*}}{\sqrt{\pi}} - \frac{2e^{-\varphi_0^*}\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*}}{\sqrt{\pi}} - \int_{\varphi_1^*}^{\varphi^*} C(\varphi^*) d\varphi^* - \left\{ e^{-\varphi_1^*} [1 + \right. \\ \left. + \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})] + e^{\varphi_1^*} [1 - \Phi(\sqrt{\varphi_1^*})] + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} [\varphi_1^{*3/2} - \right. \\ \left. - (\varphi_1^* - \varphi_\infty^*)^{3/2}] + \frac{2\sqrt{\varphi_1^*}}{\sqrt{\pi}} - \frac{2e^{-\varphi_0^*}\sqrt{\varphi_0^* - \varphi_1^*}}{\sqrt{\pi}} \right\}. \quad (9.32) \end{aligned}$$

Таким образом, решение уравнения (9.17) имеет вид

$$\zeta = \int_{\varphi^*}^{\varphi_0^*} \frac{d\varphi^*}{\sqrt{Z(\varphi^*)}}. \quad (9.33)$$

Интегрирование (9.33) можно выполнить лишь численными методами. Результаты соответствующего расчета потенциала поля в двойном слое в зависимости от расстояния от поверхности тела приведен на рис. 67 для значения $\varphi_0^* = 10$.

Зависимости концентрации притягивающихся и отталкивающихся частиц от расстояния в двойном слое, рассчитанные с помощью формул (9.15), (9.16), изображены на рис. 68 при том же значении потенциала поля на поверхности тела. Из рисунков видно, что не только

концентрация отталкивающихся частиц, но и концентрация притягивающихся частиц убывает по мере приближения к поверхности тела. Разумеется, концентрация отталкивающихся частиц убывает с ростом φ^* гораздо быстрее, чем концентрация притягивающихся частиц.

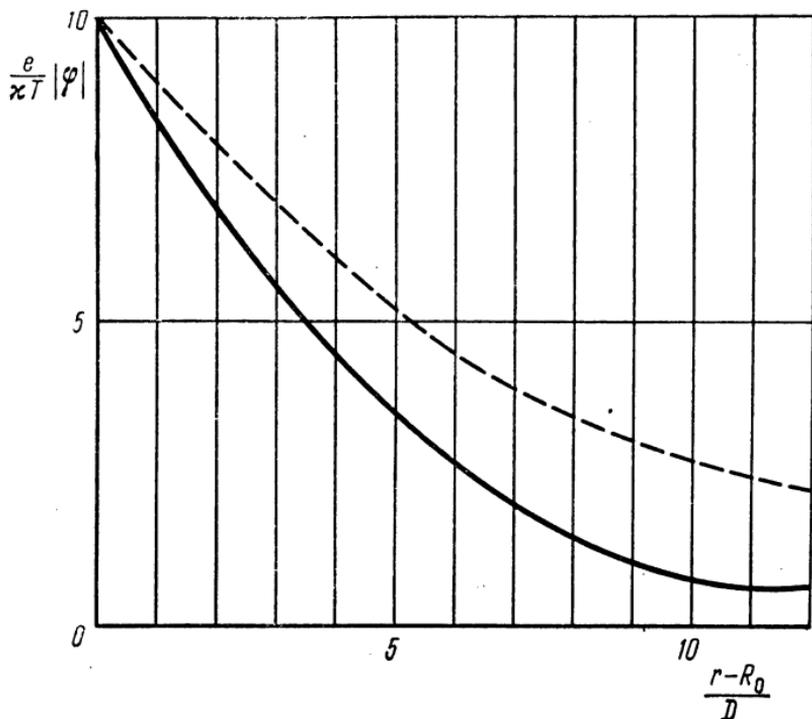


Рис 67. Зависимость потенциала поля в двойном слое около поверхности сферического тела при $|\varphi_0| = 10 \frac{\kappa T}{e}$ от расстояния от поверхности тела. Пунктирная кривая — то же, когда не учитывается влияние поля в квазинейтральной плазме.

В самом деле, из формул (9.15), (9.16) следует, что при больших значениях $\varphi^* \gg 1$

$$N^- = e^{-\varphi^*} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*}) \right] \ll e^{-\varphi^*}, \quad (9.156)$$

$$N_{\text{инф}}^+ = \frac{c}{\sqrt{\varphi^*}},$$

где

$$C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \varphi_{\infty}^* + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (\xi_0^2 - 1) \left(3 \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} + \xi_0 \frac{d^2\varphi^*}{d\xi_0^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[\varphi^*(\xi_0) + \frac{\xi_0}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} \right] d\xi_0 \right\}. \quad (9.15в)$$

Физический смысл выражения (9.15б) совершенно ясен. В самом деле, на внешнюю границу двойного слоя

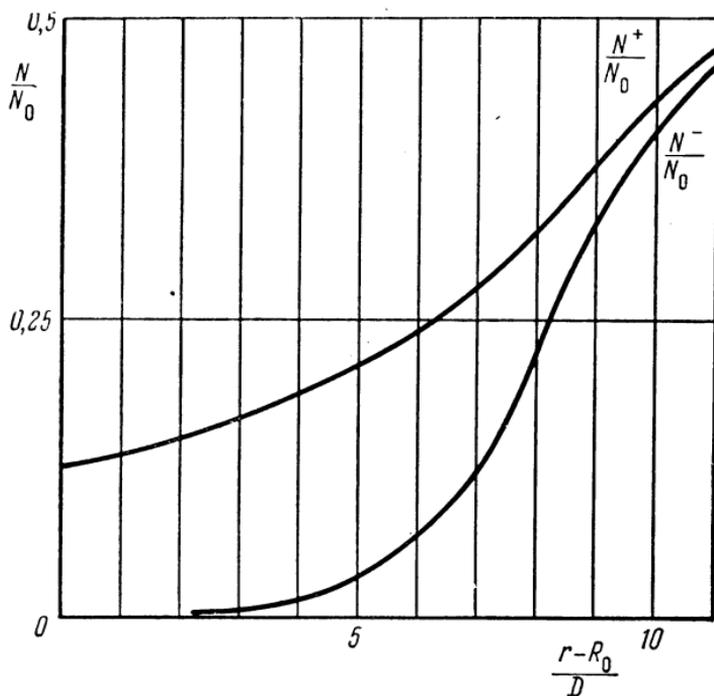


Рис. 68. Зависимость концентраций притягивающихся и отталкивающихся частиц в двойном слое при $|\varphi_0| = 10 \frac{\kappa T}{e}$ от расстояния от поверхности тела.

падает определенный поток притягивающихся частиц. Под действием притягивающего поля скорость этих частиц в двойном слое возрастает, но поток их при этом, естественно, остается постоянным. Следовательно, концентрация притягивающихся частиц в двойном слое убывает по мере возрастания их средней скорости. При

больших значениях $\varphi^* \gg 1$ средняя скорость пропорциональна $\sqrt{\varphi^*}$ и, следовательно, $N_{\text{инф}}^+ \sim 1/\sqrt{\varphi^*}$. Постоянная C в выражении (9.15в) равна 0,415.

Напряженность электрического поля в двойном слое, как ясно из (9.33), определена выражением

$$|E| = -\frac{\kappa T}{eD} \frac{d\varphi^*}{d\xi} = \sqrt{4\pi N_0 \kappa T} \sqrt{Z(\varphi^*)}, \quad (9.34)$$

где $Z(\varphi^*)$ — безразмерная функция (см. (9.32)). Знак напряженности поля в формуле (9.34) зависит, конечно, от

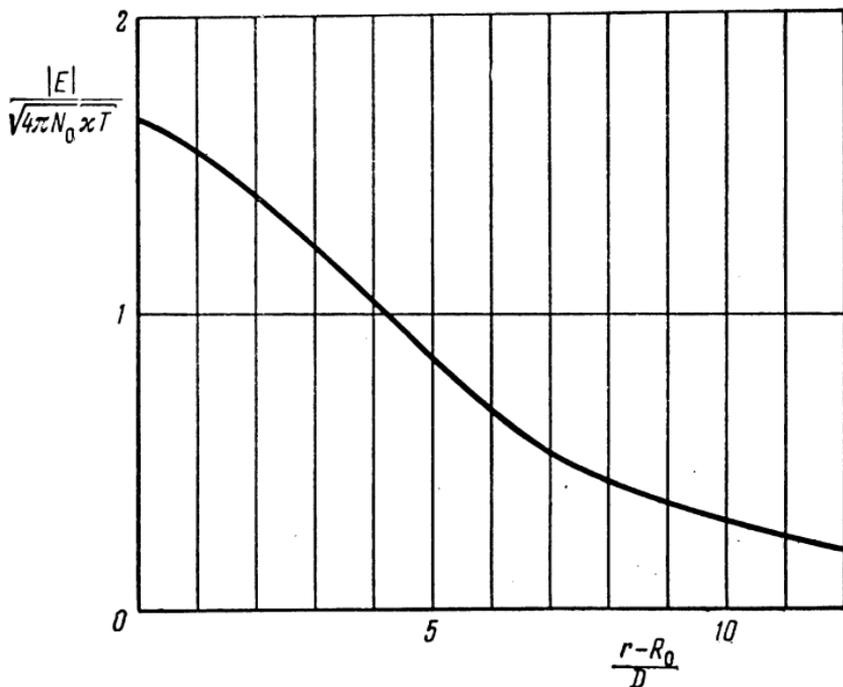


Рис. 69. Зависимость напряженности электрического поля в двойном слое при $|\varphi_0| = 10 \frac{\kappa T}{e}$ от расстояния от поверхности тела.

знака заряда самого тела: если тело заряжено отрицательно, то $E < 0$, а если положительно, то $E > 0$. Изменение напряженности поля в двойном слое в зависимости от расстояния от поверхности тела, вычисленное с помощью формулы (9.34) для значения $\varphi_0^* = 10$, изображено на рис. 69. Напряженность электрического поля на самой

поверхности тела в зависимости от потенциала поверхности φ_0^* , представлена на рис. 70. При больших значениях потенциала поля, когда $\varphi^* \gg 1$, как ясно из (9.32), (9.15в),

$$Z(\varphi^*) = 4C \sqrt{\varphi^*} - C_0 \approx 1,66 \sqrt{\varphi^*} - 2,83, \quad (9.32a)$$

где C определяется формулой (9.15в); в последнем

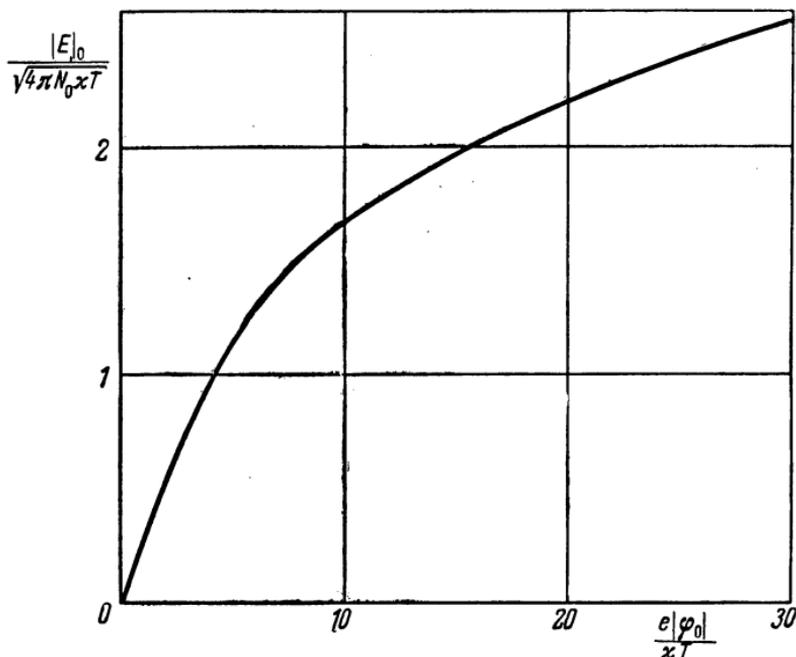


Рис. 70. Напряженность поля на поверхности тела в зависимости от потенциала поверхности.

выражении учтено, что при $\varphi_0^* \gg \varphi^* \gg 1$ постоянная C равна 0,415. Следовательно, при $\varphi^* \gg 1$

$$|E| = 4,57 \sqrt{N_0 k T} \sqrt[4]{e |\varphi_0| / k T}. \quad (9.34a)$$

Отсюда видно, что напряженность электрического поля на поверхности тела с ростом потенциала поверхности φ_0^* растет весьма медленно, а именно пропорционально $\sqrt[4]{\varphi_0^*} = (e |\varphi_0| / k T)^{1/4}$. Соответственно толщина двойного слоя, т. е. толщина слоя у поверхности тела, в котором потенциал электрического поля значительно уменьшается,

растет с увеличением потенциала поверхности пропорционально $(e|\varphi_0/kT)^{3/4}$. При $e|\varphi_0/kT \sim 1$ толщина двойного слоя порядка дебаевского радиуса.

Рассмотрим для сравнения вид двойного слоя в случае, когда можно пренебречь функцией $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\varphi^*} - C_1(1, \varphi^*)$, описывающей влияние поля в окрестности тела на движение притягивающихся частиц. Потенциал поля описывается в этом случае уравнением

$$\frac{d^2\varphi^*}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \{ e^{\varphi^*} [1 - \Phi(\sqrt{\varphi^*})] - e^{-\varphi^*} [1 + \Phi(\sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})] \}. \quad (9.17a)$$

Уравнение (9.17a) приближенно описывает ход потенциала поля в двойном слое около произвольной поверхности и интегрируется так же, как и уравнение (9.17). Результат расчета потенциала поля в этом случае для $\varphi_0^* = 10$ изображен пунктирной кривой на рис. 67. Из рисунка видно, что ход потенциала в двойном слое в рассматриваемом случае заметно отличается от хода потенциала около сферы. Различаются также напряженности электрического поля на поверхности тела. Так, при больших значениях потенциала $\varphi_0^* \gg 1$ напряженность поля на поверхности шара оказывается в $\sqrt{2} \sqrt{\pi C} \approx 1,21$ раза больше. При малых значениях потенциала поля на поверхности тела, когда $\varphi_0^* \ll 1$, решения уравнений (9.17) и (9.17a) различаются в качественном отношении. Так, согласно точному решению, около сферической поверхности, как уже отмечалось выше, при малых φ_0^* потенциал поля на внешней границе двойного слоя равен φ_0^* , т. е. в линейном по φ_0^* приближении двойной слой около поверхности шара отсутствует. Согласно же приближенному уравнению (9.17a) двойной слой сохраняется при малых φ_0^* ; значение потенциала поля на внешней границе двойного слоя равно $\varphi_0^*/2$. Это непосредственно следует из уравнения (9.17a). Действительно, значение потенциала поля на внешней границе двойного слоя определяется из условия квазинейтральности плазмы (9.12), т. е. из условия обращения в нуль правой части уравнения (9.17a). При малых значениях φ_0^* и φ^* последняя равна

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{\varphi^*} - \sqrt{\varphi_0^* - \varphi^*})$, и следовательно, на внешней границе двойного слоя $\varphi^* = \varphi_0^*/2$.

Таким образом, мы видим, что электрическое поле в квазинейтральной плазме в окрестности тела существенно влияет на структуру двойного слоя, хотя толщина двойного слоя при этом нами принята величиной, сколь угодно малой в сравнении с радиусом сферы. Двойной слой около поверхности большого тела, следовательно, зависит от конкретной формы тела. Это понятно и из простых соображений, поскольку структура двойного слоя существенно зависит от потока частиц, приходящего на его внешнюю границу. Поток же зависит от формы тела, так как на него влияет все распределение поля в окрестности тела.

§ 39. Структура плазмы и электрическое поле при очень высоком потенциале поверхности большого тела

В предыдущих параграфах предполагалось, что толщина двойного слоя, т. е. размер области, где существенно нарушено условие квазинейтральности, много меньше размера тела. Мы видели вместе с тем, что толщина двойного слоя увеличивается с ростом потенциала поверхности φ_0 пропорционально $(e|\varphi_0|/\kappa T)^{3/4}$. При очень больших значениях потенциала φ_0 , т. е. когда

$$|\varphi_0| \gg \frac{\kappa T}{e} \left(\frac{R_0}{D} \right)^{4/3}, \quad (9.35)$$

толщина двойного слоя становится сравнимой с размерами тела. Ниже и будет рассмотрен случай очень высоких потенциалов на поверхности тела, когда выполнено условие (9.35). При этом по-прежнему рассматривается большое тело $R_0 \gg D$.

При решении уравнения Пуассона (9.3а)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = \\ = -4\pi e^2 [N_{\text{фин}}^+(r, U) + N_{\text{инф}}^+(r, U) - N^-(r, U)] \quad (9.3а) \end{aligned}$$

($U = -e|\varphi|$) можно выделить теперь две области: область квазинейтральной плазмы и область пространственного заряда.

В области квазинейтральной плазмы, где значения потенциала φ^* невелики ($\varphi^* \ll 1$), уравнение (9.3а) эквивалентно уравнению (9.12), решение которого было получено выше в § 37. Единственное различие состоит в том, что в § 37 толщина двойного слоя у поверхности тела принималась величиной малой по сравнению с радиусом тела R_0 и поэтому границей области квазинейтральности считалась граница тела $r = R_0$. Теперь размер слоя пространственного заряда R_c может быть больше и даже значительно больше, чем R_0 . Однако если потенциал поля в области пространственного заряда убывает достаточно резко, так что выполняется условие

$$|\varphi_0| \frac{R_0^2}{R_c^2} \gg \frac{\kappa T}{e}, \quad (9.36)$$

то всякая притягивающаяся частица, попавшая в область пространственного заряда, попадает и на поверхность тела и здесь поглощается. Роль поглощающей поверхности в уравнении квазинейтральности играет тогда сфера радиуса R_c . Следовательно, нам достаточно заменить в уравнении квазинейтральности (9.12) и в его решении, полученном в § 37 для $|\varphi_0| \gg \kappa T/e$, радиус R_0 на R_c . Иначе говоря, потенциал поля в области квазинейтральности $r \geq R_c$ описывается по-прежнему решением уравнения (9.12), где безразмерная переменная ξ равна

$$\xi = \frac{r}{R_c}.$$

Радиус области пространственного заряда R_c , разумеется, зависит от радиуса тела R_0 и потенциала его поверхности φ_0 ; он будет определен в дальнейшем. Сравнивая условие (9.36) с условием (9.35), убеждаемся, что условие (9.36) заведомо выполнено, если

$$\frac{R_c}{R_0} \ll \left(\frac{R_0}{D}\right)^{2/3},$$

т. е. вплоть до очень больших значений величины радиуса области пространственного заряда. Фактически, как будет показано ниже, условие (9.36) всегда выполняется.

В области пространственного заряда ($r \leq R_c$) необходимо уже решать полное уравнение (9.3а). Учтем, однако,

что потенциал поля φ при $r < R_c$ порядка φ_0 и, следовательно $|\varphi| \gg \frac{\kappa T}{e}$. В этом случае правую часть уравнения (9.2а) можно существенно упростить. Прежде всего концентрация отталкивающихся частиц N^- (см. 9.9) при $|\varphi| \gg \frac{\kappa T}{e}$ экспоненциально мала и ею можно пренебречь. Кроме того, существенно упрощается и выражение (8.39) для концентрации притягивающихся частиц, совершающих инфинитное движение $N_{\text{инф}}^+(r)^*$. В самом деле, интегральные члены в области, где $|U(r_0)| \gg \kappa T$, дают экспоненциально малый вклад из-за влияния экспоненциального члена $\exp\left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0}\right]$. Существенной оказывается, следовательно, лишь область, где величина $|U(r_0)/\kappa T| \lesssim 1$, т. е. область квазинейтральной плазмы $r_0 \geq R_c$. Учитывая, что при этом $|U(r)| \gg |U(r_0)|$, получаем для первого интегрального члена в формуле (8.39)

$$X[\varrho(r), \infty] = \frac{1}{2\sqrt{-\pi\kappa T U(r)}} \times \\ \times \int_{R_c}^{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left[3 \frac{dU}{dr_0} + r_0 \frac{d^2U}{dr_0^2}\right] \exp\left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0}\right] dr_0 = \frac{1}{\sqrt{-\pi U(r)/\kappa T}} \left\{ \frac{2}{r^2} \int_{R_c}^{\infty} r_0 \left(1 - \exp\left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0}\right]\right) dr_0 + \left(\frac{R_c^2}{r^2} - 1\right) \right\}.$$

Второй интегральный член при выполнении условия (9.3б) равен нулю, так как область интегрирования по dr_0 в этом случае не включает квазинейтральной плазмы, т. е. области $\varrho(R_0) > R_c$. Экспоненциально малым оказывается также и член, пропорциональный $\sqrt{1 - R_0^2/r^2}$. Упрощая остальные члены в формуле (8.39) (учитывая,

*) В рассматриваемом здесь случае поле может убывать как быстрее, так и медленнее, чем $1/r^2$, и потому необходимо использовать общее выражение (8.39) для плотности притягивающихся частиц, совершающих инфинитное движение.

что $-U(r)/\kappa T \gg 1$, находим окончательно, что

$$N_{\text{ин}\Phi}^+(r) = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi}} \frac{R_c^2}{r^2 \sqrt{-U(r)/\kappa T}} \times \\ \times \left\{ 1 + \varphi_\infty^* + \frac{2}{R_c^2} \int_{R_c}^{\infty} r_0 \left(1 - \exp \left[-\frac{U(r_0)}{\kappa T} - \frac{r_0}{2\kappa T} \frac{dU}{dr_0} \right] \right) dr_0 \right\} = \\ = \frac{0,415 R_c^2}{r^2 \sqrt{-U(r)/\kappa T}} N_0. \quad (9.37)$$

В последнем выражении учтено, что в области квазинейтральной плазмы потенциал $\varphi^*(\xi)$ совпадает с полученным в § 37б и, следовательно,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \varphi_\infty^* + 2 \int_1^{\infty} \xi_0 \left[1 - \exp \left(\varphi^* + \frac{\xi_0}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi_0} \right) \right] d\xi_0 \right\} = 0,415$$

(см. § 38). Выражение (9.37) имеет простой физический смысл сохранения потока притягивающихся частиц, проходящих на внешнюю границу области пространственного заряда.

Таким образом, уравнение (9.3а) в области пространственного заряда $r \leq R_c$ имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -4\pi e^2 \left\{ \frac{0,415 R_c^2 N_0}{r^2 \sqrt{-U(r)/\kappa T}} + N_{\text{фин}}^+ \right\}. \quad (9.38)$$

В безразмерных переменных

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{r}{R_c}, \\ \varphi^{(*)} &= \left[-\frac{U(r)}{\kappa T} \left(\frac{D}{R_c} \right)^{4/3} \right] = \frac{e|\varphi|}{\kappa T} \left(\frac{D}{R_c} \right)^{4/3} \end{aligned} \right\} \quad (9.39)$$

уравнение (9.3а) переписывается в виде

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\varphi^{(*)}}{d\eta} \right) = \frac{0,415}{\eta^2 \sqrt{\varphi^{(*)}}} + \frac{N_{\text{фин}}^+}{N_0} \left(\frac{R_c}{D} \right)^{2/3}. \quad (9.3б)$$

На поверхности тела при $r = R_0$ потенциал поля равен φ_0 , т. е.

$$\varphi^{(*)} |_{\eta=\eta_0=R_0/R_c} = \varphi_0^{(*)} = \frac{e|\varphi_0|}{\kappa T} \left(\frac{D}{R_c} \right)^{4/3}. \quad (9.40)$$

На границе области пространственного заряда при $r = R_c$ потенциал поля порядка $\kappa T/e$ и, следовательно,

$$\varphi^{(*)} |_{\eta \rightarrow 1} \rightarrow 0. \quad (9.41)$$

На границе области пространственного заряда и квазинейтральной плазмы можно выделить переходной слой, в котором еще нельзя пренебрегать отталкивающимися частицами. Толщина этого слоя, естественно, порядка дебаевского радиуса D . В этом слое поле описывается уравнением (9.17), и следовательно, решение его совпадает с решением для двойного слоя, полученным выше в § 38. При этом так же, как и в § 38, напряженность поля при $e|\varphi|/\kappa T \gg 1$ растет пропорционально $(e|\varphi|/\kappa T)^{1/4}$ (точнее см. (9.34a)).

Переписывая это выражение в переменных (9.39), получаем, что

$$\frac{d\varphi^{(*)}}{d\eta} \Big|_{\eta=1} = 1,29\varphi^{(*)1/4} = 0.$$

Следовательно, при $\eta \rightarrow 1$ должно выполняться еще условие

$$\frac{d\varphi^{(*)}}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow 1} \rightarrow 0. \quad (9.42)$$

Таким образом, решение уравнения (9.36) должно удовлетворять сразу трем граничным условиям (9.40), (9.41) и (9.42). Это возможно, так как радиус R_c (или параметр $\eta_0 = R_0/R_c$ в граничном условии (9.40)) является произвольным параметром. Граничные условия (9.40), (9.41) и (9.42) определяют, следовательно, не только решение уравнения (9.36), но и радиус области пространственного заряда. С учетом этих условий задача становится замкнутой и остается лишь проинтегрировать уравнение (9.36).

Предположим вначале, что частицами, совершающими финитное движение, можно пренебречь. Уравнение (9.36) приобретает тогда вид

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\varphi^{(*)}}{d\eta} \right) = \frac{0,415}{\sqrt{\varphi^{(*)}}}.$$

Уравнение такого типа с граничными условиями (9.41), (9.42) было решено Ленгмюром и Блоджетт [39]. Воспользовавшись их результатами, получаем сразу решение $\varphi^{(*)}(\eta)$, представленное в табл. XXIV и на рис. 71.

Таблица XXIV

Зависимость потенциала поля $\varphi^{(*)} = \frac{e|\Phi|}{\kappa T} \left(\frac{D}{R_c} \right)^{4/3}$ от расстояния $1/\eta = R_c/r$ в области пространственного заряда ($R_c > r$)

$1/\eta$	$\varphi^{(*)}$	$1/\eta$	$\varphi^{(*)}$	$1/\eta$	$\varphi^{(*)}$	$1/\eta$	$\varphi^{(*)}$
1,00	0	1,80	0,632	3,00	1,85	5,4	4,42
1,05	0,018	1,90	0,727	3,2	2,06	5,6	4,64
1,10	0,046	2,00	0,823	3,4	2,27	5,8	4,86
1,15	0,078	2,10	0,922	3,6	2,48	6,0	5,08
1,20	0,112	2,20	1,02	3,8	2,69	6,5	5,62
1,25	0,148	2,30	1,12	4,0	2,90	7,0	6,16
1,30	0,186	2,40	1,22	4,2	3,12	7,5	6,71
1,35	0,226	2,50	1,32	4,4	3,33	8,0	7,26
1,40	0,269	2,60	1,43	4,6	3,55	8,5	7,81
1,45	0,311	2,70	1,53	4,8	3,76	9,0	8,36
1,50	0,355	2,80	1,64	5,0	3,98	9,5	8,91
1,60	0,445	2,90	1,74	5,2	4,20	10,0	9,46
1,70	0,538						

Граничные условия (9.41) и (9.42) всегда выполняются. Граничное же условие (9.40)

$$\varphi^{(*)} |_{\eta=\eta_0} = \varphi_0^{(*)}$$

определяет значение η_0 , т. е. радиус области пространственного заряда

$$R_c = \frac{R_0}{\eta_0}. \quad (9.43)$$

Решение $\varphi^{(*)}(\eta)$ приведено в табл. XXIV лишь для значений $\eta = r/R_c \geq 0,1$. При $\eta < 0,1$ с точностью до 0,5%

$$\varphi^{(*)} = 1,67 \cdot \frac{1}{\eta} - 2,47.$$

Отсюда видно, что при очень больших значениях отношения R_c/r , т. е. при очень больших значениях потенциала поля на поверхности тела, когда $|\varphi_0| \gg \frac{\kappa T}{e} \left(\frac{R_c}{D}\right)^{4/3}$,

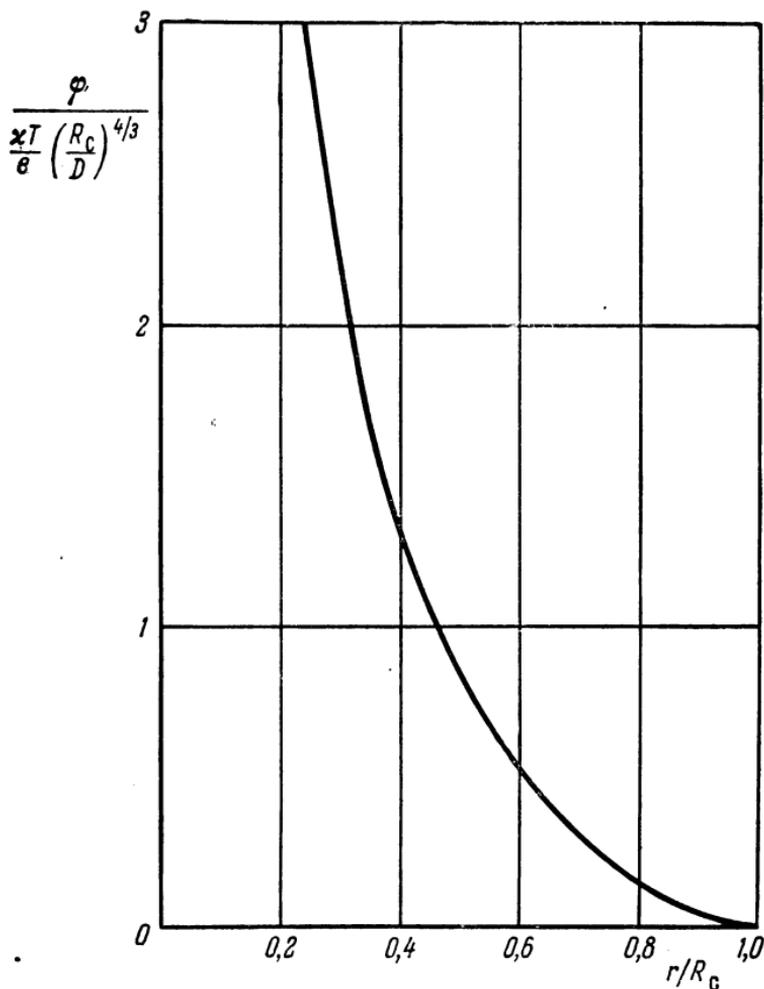


Рис. 71. Зависимость потенциала поля в области пространственного заряда от расстояния.

пространственный заряд вблизи тела не играет существенной роли и поле убывает по кулоновскому закону

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \frac{R_0}{r}.$$

В этом случае

$$R_c = \left(0,598 R_0 D^{4/3} \frac{e |\varphi_0|}{\kappa T} \right)^{3/7} = 0,803 R_0 \left[\frac{e |\varphi_0|}{\kappa T} \left(\frac{D}{R_0} \right)^{4/3} \right]^{3/7}. \quad (9.44)$$

Таким образом, при очень больших значениях потенциала поля на поверхности тела радиус области пространственного заряда растет с ростом φ_0 пропорционально $|\varphi_0|^{3/7}$. При относительно малых значениях потенциала поля на поверхности, когда

$$\varphi_0^{(*)} = \frac{e |\varphi_0|}{\kappa T} \left(\frac{D}{R_0} \right)^{4/3} \ll 1, \quad (9.45)$$

значения η_0 , определяемые функцией $\varphi^{*}(\eta)$, приведенной в табл. XXIV, близки к единице. Иначе говоря, при выполнении условия (9.45) область пространственного заряда ($R_c - R_0$) мала в сравнении с радиусом тела R_0 . В этом случае область пространственного заряда представляет собой тонкий заряженный слой вблизи поверхности тела, такой случай уже рассматривался в предыдущем параграфе. Зависимость радиуса R_c от потенциала поверхности φ_0 представлена на рис. 72.

Концентрация притягивающихся частиц в области пространственного заряда, естественно, значительно меньше, чем концентрации частиц в невозмущенной плазме $N_{\text{инф}}^+ \sim N_0 (D/R_0)^{2/3}$, так как скорость притягивающихся частиц в области пространственного заряда гораздо больше тепловой скорости $v \sim \sqrt{e\varphi/M} \sim \sqrt{\kappa T/M} (R_c/D)^{2/3}$, а полный поток частиц сохраняется. Однако при малых r потенциал поля растет медленно, так что в этой области концентрация притягивающихся частиц растет с уменьшением r (в силу той же причины — сохранения полного потока). Минимальное значение $N_{\text{мин}} = 1,57 (D/R_c)^{2/3} N_0$ достигается при $r/R_c \approx 0,67$. Ход концентрации притягивающихся частиц в области пространственного заряда, определенный по формуле (9.37), представлен на рис. 73.

Мы пренебрегали выше частицами, совершающими финитное движение. Это строго справедливо в случае,

если потенциал падает всегда быстрее, чем $1/r^2$. Это осуществляется, как показано в § 33, если радиус тела

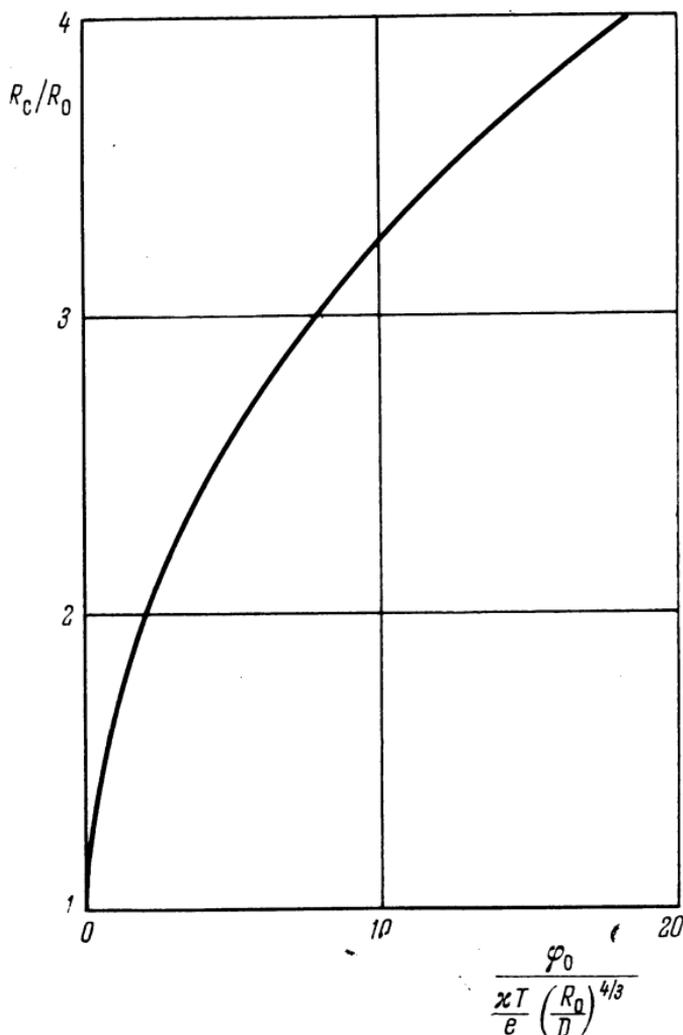


Рис. 72. Зависимость радиуса области пространственного заряда от потенциала поля на поверхности тела.

R_0 больше, чем расстояние r_K , где r_K определяется из формулы (8.8)

$$3 \frac{dU}{dr}(r_K) + r_K \frac{d^2U}{dr^2}(r_K) = 0. \quad (8.8)$$

В безразмерных переменных $\varphi^{(*)}$ и η формула (8.8)

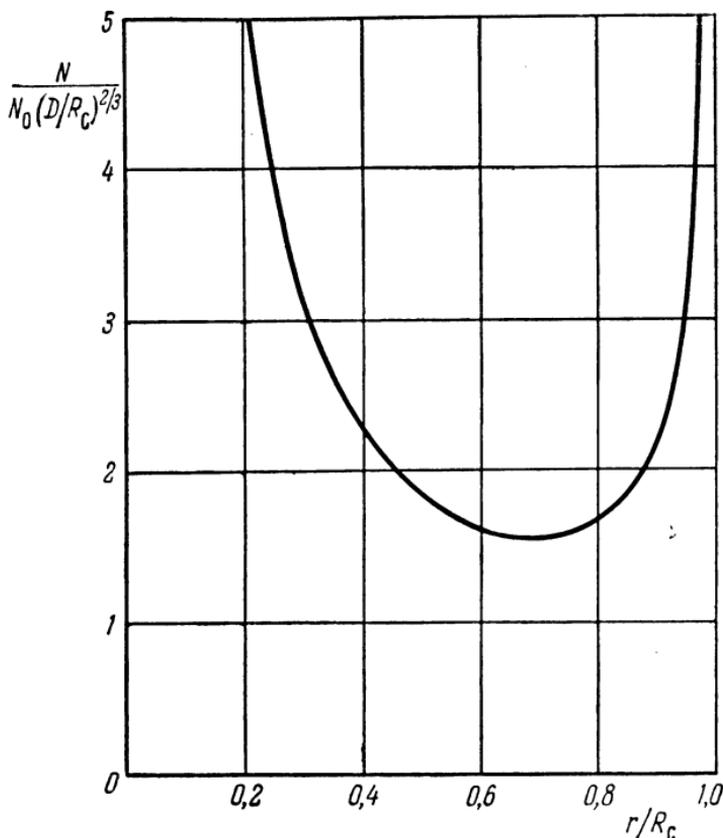


Рис. 73. Зависимость концентрации притягивающихся частиц в области пространственного заряда от расстояния.

переписывается в виде

$$3 \frac{d\varphi^{(*)}}{d\eta} (\eta_K) + \eta_K \frac{d^2\varphi^{(*)}}{d\eta^2} (\eta_K) = 0. \quad (9.46)$$

Используя функцию $\varphi^{(*)}(\eta)$, приведенную в табл. XXIV, находим, что

$$\left. \begin{aligned} \eta_K &= 0,846, \\ \varphi^{(*)}(\eta_K) &= 0,101, \\ \frac{d\varphi^{(*)}}{d\eta}(\eta_K) &= 0,70 \end{aligned} \right\} \quad (9.47)$$

или

$$\left. \begin{aligned} R_{\text{СК}} &= 1,183R_0, \\ \varphi_{0\text{К}} &= 0,127 \frac{\kappa T}{e} \left(\frac{R_0}{D} \right)^{4/3}. \end{aligned} \right\} \quad (9.48)$$

Таким образом, если значение потенциала поверхности тела меньше, чем значение $\varphi_{0\text{К}}$ (см. формулу (9.48)), то финитные траектории, не проходящие через поверхность тела, отсутствуют. В этом случае концентрация финитных частиц равна нулю (при достаточно большой длине свободного пробега), и полученное решение является точным решением уравнения (9.3б).

Важно, что при $\varphi_0 > \varphi_{0\text{К}}$ концентрация финитных частиц также экспоненциально мала. В самом деле, предположим, что частицы взаимодействуют по кулоновскому закону, так что функция распределения финитных частиц описывается уравнением Фоккера — Планка в пространстве энергии и момента (см. § 3). В области финитного движения функция распределения определяется условием постоянства потока частиц из области инфинитного движения в область финитного движения и затем на поверхность тела (см. § 33). По порядку величины это приводит к следующему выражению для концентрации частиц в области финитного движения (см. § 35):

$$N_{\text{фин}}^+ \sim (\varphi^*)^\lambda \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_0}{\kappa T}\right) N_0. \quad (9.49)$$

В (9.49) $\varphi^* = e|\varphi|/\kappa T$, показатель λ порядка единицы и зависит от характера столкновений финитных частиц и \mathcal{E}_0 — минимальное значение энергии финитной частицы на границе областей финитного и инфинитного движений. При $\varphi_0 = \varphi_{0\text{К}}$ очевидно, что

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(r_{\text{К}}) = U(r_{\text{К}}) + \frac{r_{\text{К}}}{2} \frac{dU}{dr}(r_{\text{К}}),$$

или, учитывая (9.47),

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\kappa T} = 0,195 (R_{\text{С}}/D)^{4/3}.$$

Следовательно, концентрация финитных частиц в этом случае экспоненциально мала. Можно, далее, показать, что с увеличением φ_0 отношение \mathcal{E}_0/kT лишь увеличивается. В частности, при $\varphi_0 \gg \varphi_{0к}$

$$\frac{\mathcal{E}_0}{kT} = \frac{2,79}{\varphi_0^{(*)}} \left(\frac{R_c}{D} \right)^{4/3} = 2,15 \left(\frac{R_0}{D} \right)^{8/7} \left(\frac{e|\varphi_0|}{kT} \right)^{1/7}. \quad (9.50)$$

Таким образом, $N_{\text{фин}}^+$ при $R_0/D \gg 1$ всегда экспоненциально мала. Этот вывод вполне понятен. Дело в том, что инфинитная частица, которая может быть захвачена на финитную орбиту, должна обладать очень большим моментом количества движения

$$M \sim \sqrt{\frac{\mathcal{E}_0}{M}} MR_0 \gtrsim M \sqrt{kT/MR_0} \left(\frac{R_0}{D} \right)^{2/3}.$$

Число же таких частиц экспоненциально мало.

Таким образом, в рассматриваемом здесь случае большого тела ($R_0 \gg D$) концентрацией $N_{\text{фин}}^+$ можно пренебречь. Полученное выше решение уравнения (9.36) является поэтому точным. Заметим также, что если учесть формулу (9.50) для R_c , то легко убедиться, что условие (9.36), существенно использованное нами ранее, выполнено при произвольном значении потенциала поля на поверхности тела.

§ 40. Электрическое поле и структура плазмы в окрестности малого тела

а. Электрическое поле. Рассмотрим теперь случай, когда размер тела мал в сравнении с дебаевским радиусом $R_0 \ll D$. В этих условиях пространственный заряд в общем гораздо меньше сказывается на поведении электрического поля в окрестности тела, чем при $R_0 \gg D$. Это позволяет сравнительно просто найти распределение поля в окрестности малого тела при не очень больших потенциалах поверхности.

В самом деле, на небольших расстояниях от поверхности тела пространственный заряд не существен и поле падает по кулоновскому закону $\varphi(r) = \varphi_0 R_0/r$. Важную роль пространственный заряд играет лишь,

начиная с расстояний порядка дебаевского радиуса, которые велики по сравнению с размерами тела R_0 . Примем, что на таких больших расстояниях поле уже слабое, т. е. при $r \gg D$

$$|\varphi(r)| \ll \frac{\kappa T}{e}. \quad (9.51)$$

При достаточно большом D это условие всегда выполнено. В этом случае для концентраций притягивающихся и отталкивающихся частиц в той области, где они существенно влияют на поле, справедливы простые выражения.

Концентрация отталкивающихся частиц при выполнении условия (9.51), т. е. при $\varphi^* = e|\varphi|/\kappa T \ll 1$, определяется формулой (9.29)

$$N^- = N_0 \left\{ 1 - \varphi^* + \frac{1}{2\xi^2} \left[\left(\varphi_0^* - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \Phi(\sqrt{\varphi_0^*}) \right) - \frac{\sqrt{\varphi_0^*}}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi_0^*} \right] \right\}, \quad (9.29)$$

где по-прежнему $\xi = r/R_0$. Концентрация притягивающихся частиц, совершающих инфинитное движение, как показано в § 34, определяется выражением (8.37). При $r \gg R_0$ и $\varphi^* \ll 1$ в линейном приближении это выражение существеннейшим образом упрощается, и мы имеем

$$N_{\text{инф}}^+(\xi) = N_0 \left[1 + \varphi^* - \frac{1}{\xi^2} \left(\varphi_0^* + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (9.52)$$

Концентрация финитных частиц в том же приближении равна нулю*).

Таким образом, уравнение (9.10) для электрического поля в рассматриваемом случае малого тела ($R_0 \ll D$) записывается в виде

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\varphi^*}{d\xi} \right) = 2 \left(\frac{R_0}{D} \right)^2 \left(\varphi^* - \frac{\varphi_\infty^*}{\xi^2} \right), \quad (9.53)$$

*) При $e|\varphi| \ll \kappa T$ концентрация финитных частиц пропорциональна $[e|\varphi|/\kappa T]^{3/2}$ (см., например, § 35).

где

$$\varphi_{\infty}^* = \frac{1}{8} \left[4\varphi_0^* - 2\varphi_0^* \Phi(\sqrt{\varphi_0^*}) + \Phi(\sqrt{\varphi_0^*}) - \frac{2\sqrt{\varphi_0^*}}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi_0^*} \right]. \quad (9.54)$$

Граничные условия: $\varphi^* = \varphi_0^*$ при $\xi = 1$ и $\varphi^* \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Решение уравнения (9.53) после подстановки

$$\varphi^*(\xi) = \frac{1}{\xi} \varphi_1^*(\xi) \exp\left(-\frac{\sqrt{2} R_0}{D} \xi\right)$$

находится путем элементарного интегрирования и имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^* = & \frac{\varphi_0^*}{\xi} \exp\left[-\frac{\sqrt{2} R_0}{D} (\xi - 1)\right] + \\ & + \frac{\varphi_{\infty}^* R_0}{\sqrt{2} D \xi} \left\{ -\exp\left[-\frac{\sqrt{2} R_0}{D} \xi\right] Ei\left[-\frac{\sqrt{2} R_0}{D} \xi\right] + \right. \\ & + \left. \left(\bar{Ei}\left[\frac{\sqrt{2} R_0}{D} \xi\right] - \bar{Ei}\left[\frac{\sqrt{2} R_0}{D}\right] \right) \exp\left(-\frac{\sqrt{2} R_0}{D} \xi\right) + \right. \\ & \left. + Ei\left[-\frac{\sqrt{2} R_0}{D} \xi\right] \exp\left[\frac{\sqrt{2} R_0}{D} (2 - \xi)\right] \right\}, \quad (9.55) \end{aligned}$$

где $R_0/D = (4\pi e^2 N_0 R_0^2 / \kappa T)^{1/2}$, а Ei и \bar{Ei} — интегральные показательные функции

$$Ei[-x] = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad \bar{Ei}[x] = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt.$$

На сравнительно небольших расстояниях от тела, где $r < D$, поле, описываемое выражением (9.55), убывает по кулоновскому закону, при $D < r < \frac{D}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{2D}{R_0 \varphi_0^*}\right)$ поле убывает экспоненциально, а на очень больших расстояниях, при $r > D \ln\left(\frac{2D}{R_0 \varphi_0^*}\right)$, поле убывает, как $1/r^2$, т. е.

$$\varphi_{r \rightarrow \infty} = \frac{\kappa T \varphi_{\infty}^*}{e} \frac{R_0^2}{r^2}, \quad (9.56)$$

где φ_∞^* определено формулой (9.54). Зависимость потенциала $\varphi^* = e|\varphi|/\kappa T$ от $\xi = r/R_0$ для $D \approx 14R_0$ изображена на рис. 74 для двух значений φ_0^* .

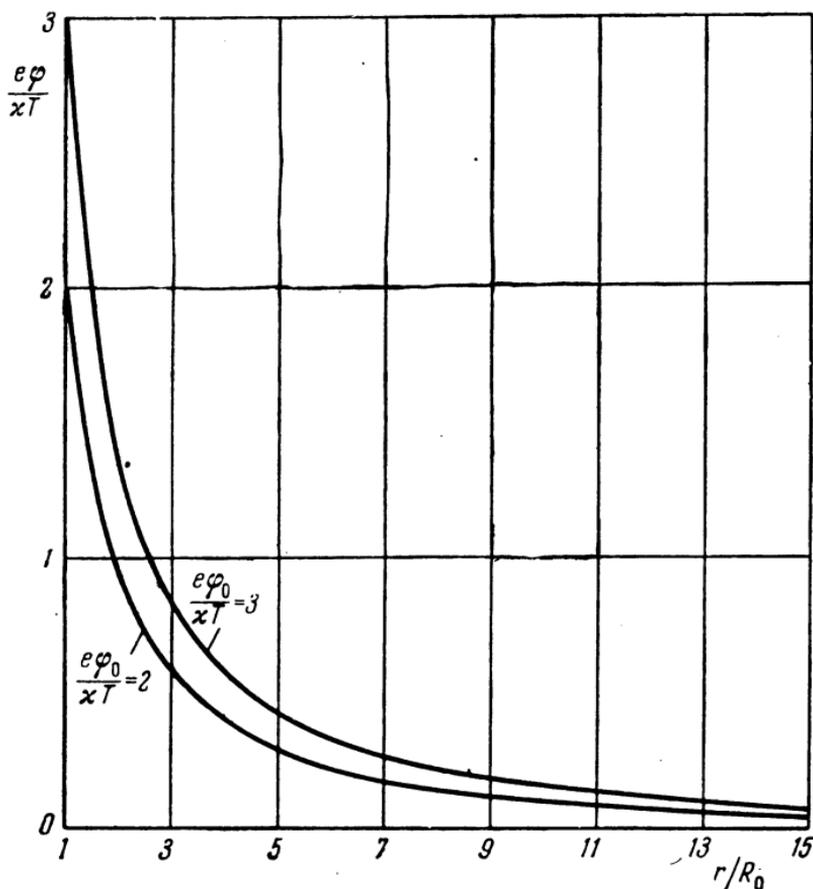


Рис. 74. Кривые изменения потенциала поля в окрестности малого тела при $D/R_0 = 14,2$; значения φ_0 указаны на рисунке.

б. Концентрация частиц. Концентрация притягивающихся инфинитных частиц дается выражением (8.37). Подставим в него потенциал $\varphi^*(\xi)$ из формулы (9.55). Нижняя граница изменения параметра r_0 в интегральных членах в выражении (8.37) равна $\varrho_0(R_0)$ и в нашем случае она превосходит D , так как $r_K \sim D$ (см. § 32). Следовательно, во всей области изменения r_0 потенциал $\varphi^*(r_0) \leq \varphi^*(D) \ll 1$, так что на не очень больших

расстояниях от тела, когда $r < D$,

$$N_{\text{инф}}^+(\xi) = N_0 \left\{ \frac{\sqrt{\Phi_0^*}}{\sqrt{\pi\xi}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\Phi_0^*}{\xi}} \right) \right] \exp \left(\frac{\Phi_0^*}{\xi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\Phi_0^*}{\xi+1}} \right) \right] \exp \left(\frac{\Phi_0^*}{\xi+1} \right) \right\}. \quad (9.57)$$

Это выражение справедливо с точностью до членов порядка $(R_0/D\Phi_0^*)^2$. Оно совпадает с выражением, полученным непосредственно из формулы, определяющей концентрацию инфинитных частиц в медленно убывающем поле (см. формулу (8.32)), что и должно быть. На больших расстояниях от тела, когда $\Phi^* \ll 1$, концентрация притягивающихся частиц дается просто выражением (9.52), где Φ^* определено согласно (9.55). Эти две формулы для $\Phi^*(\xi)$ в значительной области перекрываются при $\Phi_0^* < \xi < D/R_0$, т. е. там, где поле уже мало ($\Phi^* < 1$), но все еще кулоновское. Следовательно, концентрация инфинитных притягивающихся частиц известна во всей возмущенной области. Она изображена на рис. 75 для $D \approx 14R_0$ и $\Phi_0^* = 2$ и 10. Из рисунка видно, что $N_{\text{инф}}^+(r)$ заметно возрастает в окрестности тела.

Концентрация отталкивающихся частиц определяется выражением (9.9). На небольших расстояниях от тела, т. е. при $r \ll D$, ($\xi \ll D/R_0$), учитывая (9.55), получаем, что

$$N^-(\xi) = \frac{N_0}{2} \left\{ 1 + \Phi \left(\sqrt{\Phi_0^* \left(1 - \frac{1}{\xi} \right)} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\Phi_0^* \xi}{\xi+1}} \right) \right] \exp \left[\frac{\Phi_0^*}{\xi(\xi+1)} \right] \right\} \times \\ \times \exp \left(-\frac{\Phi_0^*}{\xi} \right). \quad (9.58)$$

На больших расстояниях от тела концентрация N^- определена формулой (9.29). Ход $N^-(\xi)$ в окрестности малого тела изображен на рис. 76. Из рисунка видно, что на расстояниях порядка размера тела концентрация N^- сильно отличается от ее невозмущенного значения.

Концентрация частиц, совершающих финитное движение, существенно зависит от характера их столкновений. Если тело заряжено положительно и плазма слабо ионизована, т. е. если притягивающимися частицами являются

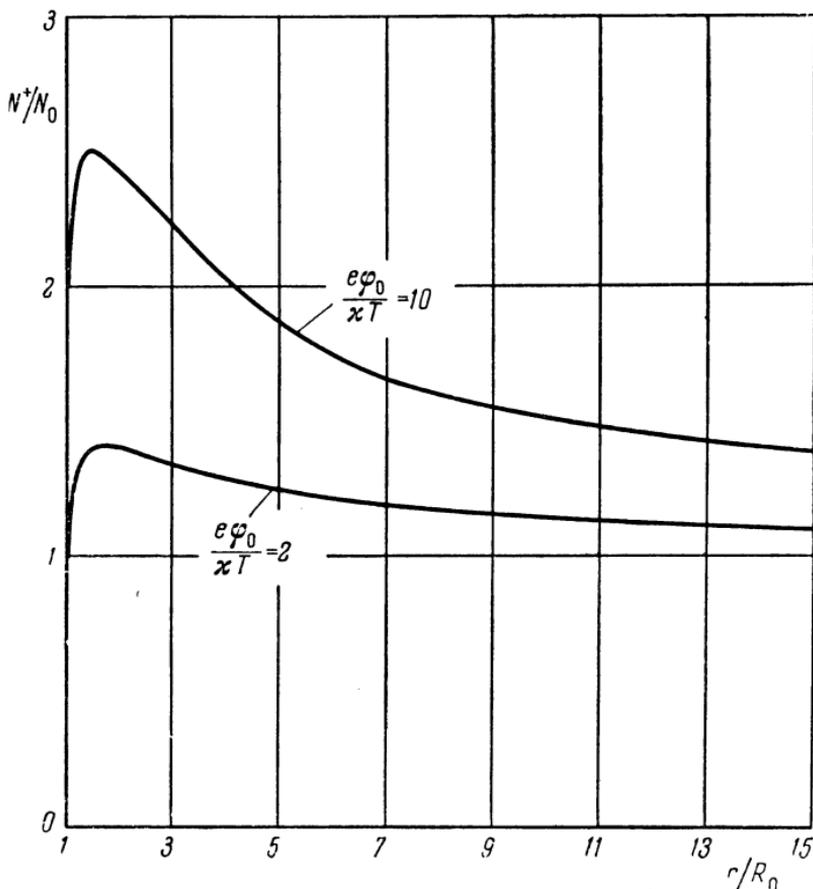


Рис. 75. Кривые изменения концентрации притягивающихся частиц в окрестности малого тела при $D/R_0 = 14,2$; значения φ_0 указаны на рисунке.

электронами и сталкиваются они в основном с нейтральными частицами, то концентрация электронов, захваченных на финитные орбиты, как показано в § 35, определяется выражением (8.71)

$$N_{\text{фин}}^+ = \frac{4N_0}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{\varphi_0^*}{\xi} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{5} \frac{\varphi_0^*}{\xi} + 1 \right). \quad (9.59)$$

Эта формула справедлива лишь на достаточно больших расстояниях от тела, когда $r > \sqrt{M/m} R_0$. На более близких расстояниях количество финитных частиц меньше, чем определяемое формулой (9.59); при $r \rightarrow R_0$, в частности, $N_{\text{фин}}^+ \rightarrow 0$.

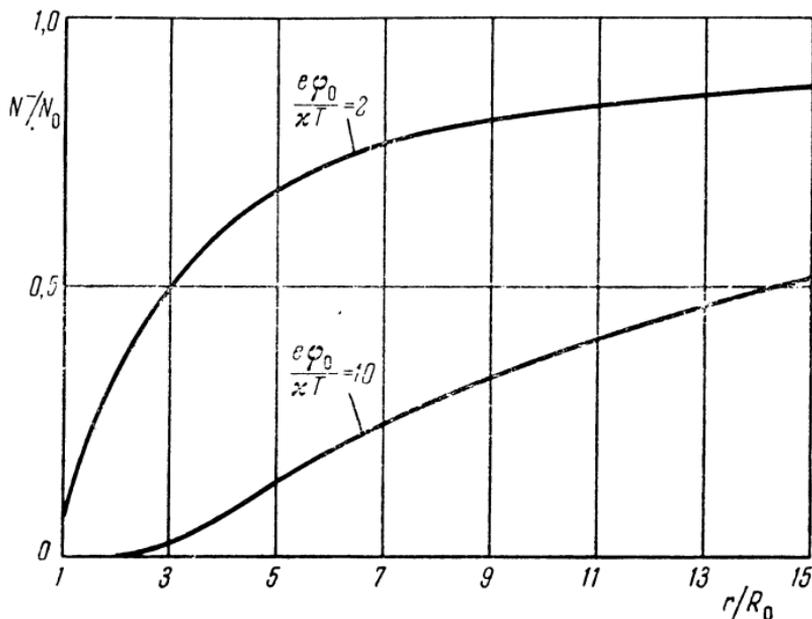


Рис. 76. Кривые изменения концентрации отталкивающихся частиц в окрестности малого тела при $D/R_0 = 14,2$; значения φ_0 указаны на рисунке.

В общем случае концентрация финитных частиц в точке r равна

$$N_{\text{фин}}^+(r) = \frac{4\pi}{M^2 r} \int_{\mathcal{E}_{\text{мин}}(r)}^{\mathcal{E}_{\text{макс}}(r)} d\mathcal{E} \times \\ \times \int_{\sqrt{2MR_0^2(\mathcal{E} + \kappa T\varphi_0^*)}}^{\sqrt{2Mr^2(\mathcal{E} + \kappa T\varphi^*)}} \frac{\mathcal{M}f(\mathcal{E}, \mathcal{M}) d\mathcal{M}}{[2Mr^2(\mathcal{E} + \kappa T\varphi^*) - \mathcal{M}^2]^{1/2}}. \quad (9.60)$$

В формуле (9.60) $f(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ — функция распределения частиц на финитных орбитах, а $\mathcal{E}_{\text{мин}}(r)$ и $\mathcal{E}_{\text{макс}}(r)$ соответственно

минимальная и максимальная энергии финитной частицы в точке r при условии, что ее траектория не проходит через поглощающую поверхность тела. Легко видеть, что

$$\mathcal{E}_{\text{мин}}(r) = -\kappa T \frac{r^2 \Phi_0^* - R_0^2 \Phi_0^*}{r^2 - R_0^2} = -\kappa T \frac{\xi^2 \Phi_0^* - \Phi_0^*}{\xi^2 - 1}. \quad (9.61)$$

Энергия $\mathcal{E}_{\text{макс}}(r)$ равна нулю, если только потенциал Φ падает медленнее, чем $1/r^2$, что и имеет место в нашем случае.

Функция распределения электронов, совершающих финитное движение в слабо ионизованной плазме, при больших значениях модуля энергии $|\mathcal{E}|$, как показано в § 35, пропорциональна $|\mathcal{E}|/\kappa T$. При кулоновском взаимодействии $f \sim (|\mathcal{E}|/\kappa T)^3$. Чтобы оценить концентрацию $N_{\text{фин}}^+$ при больших значениях потенциала Φ , естественно принять, что функция распределения частиц на финитных орбитах при больших значениях $|\mathcal{E}|$ имеет вид

$$f \sim (|\mathcal{E}|/\kappa T)^\lambda. \quad (9.62)$$

В общем случае, как указано в § 35д, λ — величина порядка единицы. Подставляя теперь (9.62) в (9.60) и интегрируя, находим, что

$$\begin{aligned} N_{\text{фин}}^+(r) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{5}{2}\right)} N_0 \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \left(\frac{|\mathcal{E}_{\text{мин}}|}{\kappa T}\right)^{\lambda + \frac{3}{2}} = \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{3}{2}\right)} N_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \left(\frac{\xi^2 \Phi_0^* - \Phi_0^*}{\xi^2 - 1}\right)^{\lambda + \frac{3}{2}}, \quad (9.63) \end{aligned}$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция. В частности, если поле близко к кулоновскому, то

$$N_{\text{фин}}^+(\xi) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{3}{2}\right)} N_0 \Phi_0^* \lambda + \frac{3}{2} \frac{(\xi-1)^{1/2}}{\xi(\xi+1)^{\lambda+1}}. \quad (9.64)$$

Сравнивая (9.64), (9.63) и (9.59) с (9.57), мы видим, что концентрация финитных частиц в окрестности тела при достаточно больших значениях потенциала поля на

поверхности тела в общем больше концентрации инфинитных частиц.

в. Большие значения потенциала поля на поверхности тела. Все рассмотрение выше проводилось в предположении, что дебаевский радиус очень велик, так что электрическое поле на расстоянии D от поверхности тела является слабым из-за кулоновского падения потенциала. Это справедливо, разумеется, лишь когда потенциал поля на поверхности тела ограничен и удовлетворяет условию

$$|\varphi_0| \ll \frac{\kappa T}{e} \frac{D}{R_0} \text{ или } \varphi_0^* \ll \frac{D}{R_0}. \quad (9.65)$$

Рассмотрим теперь обратный случай больших значений φ_0 , когда влияние экранирующего заряда становится существенным уже на сравнительно небольших расстояниях от тела. Важно подчеркнуть при этом, что концентрация притягивающихся инфинитных частиц с ростом потенциала поверхности φ_0^* растет, лишь как $\sqrt{\varphi_0^*}$. Концентрация же финитных частиц возрастает быстрее, и роль их при больших потенциалах становится определяющей. Рассмотрим область, не очень сильно удаленную от тела, так что потенциал поля в ней велик: $\varphi^* \gg 1$. В этой области при использовании приближенного выражения (9.63) для частиц, совершающих финитное движение, уравнение Пуассона (9.3а) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\varphi^*}{d\xi} \right) = \\ = \left(\frac{R_0}{D} \right)^2 \left\{ \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{\xi^2 \varphi^* - \varphi_0^*}{\xi^2 - 1} \right)^{\lambda + \frac{3}{2}}} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\varphi^*}}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^*}{\xi^2 \varphi^*}} \right) \right\}. \quad (9.66) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что при $\varphi^* \gg 1$ роль отталкивающихся частиц не существенна, а концентрация притягивающихся инфинитных частиц в поле, падающем не быстрее, чем $1/r^2$, дается формулой

$$N_{\text{инф}}^+ \approx \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\varphi^*} + \sqrt{\varphi^* - \frac{\varphi_0^*}{\xi^2}} \right).$$

При очень больших значениях φ_0^* основную роль в уравнении (9.66) начинает играть нелинейный член, описывающий концентрацию финитных частиц. Поэтому удобно переписать уравнение (9.66) в виде

$$\varphi^* = \frac{\varphi_0^*}{\xi^2} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)^{\lambda + \frac{3}{2}} \times \\ \times \left\{ \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{5}{2}\right)}{\Gamma(\lambda + 1)} \left[\left(\frac{D}{R_0}\right)^2 \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\varphi^*}{d\xi}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sqrt{\varphi^*}}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^*}{\xi^2 \varphi^*}}\right) \right] \right\}^{\frac{1}{\lambda + 3/2}}. \quad (9.67)$$

Очевидно, что решение этого уравнения, получаемое методом итераций, представляется в виде ряда

$$\varphi^* = \frac{\varphi_0^*}{\xi^2} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)^{\lambda + \frac{3}{2}} \times \\ \times \left\{ \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{5}{2}\right)}{\Gamma(\lambda + 1)} \left[2 \left(\frac{D}{R_0}\right) \frac{\varphi_0^*}{\xi^4} - \frac{\sqrt{\varphi_0^*}}{\xi \sqrt{\pi}} \right] \right\}^{\frac{1}{\lambda + 3/2}} + \dots \quad (9.68)$$

Второй член в этом выражении много меньше первого, если

$$\xi < \varphi_0^* \frac{2\lambda + 1}{4\lambda - 2} \left(\frac{R_0}{D}\right)^{\frac{4}{4\lambda - 2}}. \quad (9.69)$$

Следовательно, при достаточно больших значениях φ_0^* в значительной окрестности тела, определяемой условием (9.69), электрическое поле описывается простым выражением (9.68). Ограничиваясь лишь основным членом ряда (9.68), имеем

$$\varphi(r) = \varphi_0 \frac{R_0^2}{r^2}. \quad (9.70)$$

Для концентрации финитных частиц из уравнения (9.3а)

в том же приближении также получается простая формула

$$N_{\text{фин}}^+(r) = \frac{R_0^2 |\Phi_0|}{2\pi e r^4}. \quad (9.71)$$

Концентрация инфинитных частиц при условии (9.69), разумеется, гораздо меньше.

Физический смысл полученного выражения для $\Phi(r)$ совершенно ясен. Действительно, если потенциал поля достаточно велик, то финитных частиц много и они экранируют поле тела. Оно спадает поэтому гораздо резче, чем кулоновское. Однако если поле падает быстрее, чем $1/r^2$, то финитное движение при наличии поглощающей поверхности невозможно. Следовательно, число финитных частиц не может расти беспредельно, а лишь до тех пор, пока поле из-за экранировки не начнет убывать, как $1/r^2$.

Важно подчеркнуть, что асимптотические формулы (9.70) и (9.71) получаются в весьма общих предположениях о характере распределения частиц на финитных орбитах: нужно лишь, чтобы λ было больше, чем $-1/2$, т. е. чтобы функция распределения финитных частиц не убывала с ростом модуля энергии. Это условие обычно выполняется, что видно из рассмотренного в § 35 конкретного примера, а также из анализа общей формулы (8.68) (см. также [68]).

Рассмотрим теперь случай очень высоких потенциалов поля Φ_0 . В этом случае размер сильно возмущенной полем области — области пространственного заряда — гораздо больше дебаевского радиуса. Естественно поэтому ожидать, что характер изменения поля будет аналогичен случаю большого тела, рассмотренному в § 39. В § 39 было показано, что роль финитных частиц в уравнении (9.66) подавляется экспоненциальным множителем $\exp(-\mathcal{E}_0/\kappa T)$, где величина $\mathcal{E}_0/\kappa T$ согласно (9.50) равна

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\kappa T} = 2,15 \left[\left(\frac{R_0}{D} \right)^8 \Phi_0^* \right]^{1/7}. \quad (9.50)$$

Следовательно, при очень высоких значениях потенциала поля

$$\Phi_0^* \gg \left(\frac{D}{R_0} \right)^8 \quad (9.72)$$

концентрация финитных частиц экспоненциально мала. В тех же условиях концентрация притягивающихся частиц, совершающих инфинитное движение, дается выражением (9.37). Все они, кроме того, попадают на поверхность тела. Следовательно, ход потенциала поля и в окрестности малого тела при выполнении условия (9.72) точно описывается решением для большого тела, приведенным в § 39. Размер области пространственного заряда (9.44) при этом равен

$$R_c = 0,803D \left[\frac{e|\Phi_0|}{\kappa T} \frac{R_0}{D} \right]^{3/7}. \quad (9.44)$$

При выполнении условия (9.72), разумеется, $R_c \gg D$.

г. Малые значения потенциала поля на поверхности тела. Если потенциал поля на поверхности тела мал, т. е.

$$\Phi_0^* = \frac{e|\Phi_0|}{\kappa T} \ll 1,$$

то он мал и всюду в окрестности тела. В этом случае в линейном по Φ^* приближении выражения (8.39), (8.41) для концентраций притягивающихся и отталкивающихся частиц сильно упрощаются и принимают вид

$$N_{\text{инф}}^+ = \frac{N_0}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} - \frac{\Phi_0^*}{\xi^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}} + \Phi^* \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}} \right) \right], \quad (9.73)$$

$$N^- = \frac{N_0}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} + \frac{\Phi_0^*}{\xi^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}} - \Phi^* \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}} \right) \right]. \quad (9.74)$$

Концентрация частиц, совершающих финитное движение, как указывалось в § 37, в том же приближении равна нулю. Следовательно, уравнение (9.3) переписывается

теперь в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} \frac{1}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\varphi^*}{d\xi} \right) &= \\ &= \left(\frac{R_0}{D} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}} \right) \left[\varphi^* - \frac{\varphi_0^*}{\xi^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (9.75)$$

Если тело большое, то левая часть в уравнении (9.75) несущественна и решение его имеет вид

$$\varphi^* = \frac{\varphi_0^*}{\xi^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \right)}. \quad (9.76)$$

При $\xi \rightarrow 1$ значение φ^* , очевидно, равно φ_0^* . Это понятно, так как при малых φ_0^* граничное значение потенциала φ_1^* , определяемое уравнением (9.13) с точностью до членов порядка φ_0^{*2} , совпадает с φ_0^* (на это уже указывалось в § 37). Двойной слой около поверхности большого тела в этом случае отсутствует. На больших расстояниях при $\xi \gg 1$ поле убывает, как $1/\xi^2$, причем асимптотическое значение потенциала φ_∞^* совпадает со значением, полученным из формулы (9.30).

В случае малого тела, когда $R_0/D \ll 1$, правая часть в уравнении (9.75) становится существенной лишь на больших от него расстояниях, так что можно разложить $\sqrt{1 - 1/\xi^2}$ в ряд по степеням $1/\xi^2$. Решение получающегося тогда уравнения, естественно, совпадает с решением (9.55).

§ 41. Структура возмущенной области в окрестности абсолютно отражающего тела

Рассмотрим теперь случай, когда тело упруго отражает попадающие на его поверхность частицы. В этом случае устанавливается равновесное распределение Больцмана как для отталкивающихся, так и для притягивающихся частиц. Уравнение (9.3а) имеет тогда простой вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -4\pi e^2 \left[\exp\left(-\frac{U}{\kappa T}\right) - \exp\left(\frac{U}{\kappa T}\right) \right]. \quad (9.77)$$

Толщина возмущенного слоя вблизи большого тела мала в сравнении с размером тела. Кривизна поверхности в этом случае не существенна, и уравнение (9.77) в безразмерных переменных $\varphi^* = -\frac{U}{\chi T}$, $\zeta = \frac{r-R_0}{D} = \frac{x}{D}$ переписывается в виде

$$\frac{d^2\varphi^*}{d\zeta^2} = 2 \operatorname{sh} \varphi^*. \quad (9.78)$$

Граничные условия: $\varphi^* = \varphi_0^*$ при $\zeta = 0$ и $\varphi^* \rightarrow 0$ при

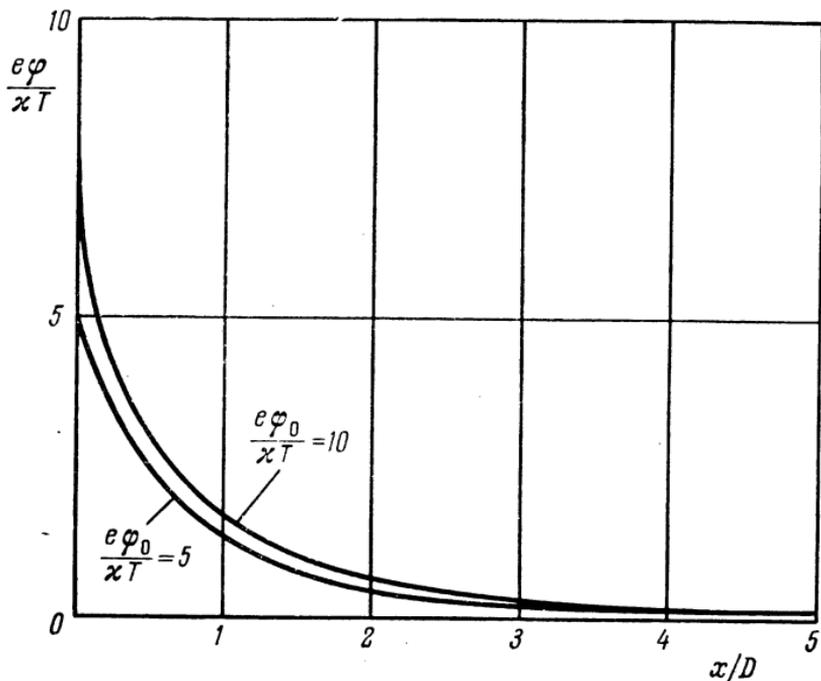


Рис. 77. Кривые изменения потенциала поля у поверхности полностью отражающего тела.

$\zeta \rightarrow \infty$. Интегрируя уравнение (9.78), находим его решение в виде

$$\varphi^* = 2 \ln \left[\frac{e^{\varphi_0^*/2} + 1 + (e^{\varphi_0^*/2} - 1) e^{-\sqrt{2}\zeta}}{e^{\varphi_0^*/2} + 1 - (e^{\varphi_0^*/2} - 1) e^{-\sqrt{2}\zeta}} \right]. \quad (9.79)$$

Ход поля около поверхности тела, описываемый формулой (9.79), изображен на рис. 77 для значений $\varphi_0^* = 5$ и 10. Из рисунка видно, что поле вблизи тела очень резко

убывает. При этом чем больше φ_0^* , тем резче убывает поле, так что толщина возмущенного слоя не изменяется, оставаясь всегда примерно порядка дебаевского радиуса.

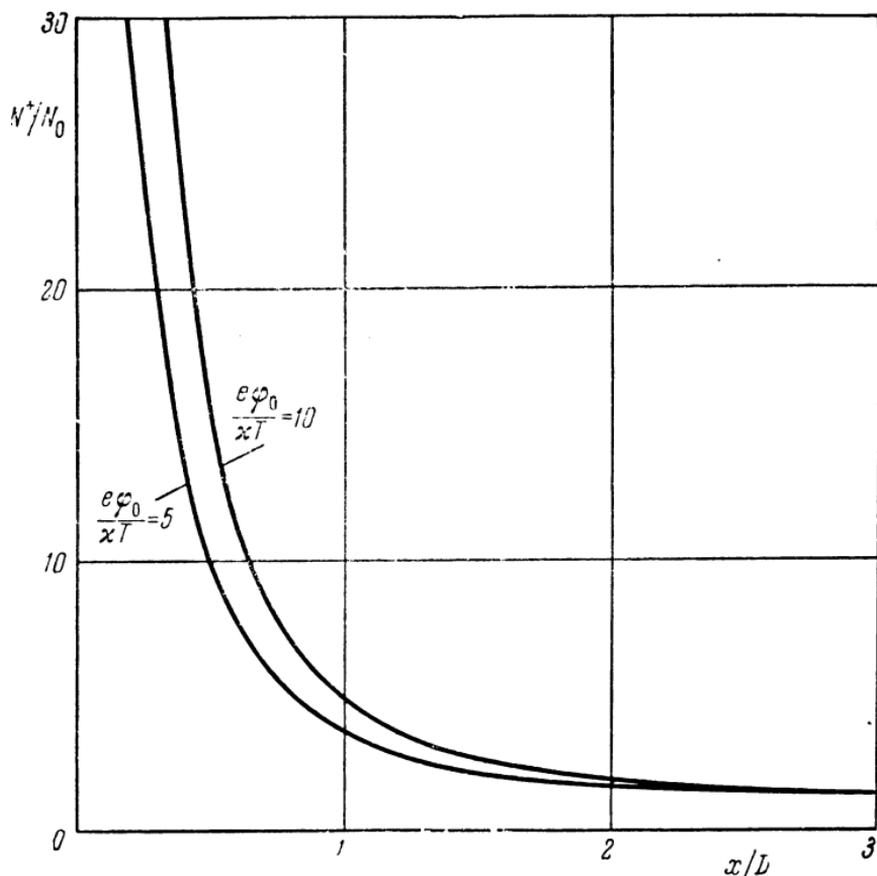


Рис. 78. Концентрация притягивающихся частиц у поверхности полностью отражающего тела.

Напряженность поля на поверхности тела при этом, разумеется, экспоненциально резко растет с ростом φ_0^* , так как

$$\frac{d\varphi^*}{d\xi}(0) = -\frac{eD}{xT} |E| = -2^{3/2} \text{sh} \frac{\varphi_0}{2}. \quad (9.80)$$

Напряженность поля на поверхности поглощающего тела с увеличением φ_0^* растет гораздо слабее, а именно как $\varphi_0^{*1/4}$ (см. (9.34a)).

Концентрации притягивающихся и отталкивающихся частиц определены формулой Больцмана. Подставляя в нее выражение (9.79), для потенциала поля получаем

$$N^+ = N_0 e^{\varphi^*} = N_0 \left[\frac{e^{\varphi_0^*/2} + 1 + (e^{\varphi_0^*/2} - 1) e^{-\sqrt{2}\xi}}{e^{\varphi_0^*/2} + 1 - (e^{\varphi_0^*/2} - 1) e^{-\sqrt{2}\xi}} \right]^2, \quad (9.81)$$

$$N^- = N_0 e^{-\varphi^*} = N_0 \left[\frac{e^{\varphi_0^*/2} + 1 - (e^{\varphi_0^*/2} - 1) e^{-\sqrt{2}\xi}}{e^{\varphi_0^*/2} + 1 + (e^{\varphi_0^*/2} - 1) e^{-\sqrt{2}\xi}} \right]^2. \quad (9.82)$$

Зависимости N^+ и N^- от ξ для двух значений φ_0^* изображены на рис. 78, 79. При $\varphi_0^* \gg 1$ концентрация притягивающихся частиц в ближайшем к поверхности слое

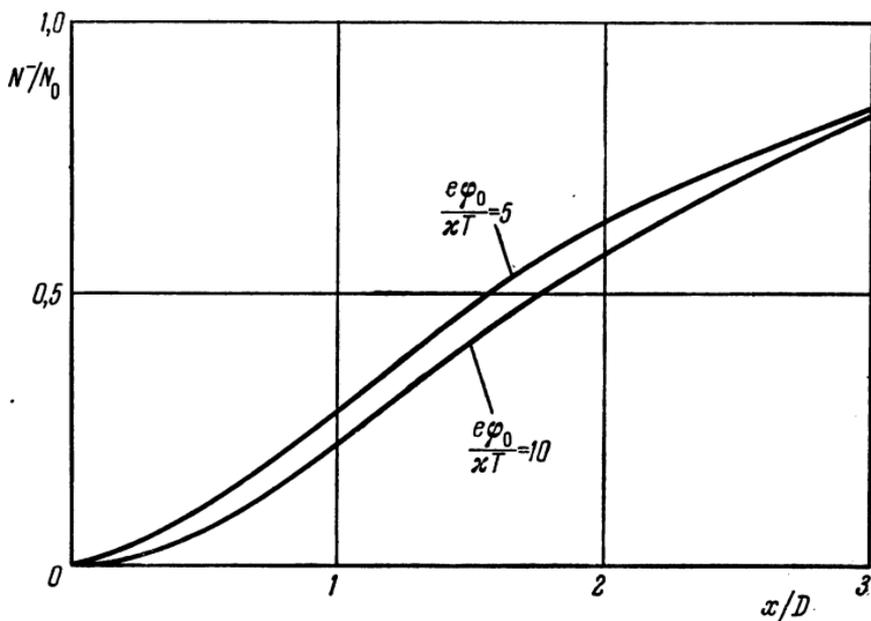


Рис. 79. Концентрация отталкивающихся частиц у поверхности полностью отражающего тела.

экспоненциально велика. Она очень резко убывает с увеличением расстояния от поверхности. Заметим, что основную роль при этом играют частицы, совершающие финитное движение. Концентрация отталкивающихся частиц у поверхности тела ничтожно мала; она, напротив, резко растет с расстоянием. При $r - R_0 \gg D$ концентрации притягивающихся и отталкивающихся частиц всегда близки к N_0 .

Таким образом, как поле, так и структура возмущенной зоны в случае полностью отражающего тела и в случае полностью поглощающего тела, рассматривавшемся в предыдущих разделах, радикальным образом различаются. При частичном отражении или поглощении можно получить любой промежуточный случай, зависящий от значения коэффициента отражения. Однако для того, чтобы структура слоя оказалась близкой к случаю полностью отражающего тела, необходимо, чтобы коэффициент отражения частиц R от поверхности тела был чрезвычайно близок к единице; во всяком случае необходимо, чтобы

$$1 - R \ll \frac{R_0}{l}, \frac{D}{l},$$

где l — длина свободного пробега частиц и R_0 — размер тела. Отсюда ясно, что в реальных условиях в разреженной плазме, по-видимому, всегда осуществляется случай, близкий к случаю полностью поглощающего тела. Если поглощение частиц неполное, то полученные выше результаты нужно лишь поправить, учитывая отраженные инфинитные частицы. Качественно это не изменит структуры возмущенной зоны.

ГЛАВА X

ПОТОК ЧАСТИЦ В ОКРЕСТНОСТИ ТЕЛА

§ 42. Вводные замечания

Возмущения, вызываемые движущимся телом, естественно приводят к изменению потока частиц по сравнению с потоком в невозмущенной плазме. Потоки электронов и ионов на поверхности тела, как мы видели выше (§ 14), необходимо знать для определения потенциала электрического поля на поверхности тела. С другой стороны, определение потока частиц на различной ориентированную площадку в любой точке в окрестности тела является исходным моментом при обработке результатов различных зондовых измерений.

Что касается потока нейтральных частиц, то его расчет не связан с принципиальными трудностями, поскольку функция распределения нейтральных частиц известна (см. § 7). В ряде конкретных случаев расчет затрудняется лишь сложностью вычисления соответствующих интегралов. Заметим также, что поскольку траектории движения нейтральных частиц остаются прямолинейными, то при расчете потока часто бывает удобнее исходить не из решения кинетического уравнения, а из геометрической картины движения частиц. Такой метод, разумеется, приводит к тем же результатам, что и решение кинетического уравнения.

При вычислении потока ионов и электронов в общем случае необходимо исходить из решения кинетического уравнения. Поскольку, однако, строгое решение кинетических уравнений для электронов и ионов совместно с уравнением для электрического поля получено выше лишь в ограниченном числе случаев, то и точное вычис-

ление потоков заряженных частиц может быть осуществлено лишь для тех же случаев.

Следует подчеркнуть, что трудности возникают в основном при вычислении потока притягивающихся телом частиц. Вычисление потока отталкивающихся частиц обычно не вызывает затруднений (см. § 44). Иногда поле мало влияет и на притягивающиеся частицы. В таких случаях поток притягивающихся частиц можно определять по формулам, рассчитанным для потока нейтральных частиц. Это, разумеется, справедливо тогда, когда тело слабо заряжено, т. е. $\varphi_0 < \kappa T/e$. Кроме того, впереди быстро движущегося большого тела поток ионов в окрестности тела и на его поверхность совпадает с потоком нейтральных частиц с точностью до членов порядка v_i/V_0 . Последнее является следствием того, что кинетическая энергия набегающих на быстро движущееся тело ионов $M_i V_0^2/2$ весьма велика. Потенциальная же энергия ионов в электрическом поле вне двойного слоя $e\varphi \sim \kappa T$, как мы видели выше (см. § 14), гораздо меньше. Поэтому влияние поля на движение ионов впереди тела незначительно и при вычислении их потока в области «сгущения» можно использовать формулы для потока нейтральных частиц. Необходимо лишь учесть различие в коэффициентах отражения ионов и нейтральных частиц от поверхности тела *).

Поток отраженных от тела частиц, разумеется, сильно зависит от характера их рассеяния и от геометрической конфигурации поверхности. При этом могут осуществляться условия, когда наличие вблизи тела небольшого измерительного прибора — зонда существенно влияет на поток отраженных от тела частиц (см. § 43). Естественно, что на поток частиц на зонд будет сильнее влиять само тело. Учитывать это влияние тела на поток частиц особенно важно, когда тело движется медленно (т. е. $V_0 \lesssim v_i$) и размер его меньше дебаевского радиуса или сравним с ним. В этом случае поток частиц вблизи поверхности из-за влияния поля, создаваемого зарядом

*) Здесь предполагается, кроме того, что тело специально не заряжено, так что потенциал поля на его поверхности тоже много меньше, чем $M_i V_0^2/2e$.

тела, может измениться во много раз. Такие условия реализуются в наиболее удаленных от Земли слоях ионосферы или в ближней к Земле области межпланетного газа (см. §§ 1, 2). Все это показывает, что обработка результатов различных зондовых измерений, производимых на спутниках и ракетах и преследующих цель получения сведений о невозмущенной среде, весьма сложна. Интерпретация получаемых при этом результатов требует большой осторожности.

§ 43. Поток нейтральных частиц

а. Поток частиц на поверхность тела. Функция распределения набегающих на тело нейтральных частиц — максвелловская (см. (1.6)). Для определения плотности потока частиц на единицу площади в любой точке r_S поверхности тела необходимо лишь проинтегрировать ее по скоростям

$$j_n = -\overline{nv} = - \int nv f_n d^3v. \quad (10.1)$$

Здесь nv — проекция скорости частицы v на внешнюю нормаль к поверхности тела n в точке r_S , f_n — функция распределения набегающих на тело частиц.

Если тело покоится, то

$$\begin{aligned} f_n &= \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} n_0 \exp \left(-\frac{Mv^2}{2\kappa T} \right) = \\ &= \frac{n_0}{\pi^{3/2} v_n^3} \exp \left[-\frac{M(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{v_n^2} \right], \end{aligned} \quad (10.2)$$

где $v_n = \sqrt{2\kappa T/M}$ — тепловая скорость нейтральных частиц. Подставляя это выражение для f_n в (10.1) и выбирая ось z по направлению внутренней нормали к поверхности тела, получаем

$$\begin{aligned} j_n &= \frac{n_0}{\pi^{3/2} v_n^3} \int_0^\infty v_z dv_z \int_{-\infty}^\infty dv_x \int_{-\infty}^\infty dv_y \exp \left[-\frac{M(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2\kappa T} \right] = \\ &= \frac{n_0 v_n}{2\sqrt{\pi}} = n_0 \sqrt{\frac{\kappa T}{2\pi M}}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Плотность потока j_n одинакова во всех точках поверхности. Следовательно, полный поток частиц на поверхность тела равен

$$J_0 = \oint_S j_n dS = n_0 S \sqrt{\frac{\kappa T}{2\pi M}},$$

где S — площадь поверхности тела. В частности, если тело — шар радиуса R_0 , то

$$J_0 = \sqrt{\frac{8\pi\kappa T}{M}} n_0 R_0^2. \quad (10.4)$$

Если тело движется со скоростью V_0 , то, как указывалось выше (1.6),

$$f_n = \frac{n_0}{\pi^{3/2} v_n^3} \exp\left[-\frac{M(v+V_0)^2}{v_n^2}\right]. \quad (10.5)$$

Подставляя это выражение в (10.1) и выбирая по-прежнему ось z в направлении внутренней нормали к поверхности — n , а ось x — в направлении, ортогональном к плоскости $V_0 n$, имеем

$$j_n = \frac{n_0}{\pi^{3/2} v_n^3} \int_0^\infty v_z dv_z \int_{-\infty}^\infty dv_x \int_{-\infty}^\infty dv_y \times \\ \times \exp\left[-\frac{v_x^2 + (V_{0y} + v_y)^2 + (V_{0z} + v_z)^2}{v_n^2}\right]. \quad (10.6)$$

Здесь V_{0z} и V_{0y} — проекции скорости V_0 на ось z и ось y :

$$V_{0z} = n V_0, \quad V_{0y} = \sqrt{V_0^2 - (n V_0)^2}. \quad (10.7)$$

После элементарного интегрирования получаем

$$j_n = n_0 \left\{ \frac{n V_0}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{n V_0}{v_n}\right) \right] + \frac{v_n}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(n V_0)^2}{v_n^2}\right] \right\}, \quad (10.8)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей. Плотность потока теперь уже существенно различна для разных точек на поверхности тела. Например, в случае быстро движущегося тела частицы попадают в основном на его

переднюю поверхность, при этом

$$j_n \simeq n_0 (n V_0). \quad (10.9)$$

Если движущееся тело — шар, то $n V_0 = V_0 \cos \theta'$, где θ' — полярный угол, определяющий положение рассматриваемой точки r_S на поверхности шара и отсчитываемый от направления V_0 . Интегрируя плотность потока (10.8), определяем полный поток частиц на поверхность шара

$$\begin{aligned} J &= \oint_S j_n dS = 2\pi R_0^2 \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \cdot j_n(\theta') = \\ &= \pi R_0^2 n_0 \left\{ V_0 \Phi \left(\frac{V_0}{v_n} \right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{V_0} \right)^2 \right] + \frac{v_n}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{V_0^2}{v_n^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Для покоящегося шара это выражение, разумеется, переходит в (10.4). В случае же быстро движущегося шара с точностью до экспоненциально малых членов

$$J = \pi R_0^2 n_0 V_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{V_0} \right)^2 \right]. \quad (10.11)$$

Совершенно ясен в этом выражении физический смысл основного члена. Так как тело с сечением πR_0^2 и скоростью V_0 налетает на газ, имеющий плотность n_0 , то поток частиц на поверхность тела $J \approx \pi R_0^2 V_0 n_0$. При таком рассуждении предполагается, что частицы газа покоятся, т. е. пренебрегается их тепловым движением. Из формулы (10.11) видно, что если $V_0 \gg v_n$, то выражения для потока, получаемые в пренебрежении тепловым движением, верны с точностью до добавочного члена порядка $(v_n/V_0)^2$.

б. Поток частиц в окрестности тела. Возмущения, вызываемые движущимся телом, приводят также к изменению потока частиц в окрестности тела в сравнении с потоком в невозмущенной среде. Из общих соображений ясно, что с увеличением расстояния от тела r возмущения потока убывают пропорционально $1/r^2$, т. е. так же, как и возмущения концентрации частиц (см. §§ 16, 36). Плотность потока частиц на единичную площадку с нормалью \mathbf{n} , расположенную в точке A в окрестности тела (см. рис. 4), в общем случае складывается из потока «прямых» частиц j_{n1} ,

т. е. частиц, не испытавших соударения с телом, и потока отраженных частиц j_{n2} (ср. § 7). Функция распределения в общем случае известна (см. § 7); в зависимости от вида поверхности тела изменяется лишь функция вероятности рассеяния на поверхности тела $\omega_n(v, v_1, r_S)$ (см. § 3б) и область интегрирования в пространстве скоростей для прямых и отраженных частиц. Если возмущающее тело — шар, то, как показано в § 7, функция распределения в точке $A(r, \theta)$ имеет вид

$$f_n = \begin{cases} f_0(v + V_0) = n_0 \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{M(v + V_0)^2}{2\kappa T} \right] & \text{при } \beta > \theta \\ -\frac{1}{(n_S v)} \int f_0(v_1 + V_0) (n_S V_0) \omega_n d^3 v_1 & \text{при } \beta < \theta \end{cases}, \quad (10.12)$$

где n_S — внешняя нормаль к поверхности шара в точке соударения частицы с поверхностью.

Поток «прямых» частиц на единичную площадку с внешней нормалью n , расположенную в окрестности шара в точке $A(r, \theta)$, определяется выражением

$$j_{n1} = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \beta d\beta \int_0^\infty (nv) v^2 f_0(v + V_0) dv, \quad (10.13)$$

где φ — азимутальный, а β — полярный угол в пространстве скоростей v , отсчитываемый от направления r . Поскольку интересен обычно поток на одну сторону единичной площадки, то интегрирование нужно вести лишь по области скоростей, в которой nv больше нуля.

Для потока отраженных частиц имеем

$$j_{n2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\theta \sin \beta d\beta \int_0^\infty \frac{nv}{(n_S v)} v^2 dv \int d^3 v_1 f_0(v_1 + V_0) (n_S v_1) \omega_n. \quad (10.14)$$

В частности, при зеркальном отражении от поверхности шара, когда $\omega_n = \delta[v_1 - v + 2n_S(vn_S)]$ (см. § 3б), после

интегрирования по d^3v с учетом (2.60) получаем

$$j_{n2} = - \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin \beta_1 d\beta_1 \int_0^\infty v_1^2 [(nv_1) - 2(n_{Sn})(n_{Sv_1})] \times \\ \times f_0(v_1 + V_0) \frac{d^3r_1}{d^3r} dv_1, \quad (10.15)$$

где $\frac{d^3r_1}{d^3r}$ — изменение элементарного объема при зеркальном отражении от поверхности (см. (2.62)). Можно получить также несколько иное выражение для j_{n2} , проведя в (10.14) вначале интегрирование по d^3v_1 (см. § 7). Аналогичным образом нетрудно получить общее выражение для потока отраженных частиц и при диффузном отражении от поверхности тела.

Рассмотрим теперь быстро движущийся шар со скоростью $V_0 \gg v_n$. В этом случае, как мы видели выше, тепловым движением частиц можно в первом приближении пренебречь, т. е. принять, что

$$f(v + V_0) = \begin{cases} n_0 \delta(v + V_0) & \text{при } z \geq 0, \text{ или при} \\ & x^2 + y^2 > R_0^2, \text{ если } z < 0; \\ 0 & \text{при } z < 0, \text{ если } x^2 + y^2 < R_0^2. \end{cases} \quad (10.16)$$

Здесь учитывается затенение шаром потока набегающих частиц. Подставляя (10.16) в (10.13), имеем

$$j_{n1} = \begin{cases} n_0(nV_0) & \text{при } nV_0 > 0 \\ & \text{и первом условии (10.16),} \\ 0 & \text{при } nV_0 < 0 \\ & \text{или при втором условии (10.16).} \end{cases} \quad (10.17)$$

Смысл этой формулы совершенно ясен: плотность потока j_{n1} всюду совпадает с невозмущенным значением плотности потока (10.9), кроме области, затеняемой шаром, где поток, естественно, равен нулю. Аналогично из (10.14)

получаем

$$j_{n2} = \begin{cases} [2(nn_S)V_0 \cos \theta' - nV_0] n_0 \frac{R_0^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \theta'}{\varrho^2 \left(1 - \frac{R_0}{\varrho} \sin^3 \theta'\right)} \\ \text{при } 2(nn_S)V_0 \cos \theta' - nV_0 > 0 \text{ и первом} \\ \text{условии (10.16),} \\ 0 \quad \text{при } 2(nn_S)V_0 \cos \theta' - nV_0 < 0 \\ \text{или при втором условии (10.16).} \end{cases} \quad (10.18)$$

Здесь θ' — угол между нормалью к сфере в точке соударения и осью z , параллельной скорости V_0 , т. е. $\cos \theta' = \frac{n_S V_0}{V_0}$ (см. рис. 4). Угол θ' связан с координатами ϱ , z рассматриваемой точки $A(\varrho, z)$ соотношением (2.35):

$$2z \cos \theta' + 2\varrho \sin \theta' - \frac{\varrho}{\sin \theta'} = R_0.$$

При интегрировании (10.15) учтено выражение (2.62) для $\frac{d^3 r_1}{d^3 r}$. Формула (10.18) для потока отраженных частиц j_{n2} имеет простой смысл. Мы видим, что поток равен произведению концентрации отраженных частиц

$$n_2 = n_0 \frac{R_0^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \theta'}{\varrho^2 \left(1 - \frac{R_0}{\varrho} \sin^3 \theta'\right)} \quad (10.19)$$

(см. 2.40) на проекцию скорости отраженных частиц на внутреннюю нормаль к единичной площадке $-n$. Следует подчеркнуть, что поскольку формула для концентрации отраженных частиц протабулирована ранее (см. табл. VI, рис. 6), то без труда можно получить и численные значения для потока j_{n2} . Действительно, если единичная площадка ориентирована так, что направление внутренней нормали к ней совпадает с направлением скорости отраженных частиц, то поток

$$j_{n2} = V_0 n_0 \frac{R_0^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \theta'}{\varrho^2 \left(1 - \frac{R_0}{\varrho} \sin^3 \theta'\right)} = V_0 n_2(\varrho, z), \quad (10.20)$$

где $n_2(\varrho, z)$ — соответствующее значение концентрации отраженных частиц, взятое из табл. VI.

При любой другой ориентации единичной площадки необходимо умножить выражение (10.20) на косинус угла между внутренней нормалью — \mathbf{n} и направлением скорости отраженных частиц.

На оси z перед телом $\cos \theta' = \frac{R_0}{2z}$, и формула (10.20) упрощается

$$j_{n2}(0, z) = -n_0 (V_0 \mathbf{n}) \frac{R_0^2}{(R_0 - 2z)^2}. \quad (10.21)$$

Заметим также, что плотность потока равна нулю в области затенения («разрежения»), лишь если пренебрегается тепло-

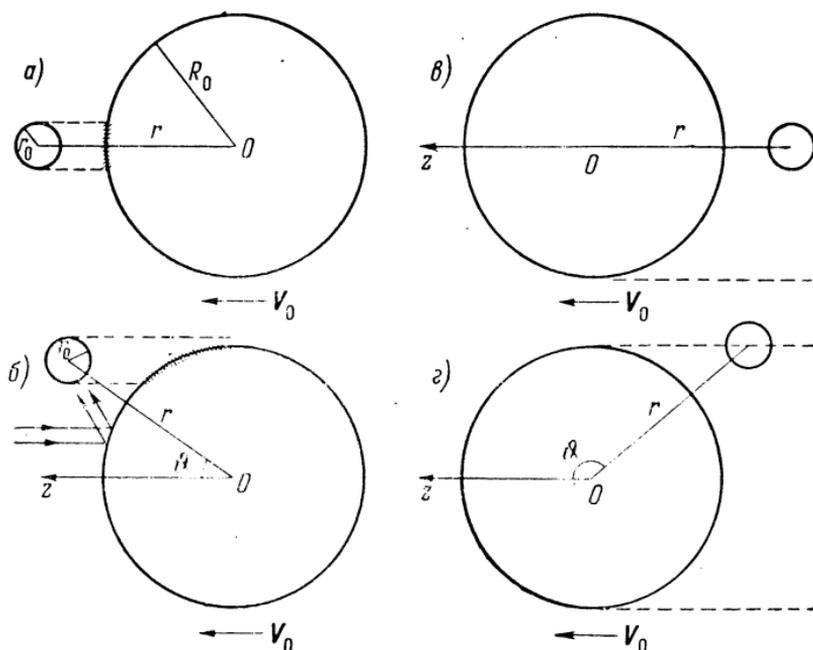


Рис. 80. Поток частиц на сферический зонд, расположенный вблизи быстро движущегося тела.

вым движением частиц. При учете теплового движения частиц потоки j_{n1T} и j_{n2T} в области затенения экспоненциально малы; например,

$$j_{n1T} \sim j_{n1} \exp \left[- \left(\frac{V_0 R_0}{v_n z} \right)^2 \right],$$

где j_{n1} — поток в незатененной области.

в. Поток частиц на зонд, расположенный вблизи быстро движущегося тела. Рассмотрим теперь небольшой сферический зонд радиуса r_0 , расположенный недалеко от поверхности быстро движущегося шара радиуса R_0 , как это изображено на рис. 80. Определим поток частиц на поверхность такого зонда. Этот поток, конечно, существенно изменяется в зависимости от положения зонда.

Если зонд расположен впереди тела (рис. 80, а, б), то поток «прямых» частиц в пренебрежении их тепловым движением, естественно, определяется формулой (10.11), т. е.

$$J_{10} = \pi r_0^2 n_0 V_0. \quad (10.22)$$

Позади тела (рис. 80, в) в затененной зоне $J_1 = 0$. На границе затененной зоны (рис. 80, г) поток

$$J_1 = n_0 V_0 S_0, \quad (10.22a)$$

где S_0 — незатененная телом часть сечения зонда. Зависимость потока «прямых» частиц от угла ϑ , определяющего положение зонда по отношению к направлению движения тела

(см. рис. 80), изображена на рис. 81, а. Различные кривые на рисунке, полученные с помощью формул (10.22), (10.22a), соответствуют разным расстояниям r центра зонда от центра шара. Как видно из рисунка, изменение

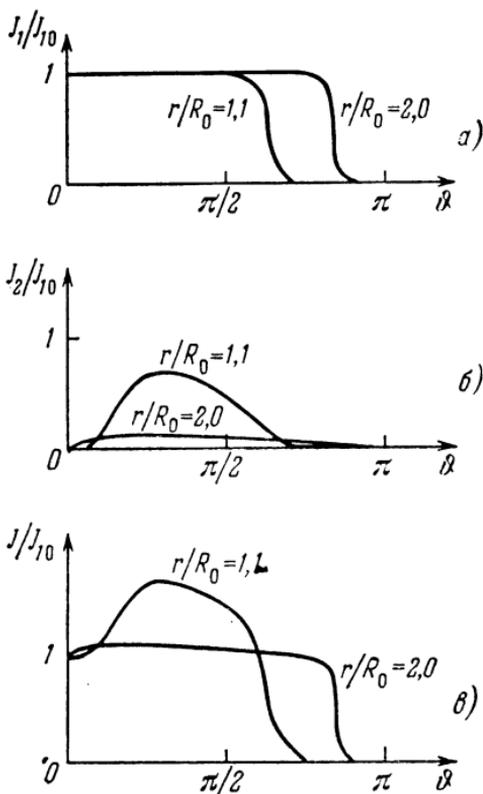


Рис. 81. Поток частиц на зонд в зависимости от угла ϑ между направлением на зонд и направлением движения тела для $r_0/R_0 = 0,05$ и различных значений r/R_0 , указанных на рисунке; $J_{10} = \pi r_0^2 n_0 V_0$. а) поток прямых частиц; б) поток отраженных частиц (отражение зеркальное); в) полный поток.

потока «прямых» частиц от J_{10} до 0 при переходе зонда в затененную зону оказывается размытым на угол $\delta\vartheta$, величина которого растет с увеличением размеров зонда, а именно $\delta\vartheta \approx 2r_0/r$.

Для определения потока отраженных частиц J_2 нужно проинтегрировать плотность потока j_{n_2} (10.15) по всей поверхности зонда. Если отражение частицы от поверхности тела зеркальное и размеры зонда r_0 малы в сравнении с размерами тела R_0 , так что плотность отраженных частиц (10.19) мало изменяется на расстоянии r_0 , то в пренебрежении тепловым движением

$$J_2 = \pi r_0^2 V_0 n_2(\varrho, z) = \pi r_0^2 V_0 n_2(\vartheta, r), \quad (10.23)$$

где ϱ, z — координаты центра зонда: $\varrho = r \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$. Выражения же для концентрации $n_2(\varrho, z)$ и ее численные значения приведены в § 6 (табл. VI, рис. 6).

Позади тела, в области затенения, концентрация n_2 , а следовательно, и поток J_2 обращаются в нуль. Важно, однако, что концентрация n_2 и поток J_2 обращаются в нуль и тогда, когда зонд находится строго впереди тела — при значениях ϑ_2 , близких к нулю. В самом деле, выражения для n_2 , приведенные в § 6, не учитывают наличия зонда, поглощающего часть набегающих на тело частиц. Зонд же сам образует на поверхности тела затененную область, в которую не попадают набегающие частицы (заштрихованная область на рис. 80, а, б). Ясно, что при этом в общем потоке отраженных частиц отсутствуют те частицы, которые должны были отражаться в затененной зондом области поверхности тела. Поэтому выражение для $n_2(\varrho, z)$ при наличии зонда несколько изменяется. В частности, понятно, что если зонд расположен строго перед телом ($\vartheta = 0$, рис. 80, а), то область поверхности, от которой должны отражаться попадающие на зонд частицы, полностью затеняется и $J_2 = 0$. Если угол ϑ близок к нулю или, точнее, если

$$\vartheta \leq \frac{r_0}{r - R_0}, \quad (10.24)$$

то отражающая область затеняется частично. Если же $\vartheta > \frac{r_0}{r - R_0}$, то наличие затененной зоны на поверхности

тела уже никак не сказывается на потоке J_2 , поскольку теперь на зонд попадают только те частицы, которые отразились в затененной области (см. рис. 80, б). В этом случае, следовательно, поток отраженных частиц определяется формулой (10.23).

Зависимость потока отраженных частиц J_2 от угла ϑ , построенная с помощью формулы (10.23) с учетом затенения зондом части поверхности тела, изображена на рис. 81, б. На рис. 81, в представлен полный поток частиц на зонд $J = J_1 + J_2$. Из рисунка видно, что полный поток частиц значительно отличается от $J_{10} = \pi r_0^2 n_0 V_0$ и существенно изменяется в зависимости от положения зонда. Отличие полного потока J от J_{10} при диффузном рассеянии частиц на поверхности тела оказывается еще значительнее. Поэтому ясно, что для достаточно точного измерения концентрации n_0 с помощью зондов рассмотренного типа, расположенных на неориентированном в пространстве теле, требуется весьма сложная обработка данных эксперимента, а также знание законов отражения частиц от поверхности тела.

Выше не учитывалось тепловое движение частиц. Это в общем справедливо для быстро движущегося тела, когда зонд не очень сильно удален от его поверхности, т. е.

$$\frac{r_0}{r - R_0} \frac{V_0}{v_n} > 1. \quad (10.25)$$

В противном случае затененная зондом область размывается из-за теплового движения, так что поток отраженных частиц более плавно изменяется в зависимости от угла ϑ . Некоторые расчеты потока на зонд прямых и отраженных частиц с учетом их теплового движения проведены в работе [26].

§ 44. Поток электронов и ионов в окрестности поглощающего тела

Определим теперь потоки электронов и ионов в окрестности покоящегося в плазме шара, заряженного до потенциала φ_0 . В окрестности шара, вследствие поляризации плазмы, образуется простран-

венный заряд. В силу симметрии суммарное поле, образованное телом и пространственным зарядом, центрально-симметрично, т. е. $\varphi = \varphi(r)$. Поэтому целесообразно получить вначале общие формулы для потоков притягивающихся и отталкивающихся частиц в центрально-симметричном поле $U(r)$, а затем уже вычислять поток в тех конкретных случаях, когда точный вид этого поля известен (см. гл. IX).

Частицы в притягивающем поле могут совершать как инфинитное, так и финитное движения (см. § 32). Поток инфинитных притягивающихся частиц $j_{\text{инф}}^+$ на единичную площадку с внешней нормалью \mathbf{n} , расположенную в точке \mathbf{r} , определяется выражением

$$j_{\text{инф}}^+ = - \int_{\text{инф}} (nv) f_{\text{инф}} d^3v =$$

$$= - \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T} \right)^{3/2} \int (nv) \exp \left[- \frac{M(v_\theta^2 + v_r^2)}{2\kappa T} - \frac{U(r)}{\kappa T} \right] v_\theta dv_\theta dv_r.$$
(10.26)

Здесь учтено, что функция распределения в центрально-симметричном поле зависит лишь от r и скоростей v_r , v_θ (см. § 33) и что для инфинитных частиц она имеет вид (8.25). Интегрирование в (10.26) ведется, разумеется, по области инфинитного движения, а также лишь по тем скоростям v , которые удовлетворяют условию $nv < 0$.

В плазме электрическое поле может убывать с расстоянием как быстрее, так и медленнее, чем $1/r^2$, а на бесконечности оно падает всегда строго, как $1/r^2$. Область инфинитного движения рассматривалась для всех этих случаев ранее в §§ 32, 34 и определена формулами (8.7), (8.11), (8.28). В простейшем случае, если единичная площадка в точке \mathbf{r} ориентирована так, что $\mathbf{n} \parallel \mathbf{r}$, то $nv = v_r$ и условие $nv < 0$ переписывается в виде

$$v_r < 0. \quad (10.27)$$

В этом случае наличие поглощающей поверхности радиуса R_0 никак не сказывается на потоке частиц в точке \mathbf{r} .

Выражение (10.26) принимает поэтому вид

$$\begin{aligned}
 j_{\text{инф}}^+ &= -\frac{N_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T}\right)^{3/2} \int_{\substack{\text{инф} \\ v_r < 0}} \exp\left[-\frac{M(v_r^2 + v_\theta^2)}{2\kappa T} - \frac{U(r)}{\kappa T}\right] v_r v_\theta dv_r dv_\theta = \\
 &= -\frac{\sqrt{2}N_0}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{\kappa T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{M[v_r^2 + v_\theta^2(v_r)]}{2\kappa T} - \frac{U(r)}{\kappa T}\right] v_r dv_r,
 \end{aligned} \tag{10.28}$$

где функция $v_\theta(v_r)$ есть граница, до которой происходит интегрирование по скоростям v_θ при данной скорости v_r . При этом если модуль скорости v_r больше, чем $\sqrt{-\frac{2}{M}U(r)}$, то $v_\theta(v_r) = 0$; если же $v_r < \sqrt{-\frac{2}{M}U(r)}$, то функция $v_\theta(v_r)$ есть граница областей финитного и инфинитного движений. Учитывая это, перейдем, как обычно (см. § 34) в интеграле (10.28), к новой переменной r_0 , которая связана с v_r соотношением (8.11). Тогда в общем случае, когда поле на бесконечности падает по модулю строго, как $1/r^2$, а при меньших r вначале быстрее, а затем медленнее, чем $1/r^2$, мы получаем

$$\begin{aligned}
 j_{\text{инф}}^+ &= j_0 \left\{ 1 + \frac{R_0^2}{r^2} \varphi_\infty^* + \frac{1}{2} \int_{\rho_0(r)}^{\infty} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right) \left(3 \frac{d\varphi^*}{dr_0} + r_0 \frac{d^2\varphi^*}{dr_0^2}\right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp\left[\varphi^*(r_0) + \frac{r_0}{2} \frac{d\varphi^*}{dr_0}\right] dr_0 \right\}, \tag{10.29}
 \end{aligned}$$

где j_0 — поток частиц в отсутствие поля (10.3)

$$j_0 = N_0 \sqrt{\frac{\kappa T}{2\pi M}}, \tag{10.30}$$

и, как обычно, $\varphi^* = -\frac{U(r)}{\kappa T}$, а φ_∞^* — величина, характеризующая асимптотическое поведение потенциала $U(r)$ при $r \rightarrow \infty$ (см. § 34), т. е.

$$-\frac{U(r)}{\kappa T r \rightarrow \infty} = \varphi_\infty^* \frac{R_0^2}{r^2}. \tag{10.31}$$

Заметим, что выражение $\frac{1}{2} \left(3 \frac{d\varphi^*}{dr_0} + r_0 \frac{d^2\varphi^*}{dr_0^2}\right)$, стоящее под интегралом (10.29), является производной показателя

экспоненты этого же интеграла. Поэтому в (10.29) можно провести интегрирование по частям. Тогда получаем

$$j_{\text{инф}}^+ = j_0 \left\{ \varphi_{\infty}^* \frac{R_0^2}{r^2} + \frac{\varrho_0^2(r)}{r^2} - \left(\frac{\varrho_0^2(r)}{r^2} - 1 \right) \exp \left[\varphi^*(\varrho_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varrho_0}{2} \frac{d\varphi^*}{dr}(\varrho_0) \right] + \frac{2}{r^2} \int_{\varrho_0(r)}^{\infty} r_0 \left[1 - \exp \left(\varphi^*(r_0) + \frac{r_0}{2} \frac{d\varphi^*}{dr_0} \right) \right] dr_0 \right\}. \quad (10.32)$$

Расстояние $\varrho_0(r)$ определяется из уравнения (8.12)

$$U(\varrho_0) - U(r) - \frac{\varrho_0}{2} \frac{dU}{dr}(\varrho_0) \left(\frac{\varrho_0^2}{r^2} - 1 \right) = 0, \quad (10.33)$$

причем ϱ_0 — максимальный корень этого уравнения. Формулу для ϱ_0 мы проанализировали ранее в § 32. При этом было, в частности, показано, что потенциал $U(r)$ в точке ϱ_0 всегда падает с ростом r быстрее, чем $1/r^2$. Из формулы (10.32) видно, что поток притягивающихся частиц в точке r существенно зависит не только от значения потенциала в этой самой точке, но и от всего хода $\varphi^*(r_0)$ в области $r_0 \geq \varrho_0$.

Рассмотрим некоторые предельные выражения для потока, получаемые из формулы (10.32). Предположим вначале, что всюду в области $r_0 > \varrho_0(r)$ выполняется условие

$$\left| \varphi^*(r_0) + \frac{r_0}{2} \frac{d\varphi^*}{dr_0} \right| \ll 1. \quad (10.34)$$

Тогда экспоненциальный член можно разложить в ряд. Интегрируя в (10.32) по частям и учитывая соотношение (10.34), получаем

$$j_{\text{инф}}^+(r) = j_0 \{ 1 + \varphi^*(r) - A_2(r) \}, \quad (10.35)$$

где

$$A_2(r) = \frac{1}{r^2} \int_{\varrho_0}^{\infty} r_0 \left[\varphi^*(r_0) + \frac{r_0}{2} \frac{d\varphi^*}{dr_0} \right]^2 dr_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho_0^2}{r^2} - 1 \right) \times \\ \times \left[\varphi^*(\varrho_0) + \frac{\varrho_0}{2} \frac{d\varphi^*}{dr}(\varrho_0) \right]^2. \quad (10.36)$$

Последний член в (10.35) мал, так как

$$A_2(r) \sim \left| \varphi^*(\varrho_0) + \frac{\varrho_0}{2} \frac{d\varphi^*}{dr}(\varrho_0) \right| \ll 1, \quad (10.37)$$

и следовательно, для потока частиц в рассматриваемом случае справедливо простое выражение Ленгмюра и Мотт-Смита [42]

$$j_{\text{инф}}^+(r) = j_0 (1 + \varphi^*) = j_0 \left(1 - \frac{U(r)}{\kappa T} \right). \quad (10.38)$$

Это выражение можно сразу получить из формулы (10.29), если положить в ней экспоненциальный член равным единице. Поскольку при всех $r_0 \geq r_0$ потенциал падает не медленнее, чем $1/r^2$, то в экспоненте всегда стоит отрицательная величина. Следовательно, поток в точке r при заданном значении $U(r)$ в любом случае не может превышать потока (10.38). Заметим, что формула (10.38) для потока частиц строго справедлива, если потенциал поля всегда убывает с ростом r не быстрее, чем $1/r^2$. В самом деле, граница областей финитного и инфинитного движений в этом случае определяется формулой (8.7). Следова-

тельно, в формуле (10.28) $v_\theta(v_r) = \sqrt{-v_r^2 - \frac{2}{M} U(r)}$ при

$$v_r < \sqrt{-\frac{2}{M} U(r)} \quad \text{и} \quad v_\theta(v_r) = 0 \quad \text{при} \quad v_r > \sqrt{-\frac{2}{M} U(r)}.$$

Учитывая это, сразу получаем из формулы (10.28) выражение (10.38) для потока притягивающихся частиц. Таким образом, простая формула (10.38) для плотности потока притягивающихся частиц на поверхность шара радиуса R_0 справедлива, если потенциал поля убывает не быстрее, чем $1/r^2$, до больших расстояний от шара $r/R_0 \gg 1$.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда потенциал поля очень резко убывает с ростом расстояния от поверхности шара радиуса R_0 . Пусть, например,

$$U(r) = U(R_0) \exp\left(-\frac{r-R_0}{D}\right), \quad (10.39)$$

где $U(R_0)$ — потенциал поверхности шара, и $D \ll R_0$. В этом случае $\varphi_\infty^* = 0$ и $q_0(r) = r$ (см. § 32). Подставляя выражение (10.39) для $U(r)$ в (10.32) и интегрируя, находим, что

$$j_{\text{инф}}^+ = j_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{D}{R_0} \ln \left(-\frac{R_0}{D} \frac{U(R_0)}{\kappa T} \right) \right]^2 \right\}. \quad (10.40)$$

Иначе говоря, если поле очень резко обрывается у поверхности шара, то оно лишь очень слабо влияет на поток



притягивающихся частиц, так как $D/R_0 \ll 1$. Плотность потока $j_{\text{инф}}^+$ совпадает в этом случае с плотностью потока нейтральных частиц j_0 . Такое распределение поля имеет место у передней поверхности быстро движущегося большого тела (см. § 14). Следовательно, поток ионов на переднюю поверхность быстро движущегося большого тела и в ее окрестности близок к потоку нейтральных частиц. На это уже указывалось ранее (см. §§ 14, 42). Заметим, что полный поток частиц на сферическую поверхность радиуса R_0 , естественно, равен

$$J_{\text{инф}} = 4\pi R_0^2 j_{\text{инф}}(R_0). \quad (10.41)$$

Поток финитных частиц в точке r также определяется интегралом (10.26) по области финитного движения с функцией распределения финитных частиц. Однако поскольку нас фактически интересует лишь поток на некоторую поглощающую поверхность, то наличие такой поверхности изменяет распределение финитных частиц, так как частицы, проходящие по траекториям, пересекающим эту поверхность, исчезают. Таким образом, в приближении, не учитывающем столкновений, поток финитных частиц на любую поглощающую поверхность равен нулю. С учетом столкновений этот поток отличен от нуля, но всегда мал по сравнению с потоком инфинитных частиц в условиях, когда размер возмущенной зоны R много меньше длины свободного пробега частиц l . В слабо ионизованной плазме выражение для полного потока финитных электронов на поглощающий кулоновский центр получено в § 35 (см. (8.73)). Сравнивая его с потоком инфинитных частиц (8.75), можно убедиться, что в условиях $R \ll l$ поток финитных частиц в общем мал.

Отметим в заключение, что для отталкивающихся частиц всегда справедливо распределение Максвелла — Больцмана. Поэтому вычисление потока отталкивающихся частиц на единичную площадку в точке r с нормалью $n \parallel r$ приводит к очевидному результату

$$j^-(r) = - \int v_r f d^3v = j_0 \exp[-\varphi^*(r)], \quad (10.42)$$

где j_0 , как обычно, — поток частиц в отсутствие поля (10.3).

§ 45. К теории сферического зонда

Рассмотрим теперь поток заряженных частиц на металлическое тело небольшого размера — зонд. Ток на зонд, естественно, существенно зависит от потенциала его поверхности и равен

$$\hat{J} = e(J_i - J_e), \tag{10.43}$$

где J_i и J_e — полные потоки ионов и электронов на поверхность зонда. Если зонд заряжен положительно, то ионы отталкиваются, а электроны притягиваются к нему, если зонд заряжен отрицательно, то наоборот.

Поток отталкивающихся частиц определяется лишь потенциалом зонда (10.42), поток притягивающихся частиц зависит, как мы видели выше, от всего хода поля $\varphi(r)$ в окрестности зонда (10.32). При этом существенно различаются случаи большого ($R_0 \gg D$) и малого ($R_0 \ll D$) зонда (см. гл. IX). Выделен также случай очень высоких потенциалов поля на поверхности зонда (см. §§ 39, 40).

а. Поток притягивающихся частиц на поверхность большого зонда. Зависимость потенциала φ от r в случае, когда радиус зонда R_0 много больше дебаевского радиуса $D = (\kappa T / 4\pi e^2 N_0)^{1/2}$ в невозмущенной плазме, получена в § 37 для случая не очень высоких значений φ , т. е. когда

$$|\varphi_0| \ll \frac{\kappa T}{e} \left(\frac{R_0}{D} \right)^{4/3}. \tag{10.44}$$

Поскольку в этом случае $R_0 > r_K$ и, следовательно, $Q_0(r) = r$, то формула (10.32) для потока притягивающихся частиц упрощается и принимает вид

$$J^* = J_0 \left\{ 1 + \varphi_\infty^* + 2 \int_1^\infty \xi \left[1 - \exp \left(\varphi^* + \frac{\xi}{2} \frac{d\varphi^*}{d\xi} \right) \right] d\xi \right\}. \tag{10.45}$$

Здесь J_0 — полный поток притягивающихся частиц в отсутствие поля (10.30), (10.44):

$$J_0 = (8\pi\kappa T / M)^{1/2} N_0 R_0^2, \tag{10.46}$$

и $\varphi^* = e |\varphi| / \kappa T$, $\xi = r/R_0$, φ_∞^* — константа, характеризующая поведение поля $\varphi^*(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$, R_0 — радиус зонда, N_0 — концентрация частиц в невозмущенной плазме, T и M — их температура и масса.

Используя в формуле (10.45) потенциал $\varphi^*(\xi)$, рассчитанный в § 37 при разных значениях потенциала поверхности φ_0 , и интегрируя (численно), находим значения потока J^+ для различных φ_0 . Эти значения приведены в табл. XXV.

Таблица XXV

Зависимость J^+/J_0 от потенциала поверхности зонда

$$\varphi_0^* = e |\varphi_0| / \kappa T$$

φ_0^*	0	$\varphi_0^* \ll 1$	0,25	0,50	0,75	1,0	$\varphi_0^* \gg 1$
J^+/J_0	1	$1 + \varphi_0^*$	1,18	1,26	1,33	1,38	1,47

Кривая зависимости J^+/J_0 от φ_0^* представлена на рис. 82. При $\varphi_0^* \gg 1$ поток притягивающихся частиц становится постоянным — он не зависит более от потенциала зонда

$$\frac{J^+}{J_0} \Big|_{\varphi_0^* \gg 1} = 1,47. \quad (10.47)$$

Это верно, однако, лишь при не слишком высоких потенциалах поверхности зонда, удовлетворяющих условию (10.44). Случай очень высоких потенциалов поверхности зонда, когда

$$|\varphi_0| \gtrsim \frac{\kappa T}{e} \left(\frac{R_0}{D} \right)^{4/3}, \quad (10.48)$$

рассмотрен в § 39. Используя в формуле (10.32) выражение для потенциала поля, полученное в этом параграфе, находим, что

$$j^*(R_0) = j_0 \left\{ \frac{R_0^2}{R_0^2} \varphi_\infty^* + \frac{Q_0^2(R_0)}{R_0^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{R_0^2} \int_{\rho_0(R_0)}^{\infty} r_0 \left[1 - \exp \left(\varphi^* + \frac{r_0}{2} \frac{d\varphi^*}{dr_0} \right) \right] dr_0 \right\} =$$

$$= j_0 \left\{ \frac{R_c^2}{R_0^2} \varphi_\infty^* + \frac{R_c^2}{R_0^2} + \frac{2}{R_0^2} \int_{R_c}^{\infty} r_0 \left[1 - \exp\left(\varphi^* + \frac{r_0}{2} \frac{d\varphi^*}{dr_0}\right) \right] dr_0 \right\} =$$

$$= 1,47 j_0 \left(\frac{R_c}{R_0} \right)^2. \quad (10.49)$$

Здесь использовано, что $\left| \varphi^*(\varrho_0) + \frac{\varrho_0}{2} \frac{d\varphi^*}{dr}(\varrho_0) \right| \gg \left(\frac{R_0}{D} \right)^{4/3} \gg 1$ (см(9.50)) и что при $r \gg R_c$ функция $\varphi^*(\xi)$ дается точно

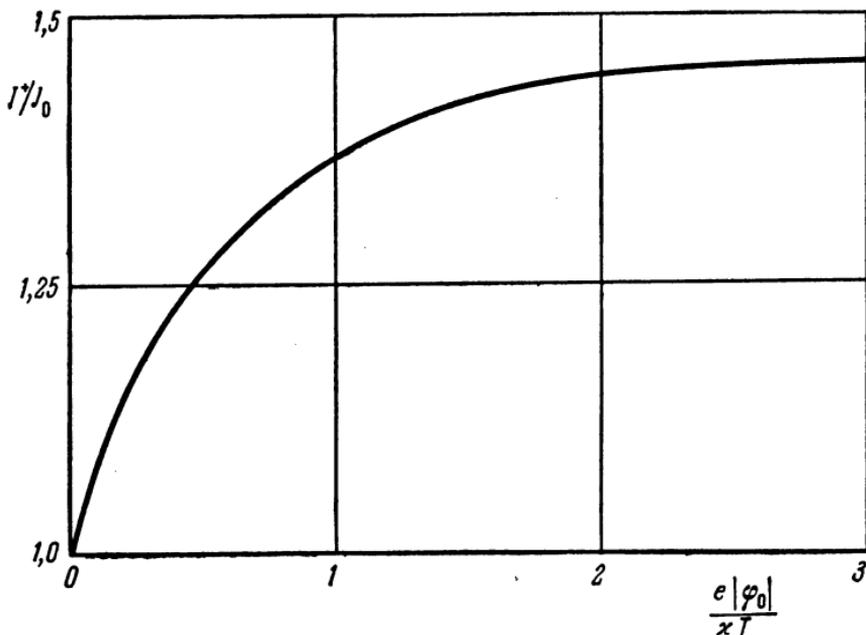


Рис. 82. Изменение полного потока притягивающихся частиц в зависимости от потенциала на поверхности тела:

$$J_0 = (8\pi kT/M)^{1/2} R_0^2 N_0.$$

теми же выражениями, что и в § 37, только $\xi = r/R_c$. Далее, R_c — радиус области пространственного заряда. Зависимость R_c/R_0 от $\varphi_0^* (D/R_0)^{4/3}$ представлена на рис. 72.

Для полного потока притягивающихся частиц на поверхность зонда получаем

$$J^* = 1,47 J_0 \left(\frac{R_c}{R_0} \right)^2 = 1,47 \left(\frac{8\pi kT}{M} \right)^{1/2} N_0 R_c^2. \quad (10.50)$$

Зависимость потока J^+/J_0 от $\varphi_0^*(D/R_0)^{4/3}$ представлена на рис. 83 и в табл. XXVI. При $\varphi_0^*(D/R_0)^{4/3} \rightarrow 0$ отно-

Таблица XXVI

Зависимость J^+/J_0 от потенциала поверхности зонда при больших значениях φ_0 ($\varphi_0^* = \frac{e|\varphi_0|}{\kappa T} \left(\frac{D}{R_0}\right)^{4/3}$)

$\varphi_0^{(*)}$	J^+/J_0	$\varphi_0^{(*)}$	J^+/J_0	$\varphi_0^{(*)}$	J^+/J_0	$\varphi_0^{(*)}$	J^+/J_0
0	1,47	0,80	3,71	6,0	11,0	30	33,6
0,02	1,67	1,0	4,11	7,0	12,2	35	37,6
0,05	1,77	1,4	4,75	8,0	13,3	40	41,4
0,10	1,96	1,7	5,32	9,0	14,4	45	45,2
0,15	2,14	2,0	5,77	10,0	15,5	50	49,0
0,20	2,30	2,5	6,52	12,0	17,5	55	52,8
0,25	2,45	3,0	7,25	14,0	19,4	60	56,5
0,30	2,59	3,5	7,94	16,0	21,3	70	63,7
0,40	2,84	4,0	8,60	18,0	23,2	80	70,7
0,50	3,07	4,5	9,23	20	25,0	90	77,4
0,60	3,29	5,0	9,83	25	29,4	100	83,8

шение $R_c/R_0 \rightarrow 1$ и поток J^+ равен $1,47J_0$, как это и должно быть. При очень высоких значениях потенциала поля $|\varphi_0| \gg \frac{\kappa T}{e} \left(\frac{R_0}{D}\right)^{4/3}$, как ясно из (9.44), (10.50):

$$J^+ = 0,951J_0 \left[\frac{e|\varphi_0|}{\kappa T} \left(\frac{D}{R_0}\right)^{4/3} \right]^{6/7} = 1,12 \frac{(\kappa T)^{3/14} N_0^{3/7} \varphi_0^{6/7} R_0^{6/7}}{M^{1/2} e^{2/7}}. \quad (10.51)$$

Таким образом, при $\varphi_0 \rightarrow \infty$ поток частиц растет пропорционально $\varphi_0^{6/7}$.

б. Поток притягивающихся частиц на поверхность малого зонда. Зависимость потенциала φ от r в случае $R_0 \ll D$ для не очень высоких потенциалов поверхности

$$|\varphi_0| < \frac{\kappa T}{e} \frac{D}{R_0} \quad (10.52)$$

получена в § 40а. Используя соответствующее выражение для $\varphi(r)$ в формуле (10.32), имеем для потока следующее

выражение:

$$J^+ = J_0(1 + \varphi_0^*). \quad (10.53)$$

Простая формула (10.53) совпадает с формулой Ленгмюра

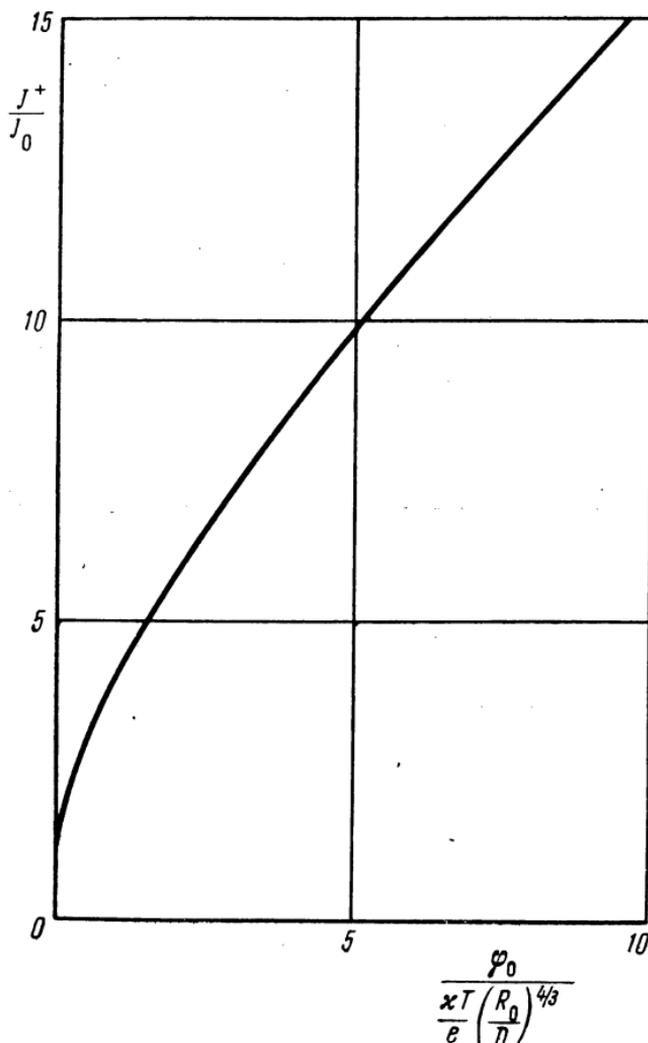


Рис. 83. Зависимость полного потока притягивающихся частиц от φ_0 при очень высоких потенциалах φ_0 на поверхности тела.

и Мотт-Смита (10.38). Это и понятно, так как при выполнении условия (10.52) поле падает по кулоновскому

закону, т. е. медленнее, чем $1/r^2$, вплоть до расстояний порядка D от поверхности тела. Поскольку в рассматриваемом случае $D \gg R_0$, то поток дается выражением (10.38), справедливым в случае медленно убывающего поля.

При значениях $\varphi_0^* > D/R_0$, как ясно из результатов § 40в, поле по-прежнему убывает медленнее, чем $1/r^2$, и следовательно, поток J^+ по-прежнему определен выражением (10.53). Это справедливо, однако, лишь при $\varphi_0^* \ll (D/R_0)^8$, т. е. при

$$|\varphi_0| \ll \frac{\kappa T}{e} \left(\frac{D}{R_0} \right)^8. \quad (10.54)$$

При очень высоких значениях потенциала поля на поверхности тела, когда выполнено условие, обратное условию (10.54), т. е.

$$|\varphi_0| \gg \frac{\kappa T}{e} \left(\frac{D}{R_0} \right)^8, \quad (10.55)$$

поток притягивающихся частиц дается формулой

$$J^+ = 0,951 J_0 \left[\frac{e |\varphi_0|}{\kappa T} \left(\frac{D}{R_0} \right)^{4/3} \right]^{6/7}. \quad (10.51)$$

Зависимость потока J^+ от потенциала поля для малого тела представлена на рис. 84. Для удобства на этом рисунке отдельно выделена зависимость J^+/J_0 от $e\varphi_0/\kappa T$ при малых значениях $e\varphi_0/\kappa T \sim 1$. Разумеется, в случае очень высоких потенциалов $\varphi_0 \sim \frac{\kappa T}{e} \left(\frac{D}{R_0} \right)^8$ точно известен лишь асимптотический ход функции J^+/J_0 при условиях (10.54) и (10.55). Однако выражения (10.53) и (10.51) хорошо сшиваются, что позволяет приближенно построить полную кривую*).

в. Зондовая характеристика. Поток финитных частиц на поверхность тела при достаточно большой длине свободного пробега частиц $l \gg R_0$, как мы видели выше, всегда мал в сравнении с потоком инфинитных частиц.

*) При расчете всюду предполагалось, что частицы полностью поглощаются на поверхности зонда. В реальных условиях нередко важную роль играет отражение частиц (особенно при положительных потенциалах φ_0) и вторичные процессы на поверхности зонда.

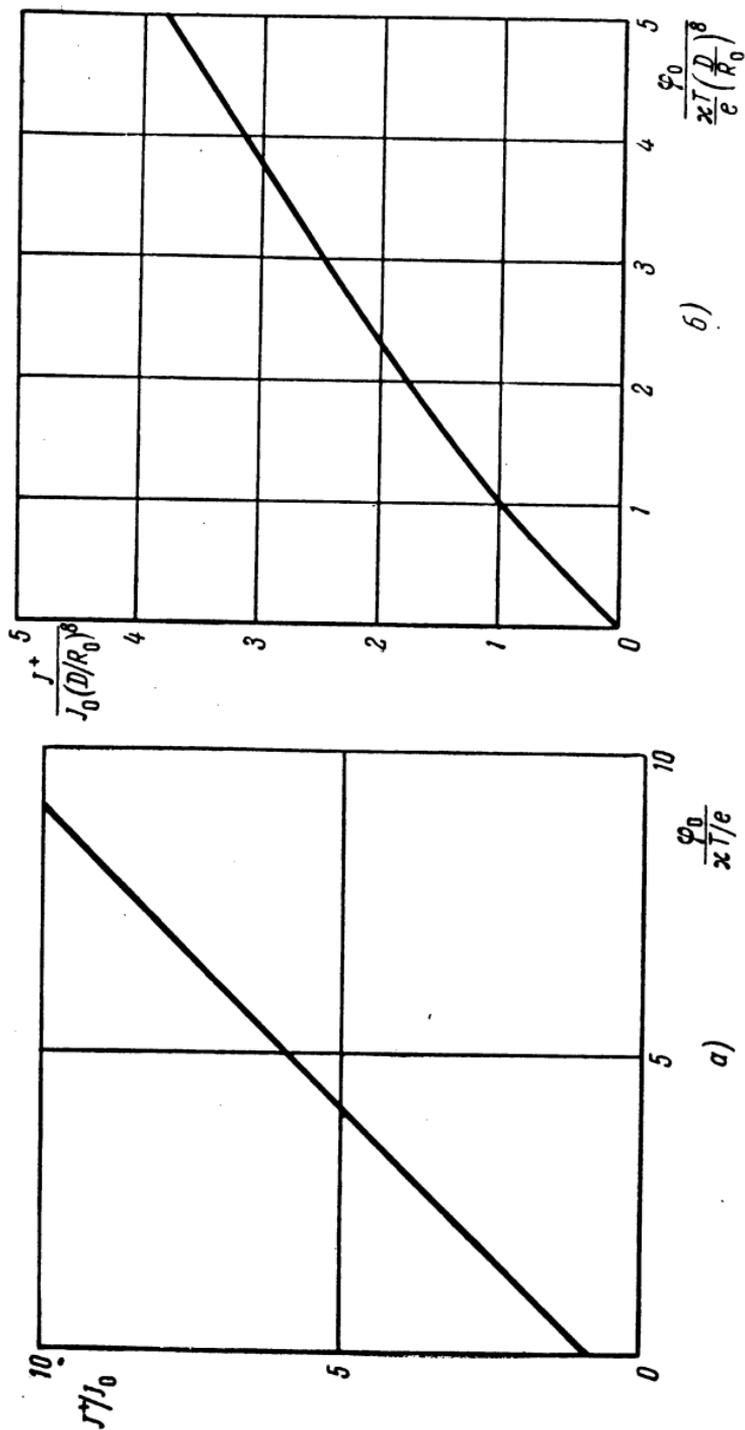


Рис. 84. Зависимость полного потока притягивающихся частиц в случае малого тела ($R_0 \ll D$) от потенциала φ_0 .

Учитывая поэтому полученные выше выражения для потока притягивающихся частиц и для потока отталкивающихся частиц (10.42), можно построить зависимость полного тока на зонд (10.43) от потенциала его поверхности φ_0 ,

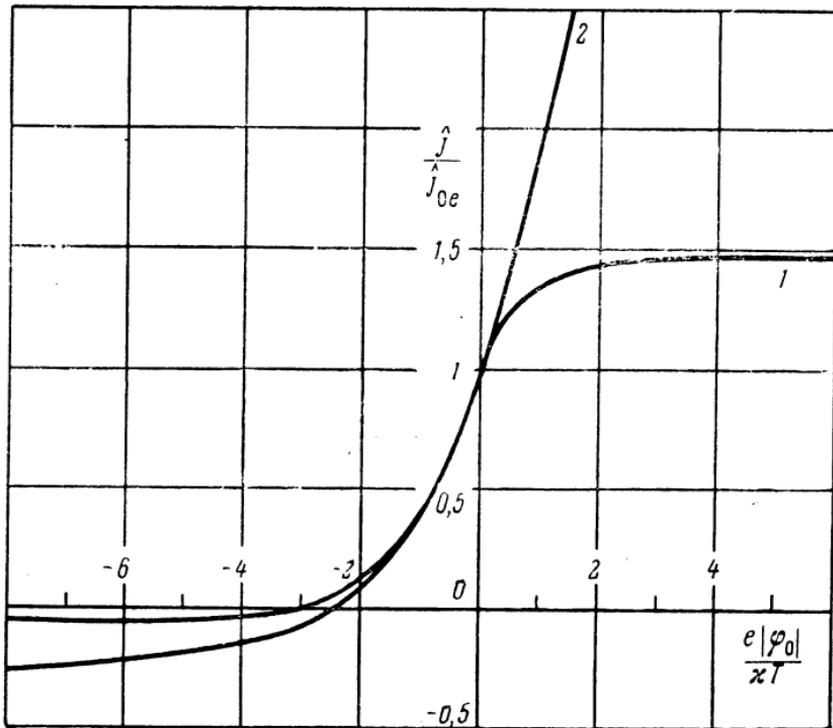


Рис. 85. Зондовые характеристики для случая большого ($R_0 \gg D$) (кривая 1) и малого ($R_0 \ll D$) (кривая 2) зондов. φ_0 — потенциал поверхности зонда, $\hat{j}_{0e} = -eN_0R_0^2 \times (\frac{8\pi kT}{3M})^{1/2}$ — ток электронов на незаряженный зонд.

Отношение $\frac{M}{m} \approx 1,84 \cdot 10^3$ (водород).

т. е. так называемые зондовые характеристики. Они представлены, например, в случае не очень высоких потенциалов поверхности на рис. 85. Из рисунка видно, что зондовые характеристики в предельных случаях большого и малого тела сильно различаются.

Вычислению величины потока притягивающихся частиц на зонд посвящено, как уже указывалось выше в § 31,

значительное количество работ. В большинстве из них рассматривался, однако, случай разнотемпературной плазмы $T_e \gg T_i$. Для однотемпературной плазмы имеются лишь результаты приближенной теории Ленгмюра [39, 42, 60], Бома, Бархопа и Месси [40].

Поток частиц на поверхность большого тела ($R_0 \gg D$) при не очень высоких потенциалах поверхности, удовлетворяющих условию (10.44), согласно Ленгмюру не зависит от потенциала поверхности и равен

$$J^+ = J_0 = (8\pi kT/M)^{1/2} N_0 R_0^2. \quad (10.56)$$

В работах Ленгмюра не учитывалось влияния поля, проникающего в квазинейтральную плазму, на поток притягивающихся частиц. В работе Бома, Бархопа и Месси влияние этого поля в грубом приближении учтено (подробнее см. § 31). При этом разные приближения дают для потока различные значения. А именно согласно [40]

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= 1,77J_0, \\ J_2 &= 1,35J_0. \end{aligned} \right\} \quad (10.57)$$

Результаты строгого расчета $J^+(\varphi_0)$ приведены выше на рис. 84. Значение потока насыщения согласно (10.47) равно $1,47J_0$. Оно существенно отличается как от значения (10.56), так и от (10.57). Такая же константа определяет и различие результатов расчета потока при очень высоких потенциалах на поверхности большого тела.

Структура плазмы в окрестности тела малого размера в указанных выше работах не изучалась; соответственно не вычислялся и поток частиц на поверхность тела. Правда, можно было ожидать, что поток частиц определяется формулой Ленгмюра и Мотт-Смита (10.38), однако вопрос о том, при каких условиях справедлива формула (5.13), требовал специального анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, УФН 71, 369 (1960); Сб. «Искусственные спутники Земли», № 7, 125 (1961).
2. А. В. Гуревич, Труды ИЗМИР АН СССР, вып. 17 (27), 173 (1960).
3. А. В. Гуревич, Сб. «Искусственные спутники Земли», № 7, 101 (1961).
4. Л. П. Питаевский, В. З. Кресин, ЖЭТФ 40, 271 (1961).
5. Л. П. Питаевский, Геомагнетизм и аэрномия 1, 194 (1961).
6. Я. Л. Альперт, Л. П. Питаевский, Геомагнетизм и аэрномия 1, 709 (1961).
7. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 42, 1326 (1962).
8. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрномия 3, 184 (1963).
9. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 44, 969 (1963).
10. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, УФН 79, 233 (1963).
11. K. P. Chogra, Rev. Mod. Phys. 33, 153 (1961).
12. L. D. Jaffe, J. V. Rittenhouse, Л. Джаффе, Дж. Риттенхауз, Ракетная техника (русский перевод), стр. 3, 1962.
13. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, Изд-во АН СССР, 1960.
14. С. Митра, Верхняя атмосфера, ИЛ, 1959.
15. Z. Triskova, Just. für Radiotechnik und Elektr., Tschechoslovakische Akad. d. Wissen., № 16 (1961).
16. В. П. Докучаев, ЖЭТФ 43, 595 (1962).
17. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, 1961.
18. С. П. Капица, ЖЭТФ 39, 1367 (1960).
19. В. Л. Грановский, Электрический ток в вакууме и в газах, Гостехиздат 1953.
20. Г. Месси, Е. Бархон, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, стр. 484, 1958.
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
22. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 7, 203 (1937).
23. Л. Э. Гуревич, Основы физической кинетики, Гостехиздат, гл. 7, 1940.
24. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ 7, 1069 (1937).
25. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН 70, 201 (1960).

26. А. М. Москаленко, Геомagnetизм и астрономия 2, 407 (1962).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1959.
28. М. А. Миллер, Движение заряженных частиц в слабо неоднородных высокочастотных электромагнитных полях, Диссертация, Горький (1960); Proc. of Int. Conf. of High-Ener. Accel and Instr. CERN, p. 661, 1959.
29. Г. Гетманцев, Н. Г. Денисов, Геомagnetизм и астрономия 2, 691 (1962).
30. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 39, 1450 (1960).
31. В. Л. Гинзбург, Электромагнитные волны в плазме, Физматгиз, 1960.
32. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
33. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
34. А. В. Гуревич, ЖЭТФ 44, 1302 (1963).
35. Т. Каулинг, С. Чепмен, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.
36. Г. Будкер, В. Беляев, Сб. «Физика плазмы», т. II, стр. 330, Изд-во АН СССР, 1958.
37. В. Беляев, Сб. «Физика плазмы», т. III, стр. 50, Изд-во АН СССР, 1958.
38. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, стр. 279, 1953.
39. J. Langmuir, K. Blodgett, Phys. Rev. 22, 347 (1923); 24, 49 (1924).
40. D. Bohm, E. Burhop, G. Messy, The characteristics of electrical discharges in magnetic fields, Ed. by A. Guthrie, R. Wakerling, New York, 1949.
41. J. Bernstein, J. Rabinowitz, Phys. Fluids 2, 112 (1959).
42. H. M. Mott-Smit, J. Langmuir, Phys. Rev. 28, 727 (1926).
43. Ю. М. Каган, В. И. Перель, ДАН 95, 765 (1954); ЖЭТФ 29, 261 (1955); ЖЭТФ 32, 1479 (1962).
44. L. Kraus, K. Watson, Phys. Fluids 1, 480 (1958).
45. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ 21, 971 (1951).
46. Г. В. Гордеев, ЖЭТФ 24, 524 (1954).
47. А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖЭТФ 44, 903 (1963).
48. А. Б. Михайловский, Л. И. Рудаков, ЖЭТФ 44, 912 (1963).
49. В. П. Силин, ЖЭТФ 44, 1271 (1963).
50. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, ЖЭТФ 44, 763 (1963).
51. P. S. Greifinger, Phys. Fluids 4, 104 (1961).
52. S. Rand, Phys. Fluids 2, 649 (1959); 3, 265, 588 (1960).
53. J. R. Reitz, L. L. Foldy, Journ. Fluid Mech. 11, 133 (1961).
54. Л. И. Дорман, Ю. М. Михайлов, ЖЭТФ 43, 752 (1963).
55. R. Jastrow, C. A. Pearse, J. Geophys Res. 62, 413 (1957).
56. М. Е. Гинзбург, Труды ИЗМИР АН СССР, вып. 17 (27), 187 (1960).

57. A. H. Davis, I. Harris, Rarefied Gas Dynamics, Acad. Press, New York—London, 661, 1961.
 58. K. L. Dura Sengupta, Canad. Journ. of Phys. 41, 132 (1963).
 59. G. S. S. Ludford, J. D. Murray, Journ. Fluid Mech. 7, 516 (1960).
 60. J. Langmuir, Phys. Rev. 34, 876 (1929).
 61. F. Wensel, Z. Angew. Phys. 2, № 2, 59 (1950).
 62. J. Allen, R. Boyd, P. Reynolds, Proc. Roy. Soc. A70, 297 (1957).
 63. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, Геомагнетизм и аэронавигация 3, 823 (1963).
 64. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 45, 1243 (1963).
 65. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэронавигация 3, 1021 (1963).
 66. Л. П. Питаевский, Геомагнетизм и аэронавигация 3, 1036 (1963).
 67. Radio Research 1962, Report of the Director of Radio Research, London, 1963.
 68. Ю. В. Зонов, Сб. «Искусственные спутники Земли», № 3, 1187 (1959).
 69. Ю. С. Саянов, Л. А. Жижимов, Радиотехника и электроника 8, 499 (1963).
-

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ КНИГИ

1. Бардин Дж. и Шриффер Дж., Новое в изучении сверхпроводимости, перев. с англ., Физматгиз, 1962, 172 стр., 44 к.
2. Богуславский С. А., Избранные труды по физике, Физматгиз, 1961, 436 стр., 1 р. 23 к. (Библиотека русской науки. Математика. Механика. Физика.)
3. Бурштейн А. Н., Физические основы расчета полупроводниковых устройств, Физматгиз, 1962, 226 стр., 94 к.
4. Гуревич С. Б., Физические процессы в передающих телевизионных трубках, Физматгиз, 1958, 399 стр., 1 р. 15 к. (Физико-математическая библиотека инженера.)
5. Дорфман Я. Г., Диамагнетизм и химическая связь, Физматгиз, 1961, 231 стр., 74 к. (Современные проблемы физики.)
6. Ельяшевич М. А., Спектры редких земель, Гостехиздат, 1953, 456 стр., 2 р. 16 к.
7. Кондратьев К. Я., Перенос длинноволнового излучения в атмосфере, Гостехиздат, 1950, 288 стр., 84 к.
8. Лейпунский О. И. и др., Распространение гамма-квантов в веществе, Физматгиз, 1960, 208 стр., 1 р. 03 к.
9. Розенберг Г. В., Оптика тонкослойных покрытий, Физматгиз, 1958, 570 стр., 1 р. 66 к.
10. Фриш С. Э. и др., Курс общей физики, т. 3. Оптика. Атомная физика, изд. 7-е, испр. и доп., Физматгиз, 1962, 644 стр., 1 р. 37 к.

Книги продаются в книжных магазинах, а также высылаются почтой наложенным платежом без задатка всеми республиканскими, краевыми и областными отделениями «Книга — почтой».

В случае отсутствия книги в местных магазинах заказы следует направлять по адресу: Москва, К-9, Петровка, 15, магазин № 8.

*Яков Львович Альперт,
Александр Викторович Гуревич,
Лев Петрович Питаевский.*

**Искусственные спутники
в разреженной плазме.**

М., 1964 г., 384 стр. с илл.

Редактор *И. Г. Вирко.*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно.*

Корректор *Э. В. Автонева.*

Сдано в набор 16/IX 1963 г. Подписано
к печати 30/I 1964 г. Бумага 84×108/32.
Физ. печ. л. 12. Условн. печ. л. 19,68.
Уч.-изд. л. 18,14. Тираж 3000 экз.
Т-00935. Цена книги 1 р. 11 к.
Заказ № 1037.

Издательство «Наука».
Редакция прикладной
и теоретической физики.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16
«Главполиграфпрома» Государственного
Комитета Совета Министров СССР
по печати.
Москва, Трехпрудный пер., 9.