

СПРАВОЧНОЕ
ПОСОБИЕ

ОБЩАЯ ФИЗИКА

А.И. АХИЕЗЕР

А.И. АХИЕЗЕР

ОБЩАЯ ФИЗИКА

**ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ
И
МАГНИТНЫЕ
ЯВЛЕНИЯ**

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

А. И. АХИЗЕР

**ОБЩАЯ
ФИЗИКА**

**электрические
и
магнитные
явления**

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1981

УДК 537.1.61

Общая физика. Электрические и магнитные явления: Справочное пособие/А. И. Ахиезер.— Киев: Наук. думка, 1981.—472 с.

Подробно рассмотрены физические явления, связанные с электрическим зарядом, электрическим и магнитным полями. При изложении материала использован лишь самый необходимый математический аппарат, выводы формул предельно упрощены.

Для научных работников, инженеров, преподавателей высших учебных заведений, техникумов, школ, а также студентов физических и технических факультетов.

Ил. 227. Табл. 23. Библиогр. с. 468 (18 назв.)

Ответственный редактор *В. К. Тартаковский*

Рецензент *П. И. Фомин*

Редакция справочной литературы

А $\frac{00001-142}{M221(04)-81}$ 667-81. 1704040000

© Издательство «Наукова думка», 1981

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
-----------------------	---

Глава 1

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 1.1. Закон Кулона	11
§ 1.2. Напряженность электрического поля	12
§ 1.3. Электростатический потенциал	14
§ 1.4. Теорема Гаусса	17
§ 1.5. Электрический диполь	22
§ 1.6. Уравнение Пуассона	24
§ 1.7. Экранированное кулоновское поле	26
§ 1.8. Плазменные колебания	31

Глава 2

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ

§ 2.1. Проводники и диэлектрики	33
§ 2.2. Особенности поля заряженного проводника	34
§ 2.3. Электростатическая индукция	37
§ 2.4. Метод электрических изображений	43
§ 2.5. Электрическая емкость проводника	46
§ 2.6. Энергия электрического поля	50
§ 2.7. Силы, действующие на проводник в электростатическом поле	53

Глава 3

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ДИЭЛЕКТРИКОВ

§ 3.1. Напряженность электрического поля и электрическая индукция	57
§ 3.2. Конденсатор, заполненный диэлектриком	59

§ 3.3.	Диэлектрик в однородном электрическом поле	63
§ 3.4.	Метод электрических изображений в электростатике диэлектриков	66
§ 3.5.	Полярные и неполярные молекулы	68
§ 3.6.	Вектор поляризации	70
§ 3.7.	Диэлектрическая проницаемость газа	71
§ 3.8.	Диэлектрическая проницаемость плотных газов и жидкостей	74
§ 3.9.	Пондеромоторные силы в диэлектриках	76
§ 3.10.	Диэлектрическая проницаемость кристаллов	79
§ 3.11.	Кристаллы со спонтанной поляризацией	82

Глава 4

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 4.1.	Вектор плотности тока	88
§ 4.2.	Закон Ома	91
§ 4.3.	Преломление токовых линий	95
§ 4.4.	Линейная электрическая цепь	96
§ 4.5.	Правила Кирхгофа	102
§ 4.6.	Распределение тока в массивных проводниках	105
§ 4.7.	Джоулево тепло	109

Глава 5

МЕТАЛЛЫ

§ 5.1.	Вырожденный газ электронов	113
§ 5.2.	Распределение Ферми	117
§ 5.3.	Металлы и диэлектрики	121
§ 5.4.	Термоэлектронная эмиссия	123
§ 5.5.	Контактная разность потенциалов	126
§ 5.6.	Формула Друде	128
§ 5.7.	Кинетическое уравнение для электронов	131
§ 5.8.	Электропроводность металлов	137
§ 5.9.	Теплопроводность металлов	141
§ 5.10.	Электропроводность полупроводников	145
§ 5.11.	Термоэлектрические явления	147
§ 5.12.	Сверхпроводимость	150
§ 5.13.	Некристаллические металлы, диэлектрики и полупроводники	152

Глава 6
ПРОХОЖДЕНИЕ ТОКА ЧЕРЕЗ ЭЛЕКТРОЛИТЫ

§ 6.1.	Сильные и слабые электролиты	155
§ 6.2.	Степень диссоциации	156
§ 6.3.	Электролиз	161
§ 6.4.	Электропроводность растворов электролитов	163
§ 6.5.	Гальванические элементы	166

Глава 7
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РАЗРЯД В ГАЗАХ

§ 7.1.	Движение заряженной частицы в электрическом поле	170
§ 7.2.	Влияние объемного заряда на силу тока	173
§ 7.3.	Температура заряженных частиц	178
§ 7.4.	Диффузия заряженных частиц	181
§ 7.5.	Ионизация и рекомбинация в газе	185
§ 7.6.	Самостоятельный разряд	190

Глава 8
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 8.1.	Сила Лоренца	197
§ 8.2.	Движение заряженной частицы в магнитном поле	199
§ 8.3.	Движение заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях	201
§ 8.4.	Закон полного тока	202
§ 8.5.	Дифференциальная форма закона полного тока. Закон Био—Савара	204
§ 8.6.	Поле кругового тока. Магнитный момент тока	209
§ 8.7.	Движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле	214
§ 8.8.	Магнитные ловушки	217
§ 8.9.	Электродинамическое взаимодействие токов	224
§ 8.10.	Магнитный поток и потенциальная функция тока в магнитном поле	226
§ 8.11.	Коэффициенты индуктивности	229

Глава 9
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 9.1.	Закон Фарадея	235
§ 9.2.	Относительность электрического и магнитного полей	238
§ 9.3.	Индукционные генераторы тока	241

§ 9.4.	Униполярная индукция	246
§ 9.5.	Электрические двигатели	247
§ 9.6.	ЭДС взаимной индукции и самоиндукции. Магнитная энергия токов	250
§ 9.7.	Бетатрон	254

Глава 10

ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ

§ 10.1.	Индуктивность в цепи переменного тока	257
§ 10.2.	Емкость в цепи переменного тока	263
§ 10.3.	Индуктивность и емкость в цепи переменного тока	268
§ 10.4.	Колебательный контур	272
§ 10.5.	Ламповый генератор	276
§ 10.6.	Электромагнитные флуктуации	284
§ 10.7.	Длинные линии	288
§ 10.8.	Стоячие волны вдоль длинных линий	294
§ 10.9.	Электрические фильтры	298

Глава 11

ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 11.1.	Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме	302
§ 11.2.	Ток смещения	303
§ 11.3.	Свободное электромагнитное поле в вакууме	306
§ 11.4.	Энергия и количество движения электромагнитного поля в вакууме	309
§ 11.5.	Усредненные микроскопические поля в веществе	313
§ 11.6.	Поляризационный ток и ток намагничения	316
§ 11.7.	Уравнения Максвелла для макроскопических полей в веществе	319
§ 11.8.	Баланс энергии в среде при наличии электромагнитного поля	323
§ 11.9.	Системы электромагнитных единиц	327

Глава 12

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 12.1.	Магнитная проницаемость	331
§ 12.2.	Магнетик в однородном магнитном поле	337
§ 12.3.	Парамагнитная восприимчивость газа	340
§ 12.4.	Парамагнетизм вырожденного электронного газа	345
§ 12.5.	Ларморова прецессия	347

§ 12.6.	Диамагнитная восприимчивость идеального газа	350
§ 12.7.	Магнитокалорический эффект и магнитострикция	352
§ 12.8.	Магнитный метод охлаждения	355
§ 12.9.	Силы, действующие на магнетик в магнитном поле	357
§ 12.10.	Магнитогидродинамическое течение	358
§ 12.11.	Магнитозвуковые и альвеновская волны	361
§ 12.12.	Гальваномагнитные явления в металлах	364
§ 12.13.	Термомагнитные явления в металлах	368

Г л а в а 13

ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

§ 13.1.	Характерные особенности ферромагнетиков	371
§ 13.2.	Природа ферромагнетизма	374
§ 13.3.	Гипотеза молекулярного поля Вейсса	377
§ 13.4.	Ферромагнетизм металлов	380
§ 13.5.	Обменная энергия	383
§ 13.6.	Энергия магнитной анизотропии	385
§ 13.7.	Магнитострикция в ферромагнетиках	386
§ 13.8.	Магнитная энергия ферромагнетика	388
§ 13.9.	Доменная структура ферромагнетиков	389
§ 13.10.	Кривая намагничения ферромагнетика	394
§ 13.11.	Спиновые волны	397

Г л а в а 14

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

§ 14.1.	Диамагнетизм сверхпроводников	402
§ 14.2.	Термодинамика сверхпроводника	404
§ 14.3.	Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник	406
§ 14.4.	Сверхпроводники двух родов	409
§ 14.5.	Промежуточное состояние	413
§ 14.6.	Вихревые нити	416
	Приложение 1	420
Сводка	основных формул	420
	Приложение 2	449
	Фундаментальные физические константы	449
	Удельное сопротивление металлов и сплавов (при 20° С)	449
	Удельное сопротивление электролитов для различных концентраций ρ' (при 18° С)	450
	Диэлектрическая проницаемость (при 20° С)	450

Электрохимические эквиваленты	451
Термоэлектродвижущая сила некоторых пар металлов	451
ЭДС гальванических элементов	452
Абсолютные нормальные потенциалы металлов	453
Работа ионизации	453
Подвижность ионов в водных растворах (при 18° С)	453
Подвижность электронов в металлах, см ² /с · В	453
Подвижность ионов в газах, см ² /с · В (при 760 мм рт. ст. и 20° С)	454
Свойства полупроводников	454
Магнитная проницаемость парамагнетиков и диамагнетиков	455
Удельная магнитная восприимчивость ($\chi_p = \chi/\rho$) некоторых пара- и диамагнитных веществ (при 25° С)	455
Температура перехода металлов, соединений и сплавов в сверх- проводящее состояние	455
Температура Кюри ферромагнитных металлов, соединений и сплавов	456
Коэффициент Холла для металлов и сплавов при различных температурах	456
Коэффициент Пельтье для различных металлов	457
Коэффициент Томсона для металлов и сплавов	458
Значения констант в уравнениях Максвелла	458
Уравнения Максвелла и сила Лоренца в разных системах	459
Основные величины и единицы их измерения в системе СИ	460
Стандартный одновалентный металл (по Пиппарду)	462
Приложение 3	463
Хронология открытий в области электромагнетизма	463
Список использованной литературы	468
Предметный указатель	469

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга посвящена физике электрических и магнитных явлений как в вакууме, так и в материальных средах. За рамками книги остаются только электромагнитные волны — разъясняется сама возможность их существования, так как огромный материал, относящийся к электромагнитным волнам в вакууме и средах, в том числе оптика, требует отдельного издания.

При написании книги автор ставил перед собой две задачи: во-первых, по возможности просто и ясно изложить основы учения об электромагнетизме, и, во-вторых, охватить как можно более широкий круг электромагнитных явлений, т. е. создать своеобразную энциклопедию электромагнетизма. Первая задача означала, что изложение должно вестись на уровне общей физики, т. е. не должно содержать ни тонкостей теоретического аппарата, ни подробностей физического эксперимента. В соответствии с этим требованием физические закономерности разъясняются без излишних математических и экспериментальных деталей: раскрывается только принципиальная, а не методическая сторона вопроса; идеи излагаются достаточно детально, но при этом используется только самый необходимый математический аппарат.

Достигнутая в результате краткость изложения помогла решению второй задачи: охвату как можно более широкого круга электромагнитных явлений. При этом пришлось использовать понятия и результаты, не относящиеся непосредственно к классической теории электромагнетизма. В основном это касается электромагнитных явлений в веществе, связанных с атомной структурой материи. При их рассмотрении используются представления квантовой теории, лежащей в основе динамики атома: о разделении фазового пространства на элементарные ячейки определенной величины, необходимом при построении квантовых статистик; о квантовании орбитального момента количества движения; о спиновом моменте. На основе этих представлений и принципа Паули излагаются электронная теория металла и теория пара- и ферромагнетизма.

Полное рассмотрение электромагнитных явлений невозможно в отрыве от приложений электромагнетизма, и в первую очередь от приложения закона электромагнитной индукции. Поэтому в книге излагаются теория переменных токов, теория длинных линий и электрических фильтров, теория лампового генератора.

В соответствии с указанными задачами производились отбор и расстановка материала. Главы 1—7 посвящены электрическому заряду и электрическому полю. Книга начинается с рассмотрения электрического поля в вакууме, включающего помимо обычно излагаемых вопросов экранированное кулоновское поле и плазменные колебания. Далее следует электростатика проводников и диэлектриков: разъясняется различие между полярными и неполярными молекулами; рассматриваются диэлектрические свойства разреженных газов, плотных газов и жидкостей, обычных кристаллов и кристаллов со спонтанной поляризацией. После изложе-

ния закономерностей постоянного тока выясняются свойства вырожденного Ферми-газа и приводится теория электропроводности металлов. Рассматриваются термоэлектронная эмиссия, теплопроводность металлов, термоэлектрические явления, проводимость полупроводников, разъясняется механизм сверхпроводимости. Излагаются основные факты, касающиеся прохождения тока через электролиты и ионизованные газы; формулируются законы электролиза, определяется электропроводность растворов, разъясняется работа гальванических элементов, влияние объемного заряда на силу тока в диоде; вводится понятие температуры заряженных частиц и описываются их диффузия и возникновение самостоятельного электрического разряда в газах.

В гл. 8 вводится с помощью силы Лоренца магнитное поле. Формулируются законы полного тока и Био—Савара, рассматривается движение заряда в однородном и неоднородном полях, разъясняется принцип действия магнитных ловушек и электродинамическое взаимодействие токов. При изложении закона индукции Фарадея выясняются относительный характер электрического и магнитного полей и зависимость их от системы отсчета; описываются униполярная индукция, принцип действия бетатрона, устройство индукционных генераторов и двигателей. Приводятся уравнения Максвелла для полей в вакууме и для полей в материальных средах. На основе законов электромагнетизма, сформулированных в виде уравнений Максвелла, рассматриваются магнитные свойства вещества. Разъясняется физика пара- и диамагнетизма, описываются эффект Холла и изменение сопротивления металлов в магнитном поле, молекулярный механизм ферромагнетизма и теория доменной структуры ферромагнетиков, магнитные свойства сверхпроводников.

В книге описаны многие факты и закономерности в области электромагнетизма, установленные сравнительно недавно: ферромагнетизм металлов, спиновые волны, понятие о сверхпроводниках первого и второго рода, вихревые нити в сверхпроводниках, электромагнитные флуктуации, теория жидких металлов и некристаллических проводников.

Таким образом, книга представляет собой современный обзор электромагнетизма, написанный на уровне общей физики. Автор надеется написать такие же обзоры по механике и молекулярной физике, оптике и электромагнитным волнам (включая физику пространства — времени), атомной физике, физике атомного ядра и элементарных частиц. По объему материала, охватывающего практически все разделы электромагнетизма, и характеру изложения этот обзор может служить справочным пособием для широкого круга читателей. В приложениях приведены сводка основных формул, таблицы физических констант, а также хронология открытий в области электромагнитных явлений. При написании книги использованы монографии и обзоры, которые можно рекомендовать читателю для более подробного ознакомления с тем или иным вопросом по данной теме. Их список помещен в конце книги.

Автор выражает глубокую благодарность И. А. Ахизеру и А. М. Ермолаеву за помощь, оказанную при работе над рукописью, а также В. П. Бараннику, Л. Н. Давыдову, А. П. Рекало, Ю. П. Степановскому, А. А. Яценко за помощь при составлении приложений и участие в подготовке рукописи к печати.

АВТОР

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 1.1. ЗАКОН КУЛОНА

В природе известно несколько типов фундаментальных взаимодействий между элементами материи. К числу этих взаимодействий наряду с гравитационным относится электрическое взаимодействие. В отличие от гравитационного взаимодействия, которому подвержена вся материя в целом, электрическое взаимодействие не является столь универсальным — ему подвержены лишь тела, обладающие электрическими зарядами (эти тела мы будем называть заряженными). Кроме того, гравитационное взаимодействие всегда приводит к притяжению, которое, если не рассматривать геометрических факторов, зависит лишь от массы тел; электрическое взаимодействие может приводить и к притяжению, и к отталкиванию. Это значит, что электрические заряды бывают двух родов и их можно просто различать по знаку: тела, заряженные электричеством одного знака, отталкиваются, а тела, заряженные электричеством разных знаков, притягиваются.

Простейший вид сила электрического взаимодействия имеет в том случае, когда заряженные тела неподвижны и находятся в вакууме. Если при этом размеры тел малы по сравнению с расстояниями между ними, то сила взаимодействия между двумя телами определяется только зарядами тел и расстоянием между ними. Она направлена вдоль линии, соединяющей тела, и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Математически силу взаимодействия между двумя телами можно записать в виде $F = C \frac{e_1 e_2}{r^2}$, где e_1 и e_2 — заряды тел; r — расстояние между телами; C — константа, зависящая от выбора единицы заряда. Этой формулой выражается закон Кулона — основной закон электрического взаимодействия*.

Единицу заряда выбираем таким образом, чтобы константа C равнялась единице. Тогда закон Кулона приобретает вид

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Из приведенной формулы видно, что электрический заряд имеет размерность

$$[e] = L^{3/2} T^{-1} M^{1/2},$$

* Открыт Кэвендишем в 1771—1779 гг. и переоткрыт Кулоном в 1786—1789 гг.

т. е. единицей заряда является $1 \text{ см}^{3/2} \text{ с}^{-1} \text{ Г}^{1/2}$. Эта единица заряда называется единицей СГСЕ, а система единиц с такой единицей заряда — системой СГСЕ. Единица СГСЕ очень мала, поэтому на практике пользуются большей единицей — кулоном (Кл):

$$1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЕ заряда.}$$

Закон Кулона можно записать также в векторной форме. Если r — расстояние между зарядами e_1 и e_2 , n — единичный вектор, направленный от e_1 к e_2 , то сила F_1 , действующая на заряд e_1 со стороны заряда e_2 , может быть представлена в виде

$$F_1 = n \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Электрический заряд обладает замечательным свойством — он не может самопроизвольно появляться или исчезать. Иными словами, суммарный электрический заряд замкнутой системы тел, равный сумме (алгебраической) зарядов тел, входящих в состав системы, не может измениться со временем. Этот закон называется законом сохранения электрического заряда и представляет собой один из важнейших законов природы. Так, в процессе электризации трением заряд переходит от одного тела к другому. При этом трущиеся тела заряжаются разноименными зарядами, всегда равными по абсолютной величине. Закон сохранения заряда действует и в мире элементарных частиц. Например, при столкновениях атомных ядер могут рождаться электроны, но вместе с каждым электроном рождается позитрон — элементарная частица, отличающаяся от электрона только знаком заряда.

Так как все тела построены из атомов, состоящих из электронов и ядер, и ядра делятся на протоны и нейтроны, причем заряд протона отличается от заряда электрона только знаком, а нейтрон не обладает зарядом, то из закона сохранения заряда следует, что заряд любого тела кратен заряду электрона или протона. Абсолютное значение заряда электрона следующее:

$$e = 4,80298 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЕ} = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Заряды всех известных заряженных элементарных частиц по величине не отличаются от e , так что e можно рассматривать как элементарный заряд. Мы не знаем ни одной частицы, заряд которой был бы дробной частью e . Это — одно из замечательных явлений природы.

§ 1.2. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Между заряженными телами действуют электрические силы, следовательно, заряженное тело создает вокруг себя некоторое силовое поле. Это поле называется электрическим.

Чтобы характеризовать электрическое поле, создаваемое одним или несколькими заряженными телами, внесем в поле маленькое заряженное тело, несущее малый электрический заряд. Такое тело — оно называется пробным зарядом — практически не будет искажать поля, и поэтому по силе, испытываемой пробным зарядом, можно судить о поле, создаваемом заряженным телом (или

совокупностью заряженных тел). Если q — величина пробного заряда, то испытываемая им сила

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E},$$

где вектор \mathbf{E} не зависит от q , а определяется только заряженными телами и местом, в которое внесен пробный заряд. Этот вектор, изменяющийся в общем от точки к точке, называется напряженностью электрического поля, создаваемого заряженными телами. Из приведенного определения следует, что напряженность поля (ее часто называют просто полем) — это сила, испытываемая единичным пробным зарядом. Напряженность поля имеет размерность

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = L^{-1/2}T^{-1}M^{1/2}.$$

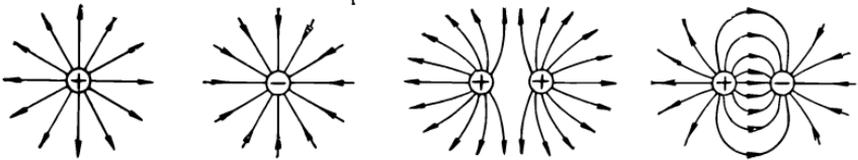


Рис. 1.1

Перемещая пробный заряд, можно установить структуру всего электрического поля. Наглядным и удобным оказывается графический метод описания поля — с помощью так называемых электрических силовых линий. Силовая линия — это линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление, совпадающее с направлением поля. На рис. 1.1 изображены электрические силовые линии в четырех простейших случаях — одного точечного заряда (обоих знаков) и двух точечных зарядов (одноименных и разноименных). Силовые линии всегда начинаются на положительных зарядах и кончатся на отрицательных зарядах или на бесконечности. Если в какой-либо точке нет электрического заряда, то через эту точку проходит только одна силовая линия. Таким образом, силовые линии пересекаются только в тех точках, где находятся электрические заряды.

Электрическое поле обладает замечательным свойством — оно подчиняется принципу суперпозиции. Этот принцип состоит в том, что электрическое поле \mathbf{E} , создаваемое совокупностью заряженных тел, равно сумме (геометрической) полей $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$, создаваемых каждым из тел в отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$$

Принцип суперпозиции сводит определение поля заряженного тела сложной формы (или ряда тел) к вычислению суммы полей, порождаемых каждым бесконечно малым элементом тела. Следовательно, нужно знать лишь поле, создаваемое точечным зарядом. Но его можно найти с помощью закона Кулона: на расстоянии r от заряда e

$$\mathbf{E} = \mathbf{n} \frac{e}{r^2},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, проведенный из точки, в которой находится заряд e , в точку, в которой находится пробный заряд.

§ 1.3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Электрическое поле неподвижных и не изменяющихся со временем электрических зарядов обладает важным свойством — оно является потенциальным. Это значит, что работа сил такого поля (оно называется электростатическим) при перемещении пробного электрического заряда по произвольному замкнутому контуру равна нулю. Чтобы убедиться в справедливости данного утверждения, рассмотрим сперва простейший случай — поле, создаваемое одним точечным зарядом e . Переместим в этом поле пробный заряд q из точки a в бесконечно близкую точку a' (рис. 1.2). Работа силы \mathbf{F} на перемещении $d\mathbf{l}$ определяется формулой

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{l}$$

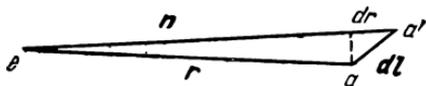


Рис. 1.2



Рис. 1.3

Подставляя сюда

$$\mathbf{F} = \mathbf{n} \frac{eq}{r^2}$$

и замечая, что $n dl = dr$, получаем

$$dA = \frac{eq}{r^2} dr = -d\left(\frac{eq}{r}\right).$$

Таким образом, работа электрической силы не зависит от угла между векторами \mathbf{n} и $d\mathbf{l}$ и равна взятому с обратным знаком дифференциалу функции eq/r .

Пусть теперь заряд q перемещается по произвольному пути из точки a в точку b (рис. 1.3). Чтобы найти работу $A_{a \rightarrow b}$ сил электрического поля вдоль этого пути, разобьем путь на малые участки, определим работу на каждом участке и сложим все элементарные работы. В результате находим

$$A_{a \rightarrow b} = - \int_{r=r_a}^{r=r_b} d\left(\frac{eq}{r}\right) = \frac{eq}{r_a} - \frac{eq}{r_b},$$

или

$$A_{a \rightarrow b} = U_a - U_b,$$

где

$$U = q\varphi; \quad \varphi = \frac{e}{r}.$$

Таким образом, работа $A_{a \rightarrow b}$ равна разности значений некоторой функции U в начальной и конечной точках пути и не зависит от

вида пути. Эта функция представляет собой потенциальную энергию пробного заряда q в поле, создаваемом зарядом e . Она равна произведению пробного заряда q на величину $\varphi = \frac{e}{r}$, которая называется потенциалом поля. Потенциал определяется зарядом e , создающим поле, и расстоянием между зарядами e и q .

Используя принцип суперпозиции электрического поля, можно обобщить этот результат на случай произвольного числа зарядов. Пусть электростатическое поле создается совокупностью зарядов e_1, e_2, \dots . Тогда потенциальная энергия пробного заряда q в поле этих зарядов будет по-прежнему выражаться формулой $U = q\varphi$, где φ — потенциал поля в месте нахождения заряда q , равный сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \dots$$

(r_i — расстояние между зарядами e_i и q).

Итак, работа сил электрического поля при перемещении в нем пробного заряда q из точки a в точку b не зависит от формы пути и определяется только разностью значений потенциальной энергии заряда q в начале и конце пути:

$$A_{a \rightarrow b} = U_a - U_b,$$

или

$$A_{a \rightarrow b} = q(\varphi_a - \varphi_b).$$

Величину $U = \frac{eq}{r}$ можно рассматривать не только как потенциальную энергию пробного заряда q в поле, создаваемом зарядом e , но и как взаимную потенциальную энергию двух равноправных зарядов e и q , находящихся на расстоянии r друг от друга. Пользуясь такой интерпретацией U , можно найти общую потенциальную энергию произвольной системы точечных зарядов e_1, e_2, \dots . Эта энергия (обозначим ее через W) равна сумме взаимных потенциальных энергий каждой из пар зарядов, т. е. работа сил электрического поля при перенесении пробного заряда q из точки a в точку b равна произведению заряда q на разность потенциалов поля φ_a и φ_b в начале и конце пути.

Заметим, что потенциал φ , так же как и потенциальная энергия U , определяется, очевидно, с точностью до произвольной постоянной, которая в приведенном выражении для φ выбрана равной нулю.

Мы видим, что для замкнутого пути работа сил электростатического поля равна нулю, т. е. электростатическое поле является потенциальным. Математически это свойство электростатического поля может быть выражено в виде равенства

$$\oint_L \mathbf{E} dl = 0,$$

где интегрирование совершается вдоль произвольного замкнутого контура L . Интеграл от поля по замкнутому контуру называется

циркуляцией поля по этому контуру. Таким образом, циркуляция электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю. Отсюда легко заключить, что в электростатическом поле не может быть замкнутых силовых линий. Действительно, при перемещении пробного заряда вдоль замкнутой силовой линии мы получили бы отличную от нуля работу сил электрического поля. Это значит, что электростатическое поле могло бы служить бесконечным источником механической работы, и при этом в поле (в силу его статичности) не происходило бы никаких изменений, что невозможно в силу закона сохранения энергии:

$$W = \frac{e_1 e_2}{r_{12}} + \frac{e_1 e_3}{r_{13}} + \frac{e_2 e_3}{r_{23}} + \dots,$$

где r_{ik} — расстояние между зарядами e_i и e_k . Выражение для энергии можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \sum \frac{e_i e_k}{r_{ik}}.$$

Запишем теперь работу силы dA при перемещении dl заряда q в виде $dA = qEdl$. Но $dA = -d(q\phi)$, поэтому

$$Edl = -d\phi.$$

Замечая, что $Edl = E_l dl$, где E_l — проекция поля на направление перемещения, получаем

$$E_l = -\frac{\partial \phi}{\partial l},$$

т. е. проекция напряженности поля на какое-либо направление равна взятой с обратным знаком производной от электростатического потенциала вдоль этого направления. В векторной форме приведенное соотношение записывается в виде

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi.$$

Если потенциал ϕ вдоль какого-либо направления не изменяется, то электрическое поле не имеет составляющей вдоль этого направления. Поэтому если построить эквипотенциальные поверхности, т. е. поверхности равного потенциала, $\phi(x, y, z) = \text{const}$, то силовые линии будут ортогональны к этим поверхностям. Например, для точечного заряда эквипотенциальными поверхностями являются сферические поверхности, в центре которых находится заряд, а силовые линии направлены вдоль радиусов к этим поверхностям.

Электрический потенциал имеет размерность

$$[\phi] = \frac{[U]}{[e]} = L^{1/2} T^{-1} M^{1/2}.$$

Поэтому единица потенциала в системе СГСЕ — $1 \text{ см}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{1/2}$, а в системе СИ — вольт (В), который в 300 раз меньше единицы СГСЕ:

$$1 \text{ В} = \frac{1}{300} \text{ СГСЕ}.$$

При перемещении заряда, равного одному кулону, из одной точки поля в другую, разность потенциалов между которыми равна одному вольту, поле совершает работу, равную одному джоулю:

$$1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 3 \cdot 10^9 \frac{1}{300} \text{ эрг} = 1 \text{ Дж.}$$

§ 1.4. ТЕОРЕМА ГАУССА

При определении электростатического поля заряженных тел поле можно уподобить скорости потока несжимаемой жидкости, заряды же играют роль мощности источников и стоков. Чтобы убедиться в этой аналогии, напомним сперва, что поток жидкости ΔQ через небольшую площадку ΔS равен произведению скорости жидкости v (в месте нахождения площадки) на величину площадки и на косинус угла α между вектором скорости \mathbf{v} и нормалью \mathbf{n} к площадке:

$$\Delta Q = v \Delta S \cos \alpha,$$

или в векторной форме

$$\Delta Q = \mathbf{v} \Delta \mathbf{S},$$

где по определению $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{n} \Delta S$ — вектор площадки. В случае большой и сложной поверхности S (в частности, она может быть и замкнутой) для определения потока жидкости через поверхность S ее следует разбить на элементы dS , определить поток через каждый элемент и сложить элементарные потоки:

$$Q = \int_S \mathbf{v} d\mathbf{S}.$$

Ясно, что если S — замкнутая поверхность и внутри нее находится источник, доставляющий ежесекундно объем жидкости, равный \mathcal{J} , то поток Q (в направлении внешней нормали к S) равен $Q = \mathcal{J}$.

Таким образом, поток несжимаемой жидкости через замкнутую поверхность не зависит ни от формы, ни от величины поверхности, а определяется только мощностью источника потока \mathcal{J} .

Определим теперь поток электрического поля ΔN через площадку ΔS по формуле

$$\Delta N = E \Delta S,$$

аналогичной формуле, определяющей поток жидкости, только вместо скорости жидкости сюда входит напряженность электрического поля E . Для большой и сложной поверхности S (в частности, замкнутой) поток электрического поля вычисляется по формуле

$$N = \int_S E d\mathbf{S}.$$

Определим с помощью этой формулы поток электрического поля, создаваемого точечным зарядом e , через сферическую поверхность

радиуса r , в центре которой находится заряд (рис. 1.4). Так как в этом случае электрическое поле, равное $E = e/r^2$, одинаково во всех точках поверхности сферы и направлено по радиусам сферы, то

$$N = \frac{e}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi e,$$

Мы видим, что поток поля не зависит от радиуса сферы, и в этом отношении поведение электрического поля действительно подобно потоку несжимаемой жидкости, причем заряд, умноженный на 4π , играет роль мощности источника потока. Легко убедиться в том, что полученный результат остается справедливым не только для сферической, но и для любой замкнутой поверхности, окружающей заряд. Преобразуем с этой целью выражение для потока dN

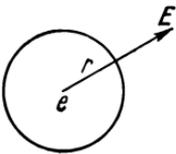


Рис. 1,4

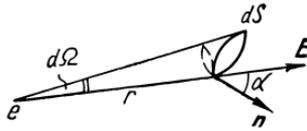


Рис. 1.5

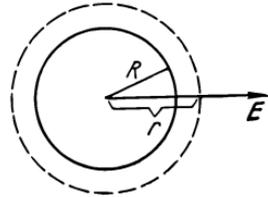


Рис. 1,6

электрического поля, создаваемого точечным зарядом e , через площадку dS , нормаль \mathbf{n} к которой образует угол α с полем \mathbf{E} :

$$dN = \frac{e}{r^2} dS \cos \alpha.$$

Замечая, что (рис. 1.5)

$$dS \cos \alpha = r^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ — телесный угол, под которым из места расположения заряда e видна площадка dS , имеем

$$dN = e d\Omega.$$

Окружим теперь заряд произвольной замкнутой поверхностью. Ей соответствует телесный угол, равный 4π . Поэтому суммарный поток электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен, как и утверждалось, $4\pi e$.

Этот результат можно обобщить на произвольное число как угодно расположенных зарядов e_1, e_2, \dots . Действительно, электрическое поле, создаваемое совокупностью зарядов, равно согласно принципу суперпозиции сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. Поэтому и поток N электрического поля, создаваемого зарядами e_1, e_2, \dots , равен сумме потоков N_1, N_2, \dots , создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$N = N_1 + N_2 + \dots$$

Итак, поток электрического поля через произвольную замкнутую поверхность всегда равен умноженной на 4π сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\oint_S E dS = 4\pi \sum_i e_i.$$

Это общее положение называется теоремой Гаусса.

Используя теорему Гаусса, легко определить поля, создаваемые симметрично заряженными телами. Рассмотрим, например, равномерно заряженный шар. В этом случае из соображений симметрии ясно, что электрическое поле направлено по радиусам и может зависеть только от расстояния до центра шара (рис. 1.6). Поэтому, применяя теорему Гаусса, удобно в качестве замкнутой поверхности выбрать сферическую поверхность, центр которой совпадает с центром заряженного шара. Если радиус этой поверхности равен r , то поток электрического поля через поверхность будет равен $4\pi r^2 E$, где E — напряженность поля. Эту величину следует приравнять $4\pi e_r$, где e_r — заряд внутри поверхности радиуса r :

$$4\pi r^2 E = 4\pi e_r,$$

откуда

$$E = \frac{e_r}{r^2}.$$

Рассмотрим теперь поле вне заряженного шара, т. е. при $r > R$ (R — радиус шара). Тогда под e_r следует понимать заряд шара e . В этом случае получаем

$$E = \frac{e}{r^2}, \quad r \geq R,$$

т. е. поле вне равномерно заряженного шара определяется той же формулой, что и поле точечного заряда, расположенного в центре шара. Поле внутри шара существенно зависит от того, где расположены заряды — на поверхности шара или внутри него. В первом случае $e_r = 0$, поэтому поле внутри шара равно нулю. Во втором случае

$$e_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho,$$

где ρ — объемная плотность заряда, одинаковая, согласно сделанному предположению, во всех местах шара. Подставим это выражение в формулу для поля:

$$E = \frac{e_r}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \rho r, \quad r \leq R,$$

т. е. поле внутри равномерно заряженного (объемно) шара изменяется пропорционально расстоянию до центра шара.

Легко определить также потенциал φ равномерно заряженного шара. Из соображений симметрии ясно, что φ может зависеть только от r , поэтому

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Вне шара потенциал будет определяться, очевидно, той же формулой, что и потенциал точечного заряда:

$$\varphi = \frac{e}{r}, \quad r \geq R$$

(предполагается, что на бесконечном расстоянии от шара потенциал обращается в нуль). Полагая здесь $r = R$, найдем потенциал на поверхности шара:

$$\varphi_R = \frac{e}{R}.$$

Определим далее потенциал внутри заряженного шара. Если шар заряжен поверхностно, то поле внутри него равно нулю, следовательно, потенциал имеет в каждой точке внутри шара одно и то же значение, совпадающее с потенциалом на поверхности φ_R . Если шар заряжен объемом и равномерно, то, используя полученное выражение для поля внутри шара, а также соотношение $d\varphi = -E dr$, находим

$$d\varphi = -\frac{4\pi}{3} \rho r dr,$$

откуда

$$\varphi = -\frac{2\pi}{3} \rho r^2 + C.$$

Здесь C — константа, которую легко найти из следующего условия: при $r = R$ потенциал должен принимать значение, равное e/R . Следовательно, $C = e/R + \frac{2\pi}{3} \rho R^2$, и поэтому потенциал внутри шара вычисляется по формуле

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \rho (R^2 - r^2) + \frac{e}{R}.$$

Определим поле, создаваемое равномерно заряженной плоскостью, которую считаем бесконечной. Из соображений симметрии следует, что поле в этом случае направлено нормально к плоскости и не зависит от координат вдоль плоскости. Для определения поля применим теорему Гаусса, выбрав в качестве замкнутой поверхности поверхность параллелепипеда, две грани которого Σ_1 и Σ_2 параллельны заряженной плоскости и находятся на одинаковом расстоянии от нее (рис. 1.7). Очевидно, поток поля отличен от нуля только через эти две грани, а так как поле повсюду одинаково на этих гранях и направлено перпендикулярно граням,

то поток равен $2ES$, где S — площадь каждой грани. Кроме того, согласно теореме Гаусса поток равен $4\pi\sigma S$, где σ — поверхностная плотность заряда. Приравнивая эти величины, находим

$$E = 2\pi\sigma.$$

Мы видим, что поле не зависит от расстояния до заряженной плоскости. Этот результат связан, очевидно, со сделанным предположением о том, что заряженная плоскость безгранична. Для конечной плоскости поле сильно отличается от предельного значения $2\pi\sigma$ около краев плоскости, но близко к нему вблизи центральной части плоскости.

Зная поле безграничной заряженной плоскости, легко найти ее потенциал. Из соображений симметрии ясно, что он может зави-

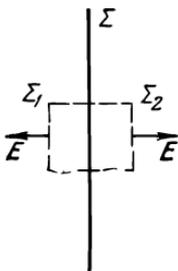


Рис. 1,7

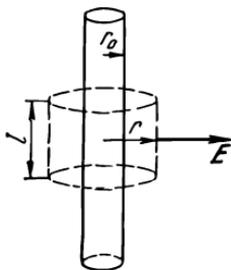


Рис. 1,8

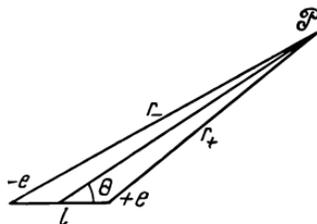


Рис. 1,9

еть только от расстояния до плоскости. Обозначая эту координату через x , имеем

$$E = -\frac{d\varphi}{dx},$$

откуда

$$\varphi = -2\pi\sigma x + \varphi_0,$$

где φ_0 — значение потенциала на самой плоскости.

Применим теорему Гаусса для определения электрического поля, создаваемого бесконечно длинным и однородно заряженным цилиндром кругового сечения (рис. 1.8). Поле в этом случае направлено по радиусам и может зависеть только от расстояния r до оси заряженного цилиндра. Поэтому, выбрав в качестве замкнутой поверхности, фигурирующей в теореме Гаусса, замкнутую поверхность коаксиального цилиндра радиуса r и длины l , можно утверждать, что поток поля через поверхность цилиндра равен $2\pi r l E$ (поток через торцы равен нулю). Кроме того, поток равен $4\pi l \tau$, где τ — заряд, приходящийся на единицу длины заряженного цилиндра. Приравнивая оба выражения, находим

$$E = \frac{2\tau}{r}.$$

С помощью соотношения $E = -d\varphi/dr$, связывающего поле с потенциалом, определяем потенциал поля, создаваемого заряженным цилиндром:

$$\varphi = -2\tau \ln \frac{r}{r_0} + \varphi_0,$$

где r_0 — радиус цилиндра; φ_0 — потенциал на поверхности цилиндра.

§ 15. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

Определим потенциал, создаваемый электрическим диполем, т. е. двумя смещенными друг относительно друга точечными электрическими зарядами, равными по величине и противоположными по знаку. Согласно принципу суперпозиции потенциал диполя в точке \mathcal{P} (рис. 1.9) определяется формулой

$$\varphi_d = \frac{e}{r_+} - \frac{e}{r_-},$$

где e — величина заряда, а r_+ и r_- — расстояния от положительного и отрицательного зарядов до точки \mathcal{P} .

Наибольшее значение для приложений имеет тот случай, когда расстояние от диполя до точки \mathcal{P} велико по сравнению с длиной диполя l , так что r_+ практически совпадает с r_- . В этом случае $r_- - r_+ \approx l \cos \vartheta$, где ϑ — угол между вектором l (направленным от $-e$ к $+e$) и радиус-вектором r , проведенным из центра диполя в точку наблюдения \mathcal{P} . Поэтому при $r \gg l$

$$\varphi_d = el \cos \vartheta / r^2.$$

Произведение заряда e на вектор l , соединяющий заряды, называется дипольным моментом и обозначается через d :

$$d = el.$$

Используя это определение и замечая, что $elr \cos \vartheta = dr$, перепишем выражение для потенциала, создаваемого диполем, в виде

$$\varphi_d = \frac{dr}{r^3}.$$

Найдем теперь поле E_d , создаваемое диполем. Воспользуемся для этого общим соотношением $E = -\text{grad } \varphi$, из которого следует, что

$$E_d = -\text{grad } \varphi_d = -\frac{d}{r^3} + (dr) \frac{3r}{r^5}.$$

Вводя единичный вектор n в направлении r , окончательно получаем

$$E_d = \frac{3n(n \cdot d) - d}{r^3}.$$

Чтобы найти абсолютную величину поля, возведем E_d в квадрат:

$$E_d^2 = \frac{9(\mathbf{nd})^2 + d^2 - 6(\mathbf{nd})(\mathbf{nd})}{r^6},$$

откуда

$$E_d = \frac{d}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}.$$

Мы видим, что поле вдоль направления дипольного момента в два раза больше поля в перпендикулярном направлении (силовые линии поля диполя изображены на рис. 1.1).

Найдем энергию диполя во внешнем электрическом поле. Обозначим потенциал этого поля через $\varphi(r)$. Тогда энергия диполя в поле вычисляется по формуле

$$W_d = e\varphi(\mathbf{r}_+) - e\varphi(\mathbf{r}_-),$$

где \mathbf{r}_+ и \mathbf{r}_- — радиус-векторы зарядов e и $-e$. Если размеры диполя по-прежнему очень малы, так что на расстоянии l внешнее поле \mathbf{E} почти не изменяется, то

$$\varphi(\mathbf{r}_+) - \varphi(\mathbf{r}_-) = (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}$$

($\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}$ — другое обозначение $\text{grad } \varphi$). Но $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- = \mathbf{l}$, а $-\partial \varphi / \partial \mathbf{r} = \mathbf{E}$, поэтому

$$W_d = -d\mathbf{E} = -dE \cos \theta,$$

где θ — угол между векторами \mathbf{d} и \mathbf{E} .

Таким образом, энергия диполя во внешнем поле равна взятому с обратным знаком скалярному произведению дипольного момента на электрическое поле. Эту энергию можно рассматривать как потенциальную энергию диполя. Если поле однородно и диполь жесткий, то единственной величиной, могущей изменяться, будет угол θ , играющий роль координаты, которая определяет ориентацию диполя. Но из механики известно, что взятая с обратным знаком производная от потенциальной энергии по координате представляет собой действующую силу. Если координатой является угловая переменная, то вместо силы получим момент сил. Поэтому на жесткий диполь, помещенный в электрическое поле, действует момент сил

$$K = -\frac{dW_d}{d\theta} = dE \sin \theta,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{K} = [\mathbf{dE}].$$

Эта формула применима и в случае неоднородного поля.

Если имеется два диполя с дипольными моментами \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 , то можно определить их взаимную потенциальную энергию W_{12} . Она равна взятому с обратным знаком скалярному произведению

дипольного момента одного из диполей на поле, создаваемое другим диполем:

$$W_{12} = -d_1 E_2,$$

где

$$E_2 = \frac{3n(nd_2) - d_2}{r^3}$$

(r — расстояние между диполями; n — единичный вектор, проведенный от второго диполя к первому). Таким образом,

$$W_{12} = \frac{d_1 d_2 - 3(nd_1)(nd_2)}{r^3}.$$

Ясно, что

$$W_{12} = W_{21}.$$

§ 1.6. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА

Теорема Гаусса применяется не только для нахождения поля при симметричном расположении зарядов. С ее помощью можно вывести очень важное дифференциальное соотношение, связывающее потенциал в данной точке \mathcal{P} с объемной плотностью зарядов в этой же точке. Чтобы вывести это соотношение, окружим рассматриваемую точку \mathcal{P} произвольной малой замкнутой поверхностью и найдем поток электрического поля ΔN через эту поверхность. Согласно теореме Гаусса

$$\Delta N = 4\pi \bar{\rho} \Delta V,$$

где ΔV — объем, ограниченный поверхностью; $\bar{\rho}$ — средняя плотность электрического заряда внутри объема ΔV . Будем стягивать поверхность к точке \mathcal{P} . Тогда из приведенного соотношения следует, что

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} = 4\pi \rho,$$

где ρ — объемная плотность заряда в точке \mathcal{P} . Величина $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V}$ называется дивергенцией электрического поля в точке и обозначается через $\operatorname{div} \mathbf{E}$. Таким образом,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho.$$

Для $\operatorname{div} \mathbf{E}$ легко записать явное выражение. Пусть, например, электрическое поле направлено вдоль оси x и зависит только от координаты x . Окружим точку \mathcal{P} замкнутой поверхностью, имеющей вид прямоугольного параллелепипеда, в центре которого находится \mathcal{P} и грани которого Σ_1 и Σ_2 , перпендикулярные оси x , отстоят друг от друга на расстоянии Δx (рис. 1.10). Тогда потоки через грани Σ_1 и Σ_2 равны $E(x + \frac{1}{2}\Delta x)\Delta S$ и $-E(x - \frac{1}{2}\Delta x)\Delta S$,

где x — координата точки \mathcal{P} ; ΔS — площадь грани. Следовательно, общий поток через поверхность определяется формулой

$$\Delta N = \left[E \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right) - E \left(x - \frac{1}{2} \Delta x \right) \right] \Delta S,$$

так как поток через остальные грани равен нулю. При маленькой толщине Δx

$$E \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right) - E \left(x - \frac{1}{2} \Delta x \right) \approx \Delta x \frac{dE}{dx},$$

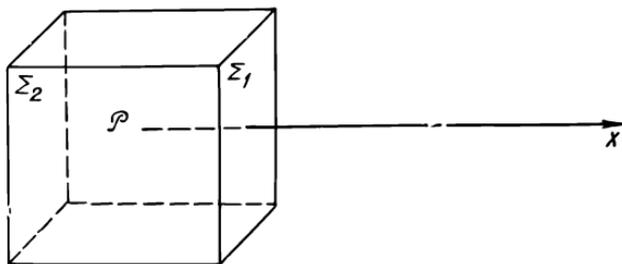


Рис. 1,10

поэтому

$$\Delta N = \frac{dE}{dx} \Delta V,$$

где $\Delta V = \Delta x \Delta S$ — объем параллелепипеда. Отсюда видно, что

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{dE}{dx},$$

а так как $E = -d\varphi/dx$, то

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Согласно теореме Гаусса в дифференциальной форме $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Тогда получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho.$$

Это соотношение, известное под названием уравнения Пуассона, и представляет собой искомое локальное соотношение между потенциалом и плотностью заряда.

Мы получили уравнение Пуассона, предполагая для простоты, что поле направлено вдоль оси x и зависит только от координаты x . Но его легко обобщить и на тот случай, когда поле имеет произвольное направление и зависит от трех декартовых координат x, y, z точки \mathcal{P} . В этом случае

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

где E_x, E_y, E_z — проекции поля \mathbf{E} на оси координат x, y, z .

Поскольку

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

запишем уравнение Пуассона в общем виде:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho,$$

где для сокращения записи использовано обозначение

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(оператор Δ называется оператором Лапласа или лапласианом).

Запишем уравнение Пуассона для случая, когда поле обладает сферической симметрией, т. е. потенциал φ зависит только от расстояния r до некоторой точки O . В этом случае поле E направлено по радиус-векторам, исходящим из O , а величина его связана с φ соотношением

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Поток этого поля через поверхность сферы радиуса r определяется формулой

$$N = 4\pi r^2 E = -4\pi r^2 \frac{d\varphi}{dr}.$$

Разделив приращение потока

$$dN = -d\left(4\pi r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right)$$

на объем бесконечно малого шарового слоя $4\pi r^2 dr$, найдем дивергенцию сферически симметричного поля:

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dN}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right).$$

Таким образом, в случае сферически симметричного поля уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -4\pi\rho.$$

Заметим, что если в некоторой области пространства нет электрических зарядов, то потенциал в этой области удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi = 0.$$

Это уравнение называется уравнением Лапласа.

§ 1.7. ЭКРАНИРОВАННОЕ КУЛОНОВСКОЕ ПОЛЕ

Уравнение Пуассона находит важное применение при определении электрического потенциала в электролите и плазме. Электролитом называется раствор (обычно водный) соли, кислоты или основания, а плазмой — ионизованный (но в целом нейтральный)

газ. Общим между этими физическими объектами является то, что соль (кислота или основание) в растворе в той или иной степени диссоциирует на ионы разных знаков, и поэтому электролит, так же как и плазму, можно рассматривать в целом как нейтральный газ ионов разного знака.

Предположим, что такой газ ограничен с одной стороны плоской стенкой, так что потенциал φ можно считать функцией только одной координаты x — расстояния от стенки. Этот потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho.$$

Очевидно, объемная плотность заряда

$$\rho = \sum_i e_i n_i,$$

где e_i — заряд иона i -го сорта; n_i — число ионов этого сорта в единице объема.

Предположим, что рассматриваемый нами газ ионов находится в состоянии статистического равновесия. В этом случае частицы распределены в пространстве в соответствии с известной формулой Больцмана

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}},$$

где n — плотность частиц; T — температура; k — постоянная Больцмана; U — потенциальная энергия частицы; n_0 — плотность частиц в том месте, где потенциальная энергия равна нулю. Обычно эту формулу применяют в случае, когда поле создается внешними источниками; например, такого типа формула (так называемая барометрическая формула) справедлива для газа, находящегося в заданном гравитационном поле. Но эту формулу можно использовать и тогда, когда поле создается самими частицами. Именно такая ситуация создается для электролита и плазмы. При этом под U нужно понимать потенциальную энергию иона, обусловленную электрическим взаимодействием, $U = e_i\varphi$. Таким образом, плотность ионов i -го сорта в точке x определяется формулой

$$n_i(x) = n_{i0} e^{-\frac{e_i\varphi(x)}{kT}},$$

где n_{i0} — плотность ионов в точке, в которой $\varphi(x) = 0$. Подставляя это выражение в уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi \sum_i e_i n_{i0} e^{-\frac{e_i\varphi(x)}{kT}}.$$

К этому уравнению должно быть присоединено условие нейтральности, означающее, что вдали от стенки, где, как мы скоро убе-

дится, потенциал обращается в нуль, плотность заряда также обращается в нуль, т. е.

$$\sum_i n_{i0} e_i = 0.$$

Данное уравнение Пуассона представляет собой пример самосогласованного уравнения, т. е. определяемый им потенциал φ таков, что соответствующее ему распределение Больцмана для ионов приводит точно к этому же потенциалу.

Обычно электрическая энергия иона $e_i \varphi$ значительно меньше его тепловой энергии kT . Так как $e_i \varphi \sim \frac{e_i^2}{\bar{r}}$, где \bar{r} — среднее расстояние между ионами, равное по порядку величины $n^{-1/3}$ (n — плотность ионов), то условие $e_i \varphi \ll kT$ эквивалентно условию

$$n \ll \left(\frac{kT}{e_i^2} \right)^3.$$

При выполнении этого условия

$$e^{-\frac{e_i \varphi}{kT}} \approx 1 - \frac{e_i \varphi}{kT}.$$

Используя это разложение и учитывая условие нейтральности, перепишем уравнение Пуассона в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \kappa^2 \varphi,$$

где

$$\kappa^2 = \frac{4\pi}{kT} \sum_i e_i^2 n_{i0}.$$

Заметим, что если бы потенциал зависел не от одной, а от трех координат, то самосогласованное уравнение Пуассона имело бы вид

$$\Delta \varphi = \kappa^2 \varphi.$$

Решим полученное одномерное уравнение Пуассона. Общее его решение, как легко проверить, имеет вид

$$\varphi(x) = A e^{-\kappa x} + B e^{\kappa x},$$

где A и B — произвольные константы. Второе из входящих сюда слагаемых неограниченно возрастает с ростом x . Поэтому если электролит или плазма ограничены только с одной стороны (при $x = 0$), то второе слагаемое не имеет смысла и должно быть отброшено, т. е. константа B должна быть положена равной нулю. Константа A имеет при этом, очевидно, смысл потенциала на границе, так что потенциал определяется формулой

$$\varphi(x) = \varphi(0) e^{-\kappa x}.$$

Поле определяется формулой аналогичного вида:

$$E(x) = E(0) e^{-\kappa x}.$$

Мы видим, что потенциал и поле экспоненциально убывают в глубь плазмы или электролита (рис. 1.11). Эффективная глубина проникновения поля определяется величиной, обратной κ , и обозначается через r_D :

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi \sum_i e_i^2 n_{i0}}}.$$

Эту величину называют дебаевским радиусом.

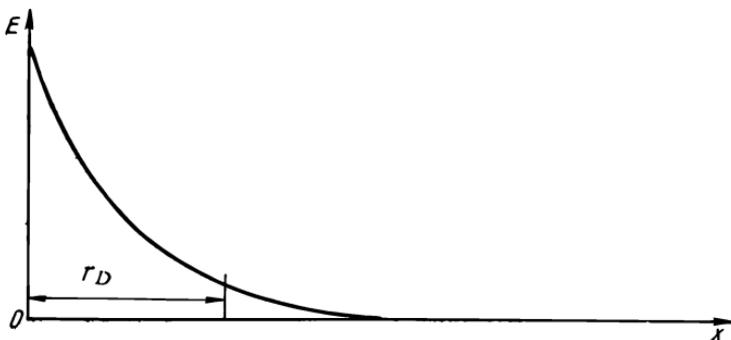


Рис. 1.11

Выше мы предполагали, что $n \ll \left(\frac{kT}{e^2 i}\right)^3$. Легко проверить, что это условие, означающее малость средней энергии взаимодействия соседних ионов по сравнению с тепловой энергией, эквивалентно условию малости среднего расстояния $\bar{r} \sim n^{-1/3}$ между ионами по сравнению с дебаевским радиусом: $\bar{r} \ll r_D$.

Рассмотрим теперь более сложную задачу, а именно определим поле, создаваемое некоторой сторонней заряженной частицей, внесенной в плазму или в электролит. Потенциал, порождаемый этой частицей, также определяется из уравнения $\Delta\varphi = \kappa^2\varphi$, которое вследствие сферической симметрии поля можно согласно результатам § 1.6 представить в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \kappa^2 \varphi.$$

Решение этого уравнения удобно искать в виде

$$\varphi(r) = \frac{\chi(r)}{r},$$

где $\chi(r)$ — некоторая функция r . Замечая, что

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\chi}{r^2} + \frac{\chi'}{r},$$

где $\chi' = d\chi/dr$, имеем

$$\frac{d}{dr}(-\chi + r\chi') = \kappa^2 r\chi,$$

откуда

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = \kappa^2\chi.$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение для φ в одномерном случае. Поэтому

$$\chi = Ae^{-\kappa r}$$

и, следовательно,

$$\varphi = A \frac{e^{-\kappa r}}{r}.$$

Входящая в эту формулу константа A должна определяться из того условия, что в непосредственной близости к стороннему заряду потенциал должен совпадать с потенциалом точечного заряда. Поэтому если q — заряд сторонней частицы, то поле, создаваемое этой частицей, имеет на расстоянии r от нее потенциал

$$\varphi = \frac{q}{r} e^{-\kappa r}.$$

Этот потенциал отличается от кулоновского потенциала точечного заряда q/r экспоненциальным множителем $e^{-\kappa r}$, быстро убывающим с ростом r . Наличие этого множителя показывает, что поле стороннего заряда, внесенного в плазму, действует практически только на дебаевской длине $r_D = 1/\kappa$, а дальше резко падает с расстоянием. Иными словами, в отличие от поля, порождаемого зарядом в вакууме, которое хотя и убывает, но убывает медленно (обратно пропорционально квадрату расстояния) и может рассматриваться как длиннодействующее, поле, порождаемое зарядом в плазме, экспоненциально убывает с расстоянием и поэтому является короткодействующим. Уменьшение потенциала и поля, создаваемого зарядом, который находится в плазме, по сравнению с полем, создаваемым этим же зарядом в вакууме, связано с тем, что заряд в плазме (и в электролите) окружен облаком ионов, которые в целом экранируют действие заряда. Поэтому потенциал $\varphi = q \frac{e^{-\kappa r}}{r}$ называют экранированным кулоновским потенциалом.

Если в плазму внести два заряда q_1 и q_2 , то энергия их взаимодействия определяется формулой

$$U = \frac{q_1 q_2}{r} e^{-\kappa r},$$

где r — расстояние между зарядами. Это взаимодействие также практически распространяется только на расстояние порядка дебаевского радиуса.

Ясно, что эффект экранирования присущ не только сторонней частице, но и любому иону самой плазмы (или электролита). Каждый ион плазмы окружен облаком ионов обоих знаков заряда,

которое экранирует поле, создаваемое этим ионом. Поэтому потенциал, порождаемый каким-либо ионом плазмы с зарядом e_i , на расстоянии r от него определяется формулой

$$\varphi = \frac{e_i}{r} e^{-xr}.$$

«Радиус действия» этого потенциала равен r_D . Значит, средняя энергия электрического взаимодействия, приходящаяся на один ион с зарядом e_i , по порядку величины равна e_i^2/r_D (точнее, равна $e_i^2/2r_D$), а вся энергия электрического взаимодействия плазмы

$$W = \frac{V}{2r_D} \sum_i e_i^2 n_{i0},$$

где V — объем плазмы. Так как эффект экранирования уменьшает электрическое взаимодействие, то эту величину следует отнять от тепловой энергии плазмы $\frac{3}{2} NkT$ (N — общее число ионов плазмы).

Таким образом, с учетом энергии электрического взаимодействия ионов полная энергия плазмы

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} NkT - \frac{V}{2r_D} \sum_i e_i^2 n_{i0}.$$

§ 1.8. ПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

На первый взгляд кажется, что плотность частиц плазмы остается неизменной и постоянно совпадает с самосогласованным значением, определенным в § 1.7. В действительности эта величина

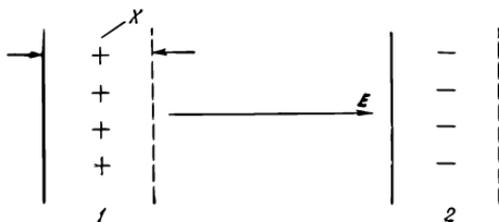


Рис. 1.12

определяет только среднее значение, около которого флуктуирует плотность частиц. Замечательной особенностью флуктуаций является их колебательный характер. Чтобы разъяснить это свойство плазмы, рассмотрим слой плазмы и представим себе, что электроны плазмы сместились относительно ионов вправо на малое расстояние x (рис. 1.12). Тогда в плазме нарушится условие нейтральности и возникнет электрическое поле E (направленное вправо), которое легко определить. Действительно, граничные поверхности

1 и 2 слоя плазмы можно рассматривать как две заряженные плоскости, на которых поверхностные плотности заряда равны соответственно enx и $-enx$, где $-e$ — заряд электрона; n — равновесная плотность электронов. Поля, создаваемые этими плоскостями, равны согласно результатам § 1.4 $2\pi enx$ и $-2\pi enx$. Внутри слоя поля имеют одинаковое направление, так что результирующее поле в слое равно $4\pi enx$, а вне слоя поля направлены в противоположные стороны и взаимно компенсируются. Таким образом, внутри слоя

$$E = 4\pi enx.$$

Это поле действует на электроны, смещение которых породило поле. Сила, испытываемая электроном,

$$f = -eE = -4\pi e^2 nx,$$

направлена в сторону уменьшения x . Ее следует приравнять $m\ddot{x}$, где \ddot{x} — ускорение электрона; m — его масса. В результате получим следующее уравнение движения электрона:

$$m\ddot{x} = -4\pi e^2 nx$$

или

$$\ddot{x} + \omega_p^2 x = 0,$$

где

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}}.$$

Это уравнение представляет собой уравнение осциллятора, т. е. колеблющейся точки. Решение его имеет вид

$$x = A \cos(\omega_p t + \alpha),$$

где A — амплитуда, а α — начальная фаза. Таким образом, электроны совершают гармонические колебания с частотой ω_p . Эта частота называется плазменной частотой или частотой Ленгмюра. Она пропорциональна квадратному корню из плотности электронов.

Амплитуда колебаний A зависит от интенсивности флуктуаций и, если флуктуации носят тепловой характер, определяется температурой плазмы, возрастая с ее повышением. Но плазменные колебания можно возбудить и искусственно: в этом случае их амплитуда определяется внешним источником.

Мы получили незатухающие плазменные колебания, хотя в действительности они затухают благодаря столкновениям электронов и некоторым специфическим плазменным эффектам. Затухание, однако, очень мало, особенно в случае горячей плазмы. Напротив, для электролитов, которые мы трактовали выше так же, как плазму, затухание плазменных колебаний столь велико, что практически они не возникают.

§ 2.1. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ

Хотя в состав всех тел входят одинаковые по своим свойствам элементарные заряженные частицы, различные тела обладают различными электрическими свойствами и по-разному ведут себя во внешнем электрическом поле. Это связано с различным характером движения заряженных частиц в различных телах. В одних телах заряженные частицы под действием внешнего поля могут перемещаться свободно, в других частицы находятся в связанном состоянии и под действием внешнего поля происходит лишь относительно небольшое смещение заряженных частиц. В первом случае тело называется проводником, а во втором — диэлектриком.

К числу проводников относятся все металлы, электронные полупроводники, электролиты и ионизованные газы. Диэлектриками являются дистиллированная вода, сера, фарфор, стекло и другие вещества.

Не следует, однако, полагать, что характер движения заряженных частиц тела, помещенного во внешнее электрическое поле, обусловлен различной степенью связи атомов в проводниках и диэлектриках. В действительности разделение тел на проводники и диэлектрики связано с различной структурой энергетического спектра этих тел, которая определяется законами квантовой, а не классической механики. Мы вернемся к этому вопросу в § 5.3, здесь же примем как данное, что одни тела являются проводниками, а другие — диэлектриками. Рассмотрим такие свойства этих тел, которые не требуют знания деталей структуры энергетического спектра тела.

Выясним прежде всего, к чему приводит движение заряженных частиц тела, помещенного в постоянное внешнее электрическое поле (созданное какими-либо посторонними неподвижными зарядами). Особенно простым является этот вопрос для проводников. В них движение зарядов должно обязательно прекратиться, так как в противном случае проводник, помещенный в электрическое поле, можно было бы использовать для построения вечного двигателя первого рода. Движущиеся заряды совершали бы непрерывно работу, в частности, в проводнике непрерывно выделялось бы тепло, состояние же зарядов, создающих электростатическое поле, не изменялось бы. Так как это невозможно, то движение зарядов должно прекратиться, значит, электрическое поле внутри проводника должно обратиться в нуль. Итак, электростатическое поле внутри проводника равно нулю.

Если внести в электростатическое поле диэлектрик, то в нем поле также уменьшится, но не до нуля, как в случае проводника.

Чтобы понять причину уменьшения поля в диэлектрике, заметим, что отдельные электроны, ядра атомов и молекул диэлектрика создают вокруг себя электрические поля, но эти поля претерпевают столь быстрые изменения во времени и в пространстве, что, накладываясь друг на друга, они в среднем компенсируются (исключение составляют лишь сегнетоэлектрики, которые далее специально рассматриваются). Но такая ситуация существует только в отсутствие внешнего поля. Если же внешнее поле отлично от нуля, то оно вызывает смещение зарядов в атомах и молекулах диэлектрика, молекулы же со смещенными зарядами создают электрические поля, которые уже не компенсируют друг друга.

Молекулу со смещенными зарядами (ее называют поляризованной) можно рассматривать как электрический диполь, дипольный момент которого направлен вдоль внешнего поля E_0 (рис. 2.1).

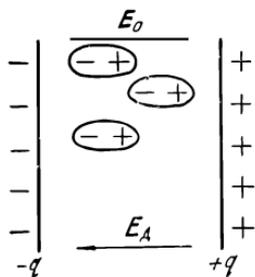


Рис. 2.1

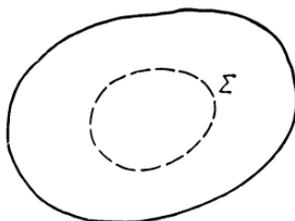


Рис. 2.2

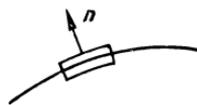


Рис. 2.3

Если взять достаточно малый, но макроскопический объем диэлектрика, то противоположные по знаку заряды соседних диполей будут компенсировать друг друга и действие всех диполей будет таким же, как действие зарядов $-q$ и $+q$ на границах объема. Поле E_d , создаваемое этими зарядами, направлено, как видно из рис. 2.1, против внешнего поля E_0 , так что результирующее поле в диэлектрике $E = E_0 + E_d$ меньше внешнего поля.

Таким образом, уменьшение поля возникает всегда — и в проводниках, и в диэлектриках, но в проводниках уменьшение поля особенно велико — поле обращается в нуль.

§ 2.2. ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДНИКА

В § 2.1 указывалось, что электростатическое поле проводника всегда равно нулю. Отсюда следует, что объемная плотность заряда в проводнике также равна нулю. Действительно, проведем в толще проводника произвольную замкнутую поверхность Σ (рис. 2.2). Так как поле на поверхности Σ равно нулю, то будет равен нулю и поток электрического поля через эту поверхность. Отсюда согласно теореме Гаусса следует, что заряд внутри поверхности равен нулю, а так как поверхность Σ может быть выбрана произвольно, то это значит, что объемная плотность заряда в проводнике равна нулю.

Поэтому если сообщить проводнику некоторый объемный заряд, то элементы его, отталкиваясь друг от друга, уйдут из объема проводника и окажутся на его поверхности. При этом они расположатся таким образом, чтобы поле внутри проводника и тангенциальная составляющая поля E_t на поверхности проводника обращались в нуль:

$$E_t = 0.$$

Действительно, если бы это условие не выполнялось, то происходило бы непрерывное движение зарядов вдоль поверхности, что невозможно ввиду предполагаемой статичности поля. Обращение поля в нуль внутри проводника и условие $E_t = 0$ на его поверхности однозначно определяют распределение заряда на поверхности проводника.

Итак, вне проводника поле должно быть нормально к поверхности проводника. Величину его легко связать с поверхностной плотностью заряда, т. е. зарядом, приходящимся на единицу поверхности проводника. Воспользуемся для этого теоремой Гаусса, выбрав в качестве замкнутой поверхности поверхность цилиндрика, основания которого параллельны поверхности проводника, причем одно из них находится вне проводника, но в непосредственной близости к его поверхности, а другое — внутри проводника (рис. 2.3). Поток электрического поля через внешнее основание цилиндрика отличен от нуля и равен $E_n \Delta S$, где ΔS — площадь основания цилиндрика; E_n — нормальная составляющая поля (так как $E_t = 0$, то E_n либо совпадает с величиной поля, либо отличается от нее только знаком). Если σ — поверхностная плотность заряда, то заряд внутри цилиндрика равен $\sigma \Delta S$, и согласно теореме Гаусса $E_n \Delta S = 4\pi \sigma \Delta S$, откуда

$$E_n = 4\pi \sigma.$$

Если $\sigma > 0$, то и $E_n > 0$, т. е. поле у поверхности проводника направлено вдоль внешней нормали к поверхности; если же $\sigma < 0$, то и $E_n < 0$, т. е. поле направлено вдоль внутренней нормали.

Так как поле и объемная плотность заряда внутри проводника равны нулю, то следует ожидать, что при удалении из внутренней области проводника части вещества поле в возникшей полости по-прежнему будет равно нулю. Чтобы убедиться в этом, предположим противное, а именно что поле внутри полости отлично от нуля. Поскольку внутри толщи проводника, окружающей полость, поле равно нулю, то силовые линии внутри полости должны начинаться и кончаться на внутренней поверхности проводника, причем на концах силовых линий должны находиться поверхностные заряды противоположных знаков. Возьмем теперь какую-либо из таких силовых линий и замкнем ее произвольной линией, лежащей в проводниковой оболочке (рис. 2.4). Циркуляция электрического поля вдоль такого замкнутого контура равна интегралу от напряженности поля вдоль силовой линии:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_b^a \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

а так как $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{l}$, то этот интеграл положителен, тогда как циркуляция электростатического поля вдоль любого замкнутого контура

должна равняться нулю. Отсюда следует, что поле внутри замкнутой полости, окруженной проводником, равно нулю.

Это свойство электростатического поля тесно связано с теоремой Гаусса, которая, в свою очередь, является следствием закона Кулона. Если бы закон Кулона был несправедлив и сила электрического взаимодействия изменялась бы с расстоянием r между зарядами по закону r^{-2+n} , где $n \neq 0$, то поле в полости не равнялось бы нулю. Это обстоятельство позволяет экспериментально путем точного измерения поля в полости оценить верхнюю границу величины n . Она оказывается меньше 10^{-6} .

Как мы видели, поле на поверхности заряженного проводника связано с поверхностной плотностью заряда соотношением $E = 4\pi\sigma$. Это соотношение показывает, что поле сильнее там, где больше поверхностная плотность заряда. Но плотность заряда

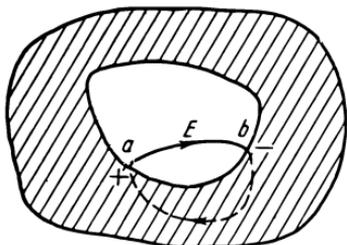


Рис. 2.4

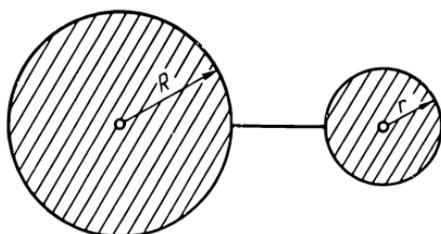


Рис. 2.5

больше в тех местах, где больше кривизна поверхности проводника. Поэтому в данных местах будет сильнее и поле.

Рассмотрим, например, проводник, состоящий из двух сфер разного радиуса, соединенных тонкой проволокой (рис. 2.5). Если бы проволоки не было, то потенциалы сфер

$$\varphi_1 = \frac{e_1}{R}, \quad \varphi_2 = \frac{e_2}{r},$$

где e_1 и e_2 — заряды; R и r — радиусы сфер. Соответственно поля на поверхностях сфер

$$E_1 = \frac{e_1}{R^2} = \frac{\varphi_1}{R}, \quad E_2 = \frac{e_2}{r^2} = \frac{\varphi_2}{r}.$$

Если теперь соединить сферы тонкой проволокой, то это приведет в основном только к выравниванию потенциалов сфер (распределение зарядов на сферах почти не изменится). Но если $\varphi_1 = \varphi_2$, то

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r}{R},$$

т. е. поля обратно пропорциональны радиусам сфер. Поверхностные плотности зарядов $\sigma_1 = e_1/4\pi R^2$ и $\sigma_2 = e_2/4\pi r^2$ также обратно пропорциональны радиусам сфер:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r}{R}.$$

Этот пример показывает, что плотность заряда, а следовательно, и поле особенно велики на острых краях проводников (рис. 2.6).

Мощное электрическое поле, возникающее около металлического острия, используется в ионном микроскопе. В простейшем случае он представляет собой металлическую иглу и флуоресцирующий экран, заключенные в стеклянный сосуд, из которого выкачан воздух (рис. 2.7). Если на иглу (обычно вольфрамовую с диаметром острия порядка 1000 \AA) подать большое отрицательное по отношению к экрану напряжение, то у острия могут возникать поля порядка $4 \cdot 10^7 \text{ В/см}$. Такие поля вырывают из металлической иглы электроны, которые, ускоряясь, достигают флуоресцирующего экрана и вызывают на нем свечение. Так как электроны двигаются по радиусам к флуоресцирующему покрытию, то каждое света-

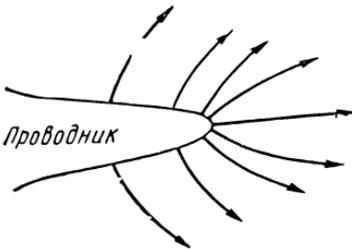


Рис. 2.6

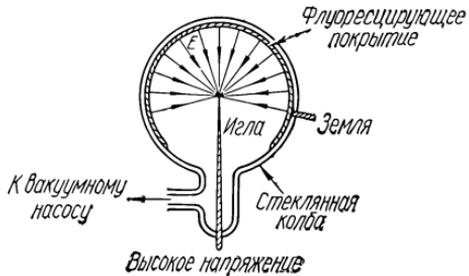


Рис. 2.7

щееся пятнышко на нем соответствует очень небольшой части поверхности острия, испускающей электроны. Иными словами, на флуоресцирующем экране мы получаем изображение поверхности иглы, а точнее, детальную картину испускательной способности поверхности, т. е. мы можем различить положения отдельных атомов на металлическом острие. Таким образом удается «видеть» детали металлической поверхности размером около 10 \AA .

§ 2.3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Выясним, что произойдет, если незаряженный проводник внести в заданное электростатическое поле (созданное какими-либо внешними зарядами).

Мы знаем, что электростатическое поле внутри проводника должно равняться нулю. Но до внесения проводника поле в объеме, занимаемом впоследствии проводником, было отлично от нуля. Следовательно, оно должно обратиться в нуль. Однако источниками электростатического поля являются только электрические заряды. Поэтому на проводнике, внесенном в электростатическое поле, должны возникнуть электрические заряды, поля которых, накладываясь на исходное поле внешних зарядов, должны приводить к полной компенсации поля внутри объема проводника. Это явление — возникновение зарядов на проводнике, внесенном в электростатическое поле, называется электростатической индукцией.

Так как всегда справедлив закон сохранения электрического заряда, то суммарный заряд проводника, возникающий при электростатической индукции, должен равняться нулю. Это значит, что

при электростатической индукции возникают заряды обоих знаков, причем величины их одинаковы.

Рассмотрим, например, поле, создаваемое заряженным шаром, и внесем в него проводник A . До внесения проводника A силовые линии поля имели вид прямых, исходящих из центра шара (рис. 2.8). После внесения проводника A в его объеме поле должно исчезнуть. Это значит, что некоторые из силовых линий, исходящих из e , должны закончиться на поверхности A , а некоторые после разрыва должны начаться на этой поверхности. Но там, где начинаются и кончаются электрические силовые линии, находятся электрические заряды. Таким образом, проводник, внесенный в электростатическое поле, будет заряжаться, причем на близле-

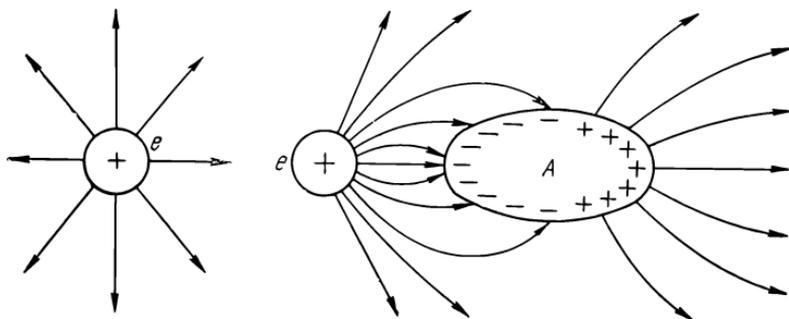


Рис. 2.8

жащей к исходному заряду e части поверхности проводника появятся заряды, противоположные по знаку заряду e , а на более удаленной части поверхности A — заряды того же знака, что и заряд e . Индуцируемые заряды создают свое поле, которое, накладываясь на поле, бывшее до внесения проводника, обращает суммарное поле в объеме A в нуль. Ясно, что добавочное поле изменяет (искажает) поле и вне проводника A . Силовые линии искаженного поля подходят ортогонально к поверхности внесенного проводника, а плотность индуцированного поверхностного заряда σ связана с нормальной составляющей поля E_n известным нам соотношением

$$\sigma = \frac{E_n}{4\pi}.$$

Поле E связано с потенциалом φ соотношением $E = -\text{grad } \varphi$. Поэтому из равенства поля нулю вытекает постоянство потенциала — потенциал имеет одно и то же значение во всех точках проводника, как внутри, так и на его поверхности. Это значит, что поверхность проводника является эквипотенциальной, к которой вне проводника ортогональны силовые линии. Подчеркнем, что эти выводы справедливы независимо от того, вносится ли проводник во внешнее электростатическое поле или поле создается зарядом, сообщаемым проводнику.

Так как объемная плотность заряда в проводнике равна нулю, то потенциал поля, создаваемого заряженными проводниками, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Если необходимо найти потенциал поля, создаваемого проводником, которому сообщен определенный заряд, то выбирают такое решение данного уравнения, которое имеет постоянное значение на поверхности проводника. При этом, поскольку

$$E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

и $E_n = 4\pi\sigma$, суммарный заряд проводника q должен быть связан с φ соотношением

$$q = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS,$$

где интегрирование совершается по поверхности проводника, а dS — элемент этой поверхности. Если проводник находится во внешнем поле, то следует взять то решение уравнения Лапласа, которое вдали от проводника, где нет искажения исходного поля, совпадает с потенциалом этого поля.

Уравнение Лапласа обладает замечательным свойством. Если мы хотим найти его решение в какой-то области пространства, то для этого достаточно знать потенциал в различных точках замкнутой поверхности, окружающей интересующую нас область пространства.

Применим уравнение Лапласа для разъяснения метода электростатической защиты с помощью металлических пластин. Выше мы указывали, что поле внутри заряженного проводника останется равным нулю и при удалении внутренней части материала проводника. Такая же картина наблюдается и при внесении проводника во внешнее поле, создаваемое посторонними зарядами. Поэтому для предохранения каких-либо установок от действия посторонних электростатических полей их необходимо окружить слоем проводника, например замкнутой металлической оболочкой, причем толщина ее может быть произвольной. Действие электростатической защиты связано с тем, что если потенциал имеет одно и то же значение, скажем, равное нулю, на замкнутой поверхности, то уравнение Лапласа для внутренней области, окруженной этой поверхностью, будет также давать значение, равное нулю.

Замкнутая металлическая оболочка может иметь вид сетки. При этом наружное возмущающее поле будет проникать или, если можно так выразиться, «провисать» внутрь объема, ограниченного металлической сеткой, на длину порядка размеров отверстия, т. е. размеров ячейки сетки. Если сетка достаточно густая, то «провисание» поля будет очень малым. Рассмотрим для простоты плоский металлический экран с длинными прорезами одинаковой толщины a , находящимися на равном расстоянии друг от друга (на рис. 2.9 металлические полосы шириной b заштрихованы).

Если бы металлический экран был сплошным и равномерно заряженным, то он создавал бы электрическое поле с напряженностью $2\pi\sigma$ (σ — поверхностная плотность заряда), направленное вдоль оси z сверху от экрана ($z > 0$) и против оси z снизу ($z <$

< 0). Потенциал этого поля имел бы вид $2\pi\sigma |z|$. Что же получится, если в экране сделать прорезы? Тогда потенциал уже не определяется формулой $2\pi\sigma |z|$, а зависит от z и x , причем зависимость эта носит сложный характер. Однако на большом расстоянии от экрана, где роль прорезов не существенна, потенциал должен определяться прежней формулой $-2\pi\sigma |z|$, где σ — константа. Это значит, что решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

можно искать в виде

$$\varphi(x, z) = \chi(x, z) - 2\pi\sigma |z|,$$

где χ — некоторая функция двух переменных, исчезающая при $|z| \rightarrow \infty$. Функция χ должна быть периодической по x с периодом

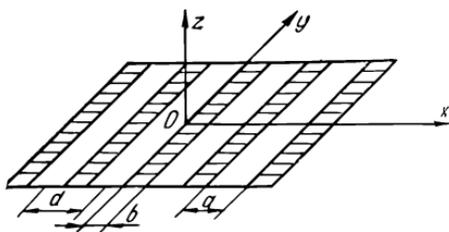


Рис. 2.9

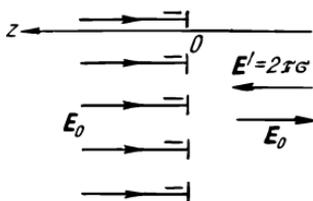


Рис. 2.10

$d = a + b$, равным расстоянию между центрами двух соседних прорезов (см. рис. 2.9). Ясно, что χ , так же как и φ , удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0.$$

Эту функцию можно представить в виде ряда (бесконечного) Фурье:

$$\chi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{d},$$

где коэффициенты Фурье $\Phi_n(z)$ представляют собой некоторые функции z . Зависимость коэффициентов от z можно найти, если потребовать, чтобы каждое слагаемое ряда удовлетворяло уравнению Лапласа. Замечая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos \frac{2\pi n x}{d} = -\left(\frac{2\pi n}{d}\right)^2 \cos \frac{2\pi n x}{d},$$

получаем следующее уравнение для $\Phi_n(z)$:

$$\frac{d^2 \Phi_n}{dz^2} - \left(\frac{2\pi n}{d}\right)^2 \Phi_n = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_n(z) = A_n e^{\pm \frac{2\pi n z}{d}},$$

где A_n — константа. Показатель степени берется со знаком $+$ при $z < 0$ и со знаком $-$ при $z > 0$, чтобы решение обращалось в нуль при $|z| \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\Phi_n(z) = A_n e^{-\frac{2\pi n |z|}{d}}.$$

Таким образом, потенциал, создаваемый заряженным металлическим экраном с прорезами, имеет вид

$$\varphi(x, z) = -2\pi\sigma |z| + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{2\pi n |z|}{d}} \cos \frac{2\pi n x}{d}$$

(слагаемое с $n = 0$ опущено, так как оно не зависит от координат и не влияет на поле).

Коэффициенты A_n находятся из следующих условий. Во-первых, на экране ($z = 0$) в областях, занятых металлом, потенциал должен иметь постоянное значение, например равное нулю. Во-вторых, на прорезах должна обращаться в нуль проекция поля на ось z . Электрическое поле по обе стороны металлического экрана имеет отличающиеся знаком значения, т. е.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z \rightarrow +0} = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z \rightarrow -0}.$$

Но такого разрыва непрерывности поля ($\partial \varphi / \partial z$) не может быть на прорезах в экране, и из соображений симметрии следует считать, что

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

Итак, получаются следующие условия для определения коэффициентов A_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2\pi n x}{d} = 0, \quad \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{d}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2\pi n}{d} A_n \cos \frac{2\pi n x}{d} - 2\pi\sigma = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

Отсюда, в принципе, можно найти коэффициенты A_n : все они будут выражаться через σ — единственный параметр задачи.

Обратим внимание на структуру выражения для потенциала. Отдельные слагаемые суммы быстро убывают с ростом $|z|$. Первое слагаемое уже на расстоянии $d/2\pi$ уменьшается в e раз; n -е слагаемое уменьшается в e раз на расстоянии $d/2\pi n$. Поэтому вдали от

экрана с прорезами на расстояниях, превышающих размер периода d , потенциал имеет такой же вид, как и потенциал сплошного металлического экрана, т. е.

$$\varphi(x, z) \approx -2\pi\sigma |z|, \quad |z| \gg d.$$

Эта формула и разъясняет защитное действие металлического экрана с прорезами или металлической сетки. Действительно, если, например, внести в однородное поле E_0 нейтральный металлический экран с прорезами и заземлить его, то на металлических частях экрана будут индуцироваться заряды с такой плотностью σ , что $E_0 = 2\pi\sigma$ (рис. 2.10). Тогда по одну сторону экрана поле отлично от нуля при любых z и потенциал определяется формулой

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{2\pi n z}{d}} \cos \frac{2\pi n x}{d} + E_0 z, \quad z > 0.$$

По другую сторону экрана при $|z| \rightarrow \infty$ внешнее поле E_0 и поле E зарядов, индуцированных на экране, компенсируют друг друга, так что потенциал будет определяться формулой

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi n z}{d}} \cos \frac{2\pi n x}{d}, \quad z < 0.$$

Мы видим, что поле «проваливается» за экран на глубину порядка d . Этот вывод справедлив и для металлической сетки.

В заключение покажем, как можно приближенно найти коэффициенты A_n . Проинтегрируем условия для определения A_n по x : первое — в пределах $\left(\frac{a}{2}, \frac{d}{2}\right)$, второе — в пределах $\left(0, \frac{a}{2}\right)$. В результате получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d}{2\pi n} \sin \frac{\pi n a}{d} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n a}{d} + \pi\sigma a = 0.$$

Полагаем, что в этих суммах можно сохранить только два первых слагаемых. Тогда

$$A_1 \sin \frac{\pi a}{d} + \frac{1}{2} A_2 \sin \frac{2\pi a}{d} = 0,$$

$$A_1 \sin \frac{\pi a}{d} + A_2 \sin \frac{2\pi a}{d} = -\pi\sigma a,$$

откуда

$$A_1 = \frac{\pi\sigma a}{\sin \frac{\pi a}{d}}, \quad A_2 = -\frac{2\pi\sigma a}{\sin \frac{2\pi a}{d}}.$$

Таким образом, приближенно при $z \gg d$ потенциал экрана с прорезами определяется формулой

$$\varphi(x, z) \approx -2\pi\sigma |z| + \frac{\pi\sigma a}{\sin \frac{\pi a}{d}} e^{-\frac{2\pi|z|}{d}} \cos \frac{2\pi x}{d}.$$

§ 2.4. МЕТОД ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Определение плотности поверхностных зарядов на проводнике, расположенном в электростатическом поле, представляет собой очень сложную задачу математической физики. Но в некоторых простейших случаях, которые мы рассмотрим, решение может быть сразу найдено, исходя из того факта, что заряды располагаются на поверхности проводника вполне определенным образом и, следовательно, задача имеет только одно единственное решение.

Определим сперва поле точечного заряда в присутствии плоской проводящей пластины. Пластину считаем бесконечной и, кроме того, заземленной, вследствие чего индуцированный заряд на обратной стороне пластины уйдет в землю. При таких условиях задача эквивалентна, очевидно, задаче нахождения поля точечного заряда в присутствии проводника, имеющего плоскую границу и занимающего все нижнее полупространство $z < 0$ (на рис. 2.11 заряд, обозначенный через e , расположен на оси z на расстоянии h от проводника). Если бы проводника не было, то в точке A на расстоянии r от заряда e создавался бы потенциал

$$\varphi_e = \frac{e}{r}.$$

Проводник изменяет потенциал, так как на его границе индуцируются заряды. Добавочный потенциал, создаваемый элементом поверхности dS , равен, очевидно, $\sigma dS/r_\sigma$, где σ — плотность поверхностного заряда; r_σ — расстояние от элемента поверхности dS до точки A . Поэтому общее изменение потенциала определяется интегралом

$$\varphi_\sigma = \int \frac{\sigma dS}{r_\sigma},$$

а измененный потенциал — суммой

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_\sigma.$$

Измененный потенциал φ должен удовлетворять условию постоянства на границе проводника $z = 0$, которое является единственным условием для нахождения плотности заряда σ (различной в разных точках граничной поверхности).

Попытаемся теперь найти φ_σ , предполагая, что действие всей заряженной плоскости $z = 0$ при $z > 0$ эквивалентно действию некоторого одного точечного заряда e' , расположенного в нижней полуплоскости. Иными словами, мы предполагаем, что

$$\varphi_\sigma = \frac{e'}{r'},$$

где r' — расстояние от фиктивного заряда e' до точки A . Условие для определения величины фиктивного заряда e' и места его нахождения остается прежним — необходимо, чтобы сумма $\varphi_e + \varphi_{e'}$ была постоянной на границе проводника $z = 0$. Но условие выполняется, если взять $e' = -e$ и поместить фиктивный заряд в точку, являющуюся зеркальным отражением точки нахождения истинного заряда e относительно границы проводника (рис. 2.12). В этом случае

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'}$$

Так как на границе $r' = r$, то потенциал на границе обращается в нуль. Поскольку электростатическая задача имеет одно единствен-

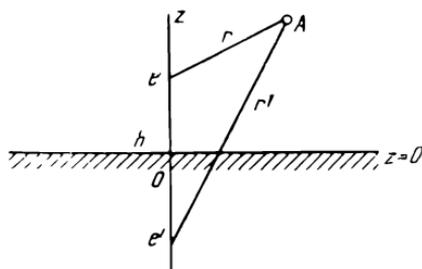


Рис. 2.11

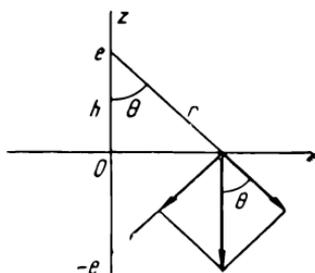


Рис. 2.12

ное решение, найденное нами решение задачи является правильным. Этот метод решения электростатической задачи, в котором действие реальных поверхностно распределенных зарядов заменяется действием некоторых фиктивных точечных зарядов (их может быть несколько в отличие от рассмотренного выше простейшего случая), называется методом электрических изображений.

Определим теперь плотность поверхностных зарядов σ . Найдем с этой целью поле на границе проводника. Согласно принципу суперпозиции это поле можно рассматривать как наложение полей, создаваемых зарядами e и $-e$. Как видно из рис. 2.12, результирующее поле на границе направлено вдоль внутренней нормали к поверхности проводника:

$$E = \frac{2e}{r^2} \cos \theta = \frac{2eh}{r^3}$$

Поскольку $E_n = 4\pi\sigma$, где E_n — проекция поля на направление внешней нормали к проводнику, и учитывая, что поле на границе направлено вдоль внутренней нормали, окончательно находим

$$\sigma = -\frac{eh}{2\pi r^3}$$

Легко убедиться, что полный поверхностный заряд равняется $-e$. Так как поверхностные заряды имеют знак, противоположный заряду e , то они притягивают этот заряд. Иными словами, заряд

e будет притягиваться к проводнику. Сила этого притяжения F равна силе притяжения зарядов e и $-e$, т. е.

$$F = \frac{e^2}{4h^2}.$$

Применим метод электрических изображений к нахождению электростатического поля точечного заряда в присутствии проводящей сферы. Пусть точечный заряд e находится на расстоянии a от центра проводящей сферы радиуса R (рис. 2.13). Тогда на поверхности сферы возникнут индуцированные заряды, причем на более далекой части сферы — того же знака, что и знак заряда e , а на ближней части — противоположного. Благодаря этому про-

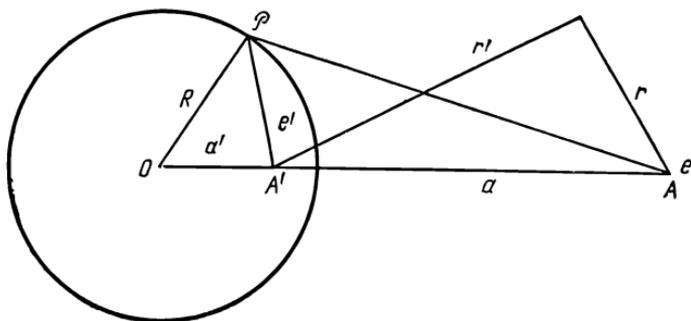


Рис. 2.13

водящая сфера влияет на поле, которое будет отличаться от поля точечного заряда e .

Попытаемся заменить действие поверхностных зарядов фиктивным точечным зарядом e' , расположенным в некоторой точке A' , т. е. полагаем, так же как и в предыдущей задаче, что результирующий потенциал заряда в присутствии сферы определяется формулой

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{e'}{r'},$$

где r' — расстояние от точки наблюдения до заряда e' . Из соображений симметрии следует, что точки A и A' лежат на одной прямой с центром сферы (см рис 2.13). Воспользуемся далее следующим свойством сферы. Если расстояния a и a' от точек A и A' до центра сферы O связаны соотношением

$$aa' = R^2,$$

то отношение расстояний r и r' от произвольной точки \mathcal{P} на поверхности сферы до точек A и A' будет постоянным:

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{R}$$

(точку A' называют зеркальным отражением точки A относительно поверхности сферы). Из этого свойства следует, что если поместить фиктивный заряд

$$e' = -e \frac{R}{a}$$

в точку A' , то получим правильное выражение для потенциала:

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{R}{a} \frac{e}{r'},$$

так как это выражение имеет постоянное значение (равное нулю) на поверхности сферы.

§ 2.5. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ ПРОВОДНИКА

Если сообщить уединенному проводнику некоторый заряд, то он, как мы знаем, распределится по поверхности проводника, причем таким образом, что поверхность проводника станет эквипотенциальной.

Принимаем потенциал, создаваемый зарядом на проводнике, равным нулю на бесконечном расстоянии от проводника. Тогда ясно, что при увеличении заряда проводника вдвое увеличится вдвое потенциал поля, создаваемого проводником, а следовательно, увеличится вдвое потенциал проводника. Таким образом, заряд проводника q пропорционален его потенциалу:

$$q = C\varphi,$$

где C — коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров и формы проводника. Он называется электрической емкостью или просто емкостью проводника.

Электрическая емкость проводника определяет то количество электричества, которое может находиться на проводнике, если потенциал проводника равен единице. Очевидно, емкость имеет размерность длины:

$$[C] = L.$$

Поэтому единицей емкости в системе СГСЕ является 1 см. Если электрический заряд измерять в кулонах, а потенциал в вольтах, то единицей емкости будет фарада (Φ):

$$1\Phi = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{В}}.$$

Ясно, что

$$1\Phi = \frac{3 \cdot 10^9}{\frac{1}{300}} \text{ см} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}.$$

Более мелкими единицами являются микрофарада (мкФ) и пикофарада (пФ):

$$1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \Phi, \quad 1 \text{ пФ} = 10^{-12} \Phi.$$

Если проводник имеет форму шара, то его емкость равна R , где R — радиус шара.

Если приблизить к заряженному проводнику другие проводники (незаряженные), то его потенциал уменьшится (при том же заряде на проводнике), так как на соседних проводниках будут индуцироваться заряды, причем ближе к заряженному проводнику — заряды противоположного знака, а дальше — того же знака. Это уменьшение потенциала заряженного проводника при приближении к нему других незаряженных проводников можно интерпретировать как увеличение емкости заряженного проводника.

Особенно сильно увеличивается емкость проводника, если его окружить заземленным замкнутым проводником. Действительно, в этом случае индуцированные на замкнутом проводнике заряды того же знака, что и заряд внутреннего проводника, уйдут

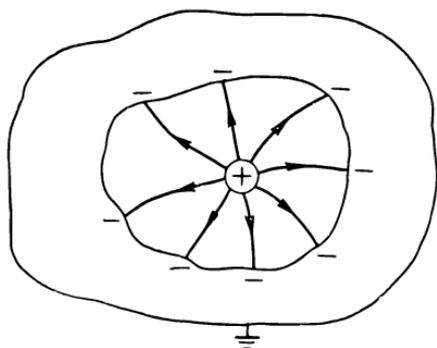


Рис. 2.14

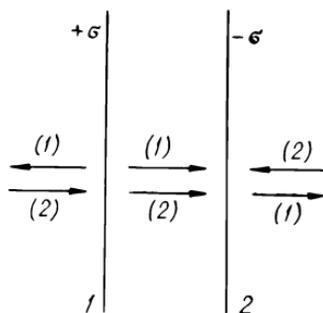


Рис. 2.15

в землю, а общий индуцированный заряд противоположного знака по абсолютной величине равен заряду внутреннего проводника, так как все силовые линии, исходящие из внутреннего проводника, закончатся на окружающем его проводнике (рис. 2.14). Такая совокупность двух проводников называется конденсатором, а отношение заряда внутреннего проводника к его потенциалу (при условии, что потенциал внешнего проводника равен нулю) — емкостью конденсатора.

Поскольку индуцированный на внешнем проводнике заряд только знаком отличается от заряда внутреннего проводника, то можно считать, что оба проводника играют одинаковую роль (они называются обкладками конденсатора), и определить емкость конденсатора C как отношение заряда q на одной из обкладок к разности потенциалов φ_1 и φ_2 обеих обкладок, т. е.

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Простейшим является плоский конденсатор, обкладки которого представляют собой две параллельные проводящие пластинки. Считая их бесконечными, легко найти емкость плоского конденсатора. Напомним, что поле заряженной плоскости равно $2\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность заряда (рис. 2.15); поэтому, когда мы рассматриваем две заряженные плоскости с поверхностными плотностями зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$, то их поля между плоскостями

сложатся, а вне плоскостей — отнимутся (рис. 2.15). В результате внутри конденсатора

$$E = 4\pi\sigma,$$

а снаружи $E = 0$. Этот вывод, конечно, справедлив только в случае очень больших пластин, т. е. пластин, размеры которых значительно больше расстояния между ними.

Умножив поле E на расстояние d между пластинами (см. рис. 2.15), мы найдем разность потенциалов φ_1 и φ_2 обеих обкладок:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = 4\pi\sigma d,$$

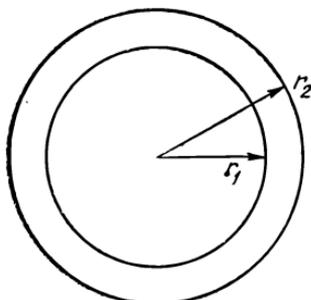


Рис. 2.16

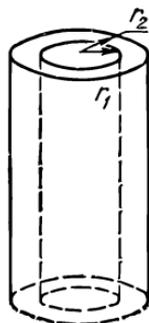


Рис. 2.17

а так как заряд обкладки

$$q = \sigma S,$$

где S — площадь обкладки, то емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{S}{4\pi d}.$$

Легко определить также емкость шарового конденсатора, обкладками которого являются концентрические сферические поверхности (рис. 2.16). Нам известно, что на расстоянии r от центра потенциал заряженного шара

$$\varphi = \frac{q}{r},$$

где q — заряд шара. Поэтому

$$\varphi_1 = \frac{q}{r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{r_2},$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы обеих обкладок; r_1 и r_2 — радиусы обкладок; следовательно, емкость шарового конденсатора

$$C = \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Определим емкость цилиндрического конденсатора, обкладками которого являются коаксиальные цилиндрические поверхности (рис. 2.17). Как показано в § 1.4, потенциал заряженного цилиндра на расстоянии r от оси вычисляется по формуле

$$\varphi = \varphi_1 - 2\tau \ln \frac{r}{r_1},$$

где φ_1 — потенциал внутреннего цилиндра; r_1 — радиус этого цилиндра (τ — заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра). Поэтому потенциал внешнего цилиндра определяется формулой

$$\varphi_2 = \varphi_1 - 2\tau \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Следовательно, емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

где l — длина конденсатора.

На практике часто приходится соединять различные конденсаторы. Наиболее распространенными являются параллельное (рис. 2.18, а) и последовательное (рис. 2.18, б) соединения. Первым пользуются в случае, когда нужно при той же разности потенциалов получить больший заряд, т. е. большую емкость, а вторым — когда нужно получить при том же заряде большую разность

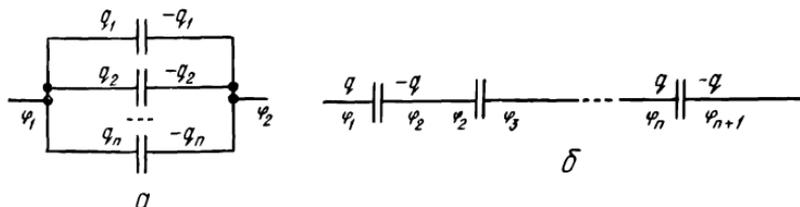


Рис. 2.18

потенциалов, т. е. меньшую емкость. Как видно из рис. 2.18, при параллельном соединении конденсаторов складываются их емкости:

$$C = C_1 + C_2 + \dots,$$

а при последовательном соединении — обратные емкости:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

Действительно, в первом случае все правые обкладки конденсаторов имеют один общий потенциал φ_1 , а все левые обкладки — один общий потенциал φ_2 . Поэтому суммарный заряд правых обкладок $q = q_1 + q_2 + \dots = C_1(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2(\varphi_1 - \varphi_2) + \dots$. Суммарная емкость C определяется как $q/(\varphi_1 - \varphi_2)$; она равна сумме емкостей отдельных конденсаторов. Во втором случае общим для конденса-

торов является заряд. Разности потенциалов на отдельных конденсаторах $\varphi_1 - \varphi_2 = q/C_1$, $\varphi_2 - \varphi_3 = q/C_2$, ... Поэтому суммарная разность потенциалов равна $q/C_1 + q/C_2 + \dots$. Записывая ее в виде q/C , получаем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

§ 2.6. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Заряжая проводник, мы одновременно сообщаем ему некоторый запас энергии. Действительно, каждая новая порция электричества, переносимого на проводник, отталкивается от уже находящегося на проводнике заряда, и для преодоления этой силы отталкивания должна быть совершена работа.

Если на проводник привносится заряд dq' , то совершаемая работа равна, очевидно, энергии dW этого заряда в поле, созданном предыдущими элементами заряда, т. е.

$$dW = dq' \varphi',$$

где φ' — потенциал проводника, который создан зарядами, внесенными до заряда dq' . Согласно результатам § 2.5 $\varphi' = q'/C$, где q' — заряд проводника в момент внесения элемента заряда dq' ; C — емкость проводника. Итак,

$$dW = \frac{q'}{C} dq' = d \frac{q'^2}{2C}.$$

Поэтому если окончательный заряд проводника равен q , то полная работа, производимая при его накоплении,

$$W = \frac{q^2}{2C}.$$

Эта работа переходит в электрическую энергию проводника. Замечая, что

$$q = C\varphi,$$

где φ — потенциал проводника, имеющего заряд q (потенциал на бесконечном расстоянии от проводника считается равным нулю), перепишем выражение для энергии проводника в виде

$$W = \frac{1}{2} C\varphi^2 = \frac{1}{2} q\varphi.$$

Обратим внимание на множитель $1/2$ в последней формуле: если бы потенциал φ создавался посторонними зарядами, а не зарядом q , то энергия заряда q в таком поле равнялась бы $q\varphi$. В случае нескольких проводников с зарядами q_1, q_2, \dots их электрическая энергия определяется суммой

$$W = \frac{1}{2} q_1\varphi_1 + \frac{1}{2} q_2\varphi_2 + \dots,$$

где φ_1, φ_2 — потенциалы проводников, создаваемые всеми зарядами q_1, q_2, \dots . В частности, энергия конденсатора

$$W = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где q — заряд обкладки; φ_1 и φ_2 — потенциалы обеих обкладок. Это выражение можно переписать в виде

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\varphi_1 - \varphi_2)^2,$$

где C — емкость конденсатора.

Рассмотрим подробнее плоский конденсатор. Так как его емкость равна $S/4\pi d$, то энергия этого конденсатора определяется формулой

$$W = 2\pi\sigma^2 Sd,$$

где σ — поверхностная плотность зарядов. Эта формула имеет простой смысл. Поскольку $2\pi\sigma$ представляет собой поле, создаваемое одной из пластин (обкладок), то сила притяжения, испытываемая каждой из пластин со стороны другой пластины, определяется следующим образом:

$$F = 2\pi\sigma q = 2\pi\sigma^2 S.$$

Поэтому

$$W = Fd,$$

т. е. энергия W равна работе, которую нужно затратить, чтобы раздвинуть пластины на расстояние d .

Учитывая, что $E = 4\pi\sigma$, представим энергию конденсатора в следующем виде:

$$W = \frac{1}{2} \sigma EV = \frac{1}{8\pi} E^2 V,$$

где $V = Sd$ — объем конденсатора. Мы видим, что электрическая энергия конденсатора пропорциональна объему, в котором находится электрическое поле. Поэтому можно ввести понятие плотности электрической энергии:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{E^2}{8\pi},$$

которая определяется только напряженностью электрического поля. Это выражение можно интерпретировать таким образом, что электрическая энергия сосредоточена не в зарядах, а в электрическом поле и в каждом элементе объема dV содержится энергия

$$dW = \frac{E^2}{8\pi} dV.$$

Далее мы убедимся в справедливости именно такой интерпретации в самом общем случае как угодно изменяющихся в пространстве

и во времени полей, когда формула $W = \frac{1}{2} q\varphi$, справедливая в электростатике, теряет свой смысл, а формула

$$W = \int \frac{E^2}{8\pi} dV$$

для энергии электрического поля остается справедливой всегда.

Применим эту формулу для определения электрической энергии объемно заряженного шара. Как показано в § 1.4, поле внутри и вне равномерно заряженного шара определяется формулами

$$E = \frac{4\pi}{3} \rho r, \quad r \leq R,$$

$$E = \frac{e}{r^2}, \quad r \geq R,$$

где e и R — заряд и радиус шара; ρ — объемная плотность заряда, равная $e/\frac{4\pi}{3} R^3$. Замечая, что элемент объема в сферических координатах $dV = 4\pi r^2 dr$, получаем следующее выражение для электростатической энергии внутри шара:

$$W_i = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \left(\frac{4\pi}{3} \rho r \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 \rho^2 R^5,$$

или

$$W_i = \frac{1}{10} \frac{e^2}{R}.$$

Аналогично можно вычислить электростатическую энергию вне шара.

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{e^2}{R}$$

(такой же энергией обладает шар, равномерно заряженный по поверхности). Полная энергия объемно заряженного шара

$$W = W_i + W_e = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R}.$$

Эту формулу можно использовать для определения электрической энергии атомного ядра. Если считать ядро равномерно заряженным шаром с зарядом Ze (Z — число протонов, e — заряд протона), то для электрической энергии ядра получаем выражение

$$W = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R},$$

где R — радиус ядра. Электрическая энергия ядра представляет собой, очевидно, энергию электростатических сил отталкивания протонов. Но кроме этих сил между ядерными частицами действуют еще не электрические, а так называемые ядерные силы, интенсив-

ность которых на два порядка превышает интенсивность электрических сил. Эти силы являются силами притяжения, и обусловленная ими энергия значительно превосходит электрическую энергию ядра. Тем не менее электрическая энергия играет существенную роль, особенно в случае тяжелых ядер, когда она делает возможным деление ядер.

В отличие от ядер энергия атомов и молекул имеет в основном электрическое происхождение. Таково же происхождение и энергии кристаллов. В ионном кристалле, в узлах решетки которого находятся попеременно положительные и отрицательные ионы (например, ионы Na^+ и Cl^- в решетке NaCl), электрическая энергия кубической решетки, отнесенная к одной ячейке, записывается в виде

$$W = -\beta \frac{e^2}{a},$$

где a — постоянная решетки; e — элементарный заряд; β — численная константа, равная 10,17 для NaCl и 46,5 для CaF_2 . (Знак минус стоит потому, что ионы на больших расстояниях в целом притягиваются.) К этой энергии, соответствующей силам притяжения, должна быть прибавлена энергия, соответствующая силам отталкивания, действующим на малых расстояниях между ионами. Эти силы также имеют электрическое происхождение и связаны со специфическими (разъясняемыми квантовой механикой) особенностями движения ионов в кристалле. Энергия, обусловленная силами притяжения, составляет примерно $1/9$ электростатической энергии, так что общая энергия ионного кристалла

$$\mathcal{E} = -\frac{8}{9} \beta N \frac{e^2}{a},$$

где N — число элементарных ячеек.

§ 2.7. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПРОВОДНИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В § 2.6 мы показали, что сила притяжения между обкладками плоского конденсатора, отнесенная к единице площади, записывается в виде

$$f = \frac{1}{2} \sigma E = \frac{1}{8\pi} E^2.$$

Это выражение справедливо не только в случае плоского конденсатора; оно является общим. Всегда на проводник, находящийся в электростатическом поле, действуют силы, приложенные к его поверхности, причем сила, приходящаяся на единицу площади, определяется формулой

$$\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi} E^2 \mathbf{n},$$

где E — поле на поверхности проводника; \mathbf{n} — единичный вектор, направленный вдоль внешней нормали к поверхности проводника. Эти силы действуют так, как будто силовые линии представ-

ляют собой натянутые материальные упругие нити, к которым приложено упругое напряжение $E^2/8\pi$. Суммируя силы по всем элементам поверхности, можно найти полную силу, действующую на проводник, а взяв сумму моментов этих сил относительно какой-либо точки, можно найти суммарный вращающий момент сил, действующий на проводник.

Практически удобнее определять силы иначе, а именно исходя из выражения $W = e^2/2 C$ для энергии проводника. Входящая в это выражение емкость проводника C зависит от ряда геометрических параметров ξ_1, ξ_2, \dots , характеризующих форму и размеры проводника и играющих роль координат, которые определяют относительное положение различных элементов проводника. Если предположить, что какой-либо из этих параметров испытал изменение $\delta\xi$, то при этом возникнет некоторая сила f , совершающая работу

$$\delta A = f \delta \xi.$$

При неизменном заряде e проводника эта работа должна равняться соответствующему уменьшению (δW) энергии W :

$$f \delta \xi = -\delta W,$$

откуда

$$f = - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_e,$$

т. е. сила f , соответствующая параметру (или координате) ξ , равна частной производной от электрической энергии проводника по этой координате при неизменном заряде проводника. Подставляя сюда выражение для W , получаем

$$f = \frac{e^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial \xi}.$$

Пусть, в частности, ξ представляет собой объем проводника. Тогда силой, соответствующей V (сопряженной с V), является давление p , действующее изнутри на поверхность проводника. Согласно полученной общей формуле

$$p = \frac{e^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial V},$$

где $\frac{\partial C}{\partial V}$ — частная производная от емкости проводника по объему при неизменной форме проводника. Так как емкость пропорциональна линейным размерам проводника, т. е. $V^{1/3}$, то

$$\frac{\partial C}{\partial V} = \frac{1}{3} \frac{C}{V},$$

и, следовательно,

$$p = \frac{e^2}{6CV}.$$

Под действием давления p происходит деформация проводника, которую называют электрострикцией.

Мы рассмотрели один заряженный проводник, но аналогично можно рассмотреть и совокупность заряженных проводников. Если их заряды равны e_1, e_2, \dots , а потенциалы — $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, то их электростатическая энергия определяется формулой

$$W = \frac{1}{2} \sum_i e_i \varphi_i.$$

В отличие от случая одиночного проводника потенциал какого-либо проводника будет зависеть теперь не только от своего заряда, но и от зарядов всех остальных проводников. Связь эта является линейной и записывается в виде

$$\varphi_i = \sum_k \kappa_{ik} e_k,$$

где коэффициенты κ_{ik} зависят от формы и относительного расположения i -го и k -го проводников и не зависят от величины зарядов (они имеют размерность обратной длины). Подставляя приведенную формулу в выражение для W , получаем

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i, k} \kappa_{ik} e_i e_k.$$

Это выражение следует рассматривать как потенциальную энергию проводников, зависящую от ряда параметров ξ_1, ξ_2, \dots , которые определяют форму и расположение проводников. Им соответствуют силы

$$f_i = - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_e.$$

Отметим в заключение некоторые свойства электростатической энергии проводников. Прежде всего заряды, которые вносятся на проводники, располагаются на поверхностях проводников таким образом, чтобы энергия возникающего электростатического поля была минимальной (теорема Томсона). Далее, внесение незаряженного проводника в поле фиксированной совокупности зарядов всегда приводит к уменьшению энергии поля. Потенциальная энергия системы зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i, k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}},$$

где r_{ik} — расстояние между зарядами e_i и e_k , не имеет как функция координат зарядов минимума (максимума). Действительно, для нахождения минимума (максимума) потенциальной энергии, рассматриваемой как функция координат x, y, z какого-либо заряда, необходимо решить уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

относительно x , y , z . Найденные из этих уравнений значения x , y , z должны в случае минимума удовлетворять неравенствам

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} > 0.$$

Между тем функция

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

удовлетворяет при $r \neq 0$ уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} = 0;$$

такому же уравнению удовлетворяет и функция W . Но уравнение Лапласа несовместимо с условиями минимума (максимума). Отсюда следует, что статическая конфигурация электрических зарядов, находящихся только под действием электростатических сил, не может быть устойчивой (теорема Ирншоу).

В применении к проводникам со статическим распределением зарядов это означает, что на поверхностях проводников на заряды действуют помимо электростатических сил еще некоторые связи, т. е. силы неэлектростатического происхождения. Теорема Ирншоу применима и к гравитационному взаимодействию, поскольку гравитационные силы, так же как и электростатические, обратно пропорциональны квадрату расстояния, поэтому гравитационный потенциал аналогично электростатическому удовлетворяет уравнению Лапласа. В применении к гравитационным силам эта теорема означает, что любое статическое распределение масс, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона, является неустойчивым. Теорема Ирншоу, однако, не означает, что неустойчивость сохранится, если тела будут двигаться. Напротив, для гравитационных сил справедлива динамическая устойчивость; например, движение Луны и искусственных спутников вокруг Земли является устойчивым.

Из теоремы Ирншоу в применении к электростатическим силам следует, что если в атоме действуют в основном электрические силы, то он не может быть статической конфигурацией ядра и электронов. Иными словами, электроны в атоме должны обязательно находиться в состоянии движения. Иначе он был бы неустойчив.

Глава 3

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ДИЭЛЕКТРИКОВ

§ 3.1. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

В § 2.1 было разъяснено, что смещение зарядов в молекулах диэлектрика, помещенного в электростатическое поле, приводит к уменьшению результирующего поля в диэлектрике. Это значит, что если внести в диэлектрик заряд e , то поле, создаваемое им на расстоянии r , не равно e/r^2 , как было бы, если бы заряд находился в вакууме, а меньше e/r^2 . Если диэлектрик однороден и неограничен, то

$$E = \frac{e}{\epsilon r^2},$$

где ϵ — характерная для каждого диэлектрика величина, бóльшая единицы и показывающая, во сколько раз уменьшается поле по сравнению с полем в вакууме. Она называется диэлектрической проницаемостью диэлектрика. Так, для воды $\epsilon \approx 81$, для спирта $\epsilon \approx 26$, для стекла $\epsilon \approx 5$, для керосина $\epsilon \approx 2$, для воздуха $\epsilon \approx 1,006$.

Уменьшение поля в диэлектрике, в свою очередь, означает, что сила электрического взаимодействия между двумя точечными зарядами e_1 и e_2 , помещенными в диэлектрик, при том же расстоянии между зарядами в ϵ раз меньше, чем в вакууме:

$$F = \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2}.$$

Этой формулой выражается закон Кулона для зарядов в диэлектрике.

Уменьшение силы взаимодействия между зарядами в диэлектрике приводит к уменьшению потенциала в диэлектрике. Потенциал, создаваемый зарядом e на расстоянии r в диэлектрике, определяется формулой

$$\varphi = \frac{e}{\epsilon r}.$$

Так как поле в диэлектрике в ϵ раз меньше поля в вакууме, то и поток электрического поля в диэлектрике в ϵ раз меньше, чем в вакууме. Поэтому если ввести вектор

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

то поток этого вектора — он называется вектором электрической индукции — через произвольную замкнутую поверхность S будет

таким же, как и в вакууме, а именно равен суммарному стороннему электрическому заряду $\Sigma e^{(e)}$ внутри этой поверхности, умноженному на 4π :

$$\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi \sum e^{(e)}.$$

Отметим, что сторонние заряды $e^{(e)}$, фигурирующие в этой формуле, не входят в состав молекул диэлектрика.

Приведенная формула справедлива как для однородного, так и для неоднородного диэлектрика, и в каждой точке вектор электрической индукции \mathbf{D} связан с действующим там полем \mathbf{E} соотношением $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, где ϵ — локальная диэлектрическая проницаемость. В частности, если внутри замкнутой поверхности нет сторонних зарядов, то поток вектора \mathbf{D} через эту поверхность равен нулю,

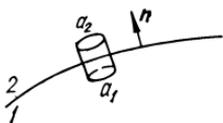


Рис. 3.1



Рис. 3.2

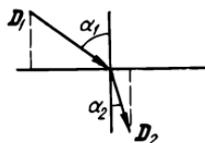


Рис. 3.3

Отсюда следует, что на границе раздела двух диэлектриков должна быть непрерывной нормальная составляющая вектора индукции. Действительно, рассмотрим цилиндр, основания которого a_1 и a_2 расположены в первом и втором диэлектриках, непосредственно вблизи границы раздела и параллельно ей. Тогда поток вектора \mathbf{D} через верхнее основание (рис. 3.1) равен $D_{2n} \Delta S$, где \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к границе и идущий из первого во второй диэлектрик; ΔS — площадь основания; поток через нижнее основание равен $-D_{1n} \Delta S$. Если устремить высоту цилиндра к нулю, то поток вектора индукции через боковую поверхность цилиндрика будет равен нулю, а так как внутри цилиндрика нет сторонних зарядов, то $D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S = 0$, откуда

$$D_{1n} = D_{2n},$$

т. е. действительно при переходе из одной среды в другую сохраняется нормальная составляющая вектора индукции.

Покажем теперь, что при переходе из одной среды в другую сохраняется, кроме того, тангенциальная составляющая электрического поля. Рассмотрим для этого небольшой контур, две стороны которого l_1 и l_2 расположены в первом и втором диэлектриках непосредственно вблизи границы раздела и параллельно ей (рис. 3.2), и определим работу сил электростатического поля при перемещении пробного заряда q вдоль этого контура. Работа при перемещении заряда q вдоль стороны l_1 равна $qE_{1t} \Delta l$, где E_{1t} — составляющая поля \mathbf{E}_1 вдоль тангенциального направления \mathbf{t} ; Δl — длина стороны l_1 ; аналогичным образом работа при перемещении заряда вдоль стороны l_2 равна $-qE_{2t} \Delta l$. Если расстояние

между l_1 и l_2 устремить к нулю, то будет равна нулю и работа сил поля при перемещении заряда вдоль остающихся двух сторон контура, перпендикулярных l_1 и l_2 . Итак, суммарная работа равна $qE_{1t}\Delta l - qE_{2t}\Delta l$. Но поле является статическим, и поэтому эта работа должна равняться нулю, $qE_{1t}\Delta l - qE_{2t}\Delta l = 0$, откуда и вытекает приведенное выше утверждение о непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля при переходе из одной среды в другую:

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

Непрерывность нормальной составляющей вектора электрической индукции и тангенциальной составляющей электрического поля позволяет выяснить, что происходит с силовой линией при переходе из одного диэлектрика в другой. Легко видеть, что силовая линия претерпевает преломление на границе раздела двух диэлектриков. Действительно, переписывая граничные условия в виде

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2, \quad E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 — углы, образуемые силовой линией с нормалью к границе раздела (рис. 3.3), и учитывая, что $D_1 = \epsilon_1 E_1$ и $D_2 = \epsilon_2 E_2$ (ϵ_1 и ϵ_2 — диэлектрические проницаемости обоих диэлектриков), получаем

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

Таким образом, граничные условия $D_{1n} = D_{2n}$ и $E_{1t} = E_{2t}$ требуют преломления силовых линий, при котором отношение тангенсов углов падения и преломления будет постоянным и равным отношению диэлектрических проницаемостей; кроме того, силовая линия не выходит из первоначальной плоскости, проходящей через E_1 и нормаль к границе.

Если с диэлектриком граничит проводник, то силовые линии на границе перпендикулярны поверхности проводника. Если проводник заряжен, то нормальная составляющая вектора индукции D_n связана с поверхностной плотностью заряда σ на проводнике соотношением

$$D_n = 4\pi\sigma$$

(нормаль предполагается внешней по отношению к проводнику). Отсюда следует, что нормальная составляющая электрического поля на границе диэлектрика с проводником определяется формулой.

$$E_n = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}.$$

Тангенциальная составляющая поля E_t на поверхности проводника равна нулю: $E_t = 0$.

§ 3.2. КОНДЕНСАТОР, ЗАПОЛНЕННЫЙ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Если поместить какой-либо заряд в неограниченный однородный диэлектрик, то потенциал, создаваемый зарядом, в ϵ раз меньше потенциала, создаваемого таким же зарядом в вакууме. Отсюда следует, что емкость проводника, окруженного однородным

диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ , в ϵ раз больше емкости такого же проводника в вакууме. Поэтому в ϵ раз возрастает и емкость конденсатора, если пространство между его обкладками заполнить однородным диэлектриком. В частности, емкость плоского конденсатора, заполненного диэлектриком,

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}.$$

Электрическая энергия, запасенная в конденсаторе, определяется прежней формулой:

$$W = \frac{1}{2} C (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

Заменяя здесь $\varphi_1 - \varphi_2$ на Ed , находим энергию, запасенную в плоском конденсаторе:

$$W = \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2 V,$$

где V — объем поля в конденсаторе. Эта формула показывает, что в единице объема диэлектрика запасена энергия

$$w = \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2 = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{D},$$

представляющая собой сумму (отнесенную к 1 см^3) собственно энергии электрического поля и той части энергии диэлектрика, которая связана с наличием поля. Величину w можно интерпретировать как плотность внутренней энергии, если конденсатор теплоизолирован. Если же диэлектрик находится при постоянной температуре, то w играет роль плотности свободной энергии. При не зависящей от температуры ϵ свободная энергия совпадает с внутренней энергией. Величину w называют плотностью электрической энергии в диэлектрике.

Рассмотрим теперь конденсаторы, заполненные неоднородным диэлектриком. На рис. 3.4 изображен плоский слоистый конденсатор, заполненный двумя диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 ; граница между диэлектриками плоская, параллельная обкладкам. Для определения емкости такого конденсатора следует исходить из того, что вектор электрической индукции будет одинаковым в обоих диэлектриках:

$$\mathbf{D} = 4\pi \sigma \mathbf{n},$$

где σ — поверхностная плотность заряда ($\sigma > 0$); \mathbf{n} — единичный вектор нормали к положительно заряженной обкладке, направленный в сторону диэлектрика. Поэтому напряженности поля в обоих диэлектриках определяются формулами

$$E_1 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_1}, \quad E_2 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_2},$$

а разности потенциалов, приходящиеся на оба слоя, — формулами

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_1} d_1, \quad \varphi_0 - \varphi_2 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_2} d_2,$$

где φ_0 — потенциал границы между диэлектриками; d_1 и d_2 — толщины обоих слоев диэлектриков. Таким образом, общая разность потенциалов на конденсаторе записывается в виде

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\sigma \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right),$$

а так как заряд на обкладке равен $e = \sigma S$, то емкость слоистого конденсатора

$$C = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{S}{4\pi \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)}.$$

Отсюда легко найти энергию конденсатора:

$$W = \frac{e^2}{2C} = 2\pi\sigma^2 \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right) S.$$

Приведенное выражение позволяет определить силы, действующие на обкладки конденсатора. В случае вакуумного конденсатора, чтобы найти силу, действующую на обкладку с положительным зарядом, мы умножали заряд на поле, создаваемое обкладкой с отрицательным зарядом. Для слоистого конденсатора мы не

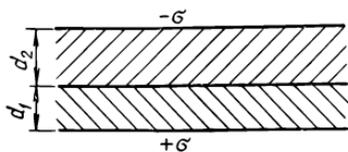


Рис. 3.4

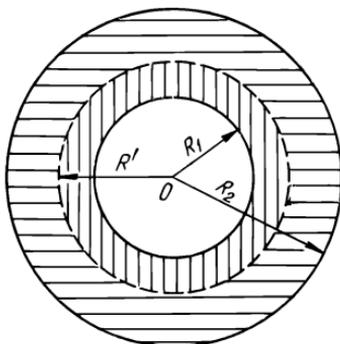


Рис. 3.5

знаем полей, создаваемых каждой из обкладок. Но для нахождения сил и не обязательно их знать. Можно просто рассматривать электрическую энергию конденсатора как его потенциальную энергию. Такое рассмотрение является, очевидно, законным, если конденсатор после зарядки отключить от внешних зарядов и предоставить самому себе. Тогда работа сил, действующих на обкладки, при их виртуальном смещении должна равняться убыли электрической энергии конденсатора. Представим, например, что обкладка 1 смещается, так что толщина первого слоя увеличивается на δd_1 (при неизменном d_2); если соответствующее изменение энергии W равно δW , то работа силы F_1 , действующей на обкладку 1, на перемещении δd_1 равна

$$F_1 \delta d_1 = -\delta W,$$

откуда

$$F_1 = - \frac{\partial W}{\partial d_1} = - \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon_1} S$$

(при взятии производной нужно считать толщину d_2 постоянной). Отрицательный знак в этом выражении означает, что сила F_1 направлена в сторону уменьшения d_1 , т. е. к обкладке 2. Аналогичным образом легко показать, что сила, действующая на обкладку 2, определяется соотношением

$$F_2 = - \frac{\partial W}{\partial d_2}.$$

Эта сила направлена в сторону уменьшения толщины d_2 , т. е. к обкладке 1. Хотя обе силы и направлены противоположно друг другу, они не равны по абсолютной величине, как в случае вакуумного конденсатора. Поэтому на первый взгляд кажется, что здесь нарушается закон равенства действия и противодействия. В действительности никакого нарушения нет, так как в конденсаторе имеется еще третье тело — диэлектрик. Обкладка 1 испытывает действие силы F_1 не со стороны обкладки 2, а со стороны примыкающего к обкладке 1 диэлектрика; обкладка 2 испытывает действие силы F_2 со стороны примыкающего к этой обкладке диэлектрика. В свою очередь, диэлектрик испытывает действие сил со стороны обкладок 1 и 2, равных соответственно F_1 и $-F_2$ и направленных к обкладкам. Результирующая сила, действующая на диэлектрик, определяется формулой

$$F_{\text{д}} = -F_2 + F_1 = \frac{1}{8\pi} D^2 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) S.$$

Она направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью. Если, например, опустить одну обкладку воздушного конденсатора в сосуд с керосином так, чтобы обкладка была параллельна поверхности керосина, то керосин будет втягиваться в конденсатор, потому что его диэлектрическая проницаемость больше диэлектрической проницаемости воздуха.

Таким образом, на границе обоих диэлектриков действует сила. Отнесенная к единице площади границы, она равна разности плотностей энергии поля по обе стороны границы:

$$\frac{F_{\text{д}}}{S} = \omega_2 - \omega_1,$$

где

$$\omega_1 = \frac{D^2}{8\pi\epsilon_1}, \quad \omega_2 = \frac{D^2}{8\pi\epsilon_2}.$$

Определим емкость слоистого шарового конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено двумя concentрическими слоями диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Обозначим через R_1 и R_2 радиусы обкладок и через R' — радиус сферы, разделяющей слои диэлектриков (рис. 3.5). Из

теоремы Гаусса следует, что вектор электрической индукции повсюду между обкладками определяется единой формулой:

$$\mathbf{D} = \frac{e}{r^2} \mathbf{n},$$

где e — заряд на внутренней обкладке; \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из центра O в точку наблюдения; \mathbf{n} — единичный вектор вдоль \mathbf{r} . Поэтому в обоих слоях поля определяются формулами

$$E_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r^2}, \quad E_2 = \frac{e}{\varepsilon_2 r^2},$$

а потенциалы — формулами

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r}, \quad \varphi_2 = \frac{e}{\varepsilon_2 r}.$$

Отсюда для разности потенциалов между обкладками конденсатора получаем

$$\begin{aligned} \varphi(R_1) - \varphi(R_2) &= \varphi(R_1) - \varphi(R') + \varphi(R') - \varphi(R_2) = \\ &= \frac{e}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'} \right) + \frac{e}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned}$$

Тогда обратная емкость слонстого сферического конденсатора записывается в виде

$$\frac{1}{C} = \frac{\varphi(R_1) - \varphi(R_2)}{e} = \frac{1}{\varepsilon_1 R_1} - \frac{1}{\varepsilon_2 R_2} + \frac{1}{R'} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

Пользуясь этой формулой, можно найти емкость сферического проводника, окруженного сферическим слоем диэлектрика. Для этого следует положить в приведенной формуле $R_2 = \infty$ и $\varepsilon_2 = 1$:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_1 R_1} \left[1 + \frac{R_1}{R'} (\varepsilon_1 - 1) \right].$$

§ 3.3. ДИЭЛЕКТРИК В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Поле заряда в диэлектрике в ε раз меньше поля такого же заряда в вакууме. Однако масштабное уменьшение поля, т. е. уменьшение поля в одно и то же число во всех точках диэлектрика, справедливо только в случае, когда диэлектрик безграничен, однороден и изотропен. Если диэлектрик ограничен (но однороден и изотропен), то изменение поля не сводится к масштабному уменьшению: напротив, при этом происходит, как правило, существенное изменение пространственной структуры поля.

Нахождение поля зарядов в присутствии ограниченного диэлектрика представляет собой очень сложную задачу математической физики, аналитическое решение которой известно лишь в нескольких простейших случаях. При этом используется известный нам принцип, заключающийся в том, что каждая задача электростатики

допускает лишь одно-единственное решение, и поэтому если с помощью суперпозиции известных электростатических полей удастся удовлетворить граничным условиям на поверхности диэлектрика, то можно быть уверенным в том, что эта суперпозиция представляет собой истинное поле.

Рассмотрим, например, задачу о модификации однородного электростатического поля \mathbf{E}_0 , в которое вносится диэлектрический шар радиуса a с диэлектрической проницаемостью ϵ . При внесении диэлектрика в однородное поле внутри диэлектрика поле становится неоднородным. Но мы сделаем предположение, которое далее будет оправдано, что поле внутри диэлектрического шара, внесенного в однородное поле, остается однородным. Однако поле вне шара уже нельзя считать однородным. Предположим, что влияние шара (в пространстве вне шара) таково, как если бы он представлял собой некоторый диполь, расположенный в центре шара. Иными словами, если обозначить через \mathbf{d} дипольный момент этого эквивалентного диполя, то можно полагать, что поле вне шара имеет вид

$$\mathbf{E}^{(e)} = \mathbf{E}_0 + \frac{3(\mathbf{d}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из центра шара в точку наблюдения; \mathbf{n} — единичный вектор в этом направлении. Поле внутри шара считаем однородным и запишем его в виде

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}_0 - \nu\mathbf{P},$$

где \mathbf{P} — отношение дипольного момента к объему шара V ,

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{d}}{V},$$

а ν — некоторый численный коэффициент.

Покажем теперь, что величины \mathbf{d} и ν можно выбрать таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия на поверхности шара. Они заключаются в непрерывности тангенциальной составляющей поля:

$$\mathbf{E}^{(e)}\mathbf{t} = \mathbf{E}^{(i)}\mathbf{t}$$

(\mathbf{t} — единичный вектор, касательный к поверхности шара) (рис. 3.6) и непрерывности нормальной составляющей вектора индукции:

$$\mathbf{D}^{(e)}\mathbf{n} = \mathbf{D}^{(i)}\mathbf{n},$$

или так как

$$\mathbf{D}^{(e)} = \mathbf{E}^{(e)}, \quad \mathbf{D}^{(i)} = \epsilon\mathbf{E}^{(i)},$$

то

$$\mathbf{E}^{(e)}\mathbf{n} = \epsilon\mathbf{E}^{(i)}\mathbf{n}.$$

Замечая, что $\mathbf{n}\mathbf{t} = 0$, при $r = a$ имеем

$$\mathbf{E}^{(e)}\mathbf{t} = \mathbf{E}_0\mathbf{t} - \frac{d\mathbf{t}}{a^3}, \quad \mathbf{E}^{(i)}\mathbf{t} = \mathbf{E}_0\mathbf{t} - \nu\mathbf{P}\mathbf{t}.$$

Отсюда, учитывая, что $\mathbf{d} = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{P}$, получаем $\nu = \frac{4\pi}{3}$. Из условия непрерывности нормальной составляющей вектора индукции следует, что

$$\mathbf{E}_0 \mathbf{n} + \frac{2d\mathbf{n}}{a^3} = \varepsilon \left(\mathbf{E}_0 \mathbf{n} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \mathbf{n} \right),$$

или

$$\mathbf{E}_0 \mathbf{n} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{P} \mathbf{n} = \varepsilon \left(\mathbf{E}_0 \mathbf{n} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \mathbf{n} \right),$$

откуда

$$\frac{4\pi}{3} (2 + \varepsilon) \mathbf{P} \mathbf{n} = (\varepsilon - 1) \mathbf{E}_0 \mathbf{n}.$$

Этому условию можно удовлетворить, выбрав \mathbf{P} следующим образом:

$$\mathbf{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

Используя данное значение \mathbf{P} , находим поле внутри диэлектрического шара:

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

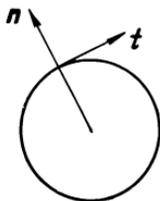


Рис. 3.6

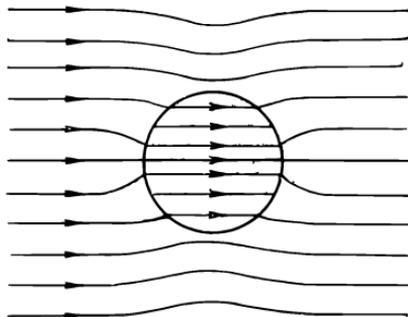


Рис. 3.7

Мы видим, что поле внутри шара, внесенного в однородное поле, действительно остается однородным. Так как $\varepsilon > 1$, то внутреннее поле $E^{(i)}$ меньше поля E_0 , бывшего до внесения диэлектрика, но не в ε раз, а в $\frac{\varepsilon + 2}{3}$ раз, причем $\frac{\varepsilon + 2}{3} < \varepsilon$. Поле вне шара неоднородно, но вдали от шара приближается к однородному и не отличается от поля E_0 до внесения шара (рис. 3.7).

Заметим, что если в формуле, связывающей $\mathbf{E}^{(i)}$ и \mathbf{E}_0 , заменить ε на $1/\varepsilon$, то мы найдем поле в шарообразном вырезе, сделанном в безграничном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε , в котором до выреза было однородное поле \mathbf{E}_0 .

Следовательно, если в однородное поле вносится ограниченный диэлектрик, имеющий форму шара, то в нем сохраняется однород-

ность поля (хотя величина поля изменяется). Возникает вопрос, какие еще формы ограниченного диэлектрика обладают этим же свойством. Оказывается, что в общем случае диэлектрик должен иметь форму эллипсоида; тогда при внесении его в однородное электростатическое поле \mathbf{E}_0 в диэлектрике также установится однородное поле $\mathbf{E}^{(i)}$, связанное с полем \mathbf{E}_0 соотношением

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}_0 - 4\pi N\mathbf{P},$$

где $4\pi N = (\epsilon - 1)\mathbf{E}^{(i)}$; N — численный множитель (точнее, тензор), зависящий от формы эллипсоида и его расположения по отношению к внешнему полю. Он называется коэффициентом деполяризации или размагничивающим фактором (последнее название связано с аналогичной ситуацией в случае магнетика, внесенного в магнитное поле, см. § 12.2). Для шара $N = 1/3$, для бесконечного цилиндра, ось которого направлена вдоль внешнего поля, $N = 1/2$.

§ 3.4. МЕТОД ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Определим поле, создаваемое точечным зарядом в случае, когда диэлектрик заполняет не все пространство, а только полупростран-

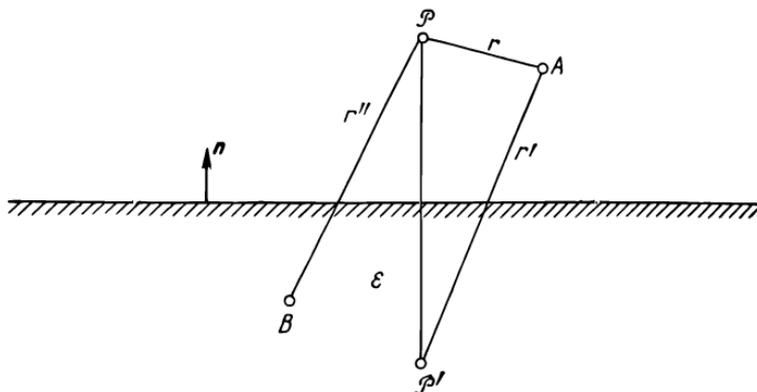


Рис. 3.8

ство с плоской границей (рис. 3.8). Для решения этой задачи воспользуемся методом электрических изображений, т. е. предположим, что поле в вакууме (над диэлектриком) будет таким же, как и в отсутствие диэлектрика, но при наличии некоторого добавочного заряда e' , находящегося в точке \mathcal{P}' — зеркальном изображении точки \mathcal{P} (в которой находится реальный заряд e).

Предположим, что поле в диэлектрике такое же, как и поле, которое создается некоторым фиктивным точечным зарядом e'' , находящимся в неограниченном диэлектрике и расположенном в точке \mathcal{P} (в той же точке, где находится реальный заряд). Итак,

мы предполагаем, что потенциал в вакууме в произвольной точке A определяется формулой

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{e'}{r'},$$

а потенциал в диэлектрике в произвольной точке B — формулой

$$\varphi_{\varepsilon} = \frac{e''}{\varepsilon r''},$$

где r , r' , r'' — расстояния от точек A и B до \mathcal{P} и \mathcal{P}' (см. рис. 3.8).

Попытаемся теперь определить константы e и e'' таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия на поверхности диэлектрика, т. е. чтобы были непрерывны тангенциальная составляющая поля и нормальная составляющая вектора электрической индукции. Если это удастся сделать, то мы можем быть уверены в том, что наше предположение является правильным.

Непрерывность тангенциальной составляющей поля эквивалентна непрерывности потенциала. Это значит, что на границе диэлектрика, когда точки A и B совпадают и $r = r' = r''$, должны быть равны потенциалы φ и φ_{ε} , откуда следует, что

$$e + e' = \frac{e''}{\varepsilon}.$$

Найдем нормальные составляющие вектора электрической индукции. Электрические поля в вакууме и в диэлектрике определяются соответственно формулами

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r} + \frac{e'}{r'^3} \mathbf{r}',$$

$$\mathbf{E}_{\varepsilon} = \frac{e''}{\varepsilon r''^3} \mathbf{r}''$$

(радиус-векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}'' имеют начало в точке \mathcal{P} , а радиус-вектор \mathbf{r}' — в точке \mathcal{P}'). Поэтому вектор электрической индукции в вакууме и в диэлектрике определяется формулами

$$\mathbf{D} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r} + \frac{e'}{r'^3} \mathbf{r}',$$

$$\mathbf{D}_{\varepsilon} = \frac{e''}{\varepsilon r''^3} \mathbf{r}''.$$

На границе диэлектрика $r = r' = r''$, кроме того, $\mathbf{r}\mathbf{n} = \mathbf{r}''\mathbf{n} = -\mathbf{r}'\mathbf{n}$ (\mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к границе). Тогда из равенства $\mathbf{D}\mathbf{n} = \mathbf{D}_{\varepsilon}\mathbf{n}$, которое должно выполняться на границе, следует, что

$$e - e' = e''.$$

Из этого уравнения и уравнения $e + e' = \frac{e''}{\varepsilon}$ находим искомые величины:

$$e' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} e,$$

$$e'' = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} e.$$

Итак, в диэлектрике силовые линии кажутся радиально исходящими из точки \mathcal{P} , в вакууме же поле представляет собой наложение полей двух точечных зарядов e и e' . Заметим, что заряд e будет притягиваться к диэлектрику с силой

$$F = \frac{ee'}{4h^2} = -\frac{e^2}{4h^2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1},$$

где $2h = \mathcal{P}\mathcal{P}'$.

§ 3.5. ПОЛЯРНЫЕ И НЕПОЛЯРНЫЕ МОЛЕКУЛЫ

Уменьшение поля в диэлектрике по сравнению с вакуумом (при тех жесторонних зарядах) связано со смещением зарядов в молекулах диэлектрика под действием поля. Такое смещение зарядов (поляризация диэлектрика) приводит к возникновению у молекул направленного вдоль поля дипольного момента. При этом следует различать два принципиально разных типа молекул. Молекулы одного типа сами по себе, в отсутствие поля, не обладают дипольным моментом, но дипольный момент возникает у них под действием поля, которое как бы «растягивает» молекулу и раздвигает ее заряды — положительные по полю и отрицательные против поля. Такие молекулы называются неполярными. При не очень сильных полях дипольный момент неполярной молекулы \mathbf{d} , возникающий под действием поля \mathbf{E} , оказывается пропорциональным величине поля:

$$\mathbf{d} = \beta \mathbf{E},$$

где β — некоторая величина, характеризующая молекулу (она называется поляризуемостью молекулы).

Молекулы другого типа обладают сами по себе, т. е. даже в отсутствие внешнего электрического поля, дипольным моментом. Такие молекулы, обладающие собственным, или спонтанным, дипольным моментом, называются полярными. Если полярную молекулу с дипольным моментом \mathbf{d}_0 поместить в электрическое поле \mathbf{E} , то на нее, очевидно, будет действовать пара сил (рис. 3.9) с моментом

$$\mathbf{K} = [\mathbf{d}_0 \mathbf{E}].$$

Эта пара будет вращать диполь, стремясь расположить его вдоль поля.

Таким образом, действие поля в случае диэлектрика с полярными молекулами (такой диэлектрик называют полярным) является прежде всего ориентирующим — поле стремится ориентировать дипольные моменты отдельных молекул вдоль поля. Кроме того, полярные молекулы, так же как и неполярные, «растягиваются» под действием внешнего электрического поля. Но этот эффект является второстепенным по сравнению с ориентационным эффектом.

Хотя молекулы полярного диэлектрика и обладают спонтанным дипольным моментом, направления дипольных моментов отдельных молекул у полярных газов, жидкостей и ряда твердых диэлектриков распределены в отсутствие поля хаотически. Поэтому векторная сумма дипольных моментов всех молекул в отсутствие поля равна

нулю. Если же в диэлектрике имеется электрическое поле, то эта сумма не равна нулю.

Принадлежность молекулы к тому или другому типу определяется ее структурой и тесно связана с симметрией молекулы. Например, молекула воды представляет собой полярную жидкость. Следовательно, атомы молекулы воды не могут лежать на одной прямой и должны обязательно образовывать равнобедренный треугольник. Действительно, в противном случае у молекулы не

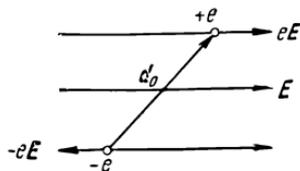


Рис. 3.9

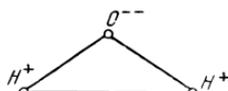


Рис. 3.10

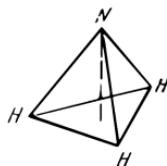


Рис. 3.11

было бы избранного направления и она не могла бы иметь собственного дипольного момента. Последний должен, очевидно, быть направлен вдоль биссектрисы угла при атоме кислорода (этот угол равен примерно 108° (рис. 3.10)). Дипольный момент молекулы воды составляет $1,87 \cdot 10^{-18}$ СГСЕ. Аналогичным образом для полярной молекулы NH_3 невозможно плоское расположение атомов, так как в этом случае отсутствовало бы избранное направление, кото-

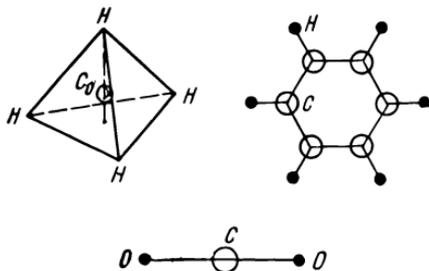


Рис. 3.12

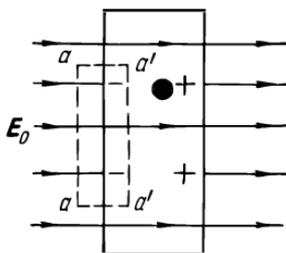


Рис. 3.13

рсе мог бы иметь дипольный момент молекулы. Иными словами, из того факта, что молекула NH_3 является полярной, вытекает, что ее атомы расположены в вершинах правильной пирамиды (рис. 3.11). Дипольный момент молекулы NH_3 направлен вдоль высоты пирамиды и равен $1,53 \cdot 10^{-18}$ СГСЕ.

Заметим, что величина дипольных моментов других полярных молекул также порядка 10^{-18} СГСЕ. Этого и следовало ожидать, так как заряд электрона примерно равен $5 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ, а молекулярные расстояния порядка 10^{-8} см.

Если заряды расположены в молекуле достаточно симметрично, то в отсутствие внешнего поля она не обладает дипольным моментом. Таковы, например, молекулы O_2 , N_2 , H_2 . Но и более сложные молекулы, например CH_4 , CO_2 , C_6H_6 , очень симметричны (структуры их изображены на рис. 3.12) и у них нет избранного

направления, вдоль которого мог бы располагаться собственный дипольный момент. При включении внешнего поля симметрия молекулы нарушается и она приобретает дипольный момент.

В следующих параграфах мы покажем, что характер диэлектрической проницаемости — ее температурная зависимость — существенно зависит от того, являются ли молекулы диэлектрика полярными или неполярными. Поэтому экспериментальное исследование диэлектрической проницаемости позволяет получать важную информацию о свойствах симметрии молекул.

§ 3.6. ВЕКТОР ПОЛЯРИЗАЦИИ

Возникновение под действием внешнего электрического поля дипольных моментов у неполярных молекул и поворот собственных дипольных моментов по направлению к полю у полярных молекул приводят к поляризации каждого диэлектрика, т. е. к относительному смещению разноименных зарядов в любом макроскопическом элементе объема диэлектрика.

Рассмотрим, например, диэлектрическую пластинку, помещенную в однородное электрическое поле E_0 перпендикулярно полю (рис. 3.13). Тогда поляризация диэлектрика будет тоже однородной. Это значит, что разноименные заряды соседних диполей внутри диэлектрика будут компенсировать друг друга и нескомпенсированными окажутся только отрицательные заряды крайних левых диполей и положительные заряды крайних правых диполей. В результате вся диэлектрическая пластинка превратится в макроскопический диполь, дипольный момент которого направлен по полю E_0 и равен qh , где q — нескомпенсированный заряд, «вышедший» на границу пластинки; h — толщина пластинки. Ясно, что этот дипольный момент равен векторной сумме дипольных моментов d всех молекул диэлектрика:

$$qh_n = \sum d$$

(n — единичный вектор вдоль E_0). Эта сумма пропорциональна объему диэлектрической пластинки V :

$$\sum d = PV,$$

где P — векторная сумма дипольных моментов молекул в единице объема диэлектрика. Поэтому

$$qh_n = PV.$$

Вектор P называется вектором поляризации.

Свяжем теперь нескомпенсированный заряд q с вектором электрической индукции D . Применим для этого теорему Гаусса, сформулированную для поля в вакууме. Выберем в качестве замкнутой поверхности, фигурирующей в этой теореме, параллелепипед, две грани которого aa и $a'a'$ параллельны границе пластинки и находятся одна вне, а другая внутри диэлектрика в непосредственной близости к его границе (см. рис. 3.13). Если E — поле в диэлектрике и S — площадь грани aa , то поток электрического поля через замкнутую поверхность параллелепипеда в направлении внешней

нормали к поверхности равен $-(E_0 - E)S$. Однако согласно теореме Гаусса он равен $-4\pi q$, т. е.

$$q = \frac{1}{4\pi} (E_0 - E) S.$$

Подставляя это значение в формулу $qh = PV$ и замечая, что $V = hS$, получаем

$$P = \frac{1}{4\pi} (E_0 - E).$$

Вернемся теперь к макроскопической картине и вспомним определение вектора электрической индукции. Как мы знаем, на границе раздела двух диэлектриков непрерывна нормальная составляющая вектора электрической индукции, а так как внешнее поле E_0 нормально к границе слоя, то отсюда следует, что

$$E_0 = D.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае вектор электрической индукции в диэлектрике совпадает с напряженностью поля вне диэлектрика. Используя это обстоятельство, перепишем соотношение

$P = \frac{1}{4\pi} (E_0 - E)$ в виде

$$P = \frac{1}{4\pi} (D - E),$$

откуда

$$D = E + 4\pi P.$$

Это важное соотношение связывает вектор электрической индукции D , напряженность поля E и вектор поляризации P в каждом диэлектрике, точнее, в любой точке каждого диэлектрика.

§ 3.7. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ГАЗА

Введенный в § 3.6 вектор поляризации зависит, естественно, от напряженности поля в диэлектрике. Если эта зависимость была бы известна, то, сравнивая соотношение

$$D = E + 4\pi P$$

с формулой

$$D = \epsilon E,$$

можно было бы определить диэлектрическую проницаемость ϵ . Но зависимость P от E не является универсальной, и поэтому ее нужно находить для каждого конкретного диэлектрика в отдельности. Исключение составляют лишь газы, для которых могут быть получены общие выражения для вектора поляризации.

Рассмотрим газ, состоящий из одинаковых неполярных молекул. В § 3.5 мы видели, что если неполярная молекула находится в поле E , то у нее возникает дипольный момент

$$d = \beta E,$$

где β — поляризуемость молекулы. Поэтому, если в единице объема находится n молекул, то

$$P = nd = \alpha E,$$

где $\alpha = n\beta$. Эта величина называется электрической восприимчивостью газа.

Учитывая, что $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ и $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, получаем соотношение

$$\epsilon = 1 + 4\pi\alpha,$$

связывающее диэлектрическую проницаемость ϵ с электрической восприимчивостью α . Мы видим, что из макроскопических величин в выражение для диэлектрической проницаемости неполярного газа входит только плотность газа.

Рассмотрим теперь газ, состоящий из одинаковых полярных молекул. Согласно § 3.5 электрическое поле стремится ориентировать собственные дипольные моменты молекул по полю. Однако этой тенденции будет препятствовать тепловое движение молекул. Чтобы учесть оба эффекта — ориентирующее действие поля и разориентирующее действие теплового движения, нужно найти распределение молекул по направлениям их собственных дипольных моментов.

Для решения указанной задачи напомним, что если газ находится в некотором силовом поле, то в состоянии статистического равновесия пространственное распределение его молекул определяется общей формулой Больцмана:

$$n(\mathbf{r}) = n_0 e^{-\frac{U(\mathbf{r})}{kT}}.$$

Здесь $n(\mathbf{r})$ — плотность молекул в точке \mathbf{r} ; $U(\mathbf{r})$ — потенциальная энергия молекулы в этой точке; n_0 — плотность молекул в точке, где $U = 0$; T — температура газа; k — постоянная Больцмана. (Частным случаем этой формулы является барометрическая формула.) При этом под U следует понимать потенциальную энергию диполя в поле, равную согласно результатам § 1.4

$$W = -\mathbf{d}_0\mathbf{E} = -d_0E \cos \vartheta,$$

где \mathbf{d}_0 — собственный дипольный момент молекулы; ϑ — угол между дипольным моментом \mathbf{d}_0 и полем \mathbf{E} . Вместо локальной плотности молекул $n(\mathbf{r})$ следует использовать число молекул в единичном телесном угле около данного направления \mathbf{d}_0 . Обозначая через dN число молекул полярного газа, дипольные моменты которых лежат в элементе телесного угла $d\Omega$, и учитывая, что $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$, на основании формулы Больцмана записываем

$$dN = C e^{-\frac{d_0E \cos \vartheta}{kT}} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta,$$

где C — константа, определяемая из условия

$$C \int_0^\pi e^{-\frac{d_0E \cos \vartheta}{kT}} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = N$$

(N — общее число молекул газа).

Определим теперь вектор поляризации газа. Как мы видели в § 3.6,

$$\mathbf{P} = \Sigma \mathbf{d}_0,$$

где суммирование производится по всем диполям, содержащимся в единичном объеме. Так как пространственное распределение ди-

полных моментов зависит только от угла ϑ между векторами \mathbf{d}_0 и \mathbf{E} , то составляющие вектора \mathbf{d}_0 , перпендикулярные полю, для отдельных молекул будут взаимно компенсироваться. Поэтому вектор поляризации не имеет составляющей, перпендикулярной полю; составляющая, параллельная полю, равна

$$P = n d_0 \overline{\cos \vartheta},$$

где n — число диполей в единице объема; $\overline{\cos \vartheta}$ — среднее значение $\cos \vartheta$ по всем диполям. Эта величина определяется формулой

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{1}{N} \int \cos \vartheta dN$$

или

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{2\pi}{N} \int_0^\pi \exp\left(\frac{d_0 E \cos \vartheta}{kT}\right) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

Обычно $d_0 E/kT \ll 1$, поэтому

$$dN = -\frac{N}{2} \left(1 + \frac{d_0 E}{kT} \cos \vartheta\right) d(\cos \vartheta),$$

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{d_0 E}{kT} \cos \vartheta\right) \cos \vartheta d(\cos \vartheta).$$

Замечая, что

$$\int_{-1}^{+1} \cos^2 \vartheta d(\cos \vartheta) = \frac{2}{3},$$

получаем

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{d_0 E}{3kT}.$$

Следовательно, вектор поляризации газа полярных молекул определяется формулой

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E},$$

где

$$\alpha = \frac{n d_0^2}{3kT}.$$

Отсюда легко найти диэлектрическую проницаемость полярного газа:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + \frac{4\pi n d_0^2}{3kT}.$$

Мы видим, что диэлектрическая проницаемость газа полярных молекул в отличие от диэлектрической проницаемости газа неполярных молекул зависит от температуры. Поэтому, если экспериментально

установлено, что диэлектрическая проницаемость диэлектрика зависит от температуры, это значит, что диэлектрик построен из полярных молекул. Отсюда, как было разъяснено в § 3.5, вытекают определенные выводы о свойствах симметрии молекул.

§ 3.8. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛОТНЫХ ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ

В предыдущем параграфе мы определили диэлектрическую проницаемость газов, связав ее с поляризуемостью отдельной молекулы. Решающим при этом было предположение, что поле, действующее на отдельную молекулу, или локальное поле, совпадает со средним макроскопическим полем, существующим в диэлектрике. Однако эти величины отличаются друг от друга и различие между ними тем большее, чем больше плотность частиц. Для того чтобы понять различие между локальным и средним полями, напомним, как мы находили силу, действующую на обкладку плоского конденсатора. На первый взгляд кажется, что эта сила (отнесенная к единице площади) равна произведению поверхностной плотности заряда σ на поле, равное $E = 4\pi\sigma$. В действительности поверхностная плотность силы

$$f = \frac{1}{2} \sigma E,$$

так как сила, действующая на заряд обкладки, определяется не общим полем, а только полем, создаваемым второй обкладкой (в месте нахождения заряда). Это поле, имеющее смысл локального поля (по принятой выше терминологии), равно $2\pi\sigma$, т. е. $E/2$.

Исходя из этой аналогии можно утверждать, что локальное поле в некоторой точке диэлектрика представляет собой поле в небольшой полости, сделанной в диэлектрике около этой точки. В случае газа или жидкости, т. е. изотропных диэлектриков, естественно придать этой полости сферическую форму. Поле в такой полости, как показано в § 3.3, определяется формулой

$$E_l = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} E,$$

где E — поле вдали от полости (или, что то же самое, поле, бывшее в рассматриваемой точке до того, как была вырезана полость). Поскольку $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$, где α — электрическая восприимчивость, перепишем выражение для локального поля E_l в виде

$$E_l = E + \frac{4\pi\alpha}{3 + 8\pi\alpha} E$$

или

$$E_l = E + \frac{4\pi}{3} P \frac{3}{3 + 8\pi\alpha},$$

где $P = \alpha E$ — вектор поляризации. Если $\alpha \ll 1$, то эта формула принимает вид

$$E_l = E + \frac{4\pi}{3} P.$$

Она называется формулой Лоренца для локального поля. Под действием локального поля отдельная молекула приобретает направленный вдоль поля дипольный момент:

$$\mathbf{d} = \beta \mathbf{E}_l,$$

где β — коэффициент поляризуемости молекулы, зависящий только от свойств молекулы. Если n — число молекул в единице объема, то

$$\mathbf{P} = \alpha_d \mathbf{E}_l,$$

где $\alpha_d = n\beta$. Однако

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E},$$

поэтому

$$\alpha_d \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi\alpha}{3 + 8\pi\alpha} \mathbf{E} \right) = \alpha \mathbf{E},$$

откуда

$$8\pi\alpha^2 - 3\alpha(4\pi\alpha_d - 1) - 3\alpha_d = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{3}{16\pi} \left(4\pi\beta n - 1 + \sqrt{1 + \frac{8\pi}{3}\beta n + 16\pi^2\beta^2 n^2} \right).$$

Эта формула (она называется формулой Онзагера) определяет электрическую восприимчивость α как функцию плотности частиц n при заданном параметре β .

Значение β можно найти, если предварительно экспериментально определить электрическую восприимчивость разреженного газа, так как в этом случае восприимчивость газа равна βn (к такому результату при малых βn приводит, очевидно, и формула Онзагера). Поэтому, зная плотность газа, можно вычислить β . Тогда смысл формулы Онзагера состоит в том, что с помощью β можно подсчитать электрическую восприимчивость плотного газа и жидкости (если, конечно, при переходе в конденсированное состояние не изменяется поляризуемость молекулы). Результат такого подсчета приводит, например, к значению 2,76 для диэлектрической проницаемости жидкого CS_2 , тогда как экспериментальное значение этой величины составляет 2,64 (при этом плотность жидкого CS_2 превышает плотность газа в 380 раз).

С точностью до квадратичных по βn членов согласно формуле Онзагера

$$\alpha \approx \beta n \left(1 + \frac{4\pi}{3} \beta n \right), \quad \beta n \ll 1.$$

Последнее выражение (также с точностью до квадратичных членов) можно переписать в виде

$$\alpha \approx \frac{\beta n}{1 - \frac{4\pi}{3} \beta n}.$$

Эта формула называется формулой Лоренц — Лорентца. Выражая с ее помощью βn через α и заменяя α на $\frac{1}{4\pi}(\epsilon - 1)$, получаем

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \beta n.$$

Данная формула называется формулой Клаузиуса — Моссотти.

При использовании двух приведенных формул следует учитывать, что они справедливы только в том случае, когда $\frac{4\pi}{3} \beta n$ мало по сравнению с единицей. Если $\frac{4\pi}{3} \beta n = 1$, то по формуле Лоренц — Лорентца α обращается в бесконечность, тогда как в действительности согласно формуле Онзагера $\alpha = \frac{3}{8\pi} (1 + \sqrt{3})$.

§ 3.9. ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

Хотя каждый элемент диэлектрика в целом нейтрален, тем не менее он в общем будет испытывать действие электрического поля, так как отдельные молекулы диэлектрика можно рассматривать как диполи; диполи же испытывают действие электрического поля.

Силы, действующие на диэлектрик в электрическом поле, называются пондеромоторными силами. Определим объемную плотность этих сил в простейшем случае газообразного диэлектрика, когда, как было разъяснено в § 3.8, поле, действующее на отдельные заряды молекулы диэлектрика, практически не отличается от среднего поля в среде. Поэтому формулу для силы, действующей на диполь, можно представить в виде

$$\mathbf{f} = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}) + e\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}),$$

где \mathbf{r} и $\mathbf{r} + \mathbf{l}$ — радиус-векторы, определяющие положения зарядов $-e$ и $+e$ диполя; $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — напряженность поля в точке \mathbf{r} . Предполагая, что поле медленно изменяется в пространстве, можно разложить разность полей $\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{E}(\mathbf{r})$ в ряд по степеням проекций l_x, l_y, l_z вектора \mathbf{l} и ограничиться линейными членами:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx l_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$$

или, если ввести символический вектор

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

(этот вектор называется вектором набла), то

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\mathbf{l} \nabla) \mathbf{E}.$$

Учитывая, что произведение e на \mathbf{l} представляет собой дипольный момент \mathbf{d} молекулы, получаем следующее выражение для силы, испытываемой отдельным диполем-молекулой:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{d} \nabla) \mathbf{E}.$$

Умножая \mathbf{f} на число молекул n в единице объема, находим силу, испытываемую единицей объема диэлектрика:

$$\mathbf{F} = n (d\mathbf{\nabla}) \mathbf{E}.$$

Так как $n\mathbf{d}$ представляет собой вектор поляризации диэлектрика \mathbf{P} , то

$$\mathbf{F} = (\mathbf{P}\mathbf{\nabla}) \mathbf{E}.$$

Подставляя сюда $\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}$, окончательно получаем

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} (\mathbf{E}\mathbf{\nabla}) \mathbf{E}.$$

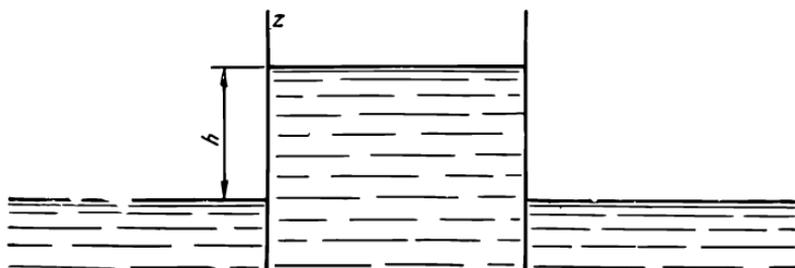


Рис. 3.14

Рассмотрим простейший случай, когда поле направлено вдоль оси x и зависит только от координаты x ; тогда ponderomotorная сила F будет также направлена вдоль оси x :

$$F = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E \frac{dE}{dx} = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \frac{d}{dx} E^2.$$

Оказывается, что и в общем случае, когда поле имеет произвольное направление и зависит от трех координат, выражение для силы F может быть преобразовано к виду, похожему на эту формулу.

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \mathbf{\nabla} E^2.$$

Таким образом, сила, действующая на единицу объема диэлектрика, пропорциональна градиенту от квадрата поля и направлена в сторону увеличения абсолютного значения поля, так что диэлектрик всегда увлекается в область наибольшей напряженности поля. Этим, в частности, объясняется притяжение заряженными проводниками кусочков бумаги или бузиновых шариков

Используя приведенную выше формулу, можно определить высоту поднятия газа или жидкости, втягиваемой в вертикальный плоский конденсатор (рис 3.14) Обозначая через z координату, направленную вверх, запишем следующее уравнение равновесия жидкости:

$$-\rho_m g + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \frac{d}{dz} E^2 = 0,$$

где ρ_m — массовая плотность жидкости; g — ускорение силы тяжести. Отсюда следует, что высота поднятия жидкости

$$h = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi g \rho_m} E^2.$$

Эта формула позволяет также определить пространственное распределение молекул газа, находящегося в электрическом поле. Если поле направлено по вертикали и зависит от высоты z , то результирующая сила, действующая на молекулу и обусловленная электрическим и гравитационным полями, определяется формулой

$$f = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi n} \frac{d}{dz} E^2 - mg = \frac{\beta}{2} \frac{d}{dz} E^2 - mg,$$

где m — масса молекулы; $\beta = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi n}$ — ее поляризуемость. Учитывая связь между силой f и потенциальной энергией U , $f = -dU/dz$, находим потенциальную энергию молекулы в обоих полях:

$$U = mgz - \frac{\beta}{2} E^2.$$

Распределение молекул по высоте определяется формулой Больцмана

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}.$$

Здесь n_0 — плотность частиц в том месте, где $U = 0$; T — температура газа (считается, что газ находится в состоянии статистического равновесия). Таким образом,

$$n = n_0 e^{-\left(mgz - \frac{\beta}{2} E^2\right) / kT}.$$

Формула $\mathbf{F} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2$ определяет объемную плотность пондеромоторных сил как в случае газов, так и в случае жидкостей, если вектор поляризации \mathbf{P} пропорционален плотности частиц. В общем случае, когда вектор поляризации зависит от плотности частиц более сложно, плотность пондеромоторных сил в диэлектрике определяется формулой

$$\mathbf{F} = -\frac{E^2}{8\pi} \text{grad } \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \rho_m \right).$$

Зная плотность пондеромоторных сил, можно найти результирующую силу, действующую на диэлектрик в электрическом поле:

$$\mathfrak{F} = \int_V \mathbf{F} dV,$$

где V — объем, занимаемый диэлектриком. Эту же силу можно получить, если представить себе, что к поверхности S , ограничи-

вающей объем V , приложены некоторые поверхностные силы. Обозначим через $\mathbf{T}_n dS$ такую эквивалентную силу, действующую на элемент поверхности dS , внешняя нормаль к которому направлена вдоль \mathbf{n} . Тогда

$$\mathfrak{F} = \int \mathbf{T}_n dS.$$

Сила \mathbf{T}_n , действующая на единицу площади поверхности, называется максвелловским натяжением. Если не учитывать зависимости диэлектрической проницаемости от плотности, то максвелловское натяжение определяется формулой

$$\mathbf{T}_n = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_n \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} n \varepsilon E^2.$$

Эта формула допускает простую физическую интерпретацию: поверхностные силы действуют так, как если бы вдоль силовых линий были натянуты материальные упругие нити, подверженные «тяге» $\varepsilon E^2/8\pi$ и оказывающие друг на друга боковое давление $\varepsilon E^2/8\pi$.

Зная максвелловское натяжение, можно найти силу, действующую на границе раздела двух диэлектриков. Отнесенная к единице площади, она равна, очевидно,

$$\mathbf{T}_{1n} + \mathbf{T}_{2n} = \frac{1}{4\pi} (D_{2n} \mathbf{E}_2 - D_{1n} \mathbf{E}_1) - \frac{1}{8\pi} (D_2 \mathbf{E}_2 - D_1 \mathbf{E}_1) \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, перпендикулярный границе раздела диэлектриков 1 и 2 и направленный из среды 1 в среду 2. Если поля \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 в обоих диэлектриках направлены вдоль \mathbf{n} , это выражение приобретает вид

$$\mathbf{T}_{1n} + \mathbf{T}_{2n} = \left(\frac{\varepsilon_2}{8\pi} E_2^2 - \frac{\varepsilon_1}{8\pi} E_1^2 \right) \mathbf{n},$$

т. е. в данном случае поверхностное натяжение равно разности плотностей электрической энергии по обе стороны границы раздела диэлектриков и направлено в ту сторону, где плотность энергии больше. Этот результат мы получили в § 3.2, рассматривая силы, действующие в плоском слоистом конденсаторе.

§ 3.10. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ КРИСТАЛЛОВ

Газы и жидкости представляют собой изотропные среды. Это значит, что все их свойства и в частности электрические, одинаковы во всех направлениях. Напротив, твердые тела, точнее, монокристаллы отличаются анизотропией свойств. Это значит, что свойства монокристалла различны в разных направлениях. Например, поляризуемость кристалла в общем не одинакова в разных направлениях. Анизотропия в свойствах монокристалла связана, естественно, с характером его внутренней структуры, т. е. с наличием кристаллической решетки.

Анизотропия в поляризуемости кристалла проявляется, например, в том, что если вырезать из монокристалла две пластинки,

различно ориентированные относительно кристаллографических осей, и поместить сперва одну, а потом другую между обкладками конденсатора, то емкость конденсатора в обоих случаях будет не одинаковой. Отсюда следует, что диэлектрическая проницаемость, а следовательно, и электрическая восприимчивость кристалла различны в разных направлениях. Исключение составляют кристаллы кубической системы, которые ведут себя как изотропные тела.

Так, диэлектрическая проницаемость кристалла берилла $((\text{SiO}_3)_6\text{Al}_2\text{Be}_3)$, принадлежащего гексагональной системе, равна 7,44 и 7,85 в зависимости от того, будет ли электрическое поле параллельно или перпендикулярно оси шестого порядка. Для апатита диэлектрическая проницаемость при поле, направленном вдоль оси, равна 7,4, а при поле, перпендикулярном оси, — 9,5. Особенно велика разница в значениях диэлектрической проницаемости в разных направлениях у рутила (TiO_2) , принадлежащего тетрагональной системе. Если поле направлено вдоль оси (четвертого порядка), то диэлектрическая проницаемость равна 173; если поле направлено перпендикулярно этой оси, то диэлектрическая проницаемость равна 89.

Анизотропия поляризуемости характерна для монокристалла. В поликристаллах, состоящих из огромного числа маленьких кристалликов, произвольно ориентированных относительно друг друга, происходит усреднение поляризуемости, и такие кристаллы ведут себя в электрическом поле как изотропные тела, т. е. как газы и жидкости.

Для газов и жидкостей вектор поляризации \mathbf{P} , как мы видели, пропорционален напряженности поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E},$$

где α — электрическая восприимчивость. Для диэлектрических монокристаллов эта формула неприменима, поскольку она не учитывает эффекта анизотропии; кроме того, ряд монокристаллов обладает вектором поляризации, не обращающимся в нуль при $\mathbf{E} = 0$ и сложно, нелинейным образом зависящим от поля. Эти эффекты мы рассмотрим подробнее в следующем параграфе, здесь же остановимся только на эффекте анизотропии.

Если вектор поляризации монокристалла \mathbf{P} равен нулю при $\mathbf{E} = 0$, то при достаточно слабом поле он будет линейной функцией поля. Это значит, что если увеличить в несколько раз вектор поля, то во столько же раз возрастет и вектор поляризации. Необходимо при этом учитывать, что направление вектора поляризации в монокристалле может и не совпадать с направлением поля. Однако сколь бы ни была сложна симметрия кристалла, всегда в любом кристалле существуют по крайней мере три таких взаимно перпендикулярных направления, что если направление поля совпадает с одним из них, то такое же направление имеет и вектор поляризации. Значит, если оси координат X, Y, Z выбраны вдоль этих направлений (они называются главными направлениями поляризуемости) и электрическое поле \mathbf{E} направлено вдоль оси X , т. е. $E_X = E, E_Y = E_Z = 0$, то у вектора поляризации \mathbf{P} отличается от нуля только проекция P_X на ось X , причем она связана с E_X соотношением

$$P_X = \alpha_1 E_X,$$

где α_1 — некоторая характерная для кристалла величина, не зависящая от поля (поле считается слабым) и представляющая собой электрическую восприимчивость кристалла вдоль оси X . Аналогичным образом, если поле направлено вдоль оси Y или Z , вектор поляризации направлен вдоль оси Y или Z , причем в первом случае

$$P_Y = \alpha_2 E_Y,$$

а во втором

$$P_Z = \alpha_3 E_Z,$$

где α_2 и α_3 — электрические восприимчивости кристалла вдоль осей Y и Z . Величины α_1 , α_2 , α_3 называются главными значениями электрической восприимчивости кристалла.

Рассмотрим теперь случай, когда направление электрического поля \mathbf{E} не совпадает ни с одним из главных направлений поляризуемости. Чтобы найти вектор поляризации в этом случае, представим поле в виде суперпозиции

$$\mathbf{E} = iE_X + jE_Y + kE_Z,$$

где i, j, k — единичные орты вдоль осей X, Y, Z ; E_X, E_Y, E_Z — проекции поля на эти оси, и учтем линейность связи между \mathbf{P} и \mathbf{E} . Благодаря этой линейности проекции вектора поляризации на оси координат X, Y, Z соответственно равны

$$P_X = \alpha_1 E_X, \quad P_Y = \alpha_2 E_Y, \quad P_Z = \alpha_3 E_Z,$$

т. е. вектор \mathbf{P} можно представить в виде

$$\mathbf{P} = i\alpha_1 E_X + j\alpha_2 E_Y + k\alpha_3 E_Z.$$

Ясно, что если величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ не одинаковы, то вектор \mathbf{P} не будет параллелен вектору \mathbf{E} , как в случае изотропной среды.

Легко вычислить угол ϑ между этими векторами. Если ξ, η и ζ — углы между вектором \mathbf{E} и осями координат X, Y, Z , так что

$$E_X = E \cos \xi, \quad E_Y = E \cos \eta, \quad E_Z = E \cos \zeta,$$

то проекции вектора \mathbf{P} соответственно равны

$$P_X = \alpha_1 E \cos \xi, \quad P_Y = \alpha_2 E \cos \eta, \quad P_Z = \alpha_3 E \cos \zeta.$$

Поэтому косинусы углов между \mathbf{P} и осями X, Y, Z имеют вид

$$\cos \xi' = \nu \alpha_1 \cos \xi, \quad \cos \eta' = \nu \alpha_2 \cos \eta, \quad \cos \zeta' = \nu \alpha_3 \cos \zeta,$$

где

$$\nu = (\alpha_1^2 \cos^2 \xi + \alpha_2^2 \cos^2 \eta + \alpha_3^2 \cos^2 \zeta)^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда $\cos \vartheta$ определяется формулой

$$\cos \vartheta = \nu (\alpha_1 \cos^2 \xi + \alpha_2 \cos^2 \eta + \alpha_3 \cos^2 \zeta).$$

При $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ получаем $\vartheta = 0$.

Анизотропия поляризуемости приводит к анизотропии диэлектрической проницаемости, так как вектор электрической индукции

D связан с вектором поляризации **P** и напряженностью поля **E** соотношением

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

независимо от того, тело изотропное или анизотропное. Из этого соотношения следует, что в слабых полях между векторами **D** и **E** существует линейная связь, но эти векторы, в принципе, не параллельны. Если ввести главные значения диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_1 = 1 + 4\pi\alpha_1, \quad \varepsilon_2 = 1 + 4\pi\alpha_2, \quad \varepsilon_3 = 1 + 4\pi\alpha_3,$$

то проекции векторов **D** и **E** на главные направления связаны между собой соотношениями

$$D_X = \varepsilon_1 E_X, \quad D_Y = \varepsilon_2 E_Y, \quad D_Z = \varepsilon_3 E_Z.$$

Угол между векторами **D** и **E** определяется формулой, аналогичной формуле для угла между **P** и **E**; в ней следует лишь заменить $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ всегда положительны, поэтому главные значения диэлектрической проницаемости всегда больше единицы.

У кристаллов с малосимметричной решеткой, принадлежащих к триклинной, моноклинной и ромбической системам, все три главных значения диэлектрической проницаемости различны. Эти кристаллы называются двухосными. При этом у кристаллов ромбической системы главные направления определяются кристаллографически, у кристаллов триклинной системы главные направления не связаны с какими-либо кристаллографическими направлениями. У кристаллов тетрагональной, ромбоэдрической и гексагональной систем два из трех главных значений диэлектрической проницаемости совпадают (такие кристаллы называют одноосными); при этом одно из главных направлений совпадает с осью симметрии (соответственно четвертого, третьего и шестого порядка), а два других можно выбрать произвольно в плоскости, перпендикулярной этой оси. У кристаллов кубической системы все три главных значения диэлектрической проницаемости совпадают. Поэтому такие кристаллы ведут себя как изотропные среды; главные направления при этом можно выбирать произвольно.

Подчеркнем еще раз, что поликристаллы в отличие от монокристаллов ведут себя в электростатическом поле как изотропные среды.

§ 3.11. КРИСТАЛЛЫ СО СПОНТАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

В предыдущем параграфе мы отмечали, что кристалл может отличаться не только анизотропией поляризуемости, но и обладать вектором поляризации в отсутствие поля. Монокристалл можно рассматривать как единую гигантскую молекулу. Поэтому не удивительно, что, так же как и молекула, кристалл в целом может быть полярным, т. е. обладать дипольным моментом в отсутствие внешнего электрического поля. Этот момент будет макроскопическим, т. е. пропорциональным объему кристалла. Таким образом, в данном случае в отсутствие электрического поля кристалл будет обладать отличным от нуля вектором поляризации. Он называется собственным или спонтанным вектором поляризации.

Чтобы кристалл обладал спонтанной поляризацией, в нем должно существовать некоторое избранное направление, неизменное при всех преобразованиях симметрии решетки кристалла. В частности, в числе элементов симметрии не должно быть центра симметрии, так как в этом случае каждое направление эквивалентно прямо противоположному. В числе элементов симметрии могут быть лишь одна ось и проходящие через нее плоскости симметрии. Это условие является, конечно, только необходимым, но отнюдь не достаточным условием наличия у кристалла спонтанной поляризации. Кристаллы со спонтанной поляризацией называются пирозлектриками

У одних кристаллов со спонтанной поляризацией спонтанный момент существует при любой температуре, т. е. по всей температурной области существования кристаллического состояния, а у других — только в определенном интервале температур. Кристаллы первого типа называются собственно пирозлектриками, а второго — сегнетоэлектриками. К числу пирозлектриков относится, например, турмалин, а к числу сегнетоэлектриков — сегнетова соль, титанат бария и др.

У пирозлектриков спонтанный дипольный момент наблюдается обычно после их нагревания, так как при этом пирозлектрики освобождаются от осевших на них ионов (поэтому и применяется приставка пиро). Название сегнетоэлектрика происходит от сегнетовой соли, которая была первым исследованным диэлектриком этого рода. (Сегнетова соль названа по имени аптекаря П. де ля Сенье, впервые получившего ее в качестве слабительного в городе Ла-Рошели в XVII в.)

Спонтанный дипольный момент у пирозлектриков обусловлен либо смещением подрешеток ионов, либо упорядочением атомных групп, обладающих дипольным моментом. Смещение подрешеток происходит, например, у кристаллов титаната бария (BaTiO_3). На рис. 3.15 изображена кубическая структура титаната бария: ионы Ba^{2+} расположены в углах куба, ионы Ti^{4+} — в центре куба, а ионы O^{2-} — в центрах граней (такого рода структура называется «структурой перовскита» — от названия минерала перовскита (CaTiO_3)). При температуре ниже 391 К, когда кристалл титаната бария имеет спонтанную поляризацию, решетка кристалла несколько деформирована, а именно растянута вдоль ребра куба. В этом направлении смещается ион титана и образуется дипольный момент.

У сегнетоэлектриков ионы (или атомные группы, обладающие дипольным моментом), ответственные за возникновение спонтанной поляризации, смещаются сравнительно легко, тогда как у пирозлектриков они закреплены жестко. По этой причине у сегнетоэлектриков спонтанная поляризация существует в определенном интервале температур, а у пирозлектриков — при любой температуре. Выше некоторой температуры (она называется температурой Кюри) спонтанный дипольный момент сегнетоэлектрика исчезает. При этом происходит также изменение симметрии кристаллической решетки, так что ниже и выше температуры Кюри существуют две различные фазы вещества. Они называются соответственно сегнетоэлектрической (или ферроэлектрической) и параэлектрической фазами.

Различают сегнетоэлектрический фазовый переход первого и второго рода. В случае фазового перехода первого рода выде-

ляется либо поглощается тепло, а в случае фазового перехода второго рода в точке Кюри скачкообразно изменяется (рис. 3.16) теплоемкость сегнетоэлектрика. У пьезоэлектриков фазовых переходов таких типов не происходит.

В области высоких температур (выше температуры Кюри) спонтанный момент всегда отсутствует. Но он не может отсутствовать и в области низких температур, так что лишь в некотором интервале температур сегнетоэлектрическая фаза устойчива. В этом случае обе граничные температуры также называют температурами Кюри — верхней и нижней.

До сих пор мы говорили только о спонтанной поляризации сегнетоэлектрика, т. е. поляризации в отсутствие поля. Если к сегнетоэлектрику приложить электрическое поле E , то вектор его

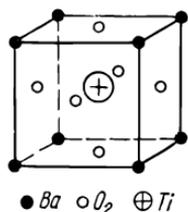


Рис. 3.15

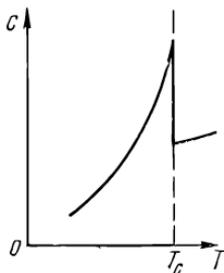


Рис. 3.16

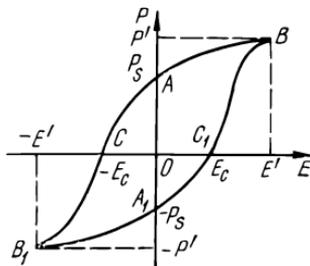


Рис. 3.17

поляризации P изменяется, однако в отличие от обычных диэлектриков связь между P и E будет существенно нелинейной. Характерная для сегнетоэлектриков зависимость P от E изображена на рис. 3.17. Мы видим, что если поле изменяется от нуля до некоторого максимального значения E' , то величина поляризации изменяется от спонтанной поляризации P_s до некоторого значения P' вдоль кривой AB . При уменьшении поля от E' до нуля величина поляризации изменяется в направлении BA , пока не достигнет значения спонтанной поляризации.

Если изменить направление поля на обратное и увеличивать величину поля, то поляризация будет изменяться по кривой AC , пока в точке C при поле $-E_c$ не обратится в нуль. Это поле называется коэрцитивной силой. При дальнейшем увеличении поля (по абсолютному значению) возникает поляризация, вектор которой будет направлен противоположно первоначальному направлению. При поле $-E'$ поляризация равна $-P'$ (точка B_1 кривой поляризации). Если теперь уменьшать поле, то величина поляризации будет изменяться вдоль участка B_1A_1 кривой и при $E = 0$ станет равной $-P_s$. После изменения направления поля при $E = E_c$ вектор поляризации обратится в нуль (точка C_1) и далее будет изменяться вдоль кривой C_1B , пока при $E = E'$ не достигнет значения P' (точка B).

Таким образом, в сегнетоэлектрике поляризация не является однозначной функцией приложенного электрического поля. При циклическом изменении поля от E' до $-E'$ и обратно от $-E'$ до E' поляризация изменяется различными путями. Это свойство

сегнетоэлектриков называется диэлектрическим гистерезисом (кривая $BACB_1A_1C_1B$ называется петлей гистерезиса).

Отметим, что при поле, равном нулю, возможны два состояния сегнетоэлектрика, отличающихся друг от друга только знаком спонтанной поляризации; иными словами, возможно как одно, так и прямо противоположное направление вектора спонтанной поляризации (см. рис. 3.17).

Рассмотрим более подробно связь между поляризацией и полем вблизи сегнетоэлектрического фазового перехода, т. е. при температуре T , близкой к температуре Кюри T_C . Если при этом поле E невелико, то небольшой будет и поляризация. Поэтому, рассматривая E как функцию P , можно представить ее в виде ряда по степеням P , в котором достаточно сохранить только несколько первых членов.

Разумным приближением является двучлен

$$E = \xi P + \eta P^3,$$

где ξ и η — некоторые параметры, зависящие от температуры. Действительно, при $E = 0$ получаем отсюда два значения для спонтанной поляризации P_s , отличающиеся только знаком:

$$P_s = \pm \sqrt{-\frac{\xi}{\eta}}.$$

Спонтанная поляризация существует только при $T < T_C$. Поэтому эти значения должны быть вещественными только при $T < T_C$ и обращаться в нуль при $T = T_C$. Следовательно, величина ξ должна обращаться в нуль при $T = T_C$, а так как температура T близка к температуре Кюри, то естественно считать, что

$$\xi = \xi_0 (T - T_C),$$

где ξ_0 — не зависящая от T константа. Кроме того, поскольку $T \approx T_C$, величину η можно считать не зависящей от T . Итак, мы видим, что

$$P_s = \pm \sqrt{(T_C - T) \frac{\xi_0}{\eta}}, \quad T < T_C,$$

т. е. спонтанная поляризация вблизи точки Кюри пропорциональна $(T_C - T)^{1/2}$.

Определим теперь электрическую восприимчивость сегнетоэлектрика вблизи точки Кюри. Эту величину при нелинейной связи между поляризацией и полем естественно определить как производную от поляризации по полю:

$$\alpha = \frac{dP}{dE}.$$

Замечая, что

$$\frac{dE}{dP} = \xi + 3\eta P^2,$$

имеем

$$\alpha = \frac{1}{\xi + 3\eta P^2} = \frac{1}{\xi_0 (T - T_C) + 3\eta P^2}.$$

Так как поле предполагается слабым, то в этом выражении в паразлектрической фазе ($T > T_C$) можно пренебречь в знаменателе членом, содержащим P^2 , т. е.

$$\alpha = \frac{1}{\xi_0 (T - T_C)}, \quad T > T_C.$$

В сегнетоэлектрической фазе вместо P^2 нужно подставить $P_s^2 = (T_C - T) \frac{\xi_0}{\eta}$; в результате получаем

$$\alpha = \frac{1}{2\xi_0 (T_C - T)}, \quad T < T_C.$$

Используя соотношение $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha$, находим диэлектрическую проницаемость сегнетоэлектрика вблизи точки Кюри:

$$\epsilon = \begin{cases} 1 + \frac{4\pi}{\xi_0 (T - T_C)}, & T > T_C; \\ 1 + \frac{2\pi}{\xi_0 (T - T_C)}, & T < T_C. \end{cases}$$

Мы видим, что в точке Кюри диэлектрическая проницаемость обращается в бесконечность.

Рассматривая свойства сегнетоэлектриков, мы считали кристалл бесконечно протяженным. Между тем наличие границ кри-

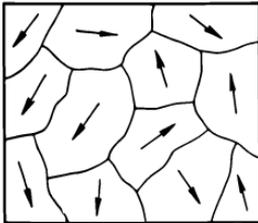


Рис. 3.18



Рис. 3.19

сталла имеет весьма существенное значение. Благодаря спонтанному дипольному моменту кристалл создает вокруг себя электрическое поле, которое обладает определенной энергией. Кроме того, термодинамически равновесное состояние тела всегда соответствует минимуму энергии. Поэтому уменьшение этой энергии термодинамически было бы выгодно. Такая возможность осуществляется вследствие разбиения сегнетоэлектрического кристалла на отдельные макроскопические области с различно направленными векторами спонтанной поляризации (они называются доменами). На рис. 3.18 изображено распределение направлений спонтанной поляризации в многодоменном кристалле титаната бария.

Разбиение кристалла на домены приводит к уменьшению электрической энергии окружающего кристалл поля, но зато при этом возникает добавочная энергия, связанная с работой, которую нужно затратить, чтобы создать «стенку» между соседними доменами (схематически доменная стенка изображена на рис. 3.19). Эта энергия

может рассматриваться как поверхностная энергия стенок. Ясно, что чем больше будет доменов, тем меньше электрическая энергия, но зато тем больше поверхностная энергия. Поэтому возникает вопрос о минимуме суммарной энергии, решение которого позволяет найти форму, размеры и число доменов.

Под влиянием внешнего электрического поля доменные стенки могут перемещаться. Кроме того, могут образовываться и развиваться зародыши новых доменов со спонтанной поляризацией, направленной вдоль поля. В достаточно сильном поле кристалл всегда становится однодоменным.

Выше мы указывали, что ионы, ответственные за возникновение спонтанной поляризации у сегнетоэлектриков, могут сравнительно легко смещаться. Поэтому не удивительно, что механические напряжения могут сами вызывать у сегнетоэлектриков электрическую поляризацию. Это явление называется пьезоэлектрическим эффектом. Существует и обратный эффект — изменение формы или размеров кристалла под действием внешнего электрического поля. Заметим, что этот эффект следует отличать от электрострикции у обычных диэлектриков, т. е. от изменения их формы и объема под влиянием внешнего поля. Электрострикция пропорциональна квадрату поля, тогда как обратный пьезоэлектрический эффект пропорционален первой степени поля.

Все сегнетоэлектрики являются пьезоэлектриками, но пьезоэлектриками могут быть и не сегнетоэлектрики; к числу последних относится кварц.

Наряду с сегнетоэлектриками существуют кристаллы (ионные), содержащие цепочки спонтанно поляризованных ионов, причем поляризации в любых соседних цепочках ориентированы противоположно. Такие кристаллы называются антисегнетоэлектриками (к числу их относится трехокись вольфрама WO_3).

В заключение отметим еще один класс веществ, обладающих спонтанной поляризацией. Это электреты, которые образуются при затвердевании смесей органических смол в сильном электрическом поле. Электрическое поле ориентирует дипольные моменты некоторых из молекул этих веществ, а при затвердевании ориентация моментов сохраняется после выключения поля. Поляризация, полученная таким образом, может сохраняться в течение нескольких лет, но по-видимому, состояние поляризации электретов является метастабильным, а неполяризованное состояние — стабильным,

§ 4.1. ВЕКТОР ПЛОТНОСТИ ТОКА

Как мы уже отмечали, внутренние заряды в проводниках в отличие от диэлектриков могут свободно перемещаться под действием приложенного электрического поля. Движение заряженных частиц в проводниках под действием приложенного электрического поля называется электрическим током, а способность проводников проводить ток — электропроводностью.

К проводникам относятся металлы, полупроводники, электролиты и ионизованные газы (плазма). Подвижными заряженными частицами в металлах являются электроны; ионы в металлах неподвижны и образуют остов кристаллической решетки (точнее, ионы совершают малые колебания около узлов решетки — положений равновесия ионов). Поэтому ток в металлах представляет собой движение электронов. Аналогично и в полупроводниках подвижны только электроны.

Электропроводность электролитов обусловлена ионами. Наконец, в плазме наряду с электронами в токе участвуют и ионы.

Чтобы получить количественную характеристику тока, выделим некоторый небольшой объем проводника (для простоты считаем его единичным) и образуем для него сумму произведений зарядов подвижных частиц на векторы их скоростей. Такая векторная сумма называется вектором плотности тока или просто плотностью тока. Если e_l — заряд l -й частицы и v_l — ее скорость, то плотность тока определяется формулой

$$\mathbf{j} = \sum e_l \mathbf{v}_l,$$

где сумма распространяется на все заряженные частицы в рассматриваемом единичном объеме проводника. Эта величина и может служить характеристикой тока.

В отсутствие поля плотность тока равна нулю. Действительно, заряженные частицы проводника, как и атомы газа, участвуют в тепловом движении, а в силу хаотичности этого движения среднее значение вектора скорости частицы равно нулю. Это значит, что в отсутствие поля для каждого сорта частиц в любом элементе объема будет равное число частиц со скоростями \mathbf{v} и $-\mathbf{v}$. Поэтому, если поле $\mathbf{E} = 0$, то нулю равна векторная сумма, определяющая плотность тока \mathbf{j} . Если поле в проводнике отлично от нуля, то возникает направленное движение заряженных частиц проводника, при котором плотность тока отлична от нуля.

Легко связать скорость направленного движения заряженных частиц с плотностью тока. Рассмотрим прежде всего простейший

случай, когда ток обусловлен движением частиц только одного сорта, например электронов, как это имеет место у металлов. Направленная, или, что то же самое, средняя, скорость частиц $\bar{\mathbf{v}}$ в каком-либо месте проводника определяется как частное от деления векторной суммы скоростей частиц в небольшом объеме ΔV , окружающем рассматриваемое место, к числу частиц ΔN в этом объеме:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\sum_{(\Delta V)} \mathbf{v}}{\Delta N}.$$

Отсюда следует, что $\sum_{(\Delta V)} \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \Delta N$, а так как $\Delta N = n \Delta V$, где n — плотность частиц, то

$$\sum_{(\Delta V)} \mathbf{v} = n \bar{\mathbf{v}} \Delta V.$$

Используя эту формулу и считая в ней элемент объема ΔV единичным, можно представить плотность тока в виде

$$\mathbf{j} = en\bar{\mathbf{v}},$$

где e — заряд частицы.

Таким образом, если ток связан с частицами одного сорта, то плотность тока равна произведению заряда частицы на их плотность и среднюю скорость. Эта величина допускает простую физическую интерпретацию. Построим параллелепипед, площадь основания которого равна 1 см^2 , а высота \bar{v} (рис. 4.1). Ясно, что заряд, заключенный в этом параллелепипеде, равен $en|\bar{\mathbf{v}}|$. Поэтому плотность тока численно равна количеству электричества, проходящего в единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно средней скорости частиц $\bar{\mathbf{v}}$.

Если ток связан с движением зарядов разных сортов, то формула для плотности тока очень просто обобщается:

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}_{\alpha},$$

где индекс α служит для обозначения сорта частиц.

Поскольку величина \mathbf{j} определяет количество электричества, протекающего за t с через площадку 1 см^2 , ориентированную перпендикулярно вектору \mathbf{j} , количество электричества dI , протекающего за единицу времени через площадку dS , ориентированную произвольно, определяется формулой

$$dI = \mathbf{j} dS,$$

где dS — вектор площадки, $dS = \mathbf{n} dS$ (\mathbf{n} — единичный вектор нормали к площадке). Если задана какая-либо поверхность S , то через нее в единицу времени проходит количество электричества

$$I = \int_S \mathbf{j} dS.$$

Эта величина называется силой тока, проходящего через поверхность S ,

Таким образом, сила тока через какую-либо поверхность представляет собой поток вектора плотности тока через эту поверхность. Сила тока (короче, ток) имеет размерность

$$[I] = \frac{[e]}{[t]} = L^{3/2} T^{-2} M^{1/2}.$$

Поэтому единицей силы тока в системе СГСЕ будет $1 \text{ г}^{1/2} \text{ см}^{3/2} \text{ с}^{-2}$. Эта единица, однако, очень мала, и на практике пользуются большей единицей — ампером (А):

$$1 \text{ А} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЕ единиц силы тока.}$$

Плотность тока имеет размерность

$$[j] = \frac{[I]}{[S]} = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-2}.$$

На практике плотность тока измеряется в $\text{А}/\text{см}^2$.

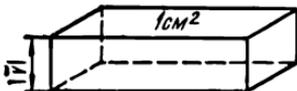


Рис. 4.1

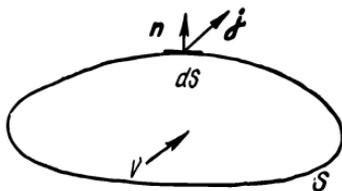


Рис. 4.2

Вектор плотности тока в общем может изменяться от точки к точке и, кроме того, зависеть от времени. Поэтому можно считать, что существует векторное поле плотности тока, или, сокращенно, токовое поле, а также токовые линии, т. е. линии, касательная к которым в каждой их точке имеет направление существующего в этой точке вектора j . Это поле удовлетворяет важному соотношению, которое вытекает из закона сохранения заряда. Чтобы получить его, рассмотрим произвольную замкнутую поверхность S (рис. 4.2) и определим изменение в единицу времени заряда Q , который находится в объеме V , ограниченном поверхностью S . Так как заряд не может ни возникнуть, ни уничтожаться, то изменение заряда Q в единицу времени должно равняться суммарной силе тока, вытекающего из объема V через поверхность S , т. е.

$$\dot{Q} = -I,$$

где I — сила тока, вытекающего из объема V . Подставляя сюда

$$Q = \int_V \rho dV, \quad I = \int_S j dS,$$

где ρ — объемная плотность заряда; j — плотность тока (dS имеет направление внешней к поверхности S нормали), получаем

$$\int_S j dS = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Левая часть этого равенства представляет собой поток вектора \mathbf{j} через замкнутую поверхность. С выражением такого типа мы уже встречались при формулировке теоремы Гаусса. Используя полученные там результаты, можно преобразовать поверхностный интеграл в объемный:

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \, dV.$$

Поэтому

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \, dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV,$$

откуда вследствие произвольности объема V

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Это и есть искомое соотношение. Оно называется уравнением непрерывности и выражает математически закон сохранения заряда.

Чтобы разъяснить смысл этого уравнения, сравним его с теоремой Гаусса в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Мы видим, что можно проводить аналогию между электрическим \mathbf{E} и токовым \mathbf{j} полями, причем если источником электрического поля является заряд ρ , то источником токового поля — временное изменение заряда $\partial\rho/\partial t$.

Электрические силовые линии начинаются и кончаются в точках, в которых плотность заряда отлична от нуля, токовые же линии начинаются и кончаются там, где отлична от нуля производная по времени от плотности заряда. Поэтому если плотность тока не зависит от времени (такой ток называется постоянным), то ему может соответствовать только не зависящая от времени плотность заряда, т. е. токовое поле в этом случае не будет иметь источников и, следовательно, токовые линии будут замкнутыми. Таким образом, в случае постоянного тока токовые линии всегда замкнуты.

§ 4.2. ЗАКОН ОМА

Перейдем теперь к подробному изучению постоянного тока. Прежде всего выясним, при каких условиях может существовать постоянный ток. Вопрос этот заключается в следующем. Для того чтобы протекал ток, в проводнике должно существовать отличное от нуля электрическое поле, действующее на подвижные заряды. Но постоянному току соответствует согласно уравнению непрерывности постоянная, т. е. не зависящая от времени, плотность заряда. Поэтому электрическое поле, создаваемое зарядами, будет также постоянным, и мы приходим к выводу, что в проводнике должно существовать электрическое поле, причем оно должно быть постоянным. Между тем в гл. 2 неоднократно утверждалось, что электростатическое поле в проводнике всегда равно нулю. Как же при этом может протекать постоянный ток?

И действительно, в чисто электростатическом поле существование постоянного тока невозможно. Это видно также из того, что токовые линии постоянного тока замкнуты; поэтому заряд, движущийся вдоль токовой линии, будет непрерывно совершать работу, а окружающее электростатическое поле остается неизменным, что противоречит закону сохранения энергии.

Этот парадокс разрешается следующим образом. Существование постоянного тока возможно, но для этого необходимо привлечение неэлектростатических сил. Именно необходимо, чтобы по крайней мере в некоторых местах токовых линий на подвижные заряды действовали неэлектростатические силы. Их называют сторонними электрическими силами, и они всегда имеют неэлектростатическое происхождение. Для их получения используются источники постоянного тока — гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы, а также динамомашин постоянного тока. Механизмы действия этих источников мы рассмотрим в следующих главах, пока же введем сторонние силы чисто формально, т. е. феноменологически.

Обозначим суммарную силу, действующую на единичный заряд в проводнике, через \mathbf{E}' . Она включает как электростатическое поле \mathbf{E} , так и стороннюю силу $\mathbf{E}^{(e)}$:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}.$$

Это суммарное поле \mathbf{E}' и определяет плотность тока \mathbf{j} , а так как при $\mathbf{E}' = 0$ плотность тока \mathbf{j} , как мы уже указывали, равна нулю, то естественно предполагать, что при достаточно малых полях \mathbf{E}' плотность тока должна быть пропорциональна полю \mathbf{E}' . Именно так и оказывается, причем для изотропных проводников существует простая пропорциональная зависимость между векторами \mathbf{j} и \mathbf{E}' :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'.$$

Для анизотропных проводников, т. е. металлических монокристаллов, компоненты j_l и E'_i векторов \mathbf{j} и \mathbf{E}' связаны между собой общим линейным соотношением:

$$j_l = \sum_k \sigma_{lk} E'_k,$$

где индексы i и k ($i, k = x, y, z$) служат для обозначения трех декартовых осей координат; при этом величины σ_{lk} удовлетворяют условию симметрии

$$\sigma_{lk} = \sigma_{kl}.$$

Эти величины, так же как и величину σ , называют коэффициентами электропроводности проводника. Они различны для разных проводников и зависят от ряда физических факторов, таких, как температура, наличие примесей и т. д. Коэффициенты электропроводности имеют размерность

$$[\sigma] = \frac{[j]}{[E]} = T^{-1}.$$

Линейное соотношение, связывающее плотность тока и суммарное поле, называется законом Ома (в дифференциальной форме).

Хотя этот закон и кажется очень простым, тем не менее он нуждается в некотором разъяснении. Если в проводнике на подвижный заряд действует постоянное поле, то заряд этот, казалось бы, должен непрерывно ускоряться, т. е. он не может обладать постоянной скоростью, а между тем согласно закону Ома мы получаем при заданном поле \mathbf{E}' конечное значение плотности тока \mathbf{j} , которому соответствует по формуле $\mathbf{j} = en\mathbf{v}$ конечное значение скорости частицы \mathbf{v} . Каким же образом возникает равномерное, а не равномерно ускоренное движение зарядов проводников? Ответ на этот вопрос следующий: заряды в проводнике подвижны, но их нельзя считать полностью свободными.

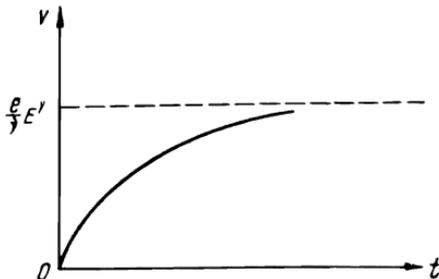


Рис. 4.3

Разъясним это на примере электролита. Пусть в нем под действием поля \mathbf{E}' происходит движение заряженной частицы с зарядом e и массой m . Если бы частица была свободной, то движение ее определялось бы уравнением $m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}'$. Но в действительности электролит обладает вязкостью, вследствие чего при движении частицы возникает трение. Сила трения направлена обратно скорости и равна $-\nu\mathbf{v}$, где ν — коэффициент трения. Таким образом, движение частицы определяется уравнением

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}' - \nu\mathbf{v},$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{v} = \frac{e}{\nu} \mathbf{E}' + a e^{-\frac{\nu}{m}t},$$

где a — константа интегрирования. Ее можно найти из начальных условий. Если в начальный момент времени $t = 0$ скорость частицы равнялась нулю, то, очевидно, $a = -\frac{e}{\nu} \mathbf{E}'$ и, следовательно,

$$\mathbf{v} = \frac{e}{\nu} \mathbf{E}' \left(1 - e^{-\frac{\nu}{m}t} \right).$$

Мы видим, что с течением времени скорость увеличивается и стремится к предельному значению $\frac{e}{\nu} \mathbf{E}'$, не зависящему от времени

(рис. 4.3). По прошествии времени $\tau = \frac{m}{\nu}$ после включения поля (это время называется временем релаксации) скорость будет отличаться от предельного значения на $1/e$ предельного значения, по прошествии же времени $2m/\nu$ различие будет составлять всего $\frac{1}{e^2} \sim \sim \frac{1}{10}$ предельного значения. Таким образом, скорость очень быстро «выходит» на свое предельное значение $\frac{e}{\nu} \mathbf{E}'$, пропорциональное полю. Подставляя это значение в общее выражение для плотности тока $\mathbf{j} = en\bar{\mathbf{v}}$, получаем

$$\mathbf{j} = \frac{e^2 n}{\nu} \mathbf{E}'.$$

Сравнивая это выражение с формулой $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'$, находим коэффициент электропроводности:

$$\sigma = \frac{e^2 n}{\nu} = \frac{e^2 n \tau}{m}.$$

Мы показали, что учет силы трения при движении заряженных частиц в проводнике действительно приводит к закону Ома. О трении можно, конечно, говорить только в случае электролита, хотя закон Ома справедлив и для металлов, и для плазмы; но там он возникает не вследствие сил трения, а в результате столкновений заряженных частиц друг с другом и с примесными атомами. К этому вопросу мы вернемся в следующей главе.

Из закона Ома следует, что для изотропных проводников токовые линии совпадают с линиями поля \mathbf{E}' . Там, где стороннее поле отсутствует, токовые линии совпадают с силовыми линиями, т. е. линиями электростатического поля \mathbf{E} . В случае анизотропных проводников такое совпадение не наблюдается. Возникающая здесь ситуация аналогична ситуации, с которой мы уже столкнулись при изучении анизотропных диэлектриков. Для них, как мы видели, вектор электрической индукции \mathbf{D} не параллелен вектору электрического поля \mathbf{E} , т. е. линии индукции не совпадают с силовыми линиями. Но так же, как и в случае диэлектриков, в каждом анизотропном проводнике всегда существуют по меньшей мере три таких направления, которые отличаются тем свойством, что если направление поля \mathbf{E}' будет совпадать с каким-либо из этих направлений, то такое же направление будет иметь и вектор плотности тока. Эти направления ортогональны друг к другу и называются главными направлениями электропроводности. Им соответствуют три коэффициента электропроводности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, через которые могут быть выражены величины σ_{ik} , если известны углы между осями координат x, y, z и главными направлениями. Заметим, что у двухосных кристаллов все три величины $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ различны, у одноосных кристаллов две из них одинаковы, а у кубических кристаллов все одинаковы, так что кубические кристаллы ведут себя как изотропное тело.

§ 4.3. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ТОКОВЫХ ЛИНИЙ

При переходе токовых линий из одного проводника в другой происходит их преломление. Чтобы установить закон этого преломления, выясним сперва, каким граничным условиям удовлетворяет вектор плотности тока.

Как мы знаем, количество электричества, проходящего в единицу времени через ориентированную площадку ΔS , равно $j\Delta S$. Поэтому количество электричества, уходящего в единицу времени из среды 1 в среду 2 через площадку ΔS граничной поверхности, разделяющей среды, равно $j_1 n \Delta S$, где j_1 — вектор плотности тока в среде 1; n — единичный вектор, нормальный к границе раздела и направленный из среды 1 в среду 2 (рис. 4.4).

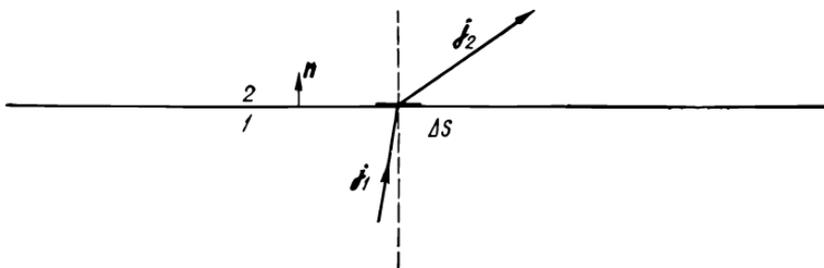


Рис. 4.4

Аналогично количество электричества, приходящего в единицу времени через площадку ΔS в среду 2, равно $j_2 n \Delta S$, где j_2 — вектор плотности тока в среде 2. Согласно закону сохранения электричества эти величины должны быть одинаковы, откуда следует, что

$$j_1 n = j_2 n,$$

или

$$j_{1n} = j_{2n},$$

где j_n — составляющая вектора плотности тока, нормальная к границе раздела сред.

Таким образом, при переходе из одной проводящей среды в другую сохраняется нормальная составляющая вектора плотности тока.

Предположим теперь, что на границе раздела сред 1 и 2 нет сторонних сил и проводники изотропны. Тогда

$$j_1 = \sigma_1 E_1, \quad j_2 = \sigma_2 E_2,$$

где σ_1 и σ_2 — коэффициенты электропроводности обеих сред, а E_1 и E_2 — значения напряженности электрического поля по обе стороны границы. Как мы знаем, при переходе из одной среды в другую сохраняется тангенциальная составляющая напряженности электрического поля, т. е.

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

Обозначая через θ_1 и θ_2 углы, образуемые векторами E_1 и E_2 с вектором n , получаем

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2.$$

Так как направления электрических силовых и токовых линий в каждой из сред совпадают, то

$$j_{1n} = \sigma_1 E_1 \cos \theta_1, \quad j_{2n} = \sigma_2 E_2 \cos \theta_2.$$

Из равенства $j_{1n} = j_{2n}$ находим

$$\sigma_1 E_1 \cos \theta_1 = \sigma_2 E_2 \cos \theta_2.$$

Используя равенство тангенциальных составляющих поля, получаем

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\sigma_1} = \frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\sigma_2},$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

т. е. отношение тангенсов углов, образуемых токовой линией с нормалью к границе раздела проводящих сред, равно отношению соответствующих коэффициентов электропроводности. Мы видим, что если $\sigma_1 > \sigma_2$, то и $\theta_1 > \theta_2$, т. е. ближе к направлению нормали будет токовая линия в том из проводников, в котором коэффициент электропроводности меньше.

§ 4.4. ЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ

Установим теперь связь между силой тока в проводнике и приложенной к нему сторонней силой. Для простоты предположим, что размеры сечения проводника, через который протекает ток,



Рис. 4.5

малы по сравнению с длиной проводника. Такой линейный проводник можно рассматривать, очевидно, как токовую нить или токовый шнур, так как из непрерывности нормальной составляющей вектора плотности тока следует, что пограничные токовые линии должны целиком лежать на боковой поверхности проводника (рис. 4.5).

Из закона сохранения заряда следует, что сила тока через каждое сечение проводника будет одной и той же. Так как проводник предполагается тонким, то плотность тока можно считать постоянной вдоль сечения. Поэтому постоянство силы тока приводит к соотношению

$$j = \frac{I}{S},$$

где I — сила тока; S — площадь поперечного сечения проводника. Мы видим, что плотность тока обратно пропорциональна площади поперечного сечения проводника. Это значит, что постоянный ток ведет себя как стационарный поток несжимаемой жидкости: скорость такого потока в трубе, так же как и плотность постоянного тока, обратно пропорциональна площади сечения трубы.

Запишем теперь в дифференциальной форме закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}',$$

связывающий вектор плотности тока \mathbf{j} с суммарным полем \mathbf{E}' (проводник предполагается изотропным). Так как это соотношение по смыслу локально, то коэффициент электропроводности σ может считаться функцией координат, точнее, считаться разным в разных сечениях проводника.

Представим закон Ома в виде

$$\mathbf{E}' = \rho \mathbf{j},$$

где ρ — так называемое удельное сопротивление

$$\rho = \frac{1}{\sigma},$$

и проинтегрируем это соотношение вдоль всего замкнутого проводника (проводник должен быть, очевидно, замкнутым, как и токовая линия). Ориентированный так же, как и вектор плотности тока, элемент длины проводника обозначим через dl , тогда

$$\oint \mathbf{E}' \, dl = \oint \rho \mathbf{j} \, dl.$$

Так как по определению $dl \parallel \mathbf{j}$, то $\mathbf{j} \, dl = j \, dl$. Подставляя сюда $j = \frac{I}{S}$ и замечая, что сила тока I одинакова во всех сечениях проводника S , имеем

$$\oint \rho \mathbf{j} \, dl = I \oint \frac{\rho \, dl}{S},$$

где интегрирование совершается вдоль всего замкнутого проводника, причем удельное сопротивление ρ и площадь сечения S могут изменяться вдоль длины проводника. Итак,

$$I = \oint \frac{\rho \, dl}{S} = \oint \mathbf{E}' \, dl,$$

или

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

где

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}' \, dl, \quad R = \oint \frac{\rho \, dl}{S}.$$

Величина \mathcal{E} называется электродвижущей силой, действующей в проводнике, а R — сопротивлением проводника. Таким образом, сила тока I равна частному от деления электродвижущей силы (ЭДС) на сопротивление проводника. Это соотношение называется

законом Ома для всего замкнутого проводника, или иначе, для всей электрической цепи.

Электродвижущая сила в токовой нити представляет собой циркуляцию суммарного поля $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}$ вдоль контура нити, а так как входящее сюда электростатическое поле является потенциальным, т. е.

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0,$$

то

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}^{(e)} d\mathbf{l}.$$

Таким образом, электродвижущая сила представляет собой в действительности циркуляцию стороннего поля $\mathbf{E}^{(e)}$ вдоль токовой нити.

Если $\mathbf{E}^{(e)} = 0$, то и $\mathcal{E} = 0$. Более того, если бы поле $\mathbf{E}^{(e)}$ имело чисто электростатическое или неэлектростатическое происхождение, но было бы потенциальным, то циркуляция от него и ЭДС равнялись бы нулю. При этом согласно закону Ома отсутствовал бы ток. Это еще раз разъясняет, что протекание постоянного тока невозможно в чисто электростатическом поле и требует обязательно наличия непотенциальных полей.

Смысл электродвижущей силы чрезвычайно прост. Так как $e\mathbf{E}'$ представляет собой суммарную силу, испытываемую зарядом e , то $e\mathbf{E}'d\mathbf{l}$ представляет собой работу этой силы на пути $d\mathbf{l}$. Поэтому ЭДС можно интерпретировать как работу сторонних сил при перемещении положительного единичного заряда вдоль всей замкнутой токовой нити. Поскольку в отсутствие ЭДС постоянный ток не может протекать, следовательно, источники постоянного тока представляют собой источники ЭДС. ЭДС имеет ту же размерность, что и потенциал:

$$[\mathcal{E}] = [\varphi] = M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}.$$

В практической системе единиц ЭДС измеряется в вольтах (В).

Обратимся теперь к формуле для сопротивления. Если цепь состоит из отдельных проводников с различными удельными сопротивлениями ρ_1, ρ_2, \dots (на рис. 4.6 длины проводников обозначены через l_1, l_2, \dots , а площади сечений — через S_1, S_2, \dots ; кружок — источник ЭДС), то сопротивление цепи определяется формулой

$$R = R^{(i)} + \frac{\rho_1 l_1}{S_1} + \frac{\rho_2 l_2}{S_2} + \dots,$$

где $R^{(i)}$ — внутреннее сопротивление источника ЭДС. Величины

$$R_1 = \frac{\rho_1 l_1}{S_1}, R_2 = \frac{\rho_2 l_2}{S_2}, \dots$$

представляют собой сопротивления отдельных участков цепи, так что сопротивление всей цепи равно сумме сопротивлений отдельных ее участков, включая сопротивление источника ЭДС:

$$R = R^{(i)} + R_1 + R_2 + \dots$$

Сопротивление имеет размерность

$$[R] = \frac{[\mathcal{E}]}{[I]} = \frac{\left[\frac{e}{r} \right]}{\left[\frac{e}{t} \right]} = L^{-1}T,$$

т. е. размерность обратной скорости. В практической системе единиц сопротивление измеряют в В/А. Эта единица называется Омом:

$$1 \text{ Ом} = 1 \frac{\text{В}}{\text{А}}.$$

Так как $1 \text{ В} = \frac{1}{300}$ единиц потенциала, $1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9$ СГСЕ единиц силы тока, то

$$1 \text{ Ом} = \frac{1}{3 \cdot 10^9} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ СГСЕ единиц сопротивления.}$$

Рассмотрим теперь отдельный участок цепи, могущий содержать, в общем, и источник ЭДС. Согласно закону Ома $\mathbf{E}' = \rho \mathbf{j}$, где $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}$, \mathbf{E} — электростатическое поле. Его можно, как мы знаем, связать с электростатическим потенциалом φ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Поэтому

$$-\text{grad } \varphi + \mathbf{E}^{(e)} = \rho \mathbf{j}.$$

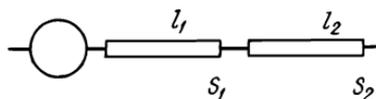


Рис. 4.6

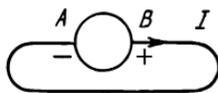


Рис. 4.7

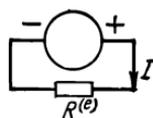


Рис. 4.8

Проинтегрируем это соотношение вдоль рассматриваемого участка цепи:

$$-\int_A^B \text{grad } \varphi dl + \int_A^B \mathbf{E}^{(e)} dl = \int_A^B \rho \mathbf{j} dl,$$

где A и B обозначают концы участка. Замечая, что

$$-\int_A^B \text{grad } \varphi dl = -\int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = \varphi_A - \varphi_B.$$

где φ_A и φ_B — значения потенциала в начальной и конечной точках участка проводника (направлением участка считается направление тока), и учитывая, что согласно предыдущему

$$\int_A^B \rho j \, dl = I \int_A^B \rho \frac{dl}{S},$$

где I — сила тока, получаем

$$\varphi_A - \varphi_B + \int_A^B \mathbf{E}^{(e)} \, dl = I \int_A^B \rho \frac{dl}{S}.$$

Величину $\int_A^B \mathbf{E}^{(e)} \, dl$ можно назвать электродвижущей силой, действующей на участке $A-B$. Обозначим ее через \mathcal{E}_{AB} . Интеграл $\int_A^B \rho \frac{dl}{S}$

представляет собой, очевидно, сопротивление участка, которое обозначим через R_{AB} . Итак,

$$\varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_{AB} = IR_{AB}.$$

Если $A \equiv B$, то мы приходим к замкнутой цепи и полученной выше формуле $\mathcal{E} = IR$.

Применим полученную формулу в двух случаях. Пусть сперва участок цепи представляет собой сам источник ЭДС, а точки A и B являются его клеммами (рис. 4.7). Вне источника ток течет от положительной (+) к отрицательной (−) клемме, внутри же источника направление тока обратное. Поэтому мы должны считать $A \equiv -$, $B \equiv +$ и, следовательно,

$$\varphi_- - \varphi_+ + \mathcal{E} = IR^{(i)},$$

где φ_- и φ_+ — значения потенциала на отрицательной и положительной клеммах источника: $R^{(i)}$ — его внутреннее сопротивление ($\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{AB}$). Отсюда следует, что

$$\varphi_+ - \varphi_- = \mathcal{E} - IR^{(i)},$$

т. е. разность потенциалов на положительной и отрицательной клеммах источника равна разности ЭДС и произведения силы тока на внутреннее сопротивление источника. Если $I \rightarrow 0$, то $\varphi_+ - \varphi_- \rightarrow \mathcal{E}$. Это значит, что ЭДС равна разности потенциалов на клеммах источника при бесконечно малом токе, т. е. в режиме «холостого» хода.

Рассмотрим теперь участок цепи вне источника ЭДС. Так как ток в нем будет течь от положительной к отрицательной клемме (рис. 4.8), то в этом случае $A \equiv +$, $B \equiv -$ и

$$\varphi_+ - \varphi_- = IR^{(e)},$$

где $R^{(e)}$ — сопротивление участка. Таким образом, если на участке цепи нет источника ЭДС, то разность потенциалов на этом

участке равна произведению силы тока на сопротивление участка. Ток при этом направлен от большего потенциала к меньшему. Поэтому можно сказать, что падение потенциала на проводнике при прохождении через него тока равно произведению силы тока на сопротивление проводника. Сравнивая обе формулы, получаем

$$\mathcal{E} - IR^{(i)} = IR^{(e)},$$

откуда

$$IR^{(i)} + IR^{(e)} = \mathcal{E},$$

т. е. $\mathcal{E} = IR$, где $R = R^{(i)} + R^{(e)}$ — полное сопротивление цепи. Это известное нам уже соотношение можно сформулировать в виде правила: сумма произведений силы тока на сопротивления отдельных участков цепи равна действующей в цепи ЭДС.

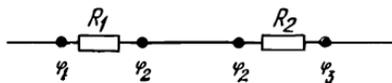


Рис. 4.9

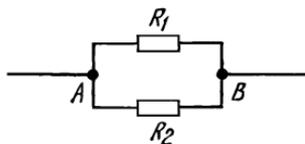


Рис. 4.10

Из предыдущего ясно, что если проводники соединены между собой последовательно, т. е. если один и тот же ток проходит последовательно через все проводники, то, сложив между собой сопротивления всех проводников, мы найдем общее сопротивление цепи. Рис. 4.9 иллюстрирует это сложение сопротивлений (они символически обозначаются в виде прямоугольников). Очевидно, падения потенциала на обоих проводниках будут следующими:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR_1, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = IR_2,$$

так как через оба проводника протекает ток одной и той же силы. Общее падение потенциала на составном проводнике равно сумме падений потенциала на обоих проводниках:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 = IR_1 + IR_2.$$

Приравняв эту величину IR , где R — сопротивление составного проводника, получаем

$$R = R_1 + R_2.$$

Аналогичное соотношение справедливо при любом числе проводников:

$$R = R_1 + R_2 + \dots$$

Кроме последовательного часто встречается параллельное соединение проводников, при котором происходит разветвление тока (рис. 4.10). В точке A или, как принято, в узле A соединены три проводника; поэтому здесь происходит разветвление тока. Согласно закону сохранения заряда сила «приходящего» тока I равняется сумме сил «уходящих» токов I_1 и I_2 :

$$I = I_1 + I_2.$$

Эти токи далее снова соединяются в узле B . Так как разность потенциалов между двумя точками проводника равна произведению тока на сопротивление этого участка, то

$$\varphi_A - \varphi_B = I_1 R_1, \quad \varphi_A - \varphi_B = I_2 R_2.$$

Поэтому

$$I_1 + I_2 = (\varphi_A - \varphi_B) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Вспоминая, что $I_1 + I_2 = I$, и полагая

$$I = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R},$$

где R — сопротивление обоих параллельно соединенных проводников, находим

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Аналогичная формула справедлива и при большем числе параллельно соединенных проводников:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Таким образом, при параллельном соединении проводников складываются их обратные сопротивления, или, как их называют, проводимости.

§ 4.5. ПРАВИЛА КИРХГОФА

Сформулированный выше закон Ома позволяет определить силу тока и разности потенциалов на различных участках цепи не только в случае одного токового контура, но и в сколь угодно сложной электрической сети, содержащей много узлов и соединенных между собой контуров, в которых могут действовать не одна, а целый ряд ЭДС.

Прежде всего произвольно выберем в каждом проводнике определенное направление в качестве положительного направления тока и перенумеруем все токи, а затем рассмотрим каждый узел сети. В одних проводниках, соединенных в узел, токи будут течь по направлению к узлу, а в других — от узла. Из закона сохранения заряда следует, что сумма сил токов, текущих к узлу, должна равняться сумме сил токов, текущих от узла. Не зная заранее в каком направлении течет тот или иной ток, можно записать это соотношение в виде

$$\sum \pm I = 0,$$

где суммирование распространяется на все силы токов I в проводниках, пересекающихся в одном узле. При этом если в двух проводниках положительными выбраны направления к узлу (или от узла), то соответствующие силы токов должны иметь один и тот же знак; если же одно положительное направление идет к узлу, а другое — от узла, то соответствующие силы токов должны иметь

разные знаки. Соотношение $\sum \pm I = 0$ с этим условием о знаках называется первым правилом Кирхгофа. Если в результате окончательных расчетов сила тока окажется положительной (отрицательной) величиной, это означает, что соответствующий ток течет вдоль (против) выбранного положительного направления.

Затем необходимо выделить все возможные контуры в сети и установить совершенно произвольно направления их обходов. Выше мы видели, что ЭДС, действующая в токовом контуре, равна сумме произведений IR_α , где I — общая сила тока, а R_α — сопротивления отдельных участков контура. Контур, который мы выделяем в сети, отличается от токового контура, рассмотренного в § 4.4, тем, что на отдельных его участках сила тока не одина-

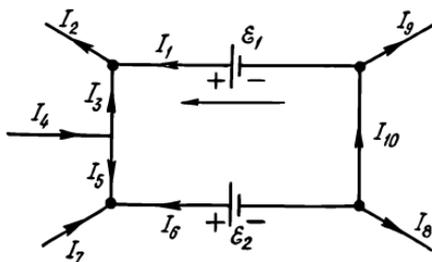


Рис. 4.11

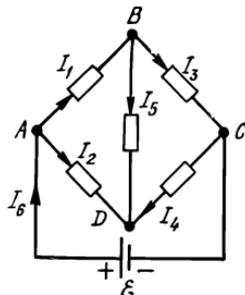


Рис. 4.12

кова, но это не существенно, ибо согласно закону Ома ЭДС должна равняться сумме разностей потенциалов на всех сопротивлениях. Поэтому можно утверждать, что для каждого контура должно выполняться соотношение

$$\sum \pm I_\alpha R_\alpha = \sum \pm \mathcal{E},$$

где сумма слева распространяется на все участки рассматриваемого контура, а сумма справа содержит все ЭДС, действующие в этом контуре; I_α обозначает силы тока в разных участках контура.

В этом правиле (оно называется вторым правилом Кирхгофа) следует лишь помнить о знаках отдельных слагаемых. Именно, величина $I_\alpha R_\alpha$ берется со знаком плюс или минус в зависимости от того, совпадает ли положительное направление тока на участке контура с направлением обхода контура или противоположно ему; ЭДС берется со знаком плюс или минус в зависимости от того, течет ли ток от соответствующего источника ЭДС, взятого произвольно, вдоль выбранного направления обхода контура или против него. Например, для сети, изображенной на рис. 4.11, согласно первому правилу Кирхгофа

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0; \\ -I_3 + I_4 - I_5 &= 0; \\ I_5 + I_6 + I_7 &= 0; \\ I_6 + I_8 + I_{10} &= 0; \\ -I_1 - I_9 + I_{10} &= 0. \end{aligned}$$

Для контура, изображенного на этом рисунке, согласно второму правилу Кирхгофа

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 + I_5 R_5 - I_6 R_6 + I_{10} R_{10} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2.$$

Применим правила Кирхгофа к расчету так называемого мостика Уитстона (рис. 4.12). Исходя из первого правила Кирхгофа записываем

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_6 &= 0; & I_1 - I_3 - I_5 &= 0; \\ I_3 - I_4 - I_6 &= 0; & I_2 + I_4 + I_5 &= 0. \end{aligned}$$

Применим второе правило к контуру ABC :

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathcal{E}$$

(внутренним сопротивлением источника ЭДС пренебрегаем). Беря далее контуры ABD и BCD , получаем

$$\begin{aligned} I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2 &= 0; \\ I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_5 R_5 &= 0. \end{aligned}$$

Последний контур мы могли бы, в принципе, и не рассматривать, так как нам нужно найти шесть неизвестных величин — силы токов I_1, I_2, \dots, I_6 , а для этого достаточно использовать шесть первых уравнений.

Не будем приводить решений этих уравнений в общем случае ввиду их громоздкости, а выясним лишь условия, при которых ток I_5 в диагональном проводнике с сопротивлением R_5 равен нулю. Если $I_5 = 0$, то

$$\begin{aligned} I_1 &= I_3; & I_2 &= -I_4; \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 &= 0; & I_3 R_3 + I_4 R_4 &= 0. \end{aligned}$$

Используя первые два равенства, перепишем последнее равенство в виде

$$I_1 R_3 - I_2 R_4 = 0.$$

Сравнение этого и третьего равенств приводит к искомому условию:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}, \text{ или } R_1 R_4 = R_2 R_3.$$

Таким образом, произведения сопротивлений противоположных плеч мостика должны быть одинаковыми для того, чтобы в диагонали мостика не было тока.

Мостик Уитстона широко используется для измерения сопротивлений проводников. Для этого в одно из плеч вставляется проводник с неизвестным сопротивлением, а в диагональ включается гальванометр. Сопротивления трех остальных плеч известны. Тогда при отсутствии тока через гальванометр произведения сопротивлений противоположных плеч будут одинаковы, и, следовательно, зная три сопротивления, можно найти четвертое.

§ 4.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА В МАССИВНЫХ ПРОВОДНИКАХ

В предыдущих параграфах мы рассматривали линейные проводники. Покажем теперь на нескольких простых примерах, как найти распределение тока в массивных проводниках и как определить их сопротивление.

Рассмотрим проводник, ограниченный двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями $AA'B'B$ и $CC'D'D$ и четырьмя плоскими границами $AA'C'C$, $DD'B'B$ и $ABDC$, $A'B'D'C'$ (рис. 4.13). Источник ЭДС подсоединен к плоскостям $AA'C'C$ и $DD'B'B$, так что токовыми, или силовыми, линиями будут дуги окружностей, лежащих в плоскостях, которые параллельны плоскости $ABDC$. Одна из таких линий (радиуса r) изображена на

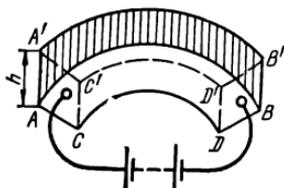


Рис. 4.13

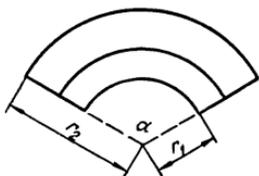


Рис. 4.14

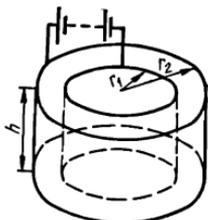


Рис. 4.15

рис. 4.14. Из соображений симметрии ясно, что поле будет одинаково вдоль силовой линии, поэтому напряженность поля

$$E = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{\alpha r},$$

где φ_+ и φ_- — значения потенциала на плоскостях $AA'C'C$ и $BB'D'D$; α — угол между этими плоскостями. Если σ — коэффициент электропроводности, то плотность тока на расстоянии r от оси цилиндрических поверхностей определяется формулой

$$j = \sigma E = \frac{\sigma}{\alpha r} (\varphi_+ - \varphi_-).$$

Найдем теперь силу полного тока I . Выражение для силы тока через площадку dS толщины dr сечения $AA'C'C$ имеет вид

$$dI = j dS = \frac{\sigma}{\alpha r} (\varphi_+ - \varphi_-) h dr,$$

где h — высота проводника (см. рис. 4.13 и 4.14). Отсюда следует, что полный ток определяется следующим образом:

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma (\varphi_+ - \varphi_-) h}{\alpha r} dr = \frac{\sigma h}{\alpha} (\varphi_+ - \varphi_-) \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где r_2 и r_1 — радиусы внешнего и внутреннего цилиндров. Разделив $\varphi_+ - \varphi_-$ на силу тока I , найдем сопротивление проводника:

$$R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\alpha\rho}{h \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

где ρ — удельное сопротивление. Если r_2 мало отличается от r_1 , так что $r_2 - r_1 \equiv \Delta r \ll r_1$, то $\ln \frac{r_2}{r_1} \approx \frac{\Delta r}{r_1}$ и

$$R \approx \rho \frac{\alpha r_1}{h \Delta r}.$$

Поскольку αr_1 при $\Delta r \ll r_1$ представляет собой длину проводника, а $h \Delta r$ — площадь поперечного сечения, то для R получаем известную уже нам формулу, определяющую сопротивление линейного проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где $l = \alpha r_1$ и $S = \Delta r h$.

Теперь рассмотрим проводник, имеющий вид шайбы (рис. 4.15), внутренняя и внешняя цилиндрические поверхности которой присоединены к клеммам источника ЭДС. Токовые линии (они же являются и силовыми линиями) направлены, очевидно, в этом случае вдоль радиусов.

Определим прежде всего плотность тока j . Рассмотрим для этого цилиндрическую поверхность S радиуса r . Площадь ее равна $2\pi r h$, где h — высота цилиндра. Поэтому сила полного тока через эту поверхность определяется формулой $I = j 2\pi r h$. Эта величина согласно закону сохранения заряда не должна зависеть от вида поверхности S , т. е. от ее радиуса r . Таким образом, плотность тока обратно пропорциональна r :

$$j = \frac{I}{2\pi r h}.$$

Отсюда легко с помощью закона Ома найти напряженность поля:

$$E = \rho j = \frac{\rho I}{2\pi r h},$$

где ρ — удельное сопротивление. Эта величина равна $-\frac{d\varphi}{dr}$, где φ — потенциал,

$$-\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\rho I}{2\pi r h}.$$

Значит,

$$\varphi = -\frac{\rho I}{2\pi h} \ln r + \text{const}$$

и, следовательно, разность потенциалов $\varphi_+ - \varphi_-$ на цилиндрических поверхностях проводника определяется формулой

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\rho I}{2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где r_1 и r_2 — радиусы цилиндрических поверхностей. Разделив $\varphi_+ - \varphi_-$ на I , найдем сопротивление проводника:

$$R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Определим теперь сопротивление бесконечной пластинки, в которую впаяны два цилиндрических электрода 1 и 2 (рис. 4.16).

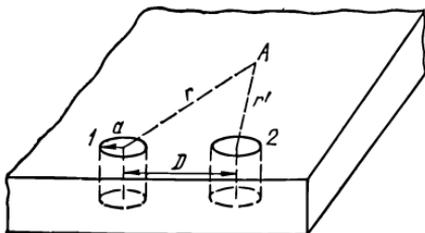


Рис. 4.16

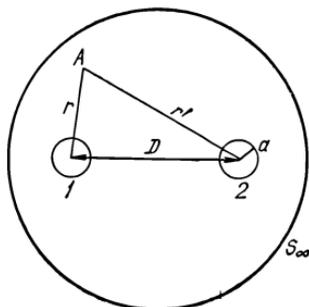


Рис. 4.17

Найдем сперва распределение потенциала вдоль пластинки. Для этого воспользуемся принципом суперпозиции и результатами предыдущего примера. Если бы пластинка была ограничена поверхностью S_∞ , выполняющей функции электрода, и коаксиальной с цилиндрической поверхностью 1, а электрод 2 был бы удален, то потенциал φ в точке A на расстоянии r от электрода 1 равнялся бы, как мы видели,

$$\varphi' = -\frac{\rho I}{2\pi h} \ln r + \text{const},$$

где I — сила тока, исходящего из электрода 1; h — толщина пластинки. Представим, что удаляется электрод 1 и электродами остаются поверхности 2 и S_∞ , причем ток течет от S_∞ к 2. Если радиус поверхности S_∞ очень велик, то можно считать, что цилиндрическая поверхность S_∞ коаксиальна с 2. Поэтому потенциал φ'' в точке A в этом случае имеет вид

$$\varphi'' = \frac{\rho I}{2\pi h} \ln r' + \text{const},$$

где r' — расстояние от точки A до электрода 2. Заметим, что сила тока входит в это выражение с противоположным знаком по сравнению с выражением для φ' , поскольку из электрода 1 ток вытекает, а в электрод 2 ток втекает. Пусть теперь оба электрода находятся на своих местах. Согласно принципу суперпозиции поле

(электрическое и токовое) можно рассматривать как наложение полей, создаваемых двумя парами электродов: 1, S_∞ и S_∞ , 2. Но электрод S_∞ (коаксиальный при бесконечном его радиусе и с 1-м, и со 2-м) можно теперь выкинуть, так как один раз он ток принимает, а другой раз отдает. Итак, распределение потенциала φ в проводящей пластинке с впаянными в нее двумя цилиндрическими электродами определяется формулой

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = \frac{\rho I}{2\pi h} \ln \frac{r'}{r} + \text{const.}$$

Обозначим радиусы электродов через a , а расстояние между ними — через D . Тогда формулы для потенциалов электродов принимают вид

$$\varphi_+ = \frac{\rho I}{2\pi h} \ln \frac{D}{a} + \text{const.},$$

$$\varphi_- = \frac{\rho I}{2\pi h} \ln \frac{a}{D} + \text{const.}$$

Таким образом, разность потенциалов определяется формулой

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\rho I}{\pi h} \ln \frac{D}{a},$$

а сопротивление проводника — формулой

$$R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\rho}{\pi h} \ln \frac{D}{a}.$$

Рассмотрим безграничный проводник с впаянными в него двумя одинаковыми сферическими электродами. Эта задача также решается с помощью принципа суперпозиции. Именно, следует сперва представить себе, что один из электродов, например электрод 2, удален и вместо него введен электрод в виде сферической поверхности S_∞ бесконечного радиуса, концентрической с электродом 1. При этом плотность тока на расстоянии r от электрода 1 определяется формулой

$$j' = \frac{I}{4\pi r^2},$$

где I — сила полного тока, не зависящая от r , Поэтому напряженность поля имеет вид

$$F' = \rho j' = \frac{\rho I}{4\pi r^2},$$

где ρ — удельное сопротивление. Приравнявая это выражение — $\frac{d\varphi}{dr}$,

$$-\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\rho I}{4\pi r^2},$$

находим потенциал φ' в случае, когда электродами являются поверхности 1 и S_∞ :

$$\varphi' = \frac{\rho I}{4\pi r} + \text{const},$$

где r — расстояние до электрода 1 (рис. 4.17).

Если далее, представить, что удален электрод 1 и электродами являются поверхности 2 и S_∞ , причем ток течет от S_∞ к 2 , то потенциал определяется формулой

$$\varphi'' = -\frac{\rho I}{4\pi r'} + \text{const},$$

где r' — расстояние от точки наблюдения до электрода 2 . Отметим, что сила тока входит в это выражение с противоположным знаком по сравнению с выражением для φ' .

Поле в реальной задаче с электродами 1 и 2 можно рассматривать как результат наложения полей φ' и φ'' , электрод же S_∞ при этом самоустраняется. Итак, потенциал φ при наличии двух электродов определяется формулой

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) + \text{const}.$$

Если a — радиус электродов, D — расстояние между ними, то выражения для потенциалов электродов записываются в виде

$$\varphi_+ = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{D} \right) + \text{const}, \quad \varphi_- = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{a} \right) + \text{const}.$$

Поэтому разность потенциалов электродов определяется формулой

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{D} \right),$$

а сопротивление проводника — формулой

$$R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{D} \right).$$

Если расстояние между электродами значительно больше радиуса электрода, то в выражение для R входит только радиус электрода a :

$$R = \frac{\rho}{2\pi a}, \quad D \gg a.$$

§ 4.7. ДЖОУЛЕВО ТЕПЛО

Постоянный ток представляет собой направленное и происходящее с постоянной скоростью движение заряженных частиц в проводнике. Хотя поле в случае постоянного тока и стационарно, тем не менее токовое состояние не совместимо с условиями электростатики, и поэтому протекание постоянного тока возможно лишь при

наличии сторонних сил, действующих на заряженные частицы и имеющих неэлектростатическое происхождение.

Эти силы сами по себе непрерывно ускоряли бы заряженные частицы, т. е. если бы действовали только они, то направленное движение заряженных частиц не могло бы происходить с постоянной скоростью. Равномерность движения достигается благодаря эффекту торможения заряженных частиц, которое обуславливается либо трением частиц (электролиты), либо столкновениями заряженных частиц — электронов друг с другом и с ионами решетки и примесными атомами (металлы).

Выше указывалось, что проще всего исходить из представления о существовании силы трения. При этом движение заряженной частицы описывается уравнением

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}' + \mathbf{f},$$

где $\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение частицы; e — ее заряд; $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}$ — суммарное поле, действующее на частицу; \mathbf{f} — сила трения, пропорциональная скорости частицы,

$$\mathbf{f} = -\nu\mathbf{v}$$

(ν — коэффициент трения). При равномерном движении $\dot{\mathbf{v}} = 0$ и сумма всех сил равна нулю, т. е.

$$e\mathbf{E}' = -\mathbf{f} = \nu\mathbf{v}.$$

Умножая $e\mathbf{E}'$ на элемент пути частицы $d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt$, находим работу dA силы $e\mathbf{E}'$ над частицей за время dt :

$$dA = e\mathbf{E}' d\mathbf{l} = e\mathbf{E}' \mathbf{v} dt,$$

Так как $e\mathbf{E}' = -\mathbf{f}$, то

$$dA = -\mathbf{f} d\mathbf{l} = \nu v^2 dt,$$

Но трение всегда сопровождается выделением тепла, точнее, работа силы трения равна количеству тепла, получаемого окружающей средой. Мы приходим, таким образом, к заключению, что работа, совершаемая силой $e\mathbf{E}'$, полностью переходит в тепло, выделяемое в проводнике. Иными словами, прохождение постоянного тока сопровождается выделением в проводнике тепла. Отнесенное к одной частице, это тепло (оно называется джоулевым теплом) равно $\nu v^2 dt$. Умножая это выражение на плотность частиц n , находим джоулево тепло dq , выделяемое в единице объема проводника за время dt :

$$dq = n\nu v^2 dt.$$

Поскольку плотность тока $\mathbf{j} = en\mathbf{v}$, а коэффициент электропроводности σ связан с коэффициентом трения ν согласно результатам

§ 4.2 соотношением $\sigma = \frac{e^2 n}{\nu}$, то

$$dq = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2 dt = \rho \mathbf{j}^2 dt,$$

где $\rho = \frac{1}{\sigma}$ — удельное сопротивление проводника.

Таким образом, джоулево тепло q_1 , выделяемое в единице объема проводника за единицу времени, равно произведению квадрата плотности тока на удельное сопротивление проводника.

$$q_1 = \rho j^2.$$

Джоулево тепло, выделяемое во всем проводнике за время t , определяется формулой

$$Q = t \int_V \rho j^2 dV,$$

где интегрирование совершается по всему объему проводника V .

Рассмотрим подробнее линейный проводник. В этом случае $dV = S dl$, где dl — элемент длины проводника; S — площадь соответствующего сечения проводника. Замечая, что сила полного тока $I = jS$, перепишем выражение для Q в виде

$$Q = t \oint \rho \frac{I^2}{S^2} S dl.$$

Но сила тока I постоянна вдоль всего проводника, и ее можно вынести за знак интеграла. Величина

$$R = \oint \frac{\rho dl}{S}$$

представляет собой сопротивление проводника. Итак,

$$Q = RI^2 t,$$

т. е. джоулево тепло равно произведению квадрата силы тока на сопротивление и на время t . За единицу времени выделяется джоулево тепло, определяемое формулой

$$Q = RI^2.$$

Если измерять силу тока в амперах, а сопротивление в омах, то Q будет выражаться в ваттах:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ А}^2 \cdot \text{ Ом}.$$

Ток в проводнике с сопротивлением R связан с разностью потенциалов на концах проводника соотношением

$$\varphi_1 - \varphi_2 = RI.$$

Поэтому джоулево тепло можно выразить также в виде

$$Q = I (\varphi_1 - \varphi_2) t = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2 t}{R}.$$

Если в замкнутой цепи действует электродвижущая сила \mathcal{E} , то сила тока I связана с \mathcal{E} законом Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i},$$

где R — сопротивление проводника, подключенного к клеммам источника ЭДС; R_i — внутреннее сопротивление источника.

Используя эту формулу, выразим через \mathcal{E} количество тепла, выделяемое за единицу времени во внешнем проводнике и внутри источников ЭДС:

$$Q_e = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + R_i)^2},$$
$$Q = I^2 R_i = \frac{\mathcal{E}^2 R_i}{(R + R_i)^2}.$$

Суммарное количество тепла определяется формулой

$$Q = Q_e + Q_i = I^2 (R + R_i) = \frac{\mathcal{E}^2}{R + R_i} = \mathcal{E} I.$$

Такую энергию должен каждую секунду доставлять источник ЭДС. Она равна произведению ЭДС на силу тока.

Это энергетическое соотношение позволяет несколько иначе понять необходимость сторонней силы для протекания постоянного тока. Так как прохождение тока связано с непрерывным выделением джоулева тепла, то это тепло должно все время поставляться каким-либо внешним источником. Такую функцию и выполняют источники тока. Величина ЭДС представляет собой энергию, доставляемую источником тока при единичной силе тока за единицу времени. Написанная формула для Q_e позволяет выяснить, при каких условиях тепло Q_e будет максимальным, если ЭДС и сопротивление источника заданы. Легко видеть, что Q_e максимально при равенстве сопротивлений R и R_i . Это максимальное значение находится по формуле

$$(Q_e)_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R_i}.$$

Такое же количество тепла будет выделяется при условии $R = R_i$ и внутри источника тока.

§ 5.1. ВЫРОЖДЕННЫЙ ГАЗ ЭЛЕКТРОНОВ

Формулируя законы постоянного тока, мы ввели новые величины — коэффициент электропроводности и электродвижущую силу, но не разъяснили пока их физической природы. Теперь приступим к этой задаче. Начнем с проводимости металлов.

Электрический заряд в металлах переносит электроны, которые могут свободно перемещаться от одного атома (правильнее, иона) к другому. Такое перемещение возможно благодаря перекрытию электронных оболочек отдельных атомов. Поэтому естественно исходить из представления об идеальном или почти идеальном газе электронов в металле. Этот газ, однако, должен существенно отличаться от обычного идеального газа молекул. Наиболее отчетливо это видно на теплоемкости металла. Если для простоты считать, что каждый атом металла вносит по одному электрону в электронный газ, то один грамм-атом металла будет содержать $6,02 \cdot 10^{23}$ ионов и столько же электронов. Теплоемкость, обусловленная ионами, равна, как известно, $3R$, где R — газовая постоянная (закон Дюлонга—Пти). Теплоемкость электронов, если считать их

обычным газом, равна $\frac{3}{2}R$. Поэтому суммарная теплоемкость металла должна равняться $\frac{9}{2}R$. Теплоемкость диэлектрика, в котором нет электронного газа, равна $3R$. Таким образом, теплоемкость металла должна быть больше теплоемкости диэлектрика на $\frac{3}{2}R$.

Экспериментальные результаты, однако, резко противоречат этому заключению: в области применимости закона Дюлонга—Пти, т. е. при достаточно высоких температурах ($T \gg T_D$, T_D — температура Дебая; см. § 5.8), молярные теплоемкости металлов и диэлектриков практически не различаются. Это значит, что электронный газ не вносит сколько-нибудь заметного вклада в теплоемкость металла, или, точнее, вклад электронного газа должен быть значительно меньше $\frac{3}{2}R$. По этой причине электронный газ в металле называют вырожденным газом.

В чем же причина вырождения электронного газа? Она тесно связана с характером статистики электронов. Напомним, что при выводе распределения Максвелла для молекул обычного газа вводится понятие фазового пространства молекулы, точки которого — фазовые точки — определяются шестью величинами — тремя координатами x , y , z молекулы и тремя проекциями ее

импульса p_x, p_y, p_z . Объем фазового пространства вычисляется как произведение обычного объема на объем импульсного пространства. В декартовых координатах элементы этих объемов равны $\Delta x \Delta y \Delta z$ и $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$. Объем шарового слоя радиуса p и толщины Δp в импульсном пространстве равен, очевидно, $4\pi p^2 \Delta p$.

При движении молекулы ее радиус-вектор $\mathbf{r}(x, y, z)$ и импульс $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ изменяются со временем, т. е. фазовая точка описывает в фазовом пространстве некоторую кривую — фазовую траекторию. В зависимости от начальных условий (т. е. значений x, y, z, p_x, p_y, p_z в начальный момент времени $t = 0$) получаем различные фазовые траектории. Каждая фазовая траектория соответствует определенному динамическому состоянию молекулы, а так как, очевидно, через каждую фазовую точку проходит только одна фазовая траектория, то каждой фазовой точке соответствует определенное динамическое состояние молекулы.

Рассмотрим теперь не одну, а много одинаковых молекул, почти не взаимодействующих друг с другом, т. е. их идеальный газ. Тогда наборы динамических состояний у различных молекул будут тождественны, но возникает вопрос — коррелируют ли как-то между собой динамические состояния у различных молекул, или в более простой форме: произвольно ли число молекул, могущих находиться в заданном динамическом состоянии? При выводе распределения Максвелла этот вопрос, в общем, не ставится, а предполагается, что число молекул, находящихся в заданном состоянии, может быть произвольным. Однако это предположение не является логически необходимым: ведь можно представить ситуации, когда оно не выполняется. Такая ситуация, в частности, имеет место для газа электронов. При этом важно учитывать, что электрон обладает собственным моментом количества движения (его называют спином) и при измерении его проекции на какую-либо ось всегда получим только два возможных значения. Поэтому в число переменных, определяющих динамическое состояние электрона, должна быть включена еще проекция его спина.

Если обобщить таким образом понятие динамического состояния электрона, то окажется, что в каждом динамическом состоянии может находиться не больше одного электрона, т. е. состояние может быть либо не занято, либо в нем может находиться только один электрон и не более. Это замечательное положение, носящее название принципа Паули, и определяет характер статистики электронов.

Чтобы выяснить, к какому распределению электронов в состоянии статистического равновесия приводит принцип Паули, разобьем фазовое пространство Γ электрона на элементарные ячейки одинакового объема Γ_0 и сопоставим каждой такой ячейке одно кинематическое состояние электрона, т. е. два состояния, различающихся проекцией спина электрона. Для того чтобы такой метод сопоставления элементарных ячеек был разумным, нужно, очевидно, брать ячейки как можно меньшего объема. Но здесь имеется ограничение, вносимое квантовой механикой: оказывается, что объем ячейки Γ_0 нельзя взять меньше чем $(2\pi\hbar)^3$, где \hbar — квантовая постоянная, равная примерно 10^{-27} эрг \cdot с (величина $h = 2\pi\hbar$ называется постоянной Планка). Выберем именно

такое значение Γ_0 . Тогда для числа ячеек G в фазовом объеме Γ получаем

$$G = \frac{\Gamma}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Об электронах, состояниям которых соответствуют определенные фазовые ячейки, говорят, что они находятся в этих ячейках. Если взять электроны с малым разбросом импульса и разделить их число на число соответствующих фазовых ячеек, то мы получим функцию распределения электронов. Наша задача состоит теперь в нахождении этой функции.

Рассмотрим сперва абсолютный нуль температуры. Энергия системы электронов должна быть при этом минимально возможной. Если бы электроны не подчинялись принципу Паули, то минимуму энергии соответствовал бы импульс, равный нулю, т. е. все электроны находились бы в одной ячейке, соответствующей нулевому импульсу. Но в действительности справедлив принцип Паули, и чтобы получить минимум энергии, нужно плотно заполнить ячейки, т. е. разместить по одному электрону (с данной проекцией спина) в ячейку, а ячейки взять с минимально возможным для этого импульсом. Пусть при этом окажутся заполненными ячейки со всеми импульсами вплоть до некоторого импульса p_F . Тогда

мы должны взять объем сферы с радиусом p_F , т. е. $\frac{4}{3}\pi p_F^3$, умножить его на объем газа V и разделить на $(2\pi\hbar)^3$. Таким образом, мы получим для числа нужных нам ячеек величину $\frac{4\pi}{3} \frac{V p_F^3}{(2\pi\hbar)^3}$.

Поместив в каждую ячейку по два электрона (с разными проекциями спина), найдем общее число электронов N , соответствующее такой плотной упаковке:

$$N = 2 \frac{4\pi}{3} \frac{p_F^3 V}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Отсюда следует, что

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar n^{1/3},$$

где n — плотность электронного газа.

Следовательно, при абсолютном нуле температуры распределение электронов, соответствующее минимуму энергии, таково: все состояния электронов с импульсами, заключенными между нулем и p_F , заняты, а состояния с $p > p_F$ свободны. Величину p_F принято называть граничным импульсом Ферми. Импульсу p_F соответствует граничная энергия электрона (граничная энергия Ферми)

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2m} \hbar^2 n^{2/3},$$

где m — масса электрона. Граничный импульс пропорционален плотности электронов в степени $1/3$, а граничная энергия — плотности в степени $2/3$.

Найденное распределение электронов, очевидно, изотропно в пространстве импульсов, т. е. зависит только от величины, а не

от направления импульса. Поэтому мы можем также рассматривать функцию распределения f как функцию только энергии электрона $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$. Она имеет вид ступеньки, резко обрывающейся при энергии, равной ϵ_F (рис. 5.1). Высота ступеньки равна единице (функция распределения относится к определенной проекции спина).

Найдем полную энергию электронного газа при абсолютном нуле. По определению функции распределения эту энергию можно представить в виде

$$W = 2 \int \epsilon f \frac{d\Gamma}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $d\Gamma$ — элемент фазового объема электрона, в качестве которого мы должны взять $d\Gamma = 4\pi p^2 dp dV$ (V — объем, занимаемый элект-

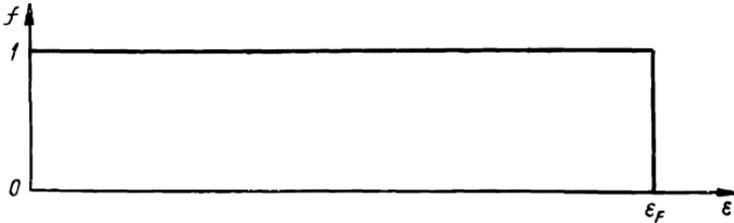


Рис. 5.1

ронами), а множитель 2 перед интегралом соответствует двум возможным проекциям спина электрона. Чтобы вычислить этот интеграл, считаем независимой переменной энергию ϵ . Так как $\epsilon = p^2/2m$, то $d\epsilon = pdp/m$ и

$$d\Gamma = 4 \sqrt{2} \pi m^{3/2} V \epsilon^{1/2} d\epsilon,$$

поэтому

$$W = \frac{8 \sqrt{2} \pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} V \int f \epsilon^{3/2} d\epsilon.$$

Учитывая ступенчатый характер функции распределения, заменим f на единицу и проинтегрируем в пределах от $\epsilon = 0$ до $\epsilon = \epsilon_F$. В результате получаем

$$W = \frac{2 \sqrt{2} m^{3/2}}{5\pi^2 \hbar^3} V \epsilon_F^{5/2}.$$

Поскольку $\epsilon_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2m} \hbar^2 n^{2/3}$, перепишем выражение для энергии электронного газа при абсолютном нуле в виде

$$W = \frac{3^{5/3} \pi^{4/3} \hbar^2 n^{5/3} V}{10 m}.$$

Мы видим, что энергия электронного газа при абсолютном нуле пропорциональна плотности электронов в степени $5/3$.

§ 5.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФЕРМИ

Найдем функцию распределения электронов в состоянии статистического равновесия при конечной температуре, не равной нулю. Для этого нужно, так же как и при выводе распределения Максвелла, рассмотреть столкновения электронов либо друг с другом, либо, что проще, с посторонними молекулами, примешанными к электронному газу и находящимися в состоянии статистического равновесия. Функция распределения таких молекул f_M пропорциональна $e^{-\epsilon_M/kT}$, где ϵ_M — энергия молекулы; T — температура; k — постоянная Больцмана.

Пусть электрон, обладающий энергией ϵ , сталкивается с молекулой, обладающей энергией ϵ_M . В результате столкновения энергии частиц изменяются, но это изменение не однозначное, так что можно лишь говорить о вероятности того или иного изменения. Обозначим через $\omega(\epsilon, \epsilon_M; \epsilon', \epsilon'_M)$ вероятность (отнесенную к единице времени) того, что в результате столкновения энергии частиц стали равными соответственно ϵ' и ϵ'_M . Ясно, что каково бы ни было столкновение, должен выполняться закон сохранения энергии, т. е. $\epsilon + \epsilon_M = \epsilon' + \epsilon'_M$.

Определим изменение в единицу времени числа электронов с энергией ϵ , обусловленное столкновениями с молекулами газа. Оно равно, очевидно, разности числа электронов, приходящих в единицу времени в состоянии с энергией ϵ , и числа электронов, уходящих из этого состояния (также в единицу времени). Если бы электроны не подчинялись принципу Паули, то число уходящих из состояния с энергией ϵ электронов вследствие столкновений с молекулами, имеющими энергию ϵ_M , определялось бы величиной $\omega(\epsilon, \epsilon_M; \epsilon', \epsilon'_M) f(\epsilon) f_M(\epsilon_M)$, просуммированной по всем возможным конечным состояниям ϵ', ϵ'_M ($f(\epsilon)$ — функция распределения электронов). Но в действительности выполняется принцип Паули, поэтому электрон сможет перейти в состояние с энергией ϵ' только в случае, если состояние свободно. Это значит, что написанное выражение должно быть умножено еще на $1 - f(\epsilon')$. Таким образом, число уходящих в единицу времени электронов из состояния с энергией ϵ равно $\sum_{\epsilon', \epsilon'_M, \epsilon'_M} \omega(\epsilon, \epsilon_M; \epsilon', \epsilon'_M) f(\epsilon) f_M(\epsilon_M) (1 - f(\epsilon'))$. Аналогичным

образом определяется число электронов, приходящих в единицу времени в состояние с энергией ϵ . Оно равно

$$\sum_{\epsilon', \epsilon'_M, \epsilon'_M} \omega(\epsilon' \epsilon'_M; \epsilon, \epsilon_M) f(\epsilon') f_M(\epsilon'_M) (1 - f(\epsilon)).$$

Входящая сюда величина $\omega(\epsilon' \epsilon'_M; \epsilon, \epsilon_M)$ представляет собой вероятность (отнесенную к единице времени) перехода частиц (электрона и молекулы) из состояний ϵ', ϵ'_M в состояния ϵ, ϵ_M . Так как законы механики не изменяются при обращении времени, то вероятности переходов — прямого $\epsilon, \epsilon_M \rightarrow \epsilon', \epsilon'_M$ и обратного $\epsilon', \epsilon'_M \rightarrow \epsilon, \epsilon_M$ — равны: $\omega(\epsilon, \epsilon_M; \epsilon', \epsilon'_M) = \omega(\epsilon', \epsilon'_M; \epsilon, \epsilon_M)$. Поэтому окончательно

для изменения числа электронов, обусловленного столкновением с молекулами, получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}} = \sum_{\varepsilon', \varepsilon_M, \varepsilon_M'} \omega(\varepsilon, \varepsilon_M; \varepsilon', \varepsilon_M') \{f(\varepsilon') (1 - f(\varepsilon)) f_M(\varepsilon_M') - f(\varepsilon) (1 - f(\varepsilon')) f_M(\varepsilon_M)\}.$$

В состоянии статистического равновесия эта величина должна равняться нулю, т. е.

$$f(\varepsilon') (1 - f(\varepsilon)) f_M(\varepsilon_M') = f(\varepsilon) (1 - f(\varepsilon')) f_M(\varepsilon_M).$$

Подставляя сюда максвелловское распределение для молекул, находим

$$\frac{1 - f(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} e^{\frac{\varepsilon_M}{kT}} = \frac{1 - f(\varepsilon')}{f(\varepsilon')} e^{\frac{\varepsilon_M'}{kT}}.$$

Но $\varepsilon_M - \varepsilon_M' = \varepsilon' - \varepsilon$, поэтому

$$\frac{1 - f(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = \frac{1 - f(\varepsilon')}{f(\varepsilon')} e^{-\frac{\varepsilon'}{kT}}.$$

Правая часть этого равенства зависит только от ε' , а левая — от ε . Однако ε и ε' не связаны между собой, поэтому следует считать, что и правая и левая части равенства представляют собой одну и ту же константу, не зависящую от энергии электрона. Эту константу можно записать в виде $e^{-\mu/kT}$, где μ — некоторая другая константа (она называется химическим потенциалом). Итак,

$$\frac{1 - f(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = e^{-\frac{\mu}{kT}},$$

откуда

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} + 1}.$$

Эта формула и определяет распределение по энергиям газа электронов, находящегося в состоянии статистического равновесия. Оно носит название распределения Ферми.

Напомним, что функция $f(\varepsilon)$ определяет распределение электронов с заданной проекцией спина. Для определения числа электронов dN в объеме V , энергия которых заключена между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$, функцию распределения Ферми $f(\varepsilon)$ нужно умножить на $2 \frac{4\pi p^2 dpV}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon V$,

т. е.

$$dN = \frac{V\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} V \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} + 1}.$$

Интегрируя это выражение по энергии, найдем полное число электронов:

$$N = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} V \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}.$$

Эта формула связывает константу μ с плотностью электронов $n = N/V$. Выясним теперь особенности распределения Ферми. Полагая температуру достаточно малой, так что $kT \ll \mu$. Тогда если энергия электрона ε меньше μ , причем настолько, что $\mu - \varepsilon > kT$, то экспонента $e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}$, входящая в знаменатель распределения Ферми, будет мала и распределение электронов при $T \neq 0$ практически не

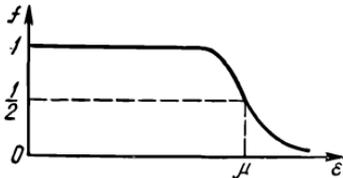


Рис. 5.2

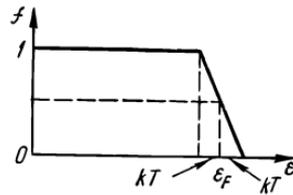


Рис. 5.3

будет отличаться от распределения при абсолютном нуле температуры. Если же энергия ε больше, чем μ , причем настолько, что $\varepsilon - \mu > kT$, то экспонента будет очень велика и функция распределения будет близка к нулю. Поэтому распределение имеет вид, изображенный на рис. 5.2. Это распределение представляет собой ступеньку, но не резко обрывающуюся, как при $T = 0$, а «размытую» с шириной «размытости» порядка kT . Мы видим, что если $kT \ll \mu$, то распределение при $T \neq 0$ отличается от распределения при $T = 0$ только в «зоне размытости» ($\sim kT$). При этом величина μ незначительно отличается от ε_F и условие $kT \ll \mu$ можно переписать в виде $T \ll T_F$, где

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2mk} \hbar^2 n^{2/3}.$$

Величина T_F называется температурой вырождения электронного газа. Она тем выше, чем больше плотность электронов. В металлах $n \sim 10^{24} \text{ см}^{-3}$, $p_F/\hbar \sim 1,2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$ и, следовательно, $\varepsilon_F \sim 9 \times 10^{-12} \text{ эрг} \sim 5,6 \text{ эВ}$, $T_F \sim 6 \cdot 10^4 \text{ К}$. Поэтому при всех температурах, вплоть до температуры плавления металла, выполняется условие $T \ll T_F$.

Если $T \sim T_F$, то ширина «размытости» сравнима с граничной энергией ε_F . Если $T \ll T_F$, то μ мало отличается от ε_F , именно μ будет немного меньше ε_F — на величину порядка $(kT)^2/\varepsilon_F$. Если $T \gg \varepsilon_F$, то распределение Ферми переходит в распределение Максвелла.

Найдем энергию электронного газа при $T \neq 0$. Она определяется согласно общей формуле

$$W = 2 \int \epsilon f(\epsilon) \frac{4\pi p^2 dp V}{(2\pi\hbar)^3},$$

или

$$W = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} V \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{kT}} + 1}.$$

Мы не будем вычислять этот интеграл, а выясним лишь, как зависит энергия от температуры при $T \ll T_F$. Для этого исходим из упрощенной функции распределения, изображенной на рис. 5.3. Ее можно, очевидно, представить как полусумму двух ступенек, характерных для абсолютного нуля температуры, — одной, соответствующей граничной энергии $\epsilon_F - kT$, и другой, соответствующей граничной энергии $\epsilon_F + kT$. Поэтому энергию при $T \neq 0$ можно приближенно оценить как

$$W \sim \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{5\pi^2\hbar^3} [(\epsilon_F - kT)^{5/2} + (\epsilon_F + kT)^{5/2}].$$

Так как $kT \ll \epsilon_F$, получаем

$$W = \frac{2\sqrt{2}}{5\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \epsilon_F^{5/2} V \left[1 + \xi \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right],$$

где ξ — величина порядка единицы.

Итак,

$$W \approx W_0 \left[1 + \xi \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right],$$

где W_0 — энергия при абсолютном нуле. Мы видим, что при $T \ll T_F$ энергия вырожденного электронного газа практически не зависит от температуры, так как относительное увеличение энергии электронного газа при нагревании по сравнению с энергией при $T=0$ составляет по порядку величины $(T/T_F)^2$. Отсюда следует, что средняя квадратичная, или средняя тепловая, скорость электрона \bar{v} практически не зависит от температуры. Эта скорость определяется как

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2\bar{W}}{mN}};$$

$$\bar{v} \sim \sqrt{\frac{\epsilon_F}{m}}.$$

Найдем, наконец, теплоемкость C электронного газа. Она определяется известной формулой $C = dW/dT$, откуда

$$C = 2\xi W_0 \frac{T}{T_F^2}.$$

Отнесенная к одному электрону теплоемкость имеет порядок величины

$$c \sim k \frac{T}{T_F}.$$

Если бы электронный газ вел себя как обычный максвелловский газ, то было бы $c = \frac{3}{2}k$; в действительности теплоемкость уменьшается по сравнению с этой величиной в T_F/T раз. Происходит это благодаря принципу Паули, которому подчиняются электроны.

Таким образом, принцип Паули объясняет специфические тепловые свойства электронного газа при $T \ll T_F$, или вырожденного электронного газа. Для оценок пользуются так называемым стандартным металлом, для которого

$$k_F = p_F/h = 1,21 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1};$$

$$v_F = 1,4 \cdot 10^8 \text{ см/с};$$

$$\varepsilon_F = 8,93 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 5,57 \text{ эВ};$$

$$T_F = \varepsilon_F/k = 64 \text{ 700 К};$$

$$c = 632T \frac{\text{эрг}}{\text{град} \cdot \text{см}^3}.$$

§ 5.3. МЕТАЛЛЫ И ДИЭЛЕКТРИКИ

Принцип Паули объясняет не только особенности тепловых свойств электронного газа, но и сам факт разделения кристаллов на металлы и диэлектрики. В чем же заключается принципиальное различие между этими двумя типами кристаллов и какую роль играет при этом принцип Паули? Сперва попытаемся выяснить, что происходит при объединении отдельных атомов в единый кристалл.

Если взять отдельный атом, то движение электронов в нем происходит таким образом, что их энергия может принимать лишь вполне определенные значения, иными словами, атом характеризуется определенным дискретным энергетическим спектром. Схематически он изображен на рис. 5.4, на котором возможным значениям энергии атома $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ соответствуют различные горизонтальные линии.

Пусть теперь отдельные атомы объединяются в кристалл. Тогда ядра атомов расположатся в узлах некоторой решетки, электронные же оболочки атомов в большей или меньшей степени перекроются, так что электроны станут коллективизированными, т. е. принадлежащими всей решетке в целом. При этом изменится также характер энергетического спектра. Если исходить из схемы, изображенной на рис. 5.4, то из каждого энергетического уровня ε_i ($i = 1, 2, \dots$) возникнет целая полоса уровней, содержащая столько их, сколько всего есть электронов, т. е. сколько всего атомов объединяется в кристалл. Иными словами, мы получим схему, изображенную на рис. 5.5. Здесь цифры 1, 2, ... обозначают отдельные энергетические зоны, возникающие из уровней энергии $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ отдельного атома. Горизонтальные линии в пределах каждой зоны обозначают возможные энергетические уровни отдельного электрона

в кристалле. Число уровней в каждой зоне равно числу электронов в кристалле. Схема эта является упрощенной, в действительности ситуация значительно сложнее, так как возможно перекрытие отдельных энергетических полос; мы не будем, однако, рассматривать здесь этих усложнений. Главным является наличие энергетических зон, разделенных конечными интервалами Δ_{12} , Δ_{23} , ..., и тот факт, что в пределах каждой зоны спектр практически непрерывен, так как число уровней в каждой зоне очень велико. Зоны же разделены запрещенными интервалами (т. е. электрон не может обладать энергией, попадающей в один из этих интервалов).

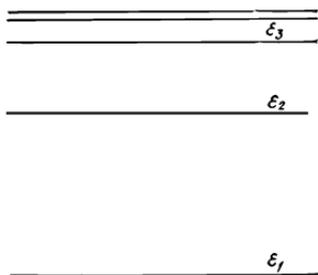


Рис. 5.4

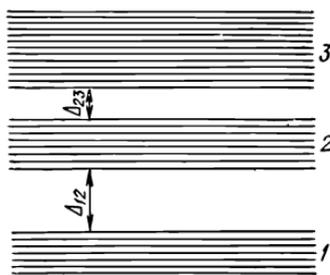


Рис. 5.5

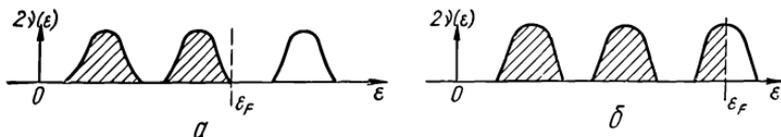


Рис. 5.6

Приведенные рассуждения относятся к энергетическому спектру одного электрона. Но в кристалле очень много электронов — на каждый атом приходится один или несколько электронов. Если отвлечься от взаимодействия между электронами, то возникает задача — разместить электроны по допустимым энергетическим уровням отдельного электрона. Тут вступает в действие принцип Паули, согласно которому на каждом уровне может находиться не более одного электрона с определенной ориентацией спина. Если известно число уровней энергии ΔN , приходящихся на малый интервал энергий $\Delta \epsilon$,

$$\Delta N = \nu(\epsilon)\Delta \epsilon,$$

то легко понять, сколько электронов могут иметь энергию в этом интервале: число таких электронов не может превышать $2\nu(\epsilon)\Delta \epsilon$. График функции $2\nu(\epsilon)$, которая называется плотностью электронных состояний, схематически изображен на рис. 5.6.

Для того чтобы энергия кристалла была минимально возможной, мы должны сперва заполнить самую низкую зону, затем следующую более высокую и т. д. до тех пор, пока не исчерпаем все электроны, т. е. пока не доберемся до фермиевской граничной энергии ϵ_F , определяющейся, как мы видели, плотностью электронов в рассматриваемом кристалле. Ясно, что при таком посте-

пенном размещении электронов могут представиться два случая: либо все электроны полностью заполнят несколько зон, остальные же зоны будут свободными (рис. 5.6, а), либо электронов окажется недостаточно для полного заполнения, так что в последней из заполняемых зон останутся незанятые уровни (рис. 5.6, б). В первом случае фермиевский уровень $\varepsilon = \varepsilon_F$ совпадает с краем энергетической зоны, во втором лежит где-то внутри одной из зон (на рисунках электронные состояния с $\varepsilon < \varepsilon_F$ заштрихованы). Легко видеть, что если зоны полностью заполнены, то кристалл будет изолятором, т. е. диэлектриком, если же одна из зон не полностью заполнена (но в ней есть электроны!), то кристалл будет проводником, т. е. металлом. Чтобы убедиться в этом, приложим к кристаллу слабое электрическое поле. Под влиянием поля электроны будут ускоряться и переходить из состояний с меньшей энергией в состояния с большей энергией. Но в первом случае такой переход невозможен. Действительно, чтобы электрону перейти в какое-либо состояние, это состояние согласно принципу Паули должно быть свободным, свободных же состояний нет — все они заняты. Напротив, во втором случае переход возможен — в зоне есть свободные места. Поэтому возможно протекание тока при сколь угодно слабом электрическом поле, т. е. кристалл будет проводником. Не полностью заполненную зону называют зоной проводимости, а находящиеся в ней электроны — электронами проводимости. В металле ток может протекать при сколь угодно малом электрическом поле вследствие того, что в металле имеются незанятые уровни в зоне проводимости. Диэлектрики не обладают этим свойством. Однако и в них могут протекать токи, но не при слабых, а при очень сильных полях, когда становится возможным переход электронов в зоны проводимости. Это явление (оно называется электрическим пробоем диэлектрика) носит сложный характер, и мы не будем здесь его рассматривать.

Таким образом, различие между диэлектриками и металлами заключается не в степени связи электрона — в первом случае большей, а во втором — меньшей, как может показаться на первый взгляд. Дело также не в перекрытии электронных оболочек — и у металлов, и у диэлектриков электронные оболочки перекрываются, причем особенно велико это перекрытие для внешних электронов. Сущность различия между металлами и диэлектриками связана с характером энергетического спектра тела в сочетании с принципом Паули. Ясно, что если бы электроны не подчинялись принципу Паули, то между металлами и диэлектриками не существовало бы различия и все тела были бы проводниками.

§ 5.4. ТЕРМОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ

Электроны проводимости в металле образуют вырожденный газ частиц, подчиняющихся принципу Паули (такой газ называется Ферми-газом). Держится этот газ в металле благодаря атомным силам связи, т. е. благодаря притяжению электронов к атомным ядрам. Но подобно тому как молекулы могут испаряться из жидкости, так и электроны могут покидать металл. Этот эффект называется термоэлектронной эмиссией. Испарение жидкости возрастает с повышением температуры. Аналогичным образом растет с температурой и термоэлектронная эмиссия.

Легко найти плотность электронов, «испаряющихся» с поверхности металла. Для этого следует рассматривать электроны в металле и электроны, покинувшие металл, как единый газ частиц, находящийся в состоянии статистического равновесия. Ясно, что потенциальная энергия электрона внутри металла меньше, чем снаружи (иначе электрон не находился бы внутри металла). Таким образом, возникает задача о нахождении распределения электронов не только по импульсам, но и по пространственным координатам. Это можно сделать, вспомнив, что распределение обычных молекул по скоростям и координатам — распределение Максвелла—Больцмана — получается из распределения Максвелла по скоростям, если заменить кинетическую энергию молекулы ее полной энергией, т. е. суммой кинетической и потенциальной

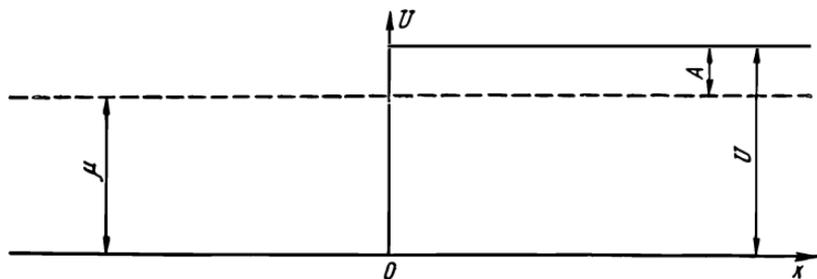


Рис. 5.7

ной энергий. Аналогичная ситуация имеет место и для фермиевского газа. Нам нужно лишь знать зависимость потенциальной энергии электрона U от расстояния x до поверхности металла. Будем исходить из простейшей зависимости, изображенной на рис. 5.7: здесь области внутри металла ($x < 0$) соответствует прямоугольная потенциальная яма глубиной U ($U > 0$). На рисунке отмечен также уровень химического потенциала μ . Так как газ электронов внутри металла вырожден, то величина μ практически совпадает с максимумом энергии электрона, причем все уровни (считая от дна ямы) вплоть до μ заняты. Поэтому легче всего удалить электрон из металла в случае, когда его энергия близка к μ , — для этого нужно затратить минимальную работу:

$$A = U - \mu.$$

Данная величина называется работой выхода электрона.

Рассмотрим теперь электроны вне металла. Так как они находятся в равновесии с электронами внутри металла, то химический потенциал электронного газа вне металла не будет отличаться от химического потенциала электронного газа внутри металла. Поэтому функция распределения электронов вне металла имеет вид

$$f_{\text{вак}} = \frac{1}{e^{\frac{U + \epsilon_k - \mu}{kT}} + 1},$$

где $\epsilon_k = p^2/2m$ — кинетическая энергия электрона с импульсом p вне металла (m — масса электрона). Учитывая, что $U - \mu = A$,

и предполагая, что $A \gg kT$, отбросим в знаменателе распределения Ферми единицу. Таким образом, вне металла распределение электронов будет максвелловским:

$$f_{\text{вак}} \approx e^{-\frac{A}{kT}} e^{-\frac{\epsilon k}{kT}} \quad (kT \gg A).$$

Чтобы найти плотность электронов $n_{\text{вак}}$ вне металла, умножим $f_{\text{вак}}$ на $2 \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$ и проинтегрируем по p :

$$n_{\text{вак}} = e^{-\frac{A}{kT}} \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} p^2 dp.$$

Входящий сюда интеграл равен $\sqrt{\frac{\pi}{2}} (mkT)^{3/2}$, так что

$$n_{\text{вак}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{(mkT)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} e^{-\frac{A}{kT}}.$$

Мы видим, что плотность электронов, «испаряющихся» из металла, зависит от температуры, причем эта зависимость в основном экспоненциальная. С повышением температуры плотность электронов очень быстро возрастает.

Зная функцию распределения электронов вне металла, можно определить электронный ток эмиссии. Для этого нужно определить поток электронов, уходящих от границы металла в сторону вакуума, т. е. таких электронов, для которых проекция скорости v_x положительна. Отсюда следует, что плотность тока эмиссии j_s (т. е. ток с единицы поверхности металла) определяется формулой

$$j_s = 2e \int_{v_x > 0} v_x f_{\text{вак}} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3},$$

где e — заряд электрона и $d^3 p = dp_x dp_y dp_z$. Этот интеграл распадается на три интеграла по p_x , p_y , p_z . Так как входящие сюда интегралы по p_y и p_z одинаковы и равны $\sqrt{2\pi mkT}$, а интеграл по p_x равен kT , то окончательно получаем

$$j_s = \frac{em}{2\pi^2 \hbar^3} (kT)^2 e^{-\frac{A}{kT}}$$

(эта формула называется формулой Ричардсона—Дешмана). Обычно ее записывают в виде

$$j_s = CT^2 e^{-\frac{A}{kT}},$$

где $C \approx 1,204 \cdot 10^6$ А/м² · град²; T — температура в кельвинах.

Мы видим, что ток эмиссии, так же как и плотность испущенных электронов, в основном экспоненциально зависит от температуры, быстро возрастая с ее увеличением. Поэтому для получения

больших токов эмиссии металл нужно сильно нагреть. Большой ток эмиссии (при постоянной температуре) дает тот металл, у которого работа выхода меньше. Значения работы выхода для разных металлов таковы: для вольфрама $A = 4,52$ эВ, для тантала $A = 4,07$ эВ, для платины $A = 6,27$ эВ, для кальция $A = 2,24$ эВ, для цезия $A = 1,81$ эВ. Чтобы представить, как влияет температура на плотность тока эмиссии, приведем данные для вольфрама. При температуре 1000 К плотность тока эмиссии составляет 10^{-15} А/см²; при температуре 2000 К она становится равной 10^{-3} А/см², при температуре 3000 К она достигает 14 А/см².

Электроны могут покидать и холодный металл, но для этого нужно либо приложить к металлу сильное электрическое поле (направленное в сторону металла), либо осветить металл светом с достаточно малой длиной волны; наконец, электроны можно выбивать из металла, бомбардируя его пучком ионов. Что касается вырывания электронов полем (так называемое «холодное» вырывание), то зависимость плотности электронов $n_{\text{вак}}$ вне металла от напряженности поля E определяется соотношением

$$n_{\text{вак}} \sim e^{-\frac{\gamma A^{3/2}}{|e|E}},$$

где A — работа выхода, $\gamma = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}$. Таким образом, на плотность электронов вне металла не влияет температура, но она в сильнейшей степени зависит от напряженности поля, резко возрастая с ее увеличением. Поле играет здесь такую же роль, как температура в термоэлектронной эмиссии. Вырывание электронов светом из металла (фотоэффект) возможно только в том случае, когда частота света ω превосходит некоторый предел. Именно, необходимо, чтобы выполнялось условие $\hbar\omega > A$. При этом кинетическая энергия освобожденного электрона

$$\frac{mv^2}{2} = \hbar\omega - A.$$

Это соотношение (оно называется соотношением Эйнштейна) показывает, что свет в фотоэффекте ведет себя как газ частиц, причем энергия такой частицы — фотона — равна $\hbar\omega$. Если $\hbar\omega < A$, то вылет невозможен, если же $\hbar\omega > A$, то вырывание возможно и написанное соотношение представляет собой закон сохранения энергии.

§ 5.5. КОНТАКТНАЯ РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ

Если привести в соприкосновение два разнородных металла, то они будут обмениваться своими электронами и в результате придут в состояние статистического равновесия. При этом электроны обоих металлов можно рассматривать как единый Ферми-газ с одинаковыми температурой и химическим потенциалом. Различаться будут лишь энергии электронов, в частности глубины потенциальных ям U_1 и U_2 . Это значит, что на границе обоих металлов будет существовать скачок потенциальной энергии электрона $\Delta U = U_1 - U_2$. Потенциальную энергию можно представить как

произведение заряда частицы e на потенциал φ , поэтому на границе двух металлов имеется скачок потенциала

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{e} (U_1 - U_2).$$

Выше мы связывали потенциальную энергию U с работой выхода $A = U - \mu$, а так как химические потенциалы обоих металлов одинаковы, то скачок потенциала определяется разностью работ выхода A_1 и A_2 для обоих металлов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{e} (A_1 - A_2).$$

Разность потенциалов между соприкасающимися металлами называется контактной разностью потенциалов. Мы видим, что кон-

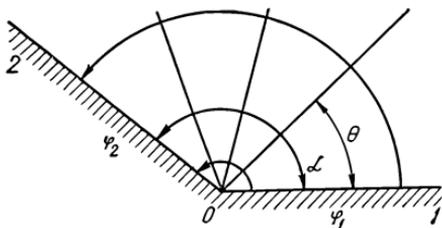


Рис. 5.8

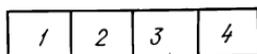


Рис. 5.9

тактная разность потенциалов пропорциональна разности работ выхода.

Физический смысл этого соотношения очень прост. Пусть, например, $A_1 > A_2$. Тогда электроны легче будут переходить из металла 2 в металл 1, чем обратно. Вследствие избыточного заряда металла 1 между металлами возникает поле, направленное от металла 2 к металлу 1, которое препятствует переходу электронов из металла 2 в металл 1. Равновесие будет достигнуто тогда, когда контактная разность потенциалов станет равной $\frac{1}{e}(A_1 - A_2)$.

Вычислим поле, возникающее вследствие контактной разности потенциалов. Рассмотрим простейший случай двух соприкасающихся плоских металлических поверхностей (на рис. 5.8 изображен разрез в плоскости, перпендикулярной линии соприкосновения; она проходит через точку O ; α — угол между плоскостями). Ясно, что эквипотенциальными поверхностями в этом случае являются плоскости, проходящие через линию соприкосновения металлов, а силовыми линиями — дуги окружностей с центром в точке O . Потенциал на плоскости, образующей угол θ с плоскостью 1, определяется формулой

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\theta}{\alpha} (\varphi_2 - \varphi_1),$$

а поле на расстоянии r от O — формулой

$$E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\alpha r}.$$

Оно убывает обратно пропорционально расстоянию до точки O . Разделив E на 4π , найдем плотность поверхностных зарядов на поверхностях проводников 1 и 2 .

Заметим, что так как металл представляет собой не изотропное, а анизотропное тело, свойства которого различны в разных направлениях, то работа выхода электронов может зависеть от ориентации поверхности металла по отношению к кристаллографическим осям его кристаллической решетки. Вследствие этого в одном и том же кристалле возможно существование контактных разностей потенциалов между различными его гранями. Поэтому в металлических монокристаллах у их ребер может существовать электрическое поле.

Если взять не два, а целый ряд попарно соприкасающихся металлов $1, 2, \dots$ (рис. 5.9), то между соседними металлами будут существовать контактные разности потенциалов:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{e} (A_1 - A_2), \quad \varphi_{23} = \frac{1}{e} (A_2 - A_3),$$

где A_1, A_2 — работы выхода для металлов $1, 2, \dots$. Отсюда легко найти разность потенциалов между крайними металлами — 1 и n :

$$\begin{aligned} \varphi_{1n} &= \varphi_{12} + \varphi_{23} + \dots + \varphi_{n-1, n} = \\ &= \frac{1}{e} (A_1 - A_2) + \frac{1}{e} (A_2 - A_3) + \dots + \frac{1}{e} (A_{n-1} - A_n) = \frac{1}{e} (A_1 - A_n). \end{aligned}$$

Мы видим, что она определяется только крайними металлами. Поэтому если замкнуть ряд металлов в одно кольцо ($n = 1$), то сумма всех скачков потенциала обратится в нуль. Значит, с помощью одних лишь металлов, находящихся в состоянии статистического равновесия, нельзя создать источник ЭДС. Это и не удивительно, так как в противном случае полученные результаты противоречили бы закону сохранения энергии. Однако источник ЭДС можно получить, если спай металлов держать при разных температурах, так как при этом система проводников неравновесна.

§ 5.6. ФОРМУЛА ДРУДЕ

Перейдем к изучению электропроводности металлов. Свяжем прежде всего плотность электрического тока \mathbf{j} с функцией распределения электронов $f(\mathbf{p})$. По определению функции распределения число электронов в единице объема, импульс которых лежит в интервале $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$, равно $2f(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$, где $d^3p = dp_x dp_y dp_z$ — элемент объема в импульсном пространстве и множитель 2 учитывает две возможные ориентации спина электрона. Умножив эту величину на $e\mathbf{v}$, где e — заряд и \mathbf{v} — скорость электрона, найдем заряд, переносимый этими электронами в единицу времени. Наконец, проинтегрировав полученное выражение по d^3p , определим плотность тока:

$$\mathbf{j} = 2e \int \mathbf{v} f(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Эту формулу можно записать также в виде

$$\mathbf{j} = 2e \int \mathbf{v} f(\mathbf{p}) v(\epsilon) d\epsilon \frac{d\Omega}{4\pi},$$

где $v(\epsilon)d\epsilon d\Omega/4\pi$ — число состояний электрона в интервале энергий $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$ и интервале телесных углов $d\Omega$ импульса \mathbf{p} .

В состоянии статистического равновесия распределение электронов изотропно, т. е. $f(\mathbf{p})$ зависит от абсолютного значения импульса, а не от его направления. Поэтому в данном случае $f(-\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})$, а так как знак скорости изменяется вместе с импульсом, то интеграл, определяющий плотность тока, обращается в нуль. Такая ситуация имеет место в отсутствие поля; если к металлу приложено электрическое поле, то возникает выделенное направление, функция распределения не будет уже симметричной, т. е. $f(\mathbf{p})$ отличается от $f(-\mathbf{p})$ и вектор плотности тока не равен нулю.

Отвлечемся сперва от того, что электроны находятся в кристаллической решетке, и будем рассматривать их как газ свободных частиц. Тогда скорость электрона \mathbf{v} пропорциональна его импульсу \mathbf{p} , т. е. $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$, где m — масса электрона, и поэтому суммарный импульс электронов, отнесенный к единице объема, определяется формулой

$$\mathbf{P} = 2 \int \mathbf{p} f(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 2m \int \mathbf{v} f(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Из сравнения этой формулы с формулой для плотности тока следует, что

$$\mathbf{j} = \frac{e}{m} \mathbf{P},$$

т. е. плотность тока пропорциональна плотности импульса. Отсюда вытекает важный вывод относительно изолированного газа электронов. Для такого газа сохраняется импульс, причем независимо от того, как взаимодействуют электроны друг с другом — лишь бы они не взаимодействовали с внешним миром. Но в таком случае будет сохраняться и плотность тока, пропорциональная импульсу. Поэтому в системах отсчета, где импульс отличен от нуля, отлична от нуля и плотность тока, хотя к газу и не приложено внешнее электрическое поле. Это значит, что изолированный газ электронов, как угодно взаимодействующих между собой (но не с окружающими телами!), не обладает электрическим сопротивлением.

Если такой газ поместить в постоянное внешнее поле \mathbf{E} , то суммарный импульс электронов \mathbf{P} изменяется согласно уравнению

$$\dot{\mathbf{P}} = en\mathbf{E},$$

где n — число электронов в единице объема (внутренние силы взаимодействия между электронами в это соотношение не входят согласно закону равенства действия и противодействия). Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \mathbf{j} = \frac{e^2 n}{m} \mathbf{E}.$$

Это соотношение показывает, что ток в изолированном газе электронов при включении постоянного электрического поля будет неограниченно возрастать, причем поле может быть сколь угодно слабым. Этот вывод связан с двумя сделанными предположениями: во-первых, отношение e/m для всех частиц газа должно быть одинаковым и, во-вторых, газ должен быть замкнутой системой.

Чтобы проиллюстрировать и разъяснить смысл полученного результата, рассмотрим полностью ионизованную плазму, т. е. газ, состоящий из электронов и ионов с суммарным зарядом, равным нулю. Так как масса иона значительно больше массы электрона (по меньшей мере в 2000 раз), то ионы можно считать покоящимися. Поэтому импульс плазмы практически не отличается от импульса электронов, но он не будет сохраняться из-за взаимодействия электронов с ионами. Значит, в отсутствие внешнего поля в плазме не будет тока электронов. При включении поля уравнение $\dot{\mathbf{P}} = e n \mathbf{E}$ уже не выполняется, так как справа должна стоять еще сила, действующая на электроны со стороны ионов. Не выполняется и уравнение

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{e^2 n}{m} \mathbf{E}.$$

Если, однако, исходить из упрощенной картины взаимодействия электронов с ионами и считать, что в течение некоторого промежутка времени электрон движется как свободная частица, а в конце промежутка сталкивается с ионом и полностью теряет свой импульс, то уравнение $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{e^2 n}{m} \mathbf{E}$ справедливо в течение промежутка времени τ . Поэтому ток не растет безгранично и определяется формулой

$$\mathbf{j} = \frac{e^2 n}{m} \overline{\tau} \mathbf{E},$$

где $\overline{\tau}$ — некоторое среднее значение τ . Эта величина называется средним временем свободного пробега электрона. В дальнейшем не будем ставить черточки над τ .

Таким образом, мы получили закон Ома с коэффициентом электропроводности

$$\sigma = \frac{e^2 n}{m} \tau.$$

Это соотношение называется формулой Друде.

Умножая τ на среднюю скорость v_T теплового движения электронов, находим среднюю длину свободного пробега электрона:

$$l = v_T \tau.$$

Поэтому выражение для коэффициента электропроводности можно записать в виде

$$\sigma = \frac{e^2 n l}{m v_T}.$$

Чем больше длина свободного пробега, тем больше коэффициент электропроводности. Например, для плазмы

$$l \sim \frac{1}{n} \left(\frac{kT}{e^2} \right)^2,$$

а так как $v_T \sim \sqrt{\frac{kT}{m}}$, то

$$\sigma \sim \frac{(kT)^{3/2}}{\sqrt{me^4}}.$$

Мы видим, что с увеличением температуры коэффициент электропроводности плазмы растет сильно, как $T^{3/2}$.

§ 5.7. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Выясним, в какой мере применимы к металлам результаты, полученные для газа свободных электронов. Казалось бы, металл можно рассматривать как плазму, состоящую из электронов проводимости и ионов, и поэтому для коэффициента электропроводности металлов естественно пользоваться формулой $\sigma = \frac{e^2 n}{m} \tau$. Но при этом возникает вопрос, что такое τ и как определить эту величину. Существовавшее, что, во-первых, ионы в кристаллическом металле расположены в строго определенном порядке, а не хаотически, как в плазме, и, во-вторых, что электроны в металле подчиняются статистике Ферми, а не статистике Максвелла—Больцмана, как в случае плазмы.

С первым обстоятельством связана модификация понятия импульса электрона, движущегося в кристалле. Дело в том, что электрон с импульсом \mathbf{p} характеризуется волновой функцией $e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}$, которая при трансляции на вектор решетки $\mathbf{a} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$ (\mathbf{a}_i — периоды решетки; n_i — целые числа) приобретает фазовый множитель $e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}/\hbar}$. Если взять теперь наряду с \mathbf{p} другой вектор \mathbf{p}' такой, что $e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}/\hbar} = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{a}/\hbar}$, то вектор \mathbf{p}' можно с тем же основанием, что и \mathbf{p} , считать импульсом электрона в периодической решетке. Связь между \mathbf{p} и \mathbf{p}' такова:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + 2\pi\hbar\mathbf{b},$$

где $\mathbf{b} = m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3$ — вектор обратной решетки (\mathbf{b}_i — основные периоды обратной решетки, $\mathbf{b}_i\mathbf{a}_k = \delta_{ik}$ и m_i — целые числа). Таким образом, вектор \mathbf{p} в периодической решетке может быть определен только с точностью до $2\pi\hbar\mathbf{b}$. Поэтому вектор \mathbf{p} называют не импульсом, а квазиимпульсом.

Невозможность точной фиксации импульса приводит к несохранению квазиимпульса в процессах взаимодействия электронов в решетке. Например, если в решетке «сталкиваются» два электрона с квазиимпульсами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 и в результате взаимодействия (столк-

новения) их квазимпульсы становятся равными \mathbf{p}'_1 и \mathbf{p}'_2 , то справедливо соотношение

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + 2\pi\hbar\mathbf{b},$$

а не обычный закон сохранения импульса $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$. Благодаря этому, если даже отвлечься от взаимодействия электронов проводимости с ионами кристаллической решетки, уже само взаимодействие электронов друг с другом приводит, в принципе, в отличие от случая плазмы к конечной проводимости металла.

Второе обстоятельство — иная статистика электронов в металле по сравнению с плазмой — также очень существенно, потому что для определения вектора плотности тока, как мы видели, нужно знать функцию распределения электронов f , а для того чтобы найти ее (в присутствии электрического поля она отличается от фермиевской функции распределения), обязательно необходим учет принципа Паули.

Разъясним метод нахождения функции распределения электронов $f(t; \mathbf{p})$ в электрическом поле \mathbf{E} . Рассмотрим для этого баланс чисел электронов в элементе d^3p пространства \mathbf{p} . В момент времени t это число равно $f(t; \mathbf{p})d^3p/(2\pi\hbar)^3$ (предполагается заданной проекция спина электрона; распределение электронов считается пространственно однородным). Но в этот элемент объема одни частицы в результате столкновений будут входить, а другие — выходить. Кроме того, электроны будут ускоряться в поле \mathbf{E} , и вследствие этого будет изменяться их импульс (точнее, квазимпульс). Именно, если в момент времени t квазимпульс равен \mathbf{p} , то в момент времени $t + dt$ он равен $\mathbf{p} + e\mathbf{E}dt$.

Обозначим через $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_+^{\text{coll}}$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_-^{\text{coll}}$ число электронов, приходящих и уходящих за единицу времени в результате различных процессов столкновений в единичный объем пространства \mathbf{p} (возле точки \mathbf{p}). Тогда в момент времени $t + dt$ число электронов в элементе объема $d^3p = dp_x dp_y dp_z$ пространства \mathbf{p} равно

$$\left\{ f(t; \mathbf{p}) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_-^{\text{coll}} - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_+^{\text{coll}} \right] dt \right\} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Так как частицы не рождаются и не исчезают, то эта величина должна равняться $f(t + dt; \mathbf{p} + e\mathbf{E}dt)$. Но

$$f(t + dt; \mathbf{p} + e\mathbf{E}dt) \approx f(t; \mathbf{p}) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} e\mathbf{E}dt.$$

Поэтому, приравнявая оба выражения, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_-^{\text{coll}},$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_-^{\text{coll}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_+^{\text{coll}} - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_-^{\text{coll}}$. Эта величина называется интегралом столкновений, а полученное соотношение — кинетическим уравнением.

Интеграл столкновений определяется конкретными процессами взаимодействия, в которых участвуют электроны. Простейшую

структуру имеет интеграл столкновений, соответствующий столкновениям электронов с «чужими» (по отношению к кристаллу), или примесными атомами. Так как масса атома значительно больше массы электрона, то столкновения электрона с примесными атомами будут в основном упругими (без изменения энергии электрона). Если $\omega_t(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — отнесенная к единице времени вероятность перехода электрона из состояния \mathbf{p} в состояние \mathbf{p}' (она пропорциональна концентрации примесей), то число электронных переходов $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$ в единицу времени определяется формулой

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{-}^{\text{coll}} = \sum_{\mathbf{p}'} \omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f(\mathbf{p}) [1 - f(\mathbf{p}')],$$

где множитель $1 - f(\mathbf{p}')$ учитывает принцип Паули: переход возможен только в том случае, если состояние \mathbf{p}' не занято. Суммирование здесь производится по всем состояниям \mathbf{p}' .

Аналогично число переходов $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$ определяется формулой

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{+}^{\text{coll}} = \sum_{\mathbf{p}'} \omega(\mathbf{p}', \mathbf{p}) f(\mathbf{p}') [1 - f(\mathbf{p})].$$

Вычитая из этого выражения $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{-}^{\text{coll}}$ получаем интеграл столкновений $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{im}^{\text{coll}}$, соответствующий «столкновениям» электронов с примесными атомами. При этом следует учитывать, что $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \omega(\mathbf{p}', \mathbf{p})$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{im}^{\text{coll}} = \sum_{\mathbf{p}'} \omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \{f(\mathbf{p}') [1 - f(\mathbf{p})] - f(\mathbf{p}) [1 - f(\mathbf{p}')]\}.$$

Обратим внимание на важнейшее свойство интеграла столкновений — он обращается в нуль для равновесных распределений частиц, т. е. в данном случае для фермиевского распределения электронов (ср. § 5.2). Поэтому для малых отклонений функции распределения f от фермиевской функции f_0 интеграл столкновений линеен по $f - f_0$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{im}^{\text{coll}} = -\omega_{im} (f - f_0),$$

где ω_{im} — некоторое усредненное значение вероятности $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ (в следующем параграфе эта величина будет оценена).

Разъясним теперь структуру интеграла столкновений, соответствующего рассеянию электронов электронами. Рассмотрим два электрона с квазимпульсами \mathbf{p} и \mathbf{p}' , которые в результате столкновения переходят в состояния с квазимпульсами \mathbf{p}'' и \mathbf{p}''' . Обозначим через $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}'', \mathbf{p}''')$ отнесенную к единице времени вероятность этого процесса. Тогда число переходов $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}'', \mathbf{p}'''$ в единицу времени равно

$$\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}'', \mathbf{p}''') f(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}') [1 - f(\mathbf{p}'')] [1 - f(\mathbf{p}''')].$$

Здесь множители типа $1 - f$ учитывают принцип Паули: электроны смогут перейти в состояния p'' и p''' только в случае, если состояния не заняты. Вероятности процессов $p, p' \rightarrow p'', p'''$ и $p'', p''' \rightarrow p, p'$ одинаковы. Поэтому интеграл столкновений, соответствующий взаимодействию электронов, можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{el}^{\text{coll}} = \sum_{p', p'', p'''} \omega(p, p'; p'', p''') \{f(p'')f(p''') [1 - f(p)] [1 - f(p')] - f(p)f(p') [1 - f(p'')] [1 - f(p''')]\}.$$

В случае равновесия фигурная скобка обращается в нуль: в этом легко убедиться, подставив вместо f фермиевскую функцию f_0 и используя закон сохранения энергии $\varepsilon + \varepsilon' = \varepsilon'' + \varepsilon'''$. Поэтому при малых отклонениях f от f_0 интеграл столкновений линеен по $f - f_0$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{el}^{\text{coll}} = -\omega_{el}(f - f_0),$$

где ω_{el} — некоторое усредненное значение $\omega(p, p'; p'', p''')$. Так как электронные переходы возможны только в зоне размытости фермиевского распределения, а в процессе участвует два электрона, то величина ω_{el} пропорциональна квадрату температуры.

Мы рассмотрели интегралы столкновений, соответствующие взаимодействию электронов с примесями и рассеянию электронов электронами. В принципе нужно учитывать одновременно как эти, так и другие процессы взаимодействий, в которых участвуют электроны. Поэтому интеграл столкновений представляется в виде суммы

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^{\text{coll}},$$

где индекс i нумерует различные процессы взаимодействия.

Важным свойством интеграла столкновений является обращение его в нуль для фермиевского распределения f_0 :

$$f_0 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} + 1}.$$

Поэтому при $|f - f_0| \ll f_0$ интеграл столкновений линеен по $f - f_0$,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{im}^{\text{coll}} = -\omega_{im}(f - f_0).$$

где ω_i — некоторые усредненные значения вероятностей различных процессов.

Итак, если функция распределения близка к равновесной, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}} = -\frac{f - f_0}{\tau},$$

где

$$\frac{1}{\tau} \equiv \omega = \sum_i \omega_i.$$

Величина ω представляет собой сумму усредненных вероятностей различных процессов рассеяния, в которых участвует электрон, а обратная величина τ — среднее время между столкновениями. Ее называют средним временем свободного пробега электрона. Вводя среднее время свободного пробега $\tau_i = 1/\omega_i$ по отношению к i -му процессу взаимодействия электронов, можно записать:

$$\frac{1}{\tau} = \sum_i \frac{1}{\tau_i}.$$

Величины ω_i , τ_i могут зависеть от энергии электрона, температуры, плотности примесных атомов и т. д.

Подставим в кинетическое уравнение для электронов выражение для $(\partial f/\partial t)^{\text{coll}}$, справедливое при $|f - f_0| \ll f_0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{1}{\tau} (f - f_0).$$

Это уравнение определяет функцию f , зная которую, можно вычислить плотность тока \mathbf{j} . Предположим сперва, что $\mathbf{E} = 0$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f = -\frac{1}{\tau} \delta f,$$

где $\delta f = f - f_0$. Поэтому

$$\delta f = (\delta f)_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $(\delta f)_0$ — начальное значение отклонения функции распределения от равновесной функции распределения. Мы видим, что в отсутствие поля любое отклонение от равновесной функции распределения затухает и по истечении времени $t \sim \tau$ становится очень малым, так что τ играет роль времени релаксации к равновесному распределению.

Рассмотрим теперь стационарное распределение, считая, что $\mathbf{E} \neq 0$. Тогда из кинетического уравнения следует, что

$$f = f_0 - \tau e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}.$$

Поскольку предполагается, что $|f - f_0| \ll f_0$, то в члене, содержащем \mathbf{E} , можно заменить f на f_0 . Так как $\partial f_0/\partial \mathbf{p} = v \partial f_0/\partial \epsilon$, где $v = \partial \epsilon/\partial \mathbf{p}$ — скорость электрона, то

$$f = f_0 - \tau e v \mathbf{E} \frac{d f_0}{d \epsilon}.$$

Мы видим, что отклонение от равновесного распределения, вызываемое полем, пропорционально $v\mathbf{E}$. Но величина $d f_0/d \epsilon$ существенно отлична от нуля только в зоне размытости $\Delta \epsilon \sim kT$ фермиевского распределения вблизи граничной энергии $\epsilon = \mu$. Поэтому только в этой области поле существенно изменяет функцию распределения электронов, вне ее распределение электронов практически не отличается от фермиевского.

Так как $-d f_0/d \epsilon$ имеет резкий максимум, близкий к δ -образному, при $\epsilon = \mu$ (см. рис. 5.2), то при вычислении интегралов,

содержащих произведение $-df_0/d\varepsilon$ на произвольную гладкую функцию $F(\varepsilon)$, можно пользоваться правилом

$$-\int \frac{df_0}{d\varepsilon} F(\varepsilon) d\varepsilon = F(\mu)$$

(допускаемая ошибка равна $\frac{\pi^2}{6} (kT)^2 F''(\mu)$, значит, относительная ошибка составляет $(kT/\mu)^2$).

Вычислим плотность тока. Подставляя выражение для f в общую формулу для \mathbf{j} и учитывая, что слагаемое f_0 не вносит вклада в плотность тока, получаем

$$\mathbf{j} = -2e^2 \int \mathbf{v}(\mathbf{vE}) \tau \frac{df_0}{d\varepsilon} v(\varepsilon) d\varepsilon \frac{d\mathbf{o}}{4\pi}$$

($v(\varepsilon)$ — плотность уровней электрона). Используя δ -образный характер функции $df_0/d\varepsilon$, выполним интегрирование по ε :

$$\mathbf{j} = 2e^2 v_0^2 \tau_0 v(\mu) \int \mathbf{n}(\mathbf{nE}) \frac{d\mathbf{o}}{4\pi},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$ и индекс «0» обозначает, что соответствующая величина относится к значению $\varepsilon = \mu$. Интеграл по телесному углу $d\mathbf{o}$ равен $\frac{1}{3} \mathbf{E}$, так что

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где

$$\sigma = \frac{2}{3} e^2 v_0^2 \tau_0 v(\mu).$$

Этой общей формуле для коэффициента электропроводности металла можно придать вид формулы Друде, если считать, что $\varepsilon = p^2/2m$ (в принципе связь между энергией электрона ε и его квазимпульсом p носит более сложный характер). Тогда величину $d^3p = p^2 dp d\mathbf{o}$ можно представить в виде $d^3p = \sqrt{2\varepsilon m^3/2} d\varepsilon d\mathbf{o}$. Используя далее соотношение

$$\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = v(\varepsilon) d\varepsilon \frac{d\mathbf{o}}{4\pi},$$

находим

$$v(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2\varepsilon m^3/2}}{2\pi^2 \hbar^3}.$$

Учитывая, что

$$2 \frac{4\pi}{3} \frac{p_0^3}{(2\pi\hbar)^3} = n; \quad \frac{p_0^2}{2m} = \mu$$

(n — плотность электронов), получаем формулу Друде

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau_0}{m},$$

в которую входит значение времени релаксации τ при $\epsilon = \mu$. Ее можно переписать в виде

$$\sigma = \frac{e^2 n l}{m v_0},$$

где $l = \tau_0 v_0$ — длина свободного пробега электрона, обладающего граничной скоростью v_0 . Так как обратные времена свободного пробега складываются, то

$$\frac{1}{l} = \sum_i \frac{1}{l_i},$$

где $l_i = \tau_i v_0$ — длина свободного пробега электрона по отношению к i -му процессу рассеяния.

Приведем еще формулу для удельного сопротивления $\rho = \frac{1}{\sigma}$:

$$\rho = \sum_i \rho_i; \quad \rho_i = \frac{m v_0}{e^2 n l_i}.$$

Здесь ρ_i представляет собой удельное сопротивление, обусловленное i -м процессом рассеяния электронов.

§ 5.8. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ

Входящие в формулу для σ плотность электронов и их граничная скорость являются характерными для каждого металла константами и не зависят от внешних факторов, таких, как температура. Только длина свободного пробега может зависеть от указанных факторов. Перейдем к изучению этой зависимости.

Рассмотрим сперва гипотетический идеализированный кристаллический металл, который обладает абсолютно правильной периодической решеткой с неподвижными ионами (не совершающими никаких колебаний!), не содержит никаких примесей и в котором электроны не взаимодействуют. Такой идеализированный кристалл можно рассматривать как гигантскую молекулу, и подобно тому как в обычной молекуле движение электронов происходит без столкновений с ионами, так и в нашем идеализированном кристалле благодаря его абсолютной периодичности движение электронов происходит без столкновений с ионами (в отличие от случая плазмы, где ионы расположены хаотически!) Кроме того, по предположению электроны не сталкиваются друг с другом. Поэтому длина свободного пробега электрона в таком кристалле бесконечна, а следовательно, бесконечна проводимость и равно нулю сопротивление.

Конечность длины свободного пробега электрона обусловлена неидеальностью решетки и взаимодействием электронов. Неидеальность же решетки, в свою очередь, связана с наличием примесей и искажений, а также с тепловыми колебаниями решетки. Таким образом, следует различать три основных механизма рассеяния электронов — рассеяние электронов примесными атомами, рассеяние электронов колебаниями решетки и рассеяние электронов электронами. Простейшим является рассеяние электронов примесными

атомами. Если Q обозначает эффективное сечение рассеяния электрона атомом примеси (по порядку величины $Q \sim 10^{-16} \text{ см}^2$), то длина свободного пробега электрона l_{im} по отношению к этому рассеянию может быть определена по газокинетической формуле

$$l_{im} = \frac{1}{n'Q},$$

где n' — число примесных атомов в единице объема.

При рассеянии электронов тепловыми колебаниями решетки колебания могут происходить с разной частотой ω , зависящей от длины волн колебаний или волнового вектора \mathbf{f} , кроме того, частота зависит от поляризации волны j ; существуют три поляризации: в простейшем случае изотропного тела одна поляризация соответствует продольным колебаниям, а две — поперечным. Поэтому частоту следует записывать в виде $\omega_j(\mathbf{f})$. В случае длинных волн, когда $fa \ll 1$ (a — постоянная решетки), частота пропорциональна волновому числу f , $\omega_j(\mathbf{f}) = s_j f$, где s_j — скорость звука, соответствующая поляризации j .

С колебаниями решетки можно связать определенные частицы — фононы, энергия и квазимпульс которых ε_{qj} и \mathbf{q} определяются соотношениями

$$\varepsilon_{qj} = \hbar\omega_j(\mathbf{f}); \quad \mathbf{q} = \hbar\mathbf{f}.$$

Рассеяние электронов колебаниями решетки сводится к двум основным процессам — испусканию и поглощению электроном фонона. Для этих процессов справедливы законы сохранения

$$\varepsilon = \varepsilon' \pm \varepsilon_{qj}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' \pm \mathbf{q} + 2\pi\hbar\mathbf{b},$$

где ε — энергия электрона с квазимпульсом \mathbf{p} до рассеяния; ε' — энергия электрона с квазимпульсом \mathbf{p}' после рассеяния; \mathbf{b} — вектор обратной решетки (напомним, что он должен входить потому, что в решетке может быть определен только квазимпульс, а не импульс; это относится как к электрону, так и к фонону).

Интеграл столкновений электронов с решеткой $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_I^{\text{coll}}$ можно записать как интеграл столкновений электронов с фононами. При этом следует учитывать, что вероятность поглощения фонона пропорциональна числу имеющихся фононов N_{qj} , а вероятность испускания — числу имеющихся фононов плюс один, т. е. $N_{qj} + 1$. Поэтому интеграл столкновений имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_I^{\text{coll}} = & \sum_{\mathbf{p}', \mathbf{q}} \omega_+(\mathbf{p}'; \mathbf{p}, \mathbf{q}) \{f(\mathbf{p}') [1 - f(\mathbf{p})] (N_{\mathbf{q}} + 1) - \\ & - f(\mathbf{p}) [1 - f(\mathbf{p}')] N_{\mathbf{q}}\} + \sum_{\mathbf{p}'', \mathbf{q}} \omega_-(\mathbf{p}'', \mathbf{q}; \mathbf{p}) \{f(\mathbf{p}') [1 - f(\mathbf{p})] N_{\mathbf{q}} - \\ & - f(\mathbf{p}) [1 - f(\mathbf{p}')] (N_{\mathbf{q}} + 1)\}. \end{aligned}$$

Здесь первая сумма определяет число электронных переходов $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$ в единицу времени с испусканием фонона \mathbf{q} (индекс j опущен) и число обратных переходов $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$ с поглощением фонона \mathbf{q} (отнесенная

к единице времени вероятность обоих процессов одинакова). Аналогичным образом вторая сумма определяет число переходов $p'' \rightarrow p$ в единицу времени с поглощением фонона q и число обратных переходов $p \rightarrow p''$ с испусканием фонона q . Суммирование производится по всем возможным p' , p'' , q с учетом закона сохранения энергии и модифицированного закона сохранения квазимпульса. В состоянии статистического равновесия $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_I^{\text{coll}} = 0$. Используя закон сохранения энергии, легко убедиться, что фермиевское распределение для электронов

$$f_0(p) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{kT}} + 1}$$

и планковское распределение для фононов

$$N_0(q) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

обращают интеграл столкновений в нуль.

Чтобы найти длину свободного пробега электрона l_I , обусловленную его взаимодействием с решеткой, следует учесть, что частота фонона ω ограничена сверху, $\omega \leq \omega_0$, где ω_0 по порядку величины равна s/a (s — скорость звука; a — постоянная решетки). Поэтому если считать, что решетка находится в состоянии статистического равновесия, то возникает характерный параметр $\frac{\hbar\omega_0}{kT}$ или T_D/T , где

$$T_D = \frac{\hbar\omega_0}{k} = \frac{\hbar s}{ka}$$

(температура Дебая T_D составляет по порядку величины несколько сот градусов), и длина свободного пробега оказывается функцией T/T_D . Особенно прост случай, когда $T \gg T_D$. При этом планковская функция сводится к $kT/\hbar\omega$, и поэтому $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_I^{\text{coll}}$ оказывается пропорциональным температуре, а длина пробега — обратно пропорциональной T . Более точно, если $T \gg T_D$, то

$$l_I \sim \frac{\hbar v_0}{kT}$$

(v_0 — граничная скорость Ферми). В области низких температур, $T \ll T_D$, длина пробега растет с убыванием температуры быстрее, чем T^{-1} , а именно как T^{-5} :

$$l_I \sim \frac{\hbar v_0}{kT} \left(\frac{T_D}{T}\right)^4.$$

Это связано как с уменьшением интенсивности колебаний решетки (число фононов при $T \ll T_D$ пропорционально $(T/T_D)^3$), так и с уменьшением эффективного угла рассеяния электрона (он пропорционален

T/T_D). В промежуточной области температур l_l является сложной функцией T/T_D , и мы ее здесь не приводим.

Рассмотрим третий механизм рассеяния электронов, обусловленный их взаимодействием. Числа электронных переходов $p, p' \rightarrow p'', p'''$ и $p'', p''' \rightarrow p, p'$ пропорциональны, очевидно, произведению ширин двух зон размытости для электронов в состояниях p, p' (или p'', p'''), т. е. квадрату температуры. Этой же величине пропорционален и интеграл столкновений, соответствующий рассеянию электронов электронами. Поэтому длина свободного пробега электрона l_{el} , обусловленного взаимодействием между электронами, обратно пропорциональна T^2 . Если считать взаимодействие между электронами чисто кулоновским, то

$$l_{el} \sim \frac{\hbar v_0 \epsilon_F}{(kT)^2} \left(\frac{\hbar v_0}{e^2} \right)^2 \sim \frac{\hbar v_0 \epsilon_F}{(kT)^2},$$

где ϵ_F — граничная фермиевская энергия.

В действительности длина свободного пробега электронов по отношению к рассеянию их друг другом может быть значительно больше этого значения. Дело в том, что взаимодействие между электронами может быть гораздо меньше, чем чисто кулоновское взаимодействие, так как кулоновское отталкивание может существенно компенсироваться притяжением, обусловленным обменом фононами между электронами (об этом эффекте см. § 5.12). Оценив длины пробега электрона по отношению к различным процессам, можем выяснить, как зависит электропроводность или сопротивление металла от температуры и концентрации примесей.

Удельное сопротивление ρ определяется формулой

$$\rho = \rho_{im} + \rho_l + \rho_{el},$$

где $\rho_{im}, \rho_l, \rho_{el}$ — вклады в сопротивление, обусловленные рассеянием электронов примесными атомами, рассеянием электронов колебаниями решетки и взаимодействием электронов:

$$\rho_{im} = \frac{m v_0}{e^2 n} \frac{1}{l_{im}}, \quad \rho_l = \frac{m v_0}{e^2 n} \frac{1}{l_l}, \quad \rho_{el} = \frac{m v_0}{e^2 n} \frac{1}{l_{el}}.$$

Величина ρ_{im} не зависит от температуры и определяется концентрацией $c = n'/n$ примесных атомов:

$$\rho_{im} = \frac{p_F}{e^2 Q} c,$$

где $p_F = m v_0$ — граничный фермиевский импульс. Так как $Q \sim 10^{-16} \text{ см}^2$ и $e^2/\hbar v_0 \sim 1$, то для оценки ρ_{im} можно пользоваться формулой $\rho_{im} \approx 10^{-16} c$ (сопротивление выражено в секундах). Величины ρ_l и ρ_{el} существенно зависят от температуры: эта зависимость различна в областях высоких и низких температур. В области высоких температур, $T \gg T_D$, $\rho_l \gg \rho_{el}$, причем

$$\rho_l \approx \frac{m kT}{\hbar e^2 n},$$

т. е. ρ_l линейно растет с T . Так как ρ_{im} не зависит от T , то при $T \gg T_D$ главную роль играет механизм рассеяния электронов коле-

баниями решетки и $\rho \sim T$. При низких температурах, $T \ll T_D$, ρ_l и ρ_{el} зависят от T (уменьшаясь с уменьшением T); сопротивление ρ_{im} от T не зависит. Поэтому при $T \ll T_D$ главную роль играет механизм рассеяния электронов примесными атомами. Обусловленное им сопротивление называется остаточным. Величины ρ_l и ρ_{el} при $T \ll T_D$ могут рассматриваться как небольшие температурные добавки к остаточному сопротивлению. Они определяются формулами

$$\rho_l \approx \frac{m}{\hbar e^2} \frac{kT}{n} \left(\frac{T}{T_D} \right)^4,$$

$$\rho_{el} = \frac{m}{\hbar e^2} \frac{(kT)^2}{nE_F} \xi \left(\frac{T}{T_D} \right),$$

где $\xi \left(\frac{T}{T_D} \right)$ — фактор, учитывающий уменьшение взаимодействия электронов, обусловленное обменом фононами. Если бы этот фактор был порядка единицы, то главной поправкой к ρ_{im} при $T \ll T_D$ было бы $\rho_{el} \sim T^2$. Но для очень многих металлов $\xi \ll 1$, и поэтому $\rho_l \gg \rho_{el}$. Примерный ход зависимости ρ от T показан на рис. 5.10. Заметим, что остаточное сопротивление, пропорциональное концентрации примесных атомов, может служить мерой чистоты металла.

При оценке длины пробега l_l мы считали, что решетка находится в состоянии статистического равновесия. В действительности такое

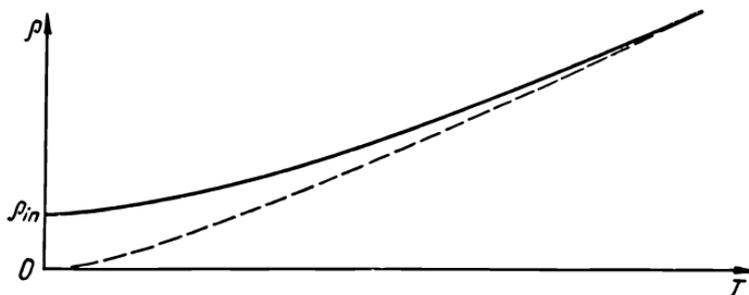


Рис. 5.10

предположение при $T \ll T_D$ не всегда оправдывается, так как нарушение равновесия в электронном газе при $E \neq 0$ может приводить к нарушению равновесия в фононном газе, который будет «увлекаться» электронным газом (так называемый фононный «ветер»). Поэтому вместо зависимости $\rho_l \sim T^5$ возникает зависимость $\rho_l \sim e^{-b/T}$ (b — константа).

§ 5.9. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ

Электроны ответственны не только за электропроводность, но и за теплопроводность металлов. Иными словами, электроны проводимости переносят в металлах не только электрический заряд, но и тепло. На первый взгляд это кажется парадоксальным: как

могут электроны проводимости быть главными носителями тепла в металлах, если они обладают очень малой теплоемкостью? Это явление объясняется тем, что малая величина теплоемкости компенсируется большой скоростью и большой длиной пробега электронов проводимости.

Оценим теплопроводность металлов и покажем, что она связана замечательным соотношением с электропроводностью металлов. Напомним предварительно, как определяется коэффициент теплопроводности обычного газа.

Пусть температура T , а следовательно, и средняя энергия частицы $\bar{\epsilon}$ изменяются вдоль оси x . Тогда вектор плотности теплового потока \bar{j}_q также направлен вдоль оси x и значение его в точке x по порядку величины определяется формулой

$$\bar{j}_q \approx v_T n [\bar{\epsilon}(x-l) - \bar{\epsilon}(x+l)],$$

где v_T — средняя тепловая скорость частиц; n — их плотность; l — средняя длина свободного пробега частицы. Первое слагаемое в этой формуле определяет плотность потока энергии, направленного вдоль положительной оси x , а второе — в обратном направлении. В первое слагаемое входит значение средней энергии частицы в точке $x-l$, так как частица придет из этой точки в точку x , не испытав столкновений. По этой же причине во второе слагаемое входит значение средней энергии в точке $x+l$: частица, двигаясь из этой точки в точку x , также не испытывает на своем пути столкновений. Замечая, что

$$\bar{\epsilon}(x-l) - \bar{\epsilon}(x+l) \sim -l \frac{d\bar{\epsilon}}{dx},$$

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{dx} = \frac{d\bar{\epsilon}}{dT} \frac{dT}{dx} = c \frac{dT}{dx},$$

где $c = d\bar{\epsilon}/dT$ — теплоемкость, отнесенная к одной частице, представим плотность теплового потока в виде

$$\bar{j}_q = -\kappa \frac{dT}{dx},$$

где

$$\kappa = v_T n c l.$$

Эта величина и называется коэффициентом теплопроводности.

В таком общем виде данное соотношение справедливо как для классического газа молекул, так и для вырожденного газа электронов проводимости в металле, но приводит к совершенно разным результатам. В случае классического газа молекул тепловая скорость пропорциональна корню квадратному из температуры, а теплоемкость не зависит от температуры. В случае вырожденного газа электронов средняя скорость электронов не зависит от температуры, а теплоемкость пропорциональна температуре:

$$v_T \approx \sqrt{\frac{\epsilon_F}{m}}, \quad c \approx k \frac{T}{T_F},$$

где $\varepsilon_F = kT_F$ — граничная энергия вырожденного газа. Используя эти формулы и замечая, что $l \sim v_T \tau$, где τ — среднее время свободного пробега частицы и обратно пропорционален массе частицы, для коэффициента теплопроводности вырожденного электронного газа получаем выражение

$$\kappa \sim \frac{k^2 n}{m} T \tau.$$

Мы видим, что коэффициент теплопроводности вырожденного газа пропорционален его плотности, температуре, среднему времени свободного пробега частицы и обратно пропорционален массе частицы.

Очевидно, коэффициент теплопроводности металла складывается из двух слагаемых — коэффициента теплопроводности электронов проводимости и коэффициента теплопроводности кристаллического остова, т. е. кристаллической решетки. Второе слагаемое по порядку величины не отличается от коэффициента теплопроводности диэлектриков, но диэлектрики проводят тепло гораздо хуже, чем металлы. Это и означает, что главный вклад в тепловой поток в металлах вносят электроны проводимости.

Длина свободного пробега электрона определяется как рассеянием электрона примесными атомами, так и его рассеянием колебаниями решетки (см § 58). Поэтому следует различать теплопроводность, обусловленную рассеянием электронов примесями, и теплопроводность, обусловленную рассеянием электронов колебаниями решетки. Первой соответствует коэффициент теплопроводности

$$\kappa_{im} \sim \frac{k^2 n}{m} T \frac{l_{im}}{v_T},$$

где $l_{im} = \frac{1}{n'Q}$ — средняя длина свободного пробега электрона по отношению к рассеянию примесными атомами. Сравнение приведенной формулы с формулой $\sigma_{im} = \frac{ne^2 l_{im}}{mv_0}$ для коэффициента электропроводности, обусловленной рассеянием электронов примесными атомами, показывает, что

$$\frac{\kappa_{im}}{\sigma_{im} T} \sim \frac{k^2}{e^2}.$$

Это замечательное соотношение называется законом Видемана—Франца. Вводя концентрацию примесных атомов и делая такие же оценки, как в предыдущем параграфе, получаем

$$\kappa_{im} \sim 10^4 \frac{T}{c} \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{град}}.$$

Рассмотрим теплопроводность, обусловленную рассеянием электронов на колебаниях решетки. В предыдущем параграфе мы видели, что длина пробега электрона l_l , связанная с его взаимодействием с колебаниями решетки, определяется при высоких температурах формулой $l_l \sim \frac{\hbar}{kT} v_T$. Эту формулу мы использовали для определения коэффициента электропроводности σ_l при $T \gg T_D$: ее можно

использовать и для определения коэффициента теплопроводности κ_l электронов, обусловленной рассеянием электронов колебаниями решетки при $T \gg T_D$. В результате находим

$$\kappa_l \sim \frac{kn}{m} \hbar \sim 10^8 \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{град}}.$$

Таким образом, при $T \gg T_D$ коэффициент теплопроводности κ_l не зависит от температуры. Сравнение формул для κ_l и ρ_l при $T \gg T_D$ показывает, что

$$\frac{\kappa_l}{T\sigma_l} \sim \frac{k^2}{e^2},$$

т. е. при $T \gg T_D$ закон Видемана — Франца выполняется для теплопроводности и электропроводности, обусловленных рассеянием электронов колебаниями решетки.

Оценим коэффициент теплопроводности κ_l в области низких температур $T \ll T_D$. В этом случае величина l_l , использованная нами для определения коэффициента электропроводности σ_l , не может быть применена. Это объясняется тем, что для электропроводности существенны только такие столкновения электронов с решеткой, при которых угол рассеяния электрона очень мал. Поэтому длина пробега, входящая в σ_l при $T \ll T_D$, очень велика — она обратно пропорциональна пятой степени температуры. Для теплопроводности такого ограничения на столкновения не существует, и поэтому длина свободного пробега электрона, определяющая теплопроводность при $T \ll T_D$, оказывается значительно меньше: относительное уменьшение составляет $(T/T_D)^2$. Таким образом, в формулу для коэффициента теплопроводности при $T \ll T_D$ следует в качестве длины свободного пробега подставить величину

$$l_l' \sim \frac{\hbar v_T}{kT} \left(\frac{T_D}{T} \right)^2.$$

В результате получаем

$$\kappa_l \sim \frac{kn\hbar}{m} \left(\frac{T_D}{T} \right)^2.$$

Сравнение формул для κ_l и σ_l при $T \ll T_D$ показывает, что

$$\frac{\kappa_l}{T\sigma_l} \sim \frac{k^2}{e^2} \left(\frac{T}{T_D} \right)^2,$$

т. е. при $T \ll T_D$ закон Видемана — Франца для κ_l и σ_l не выполняется.

В реальных металлах играют роль оба рассмотренных механизма теплопроводности: теплопроводность электронов, обусловленная рассеянием электронов примесными атомами, и теплопроводность электронов, обусловленная рассеянием электронов колебаниями решетки. Но складываться, очевидно, должны не коэффициенты теплопроводности κ_{lm} и κ_l , а обратные им величины — теплосопротив-

ления, т. е. суммарный коэффициент теплопроводности определяется формулой

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_{lm}} + \frac{1}{\kappa_l}$$

(это связано с тем, что складываются не длины пробегов, а обратные им величины). Ясно, что основным слагаемым здесь при высоких температурах будет $\frac{1}{\kappa_l}$, а при низких — $\frac{1}{\kappa_{lm}}$. Иными словами,

при высоких температурах главную роль в теплопроводности играет рассеяние электронов колебаниями решетки, а при низких температурах — рассеяние электронов примесными атомами.

§ 5.10. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

В § 5.3 мы разъяснили принципиальное различие между металлическими и диэлектрическими кристаллами и видели, что в диэлектрике существует энергетическая «щель» между полностью заполненной и незаполненной зонами. Но представим себе, что ширина этой щели достаточно мала. Тогда легко перебросить электроны из занятой в свободную зону: стоит только нагреть кристалл. В результате получим проводник с двумя зонами проводимости. Такие кристаллы с малой шириной щели Δ называются полупроводниками (точнее, собственными полупроводниками). Ясно, что число электронов проводимости в них пропорционально $e^{-\Delta/kT}$. Эта величина быстро растет с повышением температуры; при низких температурах и больших Δ она близка к нулю. Таким образом, в отличие от металлов в полупроводниках число электронов проводимости существенно зависит от температуры. Приведем значение Δ для некоторых полупроводников: в германии $\Delta = 0,7$ эВ; в соединении InSb $\Delta = 0,2$ эВ.

Заметим, что переход электронов из заполненной в свободную зону принципиально возможен и в диэлектрике, но здесь интервал энергии между зонами столь велик (обычно он составляет несколько электрон-вольт, т. е. десятков тысяч градусов), что вплоть до температуры плавления диэлектрика величина $e^{-\Delta/kT}$ ничтожно мала. Однако и в диэлектрике с большим значением Δ может возникнуть проводимость, если диэлектрик содержит достаточно примесных атомов (например, тысячные доли процента). В этом случае электронные уровни примесных атомов (так называемые примесные уровни) могут попасть между занятой и свободной зонами диэлектрика. На рис. 5.11, а представлена ситуация, когда примесные уровни ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 заняты и электроны с них могут переходить в свободную зону. Число перешедших электронов, очевидно, пропорционально $ce^{-\Delta'/kT}$, где Δ' — интервал энергии между верхним занятым примесным и нижним уровнями свободной зоны; c — концентрация примесных атомов. При $\Delta' \ll \Delta$ эта величина значительно больше, чем $e^{-\Delta/kT}$, даже при малых концентрациях c . Попав в незанятую энергетическую зону диэлектрика, электроны примесных атомов станут электронами проводимости. Кристалл перестает быть диэлектриком и становится примесным полупроводником донорного типа. Другая возможная

ситуация представлена на рис. 5.11, б. Здесь примесные уровни $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ не заняты и электроны могут переходить на них из заполненной зоны. Такой кристалл называется полупроводником акцепторного типа. Приведем значения Δ' для некоторых примесных полупроводников. Для германия с примесью фосфора (донорный полупроводник) и для германия с примесью бора (акцепторный полупроводник) $\Delta' \sim 0,01$ эВ; для кремния с теми же примесями $\Delta' \sim 0,045$ эВ.

Число электронов проводимости в полупроводниках значительно меньше, чем в металлах, и газ электронов проводимости в полупроводниках, как правило, является невырожденным. Поэтому, в частности, среднеквадратичная скорость электрона проводимости в полупроводнике пропорциональна \sqrt{T} , как это имеет

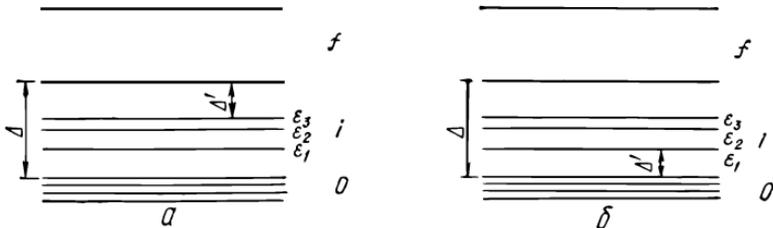


Рис. 5.11

место и для обычных молекул (напомним, что в металлах среднеквадратичная скорость электрона проводимости практически от температуры не зависит).

Легко выяснить, как зависит от температуры электропроводность полупроводников. Для этого следует воспользоваться формулой Друде $\sigma = \frac{e^2 n}{m} \tau$, пригодной и для металлов, и для полупроводников; здесь n — плотность электронов проводимости в полупроводнике. Эта величина в полупроводниках, в отличие от металлов, является функцией температуры:

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta}{kT}}.$$

Средняя длина свободного пробега электронов определяется, как и в случае металлов, рассеянием электронов примесями и колебаниями решетки. Например, при рассеянии примесями атомами так же, как и в случае металлов, $l_{im} = \frac{1}{n'Q}$, поэтому коэффициент электропроводности полупроводника, обусловленной рассеянием электронов примесями, определяется формулой

$$\sigma_{im} = \frac{e^2 n_0}{m v_T n' Q} e^{-\frac{\Delta}{kT}},$$

где $v_T = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ — тепловая скорость электрона. Мы видим, что зависимость коэффициента электропроводности полупроводника от тем-

пературы определяется в основном множителем $e^{-\frac{\Delta}{kT}}$, т. е. является экспоненциальной. С уменьшением температуры электропроводность резко уменьшается. Электропроводность полупроводника, обусловленная взаимодействием электронов с колебаниями решетки, также в основном пропорциональна $e^{-\frac{\Delta}{kT}}$.

§ 5.11. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Как мы видели, электроны в металле переносят не только заряд, но и тепло. Поэтому, если создать в металле градиент температуры, т. е. поток тепла, то возникает движение электронов, а это значит, что возникнет и электрический ток. Иными словами, в металле может течь ток и в отсутствие электрического поля, если только градиент температуры отличен от нуля. При малых градиентах температуры сила тока пропорциональна градиенту температуры, т. е. плотность тока имеет вид $\mathbf{j} = -\beta \text{grad} T$, где β — некоторая величина, характерная для металла и зависящая, в общем, от температуры. Если отличны от нуля и поле, и градиент температуры, то плотность тока будет линейной функцией поля \mathbf{E} и $\text{grad} T$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} - \beta \text{grad} T,$$

где σ — коэффициент электропроводности металла. Аналогично и плотность теплового потока \mathbf{j}_q определяется не только градиентом температуры, но и напряженностью поля:

$$\mathbf{j}_q = -\kappa \text{grad} T + \gamma \mathbf{E},$$

причем входящая сюда величина γ оказывается связанной с величиной β соотношением

$$\gamma = \beta T$$

(оно называется соотношением Онзагера). Вводя обозначения $Q = \frac{\beta}{\sigma}$, $\Pi = \frac{\gamma}{\sigma}$, перепишем формулы для \mathbf{j} и \mathbf{j}_q в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \rho \mathbf{j} + Q \text{grad} T, \\ \mathbf{j}_q &= -\kappa \text{grad} T + \Pi \mathbf{j}. \end{aligned}$$

«Перекрестные» коэффициенты Q и Π связаны между собой соотношением

$$\Pi = QT.$$

Таким образом, если ток в проводнике отсутствует, а проводник нагрет неравномерно, то в нем возникает электрическое поле, пропорциональное градиенту температуры:

$$\mathbf{E} = Q \text{grad} T.$$

Это важное соотношение показывает, что, используя неравномерно нагретые металлы, можно создать источники ЭДС. Однако одного

металла недостаточно. Действительно, ЭДС представляет собой циркуляцию поля по замкнутому контуру:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Поэтому если взять кольцо, сделанное из одного металла, то получаем

$$\mathcal{E} = \int Q \operatorname{grad} T d\mathbf{l},$$

где $d\mathbf{l}$ — направленный по касательной к кольцу элемент его длины, или

$$\mathcal{E} = \oint Q \frac{dT}{dl} dl,$$

но это выражение равно, очевидно, нулю.

Ситуация существенно изменяется, если кольцо состоит из двух неравномерно нагретых металлов (на рис. 5.12 металлы a и b спаяны в точках 1 и 2; температуры спаев равны T_1 и T_2). В этом случае

$$\mathcal{E} = \int_{1a2} Q_a \frac{dT}{dl} dl + \int_{2b1} Q_b \frac{dT}{dl} dl = \int_{T_1}^{T_2} (Q_a - Q_b) dT.$$

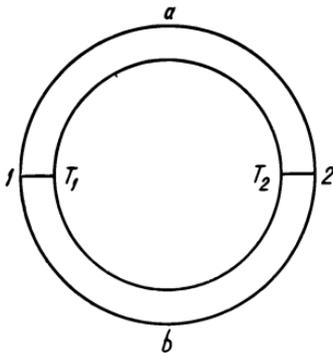


Рис. 5.12

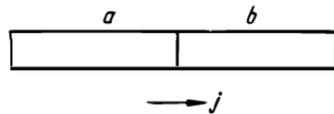


Рис. 5.13

Эта величина при $Q_a \neq Q_b$ отлична от нуля. Она называется термоэлектродвижущей силой (сокращенно термо-ЭДС), а кольцо, состоящее из двух неравномерно нагретых спаянных металлов, — термоэлементом (или термопарой). Величина Q определяется механизмом рассеяния электронов. При рассеянии электронов примесными атомами Q будет линейной функцией T . Приближенно справедлива формула

$$Q = \frac{\pi^2 k^2 T}{3e \epsilon_F},$$

откуда $Q \sim 10^{-8}$ В/град. Используя эту формулу, легко определить термо-ЭДС:

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2 k^2}{6e} (T_2^2 - T_1^2) \left(\frac{1}{\epsilon_F^b} - \frac{1}{\epsilon_F^a} \right).$$

Формула для теплового потока j_q показывает, что тепловой поток может существовать и в отсутствие градиента температуры, если только по проводнику течет ток. Поэтому если спаять два различных проводника a и b (рис. 5.13), то при прохождении через них тока в спае выделяется (или поглощается) тепло:

$$q_{ab} = j_{qa} - j_{qb} = (\Pi_a - \Pi_b) j.$$

Ясно, что при одном направлении тока тепло выделяется, а при обратном направлении поглощается. Этот эффект называется эффектом Пельтье, а величина Π , характеризующая эффект, — коэффициентом Пельтье. Так как $\Pi = QT$, то

$$\Pi \sim \frac{\pi^2 k^2 T^2}{3e \epsilon_F}.$$

Определим количество тепла, выделяющееся в неравномерно нагретом проводнике при прохождении через него тока. Если бы не было теплового потока, то выделялось бы только джоулево тепло, равное jE (тепло, выделяющееся за единицу времени в единице объема проводника). При наличии теплового потока j_q , направленного, например, вдоль оси x , выделяется еще добавочное тепло, равное $-dj_q/dx$. В общем случае как угодно направленного потока выделяемое тепло равно $-\text{div } j_q$. Таким образом, общее выделение тепла определяется формулой

$$q = jE - \text{div } j_q.$$

Подставим сюда выражения для E и j_q и выделим слагаемые, зависящие от плотности тока j . Одно из них — джоулево тепло ρj^2 , содержащее ток квадратично; кроме того, еще два слагаемых $Qj \text{ grad } T$ и $-j \frac{d\Pi}{dT} \text{ grad } T$, содержащих плотность тока линейно. Мы запишем их сумму в виде

$$q_T = -\mu_T j \text{ grad } T,$$

где

$$\mu_T = -Q + \frac{d\Pi}{dT} = T \frac{dQ}{dT}.$$

Таким образом, в неравномерно нагретом проводнике помимо джоулева тепла выделяется (или поглощается) еще добавочное тепло, пропорциональное плотности тока и градиенту температуры. Этот эффект называется эффектом Томсона, а величина μ_T — коэффициентом Томсона. Коэффициент μ_T пропорционален температуре. Существенно, что тепло Томсона в отличие от джоулева тепла

пропорционально не квадрату тока, а первой его степени. Поэтому оно изменяет свой знак при изменении направления тока, т. е. тепло Томсона может и выделяться, и поглощаться.

§ 5.12. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

Сопротивление металлов непрерывно уменьшается с понижением температуры, и если бы кристаллическая решетка была идеальной, т. е. не содержала бы примесей и дефектов, то сопротивление обращалось бы в нуль при абсолютном нуле. Однако такой ход изменения сопротивления характерен далеко не для всех металлов. У ряда металлов, например у свинца, ртути, олова, сопротивление, уменьшаясь с понижением температуры, при некоторой, характер-



Рис. 5.14

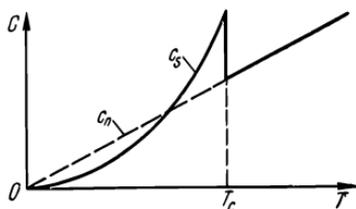


Рис. 5.15

ной для каждого металла, температуре внезапно, скачком обращается в нуль и остается равным нулю вплоть до абсолютного нуля (рис. 5.14). Такие металлы называются сверхпроводниками, а само явление — сверхпроводимостью (оно открыто Каммерлинг—Оннесом в 1911 г.).

Сверхпроводимость наблюдается у двадцати семи металлов и более чем у тысячи металлических соединений и сплавов. Температура, при которой она наступает (эта температура называется критической и обозначается через T_c), изменяется у известных сверхпроводников от 0,01 до 20 К. Наиболее низкой критической температурой обладает вольфрам, для которого $T_c = 0,1$ К. Для цинка $T_c = 0,85$ К, для алюминия — 1,2 К, для свинца — 7,2 К, для ртути — 4,15 К, для ниобия — 9,4 К, для Ti_3Sn — 5,8 К, для Nb_3Sn — 18,0 К.

Выше критической температуры сверхпроводящие металлы обладают электрическим сопротивлением, и оно изменяется с температурой (при $T > T_c$) так же, как и у обычных, или как их называют, нормальных металлов; при критической температуре сопротивление скачком обращается в нуль. Поэтому естественно ожидать, что отсутствие сопротивления есть проявление некоторого нового металлического состояния — сверхпроводящего, которое отличается от нормального состояния. И действительно, нормальное и сверхпроводящее состояния представляют собой две различные фазы металла; при понижении температуры в точке $T = T_c$ происходит фазовый переход из нормальной в сверхпроводящую фазу. Этот переход не связан с изменением кристаллической структуры и не сопровождается выделением или поглощением тепла. Это значит, что переход из нормальной в сверхпроводящую фазу не есть переход первого рода. Он представляет собой фазо-

вый переход второго рода, при котором происходит скачок не внутренней энергии, а скачок теплоемкости, причем электронной. Для нормального металла, как мы видели, электронная теплоемкость (обозначим ее через c_n) изменяется с температурой линейно: $c_n \sim kT/T_F$; в сверхпроводящей фазе электронная теплоемкость (обозначим ее через c_s) изменяется с температурой экспоненциально:

$$c_s \sim ke^{-\frac{\Delta_s}{kT}},$$

где Δ_s пропорциональна критической температуре, $\Delta_s = 1,75kT_c$. При критической температуре (ее называют также температурой сверхпроводящего перехода) возникает скачок теплоемкости (рис. 5.15).

Чем же отличаются обе металлические фазы — нормальная и сверхпроводящая? Отличие заключается в том, что в сверхпроводящей фазе некоторая доля электронов проводимости как бы «сконденсирована» в «сверхтекучую жидкость», которая как единое целое может двигаться через кристалл. Это движение происходит беспрепятственно, т. е. без трения. Поэтому в сверхпроводящей фазе отсутствует электрическое сопротивление, т. е. электрический ток в сверхпроводнике будет течь, не затухая, сколь угодно долго без какого-либо внешнего источника ЭДС.

При абсолютном нуле все электроны проводимости входят в состав сверхтекучей жидкости. С ростом температуры доля электронов, входящих в состав сверхтекучей жидкости, уменьшается и, наконец, при критической температуре обращается в нуль.

Выясним причину возникновения сверхтекучей электронной жидкости. Двигаясь в периодическом поле кристаллической решетки, электроны согласно закону Кулона отталкиваются друг от друга. Но помимо отталкивания между электронами действуют еще и специфические силы притяжения. Электрон, сталкиваясь с ионами, может либо возбуждать, либо поглощать колебания решетки — фононы. В первом случае энергия и импульс электрона будут уменьшаться, а во втором — увеличиваться. Представим себе теперь два электрона, из которых один испускает фонон, а другой поглощает его. Такой обмен фононами связывает электроны, в результате чего возникает некоторое взаимодействие, приводящее к притяжению электронов. Таким образом, наряду с кулоновским отталкиванием между электронами проводимости существует еще и притяжение, обусловленное обменом фононами. Если силы притяжения превосходят силы отталкивания, причем как угодно мало, то возникает замечательное явление — образуется связанное состояние двух электронов — нечто подобное двухэлектронной молекуле (так называемые куперовские пары). Такое образование является следствием не только превалирования сил притяжения над силами отталкивания, но еще и того важного обстоятельства, что электроны подчиняются статистике Ферми — Дирака.

Существование такой связанной двухэлектронной молекулы является условным. Размеры связанной пары электронов очень велики — в 10^2 — 10^4 раз больше постоянной решетки. Поэтому размеры пары оказываются во много раз больше среднего расстояния между парами. Но тем не менее существует сильная корреляция между состояниями электронов внутри пары, и мы можем исходить из представления о связанных электронных парах. Эти

пары и образуют сверхтекучую электронную жидкость. Все они находятся в одинаковом состоянии и движутся через кристалл как единое целое. Изменить это состояние, т. е. возбудить это единое целое, не легко, потому что нужно разорвать по крайней мере одну пару, т. е. нужно затратить энергию, равную энергии связи пары. Эта энергия равна $2\Delta_s$, где Δ_s — величина, входящая в экспоненту в выражении для электронной теплоемкости при сверхпроводящем состоянии. До тех пор, пока возмущающие воздействия не приносят энергии, равной или большей $2\Delta_s$, состояние сверхпроводящей жидкости остается неизменным и устойчивым и жидкость ведет себя как сверхтекучая жидкость,двигающаяся без трения. Ее электрическое сопротивление равно нулю*.

При абсолютном нуле все электроны проводимости «спарены», т. е. весь электронный газ входит в состав сверхтекучей жидкости. При конечной температуре всегда есть конечная, пропорциональная $e^{-2\Delta_s/kT}$ вероятность того, что пара будет разрушена на отдельные электроны. Такие не связанные попарно электроны образуют нормальный электронный газ, точнее, нормальную электронную жидкость, движущуюся по кристаллу обычным образом, т. е. с трением. С повышением температуры уменьшается количество сверхтекучей и увеличивается количество нормальной электронной жидкости. При $T = T_c$ количество сверхтекучей жидкости обращается в нуль и все электроны становятся нормальными.

§ 5.13. НЕКРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ МЕТАЛЛЫ, ДИЭЛЕКТРИКИ И ПОЛУПРОВОДНИКИ

Рассматривая кристаллические проводники, мы видели, что благодаря упорядоченному распределению ионов — существованию кристаллической решетки — свойства таких проводников отличаются от свойств газа электронов и ионов — полностью ионизованной плазмы. Самое разительное отличие заключалось в том, что через идеальную кристаллическую решетку электрон движется без столкновений; поэтому (если отвлечься от столкновений между электронами) сопротивление металла полностью определяется нерегулярностями решетки — тепловыми колебаниями ионов, наличием примесных атомов и т. д.

Свойства электрона в периодической кристаллической решетке мы использовали для объяснения не только проводимости металлов, но даже самого деления твердых тел на металлы, диэлектрики и полупроводники. Действительно, нам было важно, что энергетический спектр электронов состоит из зон, отделенных друг от друга запрещенными полосами. Разумеется, для газа хаотически движущихся электронов и ионов — плазмы — в спектре электронов нет никаких запрещенных полос.

Возникает вопрос: как же устроены жидкие и аморфные (твердые, но не кристаллические) металлы, диэлектрики и полупроводники? На первый взгляд кажется, что из-за хаотического расположения ионов поведение таких тел в электрическом поле должно напоминать поведение газа; а газ, как мы знаем, будет диэлектриком, если состоит из нейтральных атомов или моле-

* Объяснение сверхпроводимости дано Бардином, Купером и Шриффером в 1956 г., т. е. почти через полвека после открытия этого явления.

кул, и становится проводником, если атомы или молекулы ионизованы и поэтому появляются свободные заряды. Легко понять, что по своему поведению в электрическом поле жидкости и аморфные твердые тела должны больше напоминать кристаллы, чем газы. Расстояния между атомами в жидких и аморфных телах того же порядка, что и в кристаллах; поэтому электронные оболочки соседних атомов перекрываются и электроны становятся коллективизированными. В отличие от кристаллов, электронный спектр которых обязательно распадается на полосы разрешенных и запрещенных энергий, электронные спектры жидкостей и аморфных твердых тел могут вообще не иметь запрещенных зон. Соответственно плотность электронных состояний может иметь вид, изображенный на рис. 5.16, *a—в*.

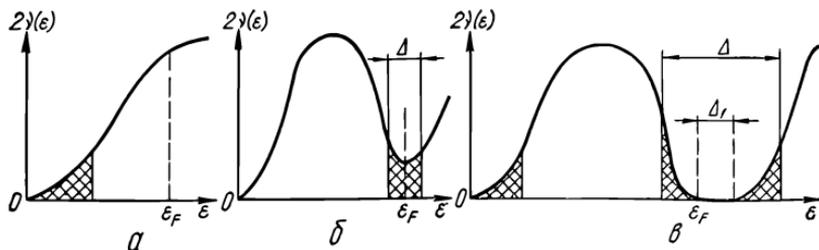


Рис. 5.16

В некристаллическом веществе в отличие от кристалла знания граничной фермиевской энергии и плотности электронных состояний еще недостаточно, чтобы выяснить, металлом, диэлектриком или полупроводником является рассматриваемое вещество. При случайном расположении ионов возможны еще особые, так называемые локализованные электронные состояния, и важно знать, обычными или локализованными являются электронные состояния вблизи фермиевского уровня.

Локализованные состояния возникают, как правило, при тех значениях энергии, при которых функция $\nu(\epsilon)$ мала (на рис. 5.16 эти состояния обозначены двойной штриховкой). Электрон, находящийся в локализованном состоянии, не вносит при нуле температур вклада в постоянный ток. Поэтому поведение жидкостей и аморфных твердых тел в постоянном электрическом поле определяется не положением и шириной запрещенной энергетической полосы, а положением и шириной так называемой псевдощели — полосы энергий, в которой отсутствуют обычные электронные состояния (но могут присутствовать локализованные состояния). Случай, представленный на рис. 5.16, *в*, соответствует диэлектрику (или собственному полупроводнику), в котором роль ширины энергетической щели играет не Δ_1 , а большая величина — ширина псевдощели Δ . Случаю, изображенному на рис. 5.16, *б*, соответствует бесщелевой диэлектрик (или собственный полупроводник); роль энергетической щели играет псевдощель Δ . (На рис. 5.16, *а*, где фермиевский уровень проходит среди обычных электронных состояний, представлен случай жидкого или аморфного металла.)

Чтобы пояснить физическую природу локализованных электронных состояний, рассмотрим кристалл с искаженной кристалли-

ческой решеткой. В таком кристалле, как мы видели, у электронов возникает конечная длина свободного пробега, тем меньшая, чем больше нерегулярность решетки. Если исказить кристаллическую решетку все сильнее и сильнее, то мы придем в конце концов к ситуации, когда длина свободного пробега электрона будет сравнима со средним расстоянием между ионами. Электрон при этом остается коллективизированным — не имеет смысла вопрос, какому определенному иону он принадлежит; но он «находится в ловушке», так как подобно связанному электрону не вносит (при нулевой температуре) вклада в электропроводность вещества. Такие состояния коллективизированных электронов и называются локализованными.

§ 6.1. СИЛЬНЫЕ И СЛАБЫЕ ЭЛЕКТРОЛИТЫ

Если растворить в воде поваренную соль, то ее молекулы распадутся на положительные Na^+ и отрицательные Cl^- ионы. Поэтому, опустив в такой раствор два металлических электрода и присоединив их к источнику ЭДС (рис. 6.1), получим электрическую цепь, через которую пойдет электрический ток. Ясно, что отрицательно заряженные ионы Cl^- (анионы) будут двигаться к положительному электроду — аноду, а положительно заряженные ионы Na^+ (катионы) — к отрицательному электроду — катоду.

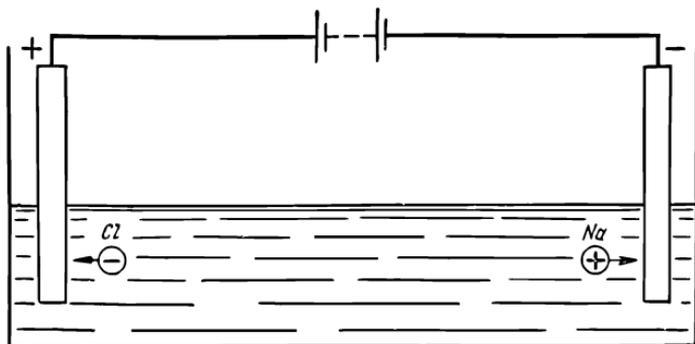


Рис. 6.1

Свойством проводимости обладает не только раствор NaCl , но и растворы других солей, а также кислот и оснований, причем растворы не только водные, но и неводные. Эти вещества называют электролитами.

В отличие от металлов, проводимость которых обусловлена электронами, в растворах электролитов ток представляет собой направленное движение ионов, возникающих вследствие распада или диссоциации молекул электролита в растворе. Процесс диссоциации молекул вполне естествен, так как при протекании любой химической реакции $A + B \rightarrow C$ всегда идет и обратная реакция $C \rightarrow A + B$. Поэтому если молекула создается в результате соединения ионов разных знаков заряда, то всегда вместе с нейтральными молекулами должны находиться и составляющие их ионы.

Замечательным является то, что в ряде случаев возникает почти стопроцентная диссоциация молекул — при растворении в воде

многих солей, сильных кислот и сильных оснований (если только раствор не слишком концентрирован). Такие вещества, очень сильно диссоциирующие в растворе, называются сильными электролитами. В отличие от них слабые кислоты и слабые основания (например, амины, фенолы), большинство органических кислот, некоторые неорганические кислоты и основания (например, синильная кислота, гидрат окиси аммония), а также некоторые соли (например, хлорная и цианистая ртуть) диссоциируют при обычных концентрациях в очень небольшой степени. Эти вещества называются слабыми электролитами. Соли слабых кислот и сильных оснований или слабых оснований и сильных кислот, а также соли слабой кислоты и слабого основания представляют собой, как правило, сильные электролиты.

Ясно, что растворение электролита в воде должно способствовать диссоциации молекул электролита. Вода обладает большой диэлектрической проницаемостью ($\epsilon \approx 80$); поэтому сила взаимодействия ионов в молекуле электролита, находящейся в воде, ослабевает примерно в 80 раз.

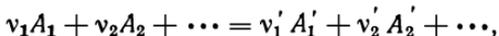
Соли NaCl, KCl и другие имеют кристаллическую структуру, но если кристаллик соли растворяется в воде, его решетка вследствие большой диэлектрической проницаемости воды почти полностью разрушается, и раствор соли по существу представляет собой раствор несвязанных между собой ионов, образовавших кристаллическую решетку.

Однако в ряде случаев диэлектрическая проницаемость растворителя играет второстепенную роль. Например, хлористый водород растворяется в этиловом спирте и дает сильный электролит, между тем раствор хлористого водорода в нитробензоле, диэлектрическая проницаемость которого почти такая же, как и этилового спирта, является слабым электролитом. Существенным здесь оказывается то обстоятельство, что молекула этилового спирта легко соединяется с ионом водорода и образует комплексный ион $C_2H_5ONH_2^+$, который и является формой существования иона водорода в спиртовом растворе. Нитробензол не образует такого соединения, поэтому степень диссоциации оказывается малой и раствор хлористого водорода в нитробензоле является слабым электролитом. Поскольку молекулы сильных электролитов в растворах почти полностью диссоциированы, то в реакциях между сильными электролитами в растворах участвуют фактически не молекулы, а отдельные ионы.

§ 6.2. СТЕПЕНЬ ДИССОЦИАЦИИ

В отличие от сильных электролитов, почти все молекулы которых диссоциированы вплоть до очень больших концентраций раствора, степень диссоциации слабых электролитов существенно зависит от концентрации раствора, возрастая с ее уменьшением. Чтобы установить эту зависимость, воспользуемся законом действующих масс. Напомним, в чем он заключается.

Пусть происходит какая-либо химическая реакция



где A_1, A_2, \dots — символы химических веществ, вступающих в реакцию; A'_1, A'_2 — символы веществ, получающихся в результате

реакции: $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_1', \nu_2', \dots$ — целые числа, показывающие количество молекул, участвующих в реакции. (Например, для реакции $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$ $\nu_{\text{H}_2} = 2$, $\nu_{\text{O}_2} = 1$, $\nu_{\text{H}_2\text{O}} = 2$.) Если реакция происходит в газовой смеси и газ можно считать идеальным, то после достижения химического равновесия справедливо соотношение

$$\frac{[A_1]^{\nu_1} [A_2]^{\nu_2}}{[A_1']^{\nu_1'} [A_2']^{\nu_2'}} = p^{-(\nu_1 + \nu_2 + \dots - \nu_1' - \nu_2' - \dots)} K(T),$$

где $[A_i]$, $[A_i']$ — концентрации веществ типа A_i и A_i' ; p — давление; $K(T)$ — некоторая величина, зависящая только от температуры. Это соотношение и называется законом действующих масс, а величина $K(T)$ — константой химического равновесия.

Если теплоемкость газа можно считать постоянной, то зависимость константы равновесия от температуры определяется простой формулой:

$$K(T) = K_0 T^n e^{-\frac{\omega}{kT}},$$

где

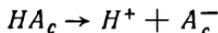
$$n = \sum_i (c_i \nu_i - c_i' \nu_i'), \quad \omega = \sum_i (\nu_i \varepsilon_i - \nu_i' \varepsilon_i');$$

c_i и c_i' — отнесенные к одной молекуле теплоемкости при постоянном давлении; ε_i , ε_i' — не зависящие от температуры части энергий молекул A_i и A_i' (K_0 — не зависящая от T константа). Закон действующих масс справедлив не только для реакций между газами, но и для реакций между растворенными веществами, если раствор является слабым. В этом случае он формулируется в несколько более общей форме, чем в случае газов, а именно для реакции между растворенными веществами справедливо соотношение

$$\frac{[A_1]^{\nu_1} [A_2]^{\nu_2} \dots}{[A_1']^{\nu_1'} [A_2']^{\nu_2'} \dots} = K(p, T),$$

где $K(p, T)$ — некоторая функция от p и T (она называется константой равновесия), зависимость которой от давления является более сложной, чем в случае газов.

В такой форме закон действующих масс применим и к слабым растворам слабых электролитов. Рассмотрим, например, раствор уксусной кислоты (CH_3COOH), диссоциирующей в воде согласно уравнению



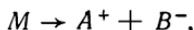
(A_c обозначает кислородный остаток — CH_3COO). Диссоциация продолжается до тех пор, пока не установится равновесие, при котором концентрации ионов удовлетворяют закону действующих масс

$$\frac{[\text{H}^+][\text{A}_c^-]}{[\text{HA}_c]} = K(p, T),$$

где $K(p, T)$ зависит от температуры и давления и не зависит от количества растворенного вещества. Она называется константой диссоциации. Для уксусной кислоты при комнатной температуре

$$K \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ моль/л.}$$

Покажем теперь, как, используя закон действующих масс, определить зависимость степени диссоциации слабого электролита от его концентрации. Если молекула электролита M диссоциирует на ионы A^+ и B^- ,



то согласно закону действующих масс

$$\frac{[A^+][B^-]}{[M]} = K,$$

где K — константа диссоциации. Отношение числа распавшихся молекул к общему числу молекул электролита называется степенью диссоциации. Пусть всего растворено c молей электролита в литре воды. Тогда в приведенной формуле мы должны положить

$$[A^+] = [B^-] = \alpha c, \quad [M] = (1 - \alpha) c,$$

где α обозначает степень диссоциации. В результате получаем

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} c = K,$$

откуда

$$\alpha = \frac{2K}{K + \sqrt{K^2 + 4cK}}.$$

Мы видим, что степень диссоциации растет с уменьшением концентрации и стремится к единице при бесконечном разведении, т. е. при $c \rightarrow 0$. Физически это совершенно очевидно и связано с тем, что диссоциация молекулы происходит под влиянием молекул воды, которые имеются везде, а для обратного процесса — рекомбинации — должны оказаться рядом два различных иона, что происходит тем реже, чем больше разбавлен раствор.

Задача об определении степени диссоциации слабого электролита аналогична задаче об определении степени термической ионизации газа. Пусть, например, пар щелочного металла Na нагревается до высокой температуры. При этом происходит ионизация атомов Na: они теряют по одному электрону и превращаются в ионы натрия: $\text{Na} \rightarrow \text{Na}^+ + e^-$ (e^- обозначает электрон). Наряду с этой реакцией происходит обратная реакция, и ионизация прекратится, когда будет достигнуто состояние термодинамического равновесия. Это состояние определяется законом действующих масс, согласно которому

$$\frac{[\text{Na}^+][e^-]}{[\text{Na}]} = K_i,$$

где $[\text{Na}^+]$, $[e^-]$, $[\text{Na}]$ — плотности ионов, электронов и нейтральных атомов натрия; K_i — некоторая постоянная, зависящая только от температуры (она называется постоянной ионизации).

Если считать теплоемкости газов Na , Na^+ , e^- не зависящими от температуры, то постоянная ионизации определяется формулой

$$K_i = K_0 T^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}},$$

где ϵ_i — энергия ионизации атома; K_0 — некоторая универсальная константа. Вводя степень ионизации x ,

$$x = \frac{[\text{Na}^+]}{[\text{Na}] + [\text{Na}^+]},$$

и обозначая общую плотность атомов и ионов натрия через $n = [\text{Na}] + [\text{Na}^+]$, получаем

$$\frac{x^2}{1-x} n = K_i,$$

откуда определяется степень термической ионизации при любой плотности газа и любой его температуре.

Остановимся в заключение этого параграфа на осмотическом давлении, создаваемом раствором слабого электролита. (Напомним, что осмотическим давлением называется разность давлений раствора и чистого растворителя, разделенных полупроницаемой перегородкой, через которую проходят молекулы растворителя и не проходят молекулы растворенного вещества.) Если раствор является слабым и не содержит молекул электролитов, то его осмотическое давление p' совпадает с давлением идеального газа, число молекул которого равно общему числу молекул растворенного вещества N' , а объем V и температура T совпадают с объемом и температурой раствора, т. е.

$$p' = N' \frac{kT}{V}$$

(k — постоянная Больцмана). Эту формулу можно переписать также в виде

$$p' = \mu \frac{RT}{V},$$

где R — газовая постоянная; μ — общее число молей растворенного вещества. Если раствор содержит молекулы электролита, то эта формула становится неприменимой, так как она не учитывает диссоциации молекул электролита. Действительно, диссоциация приводит к увеличению числа частиц, и все они участвуют в создании осмотического давления. Легко определить измененное осмотическое давление в случае слабого раствора слабого электролита. Для этого следует заменить N' на полное число частиц растворенного вещества, понимая под ними как нейтральные молекулы, так и ионы, на которые диссоциированы молекулы.

Если в растворитель было внесено N' молекул электролита и в результате диссоциации молекулы возникает два иона, то полное число частиц после диссоциации равно

$$\alpha N' + \alpha N' + (1 - \alpha)N' = (1 + \alpha)N',$$

где α — степень диссоциации. Поэтому осмотическое давление возрастает в $(1 + \alpha)$ раз:

$$p' = (1 + \alpha) \mu \frac{RT}{V}.$$

Так как α зависит от температуры и концентрации раствора электролита c , то осмотическое давление не пропорционально температуре и концентрации, а является сложной функцией этих величин. Ясно, что если в результате диссоциации молекулы возникает не два, а β ионов, то множитель $(1 + \alpha)$ в приведенной формуле должен быть заменен на $1 + \alpha(\beta - 1)$.

Оценим теперь величину осмотического давления в случае раствора сильного электролита. На первый взгляд кажется, что все приведенные соображения справедливы и для сильных электролитов, т. е. следует считать лишь диссоциацию молекул стопроцентной и положить $\alpha = 1$. В действительности ситуация осложняется потому что ионы, на которые диссоциируют молекулы, нельзя считать идеальным газом и необходимо учитывать электрическое взаимодействие между ними. Это взаимодействие приводит в целом к притяжению ионов друг к другу. Поэтому осмотическое давление должно несколько уменьшиться по сравнению со случаем идеального газа (при тех же числах частиц). Легко оценить это уменьшение осмотического давления. Заметим, что ионы в растворе сильного электролита можно рассматривать как полностью ионизованный газ, т. е. как плазму. В § 1.7 мы показали, что кулоновская энергия такой плазмы

$$W_k = -e^3 \sqrt{\frac{\pi}{kTV}} \left(\sum_a N_a Z_a^2 \right)^{3/2},$$

где N_a — полное число заряженных частиц сорта a с зарядом eZ_a ; V и T — объем и температура плазмы. Заменяв e на $e/\sqrt{\epsilon}$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость растворителя, найдем электрическую часть энергии раствора:

$$W_k = - \left(\frac{e}{\sqrt{\epsilon}} \right)^3 \sqrt{\frac{\pi}{kTV}} \left(\sum_a N_a Z_a^2 \right)^{3/2},$$

где N_a — общее число ионов с зарядом eZ_a ; V и T — объем и температура растворителя. Взяв от W_k производную по объему (с обратным знаком), мы определим изменение осмотического давления, обусловленное кулоновским взаимодействием ионов. Окончательная формула для осмотического давления слабого раствора сильного электролита имеет вид

$$p' = \sum_a N_a \frac{kT}{V} - \frac{e^3}{3\epsilon^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{kT}} \left(\frac{\sum_a N_a Z_a^2}{V} \right)^{3/2}.$$

§ 6.3. ЭЛЕКТРОЛИЗ

Рассмотрим подробнее прохождение тока через раствор электролита. Поскольку всегда при этом имеются металлические электроды, погруженные в раствор электролита, то электрическая цепь состоит не только из раствора электролита, но и из металлических проводников; переносчики заряда в них разные: в растворе — ионы, в металле — электроны. Отсюда вытекают важные следствия. Действительно, свободные ионы в растворе электролита не могут проходить через металл, а электроны металла не могут двигаться в электролите. Но ток представляет собой непрерывное течение электрического заряда, поэтому на границе электронного и ионного проводников должно происходить существенное превращение, нечто вроде «переодевания» ионов: именно, на аноде анионы должны отдавать свои лишние электроны аноду и превращаться в нейтральные атомы (или группы атомов), а на катоде катионы должны получать добавочные электроны и также превращаться в нейтральные атомы. Только при таком превращении суммарный ионный ток в электролите будет равен электронному току в металлической части цепи.

Таким образом, прохождение тока через цепь, содержащую электронные и ионные проводники, должно сопровождаться химическим разложением электролита. Это замечательное явление называется электролизом (открыто Фарадеем в 1833 г.).

Легко определить количества веществ, выделяющихся при электролизе на электродах. Для этого нужно лишь помнить о законе сохранения заряда. Рассмотрим ионы с зарядом Ze (Z — валентность, e — элементарный заряд). Ясно, что если через цепь пройдет заряд Q , то на каждом из электродов «высадится» по Q/Ze ионов. Возьмем один грамм-ион. В нем содержится $N_0 = 6,021 \times 10^{23}$ ионов. Поэтому на каждом из электродов при прохождении заряда Q выделится по Q/ZeN_0 грамм-ионов, т. е. по Q/ZeN_0 грамм-атомов нейтрального вещества. Обозначим через A атомный вес соответствующего иона. Тогда количество вещества в граммах, выделяющееся на электроде при прохождении заряда Q , определяется формулой

$$M_A = A \frac{Q}{ZeN_0}.$$

Входящая сюда величина eN_0 представляет собой универсальную константу — это заряд одного грамм-электрона (или грамм-протона). Она обозначается через F и называется числом Фарадея:

$$F = eN_0 = 96496 \frac{\text{Кл}}{\text{г-эквивалент}}.$$

Замечая, что $Q = It$, где I — сила тока, проходящего в течение времени t через цепь, перепишем выражение для M_A в виде

$$M_A = \frac{AIt}{ZF}.$$

Величина A/Z , т. е. частное от деления атомного веса на валентность, называется грамм-эквивалентом. Таким образом, количества веществ, выделяющихся на электродах при электролизе, про-

порциональны их грамм-эквивалентам и количеству прошедшего через цепь заряда. (Эти соотношения известны под названием закона электролиза Фарадея.)

Рассмотрим, например, электролиз, происходящий в двух ваннах, которые содержат растворы HCl и CuCl_2 (рис. 6.2). Атомные веса водорода, хлора и меди равны соответственно 1,008; 35,46; 63,54, а валентности — 1; 1; 2. Поэтому при прохождении заряда, равного 1Ф, в первой ванне на катоде выделится 1,008 г водорода, на аноде — 35,46 г хлора; во второй ванне — на катоде $\frac{63,54}{2} = 31,77$ г меди, на аноде — 35,46 г хлора.

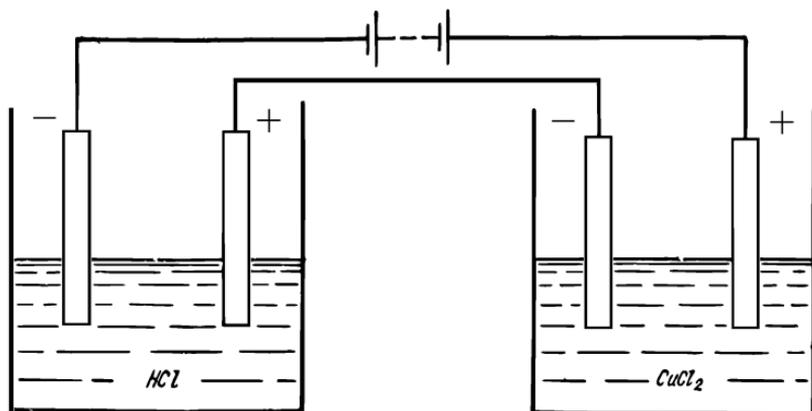


Рис. 6.2

Электролиз имеет много важных практических применений. Электролизом водного раствора поваренной соли получают едкий натр (каустическая сода) и хлор с одновременным выделением водорода. Почти весь едкий натр, вырабатываемый промышленностью, производится именно этим способом. Получение водорода (потребляемого в больших количествах при синтезе аммиака) осуществляется путем электролитического разложения воды с одновременным выделением кислорода. (Так как электропроводность воды очень мала, то к ней добавляются такие электролиты, как серная кислота, сульфат натрия, едкий натр.) С помощью электролиза производится выделение многих металлов из их соединений. Так, металлический магний получается электролизом расплавленного MgCl_2 , а металлический алюминий — электролизом раствора окиси алюминия в расплавленном криолите. Электролиз применяется также для рафинирования металлов, т. е. получения их в чистом виде, в основном для рафинирования меди. Электролитом при этом является CuSO_4 , а анодом — листы сырой неочищенной меди. Процесс сводится к растворению анода и выделению меди на катоде; электролит регенерируется и сохраняется в растворе. Выделяющаяся на катоде медь получается очень чистой (99,9%) и называется электролитической. Кроме того, электролиз применяется для электролитического покрытия поверхностей изделий различными металлами; этот метод называется гальванопластикой.

§ 6.4. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ РАСТВОРОВ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

Выясним, чем определяется электропроводность растворов электролитов.

Если к раствору приложено постоянное электрическое поле E , то на ион сорта a с зарядом eZ_a будет действовать сила $eZ_a E$. Однако ясно, что скорость иона не может все время возрастать, так как движение иона происходит с трением. Сила трения пропорциональна скорости иона v_a , т. е. ее можно представить в виде $-\gamma_a v_a$, где γ_a — коэффициент трения. В результате совместного действия электрической силы и силы трения устанавливается стационарное движение иона, при котором суммарная сила равна нулю, $eZ_a E - \gamma_a v_a = 0$, откуда

$$v_a = b_a e Z_a E,$$

где $b_a = 1/\gamma_a$. Таким образом, ионы будут двигаться с постоянной скоростью, пропорциональной действующей на них электрической силе. Коэффициент пропорциональности b_a называется подвижностью иона.

Скорости ионов, как правило, не велики. Например, при поле 1 В/см и температуре 25°C большинство ионов в воде двигаются со скоростью порядка $5 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}$. Исключение составляет водород, ион которого движется со скоростью $36,2 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}$.

Умножив скорость v_a на $eZ_a n_a$, где n_a — число ионов сорта a в единице объема, мы найдем часть плотности тока, обусловленную этими ионами. Поэтому суммарная плотность тока

$$j = \sum_a e Z_a n_a v_a = \sum_a b_a (e Z_a)^2 n_a E.$$

Таким образом, плотность тока пропорциональна напряженности поля, т. е. растворы электролитов подчиняются закону Ома, а их коэффициент электропроводности определяется формулой

$$\sigma = \sum_a b_a (e Z_a)^2 n_a,$$

где суммирование распространяется на все сорта ионов. В простейшем случае электролита, молекулы которого диссоциируют на два одновалентных иона, согласно этой формуле

$$\sigma = e^2 (b_+ n_+ + b_- n_-),$$

где $n_+ = n_-$ — числа ионов каждого знака заряда в единице объема; b_+ и b_- — их подвижности. В таком общем виде эта формула справедлива и для слабых, и для сильных электролитов, но она приводит к разным зависимостям электропроводности от концентрации раствора для двух типов электролитов.

Рассмотрим растворы слабых электролитов. Для них, очевидно, $n_+ = n_- = \alpha c N_0$, где α — степень диссоциации; c — молярная концентрация, т. е. число молей электролита, растворенных в единице объема (литре растворителя). Поэтому коэффициент электропроводности слабого электролита определяется формулой

$$\sigma = e^2 \alpha c N_0 (b_+ + b_-),$$

где согласно результатам § 6.2 степень диссоциации является функцией концентрации:

$$\alpha = \frac{2K}{K + \sqrt{K^2 + 4cK}}$$

(K — константа диссоциации). Подвижности b_+ и b_- в случае слабого раствора могут считаться не зависящими от концентрации c . В электрохимии часто пользуются понятием эквивалентной электропроводности $\sigma' = \sigma/c$. Эта величина зависит от концентрации так же, как и степень диссоциации. При бесконечном разведении ($c \rightarrow 0$) степень диссоциации стремится к единице, поэтому

$$\sigma'_{c \rightarrow 0} \rightarrow e^2 N_0 (b_+ + b_-).$$

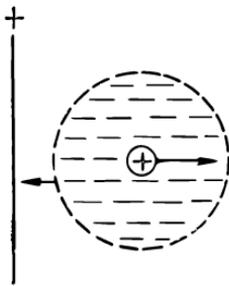


Рис. 6.3

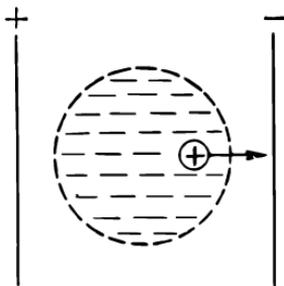


Рис. 6.4

Рассмотрим теперь растворы сильных электролитов. Для них степень диссоциации равна единице (вплоть до очень больших концентраций); но их подвижности нельзя считать не зависящими от концентрации. Действительно, так было бы, если бы подвижность определялась только силой трения, действующей на ион со стороны молекул растворителя. Но в случае растворов сильных электролитов, когда имеется много ионов, становится существенным их взаимодействие, которое приводит к добавочному торможению ионов.

Чтобы понять механизмы этого торможения, следует вспомнить, что в плазме каждый ион окружен облаком ионов противоположного знака заряда. Аналогичная ситуация складывается и в растворе сильного электролита. Поэтому когда в растворе сильного электролита движется ион, то он «тянет» за собой целое облако ионов противоположного знака заряда. Но поле действует на него с силой, направленной в противоположную сторону по отношению к силе, действующей на центральный ион (рис. 6.3). Таким образом и возникает добавочное торможение иона — электрофоретическая сила. Эту силу можно оценить, рассматривая ион вместе с окружающим его ионным облаком как шарик, радиус которого равен радиусу Дебая:

$$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{kT\epsilon}{8\pi e^2 n_+}}$$

(для простоты мы считаем, что молекула электролита диссоциирует на два одновалентных иона), и считая, что этот шарик движется в среде с некоторой вязкостью η .

Согласно формуле Стокса скорость u шарика радиуса a , движущегося под действием внешней силы F в среде с вязкостью η , определяется формулой

$$u = \frac{F}{6\pi a \eta}.$$

Применяя эту формулу к рассматриваемому нами ионному шарикю, движущемуся в поле E , и полагая $a = 1/\kappa$, найдем скорость шарика:

$$u = \frac{eE\kappa}{6\pi\eta}.$$

Умножая эту скорость на коэффициент трения γ , обусловленного чистым растворителем, определяем электрофоретическую силу:

$$f = -\gamma \frac{\kappa}{6\pi\eta} eE.$$

Но влияние взаимодействия ионов на их торможение не сводится только к электрофоретической силе. Существует еще один механизм торможения, обусловленный тем, что при движении иона симметрия его ионного облака нарушается. Если, например, некоторый ион движется вправо, то слева его ионное облако должно исчезнуть, а справа — создаваться. Скорость, с которой ионное облако образуется с правой стороны и исчезает с левой, характеризуется некоторым временем, которое можно назвать временем релаксации ионного облака. Существование этого времени означает, что ионное облако, окружающее движущийся ион, не симметрично, причем плотность заряда позади иона больше, чем перед ним (рис. 6.4). По этой причине на ион действует добавочная сила со стороны самого облака, тянущая ион влево, т. е. против его движения. Ясно, что этого эффекта не было бы при симметричном облаке.

Таким образом, с эффектом релаксации и асимметрии ионного облака связано возникновение добавочной тормозной силы (она называется силой релаксации). Эта сила, так же как и электрофоретическая, пропорциональна обратному дебаевскому радиусу, т. е. корню квадратному из концентрации электролита в растворе. Поэтому обе добавочные силы торможения, действующие на ион в растворе сильного электролита, растут с увеличением концентрации. В результате подвижность иона уменьшается, и это уменьшение оказывается пропорциональным κ , т. е. корню квадратному из концентрации. В свою очередь уменьшение подвижности приводит к уменьшению эффективной электропроводности раствора сильного электролита, которую можно представить в виде

$$\sigma' = \sigma_0 \left(1 - \sqrt{\frac{c}{c_0}} \right),$$

где σ'_0 — эффективная электропроводность при бесконечном разведении ($c \rightarrow 0$); c_0 — некоторая константа.

§ 6.5. ГАЛЬВАНИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В § 5.3 мы показали, что между двумя соприкасающимися металлами всегда возникает определенная разность потенциалов (контактная разность потенциалов). Легко видеть, что контактная разность потенциалов должна возникать и на границе металла с раствором электролита, а также на границе между двумя растворами электролитов. Действительно, если металл находится в воде (или в растворе электролита), то решетка поверхностной части металла, граничащей с водой, диссоциирует и ее положительно заряженные ионы уходят в растворитель; сам же металл заряжается отрицательно, так как он при этом становится обладателем избытка электронов. Процесс диссоциации не приводит, однако, к полному растворению металла, так как положительно заряженные ионы металла в растворе вместе с отрицательно заряженным металлом создают электрическое поле, направленное внутрь металла и поэтому препятствующее дальнейшему переходу ионов в раствор. На поверхности металла создается электрический диполь, а точнее, двойной электрический слой (рис. 6.5), поле которого препятствует уходу ионов из металла. В конечном счете возникает равновесное состояние, характеризующееся некоторой равновесной плотностью ионов в растворе, которой соответствует вполне определенная разность потенциалов между металлом и водным раствором его ионов (или металлом и раствором электролита, в который погружен металл); эта разность потенциалов (она называется электродным потенциалом) аналогична контактной разности потенциалов, возникающей на границе соприкосновения двух металлов. Подобным образом можно объяснить возникновение разности потенциалов на границе двух соприкасающихся растворов электролитов.

Разные металлы обладают в общем различающимися электродными потенциалами. Поэтому если поместить в какой-либо раствор электролита два разных металла, то потенциалы их будут различаться и между ними возникнет электрическое поле.

В § 5.3 мы показали, что в замкнутой цепи из разных металлов, имеющих одну и ту же температуру, сумма всех контактных разностей потенциалов равна нулю. Однако если образовать замкнутую цепь из металлов и растворов электролитов, то в этом случае сумма всех контактных разностей потенциалов не равна нулю даже при одинаковой температуре всех элементов цепи. Действительно, сумма всех контактных разностей потенциалов, т. е. ЭДС в цепи, представляет собой работу сил электрического поля (которое возникает между соприкасающимися проводниками) при перемещении единичного заряда вдоль замкнутой цепи. Если электрон перемещается вдоль замкнутой цепи, состоящей из одних только металлов, то при одинаковой их температуре в цепи не происходит никаких внутренних изменений, т. е. энергия ее не изменяется; поэтому общая работа сил электрического поля равна нулю. В отличие от такой цепи, в цепи, содержащей и металлы, и растворы электролитов, при перемещении заряда происходит, как мы видели, изучая электролиз, химическая реакция. При этом изменяется энергия системы и, следовательно, работа сил поля может быть отлична от нуля. Существование отличной от нуля ЭДС означает, что в замкнутых цепях, содержащих металлические и электролитические проводники, могут самопроизвольно, т. е. без добавочных внешних

устройств, протекать электрические токи. Такие цепи носят общее название гальванических элементов.

Простейшим примером гальванического элемента является элемент Вольты, состоящий из цинкового и медного электродов, которые погружены в разбавленную серную кислоту. (Схематически он изображается в виде $Zn^- | H_2SO_4 | Cu^+$.) При замыкании электродов (рис. 6.6) в цепи течет электрический ток от медного электрода (анод) к цинковому (катод). Отличительной (и притом отрицательной) чертой этого элемента является то, что цинковый электрод реагирует с кислотой самопроизвольно, даже если элемент разомкнут и в цепи не течет ток.

В отличие от элемента Вольты в элементе Даниеля, который состоит из цинкового электрода, погруженного в раствор серно-

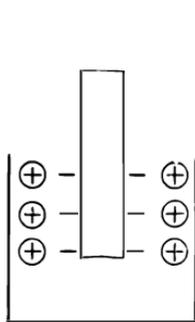


Рис. 6.5

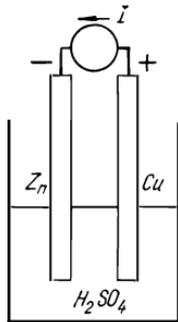


Рис. 6.6

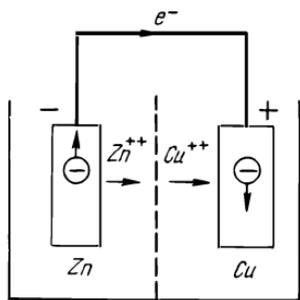


Рис. 6.7

кислотой цинка, и медного электрода, погруженного в раствор сернокислой меди (оба раствора разделены пористой перегородкой) (рис. 6.7), ни один из металлов не подвергается химическому воздействию до тех пор, пока цепь разомкнута и элемент не дает тока. Этот элемент, который схематически изображается в виде $Zn^- | ZnSO_4 : CuSO_4 | Cu^+$, является термодинамически обратимым, в отличие от элемента $Zn^- | H_2SO_4 | Cu^+$, термодинамически необратимого. Если соединить электроды элемента Даниеля внешним проводником, то в нем начнется движение электронов от цинкового к медному электроду. При этом ионы Cu^{++} двигаются к медному электроду и, соединяясь с электронами, «высаживаются» на электроде в виде нейтральной меди. Цинковый электрод по мере протекания тока еще больше растворяется, переходя в раствор $ZnSO_4$ в виде ионов Zn^{++} . Таким образом, количество цинка уменьшается, а количество меди увеличивается. При этом энергия гальванического элемента уменьшается и элемент совершает электрическую работу.

В общем случае, когда гальванический элемент состоит из двух металлических электродов А и В, погруженных в раствор электролитов АХ и ВХ (X^- — некоторый анион), при прохождении элементарного заряда e через цепь ион A^+ переходит из электрода А в раствор, ион B^+ переходит из раствора в электрод В и, наконец, электрон переходит от А к В во внешнем проводе, соединяющем электроды. Химически это означает, что электрод А теряет,

а электрод В приобретает один нейтральный атом, в растворе же электролита молекула ВХ заменяется молекулой АХ.

Для обратимого гальванического элемента изменение энергии ΔW пропорционально протекшему количеству электричества q , т. е.

$$\Delta W = -qv,$$

где v — изменение энергии, отнесенное к единичному заряду. Эта величина зависит от температуры. Если бы гальванический элемент не обменивался теплом с окружающей средой, то согласно закону сохранения энергии сумма изменения энергии элемента ΔW и работы сил поля $q\mathcal{E}$, где \mathcal{E} — ЭДС элемента, была бы равна нулю, откуда следовало бы, что $v = \mathcal{E}$. Но в действительности происходит тепловой обмен элемента с окружающей средой и это соотношение заменяется соотношением

$$\mathcal{E} - T \frac{d\mathcal{E}}{dT} = v,$$

где T — температура элемента. Второе слагаемое здесь определяет количество тепла, которым обменивается гальванический элемент с окружающей средой (приведенное соотношение называется уравнением Гиббса—Гельмгольца).

Электродные потенциалы различных металлов изменяются от долей вольта до нескольких вольт. Обычно принято считать электродный потенциал водорода (H_2/H^+) в воде (при температуре 25°C) равным нулю. Тогда потенциал цинка ($\text{Zn}|\text{Zn}^{++}$) равен $-0,763$ В, меди ($\text{Cu}|\text{Cu}^{++}$) $+0,34$ В, ртути ($\text{Hg}|\text{Hg}^{++}$) $+0,70$ В, лития ($\text{Li}|\text{Li}^+$) $-3,01$ В; железа ($\text{Fe}|\text{Fe}^{++}$) $-0,44$ В. Разности этих потенциалов определяют ЭДС элементов. Например, ЭДС элемента Даниеля равна $+0,34 - (-0,763) = 1,103$ В.

Чтобы получить большие значения ЭДС, гальванические элементы соединяют последовательно, т. е. катод первого элемента соединяют с анодом второго элемента, катод второго — с анодом третьего и т. д.; электродами такой батареи элементов будут катод первого и анод последнего элементов.

Заметим, что если в растворе находятся три электролита АХ, ВХ, СХ и в него погружены три электрода А, В, С, то ЭДС между каждой парой электродов связаны между собой соотношением

$$\mathcal{E}_{\text{AB}} + \mathcal{E}_{\text{BC}} = \mathcal{E}_{\text{AC}}.$$

До сих пор мы рассматриваем элементы, содержащие два электрода и дающие электрический ток за счет протекания химических реакций. Часто такие элементы объединяют общим названием химических. Но ток можно получать еще и от так называемых концентрационных элементов, ЭДС которых обусловлена различием в концентрации электролита в разных зонах раствора при одинаковом материале электродов. Протекание тока при этом связано с выравниванием концентраций.

Определим ЭДС концентрационного элемента. Обозначим через eZ заряд иона. Если считать, что ионы находятся в состоянии ста-

гистического равновесия, то их плотность $n(x)$ в точке x связана с потенциалом $\varphi(x)$ в этой же точке формулой Больцмана:

$$n(x) = n_0 e^{-\frac{eZ\varphi(x)}{kT}},$$

где n_0 — постоянная. Отсюда следует, что

$$\varphi(x) = -\frac{kT}{eZ} \ln \frac{n(x)}{n_0}.$$

Следовательно, разность потенциалов между электродами, т. е. ЭДС элемента, определяется формулой

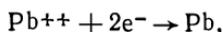
$$\mathcal{E} = \frac{kT}{eZ} \ln \frac{n_1}{n_2},$$

где n_1 и n_2 — числа ионов в единице объема у электродов. Эту формулу можно представить также в виде

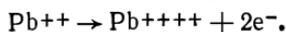
$$\mathcal{E} = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{c_1}{c_2},$$

где c_1 и c_2 — молярные концентрации ионов электролита у электродов; R — газовая постоянная; $F = eN_0$ — постоянная Фарадея.

Из гальванических элементов особенно большое практическое значение имеет аккумулятор. Электродами в нем служит свинец — в различных валентных состояниях на катоде и аноде (анодом является четырехвалентный, а катодом — двухвалентный свинец). Это значит, что на разных электродах одно и то же количество свинца содержит разное число электронов. Электролитом является раствор серной кислоты. При соединении электродов внешним проводом в цепи течет ток и постепенно происходит выравнивание чисел электронов на электродах. В этом состоит процесс разрядки аккумулятора. Чтобы восстановить различие в электродах, производят зарядку аккумулятора, т. е. пропускают через него постоянный ток. При этом происходит электролиз, в результате которого на катоде идет восстановление Pb^{++} до металла:



а на аноде — окисление свинца до четырехвалентного состояния:



ЭДС аккумулятора равна 2,02 В.

§ 7.1. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Чистые газы являются идеальными изоляторами. Если приложить к ним постоянное электрическое поле, то в них не возникнет электрический ток, так как нейтральные молекулы, из которых состоит газ, будут лишь несколько деформироваться или поворачиваться, но не будут двигаться поступательно. Ситуация существенно изменится при введении в газ посторонних заряженных частиц: они начнут двигаться под действием приложенного к газу электрического поля, и в газе будет течь электрический ток.

Если напряжение поля достаточно велико, то внешние заряженные частицы, введенные в газ, приобретут в поле энергию, достаточную для ионизации нейтральных газовых молекул, т. е. отрыва от них одного или нескольких электронов. В результате наряду с посторонними носителями заряда в газе возникнут собственные носители заряда — электроны и положительные ионы. Они, в свою очередь, при движении в поле могут ионизировать молекулы, т. е. могут создаваться вторичные электроны и ионы; вторичные частицы могут создавать третичные частицы и т. д. Таким образом, в принципе количество собственных носителей заряда может лавинообразно нарастать, а вместе с ним может лавинообразно нарастать и ток в газе.

Ток в газе носит общее название газового разряда. Если он связан только с внешними носителями заряда, то разряд называют несамостоятельным. Если же вследствие лавинообразного нарастания числа носителей заряда разряд может протекать при сколь угодно малом затравочном внешнем заряде, то его называют самостоятельным.

Мы изучим прежде всего движение отдельных зарядов в вакууме и газе, затем выясним механизмы ионизации газов и, наконец, рассмотрим различные формы газовых разрядов. Начнем с определения силы тока при движении отдельного заряда через газовый или вакуумный промежуток электрической цепи. Пусть этот промежуток ограничен двумя электродами A и K (рис. 7.1), к которым приложена разность потенциалов, и в соединяющий их проводник включен безынерционный прибор G для измерения силы тока. У электрода A находится частица с зарядом $+e$, которая движется вдоль силовой линии по направлению к электроду K . Какой ток показывает при этом прибор G ? На первый взгляд кажется, что мгновенный ток в цепи будет отсутствовать в течение всего времени движения частицы от электрода A к электроду K , и только в тот момент, когда частица подойдет к электроду K

и отдаст ему свой заряд, прибор G покажет импульс тока. В действительности прибор показывает ток в течение всего времени движения заряженной частицы от A к K . Это объясняется тем, что в результате электростатической индукции на электродах A и K будут наводиться заряды, которые при движении заряженной частицы также двигаются вдоль соединяющего A и K провода и проходят через измеряющий прибор.

Легко определить силу тока при любой форме электродов A и K . Пусть заряд $+e$ сместился за время dt на отрезок $d\mathbf{l}$. Если напряженность поля равна \mathbf{E} , то работа сил поля при перемещении заряда на $d\mathbf{l}$ определяется формулой

$$dA = eE d\mathbf{l} = eE dl \cos \alpha$$

(α — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{E}). Но эту работу производит

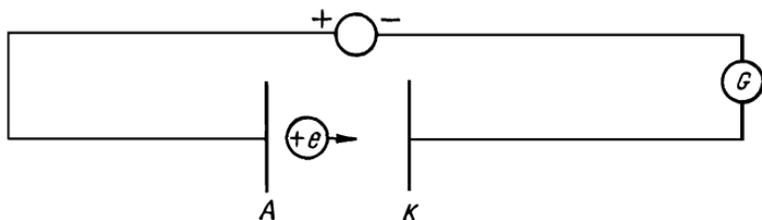


Рис. 7.1

в конечном счете внешний источник, и если его ЭДС равна \mathcal{E} , то

$$dA = \mathcal{E} I dt,$$

где I — сила тока. Сравнивая оба выражения для работы, найдем силу тока:

$$I = \frac{eE}{\mathcal{E}} v \cos \alpha,$$

где $v = d\mathbf{l}/dt$ — скорость частицы. Интеграл от тока по времени продвижения заряда от одного до другого электрода равен, очевидно, $+e$. Для плоскопараллельных электродов $E = \mathcal{E}/d$, где d — расстояние между электродами, а сила тока определяется формулой

$$I = \frac{ev}{d} \cos \alpha.$$

Приведем пример. Если один электрон летит со скоростью $v = 10^8$ см/с вдоль силовой линии между плоскими электродами, расстояние между которыми $d = 1$ см, то в соединительном проводнике в течение времени $d/v = 10^{-8}$ с течет ток с силой $I = 4,77 \times 10^{-10} \cdot 10^8$ СГСЕ = $1,59 \cdot 10^{-11}$ А.

Рассмотрим подробнее движение заряженной частицы в постоянном и однородном электрическом поле \mathbf{E} . Уравнение движения частицы имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E},$$

где e и m — масса и заряд частицы. Отсюда следует, что

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E}t + \mathbf{v}_0,$$

где \mathbf{v}_0 — начальная скорость частицы. Таким образом, движение частицы является равномерно ускоренным. Обозначая радиус-вектор частицы через \mathbf{r} и замечая, что $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, находим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E}t + \mathbf{v}_0,$$

откуда

$$\mathbf{r} = \frac{e}{2m} \mathbf{E}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0,$$

где \mathbf{r}_0 — начальный радиус-вектор. Это уравнение определяет траекторию частицы.

Покажем, что траектория представляет собой параболу. Заметим для этого, что всегда существует такой момент времени, когда скорость \mathbf{v} перпендикулярна полю \mathbf{E} (он определяется из условия $\mathbf{v}\mathbf{E} = \frac{e}{m} E^2t + E\mathbf{v}_0 = 0$). Выбрав этот момент за начало отсчета времени и взяв соответствующую ему скорость в качестве начальной, можем считать, что $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{E}$. Направим теперь ось y вдоль \mathbf{E} , а ось x вдоль \mathbf{v}_0 , и пусть начальный радиус-вектор \mathbf{r}_0 равняется нулю. Тогда

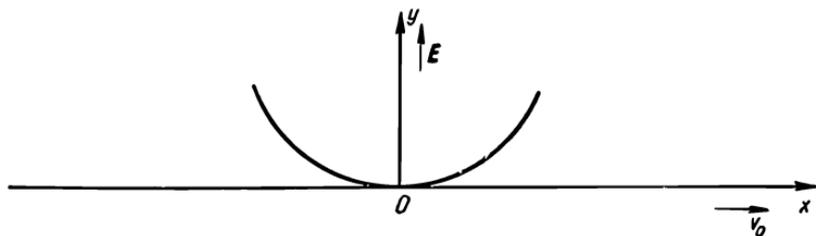


Рис. 7.2

написанное векторное уравнение для \mathbf{r} можно заменить двумя уравнениями для проекций \mathbf{r} :

$$x = v_0t, \quad y = \frac{e}{2m} Et^2.$$

Исключив отсюда время, получим уравнение траектории

$$y = \frac{eE}{2m v_0^2} x^2,$$

представляющее собой уравнение параболы (рис. 7.2). При заданных E и v_0 эта траектория определяется лишь отношением заряда частицы к ее массе.

Выясним, как изменяется кинетическая энергия движущейся частицы. Умножим для этого уравнение движения скалярно на $v dt = dr$:

$$mvdv = eEvd t = eEdr.$$

Величина $eEdr$ представляет собой работу сил поля dA на перемещении dr , которая должна равняться убыли потенциальной энергии — $ed\varphi$ (φ — потенциал поля). Поэтому

$$mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -ed\varphi,$$

откуда

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = e(\varphi_0 - \varphi),$$

где φ и φ_0 — значения потенциала в тех точках поля, где скорость частицы равна v и v_0 .

Мы видим, что приращение кинетической энергии движущейся заряженной частицы на некотором пути равно произведению заряда частицы на разность потенциалов начальной и конечной точек пути. Так, частица с элементарным зарядом $e = 4,77 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ, пройдя разность потенциалов в 1 В, приобретает энергию $1,60 \times 10^{-12}$ эрг. Эта энергия называется электрон-вольт (эВ):

$$1 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ эрг.}$$

Если начальная скорость частицы равна нулю, то, пройдя разность потенциалов $\Delta\varphi$, частица приобретает скорость

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} \Delta\varphi}.$$

Для электронов

$$v = 6 \cdot 10^7 \sqrt{\varepsilon} \text{ см/с,}$$

где ε — энергия электрона, выраженная в электрон-вольтах.

§ 7.2. ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА НА СИЛУ ТОКА

В предыдущем параграфе мы рассмотрели движение отдельной заряженной частицы в электрическом поле в простейшем случае, когда поле (мы считали его постоянным и однородным) создается внешними источниками и не зависит от движущегося заряда. Если движется одна частица, то такое рассмотрение является правильным. Но если в вакууме движется не одна, а много заряженных частиц, то нельзя уже считать, что поле определяется только расположением и формой электродов и разностью потенциалов между ними. Напротив, в этом случае на поле существенное влияние оказывают сами заряженные частицы, а точнее, объемный заряд, создаваемый ими.

Рассмотрим, например, диод, т. е. два плоских параллельных электрода, между которыми поддерживается определенная разность потенциалов φ_a , и один из электродов — катод K — непре-

ривно испускает электроны. (Для этого катод нагревают до высокой температуры и он становится, как было разъяснено в § 5.4, источником электронов.) Под действием электрического поля, направленного от электрода A (анода) к катоду K (рис. 7.3), электроны будут двигаться к аноду. Возникает вопрос, какое влияние оказывает объемный заряд электронов на поле между электродами, а следовательно, и на само движение электронов. Ясно, что присутствие пространственного отрицательного заряда между электродами приводит к тому, что часть силовых линий, исходящих из анода A , заканчивается на отрицательных зарядах в промежутке между K и A и не доходит до катода K . Поэтому поле у катода будет меньше, чем у анода. Чем больше электронов вытекает из катода, тем больше их находится в пути к аноду, тем больше

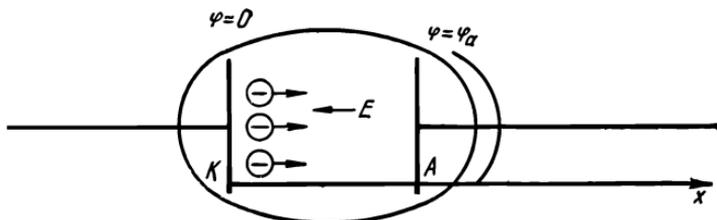


Рис. 7.3

силовых линий, исходящих из анода, не доходит до катода и, следовательно, тем меньше будет поле у катода. В конечном счете поле у катода может упасть до нуля, и в этом случае ток электронов у анода достигнет максимально возможного значения (при заданном потенциале φ_a). Если число эмитируемых электронов из катода в единицу времени еще увеличится, то поле у катода вместо ускоряющего станет тормозящим и ток будет меньше максимально возможного предельного тока, соответствующего нулевому полю у катода.

Поскольку мы рассматриваем плоскую задачу, то естественно, что все величины — потенциал φ , плотность электронов n , поле E , скорость электронов v — зависят только от одной пространственной координаты — расстояния x до катода. Поэтому уравнение Пуассона для потенциала имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho,$$

где ρ — объемная плотность заряда, $\rho = -en$ ($-e$ — заряд электрона). Катод эмитирует электроны равномерно во времени, поэтому плотность электронов n не зависит от времени, а является функцией только координаты x . Мы рассматриваем установившееся движение и считаем не только n , но и все другие величины не зависящими от времени. Поэтому в силу закона сохранения заряда плотность тока j — константа, т. е. не зависит от x : $j = env = \text{const}$. Это значит, что скорость электронов в каждой точке пространства между электродами обратно пропорциональна существующей в этой точке плотности электронов.

Но скорость электронов можно связать еще и с потенциалом. Действительно, изменение кинетической энергии электрона при прохождении некоторого пути должно равняться произведению заряда электрона на разность потенциалов начала и конца пути, т. е.

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = e(\varphi - \varphi_0),$$

где v_0 — скорость, с которой электроны вырываются из катода; φ_0 — потенциал катода. Мы предполагаем, что $v_0 = 0$. Считая, что $\varphi_0 = 0$, из закона сохранения энергии получаем

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}} \varphi^{1/2}.$$

Отсюда и из независимости плотности тока от координаты x следует, что

$$en = \frac{j}{v} = j \sqrt{\frac{m}{2e}} \varphi^{-1/2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение Пуассона, находим

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi j \sqrt{\frac{m}{2e}} \varphi^{-1/2}.$$

Данное уравнение позволяет определить потенциал как функцию координаты x . Для этого умножим уравнение Пуассона на $d\varphi/dx$. Замечая, что

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2, \quad \varphi^{-1/2} \frac{d\varphi}{dx} = 2 \frac{d}{dx} \varphi^{1/2}$$

и поэтому

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 8\pi j \sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{d}{dx} \varphi^{1/2},$$

получаем

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 16\pi j \sqrt{\frac{m}{2e}} \varphi^{1/2} + C,$$

где C — произвольная положительная константа. Смысл ее очень прост: так как электрическое поле E связано с φ соотношением

$$E = -\frac{d\varphi}{dx},$$

то полученное уравнение можно переписать в виде

$$E^2 = 16\pi j \sqrt{\frac{m}{2e}} \varphi^{1/2} + C.$$

Мы видим, что C представляет собой квадрат поля у катода (где $\varphi = 0$): $C = E_0^2$.

Предположим, что $E_0 = 0$. Тогда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha j^{1/2} \varphi^{1/4}, \quad \alpha = 4 \sqrt{\pi} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/4}$$

или

$$\varphi^{-1/4} d\varphi = \alpha j^{1/2} dx,$$

откуда

$$\frac{4}{3} \varphi^{3/4} = \alpha j^{1/2} x.$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = \left(\frac{3\alpha}{4} \right)^{4/3} j^{2/3} x^{4/3}.$$

Благодаря объемному заряду при установившемся движении электронов потенциал между катодом и анодом изменяется с расстоянием пропорционально $x^{4/3}$, а не x , как было бы в случае вакуума. Соответственно поле изменяется как $x^{1/3}$, а не остается постоянным, как в случае вакуума:

$$E = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{3\alpha}{4} \right)^{4/3} j^{2/3} x^{1/3}.$$

Значит, поле неоднородно и растет в направлении от катода к аноду.

Приведем выражения для скорости электронов и их объемного заряда как функции расстояния до катода:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e}{m}} \varphi^{1/2} = \sqrt{\frac{2e}{m}} \left(\frac{3\alpha}{4} \right)^{2/3} j^{1/3} x^{2/3},$$

$$en(x) = \frac{j}{v} = \sqrt{\frac{m}{2e}} \left(\frac{4}{3\alpha} \right)^{2/3} j^{2/3} x^{-2/3}.$$

Заметим, что объемная плотность заряда обращается в бесконечность на катоде. В действительности плотность заряда конечна во всех точках и полученный результат связан просто с неточностью сделанного нами предположения о равенстве нулю скорости вылетающих из раскаленного катода электронов. Если учесть, что эта скорость в действительности отлична от нуля, то мы придем к конечному значению для плотности электронов повсюду, т. е. и при $x = 0$. На рис. 7.4 показан ход изменения потенциала, напряженности поля и плотности заряда для плоского диода с анодным потенциалом $\varphi_a = 100$ В и расстоянием между электродами $d = 1$ см.

Положим в формуле, определяющей φ как функцию x , $x = d$:

$$\varphi_a = \left(\frac{3\alpha}{4} \right)^{4/3} j^{2/3} d^{4/3}.$$

Отсюда

$$j = \left(\frac{4}{3\alpha} \right)^2 \frac{\varphi_a^{3/2}}{d^2} = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{\varphi_a^{3/2}}{d^2}.$$

Умножив j на площадь катода S , найдем полный ток I через вакуумный промежуток:

$$I = jS.$$

Мы видим, что сила тока на аноде пропорциональна анодному потенциалу в степени $3/2$, а не в первой степени, как это имеет место в обычных проводниках согласно закону Ома. Неподчинение закону Ома связано с присутствием объемного заряда, который полностью компенсируется зарядами противоположного знака как в металлах, так и в электролитах.

Полученная формула для плотности тока соответствует случаю, когда поле на катоде $E_0 = 0$; но можно найти ток и в случае, когда $E_0 \neq 0$. Оказывается, сила тока при $E_0 \neq 0$ будет меньше силы тока при нулевом поле на катоде. Поэтому найденный ток яв-

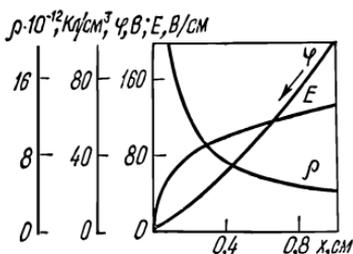


Рис. 7.4

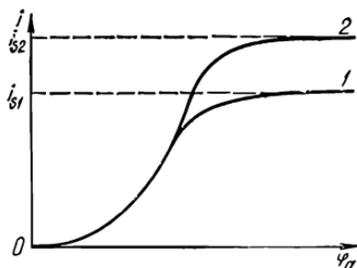


Рис. 7.5

ляется предельным при заданном анодном потенциале. Ясно, что каков бы ни был анодный потенциал, плотность анодного тока не может быть больше плотности тока термоэлектронной эмиссии j_s (см. § 5.4). Этим определяется верхняя граница анодного потенциала, для которого еще справедлив «закон $3/2$ » (т. е. пропорциональность $j \sim (\varphi_a^{3/2})$). На рис. 7.5 изображены зависимости $j = j(\varphi_a)$ с учетом ограничения $j \leq j_s$ (ток j_s в этой связи называется током насыщения). Кривая 2 с большим током насыщения соответствует более высокой температуре катода (такого рода кривые называются вольт-амперными характеристиками).

Мы рассмотрели простейшую задачу, в которой учитывается роль объемного заряда. В этой задаче катод эмитирует электроны, анод же только их принимает. Но аналогично можно решить и другую задачу, когда оба электрода выполняют одинаковую роль — один испускает отрицательно, а другой — положительно заряженные частицы и потоки частиц разного знака заряда движутся навстречу друг другу под влиянием приложенной к электродам разности потенциалов. При этом происходит частичная компенсация объемных зарядов двух потоков, благодаря чему значительно увеличивается каждый из токов.

Токи достигают максимального значения, когда поле обращается в нуль и на катоде, и на аноде. В этом случае

$$j_- = \frac{9}{16\pi} \sqrt{\frac{2e}{m_-}} \frac{\varphi_a^{3/2}}{d^2},$$

$$j_+ = \frac{9}{16\pi} \sqrt{\frac{2e}{m_+}} \frac{\varphi_a^{3/2}}{d^2},$$

где m_- и m_+ — массы частиц. Каждый из этих токов примерно в пять раз больше тока, который протекал бы в отсутствие другого тока. Заметим, что

$$j_+/j_- = \sqrt{m_-/m_+}.$$

§ 7.3. ТЕМПЕРАТУРА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В § 7.1, 7.2 мы полагали, что заряженные частицы находятся в вакууме и на них действует электрическое поле. Теперь предположим, что заряженные частицы находятся в статистически равновесном газе нейтральных молекул и на них также действует электрическое поле. Как в этом случае происходит их движение?

В отсутствие поля заряженные частицы, сталкиваясь с нейтральными молекулами, обменивались бы с ними энергией, и в результате установилось бы состояние статистического равновесия, при котором стали бы одинаковыми средние значения кинетических энергий поступательного движения нейтральных молекул и заряженных частиц. Именно, независимо от массы и сорта молекул и заряженных частиц средняя кинетическая энергия стала бы равной

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT,$$

где m и v — масса и скорость частицы или молекулы; T — общая температура газа нейтральных молекул и заряженных частиц. Иными словами, в отсутствие внешнего поля заряд частицы не оказывал бы влияния. При наличии внешнего электрического поля заряженные частицы непрерывно получают от поля энергию. Но тем не менее энергия частицы не будет бесконечно возрастать. Действительно, частицы будут сталкиваться с молекулами и передавать им часть своей энергии. В результате установится некоторое стационарное состояние, но средние кинетические энергии частиц и молекул уже не будут одинаковыми, т. е. температуры газа нейтральных молекул и газа заряженных частиц будут различаться, и это различие тем больше, чем сильнее электрическое поле.

Покажем, как можно оценить температуру заряженных частиц. Для определенности рассмотрим электроны. Средняя тепловая скорость электрона всегда больше средней тепловой скорости молекул газа (при заданной температуре), поэтому молекулы можно считать покоящимися. В результате столкновения с электроном молекула приобретает некоторую энергию, пропорциональную кинетической энергии электрона ε :

$$\varepsilon_M = \xi \varepsilon,$$

где ξ — доля переданной электроном энергии. Эта величина существенно зависит от характера столкновения. Если столкновение электрона с молекулой является упругим, то, как непосредственно следует из законов сохранения энергии и импульса,

$$\xi_{\max} = 4 \frac{m}{M},$$

где m и M — массы электрона и молекулы ($m \ll M$). Минимальное значение ξ равняется, очевидно, нулю, так что среднее значение доли переданной энергии $\bar{\xi}$ при упругом столкновении электрона с молекулой

$$\bar{\xi} = 2 \frac{m}{M}.$$

Эта величина очень мала и составляет $2,8 \cdot 10^{-4}$ для гелия, $2,8 \times 10^{-5}$ для аргона, $5,5 \cdot 10^{-6}$ для ртути. Однако малая потеря энергии характерна только для сравнительно медленных электронов, движущихся в одноатомных газах. С ростом энергии электронов и особенно при движении электронов в многоатомных газах

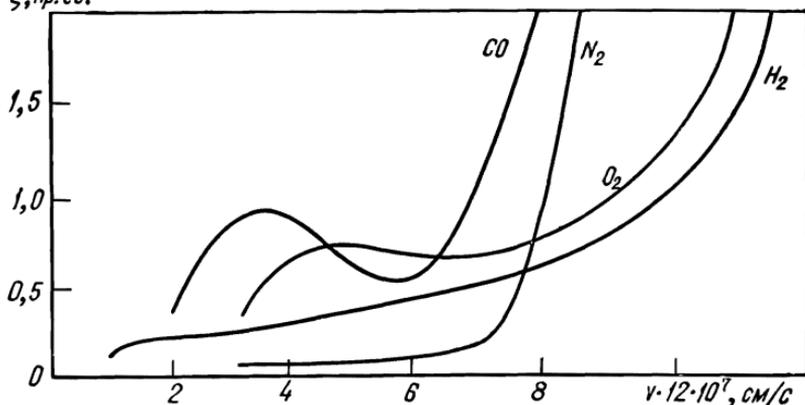


Рис. 7.6

доля теряемой электроном энергии значительно возрастает, так как столкновения становятся существенно неупругими, т. е. сопровождаются перестройкой молекулы и изменением ее внутренней энергии. На рис. 7.6 приведена зависимость средней доли теряемой энергии $\bar{\xi}$ от скорости электрона v , сталкивающегося с многоатомной молекулой.

Разделив $\bar{\xi}\bar{v}$, где \bar{v} — средняя кинетическая энергия электрона, на среднее время τ свободного пробега электрона, мы найдем среднюю энергию ϵ_- , теряемую электроном в единицу времени, т. е.

$$\epsilon_- = \frac{\bar{\xi}\bar{v}}{\tau}.$$

В состоянии статистического равновесия она должна быть равна средней энергии, получаемой электроном от электрического поля и сталкивающихся с электроном молекул. Средняя энергия ϵ_+ , которую электрон получает от поля в единицу времени, равна, очевидно, eEu , где $u = \left(\frac{eE}{m}\right)\tau$ — направленная скорость электрона в поле, т. е.

$$\epsilon_+ = \frac{(eE)^2}{m} \tau.$$

Чтобы получить представление о величине направленной скорости, приведем ее значения для некоторых ионов при поле 1 В/см, температуре 0° С и давлении 1 мм рт. ст. Для однократно отрицательно заряженного иона H_2^- в своем же газе $u = 6,2 \cdot 10^3$ см/с, для положительно заряженного иона H_2^+ $u = 4,5 \cdot 10^3$ см/с. Для Na^+ в гелии $u = 1,75 \cdot 10^4$ см/с, для Cs^+ в гелии $u = 4,8 \cdot 10^3$ см/с.

Далее предполагаем, что средняя энергия $\bar{\epsilon}_+$, приобретаемая электроном в поле, значительно больше средней энергии молекулы газа. Тогда можно не учитывать передачу энергии от молекулы к электрону и рассматривать только два процесса — передачу энергии от электронов к молекулам и получение энергии электронами от поля. С течением времени оба этих процесса уравниваются и устанавливается равновесное состояние, при котором выполняется равенство $\bar{\epsilon}_- = \bar{\epsilon}_+$, т. е.

$$\frac{\bar{\xi}\bar{\epsilon}}{\tau} = \frac{(eE)^2 \bar{\tau}}{m},$$

откуда

$$\bar{\epsilon} = \frac{(eE)^2 \bar{\tau}^2}{m\bar{\xi}}.$$

Подставляя сюда

$$\tau = \frac{l}{v_T},$$

где $\bar{v}_T = \sqrt{2\bar{\epsilon}/m}$ — средняя тепловая скорость и $l = 1/nQ$ — средняя длина свободного пробега электрона (n — плотность молекул; Q — сечение рассеяния электрона молекулой), получаем

$$\bar{\epsilon} = \frac{(eE)^2 l^2}{\bar{\xi} m \bar{v}_T^2} = \frac{(eEl)^2}{2\bar{\xi}\bar{\epsilon}}.$$

Следовательно,

$$\bar{\epsilon} = \frac{eEl}{\sqrt{2\bar{\xi}}}.$$

Температура определяется как 2/3 средней кинетической энергии частицы. Поэтому электронную температуру T_e мы находим согласно соотношению

$$kT_e = \frac{2}{3} \bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3\bar{\xi}^{1/2}} eEl.$$

Эта формула справедлива в пренебрежении передачей энергии от молекул к электронам, т. е. при выполнении условия $T_e \gg T$ или $eEl\bar{\xi}^{-1/2} \gg kT$, где T — температура газа молекул. Итак, в случае достаточно сильного поля температура электронов пропорциональна электрическому полю и средней длине свободного пробега.

Средняя тепловая скорость \bar{v}_T электрона в этом случае не зависит от температуры и определяется только полем, а именно пропорциональна \sqrt{E} :

$$\bar{v}_T \sim \sqrt{\frac{eEl}{m}\bar{\xi}^{-1/4}}.$$

Отсюда следует, что среднее время свободного пробега электрона при $T_e \gg T$ обратно пропорционально \sqrt{E} :

$$\tau = \frac{l}{v_T} \sim \sqrt{\frac{ml}{eE}} \xi^{1/4}.$$

Направленная скорость электрона $u = \frac{eE\tau}{m}$ пропорциональна не E , а \sqrt{E} :

$$u \sim \sqrt{\frac{eEl}{m}} \xi^{1/4}.$$

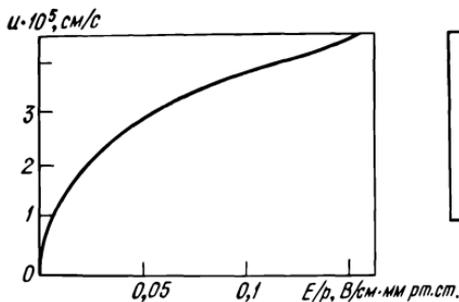


Рис. 7.7

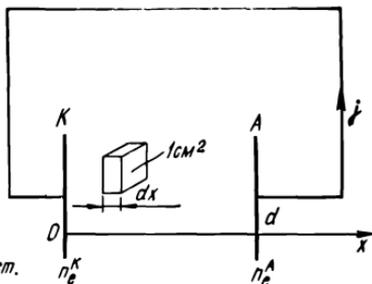


Рис. 7.8

Подвижность электрона b (т. е. коэффициент при силе eE в выражении для направленной скорости u), не зависящая от поля при малых полях, при $T_e \gg T$ зависит от поля, а именно обратно пропорциональна \sqrt{E} :

$$b \sim \left(\frac{l}{meE}\right)^{1/2} \xi^{1/4}.$$

Рис. 7.7 иллюстрирует на примере азота переход линейной зависимости направленной скорости электрона от поля в области слабых полей в зависимость $u \sim \sqrt{E}$ в области сильных полей.

§ 7.4. ДИФФУЗИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Если в газе нейтральных молекул и заряженных частиц плотность заряженных частиц неодинакова в различных местах, в результате теплового движения частиц возникает диффузия, т. е. молекулярный процесс выравнивания плотности заряженных частиц. Диффузия заряженных частиц подчиняется тому же основному закону, что и диффузия нейтральных молекул; вектор плотности диффузионного потока j_D пропорционален градиенту плотности частиц n_e и направлен обратно градиенту:

$$j_D = -D \text{grad } n_e,$$

где D — коэффициент диффузии частиц. Он определяется газокинетической формулой

$$D = \frac{1}{3} l \bar{v}_T,$$

где $\bar{v}_T = \sqrt{3kT_e/m}$ — тепловая скорость частиц (T_e и m — их температура и масса); l — средняя длина свободного пробега частиц, связанная с плотностью молекул газа n и сечением рассеяния Q частицы молекулой соотношением $l = 1/nQ$.

В отсутствие поля, а также в случае слабого поля $T_e \approx T$, поэтому коэффициент диффузии пропорционален \sqrt{T} и обратно пропорционален n :

$$D \sim \frac{\sqrt{kT}}{nQ}.$$

В сильном электрическом поле температура электронов пропорциональна полю ($kT_e \sim eEl\xi^{-1/2}$), и коэффициент диффузии определяется формулой

$$D \sim \sqrt{\frac{eEl}{m}} \xi^{-1/4} l.$$

Диффузионная плотность потока j_D представляет собой число заряженных частиц, проходящих через единичную площадку (ориентированную перпендикулярно градиенту плотности частиц) в единицу времени. Поэтому величину

$$\mathbf{v}_D = \frac{j_D}{n_e} = -\frac{D}{n_e} \text{grad } n_e$$

можно интерпретировать как направленную скорость частиц при диффузии. Существование этой скорости приводит к возникновению электрического тока. Рассмотрим, например, два плоскопараллельных электрода, находящихся в газе нейтральных молекул и заряженных частиц (рис. 7.8). Тогда во внешнем проводе, соединяющем электроды, при неравномерной плотности n_e заряженных частиц пойдет электрический ток без источника ЭДС.

Определим плотность этого тока. Как мы видели в § 7.1, плотность тока, обусловленного движением одной частицы с зарядом e , равна $e v l d$, где v — скорость частицы и d — расстояние между электродами. Вместо v в эту формулу следует подставить найденное выражение для v_D . Что же касается заряда, то мы рассмотрим сперва заряд $e n_e dx$, находящийся в объеме параллелепипеда с основанием в 1 см^2 и высотой dx (плотность n_e считается зависящей только от координаты x) (см. рис. 7.8). Плотность тока, связанного с этим зарядом,

$$\frac{e n_e dx}{d} v_D = \frac{e n_e dx}{d} \frac{D}{n_e} \frac{dn_e}{dx} = \frac{eD}{d} dn_e.$$

Поэтому полная плотность тока

$$j = \frac{eD}{d} (n_e^A - n_e^K),$$

где n_e^A и n_e^K — плотности заряженных частиц у обоих электродов.

При наличии электрического поля \mathbf{E} кроме диффузионной скорости \mathbf{v}_D возникает еще, как мы видели в § 7.3, скорость направленного движения $(e\mathbf{E}/m)\tau$, пропорциональная полю (m — масса частицы). Поэтому результирующая направленная скорость \mathbf{u} определяется выражением

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_D + \frac{e\mathbf{E}}{m}\tau = \frac{1}{n_e} (-D \operatorname{grad} n_e + n_e b e \mathbf{E}),$$

где $b = \tau/m$ — подвижность заряженной частицы (под полем \mathbf{E} здесь следует понимать не только поле от внешних источников, но и поле, создаваемое самими заряженными частицами).

Ясно, что в случае статистического равновесия частиц направленная скорость должна обращаться в нуль. Это значит, что $\mathbf{u} = 0$, если распределение частиц определяется формулой Больцмана

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 e^{-\frac{e\varphi(\mathbf{r})}{kT_e}},$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ — потенциал в точке \mathbf{r} ; n_0 — плотность частиц в точке, в которой $\varphi = 0$.

Что же следует из этого факта? Так как

$$-\operatorname{grad} n_e(\mathbf{r}) = e \frac{n_0}{kT_e} e^{-\frac{e\varphi(\mathbf{r})}{kT_e}} \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r})$$

и поле связано с потенциалом формулой

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

то

$$\frac{1}{n_e} \left(-D n_e \frac{e\mathbf{E}}{kT_e} + b n_e e \mathbf{E} \right) = 0.$$

Отсюда следует соотношение

$$D = b k T_e,$$

связывающее коэффициент диффузии с подвижностью. Это общее соотношение, справедливое не только для заряженных, но и нейтральных частиц и любых силовых полей, называется соотношением Эйнштейна.

До сих пор мы рассматривали диффузию заряженных частиц одного знака заряда. Обратимся теперь к случаю, когда газ состоит из нейтральных молекул и заряженных частиц обоих знаков заряда

Легко видеть, что если плотности положительно и отрицательно заряженных частиц (n_+ и n_-) достаточно велики, то в каждом месте пространства должна происходить почти полная компенсация их зарядов, т. е. $Z_+ e n_+ \approx Z_- e n_-$, где $Z_+ e$ и $-Z_- e$ — заряды частиц. Действительно, в противном случае возникло бы сильное

поле, которое вызывало бы движение заряженных частиц, способствующее выравниванию плотностей зарядов Z_+en_+ и Z_-en_- . Если, например, в каком-либо месте $Z_+en_+ \gg Z_-en_-$, то силовые линии будут выходить из этого места и отрицательно заряженные частицы начнут усиленно двигаться против силовых линий, т. е. к этому месту. Итак, в случае достаточно больших концентраций заряженных частиц должно выполняться условие квазинейтральности $Z_+en_+ \approx Z_-en_-$. При этом градиенты плотностей зарядов eZ_+n_+ и eZ_-n_- также почти одинаковы, а следовательно, положительно и отрицательно заряженные частицы диффундируют в одном направлении. Направленные скорости движения частиц обоих сортов одинаковы, ибо в противном случае возникнет большое различие в плотностях зарядов eZ_+n_+ и eZ_-n_- . Такого рода диффузии положительно и отрицательно заряженных частиц в условиях квазинейтральности называется амбиполярной диффузией.

Поскольку коэффициенты диффузии положительно и отрицательно заряженных частиц D_+ и D_- в общем не одинаковы, то должно возникнуть некоторое поле \mathbf{E} , которое и будет приводить к равенству суммарных направленных скоростей \mathbf{u}_+ и \mathbf{u}_- частиц обоих сортов. Как указывалось выше,

$$\mathbf{u}_+ = -\frac{D_+}{n_+} \text{grad } n_+ + b_+ e Z_+ \mathbf{E},$$

$$\mathbf{u}_- = -\frac{D_-}{n_-} \text{grad } n_- - b_- e Z_- \mathbf{E},$$

где b_+ и b_- — подвижности положительно и отрицательно заряженных частиц. Приравняв скорости частиц, $\mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_- = \mathbf{u}$, и используя условие нейтральности $eZ_+n_+ = eZ_-n_- = en$, получаем

$$-D_+ \frac{\text{grad } n}{n} + b_+ e Z_+ \mathbf{E} = -D_- \frac{\text{grad } n}{n} - b_- e Z_- \mathbf{E},$$

откуда

$$\mathbf{E} = \frac{D_+ + D_-}{b_+ e Z_+ + b_- e Z_-} \frac{\text{grad } n}{n}.$$

Эта формула и определяет поле, возникающее при амбиполярной диффузии. Мы видим, что поле пропорционально разности коэффициентов диффузии частиц обоих знаков заряда и относительному градиенту концентрации заряженных частиц.

Подставляя формулу для \mathbf{E} в выражения для \mathbf{u}_+ и \mathbf{u}_- , находим общую направленную скорость заряженных частиц:

$$\mathbf{u} = -D_a \frac{\text{grad } n}{n},$$

где

$$D_a = \frac{D_+ e Z_- b_- + D_- e Z_+ b_+}{e Z_+ b_+ + e Z_- b_-}.$$

Эта величина называется коэффициентом амбиполярной диффузии. Коэффициенты диффузии D_+ и D_- связаны с подвижностями b_+ и b_- соотношением Эйнштейна:

$$D_+ = kT_+ b_+, \quad D_- = kT_- b_-,$$

где T_+ и T_- — температура положительно и отрицательно заряженных частиц. Подставляя эти выражения в формулу для коэффициента амбиполярной диффузии, получаем

$$D_a = \frac{b_+ b_-}{Z_+ b_+ + Z_- b_-} k (Z_- T_+ + Z_+ T_-).$$

Рассмотрим подробнее случай, когда отрицательно заряженными частицами являются электроны. При этом $Z_+ = Z_- = 1$. Обычно $T_- \gg T_+$, кроме того, $b_- \gg b_+$. Поэтому

$$D_a \approx k T_- b_+,$$

или, так как $k T_- = D_- / b_-$,

$$D_a \approx D_- \frac{b_+}{b_-}.$$

Учитывая, что $b_+ \ll b_-$, получаем неравенство $D_a \ll D_-$. Кроме того, формулу для D_a можно переписать в виде

$$D_a \approx D_+ \frac{T_-}{T_+},$$

а так как

$$T_- \gg T_+, \text{ то } D_a \gg D_+.$$

Следовательно, при $T_- \gg T_+$, $b_- \gg b_+$ $D_+ \ll D_a \ll D_-$.

§ 7.5. ИОНИЗАЦИЯ И РЕКОМБИНАЦИЯ В ГАЗЕ

Быстрый электрон, столкнувшись с атомом или молекулой, может выбить из них один или несколько электронов. В результате наряду с исходным электроном возникнет несколько новых заряженных частиц — электронов и положительно заряженных ионов. Явление это носит общее название ионизации.

Однако не каждое столкновение электрона с атомом приводит к ионизации атома. Необходимое (но не достаточное!) условие заключается в том, чтобы энергия электрона превосходила некоторую минимальную энергию — энергию связи электрона в атоме (или молекуле). Эта минимальная энергия называется энергией ионизации. Так, для получения однократно заряженного иона аргона Ar^+ энергия налетающего электрона должна быть больше 15 эВ, а для получения двукратно заряженного иона аргона — больше 45,0 эВ. Для ионов ртути Hg^+ и Hg^{++} эта величина соответственно равна 10,4 и 29 эВ, в то время как для получения пятикратно заряженного иона ртути Hg^{+5} требуется энергия, превосходящая 225 эВ. Для ионизации молекулы кислорода необходима энергия 12,5 эВ, а молекулы водорода — 16,0 эВ.

Но даже в случае, когда энергия электрона превосходит энергию ионизации атома, столкновение электрона с атомом не обязательно приводит к ионизации атома. Дело в том, что наиболее часты упругие столкновения, при которых не изменяется внутреннее состояние атома, и только в сравнительно небольшом числе случаев при столкновении происходит либо внутренняя пере-

стройка атома, либо выбивание из атома электронов — одного или нескольких. Перестройка структуры атома обычно связана с возрастанием внутренней энергии атома, поэтому ее называют возбуждением атома. Перейдя при столкновении с электроном в возбужденное состояние, атом долго в нем не находится и через небольшой интервал времени (порядка 10^{-8} — 10^{-10} с) переходит в основное состояние. Этот переход сопровождается излучением света («высвечивание» атома).

Относительное число столкновений электрона с атомом, при которых возникает ионизация атома — функция ионизации, суще-

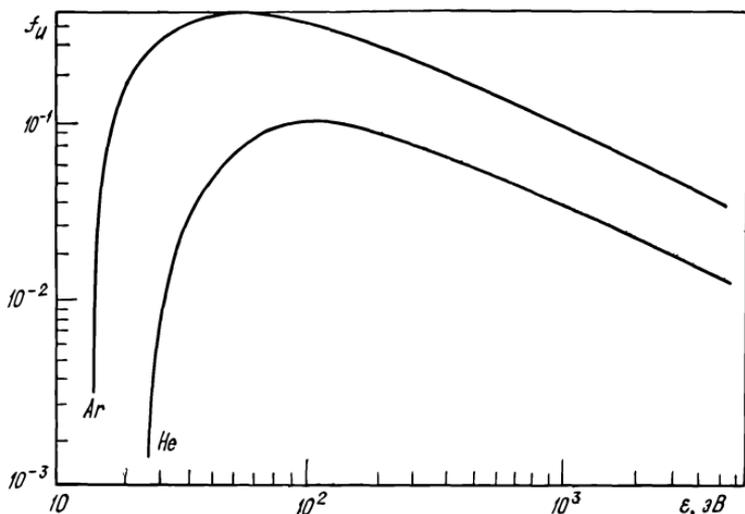


Рис. 7.9

ственно зависит от энергии электрона. Она всегда имеет максимум, который достигается при энергии, в несколько раз превосходящей энергию ионизации. Из рис. 7.9, на котором изображены функции ионизации гелия и аргона в зависимости от энергии электрона ϵ , максимум ионизации гелия достигается при 100 эВ, что примерно в четыре раза превосходит энергию ионизации атома гелия. Функция ионизации при этом порядка 0,1. Это значит, что на десять столкновений электрона с атомом гелия только одно приводит к его ионизации.

Относительное число столкновений электрона с атомом, при котором происходит возбуждение, т. е. перестройка внутренней структуры атома, называется функцией возбуждения атома. Она зависит от характера перестройки и энергии электрона, с которым сталкивается атом. Функция возбуждения, так же как и функция ионизации, всегда имеет максимум и достигает в максимуме значения порядка 10^{-2} — 10^{-4} . Это значит, что на каждые 10^2 — 10^4 столкновений приходится одно столкновение, приводящее к возбуждению атома.

Быстрый электрон, двигаясь через газ и ионизуя, а также возбуждая при этом атомы (молекулы) газа, теряет, очевидно, свою

кинетическую энергию. Если скорость электрона v достаточно велика ($v > 3 \cdot 10^8 \frac{\text{см}}{\text{с}}$, Z — число электронов в атоме), то потеря энергии электрона на единицу пути, обусловленная процессами ионизации и возбуждения атомов, обратно пропорциональна энергии ϵ электрона и пропорциональна общему числу электронов атомов газа в единице объема nZ (n — число атомов в единице объема), т. е.

$$-\frac{d\epsilon}{dx} = C \frac{nZ}{\epsilon},$$

где C — некоторая величина, которую мы здесь не выписываем. (Она пропорциональна заряду электрона в четвертой степени и очень слабо, логарифмически зависит от ϵ .) Отсюда можно найти путь R , проходимый электроном до его полного торможения:

$$R = \int_0^{\epsilon} \frac{d\epsilon}{-d\epsilon/dx}.$$

Этот путь, который называется пробегом электрона, пропорционален квадрату начальной кинетической энергии электрона и обратно пропорционален общему числу атомных электронов в единице объема газа nZ . Для воздуха при давлении 1 мм рт. ст. и температуре 0°C пробег электрона с энергией порядка $2 \cdot 10^4$ эВ составляет около 500 см.

Общее число ионов и электронов N_{\pm} , возникающих в результате столкновений быстрого электрона с атомами (молекулами) газа, примерно пропорционально начальной энергии электрона ϵ , т. е.

$$N_{\pm} = \frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}_2},$$

где константа $\bar{\epsilon}_2$ представляет собой среднюю энергию, необходимую для образования одной пары ионов. Для гелия $\bar{\epsilon}_2 = 43$ эВ, для воздуха $\bar{\epsilon}_2 = 32$ эВ.

Кроме электронов газы могут ионизовать быстрые ионы (обоих знаков заряда), а также рентгеновские лучи и ультрафиолетовое излучение. Возможна тепловая ионизация газов, возникающая при высоких температурах, когда тепловые скорости молекул столь велики, что в результате столкновений молекул друг с другом происходит их ионизация. Возникающие при этом электроны могут, в свою очередь, вызывать ионизацию молекул газа.

Степень тепловой ионизации x_i , т. е. отношение числа ионов или электронов к полному числу нейтральных молекул до ионизации, может быть найдена, как мы показывали в § 6.2, с помощью закона действующих масс. Определяется она следующей формулой:

$$\frac{x_i^2}{1 - x_i} n = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{(kT)^{3/2}}{\hbar^3} e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}},$$

где T — температура газа; ϵ_i — энергия ионизации атома; \hbar — квантовая постоянная.

Наряду с ионизацией в газе всегда происходит рекомбинация, т. е. соединение частиц противоположного знака заряда в нейтральные атомы и молекулы. Например, электрон, столкнувшись с однократно положительно заряженным ионом, может образовать нейтральный атом. В отличие от ионизации, которая требует затраты энергии, при рекомбинации энергии всегда выделяется; так, при рекомбинации иона с электроном освобождается энергия, равная энергии ионизации соответствующего атома.

Вероятность нейтрализации положительно заряженного иона отрицательно заряженной частицей тем больше, чем больше имеется отрицательно заряженных частиц. Поэтому число рекомбинаций dv , происходящих в единице объема за время dt , пропорционально произведению плотностей положительно и отрицательно заряженных частиц, а также времени, т. е.

$$dv = K_r n_+ n_- dt.$$

Входящий сюда множитель K_r называется коэффициентом рекомбинации. Он зависит от сортов рекомбинирующих частиц, их относительной скорости, а также от рода газа, его температуры и давления. Коэффициент рекомбинации положительных и отрицательных ионов в кислороде при температуре 273 К и давлении 760 мм рт. ст. составляет $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Такого же порядка K_r для воздуха. Коэффициент рекомбинации свободных электронов с положительными ионами примерно на четыре порядка меньше. (Например, коэффициент рекомбинации электронов с температурой 3000 К в аргоне при давлении 1 мм рт. ст. равен $2 \cdot 10^{-10} \text{ см}^3 \times \text{с}^{-1}$.)

Если заряды рекомбинирующих частиц равны по абсолютной величине, то при каждой рекомбинации исчезает и положительно и отрицательно заряженная частица. Это значит, что $dv = -dn_+ = -dn_-$, следовательно,

$$-\frac{dn_+}{dt} = -\frac{dn_-}{dt} = K_r n_+ n_-.$$

Если $n_+ = n_- = n$, то

$$-\frac{dn}{dt} = K_r n^2.$$

С помощью этого уравнения можно определить, как уменьшается в результате рекомбинации плотность заряженных частиц. Пусть в начальный момент времени плотность частиц равнялась n_0 . Тогда из приведенного уравнения следует, что их плотность к моменту времени t определяется из соотношения

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0} = K_r t,$$

откуда

$$n = \frac{n_0}{1 + K_r n_0 t}.$$

Мы видим, что плотность уменьшится вдвое за время

$$\tau_r = \frac{1}{K_r n_0}.$$

Эту величину можно рассматривать как время жизни иона, обусловленное рекомбинацией. Например, средняя продолжительность жизни ионов, возникающих в атмосфере под действием космических лучей при плотности ионов $n_0 \sim 10^3 \text{ см}^{-3}$, составляет около 10^3 с (коэффициент рекомбинации равен $10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$).

Установим связь коэффициента рекомбинации с электропроводностью слабо ионизованного извне газа. Пусть в газе, находящемся между плоскими электродами K и A , внешний источник создает каждую секунду в каждой единице объема n_0 пар заряженных частиц разного знака заряда. К электродам приложена разность потенциалов φ_a , так что в газе существует поле с напряженностью $E = \varphi_a/d$ (d — расстояние между электродами) (см. рис. 7.10).

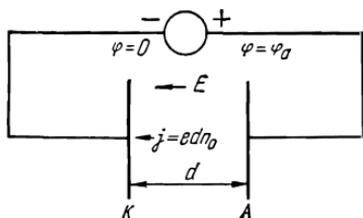


Рис. 7.10

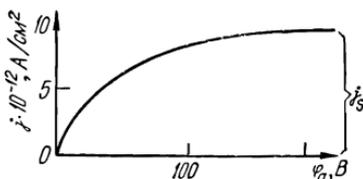


Рис. 7.11

Если поле достаточно велико, так что заряженные частицы успевают быстро достичь электродов, не подвергшись рекомбинации, то плотность тока $j = edn_0$, где e — заряд частицы. Эта величина не зависит от напряженности поля. Для справедливости данной формулы необходимо, чтобы время пролета частицы t_d было мало по сравнению с временем жизни τ_r частиц относительно рекомбинации. Время пролета определяется из уравнения $\frac{eE}{2m}t_d^2 = d$, откуда

$$t_d = \sqrt{\frac{2md}{eE}}$$

(m — масса частицы). Из условия $t_d \ll \tau_r$ находим

$$eE \gg \frac{2md}{\tau_r^2}.$$

Однако нельзя предполагать слишком большим поле, так как при этом будет происходить внутренняя ионизация газа заряженными частицами, которые приобрели большую энергию при движении в поле. К этому случаю мы вернемся в следующем параграфе, здесь же выясним, что происходит в слабом поле, когда $eE \ll \frac{2md}{\tau_r^2}$.

Рассматривая стационарный ток, предполагаем, что все постоянно возникающие под действием внешнего ионизатора новые

ионы исчезают вследствие рекомбинации. Так как в единицу времени исчезает $K_r n^2$ частиц, то получаем условие стационарности

$$K_r n^2 = \dot{n}_0,$$

из которого следует, что, в газе возникает постоянная плотность заряженных частиц:

$$n = \sqrt{\frac{\dot{n}_0}{K_r}}.$$

Поскольку скорости заряженных частиц,двигающихся в газе под действием электрического поля, равны:

$$u_+ = b_+ e E, \quad u_- = b_- e E,$$

где b_+ и b_- — подвижности, найдем суммарную плотность тока:

$$j = en(u_+ + u_-) = e^2(b_+ + b_-) \sqrt{\frac{\dot{n}_0}{K_r}} E.$$

Таким образом, в ионизованном извне газе в случае слабых полей ток пропорционален полю, т. е. справедлив закон Ома. Коэффициент электропроводности газа в этих условиях определяется выражением

$$\sigma = e^2(b_+ + b_-) \sqrt{\frac{\dot{n}_0}{K_r}}.$$

При больших полях возникает насыщение, т. е. плотность тока достигает максимума (равного $e d n_0$). Характер изменения плотности тока в слабо ионизованном извне газе при сравнительно малых полях показан на рис. 7.11, на котором виден постепенный переход от закона Ома к области насыщения. Отметим, что эта кривая относится к несамостоятельному газовому разряду, т. е. к разряду, который невозможен без внешнего источника ионизации.

§ 7.6. САМОСТОЯТЕЛЬНЫЙ РАЗРЯД

С ростом напряженности электрического поля возрастает энергия, приобретаемая заряженными частицами, которые движутся в газе. В конечном счете она может достичь энергии ионизации и превысить ее, и в этом случае не только внешний ионизатор, но и заряженные частицы будут ионизировать молекулы газа. Перейдем к изучению собственной ионизации газа.

Интенсивность ионизации газа в электрическом поле можно характеризовать числом пар ионов противоположного знака заряда, образуемых заряженными частицами (электронами и положительными ионами) на единице их пути вдоль поля. Эти числа называются ионизационными коэффициентами и обозначаются обычно в случае электронов через α и в случае ионов через β .

Установим связь этих коэффициентов с напряженностью поля. Для определенности рассмотрим электроны. Пусть l обозначает среднюю длину свободного пробега электрона в газе. Тогда вероятность того, что электрон пройдет вдоль поля без столкновений

расстояние, лежащее в интервале $(x, x + dx)$, определяется формулой

$$\omega(x) dx = e^{-\frac{x}{l}} \frac{dx}{l}.$$

Пройдя расстояние x вдоль поля, электрон приобретет, очевидно, энергию eEx , и если она равна или больше энергии ионизации ϵ_i , т. е. $eEx \geq \epsilon_i$, то в принципе электрон сможет ионизировать молекулу газа. Следовательно, расстояние, проходимое электроном вдоль поля без столкновений, должно быть не меньше ϵ_i/eE . Выражение для соответствующей вероятности имеет вид

$$\omega dx = \exp(-\epsilon_i/eEl) \frac{dx}{l}.$$

Умножив эту величину на вероятность ионизации газа ω_i электроном (данной энергии), можно найти число пар ионов, рождаемых электроном на участке пути dx . Таким образом, мы получим для α формулу вида

$$\alpha = \frac{\omega_i}{l} e^{-\frac{\epsilon_i}{eEl}}.$$

Длина пробега l обратно пропорциональна давлению p . Поэтому формулу для α можно переписать так:

$$\frac{\alpha}{p} = Ae^{-pB/E},$$

где A и B — некоторые характерные для газа константы.

Пройдя путь dx , электрон, по определению, рождает αdx пар заряженных частиц, т. е. αdx положительных ионов и столько же электронов. Эти электроны, двигаясь в поле, в свою очередь рожают новые электроны, так что число электронов в газе лавинообразно возрастает. Если число электронов на расстоянии x от электрода (катода) равно $N_e(x)$, то увеличение их числа на участке dx равно

$$dN_e(x) = N_e(x) \alpha dx,$$

откуда

$$N_e(x) = N_0 e^{\alpha x},$$

где N_0 — число электронов на катоде (при $x = 0$). Эта формула и определяет закон лавинообразного нарастания электронов в газе благодаря последовательным процессам ионизации.

Если на расстоянии d от катода расположен анод, то число электронов на аноде равно $N_0 e^{\alpha d}$. Отсюда следует, что если из катода выходит электронный ток I_0 (возникающий, например, в результате освещения соответствующим светом или нагревания катода), то на аноде

$$I_a = I_0 e^{\alpha d}.$$

Итак, каждый освобожденный электрон на катоде рождает в газовом промежутке толщиной d между катодом и анодом всего $e^{\alpha d}$

электронов; число рожденных положительных ионов равно, очевидно, $e^{\alpha d} - 1$. Эти ионы двигаются в обратном направлении по сравнению с электронами, т. е. к катоду. По пути они ионизируют молекулы газа и, кроме того, придя на катод, выбивают из него электроны.

Выясним, как влияет на лавину электронов освобождение электронов из катода при ударах ионов. Пусть ион, попавший на катод, выбивает из катода в среднем γ электронов. Каждый электрон, дойдя до анода, создает $e^{\alpha d}$ электронов и $e^{\alpha d} - 1$ ионов. Последние, достигая катода, создают $\gamma(e^{\alpha d} - 1)$ электронов. Эти электроны, в свою очередь, создают $\gamma(e^{\alpha d} - 1)e^{\alpha d}$ электронов и т. д. Таким образом, из одного начального электрона на катоде всего на аноде возникает следующее количество электронов:

$$z = e^{\alpha d} + (e^{\alpha d} - 1)\gamma e^{\alpha d} + (e^{\alpha d} - 1)^2 \gamma^2 e^{\alpha d} + \dots$$

При $\gamma(e^{\alpha d} - 1) < 1$ этот ряд сходится и дает

$$z = \frac{e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}.$$

Из приведенной формулы следует, что если первичный ток из катода равен I_0 , то

$$I_a = I_0 \frac{e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}.$$

Данная формула позволяет понять переход несамостоятельного разряда в самостоятельный, т. е. в разряд, существующий в отсутствие внешних источников ионизации. Для того чтобы определить конечное значение тока I_a при бесконечно малом первичном токе I_0 , нужно приравнять нулю знаменатель выражения для I_a :

$$1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1) = 0.$$

Это соотношение и представляет собой условие возникновения самостоятельного разряда, когда сам разряд производит необходимые для его поддержания заряженные частицы. Частицы появляются в результате ионизации электронами молекул газа и выбивания ионами электронов из катода. Переписывая указанное условие в виде

$$\alpha d = \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)$$

и подставляя сюда найденное выше выражение для α , получаем

$$A p d e^{-pB/E} = \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Отсюда можно найти критическое значение поля, при котором начинается самостоятельный разряд. Замечая, что $E = \varphi_a/d$, где

φ_a — потенциал анода по отношению к катоду, для критического анодного потенциала получаем выражение

$$\varphi_a^{(c)} = B \frac{pd}{\ln(pd) + \delta},$$

где

$$\delta = \ln \frac{A}{\ln(1 + 1/\gamma)}.$$

Заметим, что для различных газовых промежутков, но при одинаковом произведении давления на длину промежутка потенциал зажигания одинаков (газ постоянен). Например, для воздуха при

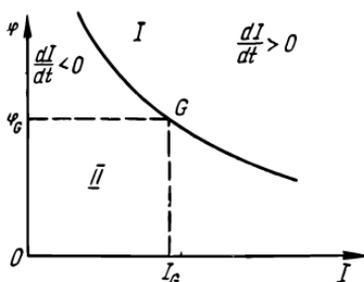


Рис. 7.12

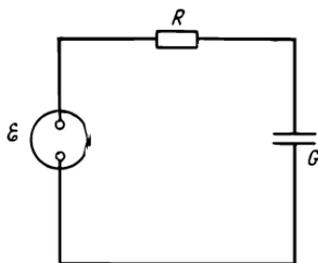


Рис. 7.13

$pd = 0,6$ см · мм рт. ст. $\varphi_a^{(c)} = 330$ В, для кислорода при $pd = 0,7$ см · мм рт. ст. $\varphi_a^{(c)} = 450$ В. Замечательно, что потенциал зажигания имеет минимум при некотором значении произведения давления на расстояние между электродами (он достигается при $pd \approx 2,7 \ln(1 + 1/\gamma)/A$).

Не следует считать, что при самостоятельном разряде ток становится бесконечно большим. В действительности, если учитывать различные потери заряженных частиц, он всегда конечен. Более того, самостоятельный разряд может быть стационарным разрядом, для которого характерна определенная связь между силой тока и приложенной к газовому промежутку разностью потенциалов — вольт-амперная характеристика разряда. Типичная вольт-амперная характеристика разряда изображена на рис. 7.12. Если разряду соответствует некоторая точка G характеристики это значит, что процессы возникновения новых и уничтожения старых частиц компенсируют друг друга, так что ток I_G , соответствующий напряжению φ_a , не изменяется с течением времени. Иными словами, плоскость (φ, I) , которую можно назвать плоскостью режимов разряда, разбивается вольт-амперной характеристикой на две области (I и II), которым соответствуют неравновесные режимы, причем области I соответствует нарастание разрядного тока, а области II — спадание тока. Вольт-амперная характеристика, разграничивающая обе области, соответствует равновесным режимам разряда.

Пользуясь этим свойством вольт-амперной характеристики, можно решить вопрос об устойчивости режима работы электриче-

ской цепи, содержащей газовый промежуток. Рассмотрим, например, цепь, изображенную на рис. 7.13. Она состоит из источника постоянного тока с ЭДС (\mathcal{E}), газового промежутка G и обычного сопротивления R . Если в цепи течет ток I , то, очевидно, разность потенциалов на G $U = \mathcal{E} - RI$. Однако разность потенциалов является определенной функцией тока, $U = f(I)$, соответствующей вольт-амперной характеристике разрядного промежутка. Поэтому сила тока в цепи должна определяться из уравнения

$$f(I) = \mathcal{E} - IR.$$

Решение этого уравнения удобно находить графически, проведя на плоскости (U, I) вольт-амперную характеристику $U = f(I)$ и прямую

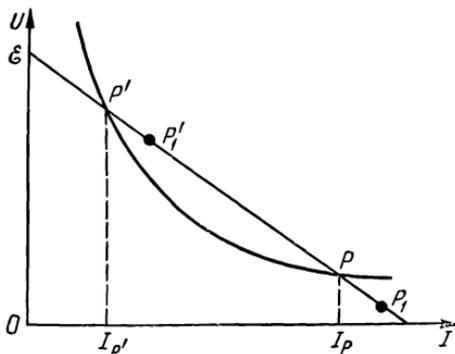


Рис. 7.14

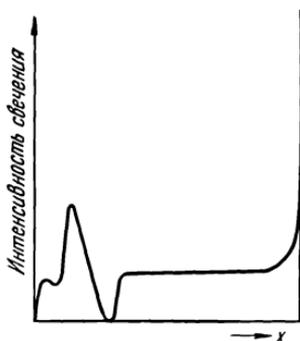


Рис. 7.15

$U = \mathcal{E} - IR$. Типичный график изображен на рис. 7.14, где прямая $U = \mathcal{E} - IR$ пересекает характеристику в двух точках: P и P' . Возникает вопрос: какой ток течет в цепи: I_P или $I_{P'}$? Легко видеть, что в цепи течет ток I_P , так как только точке P соответствует устойчивый режим. Действительно, представим, что в режиме P' ток немного увеличивается и мы переходим в точку P_1 (на прямой $\mathcal{E} = U - IR$). Но эта точка лежит в области I плоскости режимов (U, I), в которой $dI/dt > 0$; иными словами, из точки P_1 мы не вернемся в точку P' , а уйдем от нее еще дальше. Напротив точке P соответствует устойчивый режим, так как внезапное увеличение тока и переход в точку P_1 соответствует переходу в область II , где $dI/dt < 0$. Поэтому система из состояния P_1 вернется обратно в состояние P .

Характер газового разряда существенно зависит от силы тока. При очень малых токах ($I \lesssim 10^{-4}$ А) разряд происходит практически без свечения. Поэтому он называется темным. При больших токах постепенно возникают световые явления, и разряд называется тлеющим. Основные физические процессы здесь те же, что и в темном разряде, т. е. объемная ионизация электронами и выбивание электронов ионами из катода. Типичным для разряда является наличие светящейся области на некотором расстоянии от катода (катодная пленка или катодный слой). Перед катодной пленкой расположена темная область (астоново темное пространство), а сразу за пленкой — темное пространство (катодное темное пространство). Такая картина просто объясняется. Действи-

тельно, испускаемые катодом электроны (вследствие бомбардировки катода ионами) имеют при выходе из катода очень малую скорость, поэтому они не могут сразу ни ионизовать, ни возбуждать атомы газа. В результате в астоновом темном пространстве нет свечения. Но в этой области электроны, двигаясь в поле, набирают достаточную энергию, так что в катодной пленке становится

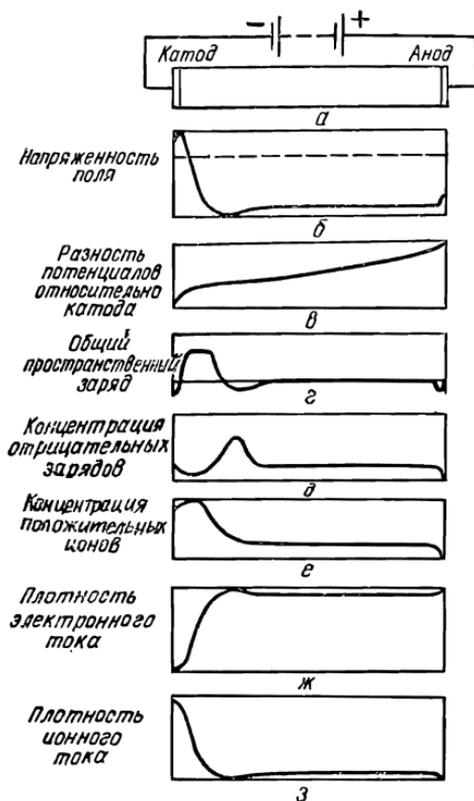


Рис. 7.16

возможным интенсивное возбуждение атомов, сопровождающееся излучением света. На катодную пленку приходится максимум вероятности возбуждения, поэтому за катодной пленкой, где энергия электронов еще больше, свечение становится значительно меньше, чем в катодной пленке (изменение интенсивности свечения вдоль тлеющего разряда графически показано на рис. 7.15).

С ростом тока существенной становится роль объемного заряда. На рис. 7.16, а приведено распределение плотности объемного заряда вдоль тлеющего разряда, на рис. 7.16, б, в — распределение потенциала и поля, на рис. 7.16, д, е — распределение концентраций частиц и токов. Мы видим, что потенциал резко увеличивается вблизи катода, и поэтому можно ввести понятие катодного падения потенциал (соответствующего области с $\rho >$

> 0). При переходе к еще большим токам (порядка нескольких амперов и более) в игру вступает новый фактор — ионы, бомбардирующие катод и разогревающие его настолько, что становится существенной термоэлектронная эмиссия электронов из катода. При этом катодное падение потенциала становится очень малым. Такая форма разряда называется дуговой.

Газовый разряд находит колоссальное количество чисто физических и технических применений: ионизационная камера; газонаполненные фотоэлементы; счетчики с острием, служащие для измерения излучений; выпрямители (ртутные и железные) для преобразования тока; многочисленные источники света, использующие газовый разряд; различные сварочные дуги; наконец, разряды применяются в качестве предохранителей и выключателей.

§ 8.1. СИЛА ЛОРЕНЦА

Электрическое поле и электрический заряд связаны между собой двояко: с одной стороны, электрическое поле порождается электрическим зарядом, а с другой — оказывает действие на электрический заряд.

Но не только электрическое поле связано таким образом с электрическим зарядом. Существует еще один вид поля — магнитное поле, которое так же, как и электрическое, создается электрическим зарядом и воздействует на него. Других полей, кроме электрического и магнитного, которые были бы так связаны с электрическим зарядом, в природе не существует.

Между электрическим и магнитным полями имеется, однако, важное различие: если электрическое поле создается электрическим зарядом всегда, независимо от того, покоится или движется заряд, то магнитное поле создается только движущимся зарядом. Если электрическое поле воздействует на электрический заряд всегда, независимо от того, покоится или движется заряд, то магнитное поле действует только на движущийся заряд.

Но абсолютного покоя и абсолютного движения не существует — движение всегда относительно. Если какой-либо заряд покоится в некоторой системе отсчета, то в ней он будет создавать только электрическое поле; однако если перейти в систему отсчета, по отношению к которой заряд движется, то в ней этот заряд будет создавать и электрическое и магнитное поля.

Аналогичным образом при движении заряда в магнитном поле он испытывает со стороны этого поля некоторую силу. Однако если перейти в систему отсчета, в которой заряд покоится, то эта сила исчезает; но заряд не станет свободным — на него начнет действовать электрическое поле, которое существует в данной системе отсчета. Это электрическое поле зависит от исходного магнитного поля и относительной скорости обеих систем отсчета.

Из изложенного выше можно сделать общий вывод, заключающийся в том, что магнитное поле тесно связано с электрическим полем. И действительно, мы убедимся далее, что электрическое и магнитное поля органически связаны между собой и образуют единое целое — электромагнитное поле с двумя составными частями или компонентами: полем электрическим и полем магнитным. Оба поля являются векторными, и так же, как электрическое, магнитное поле может изменяться от точки к точке и зависеть от времени. Обозначим напряженность магнитного поля через \mathbf{B} и назовем этот вектор вектором магнитной индукции. Линии, касатель-

ные к которым в каждой точке направлены вдоль \mathbf{B} , называются магнитными силовыми линиями.

Опыт показывает, что сила \mathbf{f} , испытываемая зарядом e , который движется в магнитном поле со скоростью \mathbf{v} , пропорциональна e , направлена перпендикулярно \mathbf{v} , и, кроме того, пропорциональна v . Отсюда однозначно следует, что выражение для силы должно иметь структуру векторного произведения скорости частицы \mathbf{v} и магнитной индукции \mathbf{B} . Мы принимаем, что

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}],$$

где c — скорость света в вакууме, $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с. При таком выборе константы перед векторным произведением поля \mathbf{E} и \mathbf{B}

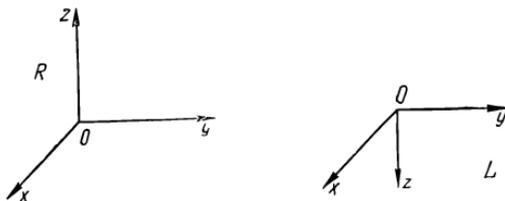


Рис. 8.1

будут иметь одинаковую размерность:

$$[B] = [E] = L^{-1/2} T^{-1} M^{1/2}$$

и измеряться в одинаковых единицах: $\text{см}^{-1/2} \text{с}^{-1} \text{г}^{1/2}$. Построенная таким образом система единиц называется гауссовой (ГС).

Если на заряд e действуют одновременно и электрическое и электрическое поля, то суммарная сила, действующая на заряд, определяется формулой

$$\mathbf{f} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right).$$

Эта сила называется силой Лоренца. Из формулы для \mathbf{f} следует, что, хотя и электрическое и магнитное поля являются векторными полями, векторная природа их не одинакова. Чтобы разъяснить это важное обстоятельство, вспомним определение векторного произведения, согласно которому векторное произведение ортов \mathbf{i} и \mathbf{j} (вдоль осей x и y) всегда равно орту \mathbf{k} вдоль оси z независимо от того, является ли система координат правовинтовой или левовинтовой (рис. 8.1). Поэтому векторные произведения двух обычных векторов в правовинтовой (R) и левовинтовой (L) системах имеют прямо противоположные направления.

Ясно, что направления таких векторов, как смещение, скорость, ускорение, сила, а также напряженность электрического поля, не зависят от того, пользуемся ли мы R - или L -системой. Это значит, что если произвести пространственное отражение, при котором изменяются на обратные направления всех трех осей координат, то проекции векторов смещения, скорости, ускорения, силы, напряженности поля на новые оси также изменят свой знак. Такие векторы называются полярными.

Но пространственное отражение представляет собой переход от R - к L -системе, при котором проекции на оси координат векторного произведения обычных, т. е. полярных, векторов не изменяют, а сохраняют свой знак. Отсюда следует, что если бы магнитная индукция \mathbf{B} имела такую же векторную природу, как и напряженность электрического поля \mathbf{E} , т. е. вектор \mathbf{B} был бы полярным, то взаимная ориентация двух составляющих силы \mathbf{f} , электрической силы $e\mathbf{E}$ и магнитной силы $\frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$ изменялась бы при переходе от R - к L -системе. Такое изменение ориентации физически абсурдно. Следовательно, вектор \mathbf{B} не может быть полярным. Иными словами, при пространственном отражении проекции вектора \mathbf{B} , в отличие от вектора \mathbf{E} , не должны изменяться. Поэтому \mathbf{B} следует рассматривать скорее как псевдовектор. Его называют аксиальным вектором.

Итак, напряженность электрического поля есть полярный, а напряженность магнитного поля — аксиальный векторы. Векторное произведение двух полярных или двух аксиальных векторов всегда дает аксиальный вектор; векторное произведение полярного и аксиального векторов представляет собой полярный вектор. Если какая-либо величина является полярным вектором (например, сила \mathbf{f}), то ее нельзя представить в виде суммы полярного и аксиального векторов; все слагаемые такой величины должны быть полярными векторами.

§ 8.2. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Уравнение движения заряженной частицы в заданном магнитном поле имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

где m — масса частицы. Из этого уравнения прежде всего следует, что магнитное поле не может изменить кинетической энергии частицы. Действительно, умножим скалярно обе части уравнения на вектор скорости \mathbf{v} . Справа мы получим, очевидно нуль; поэтому $m\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$; следовательно, кинетическая энергия частицы сохраняется:

$$\frac{mv^2}{2} = \text{const.}$$

Ясно, что движение частицы с зарядом e в поле \mathbf{B} происходит точно так же, как движение частицы с зарядом $-e$ в поле $-\mathbf{B}$.

Рассмотрим подробнее движение в постоянном и однородном магнитном поле. Очевидно, проекция скорости частицы v_{\parallel} вдоль \mathbf{B} не изменяется; а так как не изменяется квадрат ее скорости, то будет сохраняться и квадрат поперечной составляющей скорости частицы v_{\perp}^2 (относительно \mathbf{B}):

$$v_{\parallel} = \text{const}, \quad v_{\perp}^2 = \text{const.}$$

Проекция траектории частицы на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B} , представляет собой окружность. Действительно, ускорение проекции частицы на эту плоскость равно v_{\perp}^2/r , где r — радиус кривизны проекции траектории. Поэтому уравнение движения проекции имеет вид

$$m \frac{v_{\perp}^2}{r} = \frac{e}{c} v_{\perp} B,$$

откуда

$$r = c \frac{mv_{\perp}}{eB}.$$

Так как r — константа, то проекция траектории действительно представляет собой окружность. Величина r называется ларморовым радиусом. Вдоль поля движение происходит с постоянной скоростью v_{\parallel} ; поэтому траекторией частиц при $v_{\parallel} \neq 0$ будет винтовая линия, а при $v_{\parallel} = 0$ — окружность с ларморовым радиусом.

Ларморов радиус пропорционален поперечному импульсу частицы mv_{\perp} и обратно пропорционален индукции B . Если частица движется в известном поле B и мы можем измерить радиус кривизны ее траектории, то по приведенной формуле можно найти поперечный импульс частицы. Этим методом широко пользуются в физике элементарных частиц. Напротив, если известны mv_{\perp} и r , то можно определить величину индукции B . Это значит, что сила Лоренца позволяет в принципе определять поле B .

Разделив $2\pi r$ на v_{\perp} , найдем период обращения частицы вокруг магнитного поля:

$$T_c = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = 2\pi \frac{mc}{eB}.$$

Эта величина не зависит ни от скорости, ни от радиуса окружности, описываемой заряженной частицей. (Вывод справедлив только в том случае, если скорость частицы значительно меньше c .) Зная T_c , определим круговую частоту обращения частицы:

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{eB}{mc}.$$

Эта величина называется циклотронной частотой. Она пропорциональна магнитной индукции и обратно пропорциональна массе частицы. Умножив T_c на v_{\parallel} , найдем шаг винтовой линии, описываемой частицей:

$$h = T_c v_{\parallel} = 2\pi \frac{mc}{eB} v_{\parallel}.$$

§ 8.3. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Рассмотрим движение заряженной частицы под одновременным действием электрического и магнитного полей. Поля предполагаем постоянными и однородными.

Разобьем уравнение движения частицы

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$$

на два уравнения: для параллельной v_{\parallel} и перпендикулярной v_{\perp} (относительно \mathbf{B}) составляющих скорости \mathbf{v} . Так как $[\mathbf{v}\mathbf{B}] \perp \mathbf{B}$, то, очевидно,

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = eE_{\parallel}, \quad m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = e\mathbf{E}_{\perp} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{B}],$$

где E_{\parallel} и \mathbf{E}_{\perp} — параллельная и перпендикулярная (относительно \mathbf{B}) составляющие напряженности поля \mathbf{E} . Первое из этих уравнений показывает, что вдоль магнитного поля под действием электрического поля E_{\parallel} происходит ускоренное движение с ускорением eE_{\parallel}/m . Чтобы определить \mathbf{v}_{\perp} , перейдем к новой системе отсчета, двигающейся с некоторой постоянной скоростью \mathbf{v}_g относительно исходной системы, и постараемся выбрать \mathbf{v}_g так, чтобы упростить уравнение движения. Обозначая скорость частицы в новой системе через \mathbf{v}' , имеем $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}'$ и, следовательно,

$$m \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_g + \mathbf{v}') = e\mathbf{E}_{\perp} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_g + \mathbf{v}', \mathbf{B}]$$

или

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E}_{\perp} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_g\mathbf{B}] + \frac{e}{c} [\mathbf{v}'\mathbf{B}].$$

Выберем теперь \mathbf{v}_g таким образом, чтобы выполнялось равенство $e\mathbf{E}_{\perp} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_g\mathbf{B}] = 0$, откуда

$$\mathbf{v}_g = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}_{\perp}\mathbf{B}] = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}].$$

Тогда уравнение для определения неизвестной \mathbf{v}' примет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}'\mathbf{B}].$$

Поскольку вектор \mathbf{v}' , так же как и \mathbf{v}_{\perp} , перпендикулярен \mathbf{B} , мы приходим к исследованному уже случаю движения в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} .

Следовательно, движение в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} , состоит из прямолинейного и равномерного движения со скоростью

\mathbf{v}_g и криволинейного движения с циклотронной частотой ω_c . Наложение этих движений приводит к движению по так называемой трохойде, изображенной на рис. 8.2 ($a - v'_0 > v_g$, где v'_0 — начальное значение v' ; $b - v'_0 < v_g$; $b - v'_0 = v_g$, при этом трохойда переходит в циклоиду).

Скорость \mathbf{v}_g называется скоростью дрейфа (точнее, электрического дрейфа). Заметим, что формулой для \mathbf{v}_g можно пользоваться только в том случае, когда $E_{\perp} \ll B$, так как в противном случае дрейфовая скорость может быть сравнимой с c или даже превосходить c , а используемое нами уравнение движения справедливо

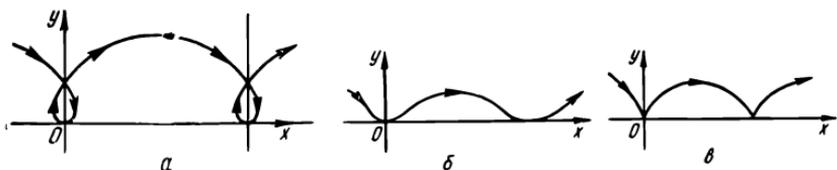


Рис. 8.2

лишь при $v \ll c$. При $v \sim c$ нужно пользоваться релятивистской механикой, согласно которой при $E_{\perp} \geq B$ поперечный импульс частицы неограниченно возрастает со временем.

§ 8.4. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

Как мы уже указывали, магнитное поле воздействует на движущийся электрический заряд и одновременно создается движущимся электрическим зарядом. Одну сторону этой связи между зарядом и магнитным полем мы рассмотрели в предыдущих параграфах. Переходя теперь к изучению другой стороны, предварительно заметим, что так как электрический ток — это совокупность движущихся электрических зарядов, то естественно, что электрический ток должен создавать магнитное поле. Определить это поле легче, чем поле, создаваемое отдельным зарядом. Поэтому мы сперва разясним, как определить магнитное поле, создаваемое постоянным электрическим током.

Если проткнуть лист бумаги проводом, по которому течет ток I , и насыпать на бумагу железные опилки, то мы увидим, что они располагаются по концентрическим окружностям с центром в точке пересечения провода и бумаги. Это значит, что магнитные силовые линии магнитного поля, создаваемого прямым током, представляют собой окружности, центры которых находятся на проводе. В отличие от электростатического поля, силовые линии которого не могут быть замкнутыми, силовые линии магнитного поля замкнуты.

Напряженность магнитного поля, создаваемого прямым током в какой-либо точке \mathcal{P} , пропорциональна силе тока и обратно пропорциональна расстоянию r от точки \mathcal{P} до проводника (рис. 8.3). Поэтому произведение длины силовой линии $2\pi r$ на значение маг-

нитной индукции B есть константа, определяющаяся только силой тока I . В гауссовой системе единиц эта константа равна $\frac{4\pi}{c} I$, т. е.

$$2\pi r B = \frac{4\pi}{c} I,$$

откуда

$$B = \frac{2I}{cr}.$$

Направление поля связано с направлением тока так же, как связаны между собой направления вращения и поступательного дви-

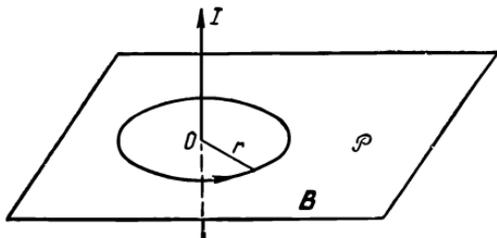


Рис. 8.3

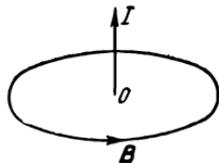


Рис. 8.4

жения винта с правой нарезкой (рис. 8.4). Соотношение $2\pi r B = \frac{4\pi}{c} I$ можно записать в иной форме:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I.$$

Здесь интегрирование совершается вдоль контура, совпадающего с силовой линией. В таком виде это соотношение аналогично теореме Гаусса:

$$\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q,$$

связывающей поток электрического поля через замкнутую поверхность S с зарядом q , находящимся внутри поверхности. Как мы знаем, вид этой поверхности не существен: она может быть произвольной. Аналогичным образом оказывается, что и контур в интеграле $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$ не обязательно должен совпадать с силовой линией.

Контур может быть произвольным, лишь бы он охватывал ток I . Более того, контур \mathcal{L} могут пронизывать много проводников, по которым текут токи I_1, I_2, \dots Тогда

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum_n (\pm I_n),$$

где суммирование распространяется на все токи, причем токи, направления которых связаны с направлением обхода контура

правилом правого винта, берутся со знаком плюс, а токи, текущие в обратном направлении, — со знаком минус. Интеграл от \mathbf{B} по замкнутому контуру называется циркуляцией магнитного поля. Значит, циркуляция магнитного поля вдоль произвольного контура равна умноженной на $\frac{4\pi}{c}$ алгебраической сумме сил токов, пронизывающих контур. Это соотношение называется законом полного тока (точнее, законом полного тока для постоянных полей).

Проиллюстрируем закон полного тока на примере соленоида, т. е. согнутого в виде спирали проводника, по которому протекает электрический ток. На рис. 8.5 изображен круговой соленоид, в котором витки спирали равномерно намотаны на тор. При тесной намотке поле соленоида сосредоточено в основном внутри соле-

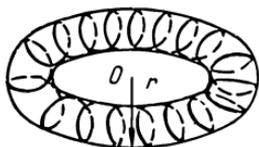


Рис. 8.5

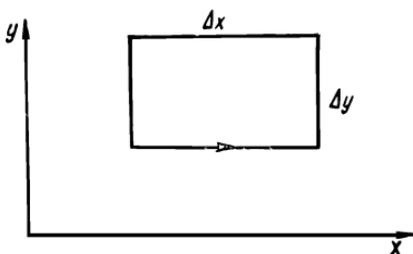


Рис. 8.6

ноида. Силовыми линиями будут, очевидно, окружности с центром в центре тора O . Циркуляция поля вдоль окружности радиуса r равна $2\pi rB$. Согласно закону полного тока ее следует приравнять $\frac{4\pi}{c} IN$, где N — полное число витков соленоида, откуда

$$B = \frac{2IN}{cr}.$$

Таким образом, поле в соленоиде обратно пропорционально радиусу кривизны силовой линии.

В случае достаточно тонкого соленоида величина r изменяется в небольших пределах и поле B будет практически однородным. Его можно представить в виде

$$B = \frac{4\pi}{c} In,$$

где n — число витков, приходящееся на единицу длины соленоида. В таком виде формула пригодна и для длинного прямого соленоида.

§ 8.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАКОНА ПОЛНОГО ТОКА. ЗАКОН БИО — САВАРА

В § 8.4, используя закон полного тока, мы нашли магнитное поле в двух простейших случаях — прямого провода и соленоида. Такое непосредственное применение закона полного тока воз-

можно благодаря тому, что нам была известна симметрия магнитных силовых линий. Однако в общем случае произвольных токов непосредственное применение закона полного тока становится невозможным. Поэтому закону полного тока необходимо придать такую форму, которая не была бы связана с конкретным видом контура. Чтобы понять, как это сделать, напомним предварительно аналогичную ситуацию с законом Гаусса.

Как мы знаем, поток векторного поля через замкнутую поверхность, окружающую бесконечно малый объем, пропорционален величине этого объема. Отношение потока к объему определяет важную характеристику поля — дивергенцию поля.

Аналогичным образом циркуляция векторного поля вдоль контура, охватывающего бесконечно малую поверхность, пропорциональна площади этой поверхности, а отношение циркуляции к площади определяет новую важную характеристику поля — вихрь, или ротор, поля. Точнее, если контур \mathcal{L} охватывает бесконечно малую площадь ΔS , то циркуляция поля вдоль \mathcal{L} имеет вид скалярного произведения вектора площади ΔS на некоторый вектор, который и называется вихрем, или ротором, поля и обозначается символом rot :

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \text{rot } \mathbf{B} \cdot \Delta S.$$

Подчеркнем, что ориентация площади, т. е. направление вектора ΔS , связано с направлением обхода контура \mathcal{L} правилом правого винта.

Если, в частности, выбрать \mathcal{L} в виде прямоугольного контура, лежащего в плоскости xy (рис. 8.6), со сторонами Δx и Δy , то легко проверить, что

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y.$$

Однако в этом случае площадь ΔS ориентирована вдоль оси z . Поэтому

$$(\text{rot } \mathbf{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}.$$

Аналогично записываются остальные две проекции вектора $\text{rot } \mathbf{B}$. Значит, этот вектор можно представить символически в виде векторного произведения оператора

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

(он называется наблой) и поля \mathbf{B} :

$$\text{rot } \mathbf{B} = [\nabla \mathbf{B}].$$

Мы рассмотрели контур, ограничивающий бесконечно малую поверхность. Но если поверхность конечная, то ее можно разбить

на бесконечно малые участки и, используя определение ротора, получить соотношение

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

где \mathcal{L} — контур, ограничивающий поверхность S . Это важное соотношение называется формулой Стокса.

Вернемся теперь к закону полного тока и применим его к бесконечно малому контуру, ограничивающему бесконечно малую площадь ΔS в сечении проводника. Через эту площадь проходит ток $\Delta S \mathbf{j}_t$, где \mathbf{j}_t — вектор плотности тока. Так как магнитное поле создается всеми движущимися зарядами, то под \mathbf{j}_t мы должны понимать общую плотность потока движущихся зарядов, складывающуюся из плотности тока, обусловленного свободными зарядами, т. е. плотности тока проводимости \mathbf{j} , и плотности тока, обусловленного связанными зарядами, \mathbf{j}_b , т. е. плотности молекулярного тока:

$$\mathbf{j}_t = \mathbf{j} + \mathbf{j}_b.$$

Плотность тока проводимости определяется уже известным нам законом Ома; определение же плотности тока связанных зарядов более сложно, и мы вернемся к нему в гл. 11 и 12. Там мы, в частности, убедимся, что для постоянных полей полный ток связанных зарядов через произвольное сечение тела равен нулю.

Итак, вводя пока формально \mathbf{j}_b , можем утверждать, что согласно закону полного тока

$$\text{rot } \mathbf{B} \Delta S = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t \Delta S.$$

Так как вектор ΔS произволен, то

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t.$$

Это уравнение, связывающее ротор магнитного поля с полной плотностью тока \mathbf{j}_t , и представляет собой дифференциальную форму закона полного тока в случае постоянных полей.

Однако закона полного тока даже в дифференциальной форме недостаточно для однозначного определения магнитного поля. Для определения любого векторного поля нужно знать две его основные характеристики: дивергенцию и ротор. Поэтому нам нужно еще найти дивергенцию магнитного поля, или поток магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность.

Поток электрического поля через произвольную замкнутую поверхность определяется находящимся внутри нее суммарным электрическим зарядом. Поэтому естественно, что поток магнитного поля — поток магнитной индукции — через замкнутую поверхность должен определяться содержащимся внутри нее суммарным «магнитным зарядом». Но магнитных зарядов в природе не суще-

ствуется, следовательно, поток магнитной индукции \mathbf{B} через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0,$$

а это означает, что дивергенция магнитной индукции равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Итак, мы имеем два основных уравнения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

которые полностью определяют магнитное поле, порождаемое любыми постоянными токами.

Подобно тому как электростатическое поле \mathbf{E} можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции — электростатического потенциала φ , $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, так и магнитную индукцию \mathbf{B} можно представить в виде ротора некоторой векторной функции, которая называется векторным потенциалом и обозначается через \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Как мы знаем, потенциал $d\varphi$, порождаемый зарядом $dq = \rho dV$, определяется формулой

$$d\varphi = \frac{dq}{r} = \frac{\rho dV}{r},$$

где r — расстояние между элементом объема dV и точкой, в которой ищется потенциал; поэтому

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{r}.$$

Аналогично можно записать решение уравнения Пуассона для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_t dV}{r},$$

где r — расстояние между элементом объема dV (с плотностью тока \mathbf{j}_t) и точкой, в которой ищется векторный потенциал \mathbf{A} . Однако векторный потенциал вводится при этом неоднозначно. Действительно, справедливо тождество

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi = 0,$$

где χ — произвольная скалярная функция координат. Поэтому ясно, что векторные потенциалы \mathbf{A} и $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi$ приводят к одному и тому же магнитному полю. Этим обстоятельством можно воспользоваться для того, чтобы наложить на функцию $\mathbf{A}(x, y, z)$ какое-либо ограничение. Удобно наложить на \mathbf{A} условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Поскольку $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t$,

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t.$$

Так как

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

и $\text{div } \mathbf{A} = 0$, то

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t.$$

Это уравнение для определения \mathbf{A} аналогично уравнению Пуассона для определения электростатического потенциала:

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho.$$

Воспользуемся приведенной формулой для определения магнитного поля, создаваемого постоянным током I , протекающим по некоторому замкнутому линейному (т. е. очень тонкому) проводнику. Интегрирование при этом должно производиться по объему, занимаемому проводником, и поэтому элемент объема в формуле для \mathbf{A} можно представить в виде $dV = dS dl$, где dS — элемент площади сечения и dl — элемент длины проводника. Выполним сперва интегрирование по площади сечения проводника S . Поскольку расстояние r от точки наблюдения до всех точек сечения S практически одинаково, мы придем к выражению $\frac{1}{r} \int \mathbf{j}_t dS$. Но как уже

указывалось, $\int \mathbf{j}_t dS = 0$; поэтому получим $\frac{1}{r} I \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор вдоль нормали к S , т. е. вдоль dl . Остается выполнить интегрирование по dl :

$$\mathbf{A} = \frac{I}{c} \oint \frac{dl}{r}.$$

Интегрирование производится вдоль токового контура в направлении протекающего тока; r обозначает расстояние от dl до точки, в которой ищется \mathbf{A} .

Теперь найдем \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{I}{c} \text{rot} \oint \frac{dl}{r}.$$

Операции дифференцирования, содержащиеся в rot , должны производиться по координатам точки, в которой ищется поле \mathbf{B} . Поэтому rot можно внести под знак интеграла и считать dl постоянным вектором. Но в случае постоянного вектора \mathbf{a} справедлива, как легко проверить, формула

$$\text{rot} \frac{\mathbf{a}}{r} = \frac{[\mathbf{a}\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Поэтому

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c} \oint \frac{[d\mathbf{l}\mathbf{r}]}{r^3},$$

где интегрирование совершается вдоль токового контура. Эта формула, определяющая поле тока I в вакууме, выражает закон Био—Савара, согласно которому поле, создаваемое элементом токового контура,

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{[d\mathbf{l}\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Оно направлено перпендикулярно плоскости ($d\mathbf{l}$, \mathbf{r}), причем так, что если вращать винт с правой нарезкой от $d\mathbf{l}$ к \mathbf{r} , то его посту-

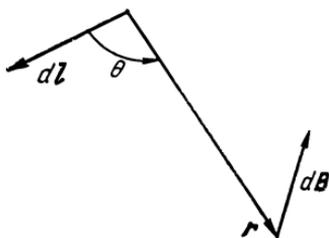


Рис. 8.7

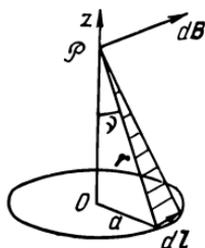


Рис. 8.8

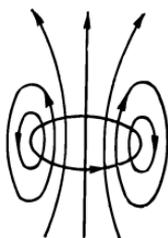


Рис. 8.9

пательное движение будет направлено по $d\mathbf{B}$. Абсолютное значение поля определяется формулой

$$dB = \frac{I}{c} \frac{dl \sin \theta}{r^2},$$

где θ — угол между $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} (рис. 8.7).

§ 8.6. ПОЛЕ КРУГОВОГО ТОКА. МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ТОКА

Применим закон Био—Савара для определения магнитного поля, создаваемого круговым током (рис. 8.8). Из соображений симметрии ясно, что во всех точках, лежащих на линии, перпендикулярной плоскости кругового тока и проходящей через центр круга O , магнитное поле направлено вдоль этой линии (причем вверх, если ток течет против часовой стрелки). Следовательно, данная линия является силовой линией. Она начинается и кончается на бесконечности. Другие силовые линии изображены на рис. 8.9. Все они являются замкнутыми линиями, охватывающими токовое кольцо.

Определить магнитное поле кругового тока в произвольной точке довольно сложно, и мы ограничимся здесь вычислением \mathbf{B} только на линии Oz . Согласно закону Био—Савара поле $d\mathbf{B}$, создаваемое элементом проводника $d\mathbf{l}$ в точке \mathcal{P} , перпендикулярно

плоскости ($d\mathbf{l}$, \mathbf{r}) (на рис. 8.8 она заштрихована), а так как $\mathbf{r} \perp d\mathbf{l}$, то

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{d\mathbf{l}}{r^2}.$$

Результирующее поле в точке \mathcal{P} направлено вдоль $O\mathcal{P}$; поэтому нужно найти проекцию $d\mathbf{B}$ на ось Oz и потом сложить все проекции, соответствующие различным элементам $d\mathbf{l}$ токового контура. Проекция dB_z равна, очевидно, $dB \sin \vartheta = \frac{I}{c} \frac{dl}{r^2} \sin \vartheta$, а поскольку угол ϑ одинаков для всех элементов контура $d\mathbf{l}$, результирующее поле определяется формулой

$$B = \frac{I}{c} \frac{2\pi a}{r^2} \sin \vartheta,$$

где a — радиус токового контура. Замечая, что $\sin \vartheta = \frac{a}{r}$, получаем

$$B = \frac{I}{c} \frac{2\pi a^2}{r^3}.$$

В частности, в точке O

$$B_0 = \frac{2\pi I}{ca}.$$

Формулу для поля B можно переписать в виде

$$B = \frac{2m}{r^3},$$

где $m = \frac{I}{c} S$ и $S = \pi a^2$. Если ввести вектор \mathbf{S} площади, обтекаемой током (этот вектор ориентирован вдоль Oz), то в векторной форме поле \mathbf{B} на оси можно записать в виде

$$\mathbf{B} = \frac{2\mathbf{m}}{r^3},$$

где $\mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{S}$. Эта величина называется магнитным моментом тока.

Мы видим, что на оси Oz поле кругового тока определяется его магнитным моментом. Вне оси такое утверждение в общем случае не справедливо. Но вдали от кругового тока поле, хотя и отличается от поля на оси, может быть тем не менее выражено через \mathbf{m} . Более того, вдали от произвольного токового контура магнитное поле всегда определяется магнитным моментом тока \mathbf{m} , а именно

$$\mathbf{B} = \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{mR}) - mR^2}{R^5}.$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из места нахождения токового контура в точку, где рассматривается поле (предполагается, что $R \gg a$, где a — размеры контура),

Чтобы убедиться в справедливости приведенной формулы, рассмотрим для простоты плоский токовый контур \mathcal{L} , лежащий в плоскости (рис. 8.10). Ясно, что если расстояние r от элемента контура $d\mathbf{l}$ до точки наблюдения \mathcal{P} велико, то его можно приближенно представить в виде $r \equiv |\mathbf{R} - \mathbf{r}'| \approx R - \mathbf{n}\mathbf{r}'$, где \mathbf{R} и \mathbf{r}' — радиус-векторы, определяющие положение точки \mathcal{P} и элемента контура $d\mathbf{l}$ относительно начала координат O — произвольной точки, лежащей внутри контура на плоскости xy и $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$. Поэтому $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{R^2}$; подставляя это выражение в формулу для \mathbf{A} , получаем

$$\mathbf{A} = \frac{I}{c} \oint_{\mathcal{L}} \frac{d\mathbf{l}}{r} = \frac{I}{cR} \oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{l} + \frac{I}{cR^2} \oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{l} (\mathbf{n}\mathbf{r}').$$

Так как \mathcal{L} представляет собой замкнутый контур, то первый интеграл справа равен нулю. Чтобы вычислить второй интеграл, положим в нем $\mathbf{r}' = ix + jy$, $d\mathbf{l} = idx + jdy$, где x, y — координаты

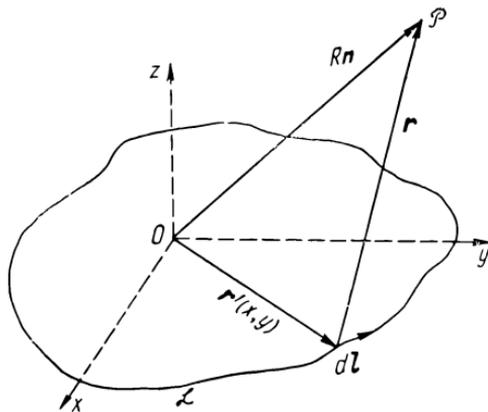


Рис. 8.10

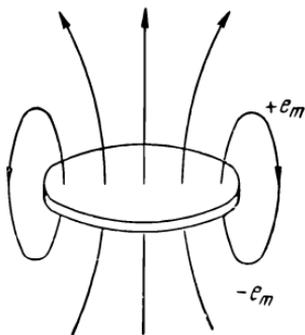


Рис. 8.11

наты точек контура. Тогда \mathbf{A} запишется в виде

$$\mathbf{A} = \frac{I}{cR^3} \oint_{\mathcal{L}} (i dx + j dy) (xX + yY),$$

где X и Y — проекции \mathbf{R} на оси x и y . Сюда входят интегралы по контуру $\oint xdx, \oint ydy, \oint ydx, \oint xdy$. Так как $x dx = \frac{1}{2} dx^2, y dy = \frac{1}{2} dy^2$, а интегрирование производится по замкнутому контуру, то первые два интеграла равны нулю. Третий интеграл равен по абсолютному значению, как видно из рис. 8.10, площади S , ограниченной контуром, а точнее, он равен взятой с обратным знаком проекции S_z вектора площади \mathbf{S} на ось z , перпендикулярную плоскости

контура (направление обхода контура и вектор площади \mathbf{S} образуют правинтовую систему). Наконец, четвертый интеграл равен S_2 . Поэтому

$$\mathbf{A} = \frac{I}{cR^3} (-iS_2Y + jS_2X),$$

или в векторной форме

$$\mathbf{A} = \frac{I}{cR^3} [\mathbf{SR}].$$

Учитывая, что $\frac{I}{c}\mathbf{S} = \mathbf{m}$, окончательно получаем

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{mR}]}{R^3}.$$

Для нахождения \mathbf{B} остается вычислить ротор \mathbf{A} . Но легко убедиться, что

$$\text{rot} \frac{[\mathbf{mR}]}{R^3} = \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{mR}) - \mathbf{m}R^2}{R^5}.$$

Отсюда следует, что магнитная индукция в направлении магнитного момента определяется формулой

$$B_{\parallel} = \frac{2m}{R^3},$$

в направлении, перпендикулярном \mathbf{m} , — формулой

$$B_{\perp} = -\frac{m}{R^3},$$

а абсолютное значение магнитной индукции в произвольном направлении \mathbf{n} — формулой

$$B = \frac{m}{R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta},$$

где θ — угол между \mathbf{m} и \mathbf{n} . Эти формулы аналогичны формулам, определяющим электрическое поле диполя (см. § 1.5). Электрическое поле диполя \mathbf{d} имеет такую же пространственную структуру, как и магнитное поле магнитного момента \mathbf{m} (т. е. замкнутого электрического тока вдали от тока), причем роль электрического дипольного момента в электрическом поле играет магнитный момент в магнитном поле. (Именно поэтому \mathbf{m} и называется магнитным моментом.)

Дипольный момент представляет собой произведение расстояния между зарядами диполя на величину заряда. Поэтому магнитное поле замкнутого проводника с током вдали от проводника будет таким же, как и магнитоэстатическое поле воображаемого магнитного диполя, построенного из фиктивных магнитных зарядов e_m и $-e_m$, которые взаимодействуют по закону Кулона для магнитных зарядов:

$$F_m = \frac{e_m e_m'}{r^2}.$$

При этом нужно представить себе, что на токовый контур натянута некоторая поверхность и ее сторона, которой соответствует направление нормали, связанное с направлением тока правилом правого винта, покрывается положительным магнитным зарядом, а обратная сторона — отрицательным магнитным зарядом (рис. 8.11). После этого из пространства извлекается область, занятая таким «магнитным листком», и выключается ток. Тогда утверждение состоит в том, что магнитное поле «магнитного листка» будет таким же, как и поле вдали от тока. Подчеркнем, однако, что магнитных зарядов в природе не существует.

Сравним электростатическое поле с магнитным полем постоянных токов. Электростатическое поле порождается электрическими зарядами — источниками поля, и его дивергенция определяется

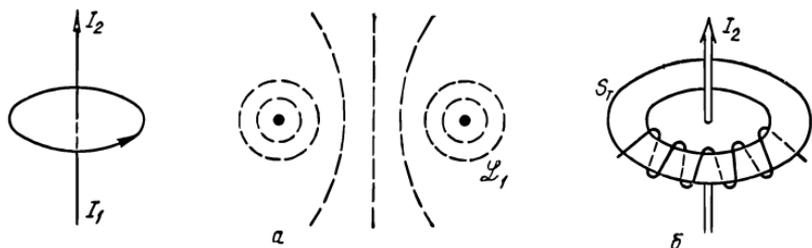


Рис. 8.12

плотностью электрических зарядов: $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Это поле безвихревое, т. е. его ротор равняется нулю: $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Магнитное поле не имеет источников, и его дивергенция равна нулю: $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Но магнитное поле является вихревым, и его ротор определяется плотностью электрических токов: $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$.

Там, где находятся электрические заряды, начинаются или кончаются электрические силовые линии. Но магнитных зарядов не существует. Поэтому магнитные силовые линии не могут иметь ни начала, ни конца. Отсюда, однако, не следует, что магнитные силовые линии должны быть обязательно замкнутыми или начинаться и кончаться на бесконечности. Оба этих случая, конечно, возможны, но существует еще и третий вариант: силовая линия, не имея ни начала, ни конца, плотно заполняет целую поверхность. Существование таких поверхностей — они называются магнитными поверхностями — проще всего разъяснить на примере магнитного поля, создаваемого двумя токами — круговым током I_1 и бесконечным прямолинейным током I_2 , проходящим через центр кругового контура перпендикулярно его плоскости. Поле в этом случае может быть определено согласно принципу суперпозиции как сумма полей, создаваемых токами I_1 и I_2 в отдельности. Силовые линии поля, порождаемого круговым током I_1 , изображены на рис. 8.12, a (штриховые линии); круговой ток перпендикулярен плоскости рисунка, точками обозначены места его пересечения с этой плоскостью. Магнитные силовые линии тока I_2 представляют собой окружности, лежащие в плоскостях, параллельных круговому току, с центрами на проводе с током I_2 .

Если взять какую-либо замкнутую силовую линию \mathcal{L}_1 тока I_1 , то при включении тока I_2 из нее получится, очевидно, винтовая линия, лежащая на поверхности тора S_T , возникающего при вращении линии \mathcal{L}_1 вокруг оси I_2 (рис. 8.12, б). Эта линия будет замкнутой только при определенном соотношении между силами токов I_1 и I_2 ; в противном случае при продолжении линии ее новые витки будут ложиться между прежними витками, так что линия подойдет как угодно близко к уже пройденной точке, но никогда вторично в нее не вернется. Таким образом, если отношение I_2/I_1 произвольно, то поверхность тора будет магнитной поверхностью.

Существование магнитных поверхностей означает, что густота силовых линий не всегда может характеризовать интенсивность магнитного поля.

§ 8.7. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В § 8.2 мы изучали движение заряженной частицы в магнитном поле, которое предполагалось однородным. Между тем практически важно знать, как происходит движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле. Эта задача очень сложна, но в одном важном случае она допускает простое решение: а именно в случае сильного поля и малой его неоднородности. Это означает, что длина a , на которой оказывается неоднородность, велика по сравнению с радиусом Лармора $r_L = cmv_{\perp} / e\bar{B}$, где \bar{B} — некоторое среднее значение магнитной индукции.

В однородном магнитном поле заряженная частица движется вдоль магнитной силовой линии по винтовой линии, радиус которой — радиус Лармора — обратно пропорционален магнитной индукции, вращение же по винтовой линии происходит с циклотронной частотой, пропорциональной B . Если поле велико, то циклотронная частота будет большой, а радиус Лармора малым. Поэтому следует ожидать, что в слабо неоднородном, но достаточно сильном поле частица так же, как и в однородном поле, будет быстро вращаться по винтовой линии, ось которой направлена по силовой линии, а радиус очень мал. В первом приближении так и получается. Но тем не менее неоднородность поля оказывает влияние. Она приводит к добавочному движению центра ларморовой окружности или к дрейфу ведущего центра.

Дрейф обусловлен двумя причинами — неоднородностью магнитного поля и кривизной силовых линий. Рассмотрим сперва дрейф, обусловленный неоднородностью магнитного поля. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси z и не зависит от координаты z , но очень слабо зависит от поперечной координаты x . Тогда магнитную индукцию приближенно можно представить в виде

$$B \equiv B_z(x) = B_0 + B'_x x,$$

где B_0 — значение B при $x = 0$; B'_x — производная от B по x в точке $x = 0$. Подставляя это выражение в уравнение движения частицы

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

получаем

$$m \frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{c} v_y B_0 + \frac{e}{c} v_y x B'_x,$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{e}{c} v_x B_0 - \frac{e}{c} v_x x B'_x, \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Мы видим, что уравнение движения для компоненты скорости вдоль направления магнитной индукции остается таким же, как и в случае однородного поля; уравнения движения для поперечных компонент скорости, по сравнению со случаем однородного поля, содержат добавочные слагаемые $\frac{e}{c} v_y x B'_x$ и $-\frac{e}{c} v_x x B'_x$. Эти слагаемые по усло-

вию малы относительно основных слагаемых $\frac{e}{c} v_y B_0$ и $-\frac{e}{c} v_x B_0$. Поэтому в первом приближении ими можно пренебречь. Тогда получим известное уже нам равномерное вращение частицы вокруг силовой линии с циклотронной частотой $\omega_c = \frac{eB_0}{mc}$. Ему соответствуют компоненты скорости $v_x = v_{\perp} \cos \omega_c t$, $v_y = -v_{\perp} \sin \omega_c t$ (v_{\perp} — поперечная скорость). Отсюда находим координаты x и y частицы как функции времени:

$$x = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin \omega_c t + x_0, \quad y = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos \omega_c t + y_0$$

(x_0 и y_0 — константы). При сильном поле вращение происходит с очень большой частотой. Поэтому естественно усреднить добавочные слагаемые в уравнениях для \dot{v}_x и \dot{v}_y по периоду вращения. Средние значения $\cos^2 \omega_c t$ и $\sin^2 \omega_c t$ равны, очевидно, $\frac{1}{2}$, а среднее значение $\cos \omega_c t \sin \omega_c t$ — нулю.

Значит,

$$\overline{x \dot{v}_y} = -\frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c}, \quad \overline{y \dot{v}_x} = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c}$$

(черта сверху означает усреднение; среднее от остальных произведений равно нулю). В результате получаем следующие уравнения движения:

$$m \dot{v}_x = \frac{e}{c} v_y B_0 - \frac{e}{c} \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} B'_x, \quad m \dot{v}_y = -\frac{e}{c} v_x B_0$$

(если бы B_z зависело не только от x , но и от y , то во второе из этих уравнений входило бы еще слагаемое $-\frac{e}{c} \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} B'_y$). Эти уравнения не отличаются от уравнений движения заряженной частицы в скрещенных постоянных и однородных магнитном и электрическом полях, если электрическое поле направлено вдоль оси x .

$$E_x = -\frac{1}{c} \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} B'_x.$$

Но, как мы знаем, в этом случае возникает дрейф вдоль оси y со скоростью $-\frac{c}{B^2} E_x B$. Таким образом, неоднородность магнитного поля вдоль оси x вызывает дрейф вдоль оси y со скоростью

$$v_G = \frac{1}{B^2} \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} B'_x B.$$

В векторной форме скорость этого дрейфа (он называется градиентным) определяется формулой

$$\mathbf{v}_G = \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} \frac{[\mathbf{B}\nabla B]}{B^2} = c \frac{mv_{\perp}^2}{2} \frac{[\mathbf{B}\nabla B]}{eB^3}.$$

Скорость градиентного дрейфа в отличие от электрического зависит от знака заряда частицы. По порядку величины скорость градиентного дрейфа

$$v_G \approx \frac{mcv_{\perp}^2}{eBa},$$

где a — расстояние, на котором существенно изменяется магнитное поле. Так как $r_L = mcv_{\perp}/eB$, то $v_G/v_{\perp} \approx r_L/a$. Эта величина

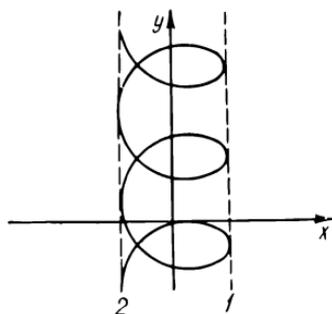


Рис. 8.13

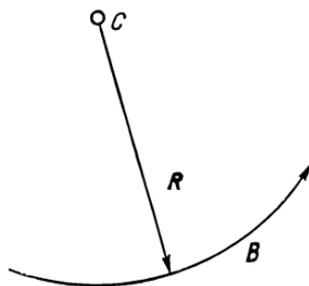


Рис. 8.14

должна быть малой по сравнению с единицей для того, чтобы формула для \mathbf{v}_G была правильной.

Возникновение дрейфа ведущего центра при наличии градиента поля, направленного перпендикулярно полю, иллюстрирует рис. 8.13. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка; градиент поля направлен вдоль оси x . Если $B'_x > 0$, то на прямой 1 поле будет сильнее, чем на прямой 2. Поэтому радиус ларморовской окружности в области 1 будет меньше, чем в области 2, т. е. радиус кривизны траектории вблизи области 1 будет меньше, чем вблизи области 2. Это значит, что траектория должна иметь вид, изображенный на рис. 8.13, т. е. частица должна испытывать дрейф в направлении оси y .

Рассмотрим теперь дрейф, обусловленный кривизной магнитных силовых линий. В первом приближении ведущий центр дви-

жется вдоль силовой линии независимо от того, будет ли силовая линия прямой или искривленной. Но в последнем случае частица помимо силы Лоренца испытывает еще действие центробежной силы $f_c = mv_{\parallel}^2/R$, где v_{\parallel} — проекция скорости частицы на направление магнитного поля; R — радиус кривизны магнитной силовой линии. Если рассматривать радиус кривизны как вектор, проведенный из центра кривизны магнитной силовой линии c (рис. 8.14), то центробежную силу можно представить в виде

$$f_c = \frac{mv_{\parallel}^2}{R^2} \mathbf{R}.$$

Эта сила не зависит от направления скорости частицы, и ее действие эквивалентно действию электрического поля

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{e} f_c = \frac{mv_{\parallel}^2}{e} \frac{\mathbf{R}}{R^2},$$

которое перпендикулярно магнитному полю и вызывает дрейф центра ларморовской окружности со скоростью

$$\mathbf{v}_R = c \frac{[\mathbf{E}_c \mathbf{B}]}{B^2} = cmv_{\parallel}^2 \frac{[\mathbf{R} \mathbf{B}]}{eR^2 B^2}.$$

Мы видим, что скорость дрейфа, обусловленного кривизной магнитных силовых линий, так же как и скорость дрейфа, обусловленного поперечным градиентом магнитного поля, зависит от знака заряда частицы. В этом отношении оба дрейфа отличаются от дрейфа в электрическом поле, скорость которого вообще не зависит от заряда частицы. По порядку величины скорость дрейфа, обусловленного кривизной силовых линий,

$$v_R \approx \frac{mcv_{\parallel}^2}{eRB}.$$

Если $v_{\parallel} \sim v_{\perp}$, то $v_R/v_{\parallel} \approx r_L/R$. Для того чтобы эта формула была справедливой для v_R , необходимо выполнение условия $r_L/R \ll 1$ (при этом $v_R \ll v_{\parallel}$).

§ 8.8. МАГНИТНЫЕ ЛОВУШКИ

В предыдущем параграфе мы показали, что при движении заряженной частицы в неоднородном магнитном поле возникает дрейф ведущего центра, скорость которого пропорциональна градиенту поля. Поэтому при переходе из пространственной области, где поле однородно, в область, где поле неоднородно, должна изменяться поперечная скорость частицы. Действительно, если в однородном поле $B_z^0 \equiv B_0$ поперечные компоненты скорости $v_x^0 = v_{\perp}^0 \cos \omega_c t$, $v_y^0 = -v_{\perp}^0 \sin \omega_c t$, то при переходе в область, где $B_z = B_0 + B'_z x$ (для простоты считается, что поле направлено вдоль оси z и слабо изменяется вдоль оси x), поперечные компоненты скорости частицы становятся разными: $v_x = v_{\perp}^0 \cos \omega_c t$, $v_y = -v_{\perp}^0 \sin \omega_c t + v_G$, где v_G — дрейфовая скорость.

Из этих формул следует, что среднее значение (по периоду вращения частицы) квадрата поперечной скорости частицы

$$v_{\perp}^2 = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} = v_{\perp}^{02} + v_G^2,$$

или

$$v_{\perp}^2 = v_{\perp}^{02} \left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \left(\frac{B_x'}{B_0} \right)^2 \right).$$

Определим величину магнитной индукции, действие которой испытывает частица движущаяся в неоднородном поле. Поскольку $B_z = B_0 \left(1 + x \frac{B_x'}{B_0} \right)$ и для движущейся частицы $x = \frac{v_{\perp}^0}{\omega_c} \sin \omega_c t = r_L \sin \omega_c t$, мгновенное значение поля, действующего на частицу, $B_z = B_0 \left(1 + r_L \frac{B_x'}{B_0} \sin \omega_c t \right)$. Беря квадрат этой величины и усредняя его по порядку вращения, получаем

$$\overline{B_z^2} = B_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} r_L^2 \left(\frac{B_x'}{B_0} \right)^2 \right).$$

Поэтому величина действующей магнитной индукции определяется формулой

$$B = \sqrt{\overline{B_z^2}} \approx B_0 \left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \left(\frac{B_x'}{B_0} \right)^2 \right).$$

Сравнение этой формулы с формулой для v_{\perp}^2 показывает, что

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{v_{\perp}^{02}}{B_0}.$$

Таким образом, мы приходим к замечательному результату: при движении частицы в слабо неоднородном поле отношение квадрата поперечной скорости частицы к магнитной индукции не изменяется. Справедливо и следующее утверждение: если частица движется в медленно изменяющемся со временем магнитном поле, то величина v_{\perp}^2/B также почти не изменяется с течением времени.

Такого рода величины, почти не изменяющиеся при медленном изменении внешних параметров, носят общее название адиабатических инвариантов. Поэтому можно сказать, что для заряженной частицы, движущейся в слабо неоднородном или медленно изменяющемся во времени магнитном поле, величина v_{\perp}^2/B является адиабатическим инвариантом. Разъясним смысл этой величины. Поскольку заряженная частица вращается по ларморовой окружности с периодом $T_c = 2\pi/\omega_c$, деля заряд частицы e на T_c , получаем силу орбитального тока, переносимого частицей. Умножая далее силу тока на площадь, обтекаемую током, т. е. на площадь

ларморовского круга πr_L^2 , находим орбитальный магнитный момент частицы.

$$m_L = \frac{e}{cT_c} \pi r_L^2.$$

Учитывая, что $r_L = v_{\perp} / \omega_c$, имеем

$$m_L = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}.$$

Таким образом, орбитальный магнитный момент частицы равен отношению ее поперечной кинетической энергии к величине магнитной индукции, а так как v^2 / B есть адиабатический инвариант, то магнитный момент частицы представляет собой адиабатический инвариант.

Инвариантность магнитного момента приводит к важному физическому следствию: заряженная частица, обладающая определенной кинетической энергией, не может находиться в области пространства с достаточно сильным магнитным полем. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, напомним, что в постоянном магнитном поле, независимо от того, будет ли оно однородным или неоднородным, сохраняется кинетическая энергия частицы, т. е. $\omega \equiv \frac{mv^2}{2} = \text{const.}$ Теперь запишем квадрат скорости

в виде $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$, где v_{\parallel} и v_{\perp} — составляющие скорости частицы вдоль и поперек магнитного поля. (Эти величины будут, естественно, различны в разных точках пространства, так как магнитная индукция B является функцией координат.) Учитывая, что $\frac{mv_{\perp}^2}{2} = m_L B$, имеем

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} + m_L B(r) = \omega = \text{const.}$$

Мы видим, что для продольного движения величина $m_L B(r)$ играет роль потенциальной энергии частицы. Поскольку $v_{\parallel}^2 > 0$, движение частицы с заданной энергией ω возможно только в тех областях пространства, где выполняется условие

$$m_L B(r) \leq \omega.$$

Рассмотрим, например, поле, создаваемое двумя катушками K_1 и K_2 , питаемыми постоянным током (рис. 8.15). Пусть частица движется со скоростью v_0 под углом θ к оси z в средней плоскости ($z = 0$), где поле равно B_0 ; тогда $v_{0\parallel} = v_0 \cos \theta_0$, $v_{0\perp} = v_0 \sin \theta_0$, а адиабатический инвариант

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{v_{0\perp}^2}{B_0} = \frac{v_0^2}{B_0} \sin^2 \theta_0.$$

Если частица в точке z , где поле равно $B(z)$, движется под углом θ к оси z , то $v_{\perp}^2 = v^2 \sin^2 \theta = v_0^2 \sin^2 \theta$ и, следовательно,

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{B(z)}{B_0}} \sin \theta_0.$$

Отсюда следует, что частица, движущаяся в средней плоскости под углом θ_0 к оси z , не сможет попасть в область пространства, где $B(z) > \frac{B_0}{\sin^2 \theta_0}$. Иными словами, если в точке $z = h$

$$B(h) = B_0 / \sin^2 \theta_0,$$

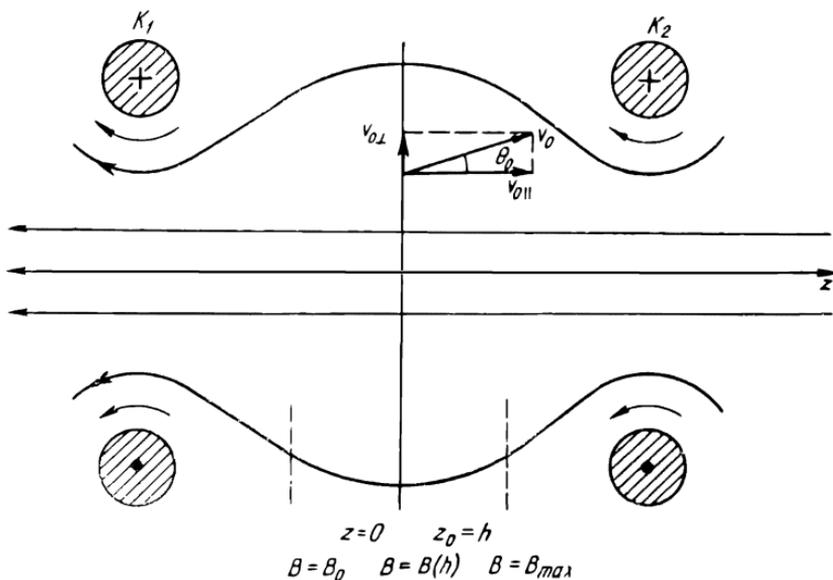


Рис. 8.15

то в этой точке частица испытывает отражение. Это значит, что сильное магнитное поле ведет себя как зеркало (магнитное зеркало). Вводя зеркальное отношение

$$R(z) = \frac{B(z)}{B_0},$$

можно утверждать, что в точке отражения $z = h$

$$R(h) = \frac{1}{\sin^2 \theta_0}.$$

Используя отражение частиц от областей с сильным магнитным полем, можно построить магнитные ловушки для удержания заряженных частиц. Такие ловушки называются зеркальными. С уменьшением угла θ_0 для удержания частицы в ловушке требуется боль-

шее зеркальное отношение. Если максимальное значение зеркального отношения равно R_{\max} , то удерживаться в ловушке будут только те частицы, для которых угол θ_0 превосходит некоторое минимальное значение θ_{\min} , определяемое из условия

$$R_{\max} = \frac{1}{\sin^2 \theta_{\min}}.$$

Частицы, для которых $\theta_0 < \theta_{\min}$, не могут удерживаться ловушкой и покидают ее. Можно сказать, что зеркальная ловушка имеет два конуса потерь с углами раствора θ_{\min} по отношению к оси z . Частицы, двигающиеся при $z = 0$ внутри этих конусов, свободно покидают зеркальную ловушку. Заметим, что магнитные ловушки существуют и в естественных условиях, например в земном магнитном поле. Именно таким образом возникли радиационные пояса, состоящие из заряженных частиц, захваченных магнитным полем Земли.

Однако осцилляции частицы в ловушке не происходят вдоль одной и той же силовой линии. Благодаря дрейфам, обусловленным неоднородностью поля и кривизной силовых линий, частица может переходить с одной силовой линии на другую. При этом интеграл от параллельной составляющей скорости частицы v_{\parallel} вдоль магнитной силовой линии между точками поворота у зеркал остается постоянным. Иными словами, могут изменяться силовая линия и точки поворота у зеркал, а интеграл остается неизменным. Следовательно, данный интеграл представляет собой адиабатический инвариант.

При медленном изменении расстояния между магнитными зеркалами этот интеграл также не изменяется. Рассмотрим, например, два плоских параллельных магнитных зеркала, из которых одно неподвижно, а другое медленно движется навстречу первому. Тогда при каждом отражении частицы от движущегося зеркала скорость частицы будет увеличиваться на $2v$, где v — скорость зеркала. Число отражений в единицу времени равно $v_{\parallel}/2L$, где

L — расстояние между зеркалами; поэтому $\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{2L} 2v$. Но $v = -\frac{dL}{dt}$, и, следовательно,

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{v_{\parallel}}{L} \frac{dL}{dt},$$

т. е. $Ldv_{\parallel} = -v_{\parallel} dL$, откуда следует, что $v_{\parallel}L = \text{const}$.

Если предположить, что в космосе движутся межзвездные облака с сильным внутренним магнитным полем, то заряженные частицы будут захватываться в пространство между ними и при отражении от таких подвижных магнитных зеркал энергия частиц будет непрерывно увеличиваться. В этом заключается идея одного из механизмов ускорения космических лучей (механизм Ферми).

Выше мы указывали, что зеркальная магнитная ловушка всегда имеет два конуса потерь; поэтому возникает вопрос, как предотвратить потерю частиц. Для этого нужно сделать замкнутую магнитную ловушку, т. е. ловушку без магнитных зеркал. Вначале кажется,

что заряженные частицы — плазму — следует поместить в тороидальную камеру, снабдить ее соленоидальной обмоткой и пропустить по ней сильный ток. Тогда внутри тора возникнет сильное маг-

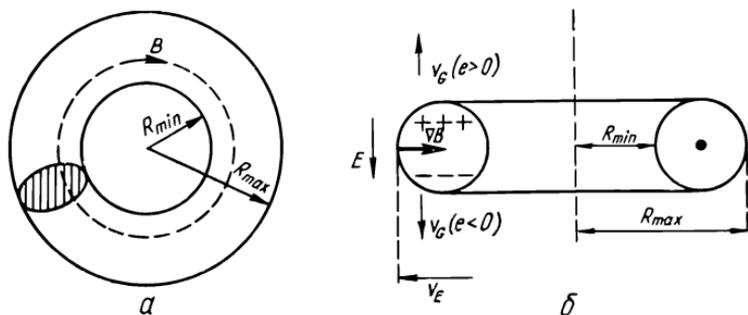


Рис. 8.16

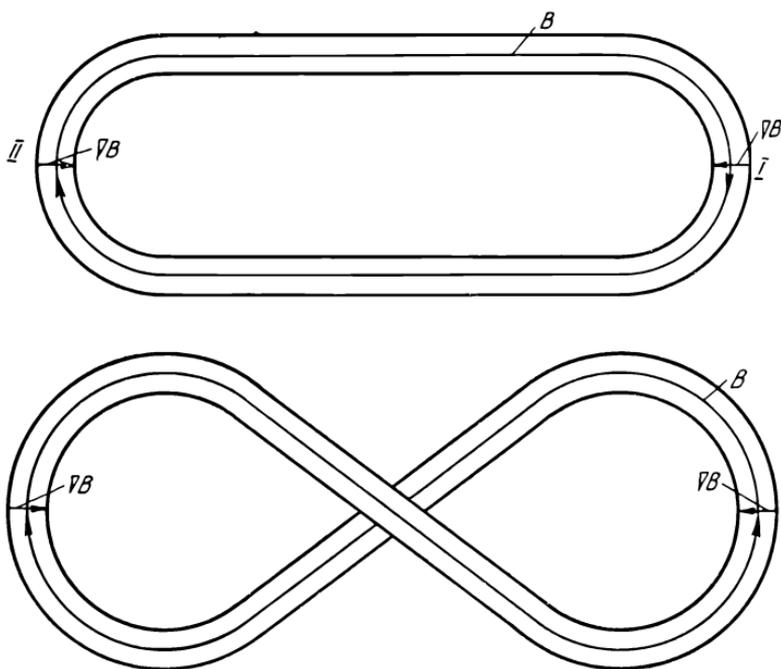


Рис. 8.17

нитное поле, силовыми линиями которого будут окружности, лежащие внутри тора. Частицы должны двигаться вдоль силовых линий, поэтому, казалось бы, таким путем может быть решена задача. Но в действительности ситуация оказывается гораздо сложнее. Магнитное поле внутри тора неоднородно — оно сильнее при $r \sim R_{\min}$ и слабее при $r \sim R_{\max}$ (рис. 8.16, а). Поэтому

имеется градиент поля, направленный, как показано на рис. 8.16, б. Наличие же градиента поля приводит к дрейфу, скорость которого определяется векторным произведением градиента поля и поля и зависит от знака заряда частицы. На рис. 8.16, б поле направлено на нас, поэтому скорость градиентного дрейфа направлена вверх для положительно заряженных частиц и вниз для отрицательно заряженных частиц. Отсюда следует, что гра-

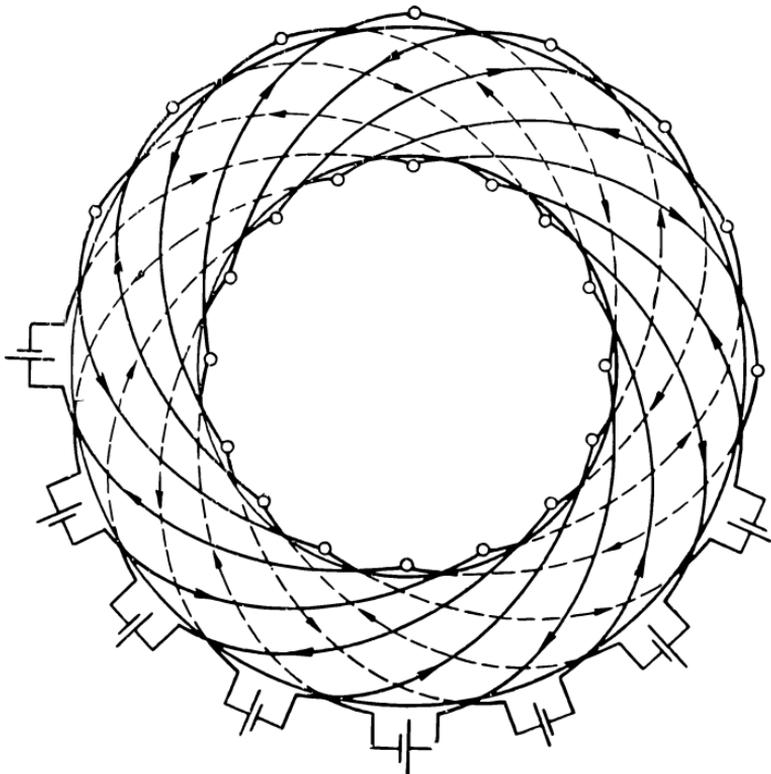


Рис. 8.18

диентный дрейф приводит к разделению заряда плазмы — сверху будет сосредотачиваться положительный, а снизу — отрицательный заряды. В результате появляется электрическое поле, направленное сверху вниз. Благодаря этому полю возникнет электрический дрейф, скорость которого v_E направлена к внешней стороне тора. Эта скорость не зависит от знака заряда, и поэтому вся плазма будет уходить на внешнюю сторону тора.

Таким образом, возникает новая задача — как избежать дрейфа частиц на стенку тороидальной камеры. Простейшее решение задачи заключается в том, чтобы использовать вместо простого тора тор, изогнутый в восьмерку. Возникающую при этом ситуацию разъясняет рис. 8.17. В обычном торе в области I градиент поля направлен противоположно градиенту поля в области II. Противополо-

положные направления имеют в этих областях и магнитные поля. Поэтому скорость градиентного дрейфа (для заряда определенного знака) направлена одинаково в областях I и II — к внешней стороне тора. Напротив, для тора, согнутого в восьмерку, поля в областях I и II имеют одинаковое направление, градиенты же полей, как и ранее, направлены противоположно. Поэтому в данном случае скорость градиентного дрейфа в области II имеет направление, противоположное скорости дрейфа в области I . Возникающие за счет дрейфа заряды свободно перемещаются вдоль силовых линий. Это приводит к их взаимной компенсации, благодаря чему сильно уменьшается электрический дрейф частиц.

Но тор не обязательно изгибать в восьмерку. Можно взять обычный тор и снабдить его помимо основной обмотки, создающей круговые силовые линии, добавочной, так называемой винтовой обмоткой (рис. 8.18). Мы получим стелларатор, в котором силовая линия винтообразно навивается на тор. Заметим, что силовые линии при этом не обязательно будут замкнутыми, так что в стеллараторе существуют магнитные поверхности. Наличие винтовых силовых линий, обвивающих осевую линию, приводит к компенсации зарядов, возникающих благодаря радиальному дрейфу. Таким образом, суть заключается в создании винтовых силовых линий. Но для этого не обязательно пользоваться стеллараторной обмоткой. Можно, например, представить себе токовое кольцо внутри тора (вдоль его осевой линии); в этом случае мы также получим винтовые силовые линии. Но удерживать такое кольцо, окруженное плазмой, сложно. Поэтому желательно не вносить в плазму посторонних проводников, а этого можно достичь, если индуцировать непосредственно в плазме осевой ток. Такого типа плазменные ловушки называются токамаками. Они широко используются в лабораторной практике в связи с проблемой термодерного синтеза.

§ 8.9. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОКОВ

На движущийся в магнитном поле электрический заряд действует с определенной силой магнитное поле. Но электрический ток — это совокупность движущихся зарядов. Поэтому на проводник с током, находящийся в магнитном поле, действуют силы поля. Чтобы определить их, найдем сперва силу, испытываемую в поле \mathbf{B} элементом объема dV проводника. Так как сила, испытываемая зарядом e , движущимся со скоростью \mathbf{v} в поле \mathbf{B} , равна $\frac{e}{c} [\mathbf{vB}]$, то сила, испытываемая единицей объема проводника, $\mathbf{f} = \frac{en}{c} [\mathbf{vB}]$, где n — число подвижных заряженных частиц в единице объема. Но $en\mathbf{v}$ представляет собой вектор плотности тока \mathbf{j} . Поэтому $\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{jB}]$. Умножив \mathbf{f} на dV , определим силу, действующую на элемент объема dV проводника:

$$d = \mathfrak{F} \frac{1}{c} [\mathbf{jB}] dV.$$

Отсюда для линейного проводника определяем силу $d\mathfrak{F}$, действующую на элемент длины dl . Записав $d\mathbf{V}$ в виде Sdl , где S — площадь сечения проводника, с учетом того, что $j\mathbf{S}$ представляет собой силу тока I , получим

$$d\mathfrak{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l}\mathbf{B}],$$

где $d\mathbf{l}$ — ориентированный вдоль направления тока элемент проводника. Мы видим, что сила $d\mathfrak{F}$ направлена перпендикулярно $d\mathbf{l}$ и \mathbf{B} , причем так, что если вращать винт с правой нарезкой от $d\mathbf{l}$ к \mathbf{B} , то поступательное движение винта будет происходить вдоль $d\mathfrak{F}$. Сила $d\mathfrak{F}$ пропорциональна синусу угла между $d\mathbf{l}$ и \mathbf{B} ; поэтому она обращается в нуль при $d\mathbf{l} \parallel \mathbf{B}$ и максимальна при $d\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$.

Так как ток создает вокруг себя магнитное поле, то два тока будут электродинамически взаимодействовать друг с другом. Именно, сила, действующая на элемент проводника $d\mathbf{l}_1$ с током I_1 со стороны тока I_2 , определяется формулой

$$d\mathfrak{F}_1 = \frac{I_1}{c} [d\mathbf{l}_1\mathbf{B}_2],$$

где \mathbf{B}_2 — магнитная индукция, создаваемая током I_2 в том месте, где находится элемент $d\mathbf{l}_1$ тока I_1 . Согласно закону Био — Савара

$$\mathbf{B}_2 = \frac{I_2}{c} \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{[d\mathbf{l}_2\mathbf{r}_{21}]}{r_{21}^3},$$

где \mathbf{r}_{21} — радиус-вектор, проведенный из элемента $d\mathbf{l}_2$ контура с током I_2 в элемент $d\mathbf{l}_1$ контура с током I_1 . Таким образом,

$$d\mathfrak{F}_1 = \frac{I_1 I_2}{c^2} \left[d\mathbf{l}_1, \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{[d\mathbf{l}_2\mathbf{r}_{21}]}{r_{21}^3} \right].$$

(Эта формула известна под названием закона Ампера.) Мы видим, что сила $d\mathfrak{F}_1$ пропорциональна произведению сил токов.

Рассмотрим подробнее случай, когда ток I_2 течет по очень длинному прямолинейному проводнику. Тогда

$$\mathbf{B}_2 = \frac{2I_2}{cr^2} [\mathbf{n}_2\mathbf{r}],$$

где \mathbf{n}_2 — единичный вектор вдоль проводника с током I_2 (в направлении тока); r — расстояние между $d\mathbf{l}_1$ и проводником 2 и вектор \mathbf{r} направлен от проводника 2 к $d\mathbf{l}_1$ (рис. 8.19). Поэтому

$$d\mathfrak{F}_1 = \frac{2I_1 I_2}{c^2 r^2} [d\mathbf{l}_1 [\mathbf{n}_2\mathbf{r}]].$$

Замечая, что

$$[d\mathbf{l}_1 [\mathbf{n}_2\mathbf{r}]] = \mathbf{n}_2 (d\mathbf{l}_1\mathbf{r}) - \mathbf{r} (d\mathbf{l}_1\mathbf{n}_2),$$

и предполагая, что $d\mathbf{l}_1 \perp \mathbf{r}$, окончательно получаем

$$d\mathfrak{F}_1 = \frac{2I_1 I_2}{c^2 r^2} d\mathbf{l}_1 (\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2) \mathbf{r},$$

где \mathbf{n}_1 — единичный вектор вдоль $d\mathbf{l}_1$. Мы видим, что сила, испытываемая элементом $d\mathbf{l}_1$ проводника 1 со стороны длинного прямолинейного тока, текущего по проводнику 2, пропорциональна произведению сил токов, текущих в проводниках, и обратно пропорциональна расстоянию между проводниками. Сила пропорциональна косинусу угла между проводниками и направлена либо против \mathbf{r} (при $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 > 0$), либо по \mathbf{r} (при $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 < 0$). В первом случае проводники притягиваются, а во втором отталкиваются. Если проводники взаимно перпендикулярны, то сила обращается в нуль. Два длинных, параллельных друг другу проводника с токами I_1 и I_2 взаимодействуют с силой

$$\mathfrak{F} = \frac{2I_1I_2}{c^2r} l.$$

Они притягиваются, если токи текут в одном направлении, и отталкиваются, если токи текут в противоположных направлениях

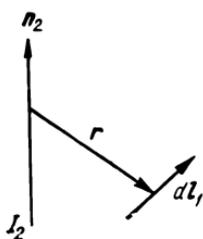


Рис. 8.19

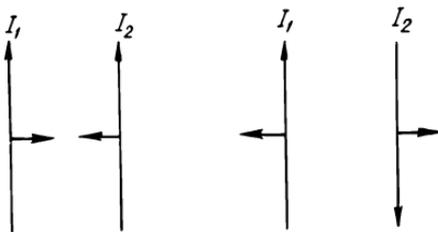


Рис. 8.20

(рис. 8.20). В частности, если $I_1 = I_2 = 1$ А, $l = 1$ м и $r = 1$ м, то

$$\mathfrak{F} = \frac{2.9 \cdot 10^{18} \cdot 10^2}{9 \cdot 10^{20} \cdot 10^2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ дин} = 2 \times 10^{-7} \text{ Н.}$$

§ 8.10. МАГНИТНЫЙ ПОТОК И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ТОКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Для определения общего электродинамического воздействия, которое испытывает контур с током, находящийся в магнитном поле, следует разбить контур на отдельные элементы, найти силы, действующие на каждый элемент, а затем исследовать воздействие этих сил на контур. Но такая процедура, как правило, очень сложна и неудобна. Гораздо разумнее и практичнее определить сперва потенциальную функцию тока в магнитном поле. Для этого представим, что токовый контур, находящийся в магнитном поле, несколько сместился под действием электромагнитных сил (и, в общем, деформировался). На рис. 8.21 первоначальное и конечное положения контура обозначены через 1 и 2. Если элемент контура $d\mathbf{l}$ сместился на отрезок \mathbf{a} , то работа силы $d\mathfrak{F} = \frac{l}{c}[d\mathbf{B}]$, действующей на этот элемент,

$$dA = d\mathfrak{F} \cdot \mathbf{a} = \frac{l}{c} \mathbf{a} [d\mathbf{B}] = \frac{l}{c} \mathbf{B} [a d\mathbf{l}].$$

Но $[\mathbf{a} d\mathbf{l}]$ представляет собой вектор площади $d\mathbf{S}$, описанной элементом $d\mathbf{l}$ при его смещении на \mathbf{a} . Поэтому

$$dA = \frac{I}{c} \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

$$A_{1 \rightarrow 2} = \frac{I}{c} \int_{S_b} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

где $A_{1 \rightarrow 2}$ — суммарная работа сил, испытываемых отдельными элементами контура, а интегрирование совершается по поверхности «пояска» S_b , ограниченного кривыми 1 и 2.

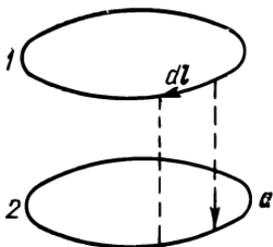


Рис. 8.21

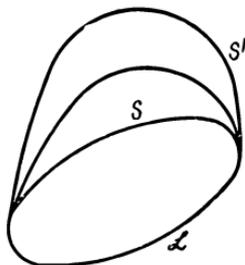


Рис. 8.22

Определим теперь магнитный поток. По аналогии с потоком электрического поля назовем потоком магнитной индукции (или просто магнитным потоком) через некоторую поверхность S интеграл

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Магнитный поток зависит от поверхности S , но если эта поверхность замкнута, то он равен нулю. Действительно, для магнитного потока, как и для электрического, справедлива теорема Гаусса, но магнитных зарядов в отличие от электрических не существует, в силу чего магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность должен обращаться в нуль. Поэтому если на какой-либо контур \mathcal{L} натянуть две произвольные поверхности S и S' (рис. 8.22), то магнитные потоки через них будут одинаковы. При этом следует лишь одинаково ориентировать элементы поверхностей S и S' , а именно мы будем всегда предполагать, что вектор площади и направление обхода контура образуют правовинтовую систему. Таким образом, данный контур пронизывает магнитный поток. Обратимся теперь к формуле для работы $A_{1 \rightarrow 2}$. Натянем на кривые 1 и 2, соответствующие двум положениям токового контура, произвольные поверхности S_1 и S_2 и рассмотрим замкнутую поверхность $S \subset S_1 + S_2 + S_b$, образованную поверхностями S_1

и S_2 и поверхностью «пояска» S_b . Магнитный поток через эту поверхность равен нулю:

$$\int_{S_1+S_2+S_b} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Здесь $d\mathbf{S}$ — вектор площади, направленный всюду по внешней нормали к поверхности. Обозначим далее через Φ_1 и Φ_2 магнитные потоки, пронизывающие токовый контур в двух его положениях:

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S}_1, \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B} d\mathbf{S}_2,$$

(направление обхода токового контура считается совпадающим с направлением тока). Как видно из рис. 8.23, векторы $d\mathbf{S}_b$ и $d\mathbf{S}_1$ на-

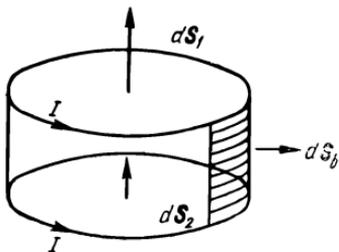


Рис. 8.23

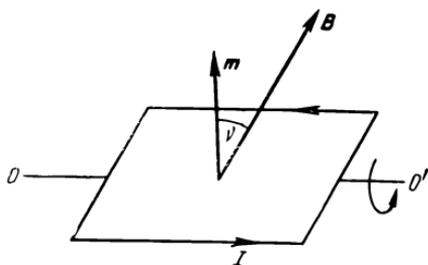


Рис. 8.24

правлены по внешней нормали к поверхности S , вектор $d\mathbf{S}_2$ направлен по внутренней нормали к S . Поэтому $\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_b = 0$, где

$\Phi_b = \int_{S_b} \mathbf{B} d\mathbf{S}_b$. Таким образом, $\Phi_b = \Phi_2 - \Phi_1$ и, следовательно,

$$A_{1 \rightarrow 2} = \frac{I}{c} (\Phi_2 - \Phi_1).$$

Итак, работа сил магнитного поля при перемещении контура с током равна произведению силы тока (разделенной на c) и приращения магнитного потока, пронизывающего токовый контур. Поскольку силы направлены всегда так, чтобы работа была положительной, $\Phi_2 > \Phi_1$, т. е. контур будет перемещаться и деформироваться так, чтобы магнитный поток через него был максимальным. В частности, ток перемещается всегда в направлении более сильного поля.

Если проводник может деформироваться (но не растягиваться), то силы будут стремиться придать проводнику форму круга, так как при заданном периметре круг имеет наибольшую площадь, а магнитный поток при прочих равных условиях пропорционален площади, охватываемой токовым контуром. Наконец, контур с током будет стремиться ориентироваться относительно поля так, чтобы направление поля образовывало с направлением тока правинтовую систему.

Работа при движении в потенциальном поле равна уменьшению потенциальной энергии. Хотя магнитное поле и не является потенциальным, но мы можем тем не менее ввести потенциальную функцию тока в магнитном поле, уменьшение которой будет определять совершенную силами поля работу. Эта функция играет роль потенциальной энергии тока во внешнем магнитном поле. Из формулы для работы $A_{1 \rightarrow 2}$ видно, что потенциальную функцию тока U следует определить как

$$U = -\frac{I}{c} \Phi,$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий контур; при этом работа связана с потенциальной функцией соотношением

$$A_{1 \rightarrow 2} = U_1 - U_2.$$

Рассмотрим в качестве примера рамку с током I , находящуюся в однородном поле \mathbf{B} и могущую вращаться около оси OO' (рис. 8.24). Рамку пронизывает магнитный поток

$$\Phi = \mathbf{BS} = BS \cos \vartheta,$$

где ϑ — угол между нормалью к плоскости рамки и направлением поля. Умножив Φ на $-\frac{I}{c}$, найдем потенциальную функцию тока:

$$U = -\frac{I}{c} \mathbf{BS} = -m\mathbf{B} = -mB \cos \vartheta,$$

где $\mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{S}$ — магнитный момент тока. Мы видим, что функция U равна в случае рамки взятому с обратным знаком скалярному произведению магнитного момента тока на вектор магнитной индукции. Функция U зависит от угла между нормалью к плоскости рамки и магнитным полем. Взяв производную от U по углу ϑ , найдем момент сил \mathbf{N} , вращающий рамку:

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mB \sin \vartheta,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{N} = [\mathbf{mB}].$$

Силы стремятся повернуть рамку так, чтобы угол ϑ стал равным нулю, т. е. чтобы потенциальная функция стала минимальной.

§ 8.11. КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНДУКТИВНОСТИ

Определим потенциальную функцию двух токов: I_1 и I_2 . Функция U_{12} тока I_1 в магнитном поле $\mathbf{B}^{(2)}$, порождаемом током I_2 , определяется формулой

$$U_{12} = -\frac{I_1}{c} \Phi_{21}.$$

где Φ_{21} — магнитный поток, создаваемый током I_2 и пронизывающий контур первого тока. Так как индукция $\mathbf{B}^{(2)}$ пропорциональна I_2 , то и поток Φ_{21} пропорционален I_2 , т. е.

$$\Phi_{21} = L_{21} \frac{I_2}{c},$$

где L_{21} — некоторый коэффициент, зависящий только от геометрии контуров, т. е. от их формы, размеров и взаимного расположения. Он называется коэффициентом взаимной индукции контуров и имеет размерность длины (в гауссовой системе единиц). Подставляя это выражение в формулу для U_{12} , получаем

$$U_{12} = -L_{21} \frac{I_1 I_2}{c^2}.$$

Аналогично определяем функцию U_{21} тока I_2 в поле $\mathbf{B}^{(1)}$, порождаемом током I_1 :

$$U_{21} = -L_{12} \frac{I_1 I_2}{c^2}.$$

Но функции U_{12} и U_{21} должны быть равны между собой, иначе не будет выполняться закон равенства действия и противодействия; следовательно,

$$L_{12} = L_{21}.$$

Легко найти явный вид $L_{12} = M$ в случае достаточно тонких проводников. Запишем для этого Φ_{21} в виде

$$\Phi_{21} = \int_{S_1} \mathbf{B}^{(2)} d\mathbf{S}_1,$$

где $d\mathbf{S}_1$ — ориентированный элемент поверхности, который опирается на контур \mathcal{L}_1 , обтекаемый током I_1 . Полагая $\mathbf{B}^{(2)} = \text{rot } \mathbf{A}^{(2)}$, где $\mathbf{A}^{(2)}$ — векторный потенциал, создаваемый током I_2 , согласно формуле Стокса получаем

$$\Phi_{21} = \int_{S_1} \text{rot } \mathbf{A}^{(2)} d\mathbf{S}_1 = \oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{A}^{(2)} dl_1$$

(dl_1 — ориентированный элемент контура \mathcal{L}_1). В случае линейных проводников

$$\mathbf{A}^{(2)} = \frac{I_2}{c} \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{dl_2}{r_{21}},$$

где r_{21} — расстояние между элементами dl_2 и dl_1 . Поэтому

$$\Phi_{21} = \frac{I_2}{c} \oint_{\mathcal{L}_1} \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{dl_1 dl_2}{r_{21}},$$

откуда

$$M = \oint_{\mathcal{L}_1} \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{dI_1 dI_2}{r_{21}}.$$

Мы видим, что величина M может быть как положительной, так и отрицательной и даже равной нулю.

Наряду с взаимной потенциальной функцией U_{12} мы должны ввести также собственные потенциальные функции U_{11} и U_{22} токов. Действительно, ток I_1 создает собственное магнитное поле $\mathbf{B}^{(1)}$, в котором он находится. Поэтому ток обладает некоторой собственной потенциальной функцией, связанной с электродинамическими силами взаимодействия отдельных элементов контура.

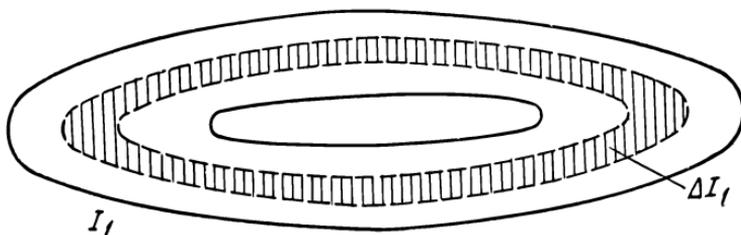


Рис. 8,25

Для определения этой функции нужно найти, казалось бы, собственный магнитный поток

$$\Phi_{11} = \int_{S_1} \mathbf{B}^{(1)} dS_1$$

и умножить его на $-I_1/c$. В действительности надо взять половину этой величины, т. е.

$$U_{11} = -\frac{1}{2c} \Phi_{11}.$$

Чтобы понять смысл введения множителя $1/2$, рассмотрим детальнее происхождение собственной потенциальной функции. Разобьем для этого ток I_1 на тонкие токовые нити ΔI_1 (рис. 8.25). Тогда потенциальная функция ΔU_{11} какой-либо нити ΔI_1 в поле остального тока $(I_1 - \Delta I_1)$ определяется формулой

$$\Delta U_{11} = -\frac{\Delta I_1}{c} \Phi'_{11},$$

где Φ'_{11} — магнитный поток, пронизывающий нить и создаваемый остальным током. Но при бесконечно малом ΔI_1 поток Φ'_{11} бесконечно мало отличается от потока Φ_{11} . Последний же, как и поле $\mathbf{B}^{(1)}$, пропорционален вызвавшему его току I_1 , т. е.

$$\Phi_{11} = L_{11} \frac{I_1}{c},$$

где L_1 — некоторый коэффициент, зависящий от размеров и формы контура и имеющий размерность длины. Он называется коэффициентом самоиндукции контура. Заметим, что $L_1 > 0$. Итак, при бесконечно малом токе нити dI_1

$$dU_{11} = -L_1 \frac{I_1 dI_1}{c^2}.$$

Суммируя это выражение по всем нитям, находим всю собственную потенциальную функцию первого контура:

$$U_{11} = -L_1 \frac{I_1^2}{2c^2}.$$

Заменяя здесь $L_1 I_1 / c$ на Φ_{11} , получаем приведенную выше формулу для U_{11} . Аналогичным образом вводится собственная потенциальная функция второго тока:

$$U_{22} = -L_2 \frac{I_2^2}{2c^2} = -\frac{1}{2} \frac{I_2}{c} \Phi_{22},$$

где L_2 — коэффициент самоиндукции второго контура, связанный с собственным потоком Φ_{22} второго контура соотношением

$$\Phi_{22} = L_2 \frac{I_2}{c}.$$

Если сложить собственные потенциальные функции U_{11} и U_{22} и взаимную потенциальную функцию U_{12} , то найдем суммарную потенциальную функцию обоих токов: $U = U_{11} + U_{12} + U_{22}$. Ее можно представить в виде

$$U = -\frac{1}{2c} (I_1 \Phi_{11} + I_1 \Phi_{21} + I_2 \Phi_{22} + I_2 \Phi_{12}),$$

или

$$U = -\frac{1}{2c^2} (L_1 I_1^2 + 2MI_1 I_2 + L_2 I_2^2),$$

где $M = L_{12} = L_{21}$ — коэффициент взаимной индукции токов. Суммарная потенциальная функция представляет собой квадратичную форму токов, причем эта форма, как мы сейчас разясним, является существенно отрицательной. Отсюда легко заключить, что всегда должно выполняться условие

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}.$$

Определим коэффициент самоиндукции соленоида. Соленоид может быть либо прямым, либо круговым; мы лишь считаем его достаточно длинным и тонким для того, чтобы предположить, что магнитное поле внутри соленоида однородно и, кроме того, равно нулю вне соленоида. В этом случае, как мы знаем, магнитная индукция внутри соленоида $B = 4\pi n \frac{I}{c}$ (I — сила тока; n — число витков, приходящихся на единицу его длины). Поэтому магнитный

поток через один виток $BS = 4\pi nS \frac{I}{c}$, где S — площадь поперечного сечения соленоида. Умножая эту величину на общее число витков N , находим собственный магнитный поток;

$$\Phi = 4\pi nNS \frac{I}{c}.$$

Приравнивая полученную величину $L \frac{I}{c}$, определяем коэффициент самоиндукции соленоида:

$$L = 4\pi nNS,$$

или, так как $n = N/l$ (l — длина соленоида), то

$$L = 4\pi N^2 \frac{S}{l}.$$

Таким образом, коэффициент самоиндукции соленоида пропорционален квадрату числа его витков.

Найдем теперь собственную потенциальную функцию соленоида $U = -\frac{1}{2} LI^2/c^2$. Подставляя сюда полученное выражение для L имеем

$$U = -2\pi N^2 \frac{S}{l} \left(\frac{I}{c}\right)^2.$$

Замечая, что $l/c = B/4\pi n$, представим U в виде

$$U = -\frac{1}{8\pi} B^2 V,$$

где $V = Sl$ — объем соленоида.

Рассмотрим далее соленоид с двумя обмотками, содержащими соответственно N_1 и N_2 витков. Пусть по ним протекают разные токи (I_1 и I_2). Токи могут течь либо в одном и том же, либо в разных направлениях. Чтобы найти коэффициент взаимной индукции M между обеими обмотками, заметим, что поле, создаваемое током I_2 , $B^{(2)} = 4\pi n_2 \frac{I_2}{c}$ (n_2 — число витков второй обмотки, приходящееся на единицу длины соленоида). Поэтому магнитный поток, создаваемый током I_2 через один виток первой обмотки, $SB^{(2)} = 4\pi n_2 S \frac{I_2}{c}$. Умножая эту величину на общее число витков N_1 первой обмотки, находим поток Φ_{21} , создаваемый током I_2 и пронизывающий первую обмотку:

$$\Phi_{21} = 4\pi n_2 SN_1 \frac{I_2}{c}.$$

Сравнивая это выражение с формулой $\Phi_{21} = M \frac{I_2}{c}$, определяем коэффициент взаимной индукции обмоток:

$$M = 4\pi n_2 N_1 S.$$

Эта величина берется со знаком плюс, если токи текут в одном направлении, и со знаком минус, если токи текут в разных направ-

лениях (правило следует из того, что в общем выражение для M входит под знаком интеграла скалярное произведение элементов проводников $d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2$). Подставляя в формулу для коэффициента взаимной индукции $n_2 = N_2/l$ (N_2 — число витков второй обмотки), окончательно получаем

$$M = \pm 4\pi N_1 N_2 \frac{S}{l} = \pm 4\pi n_1 n_2 V.$$

Мы видим, что коэффициент взаимной индукции пропорционален произведению чисел витков обеих обмоток. Из сравнения формулы для M с формулами для коэффициентов самоиндукции L_1 , L_2 обмоток

$$L_1 = 4\pi N_1^2 \frac{S}{l} = 4\pi n_1^2 V, \quad L_2 = 4\pi N_2^2 \frac{S}{l} = 4\pi n_2^2 V$$

следует, что

$$|M| = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Найдем потенциальную функцию обоих токов:

$$U = -\frac{1}{2} \left[L_1 \left(\frac{I_1}{c} \right)^2 + 2M \frac{I_1 I_2}{c^2} + L_2 \left(\frac{I_2}{c} \right)^2 \right].$$

Подставляя сюда выражения для $L_{1,2}$ и M , имеем

$$\begin{aligned} U &= -2\pi \left\{ n_1^2 \left(\frac{I_1}{c} \right)^2 \pm 2n_1 n_2 \frac{I_1 I_2}{c^2} + n_2^2 \left(\frac{I_2}{c} \right)^2 \right\} V = \\ &= -2\pi \left(n_1 \frac{I_1}{c} \pm n_2 \frac{I_2}{c} \right)^2 V. \end{aligned}$$

Но $4\pi n_1 \frac{I_1}{c} = B^{(1)}$, $4\pi n_2 \frac{I_2}{c} = B^{(2)}$. Поэтому

$$U = -\frac{1}{8\pi} (B^{(1)} \pm B^{(2)})^2 V.$$

Так как суммарное поле $B = B^{(1)} \pm B^{(2)}$ (знак плюс соответствует одинаковым, а знак минус — противоположным направлениям токов), окончательно получаем

$$U = -\frac{1}{8\pi} B^2 V.$$

Приведенная формула аналогична формуле для собственной потенциальной функции. Более того, можно показать, что формулой такого же типа определяется силовая функция в любом случае, для любых токов, а именно U всегда выражается в виде интеграла от квадрата магнитной индукции:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}^2 dV,$$

где интегрирование совершается по всему объему (вектор магнитной индукции может изменяться от точки к точке).

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 9.1. ЗАКОН ФАРАДЕЯ

До сих пор при изучении электрических и магнитных явлений мы предполагали, что электрическое и магнитное поля не связаны между собой. Между тем такое предположение справедливо только в случае, когда поля не изменяются с течением времени. Если поля не постоянны, то они уже не могут быть независимыми. Переменное магнитное поле всегда создает переменное электрическое поле, а переменное электрическое поле создает переменное магнитное поле. Первая сторона этой взаимосвязи проявляется в замечательном явлении электромагнитной индукции. Явление это, открытое Фарадеем в 1831 г., состоит в том, что если возле проводника двигать магнит либо проводник, по которому течет постоянный ток, то в проводнике возникает электрический ток без всяких посторонних источников. Ток возникает и тогда, когда проводник движется, а магнит неподвижен. Наконец, ток возникает в неподвижном проводнике и в том случае, когда возле него находится другой неподвижный проводник, по которому течет не постоянный, а переменный ток.

Общим между магнитом и проводником с постоянным током является то, что магнит и проводник создают вокруг себя магнитное поле. Поэтому можно утверждать, что возникновение индукционного тока в опытах с магнитом и постоянным током связано с наличием магнитного поля и относительного движения проводника и поля. В опыте с проводником, по которому течет переменный ток, имеется только магнитное поле тока, но поле это является переменным. Возникновение тока означает возникновение электрического поля. Поэтому опыт с переменным током явно показывает, что переменное магнитное поле окружено электрическим полем. Как мы убедимся далее, явление электромагнитной индукции при относительном движении проводника и магнита означает, по существу, то же самое, т. е. создание переменным магнитным полем электрического поля.

Переходя к изучению электромагнитной индукции, начнем со случая, когда магнит (или проводник с постоянным током) покоится и в его поле движется замкнутый проводник. Возникновение тока в движущемся проводнике легко понять. Действительно, если, например, проводник ab движется перпендикулярно магнитному полю \mathbf{B} со скоростью \mathbf{v} , то на заряд e в проводнике действует сила Лоренца

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

вызывающая движение заряда вдоль проводника (рис. 9.1). Если теперь разрешить проводнику ab свободно скользить вдоль металлической рамки $ABCD$ (рис. 9.2) то в замкнутой цепи $abCD$ потечет электрический ток. Чтобы вычислить силу этого тока, найдем сперва электродвижущую силу индукции \mathcal{E} . ЭДС всегда определяется как интеграл по проводящему контуру от силы f/e , действующей на единичный заряд, т. е.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{e} \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{f} \, d\mathbf{l},$$

где интегрирование производится вдоль контура \mathcal{L} в направлении,

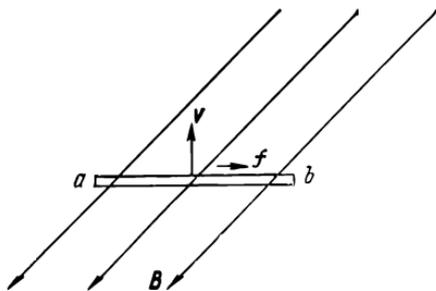


Рис. 9.1

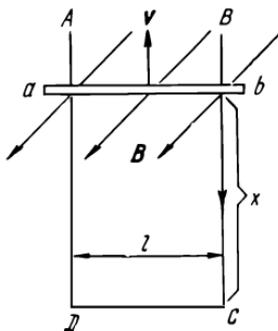


Рис. 9.2

совпадающем с направлением тока. Поэтому в рассматриваемом случае

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \oint_{\mathcal{L}} [\mathbf{vB}] \, d\mathbf{l},$$

а так как движется только один участок цепи ab и $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, $d\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$, то, очевидно,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} vBl,$$

где l — длина подвижного участка цепи ab . Разделив \mathcal{E} на полное сопротивление R всей замкнутой цепи, найдем в соответствии с законом Ома силу тока в цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBl}{cR}.$$

Полученное выражение для ЭДС можно преобразовать, учитывая, что $v = dx/dt$, где x — путь, пройденный проводником ab . Обозначая через S площадь рамки, $S = xl$, имеем, очевидно,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} BS.$$

Но BS представляет собой магнитный поток через проводящую рамку. Значит, ЭДС индукции пропорциональна производной по времени от магнитного потока, пронизывающего проводящий контур.

Уточним этот вывод, вспомнив определение магнитного потока. Мы условились ранее понимать под магнитным потоком, пронизывающим контур \mathcal{L} , поверхностный интеграл

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S},$$

где интегрирование совершается по произвольной поверхности S , опирающейся на контур \mathcal{L} , причем элемент поверхности $d\mathbf{S}$ считается ориентированным так, чтобы его направление и направление обхода контура \mathcal{L} образовывали праввинтовую систему. Поэтому при определении магнитного потока через рамку с направлением обхода, совпадающим с направлением индуцированного тока (см. рис. 9.2), мы должны покрыть ее поверхностью, например плоскостью, и считать, что нормаль к ней \mathbf{n} направлена от нас за плоскость чертежа. А так как магнитная индукция \mathbf{B} направлена перпендикулярно плоскости чертежа на нас, то для потока получаем выражение

$$\Phi = BS = -BS.$$

Поэтому ЭДС индукции можно представить в виде

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Таким образом, ЭДС индукции равняется (с точностью до множителя $1/c$) взятой с обратным знаком производной по времени от магнитного потока, пронизывающего проводящий контур. Знак минус в этой формуле имеет глубокий физический смысл. Он связан с направлением индуцируемого тока, задающим ориентацию нормали к поверхности, через которую берется магнитный поток. Направление этого тока таково, что создаваемое им магнитное поле \mathbf{B}' , как видно из рис. 9.2, направлено против поля \mathbf{B} в области внутри рамки. Поэтому индуцируется ток такого направления, при котором магнитное поле, создаваемое током, стремится ослабить изменение магнитного потока, вызвавшего индукционный ток. (Это утверждение известно под названием правила Ленца.)

Мы определили ЭДС индукции для прямоугольной рамки, но точно такой же формулой определяется ЭДС и в общем случае для произвольного проводящего контура, как угодно двигающегося в постоянном магнитном поле, причем контур может и деформироваться. Всегда ЭДС индукции равна (с точностью до множителя $1/c$) взятой с обратным знаком производной по времени от магнитного потока, пронизывающего контур, и всегда индуцируемый ток своим собственным магнитным полем стремится ослабить изменение внешнего магнитного потока, вызывающего ток.

Мы считали, что проводящий контур движется, а магнит (или проводник с постоянным током) неподвижен. Но движение всегда относительно, поэтому можно двигать не проводящий контур, а только магнит (или проводник, по которому течет постоянный

ток); в этом случае в контуре также будет индуцироваться ток. Более того, ЭДС индукции по-прежнему будет определяться формулой

$$\mathcal{E} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий контур, который в данном случае неподвижен. Для возникновения ЭДС индукции необходимо лишь, чтобы изменялся во времени магнитный поток, пронизывающий проводящий контур; движение самого контура не имеет значения. ЭДС индукции всегда пропорциональна производной по времени от указанного потока. В этом заключается общий закон электромагнитной индукции, открытый Фарадеем.

§ 9.2. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

Электродвижущая сила индукции всегда определяется изменением во времени магнитного потока, пронизывающего проводящий контур, независимо от того, движется проводник или магнит. Но как объяснить явление электромагнитной индукции в случае неподвижного проводника? Если проводник движется, а магнит неподвижен, то возникновение тока в проводнике мы связывали с силой Лоренца $\mathbf{f} = e[\mathbf{v}\mathbf{B}]/c$. Но если проводник неподвижен, то этой силы нет: почему же тогда возникает ток? Когда проводник неподвижен, на его заряды может действовать только электрическое поле. Следовательно, в этом случае в проводнике должно индуцироваться электрическое поле. Электрическое поле должно создаваться при движении магнита, т. е. должно создаваться переменным магнитным полем.

ЭДС, действующая в контуре, всегда выражается в виде интеграла по контуру от силы, действующей на единичный заряд. Поэтому ЭДС индукции в случае неподвижного проводникового контура имеет вид

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} dl,$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, порождаемого в неподвижном контуре переменным магнитным полем движущегося магнита, и интегрирование совершается вдоль проводящего контура в направлении, совпадающем с направлением индуцированного тока.

Итак, мы приходим к следующей формулировке закона электромагнитной индукции в случае неподвижного проводника: циркуляция электрического поля, индуцируемого в проводящем контуре переменным магнитным полем, совпадает (с точностью до множителя $1/c$) с взятой со знаком минус производной по времени от магнитного потока, пронизывающего контур, т. е.

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} dl = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ — магнитный поток,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S}.$$

Здесь S — произвольная поверхность, опирающаяся на контур \mathcal{L} , и направления векторов $d\mathbf{l}$ и $d\mathbf{S}$ образуют вместе правовинтовую систему.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Циркуляция электрического поля, возникающего при электромагнитной индукции, может быть отличной от нуля (если только отлично от нуля изменение магнитного потока через контур), в то время как циркуляция электростатического поля всегда равна нулю. Иными словами, при электромагнитной индукции возникает не потенциальное, а вихревое электрическое поле.

Вернемся теперь к выражению для ЭДС индукции. В случае движущегося проводника она определяется формулой

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \oint_{\mathcal{L}} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \, dl,$$

а в случае покоящегося проводника — формулой

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \, dl,$$

По внешнему виду это две совершенно различные и никак не связанные между собой формулы. Поэтому кажется, что при разъяснении явления электромагнитной индукции в случае движущегося проводника и покоящегося магнита и в случае покоящегося проводника и движущегося магнита нужно пользоваться различными подходами и формулами. Между тем явление в обоих случаях одно и то же, ибо движение по сути своей всегда относительно и совершенно безразлично, что двигать — проводник или магнит. Однако обе формулы для ЭДС, различные по виду, в действительности тождественны. Электрическое и магнитное поля образуют единое целое — электромагнитное поле; разделение его на поле электрическое и поле магнитное имеет относительный характер; иными словами, это разделение происходит по-разному в разных системах отсчета.

Чтобы убедиться в этом, запишем уравнение движения заряженной частицы в электрическом и магнитном полях:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right).$$

Данное уравнение, так же как и уравнение движения Ньютона, должно быть справедливо в любой инерциальной системе отсчета. Однако при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой скорость частицы изменяется, а ускорение остается неизменным. Поэтому левая часть уравнения остается неизменной, правая же изменится, если только не претерпит соответствующего изменения поля.

Итак, если написанное уравнение движения относится к системе K , то в системе K' уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e \left(\mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v}'\mathbf{B}'] \right),$$

где штрих служит для обозначения величин в системе K' , а \mathbf{v}' связано с \mathbf{v} законом сложения скоростей $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ (\mathbf{V} — скорость системы K' относительно K). Так как ускорение в обеих системах одинаково, то мы приходим к соотношению

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] = \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v}'\mathbf{B}'],$$

которое должно выполняться для любых \mathbf{v} и \mathbf{V} . Отсюда можно найти связь между заштрихованными и незаштрихованными полями.

Однако нужно учитывать, что в действительности скорости \mathbf{v} и \mathbf{V} не могут быть любыми, так как и исходное уравнение движения, и закон сложения скоростей справедливы только при малых по сравнению с c скоростях. Поэтому написанное соотношение позволяет найти связь между полями в системах K и K' только в случае малых V , т. е. при $V \ll c$:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Из приведенных формул следует, что если в системе K электрическое поле отсутствует, но отлично от нуля магнитное поле, то в системе K' электрическое поле отлично от нуля (при $[\mathbf{v}\mathbf{B}] \neq 0$).

Поэтому, если проводник движется относительно магнита, то в системе отсчета, связанной с проводником, существует электрическое поле

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Так как в этом случае

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \oint_{\mathcal{L}} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \, dl,$$

то ЭДС индукции можно представить в виде

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}' \, dl.$$

Полученная формула совпадает с формулой для ЭДС индукции в случае неподвижного проводника.

Таким образом, ЭДС индукции всегда равна циркуляции электрического поля в системе отсчета, связанной с проводником, т. е. в системе, где проводник неподвижен. Закон электромагнитной индукции утверждает, что эта циркуляция всегда определяется полным изменением магнитного потока, пронизывающего контур.

§ 9.3. ИНДУКЦИОННЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ ТОКА

Явление электромагнитной индукции используется для построения генераторов тока. Простейшим является генератор переменного тока, работа которого основана на том, что при равномерном вращении проводящей рамки в постоянном магнитном поле в ней индуцируется переменная ЭДС, синусоидально изменяющаяся со временем (рис. 9.3). Если магнитное поле однородно, то магнитный поток, пронизывающий рамку, определяется формулой

$$\Phi = BS \cos \vartheta,$$

где \mathbf{B} — вектор магнитной индукции; S — площадь рамки; ϑ — угол между \mathbf{B} и нормалью к рамке. При равномерном вращении

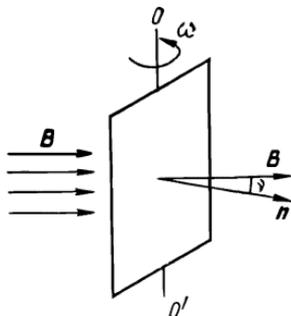


Рис. 9.3

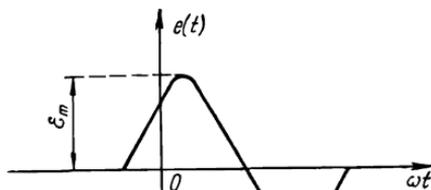


Рис. 9.4

рамки с угловой частотой ω угол $\vartheta = \omega t + \vartheta_0$ (ϑ_0 — начальное значение ϑ). Тогда

$$\Phi = BS \cos (\omega t + \vartheta_0).$$

ЭДС индукции (обозначим ее через $e(t)$) связана с Φ законом Фарадея:

$$e(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Подставляя сюда написанное выражение для Φ , получаем

$$e(t) = \frac{1}{c} BS\omega \sin (\omega t + \vartheta_0).$$

Таким образом, при равномерном вращении рамки (витка) в постоянном магнитном поле в рамке наводится ЭДС, периодически изменяющаяся во времени по закону синуса. Период ЭДС равен, очевидно,

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

а ее амплитуда \mathcal{E}_m определяется при однородном поле произведением индукции, частоты и площади рамки:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{c} BS\omega.$$

Зависимость ЭДС индукции от времени изображена на рис. 9.4. На рис. 9.5 показано, как наводимую в витке ЭДС можно передать во внешнюю цепь. Для этого достаточно концы витка присоединить к двум кольцам, вращающимся вместе с витком, внешнюю же цепь связать с кольцами с помощью двух щеточных контактов.

Как указывалось выше, для получения ЭДС индукции не обязательно двигать проводник; с равным успехом можно получить ЭДС индукции и в случае неподвижного проводника, если двигать источник магнитного поля. Именно такой принцип используется во всех современных мощных генераторах переменного тока (они

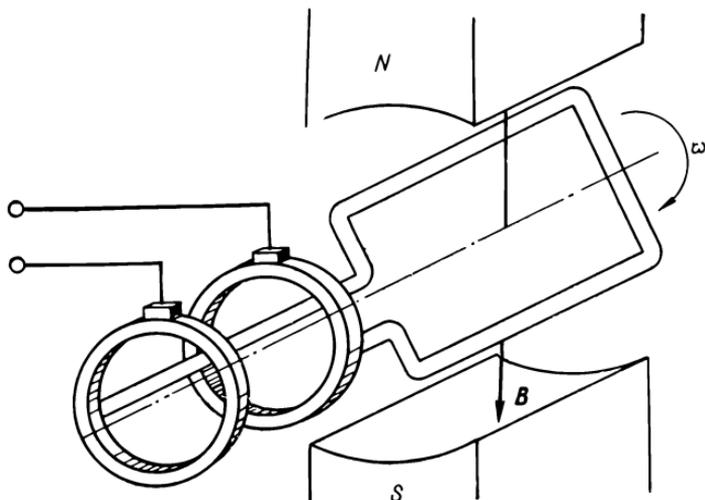


Рис. 9.5

называются синхронными генераторами). Строятся такие генераторы главным образом для получения трехфазного тока, применение которого обладает рядом преимуществ.

Трехфазным током называют совокупность трех синусоидальных токов, сдвинутых по фазе на угол $2\pi/3$ друг относительно друга. При одинаковой амплитуде этих токов мгновенные их значения определяются следующим образом:

$$i_1 = I \sin \omega t, \quad i_2 = I \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \quad i_3 = I \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right),$$

где I — амплитуда тока; ω — его частота. Легко проверить непосредственным расчетом, что сумма этих токов равна нулю:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Но проще в этом убедиться с помощью геометрического построения. Представим себе вектор OI (рис. 9.6), который вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω . Если длина его равна I , то, очевидно, проекция вектора на ось y равна i_1 . Поэтому если построить еще два вектора $O2$ и $O3$, длины которых также равны I и которые сдвинуты относительно вектора $O1$ на углы 120° и 240° ,

то при вращении всех указанных векторов против часовой стрелки их проекции на ось y равны i_1, i_2, i_3 . Но векторная сумма векторов $O1, O2$ и $O3$, очевидно, равна нулю, откуда и вытекает равенство нулю суммы мгновенных значений трех токов.

Основное преимущество трехфазного тока и связано с этим равенством. Для использования трех постоянных токов требуется шесть проводов — по паре проводов на каждый ток. Если же сумма токов равна нулю, то требуется только три провода. Действительно, соединим вместе в одну точку (точка O' на рис. 9.7) концы $1', 2', 3'$ трех катушек, в которых индуцируются ЭДС

$$e_1 = \mathcal{E}_m \sin \omega t, \quad e_2 = \mathcal{E}_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \quad e_3 = \mathcal{E}_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

с одинаковой амплитудой \mathcal{E}_m . Концы $1, 2, 3$ катушек соединим

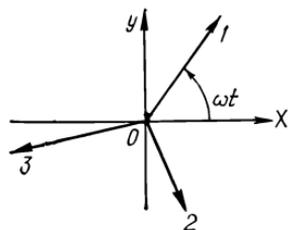


Рис. 9.6

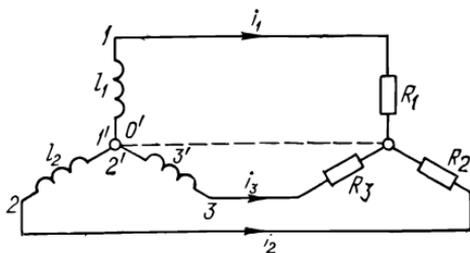


Рис. 9.7

тремя проводами с нагрузкой, состоящей из трех сопротивлений R_1, R_2, R_3 , соединенных вместе звездой, как показано на рисунке. Если $R_1 = R_2 = R_3$, то, очевидно, амплитуды токов в проводах одинаковы, и поэтому сумма мгновенных значений токов i_1, i_2, i_3 равна нулю. Таким образом, наша система работает с тремя, а не с шестью проводами. Правда, если нагрузки R_1, R_2, R_3 не одинаковы, то не одинаковы и амплитуды токов и сумма мгновенных значений токов i_1, i_2, i_3 уже не равна нулю. В этом случае необходим еще добавочный четвертый провод, соединяющий точки O и O' .

Трехфазная система ЭДС создается с помощью трехфазного генератора, который состоит из статора с тремя одинаковыми неподвижными обмотками, смещенными по окружности статора друг относительно друга на 120° (на рис. 9.8 они схематически изображены тремя парами проводов $11', 22', 33'$), и ротора, представляющего собой катушку, которая может вращаться вокруг оси статора. Ротор питается постоянным током и поэтому создает внутри статора магнитное поле. При вращении ротора в статорных обмотках наводятся ЭДС индукции, а так как обмотки эти пространственно смещены друг относительно друга на 120° , то возникающие в них ЭДС по фазе отличаются друг от друга на $2\pi/3$.

Генератор переменного тока можно видоизменить таким образом, что он будет давать постоянный ток (точнее, почти постоянный ток). Для этого следует присоединить концы витка не к двум кольцам, как показано на рис. 9.5, а к двум изолированным половинкам одного кольца (см. рис. 9.15). Тогда в течение первой поло-

вины периода напряжение между щетками такое же, как и в случае двух колец. Но ситуация изменится во вторую половину периода, поскольку каждая из щеток будет касаться уже другой половины кольца, а следовательно, теперь верхняя щетка будет соединена с проводником a' , а нижняя щетка — с проводником a . Поэтому напряжение между щетками будет изменяться так же, как и в первую половину периода. Иными словами, если в витке наводится ЭДС индукции $e(t) = \mathcal{E}_m \sin \omega t$, то напряжение на щетках определяется формулой

$$u(t) = \mathcal{E}_m |\sin \omega t|.$$

Изменение этого напряжения со временем показано на рис. 9.9.

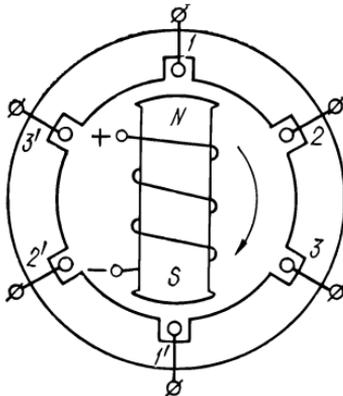


Рис. 9.8

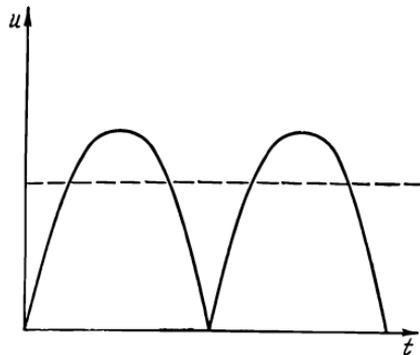


Рис. 9.9

Таким образом, используя вместо двух колец одно, состоящее из двух изолированных друг от друга половин (оно называется коллектором), можно получить ЭДС, не изменяющую знака. Если вращать не один, а много витков и использовать коллектор, состоящий не из двух полуколец, а из многих пластин, можно получить ЭДС, очень близкую к постоянной. Рассмотрим, например, схему генератора с четырьмя витками, соединенными последовательно в замкнутый контур (рис. 9.10), и коллектора, состоящего из четырех пластин. Каждая из пластин соединена с обмоткой. В местах соединения щеток с коллектором обмотка делится на две параллельно соединенные цепи, каждая из которых содержит два последовательно соединенных витка, смещенных друг относительно друга на 90° . По этой причине наводимые в них ЭДС $e_1(t)$ и $e_2(t)$ отличаются друг от друга по фазе на $\pi/2$, т. е.

$$e_1(t) = \mathcal{E}_m \sin \omega t, \quad e_2(t) = \mathcal{E}_m \cos \omega t.$$

Благодаря коллектору напряжение на щетках $u(t)$ равно $|e_1(t) + e_2(t)|$, а не $e_1(t) + e_2(t)$ (зависимость $e_1(t)$ и $e_2(t)$ от времени показана на рис. 9.11). Мы видим, что напряжение на щетках очень близко к постоянному и содержит лишь небольшие пульсации. Увеличивая число витков и число пластин коллектора, можно сделать пульсации напряжения ничтожными, т. е. получить почти

постоянную ЭДС. На этом основан принцип действия генератора постоянного тока.

В рассмотренных генераторах электрического тока ЭДС индукции наводится в твердых металлических проводниках, которые движутся в магнитном поле, для чего используются механические двигатели. Но можно построить генератор и иначе, применяя в качестве рабочего тела не твердый металлический проводник, а ионизованный газ. Такой генератор называется магнитогидродинами-

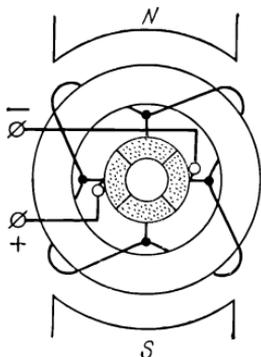


Рис. 9.10

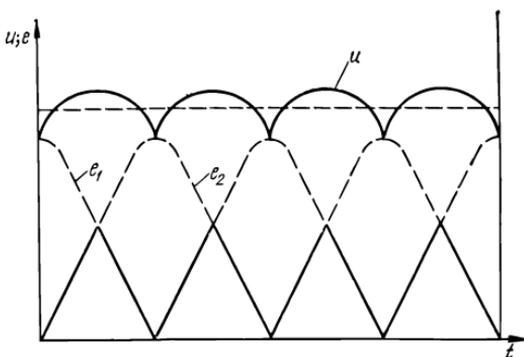


Рис. 9.11

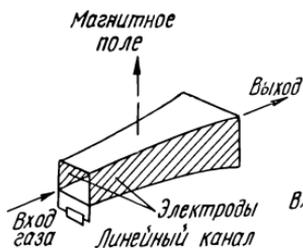


Рис. 9.12

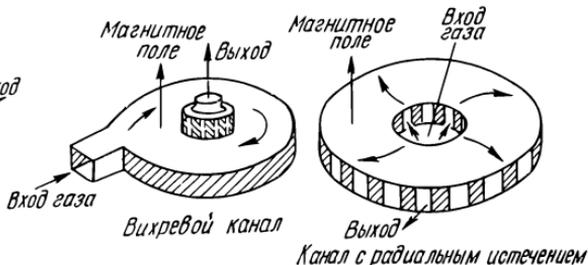


Рис. 9.13

ческим или сокращенно МГД генератором. В МГД генераторе газ разогревается до высоких температур, вследствие чего происходит термическая ионизация газа. Ионизованный газ движется в магнитном поле, и в нем наводится ЭДС индукции. Простейшая схема МГД генератора изображена на рис. 9.12. Ионизованный газ движется здесь в прямом канале, перпендикулярно которому расположено магнитное поле. В результате возникает электрическое поле

$$E = \frac{1}{c} [\mathbf{vB}]$$

(\mathbf{v} — скорость газа), направленное перпендикулярно скорости и магнитной индукции. Если по обе стороны канала расположить электроды и подключить их к электрическому сопротивлению (на-

грузке), то через газ, электроды и нагрузку потечет электрический ток. Возникающая ЭДС равна, очевидно, vBd/c , где d — расстояние между электродами. Важным преимуществом МГД генератора является то, что здесь не нужен промежуточный первичный двигатель, необходимый в обычных генераторах, а недостатком — то, что для получения необходимой степени ионизации газа требуется очень высокая температура.

Наряду с линейной конфигурацией МГД генератора возможны и другие конструкции, например вихревая или спиральные (рис. 9.13). В них газ входит в цилиндрическую камеру тангенциально, а выходит вдоль поверхности внутреннего цилиндра. Магнитное поле имеет осевое направление, а электродами служат внутренний и внешний цилиндры. На рис. 9.13 показан также генератор с радиальным истечением газа.

§ 9.4. УНИПОЛЯРНАЯ ИНДУКЦИЯ

Получению постоянной ЭДС не обязательно должно предшествовать возбуждение переменной ЭДС. Используя явление электромагнитной индукции, можно, в принципе, построить генератор постоянного тока и без предварительного получения переменной

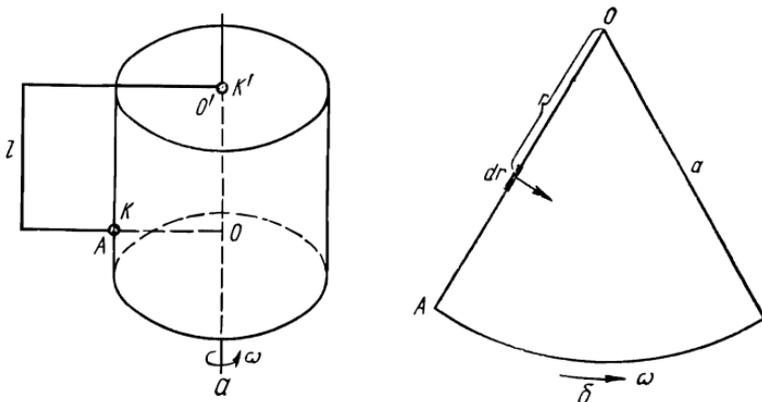


Рис. 9.14

ЭДС. С этой целью будем вращать постоянный цилиндрический магнит вокруг его оси и присоединим к нему с помощью скользящих контактов K и K' проводник l (рис. 9.14, а). Тогда в проводнике возникнет ЭДС индукции. Чтобы найти эту ЭДС, рассмотрим замкнутый контур \mathcal{L} , состоящий из проводника l , материальных частиц магнита, лежащих на радиусе AO , участка оси OO' и контактов K и K' (в точке A магнита касается контакт K). С течением времени перемещаются только материальные частицы, лежащие на участке контура AO . Поэтому ЭДС индукции определяется формулой

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_{AO} [\mathbf{vB}] dl,$$

где интегрирование производится вдоль радиуса AO . Так как скорость его элемента dr (рис. 9.14, б) равна ωr , где ω — угловая скорость вращения магнита, то

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_0^a \omega B r \, dr,$$

где B — магнитная индукция внутри магнита; a — радиус магнита. Если B не зависит от r , то, очевидно,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c} \omega a^2 B.$$

Мы видим, что эта величина действительно не зависит от времени (ее называют ЭДС униполярной индукции).

Униполярный генератор не находит практического применения, и униполярная индукция интересна только с точки зрения разъяснения смысла закона индукции Фарадея. Тонкость здесь заключается в том, что понимать под контуром, фигурирующим в законе Фарадея. Когда замкнутый проводник движется относительно магнита или магнит движется относительно замкнутого проводника, контур совпадает с замкнутым проводником. В опыте же с униполярной индукцией ЭДС наводится на участке AO , а участок этот как будто не изменяется, поэтому кажется, что вообще никакой ЭДС не должно возникать. Но под контуром \mathcal{L} в законе Фарадея следует понимать материальный контур, т. е. контур, образованный определенными материальными частицами. Именно через такой контур и нужно определять магнитный поток Φ , т. е. для определения ЭДС нужно находить поток Φ через контур, образованный одними и теми же частицами.

§ 9.5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ДВИГАТЕЛИ

Рассмотренные нами генераторы переменного и постоянного тока обладают важным свойством обратимости. Оно заключается в том, что если в генератор, точнее, в генераторное устройство, подать извне соответствующее напряжение, то подвижная часть генератора начнет вращаться. Таким образом, генераторное устройство может, в принципе, работать как электрический двигатель.

Рассмотрим, например, двигатель постоянного тока, простейшая схема которого с коллектором в виде двух полуколец изображена на рис. 9.15. Если к щеткам присоединить источник постоянной ЭДС, то по нижнему проводнику a будет течь ток i , а по верхнему проводнику — ток $-i$. На эти проводники действуют силы Лоренца

$$\mathbf{F} = \frac{i}{c} [l\mathbf{B}], \quad \mathbf{F}' = -\frac{i}{c} [l\mathbf{B}],$$

где l — направленная длина проводников a , a' . Таким образом, возникает пара сил с вращающим моментом

$$\mathbf{N} = [h\mathbf{F}],$$

где \mathbf{h} — вектор, соединяющий проводники. Максимальное значение N определяется формулой

$$N_{\max} = \frac{i}{c} l B h = \frac{i}{c} \Phi_{\max},$$

где Φ_{\max} — максимальное значение магнитного потока через площадь, ограниченную проводниками.

Если бы не было коллектора и постоянная ЭДС подавалась бы в виток (якорь) с помощью двух колец с присоединенными к ним

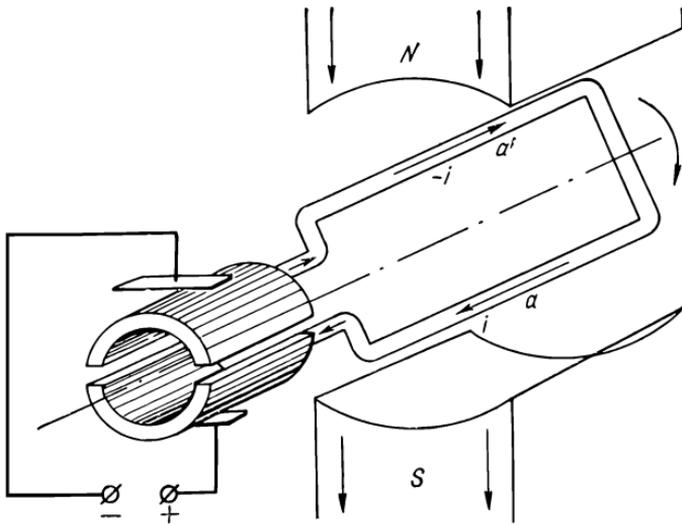


Рис. 9.15

щетками (см. рис. 9.15), то после полуоборота якоря направления токов в проводниках a и a' изменились бы на обратные, что привело бы к изменению направления вращающего момента. Ситуация, однако, существенно изменяется благодаря коллектору. Так как проводники a и a' присоединены к изолированным друг от друга полукольцам коллектора, то после полуоборота якоря в проводнике a' , который будет теперь сверху, изменится направление тока (он раньше был присоединен к щетке $+$, а теперь к щетке $-$), т. е. в нем будет течь ток в том же направлении, в котором раньше протекал ток в проводнике a . Аналогичная ситуация создается в проводнике a , который теперь снизу. Ясно, что вращающий момент при этом не изменит своего направления, т. е. якорь будет вращаться в одном и том же направлении.

Связав якорь с другими телами, могущими вращаться, мы передадим этим телам вращающий момент двигателя. Если эти тела совершают при угловом перемещении $d\vartheta$ работу dA , то наш якорь будет кроме вращающего момента N испытывать еще действие тормозящего момента, равного $dA/d\vartheta$. Поэтому если момент

инерции якоря и присоединенных к нему вращающихся тел равен I , то угловая скорость ω якоря определяется уравнением

$$\frac{d}{dt} (\omega I) = N - \frac{dA}{d\theta}.$$

Подобно двигателю постоянного тока можно построить и двигатель переменного тока, основываясь на обращении генератора переменного тока. Но прежде чем рассмотреть такой двигатель (он называется синхронным), остановимся на асинхронном двигателе, работа которого основана на использовании вращающегося магнитного поля.

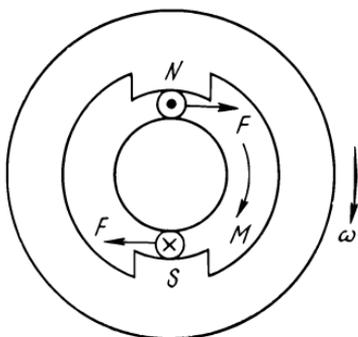


Рис. 9.16

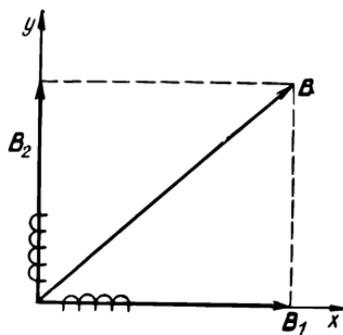


Рис. 9.17

Чтобы разъяснить принцип действия асинхронного двигателя, представим, что в междуполюсное пространство магнита помещен замкнутый виток, который вращается около оси магнита (на рис. 9.16 он закреплен на насаженном на ось и могущем вращаться металлическом цилиндре). Если магнит начнет вращаться, то в витке возникнет ЭДС индукции, которая вызовет электрический ток. Этот ток будет взаимодействовать с магнитным полем, вращающимся вместе с магнитом, и в результате сам виток вместе со скрепленным с ним цилиндром придет во вращение в том же направлении, в котором вращается поле. В этом можно убедиться, рассматривая силы, действующие на ток в витке; этот же вывод следует из того, что взаимодействие тока с магнитным полем происходит всегда так, чтобы магнитный поток через площадь, ограниченную током, был максимально возможным. Максимум может достигаться, очевидно, в том случае, когда магнитное поле перпендикулярно плоскости витка. Но для этого виток должен двигаться с такой же угловой скоростью, как и сам магнит, что, однако, невозможно, так как при этом отсутствовало бы относительное движение магнита и витка и, следовательно, в витке не возникало бы индукционного тока. Поэтому виток будет следовать за вращающимся полем, но угловая скорость вращения витка будет несколько меньше угловой скорости «вращения» магнитного поля.

Вращающееся магнитное поле можно создать без механического вращения постоянного магнита. Чтобы разъяснить это, представим себе две одинаковые катушки, расположенные друг относи-

тельно друга под углом 90° , которые питаются синусоидальными токами i_1 и i_2 , сдвинутыми по фазе на $\pi/2$, т. е.

$$i_1 = I \sin \omega t, \quad i_2 = I \cos \omega t,$$

где I — амплитуда токов. Ясно, что магнитные индукции \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 , порождаемые этими токами, также будут синусоидальными функциями времени, отличающимися по фазе на $\pi/2$. Но, кроме того, векторы индукции \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 будут, как и катушки, взаимно перпендикулярны. Если оси катушек выбрать в качестве осей x и y (рис. 9.17), то можно считать, что вектор \mathbf{B}_1 направлен вдоль оси x , а вектор \mathbf{B}_2 — вдоль оси y , т. е.

$$\mathbf{B}_1 = i B_{\max} \sin \omega t, \quad \mathbf{B}_2 = j B_{\max} \cos \omega t,$$

где i и j — орты вдоль осей x и y ; B_{\max} — максимальное значение индукции в катушках (считаем для простоты, что эта величина одинакова в обеих катушках). Нас интересует результирующее магнитное поле, образуемое обеими катушками:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = i B_{\max} \sin \omega t + j B_{\max} \cos \omega t.$$

Мы видим, что вектор \mathbf{B} , не изменяя своей абсолютной величины, равномерно вращается с угловой скоростью ω .

Следовательно, вращающееся магнитное поле можно получить с помощью двух катушек, смещенных в пространстве на угол 90° друг относительно друга и питаемых синусоидальными токами, отличающимися по фазе на $\pi/2$. Можно использовать и три катушки, если расположить их в пространстве под углом 120° по отношению друг к другу и питать трехфазным током. Мы приходим, таким образом, к статору генератора трехфазного тока, три обмотки которого питаются извне трехфазным током. Если взять теперь ротор с замкнутой накоротко обмоткой, то он будет вращаться вслед за вращающимся магнитным полем статора.

Такой двигатель (асинхронный) находит широчайшую область применения. Особенностью его является то, что с ростом нагрузки (т. е. тормозящего момента) уменьшается число оборотов ротора и увеличивается ток в обмотке ротора.

Синхронный двигатель представляет собой обращение синхронного генератора — в обмотки статора подается извне трехфазный ток, а ротор, так же как и в синхронном генераторе, питается постоянным током. Этот ток взаимодействует с вращающимся магнитным полем, создаваемым обмотками статора, в результате чего и вращается ротор. Синхронный двигатель в отличие от асинхронного развивает постоянное число оборотов ротора, независимо от нагрузки (если она не превосходит определенного предела). Изготавливаются синхронные двигатели обычно на относительно большие мощности, начиная от 100 кВт и выше.

§ 9.6. ЭДС ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ И САМОИНДУКЦИИ. МАГНИТНАЯ ЭНЕРГИЯ ТОКОВ

Рассмотрим два проводящих контура. Пусть в одном из них, например в первом, действует некоторая сторонняя ЭДС $e_1^{(e)}(t)$, зависящая от времени. Тогда ток в первом контуре i_1 также за-

висит от времени. От времени зависит и магнитное поле $\mathbf{B}^{(1)}$, создаваемое током i_1 , а следовательно, и магнитный поток Φ_{21} , пронизывающий второй контур и создаваемый током в первом контуре. Это значит, что во втором контуре возникнет ЭДС индукции

$$e_{21}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{21}}{dt},$$

которая называется ЭДС взаимной индукции.

В § 8.11 мы показали, что

$$\Phi_{21} = M \frac{i_1}{c},$$

где M — коэффициент взаимной индукции обоих контуров. Эта формула справедлива для постоянного тока, но ею можно пользоваться и в случае переменного тока, если только ток изменяется достаточно медленно (квазистационарный ток). Именно, необходимо, чтобы время, в течение которого ток претерпевает существенное изменение, было велико по сравнению со временем, которое требуется свету, чтобы пройти от одного контура к другому, а также расстояние порядка размеров контуров. Если это условие выполнено, что мы предполагаем, то ЭДС взаимной индукции определяется выражением

$$e_{21}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(M \frac{i_1}{c} \right).$$

Если контуры неподвижны и недеформируемы, то величина M не зависит от времени и

$$e_{21}(t) = -\frac{M}{c} \frac{d i_1}{dt}.$$

Если же контуры могут двигаться и изменять свою форму и размеры, то следует дифференцировать все произведение $M i_1/c$.

ЭДС взаимной индукции вызовет во втором контуре ток i_2 , который, так же как и ток i_1 , будет переменным. Поэтому, он, в свою очередь, вызовет ЭДС взаимной индукции в первом контуре:

$$e_{12}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi_{12} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(M \frac{i_2}{c} \right).$$

Но кроме $e_{21}(t)$ и $e_{12}(t)$ в контурах возникнут еще две ЭДС индукции, связанные с изменением собственных магнитных потоков. Действительно, собственные магнитные потоки Φ_{11} и Φ_{22} , вызываемые токами i_1 и i_2 в своих контурах, пропорциональны токам:

$$\Phi_{11} = L_1 \frac{i_1}{c}, \quad \Phi_{22} = L_2 \frac{i_2}{c}$$

(L_1 и L_2 — коэффициенты самоиндукции контуров). Поэтому они изменяются со временем и вызывают в контурах ЭДС индукции

$$e_{11}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{11}}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(L_1 \frac{i_1}{c} \right),$$

$$e_{22}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{22}}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(L_2 \frac{i_2}{c} \right).$$

Эти ЭДС называются ЭДС самоиндукции. Если контур не изменяет своих размеров и формы, то величина L будет постоянной; в противном случае следует учитывать изменение L .

Итак, в первом и втором контурах действуют соответствующие суммарные ЭДС:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= e_1^{(e)}(t) + e_{11}(t) + e_{12}(t) = \\ &= e_1^{(e)}(t) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(L_1 \frac{i_1}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(M \frac{i_2}{c} \right); \\ e_2(t) &= e_{22}(t) + e_{21}(t) = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(L_2 \frac{i_2}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(M \frac{i_1}{c} \right). \end{aligned}$$

Если во втором контуре действует еще некоторая сторонняя ЭДС $e_2^{(e)}(t)$, то к сумме $e_{22} + e_{21}$ следует добавить $e_2^{(e)}$.

При постоянных коэффициентах взаимной индукции и самоиндукции

$$\frac{e_{21}}{e_{11}} = \frac{M}{L_1}.$$

В частности, если взять соленоид с двумя обмотками, содержащими N_1 и N_2 витков, то, как мы знаем, справедливо соотношение $M/L_1 = N_2/N_1$ (в действительности оно является приближенным). Поэтому если обмотки соленоида рассматривать как первый и второй контуры, то для них будет выполняться соотношение

$$\frac{e_{21}}{e_{11}} = \frac{N_2}{N_1}.$$

При малых токах в обмотках величина e_{11} незначительно отличается от $e_1^{(e)}$, так что

$$|e_{21}| \approx e_1^{(e)} \frac{N_2}{N_1}.$$

Это соотношение показывает, что соленоид с двумя обмотками может служить как преобразователь переменной ЭДС: если в первичной обмотке соленоида действует ЭДС $e_1^{(e)}$, то возникающая в его вторичной обмотке ЭДС взаимной индукции будет примерно в N_2/N_1 раз больше. В этом состоит принцип действия трансформатора переменного тока. Практически используются как воздушные соленоиды, так и соленоиды с железным сердечником.

Разделив $e_1(t)$ и $e_2(t)$ на сопротивления контуров R_1 и R_2 , мы получим согласно закону Ома силы токов i_1 и i_2 :

$$i_1 = \frac{e_1(t)}{R_1}, \quad i_2 = \frac{e_2(t)}{R_2}.$$

Подставляя сюда найденные выражения для ЭДС взаимной индукции и самоиндукции, имеем

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(L_1 \frac{i_1}{c} \right) + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(M \frac{i_2}{c} \right) &= e_1^{(e)}(t), \\ R_2 i_2 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(L_2 \frac{i_2}{c} \right) + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(M \frac{i_1}{c} \right) &= e_2^{(e)}(t). \end{aligned}$$

Приведенные дифференциальные уравнения позволяют найти токи i_1 и i_2 как функции времени, если известны сторонние ЭДС $e_1^{(e)}$, $e_2^{(e)}$ и электромагнитные параметры контуров L_1 , L_2 , M , R_1 , R_2 . Мы не будем искать решение этой задачи, а остановимся только на энергетической стороне вопроса, который заключается в следующем. Внешние источники ЭДС доставляют в контуры за время dt энергию $(e_1^{(e)}i_1 + e_2^{(e)}i_2)dt$. Как же расходуется эта энергия? Часть ее, несомненно, идет на покрытие джоулева тепла:

$$dQ = (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) dt.$$

За счет источников сторонних ЭДС совершается работа магнитных сил, действующих между контурами и в самих контурах (если они деформируемы). Действительно, сила Лоренца перпендикулярна скорости, и, следовательно, само магнитное поле не может производить работу. В случае постоянных токов работа магнитных сил dA равняется уменьшению потенциальной функции U :

$$U = -\frac{1}{2c^2} (L_1 i_1^2 + 2M i_1 i_2 + L_2 i_2^2).$$

т. е.

$$dA = -dU = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{i_1^2}{c^2} dL_1 + \frac{2i_1 i_2}{c^2} dM + \frac{i_2^2}{c^2} dL_2 \right).$$

Но если токи не строго постоянны, а квазистационарны, то эта формула также справедлива.

Сравним теперь величину $(e_1^{(e)}i_1 + e_2^{(e)}i_2) dt$ с суммой $dQ + dA$. Используя дифференциальные уравнения для токов i_1 и i_2 , имеем

$$\begin{aligned} (e_1^{(e)}i_1 + e_2^{(e)}i_2) dt - dQ - dA &= \frac{i_1}{c} d\left(L_1 \frac{i_1}{c}\right) + \\ &+ \frac{i_1}{c} d\left(M \frac{i_2}{c}\right) + \frac{i_2}{c} d\left(L_2 \frac{i_2}{c}\right) + \frac{i_2}{c} d\left(M \frac{i_1}{c}\right) - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{i_1}{c}\right)^2 dL_1 - \frac{i_1 i_2}{c^2} dM - \frac{i_2^2}{c^2} dL_2. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{i}{c} d\left(L \frac{i}{c}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{i}{c}\right)^2 dL &= \frac{1}{2} d\left(L \frac{i^2}{c^2}\right), \\ \frac{i_1}{c} d\left(M \frac{i_2}{c}\right) + \frac{i_2}{c} d\left(M \frac{i_1}{c}\right) - \frac{i_1 i_2}{c^2} dM &= d\left(M \frac{i_1 i_2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} (e_1^{(e)}i_1 + e_2^{(e)}i_2) dt - dQ - dA &= \\ &= d\left(\frac{1}{2} L_1 \frac{i_1^2}{c^2} + \frac{1}{2} L_2 \frac{i_2^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Мы видим, что разность энергии $(e_1^{(e)}i_1 + e_2^{(e)}i_2) dt$, доставляемой внешними источниками, и суммы джоулева тепла dQ и работы dA равна не нулю, а приращению величины

$$W_m = \frac{L_1}{2} \left(\frac{i_1}{c} \right)^2 + M \frac{i_1 i_2}{c^2} + \frac{L_2}{2} \left(\frac{i_2}{c} \right)^2.$$

Ясно, что эту величину мы должны интерпретировать как некоторую энергию. Единственная возможность заключается в том, чтобы рассматривать ее как магнитную энергию токов. Этот вывод будет подтвержден в главе 11, исходя из более общей точки зрения.

§ 9.7. БЕТАТРОН

Как указывалось в предыдущих параграфах, возникновение индукционного тока — вторичный эффект: первичным является создание переменным магнитным полем вихревого электрического поля. Чтобы убедиться в этом непосредственно, следует видоизменить опыт, в котором наблюдается электромагнитная индукция, а именно убрать проводник и оставить только свободные заряды. Тогда, если переменное магнитное поле действительно создает вокруг себя вихревое электрическое поле, то должно наблюдаться ускорение свободных зарядов этим полем. Такое ускорение и осуществляется в бетатроне, в котором свободные электроны вращаются по круговой орбите, пронизываемой переменным магнитным потоком.

Покажем, как определить ускоряющее электрическое поле в бетатроне. Для этого следует воспользоваться законом электромагнитной индукции

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Но прежде всего возникает вопрос, что понимать в бетатроне под контуром \mathcal{L} . Ведь здесь нет обычного для индукционных опытов проводящего контура. С таким вопросом мы уже встречались в § 9.4 при разъяснении униполярной индукции и убедились, что под \mathcal{L} следует всегда понимать материальный контур, т. е. контур, образуемый определенными частицами или элементами среды. В случае бетатрона в качестве частиц возьмем ускоряемые электроны, и тогда контуром \mathcal{L} будет их круговая траектория.

В бетатроне вектор магнитной индукции \mathbf{B} перпендикулярен плоскости траектории и является функцией как времени t , так и расстояния r до центра траектории: $B = B(r, t)$. Поэтому магнитный поток, пронизывающий траекторию, определяется формулой

$$\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_0^R B(r, t) 2\pi r dr,$$

где R — радиус круговой орбиты электрона. Силовые линии индуцируемого электрического поля \mathbf{E} в бетатроне будут, очевидно,

окружностями, концентрическими с круговой орбитой электрона, причем напряженность поля зависит как от r , так и от t . Поэтому циркуляция электрического поля вдоль этой орбиты равна $E2\pi R$. Приравняв циркуляцию $(1/c)d\Phi/dt$, находим ускоряющее электрическое поле на орбите электрона:

$$E = \frac{1}{2\pi c R} \frac{d}{dt} \int_0^R B(r, t) 2\pi r dr,$$

или

$$E = \frac{R}{2c} \dot{\bar{B}}(t),$$

где

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{\pi R^2} \Phi = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R B(r, t) 2\pi r dr.$$

Эта величина имеет, очевидно, смысл средней индукции по площади, ограниченной орбитой. Производная по времени от средней индукции и определяет ускоряющее поле.

Под действием электрического поля E электрон ускоряется и его импульс p (направленный вдоль траектории) изменяется по закону

$$\frac{dp}{dt} = eE = \frac{eR}{2c} \dot{\bar{B}}(t).$$

Отсюда следует, что

$$p \equiv p(t) = \frac{eR}{2c} (\bar{B}(t) - \bar{B}(0)) + p_0,$$

где p_0 — начальное значение импульса. Таким образом, импульс электрона растет пропорционально средней магнитной индукции. Поэтому если за период обращения электрона средняя магнитная индукция возрастет на $\Delta\bar{B}$, то за каждый период обращения электрона импульс электрона увеличится на величину

$$\Delta p = \frac{eR}{2c} \Delta\bar{B}.$$

Теперь выясним, как сделать движение электрона круговым, а точнее, можно ли сделать движение электрона круговым, используя то же магнитное поле $B(r, t)$, которое служит для ускорения электрона. Под действием поля $\mathbf{V}(r, t)$ электрон испытывает действие силы $(e/c) [\mathbf{v}\mathbf{B}]$, равной $(e/c)vB(r, t)$ и направленной к центру орбиты. Поэтому если движение электрона происходит по окружности радиуса R , то мы должны приравнять эту силу произведению массы электрона m на центростремительное ускорение v^2/R , т. е.

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{e}{c} vB(R, t),$$

откуда

$$mv = p(t) = \frac{e}{c} RB(R, t),$$

где $B(R, t)$ — мгновенное значение индукции на орбите.

Таким образом, для того чтобы движение электрона в переменном магнитном поле происходило по окружности, необходимо, чтобы импульс электрона изменялся пропорционально полю на орбите. Однако мы уже нашли, как будет изменяться импульс электрона вследствие ускорения. Поэтому сравним обе формулы, которые должны давать одинаковый результат, т. е.

$$\frac{eR}{2c} (\bar{B}(t) - \bar{B}(0)) + p_0 = \frac{e}{c} RB(R, t).$$

Считая, что $p_0 = (eR/2c) \bar{B}(0)$, приходим к соотношению

$$\bar{B}(t) = 2B(R, t),$$

которое и представляет собой условие существования круговой орбиты электронов в бетатроне. Следовательно, для выполнения этого условия необходимо, чтобы средняя магнитная индукция была в два раза больше значения магнитной индукции на орбите.

Бетатрон позволяет ускорять электроны до значительных энергий — порядка сотен миллионов электрон-вольт; для получения больших энергий он уже не пригоден, главным образом из-за эффекта излучения.

Глава 10

ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ

§ 10.1. ИНДУКТИВНОСТЬ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Простота генерирования переменного тока, легкость его трансформации и возможности превращения его энергии в механическую работу обусловили широчайшее использование переменных токов на практике. Но закономерности, которым подчиняются переменные токи, отличаются от закономерностей постоянного тока. Мы начнем с выяснения роли индуктивности.

Рассмотрим проводящий контур, в котором действует переменная ЭДС или приложено переменное напряжение. В случае постоянной ЭДС \mathcal{E} сила тока равнялась бы \mathcal{E}/R , где R — сопротивление контура. Но при переменной ЭДС $\mathcal{E}(t)$ или переменном напряжении $u(t)$ переменным будет и ток, а в таком случае в контуре возникнет добавочная ЭДС — ЭДС самоиндукции $-L di/dt$, так что в контуре действует суммарная ЭДС $\mathcal{E}(t) - L di/dt$. Поэтому сила тока i определяется из уравнения

$$i = \frac{\mathcal{E}(t) - L \frac{di}{dt}}{R}$$

или

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E}(t)$$

(мы используем систему единиц СИ, в которой \mathcal{E} и u измеряются в вольтах, сила тока — в амперах и коэффициент индуктивности L — в генри). Не следует думать, что и при постоянной ЭДС сила тока определяется просто как \mathcal{E}/R . При включении ЭДС ток вначале равен нулю, а затем возрастает; при любом изменении величины тока возникает ЭДС самоиндукции, которая сама влияет на ток. Поэтому и вопрос о включении постоянной ЭДС также требует специального рассмотрения.

Уравнению $L di/dt + Ri = \mathcal{E}(t)$ соответствует схема цепи с сосредоточенными индуктивностью и сопротивлением (рис. 10.1). Таким образом, напряжение $u \equiv \mathcal{E}(t)$ раскладывается на два слагаемых $u_R = Ri$ и $u_L = L di/dt$, представляющих собой напряжения на сопротивлении и индуктивности: $u = u_R + u_L$. В действительности не всегда можно в цепи реально разделить u на u_R и u_L . Но если цепь состоит из реостата с малой индуктивностью и катушки с большой индуктивностью, то разности потенциалов на реостате и катушке будут равны u_R и u_L . Для того чтобы реостат имел малую индуктивность, на

него следует намотать согнутую вдвое проволоку (бифилярная намотка). В этом случае всюду оказываются рядом противоположно направленные токи, благодаря чему их магнитные поля почти компенсируются.

Уравнение, которое мы получили для определения силы тока, представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с известной правой частью. Для его решения нужно сперва решить однородное уравнение $L di/dt + Ri = 0$. Решение, очевидно, имеет вид

$$i = Ae^{-\frac{Rt}{L}},$$

где A — постоянная, равная силе тока в начальный момент времени.

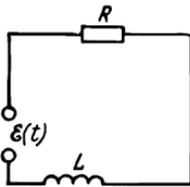


Рис. 10.1

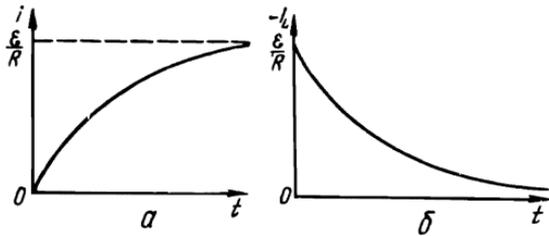


Рис. 10.2

Чтобы найти теперь решение неоднородного уравнения, положим

$$i = A(t) e^{-\frac{Rt}{L}},$$

где $A(t)$ — некоторая неизвестная функция времени. Подставляя это выражение в неоднородное уравнение, получаем

$$L \left(A'(t) - \frac{R}{L} A(t) \right) + RA(t) e^{-\frac{Rt}{L}} = u, \quad u \equiv \mathcal{E}(t),$$

откуда

$$A'(t) = \frac{1}{L} e^{\frac{Rt}{L}} u,$$

и, следовательно,

$$A(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e^{\frac{Rt}{L}} u dt + A(0).$$

Умножая $A(t)$ на $\exp(-Rt/L)$, находим силу тока:

$$i(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \int_0^t e^{\frac{Rt}{L}} u(t) dt + i_0 e^{-\frac{Rt}{L}},$$

где $i_0 \equiv A(0)$ — начальное значение силы тока. Эта формула и решает поставленную задачу — она определяет силу тока по заданной ЭДС или напряжению и начальному значению тока. В случае постоянной ЭДС, считая $i_0 = 0$, получаем

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right).$$

Мы видим, что при постоянной ЭДС сила тока в цепи не постоянна. и, в принципе, только при $t \rightarrow \infty$ сила тока достигает значения \mathcal{E}/R , даваемого элементарным законом Ома.

В действительности характерным масштабом времени установления предельного значения силы тока $i_\infty = \mathcal{E}/R$ является величина

$$\tau = \frac{L}{R},$$

называемая постоянной времени контура. (При $t \sim \tau$ экспонента в скобках равна примерно $1/3$, а при $t \sim 2\tau$ — порядка $1/10$.) Постоянная времени пропорциональна индуктивности и обратно пропорциональна сопротивлению, поэтому чем больше индуктивность и чем меньше сопротивление, тем постоянная больше. На рис. 10.2, а изображен ход зависимости силы тока от времени. Постепенное изменение тока связано с наличием индуктивности и вызвано появлением в контуре ЭДС самоиндукции. Запишем формулу для силы тока в виде $i = \mathcal{E}/R + i_L$, где $i_L = -(\mathcal{E}/R)\exp(-Rt/L)$. Мы видим, что роль ЭДС самоиндукции сводится к тому, что в контуре наряду с током \mathcal{E}/R протекает еще ток i_L (рис. 10.2 б), который вначале компенсирует ток \mathcal{E}/R , а затем постепенно затухает. Этот ток называют экстратоком самоиндукции.

Рассмотрим случай, когда в контуре действует синусоидальная ЭДС: $u = U \cos \omega t$, где U — амплитуда ЭДС; ω — ее частота. При этом сила тока определяется формулой

$$i(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} U \int_0^t e^{\frac{Rt}{L}} \cos \omega t dt + i_0 e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Чтобы вычислить входящий сюда интеграл, заметим, что $\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\frac{Rt}{L}} \cos \omega t dt &= \operatorname{Re} \int_0^t e^{\frac{Rt}{L}} e^{i\omega t} dt = \\ &= \operatorname{Re} \frac{e^{\left(\frac{R}{L} + i\omega\right)t} - 1}{\frac{R}{L} + i\omega}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$i(t) = \operatorname{Re} \frac{U}{R + i\omega L} e^{i\omega t} + \tilde{i}_0 e^{-\frac{Rt}{L}},$$

где $\tilde{i}_0 = i_0 - \text{Re}(U/R + i\omega L)$. Здесь второе слагаемое представляет собой экстраток самоиндукции. Он затухает со временем и по прошествии времени порядка $\tau = L/R$ может не учитываться. Первое слагаемое определяет силу установившегося тока в контуре, к которому приближается $i(t)$:

$$i(t)_{t \gg \tau} = \text{Re} \left(\frac{U}{R + i\omega L} e^{i\omega t} \right).$$

Замечая, что

$$R + i\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{i\varphi}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R},$$

можно представить силу установившегося или стационарного тока в виде

$$i(t) = I \cos(\omega t - \varphi),$$

где

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Мы видим, что стационарный ток является синусоидальным, так же как и приложенная ЭДС. Но фазы тока и ЭДС не совпадают, а отличаются на величину φ . Поэтому кривые, изображающие $u(t)$ и $i(t)$, сдвинуты друг относительно друга (рис. 10.3). Если ЭДС или напряжение достигает максимума при $\omega t = 0$, то максимум тока достигается позже, при $\omega t = \varphi$. Таким образом, ток «отстает» по фазе от напряжения; величину φ называют сдвигом фаз.

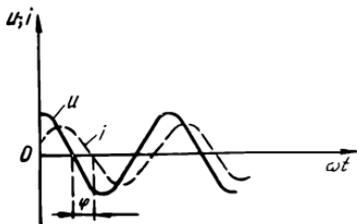


Рис. 10.3

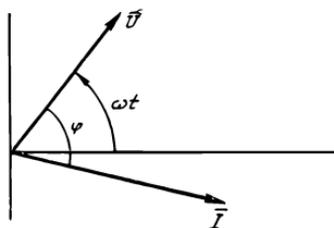


Рис. 10.4

Амплитуда силы тока I пропорциональна амплитуде напряжения и равна частному от деления U на $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$. Поэтому величина $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ играет роль сопротивления в цепи переменного тока, содержащей сопротивление и индуктивность. Оно всегда больше, чем R , так что амплитуда переменного тока меньше силы постоянного тока при равенстве напряжений. Для того чтобы учесть сдвиг фаз между током и напряжением, введем комплексное сопротивление цепи или импеданс

$$Z = R + i\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{i\varphi}$$

и перейдем от амплитуд U и I к комплексным амплитудам \bar{U} , \bar{I} , связанным между собой обобщенным законом Ома:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{Z} = \frac{\bar{U}}{|Z|} e^{-i\varphi},$$

Мгновенные значения напряжения и силы тока связаны с комплексными амплитудами соотношениями

$$u(t) = \operatorname{Re} \bar{U} e^{i\omega t} = U \cos \omega t,$$

$$i(t) = \operatorname{Re} \bar{I} e^{i\omega t} = I \cos (\omega t - \varphi)$$

(для простоты считаем, что $\bar{U} = U$). Приведенные формулы до-

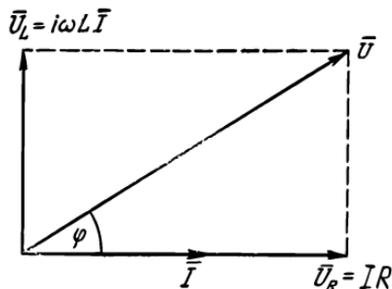


Рис. 10.5

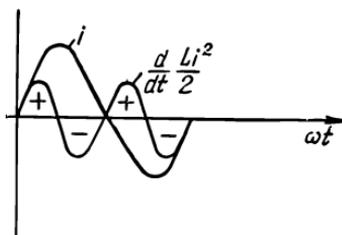


Рис. 10.6

пускают простую геометрическую интерпретацию. Именно, если на плоскости комплексного переменного построить векторы \bar{U} и \bar{I} (рис. 10.4) и вращать их против часовой стрелки с угловой скоростью ω , то проекции векторов на ось абсцисс будут равны мгновенным значениям напряжения и силы тока.

Такого рода векторные диаграммы очень полезны для уяснения фазовых соотношений в цепях переменного тока. Построим, например, векторную диаграмму, разъясняющую соотношение между i , u , u_R и u_L . Удобно начать с изображения тока (рис. 10.5). Поскольку $u_R = Ri$, комплексная амплитуда $\bar{U}_R = \bar{I}R$ изобразится вектором, идущим вдоль \bar{I} . Рассмотрим далее $u_L = L di/dt$. Так как $d/dt \times \times \exp(i\omega t) = i\omega \exp(i\omega t)$ и множителю i соответствует на комплексной плоскости поворот на $\pi/2$ против часовой стрелки, то комплексная амплитуда напряжения на индуктивности $\bar{U}_L = i\omega L \bar{I}$ представится вектором, перпендикулярным \bar{I} . На рис. 10.5 он отложен от конца вектора \bar{U}_R . Ясно, что если мы сложим векторы \bar{U}_R и \bar{U}_L , то получим вектор \bar{U} :

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L.$$

Отметим, что напряжение на индуктивности опережает ток и напряжение на сопротивлении на угол $\pi/2$.

Рассмотрим теперь энергетическое соотношение в нашей цепи. Очевидно, внешний источник ЭДС подает за время dt в цепь энер-

гию, равную $uidt$. Эту величину на основании дифференциального уравнения для тока представим в виде

$$ui dt = \left(L \frac{di}{dt} + Ri \right) i dt = Ri^2 dt + d \left(\frac{1}{2} Li^2 \right).$$

Здесь первое слагаемое определяет джоулево тепло, выделяющееся за время dt , а второе — изменение магнитной энергии цепи за время dt . Величина Ri^2 всегда положительна, так как джоулево тепло все время выделяется. Величина $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$ может быть и положительной и отрицательной, а именно она положительна, когда квадрат силы тока возрастает, и отрицательна, когда он убывает. Если $i = I \sin \omega t$, то $\frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{4} LI^2 (1 - \cos 2\omega t)$ и $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{1}{2} \omega LI^2 \sin 2\omega t$. Эта величина положительна в первой и третьей четвертях периода изменения тока (рис. 10.6) и отрицательна во второй и четвертой четвертях. Это значит, что в первую четверть периода тока в цепи накапливается магнитная энергия, однако в течение второй четверти периода она возвращается внешнему источнику ЭДС; затем вновь накапливается в цепи в третью четверть и, наконец, снова отдается источнику ЭДС в четвертую четверть.

Таким образом, магнитная энергия непрерывно переходит из источника ЭДС в цепь и обратно из цепи в источник ЭДС, среднее же значение ее за период тока (и даже за половину этого периода) равно нулю. Поэтому среднее за период значение мощности, доставляемой в цепь источником ЭДС, равно среднему значению ежесекундно выделяющегося джоулева тепла:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2 dt,$$

где T — период тока. Подставляя сюда $i = I \sin \omega t$, получаем

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \int_0^T RI^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{1}{2} RI^2.$$

Это выражение отличается от выражения для джоулева тепла, выделяемого постоянным током I на сопротивлении R , только множителем $1/2$. Поэтому вводят эффективное значение силы переменного тока I_e , отличающееся множителем $1/\sqrt{2}$ от максимального значения:

$$I_e = \frac{1}{\sqrt{2}} I.$$

Средняя потребляемая мощность записывается тогда в виде

$$\mathcal{P} = RI_e^2.$$

Это выражение можно представить в иной форме. Замечая, что $I = U/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$, имеем

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} IU \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Так как $R/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \cos \varphi$, где φ — сдвиг между напряжением и током, то

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} IU \cos \varphi,$$

или

$$\mathcal{P} = I_e U_e \cos \varphi.$$

Здесь I_e и U_e — эффективные значения тока и напряжения, отличающиеся множителем $1/\sqrt{2}$ от максимальных значений этих величин. Наконец, \mathcal{P} можно, очевидно, записать в виде

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \bar{I} \bar{U}^*,$$

где \bar{U}^* — комплексно-сопряженное значение величины \bar{U} .

§ 10.2. ЕМКОСТЬ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Переменный ток в отличие от постоянного может протекать в цепи, в которую последовательно включен конденсатор. Это связано с возникновением переменного заряда на обкладках конденсатора.

Рассмотрим сперва простейший случай, когда индуктивность цепи ничтожно мала, так что схема цепи имеет вид, изображенный на рис. 10.7. Здесь R обозначает сопротивление цепи; C — емкость конденсатора. Приложенное внешнее напряжение u , зависящее, в общем, от времени, равно, очевидно, сумме напряжений или разностей потенциалов u_R и u_C на сопротивлении и конденсаторе, $u = u_R + u_C$. Ясно, что $u_R = iR$, а $u_C = q/C$, где i — сила тока; q — заряд на обкладке конденсатора. Поэтому

$$u = Ri + \frac{1}{C}q,$$

а так как i и q связаны между собой очевидным соотношением $i = dq/dt$, то

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = u.$$

Приведенное дифференциальное уравнение позволяет найти заряд как функцию времени при известном $u = u(t)$. Для этого нужно сперва найти решение однородного уравнения $Rdq/dt + q/C = 0$, которое имеет, очевидно, вид

$$q = Ae^{-\frac{t}{RC}},$$

где A — постоянная. Решение неоднородного уравнения нужно искать в таком же виде, но считать A уже функцией времени. При этом

$$\frac{dq}{dt} = \left(\frac{dA}{dt} - \frac{1}{RC} A \right) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Тогда неоднородное уравнение принимает вид

$$\frac{u}{R} = \left(\frac{dA}{dt} - \frac{A}{RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{A}{RC} e^{-\frac{t}{RC}},$$

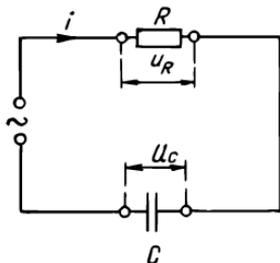


Рис. 10.7

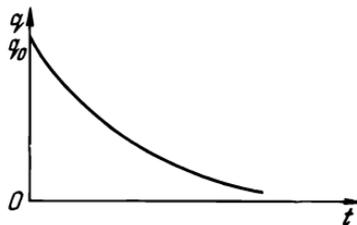


Рис. 10.8

откуда

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{R} e^{\frac{t}{RC}} u,$$

и, следовательно,

$$A(t) = \frac{1}{R} \int_0^t e^{\frac{t}{RC}} u(t) dt + A(0).$$

Итак,

$$q(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{t}{RC}} u(t) dt + q_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

где $q_0 \equiv A(0)$ — начальное значение заряда на конденсаторе. Дифференцируя это выражение по времени, находим силу тока:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{R} u - \frac{1}{RC} \left\{ \frac{1}{R} \int_0^t e^{\frac{t}{RC}} u(t) dt + q_0 \right\} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Рассмотрим несколько наиболее важных применений этих формул. Пусть внешнее напряжение отсутствует: $u = 0$. Это означает, что обкладки конденсатора с начальными зарядами q_0 и $-q_0$ соеди-

нены проводом, сопротивление которого равно R . В этом случае; как мы видим, заряд изменяется со временем по закону

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

т. е. экспоненциально затухает с постоянной времени

$$\tau = RC,$$

так что по прошествии времени τ заряд уменьшится в e раз. Ясно, что при этом закон сохранения заряда не нарушается, так как суммарный заряд на обеих обкладках конденсатора равен нулю и при соединении обкладок происходит лишь стекание заряда с одной обкладки на другую. Это стекание заряда определяет разрядный ток конденсатора:

$$i = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Зависимость заряда конденсатора q от времени в процессе разряда показана на рис. 10.8.

Рассмотрим далее случай, когда внешнее напряжение не зависит от времени: $u = \text{const}$. Для простоты предположим, что начальный заряд равен нулю. Эта задача соответствует процессу зарядки конденсатора. Учитывая, что

$$\int_0^t e^{\frac{t}{RC}} dt = RC \left(e^{\frac{t}{RC}} - 1 \right),$$

получаем следующее выражение для заряда как функции времени:

$$q(t) = Cu \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Мы видим, что заряд на конденсаторе q , равный вначале нулю, постепенно увеличивается со временем и при $t \gg RC$ практически достигает своего предельного значения, $q_\infty = Cu$, равного произведению напряжения u на емкость конденсатора (рис. 10.9). Здесь снова, как и при разряде конденсатора, появляется постоянная времени конденсатора $\tau = RC$. Эта величина определяет масштаб времени, в течение которого практически заканчивается процесс зарядки конденсатора (хотя теоретически он продолжается бесконечно долго!). Это время тем больше, чем больше сопротивление и емкость конденсатора.

Производная от $q(t)$ по времени определяет зарядный ток

$$i(t) = \frac{u}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Он экспоненциально затухает со временем, причем снова характерным временем затухания будет $\tau = RC$ (рис. 10.10). В начальный момент времени зарядный ток равен u/R . Таким был бы постоянный ток при наличии ЭДС на участке с сопротивлением R . Иными словами, в начальный момент ток в цепи такой же, как и в отсутствие конденсатора.

Рассмотрим, наконец, случай, когда к цепи присоединен источник переменной ЭДС и напряжение u изменяется по синусоидальному закону $u = U \cos \omega t$ (U — амплитуда напряжения, ω — его частота). Переходя, так же как и при изучении роли индуктивности, к комплексным величинам

$$u(t) = \operatorname{Re} \bar{U} e^{i\omega t}$$

и учитывая, что

$$\int_0^t e^{\frac{t}{RC}} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega + \frac{1}{RC}} \left(e^{\frac{t}{RC}} - 1 \right),$$

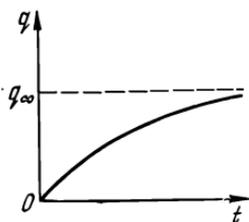


Рис. 10.9

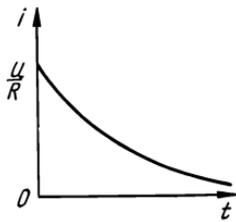


Рис. 10.10

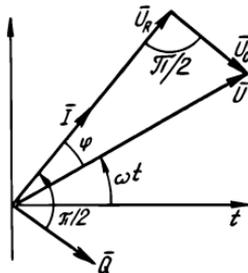


Рис. 10.11

получаем

$$q(t) = \operatorname{Re} (\bar{Q} e^{i\omega t}) + \operatorname{Re} \tilde{q}_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

где

$$\bar{Q} = \frac{\frac{1}{i\omega} U}{R + \frac{1}{i\omega C}}$$

и $\tilde{q}_0 = q_0 - \bar{Q}$. Мы видим, что заряд $q(t)$ выражается в виде суперпозиции двух зарядов, из которых один изменяется в такт с внешним напряжением, а другой затухает со временем по экспоненте с постоянной времени $\tau = RC$. Поэтому по прошествии времени $t \gg \tau$ остается только одно слагаемое, синусоидально изменяющееся со временем:

$$q(t)_{t \gg \tau} = \operatorname{Re} (\bar{Q} e^{i\omega t})$$

(\bar{Q} называется комплексной амплитудой заряда).

Определим силу тока $i(t) = dq/dt$. Она будет, как и $q(t)$, выражаться в виде суммы двух слагаемых, из которых одно изменяется в такт с приложенным напряжением, а другое экспоненциально затухает по закону $\exp(-t/RC)$. При $t \gg \tau$ останется только первое слагаемое:

$$i(t)_{t \gg \tau} = \operatorname{Re} (\bar{I} e^{i\omega t}),$$

где \bar{I} — комплексная амплитуда силы тока:

$$\bar{I} = i\omega\bar{Q} = \frac{\bar{U}}{R + \frac{1}{i\omega C}}.$$

Она равна частному от деления амплитуды напряжения \bar{U} на величину

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C},$$

которую называют полным сопротивлением или импедансом цепи, содержащей R и C .

Разберем теперь фазовые соотношения в цепи. Записывая импеданс в виде

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{-i\varphi},$$

где $\operatorname{tg} \varphi = 1/\omega CR$, получаем

$$u(t) = U \cos \omega t, \quad i(t) = I \cos(\omega t + \varphi),$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}.$$

Таким образом, ток в цепи, содержащей емкость, опережает по фазе напряжение; амплитуды силы тока и напряжения связаны между собой обобщенным законом Ома с сопротивлением $\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$.

При $\omega \rightarrow 0$ оно обращается в бесконечность — постоянный ток не может протекать через конденсатор. Если $\omega \rightarrow \infty$, то сопротивление не отличается от активного сопротивления R — ток очень большой частоты протекает через конденсатор беспрепятственно.

Построим векторную диаграмму для цепи, состоящей из C и R . Запишем соотношение между комплексными амплитудами тока и напряжения в виде

$$\bar{U} = Z\bar{I} = \bar{U}_R + \bar{U}_C,$$

где

$$\bar{U}_R = R\bar{I}, \quad \bar{U}_C = \frac{1}{i\omega C}\bar{I}.$$

Ясно, что U_R представляет собой комплексную амплитуду напряжения на сопротивлении, а U_C — комплексную амплитуду напряжения на емкости. В комплексной плоскости им соответствуют векторы, изображенные на рис. 10.11. Если эту диаграмму вращать против часовой стрелки с угловой частотой ω , то проекции векторов на ось i дадут мгновенные значения силы тока и всех напряжений. На диаграмме изображен также вектор комплексной амплитуды заряда, а, очевидно, заряд отстает от тока по фазе на $\pi/2$, так что

$$q(t) = \frac{I}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

§ 10.3. ИНДУКТИВНОСТЬ И ЕМКОСТЬ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Выяснив поведение индуктивности и емкости при прохождении переменного тока, можем рассчитать любую цепь переменного тока, в которой действует синусоидальное напряжение. При этом следует лишь учитывать, что основными элементами любой цепи являются активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C и что им соответствуют импедансы (или комплексные сопротивления) R , $i\omega L$, $1/i\omega C$ (рис. 10.12). Каждая цепь строится из этих

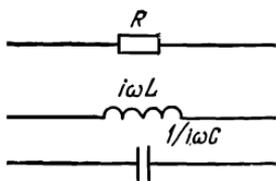


Рис. 10.12

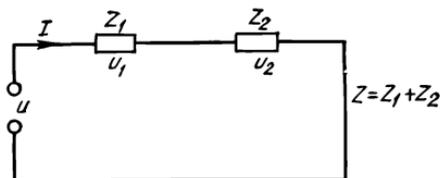


Рис. 10.13

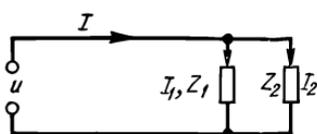


Рис. 10.14

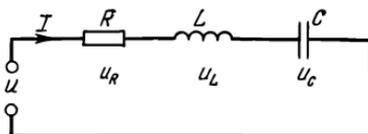


Рис. 10.15

элементов, которые могут соединяться последовательно или параллельно. Если цепь состоит из последовательно соединенных участков, которым соответствуют импедансы Z_1, Z_2, \dots , то импеданс всей цепи Z равен их сумме:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots$$

Это следует из того, что через все импедансы Z_1, Z_2, \dots проходит общий ток (рис. 10.13). Ясно, что в этом случае комплексные амплитуды напряжений на участках цепи с импедансами Z_1, Z_2, \dots равны $\bar{U}_1 = \bar{I}Z_1$, $\bar{U}_2 = \bar{I}Z_2$. Общее напряжение $\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \dots$

Если цепь состоит из параллельно соединенных участков с импедансами Z_1, Z_2, \dots (рис. 10.14), то через них проходят разные токи. $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots$ Общим будет напряжение; в этом случае складываются обратные импедансы:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots$$

Ясно, что комплексные амплитуды токов, текущих в участках с различными импедансами, $\bar{I}_1 = \bar{U}/Z_1$, $\bar{I}_2 = \bar{U}/Z_2$, ..., а суммарный ток в неразветвленной цепи $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots$

Рассмотрим два простейших приложения этих формул — последовательное и параллельное соединения индуктивности и емкости.

Схема последовательного соединения индуктивности и емкости представлена на рис. 10.15. Импеданс цепи, очевидно, определяется формулой

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}.$$

Поэтому комплексные амплитуды тока и напряжения связаны между собой соотношением

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{Z} = \frac{\bar{U}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

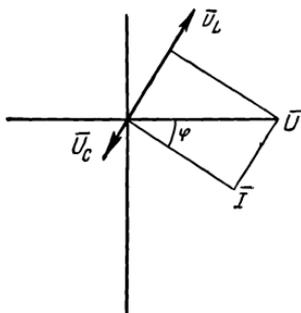


Рис. 10.16

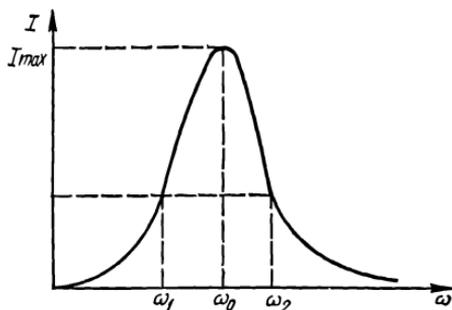


Рис. 10.17

Мгновенное значение силы тока при $u(t) = U\cos\omega t$

$$i(t) = I\cos(\omega t - \varphi),$$

где амплитуда тока определяется формулой

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

а сдвиг фаз φ — формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) / R.$$

На рис. 10.16 приведена векторная диаграмма цепи. Мы видим, что комплексные амплитуды напряжений \bar{U}_L и \bar{U}_C на индуктивности и емкости сдвинуты по фазе относительно силы тока на $\pi/2$ и $-\pi/2$.

Амплитуда силы тока I при заданной амплитуде напряжения U и заданных параметрах цепи R, L, C является функцией частоты ω . Графически эта функция изображена на рис. 10.17. Ток обра-

щается в нуль при $\omega = 0$, $\omega = \infty$ и достигает максимума при выполнении условия

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

т. е. при частоте

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

В этом случае говорят о резонансе в цепи с последовательным соединением индуктивности и емкости, а частоту ω_0 называют резонансной частотой.

Максимум тока при резонансе $\omega = \omega_0$ (этот резонанс называют еще резонансом напряжений) $I_{\max} = U/R$, так что импеданс цепи при резонансе совпадает с активным сопротивлением. Сдвиг фаз между током и общим напряжением обращается при резонансе в нуль. Если сопротивление R достаточно мало, то кривая $I_{\max} = I(\omega)$ (ее называют резонансной кривой) имеет очень острый максимум. Условно определяют ширину $\Delta\omega$ резонансной кривой как разность частот ω_1 и ω_2 (см. рис. 10.17), в которых сила тока равна $I/\sqrt{2}$. Для этих частот $(\omega L - 1/\omega C)^2 = R^2$, откуда

$$\Delta\omega = \omega_0 \frac{R}{\rho},$$

где

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Таким образом, ширина резонансной кривой пропорциональна активному сопротивлению цепи.

Напряжения на индуктивности и емкости при резонансе одинаковы по абсолютной величине и отличаются друг от друга только знаком:

$$u_L = U_L \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right), \quad u_C = U_C \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$U_L = U_C = \rho I.$$

Так как при резонансе $U = RI$, то

$$\frac{U_L, C}{U} = \frac{\rho}{R}.$$

Эта величина может быть значительно больше единицы, поэтому при резонансе напряжения на индуктивном и емкостном участках цепи могут быть больше общего напряжения.

Рассмотрим параллельное соединение индуктивности и емкости. Схема цепи представлена на рис. 10.18 (R_1 и R_2 — сопротивления катушки индуктивности и обкладок конденсатора вместе с присоединенными к ним проводами). Импедансы обеих ветвей цепи определяются формулами

$$Z_1 = R_1 + i\omega L, \quad Z_2 = R_2 + \frac{1}{i\omega C}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2},$$

откуда находим полный импеданс всей цепи:

$$Z = \frac{(R_1 + i\omega L) \left(R_2 + \frac{1}{i\omega C} \right)}{R_1 + R_2 + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

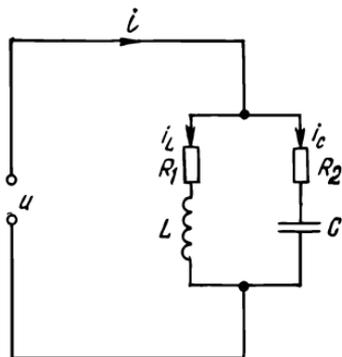


Рис. 10,18

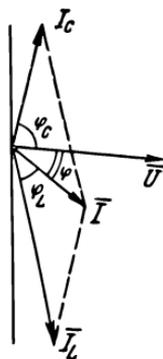


Рис. 10,19

Если активные сопротивления R_1 и R_2 достаточно малы, так что ими можно пренебречь в числителе данной формулы, то получаем

$$Z \approx \frac{\frac{L}{C}}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)},$$

где $R = R_1 + R_2$. Величиной R в знаменателе, очевидно, нельзя пренебрегать, так как знаменатель может быть мал. На рис. 10.19 изображена векторная диаграмма, соответствующая рассматриваемой цепи. Здесь \bar{I}_L и \bar{I}_C обозначают комплексные амплитуды сил токов в ветвях с индуктивностью и емкостью; сумма этих величин, $\bar{I} = \bar{I}_L + \bar{I}_C$, представляет собой комплексную амплитуду тока в неразветвленной части цепи. Углы сдвига фаз φ_L и φ_C между токами i_L и i_C и общим напряжением u определяются формулами

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{\omega L}{R_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_C = \frac{1}{\omega C R_2}.$$

Если $R_1 \ll \omega L$, $R_2 \ll \frac{1}{\omega C}$, то эти углы близки к $\pm \pi/2$, так что токи i_L и i_C находятся относительно друг друга почти в противофазе,

Поэтому сила тока в неразветвленной части цепи может быть значительно меньше силы токов, текущих в катушке и конденсаторе.

Особенно важен тот случай, когда суммарный ток i находится в фазе с общим напряжением u . Этот случай называется резонансом токов. Если $R_1 \ll \omega L$, $R_2 \ll 1/\omega C$, то резонанс токов возникает при условии $\omega L = 1/\omega C$, не отличающемся от условия резонанса напряжений. Иными словами, частота резонанса будет одинаковой как при резонансе напряжений, так и при резонансе токов, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Суммарный импеданс при резонансе токов определяется формулой

$$Z_r = \frac{\rho^2}{R}.$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$. Амплитуды сил токов в индуктивной и емкостной ветвях при резонансе тока почти одинаковы:

$$I_L \approx I_C \approx \frac{U}{\rho},$$

в то время как амплитуда силы тока в неразветвленной части цепи имеет вид

$$I = \frac{U}{Z_r} = U \frac{R}{\rho^2}.$$

Мы видим, что амплитуда силы тока I пропорциональна активному сопротивлению R цепи, так что при $R \rightarrow 0$ сила тока I становится исчезающе малой. Силы токов I_L и I_C в обеих ветвях будут конечными. Отсюда следует, что при $R \rightarrow 0$ можно отключить источник внешнего напряжения; тогда в контуре, состоящем из катушки и конденсатора, будет циркулировать переменный ток с частотой ω_0 . Такой контур называется колебательным.

§ 10.4. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Выясним прежде всего, как происходит разряд конденсатора не просто на сопротивление, а на катушку, обладающую индуктивностью. Иными словами, рассмотрим цепь (рис. 10.20), в которой нет внешнего источника переменной ЭДС, но конденсатор обладает в начальный момент некоторым зарядом q_0 . Каким же будет заряд конденсатора $q(t)$ в последующие моменты времени и каким будет ток $i(t)$ в этом контуре?

Очевидно, в контуре действует ЭДС самоиндукции $-L \frac{di}{dt}$. Поэтому

$$-L \frac{di}{dt} = Ri + u_C,$$

где $u_C = q/C$ — напряжение на конденсаторе (C — его емкость). Учитывая, что $i = dq/dt$, получаем следующее дифференциальное уравнение для определения заряда $q(t)$:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0.$$

Это уравнение в отличие от неоднородных уравнений является однородным уравнением второго порядка. Его решение следует искать в виде

$$q(t) = A e^{st},$$

где A и s — некоторые константы. Подставляя это выражение в уравнение для q , имеем

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0,$$

откуда получаем два значения s :

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

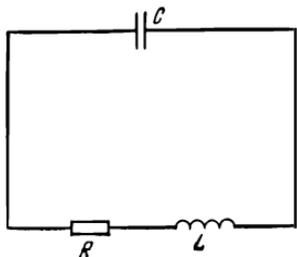


Рис. 10.20

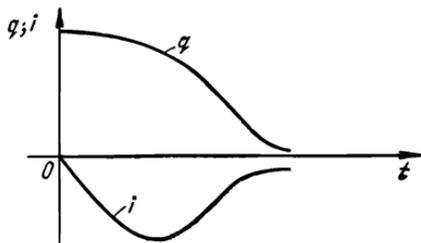


Рис. 10.21

Таким образом, общее решение нашего уравнения имеет вид

$$q(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t},$$

где A_1 и A_2 — константы, определяемые начальными условиями. В начальный момент $t = 0$ заряд $q(t)$ имеет заданное значение q_0 ; начальный ток следует считать равным нулю, так как иначе в момент включения конденсатора в цепи возникла бы бесконечная ЭДС самоиндукции. Итак,

$$q(0) = q_0, \quad i(0) = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

Поскольку $i = dq/dt$,

$$i(t) = s_1 A_1 e^{s_1 t} + s_2 A_2 e^{s_2 t},$$

получаем два уравнения

$$A_1 + A_2 = q_0, \quad s_1 A_1 + s_2 A_2 = 0$$

для определения констант A_1 и A_2 . Из них следует, что

$$A_1 = \frac{s_2}{s_2 - s_1} q_0, \quad A_2 = \frac{s_1}{s_1 - s_2} q_0.$$

Поэтому

$$q(t) = \frac{q_0}{s_2 - s_1} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}),$$

$$i(t) = \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} q_0 (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}).$$

Приведенные формулы и решают поставленную задачу.

Проанализируем теперь полученное решение. Следует, очевидно, различать два случая: $R/2L \geq 1/\sqrt{LC}$ и $R/2L < 1/\sqrt{LC}$. В первом случае s_1 и s_2 будут вещественными величинами, а во втором — комплексными. Рассмотрим первый случай. Так как при этом $s_{1,2} < 0$, то заряд на конденсаторе будет монотонно уменьшаться со временем, но в отличие от разряда конденсатора на чисто активное сопротивление, когда заряд изменялся экспоненциально по закону $\exp(-t/\tau)$, теперь мы имеем суперпозицию двух экспонент, которым соответствуют следующие постоянные времени: $\tau_1 = 1/|s_1|$, $\tau_2 = 1/|s_2|$. Ход изменения заряда со временем показан на рис. 10.21. Разрядный ток $i(t)$, равный нулю, возрастает, достигая максимума при $t = \ln(s_2/s_1)/(s_1 - s_2)$ и затем постепенно уменьшается.

Пусть выполняется неравенство $R/2L < 1/\sqrt{LC}$. Тогда s_1 и s_2 — комплексно-сопряженные величины. Записывая их в виде

$$s_{1,2} = -\gamma \pm i\omega'_0,$$

где

$$\gamma = \frac{R}{2L}, \quad \omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

получаем следующие выражения для силы тока и заряда:

$$i(t) = -\left(1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) \omega'_0 q_0 e^{-\gamma t} \sin \omega'_0 t,$$

$$q(t) = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}} q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega'_0 t + \varphi),$$

где $\operatorname{tg} \varphi = \gamma/\omega'_0$.

Мы видим, что при $R/2L < 1/\sqrt{LC}$, т. е. при $\gamma < \omega_0$, заряд и ток уменьшаются с течением времени, т. е. затухают, но затухание происходит не монотонно, так как сила тока пропорциональна еще периодической функции $\sin \omega'_0 t$, а заряд — периодической функции $\cos(\omega'_0 t + \varphi)$. Поэтому если разряд конденсатора при $R/2L > 1/\sqrt{LC}$ называют аperiodическим, то при $R/2L < 1/\sqrt{LC}$ — периодическим. Затухание тока и заряда определяется общей экспонентой $\exp(-\gamma t)$, потому величину γ называют коэффициентом затухания. Он пропорционален активному сопротивлению контура и обратно пропорционален коэффициенту самоиндукции.

Синусоидальные функции, входящие в выражения для $i(t)$ и $q(t)$, изменяются с частотой ω , которой соответствует период

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC} \xi,$$

$$\xi = \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \rho = \sqrt{LC}.$$

Зависимость заряда и тока от времени графически изображена на рис. 10.22. Отдельно показаны кривые $\pm e^{-\frac{\gamma}{2}t}$, представляющие собой огибающие синусоид заряда и тока. Периоды синусоид не

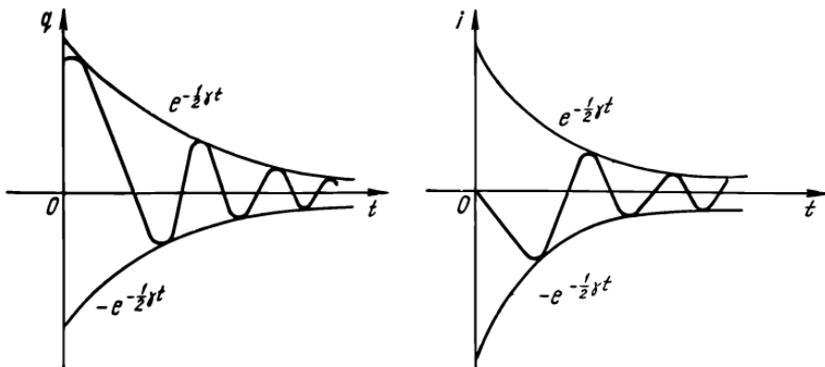


Рис. 10.22

изменяются с течением времени, а амплитуды все время уменьшаются. Обозначим эти амплитуды через $I(t)$ и $Q(t)$:

$$Q(t) = \left(1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} q_0 e^{-\gamma t}, \quad I(t) = \left(1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) \omega_0 q_0 e^{-\gamma t}.$$

Отсюда находим отношение двух амплитуд тока, соответствующих временам t и $t + T'$:

$$\frac{I(t + T')}{I(t)} = e^{-\gamma T'}.$$

(Аналогичная формула справедлива и для амплитуд заряда). Логарифм отношения $I(t)/I(t + T')$ называется логарифмическим декрементом колебаний δ :

$$\delta = \gamma T'.$$

Если активное сопротивление R мало, то малым будет и логарифмический декремент и мы получим почти незатухающие колебания с постоянными амплитудами. В предельном случае $R \rightarrow 0$ частота колебаний совпадает с $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t, \quad i(t) = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t.$$

Таким образом, при $R \rightarrow 0$ в контуре без внешнего источника переменной ЭДС возникают собственные колебания, частота которых совпадает с резонансной частотой ω_0 контура.

Рассмотрим теперь энергетический баланс в контуре. Электрическая энергия W_e , запасаемая в конденсаторе, и магнитная энергия W_m , запасаемая в катушке индуктивности, определяются формулами

$$W_e = \frac{1}{2C} q^2, \quad W_m = \frac{1}{2} Li^2.$$

Подставим сюда сперва вместо i и q выражения, относящиеся к предельному случаю $R \rightarrow 0$. Так как $L\omega_0^2 = 1/C$, получаем

$$W_e = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2 \omega_0 t, \quad W_m = \frac{1}{2C} q_0^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

Поэтому полная электромагнитная энергия, находящаяся в конденсаторе и катушке, равна сумме энергий:

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2C} q_0^2.$$

Эта величина не изменяется с течением времени, причем чем больше W_m , тем меньше W_e , и наоборот, так что колебания сопровождаются перекачкой энергии из конденсатора (электрического резервуара) в катушку (магнитный резервуар) и обратно — из магнитного в электрический резервуар. В некотором смысле эта перекачка энергии аналогична переходу кинетической энергии в потенциальную и обратно при обычных колебаниях маятника.

Наш результат о неизменности полной энергии $W = W_e + W_m$ связан с предположением о том, что $R \rightarrow 0$. При конечном активном сопротивлении колебания затухают и сумма электрической и магнитной энергий уменьшается со временем. Уменьшение происходит по экспоненциальному закону $\exp(-2\gamma t)$, т. е. значение энергии $W(t)$ в момент времени t связано со значением энергии $W(0) = q_0^2/2C$ в начальный момент времени соотношением

$$W(t) = W(0) e^{-2\gamma t}.$$

Уменьшение энергии, т. е. ее диссипация, происходит в результате непрерывного выделения джоулева тепла в проводах катушки, обкладках конденсатора и соединенных с ними проводах.

§ 10.5. ЛАМПОВЫЙ ГЕНЕРАТОР

Если бы можно было непрерывно компенсировать диссипацию энергии, то в контуре происходили бы незатухающие электрические колебания, несмотря на наличие активного сопротивления. Такая компенсация потерь энергии могла бы, в принципе, производиться с помощью обычного источника постоянной ЭДС, если бы он в нужные моменты времени, в такт с уменьшением амплитуды колебаний тока в контуре, подавал энергию в контур. Но частота колебаний в контуре очень велика. Поэтому должна быть очень большой частота подачи энергии от источника в контур,

а в таком случае желательно, чтобы это происходило автоматически, причем не механическим, а электрическим путем.

Таким электрическим вентилем, автоматически открывающим и закрывающим источник энергии постоянного тока, соединенный с колебательным контуром, может служить электронная лампа, только не двухэлектродная, рассмотренная в § 7.2, а трехэлектродная (триод). В такой лампе между катодом и анодом расположен еще третий электрод — управляющая сетка, почти полностью пропускающая ток электронов от катода к аноду. Работа триода заключается в следующем: сетка автоматически получает информацию о том, что делается в контуре, и правильно реагирует на полученную информацию, а именно в нужные моменты времени увеличивает анодный ток и тем самым и ток в контуре. Для этого сетка

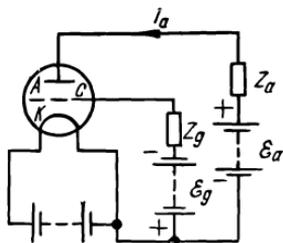


Рис. 10.23

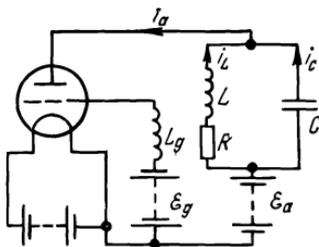


Рис. 10.24

связывается с контуром, и наличие этой так называемой обратной связи позволяет непрерывно, автоматически и безынерционно подавать в нужных количествах энергию от источника постоянной ЭДС в колебательный контур, где она преобразовывается в колебательную энергию переменного тока.

Как мы видели в § 7.2, анодный ток диода является некоторой определенной функцией анодного напряжения. Анодный ток триода i_a является определенной функцией анодного u_a и сеточного u_g напряжений (на рис. 10.23 \mathcal{E}_a и \mathcal{E}_g — постоянные ЭДС, действующие в анодной и сеточной цепях, а Z_a и Z_g — импедансы, подключенные к аноду и сетке). Но величины u_a и u_g входят в эту функцию не независимо, а в виде некоторой суперпозиции, т. е. единой переменной $u_g + Du_a$, где D — безразмерная величина, зависящая от формы и расположения электродов, и, как правило, значительно меньшая единицы (она называется проникаемостью лампы). Эта суперпозиция u_g и u_a называется управляющим напряжением; от него и зависит анодный ток:

$$i_a = f(u_g + Du_a).$$

Зависимость анодного тока триода от управляющего напряжения является нелинейной, так же как и зависимость анодного тока диода от анодного напряжения

Разъясним теперь действие триода в качестве вентиля, подающего в нужные моменты времени энергию от источника постоянной ЭДС в колебательный контур. Обычно применяемая схема соединения лампы с контуром изображена на рис. 10.24. Здесь колебательный контур включен в анодную цепь, в которой имеется также

анодная батарея с ЭДС \mathcal{E}_a . Сетка лампы с помощью катушки обратной связи L_g индуктивно связана с катушкой индуктивности L контура. Поэтому

$$u_g = \mathcal{E}_g + M \frac{di_L}{dt},$$

где \mathcal{E}_g — постоянная ЭДС в сеточной цепи; i_L — ток в индуктивной ветви контура; M — коэффициент взаимной индукции между катушкой обратной связи и катушкой колебательного контура. ЭДС взаимной индукции $M di_L/dt$, действующая в сеточной цепи, и является той информацией, которую получает сетка о ходе колебательного процесса в контуре. Именно, если ток i_L не в меру уменьшится, то при надлежащем знаке величины M потенциал сетки возрастает и она «подхлестнет» лампу, т. е. заставит увеличиться анодный ток, а вместе с ним и колебательный ток i_L .

Выясним, как будет протекать колебательный процесс во времени при включении триода. Из схемы видно, что анодное напряжение определяется формулой

$$u_a = \mathcal{E}_a - L \frac{di_L}{dt} - Ri_L,$$

где R — сопротивление катушки. Если для простоты считать, что все сопротивление сосредоточено в индуктивной ветви, то напряжение u_C на конденсаторе будет отличаться от анодного напряжения только знаком, $u_C = -u_a$, и, следовательно, выражение для тока в емкостной ветви имеет вид

$$i_C = -C \frac{du_a}{dt} = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + RC \frac{di_L}{dt}.$$

Складывая токи в емкостной и индуктивной ветвях, получаем полный анодный ток: $i_a = i_L + i_C$, т. е.

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} i_a.$$

Но $i_a = f(u_g + Du_a)$, где $u_g = \mathcal{E}_g + M di_L/dt$. Поэтому

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} f \left(\mathcal{E}_0 - (DL - M) \frac{di_L}{dt} - DRi_L \right),$$

где $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_g + D\mathcal{E}_a$. Мы получили уравнение, определяющее изменение во времени колебательного тока. Удобнее, однако, исследовать уравнение для управляющего напряжения. При этом мы предполагаем, что $D \ll 1$, и поэтому в аргументе функции, входящей в правую часть уравнения для i_L , пренебрежем величиной DRi_L .

Введем обозначение $u = (M - DL) di_L/dt$ и продифференцируем уравнение для i_L по времени:

$$\frac{d^3 i_L}{dt^3} + \frac{R}{L} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{LC} f' (\mathcal{E}_0 + u) \frac{du}{dt}.$$

Переходя в левой части этого уравнения от u_L к переменной u , окончательно получаем

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{M-DL}{LC} f'(\mathcal{E}_0 + u) \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0.$$

Полученное уравнение отличается от уравнения для колебательного контура, которое мы изучали в предыдущем параграфе, коэффициентом при первой производной неизвестной: вместо R/L сюда входит $R/L - (M-DL)/LCS(u)$, где $S(u) = f'(\mathcal{E}_0 + u)$. Эта величина в отличие от R/L может быть положительной, отрицательной или равной нулю, благодаря чему в контуре возможен незатухающий колебательный процесс. Чтобы разъяснить это, рассмотрим сперва малые колебания, т. е. положим величину u малой. Тогда величина $S(u)$, имеющая смысл крутизны анодной характеристики (т. е. зависимости i_a от S), может считаться постоянной, не зависящей от u . Иными словами, мы можем заменить $S(u)$ на $S(0) \equiv S_0$ — крутизну при $u = 0$. Итак, при малых u мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{M-DL}{LC} S_0 \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} U = 0.$$

Решение этого уравнения в случае достаточно малого коэффициента при du/dt имеет согласно результатам § 10.4 вид

$$u = U_0 e^{-\gamma^* t} \cos \omega_0 t,$$

где U_0 — начальное значение u ,

$$\gamma^* = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{M-DL}{LC} s_0 \right).$$

В отсутствие лампы γ^* сводится к $R/2L$, и мы получаем затухающие колебания. Если же включена лампа, то величина γ^* может быть и положительной и отрицательной — это зависит от величины и знака коэффициента взаимной индукции M и значения начальной крутизны характеристики лампы s_0 . Если второе слагаемое в формуле для γ^* отрицательно, то $\gamma^* > R/2L$, т. е. мы получим затухающие колебания, причем коэффициент затухания при включенной лампе будет больше коэффициента затухания колебаний в свободном контуре. Это значит, что катушка обратной связи включена неправильно и нужно переключить ее концы (соединенные с сеткой и катодом). После переключения концов в катушке обратной связи второе слагаемое в формуле для γ^* станет положительным (предполагается, что $M > DL$) и $\gamma^* < R/2L$. Это значит, что коэффициент затухания благодаря включенной лампе и обратной связи контура с сеткой уменьшился (по сравнению со случаем свободного контура). Если теперь постепенно увеличивать M (при заданной S_0), то мы дойдем до такого положения, когда γ^* станет равным нулю. Это произойдет при $M = M_C$, где M_C определяется из уравнения

$$\frac{M_C - DL}{LC} S_0 = \frac{R}{L}.$$

В рассмотренном случае мы получим незатухающие колебания, амплитуда которых определяется начальным значением u . Обра-

шение γ^* в нуль означает, что при $M = M_C$ происходит полная компенсация энергетических потерь в контуре. Компенсация производится, естественно, за счет анодной батареи, которая ежесекундно расходует энергию $\mathcal{E}_a I_{a0}$, где I_{a0} — постоянная составляющая анодного тока.

Пусть теперь $M > M_C$. Тогда величина γ^* станет отрицательной и колебания из затухающих превратятся в нарастающие, т. е. в колебания, амплитуда которых экспоненциально нарастает со временем:

$$u = U_0 e^{|\gamma^*|t}, \quad \gamma^* < 0.$$

Возникает вопрос, сколь долго будет происходить этот рост. Ясно, что он не может продолжаться бесконечно, так как это противо-

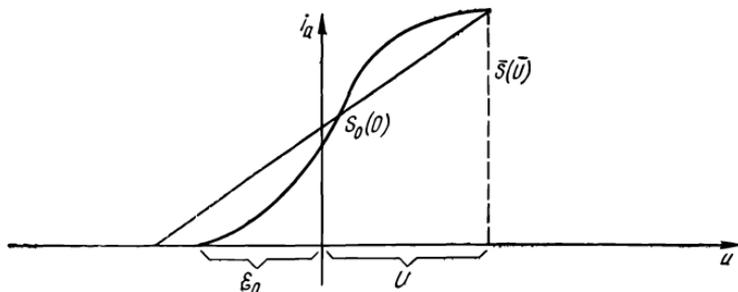


Рис. 10.25

речило бы закону сохранения энергии. В чем же состоит механизм прекращения роста колебаний?

Легко видеть, что полученный нами результат о безграничном росте амплитуды колебаний связан с молчаливо сделанным предположением о постоянстве крутизны характеристики $S(u)$ — ведь мы заменили ее на начальную крутизну $S(0)$, что справедливо только для малых колебаний. При колебаниях большой амплитуды крутизна $S(u)$ претерпевает существенные изменения в интервале изменения напряжения ($-U \leq u \leq U$, где U определяет размах колебаний), и ее нельзя аппроксимировать начальной крутизной S_0 . В случае колебаний большой амплитуды роль начальной крутизны должна играть некоторая средняя крутизна $S(U)$, зависящая от размаха колебаний (рис. 10.25), причем размах колебаний должен определяться из условия обращения среднего γ^* в нуль, т. е. из условия

$$\frac{R}{L} - \frac{M - DL}{LC} S(U) = 0.$$

Чтобы разобраться в этом вопросе, исследуем нелинейное уравнение для u , которое перепишем в виде

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = F(u) \frac{du}{dt},$$

где

$$F(u) = \frac{M - DL}{LC} f'(\mathcal{E}_0 + u) - \frac{R}{L}.$$

Предполагая, что $|\gamma^*|T \ll 1$, где $T = 2\pi/\omega_0$, ищем решение в виде

$$u = U(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где $U(t)$ и $\varphi(t)$ — медленно изменяющиеся функции t , связанные между собой соотношением

$$U'(t) \cos \psi - U\varphi'(t) \sin \psi = 0, \quad \psi = \omega_0 t + \varphi.$$

Очевидно,

$$\frac{du}{dt} = -\omega_0 U \sin \psi$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\omega_0 \frac{dU}{dt} \sin \psi - \left(\omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}\right) \omega_0 U \cos \psi.$$

Подставляя это выражение в уравнение для u , имеем

$$-\frac{dU}{dt} \sin \psi - U \frac{d\varphi}{dt} \cos \psi = -U \sin \psi F(U \cos \psi),$$

откуда, используя соотношение между U' и φ' , получаем

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= UF(U \cos \psi) \sin^2 \psi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= F(U \cos \psi) \cos \psi \sin \psi. \end{aligned}$$

Величины U и φ изменяются со временем очень медленно (предполагается, что $|\gamma^*|T \ll 1$). Между тем величина ψ за период T изменяется на 2π , т. е. претерпевает большое изменение. Поэтому мы не совершим большой ошибки, если заменим правые части полученных уравнений для U и φ их средними значениями за период колебаний. Иными словами, будем исходить из усредненных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} UF(U \cos \psi) \sin^2 \psi d\psi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(U \cos \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi. \end{aligned}$$

Входящие сюда интегралы представляют собой некоторые вполне определенные функции U , которые могут быть найдены, если известна функция $F(x)$. Обозначим их через $A(U)$ и $\Phi(U)$, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(U \cos \psi) \sin^2 \psi d\psi &\equiv A(U), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(U \cos \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi &\equiv \Phi(U). \end{aligned}$$

Тогда уравнения для определения U и φ имеют вид

$$\frac{dU}{dt} = A(U)U, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Phi(U).$$

Из первого уравнения определяем амплитуду U как функцию t или, точнее, t — как функцию U :

$$t = \int \frac{dU}{UA(U)}.$$

Далее, зная $U = U(t)$, можно, в принципе, найти $\varphi(t)$.

Разъясним этот метод, предполагая, что характеристика лампы имеет при $u = 0$ точку перегиба, так что $f''(\mathcal{E}_0) = 0$. Тогда разложение анодного тока в ряд по степеням u с учетом первого нелинейного члена имеет вид

$$i_a = f(\mathcal{E}_0 + u) = f(\mathcal{E}_0) + uf'(\mathcal{E}_0) + \frac{1}{6} u^3 f'''(\mathcal{E}_0).$$

Это выражение мы и используем, причем считаем, что $f'''(\mathcal{E}_0) < 0$. Кроме того, так как и ранее, полагаем, что $[(M - DL)/LC] f'(\mathcal{E}_0) > R/L$. Замечая, что

$$f'(\mathcal{E}_0 + u) = f'(\mathcal{E}_0) + \frac{1}{2} u^2 f''(\mathcal{E}_0)$$

и вводя вместо t и u новые переменные ϑ и x ,

$$\vartheta = \omega_0 t, \quad x = \frac{u}{\bar{U}}, \quad \bar{U} = \sqrt{\frac{2}{|f'''(\mathcal{E}_0)|} \left(f'(\mathcal{E}_0) - \frac{RC}{M - DL} \right)},$$

получаем следующее дифференциальное уравнение для определения x как функции ϑ :

$$\frac{d^2 x}{d\vartheta^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{d\vartheta} + x = 0,$$

где

$$\varepsilon = \left(\frac{M - DL}{LC} f'(\mathcal{E}_0) - \frac{R}{L} \right) \sqrt{LC}.$$

Эта величина вследствие условия $|\gamma^*|T \ll 1$ значительно меньше единицы ($\varepsilon \ll 1$), благодаря чему амплитуда колебаний и будет медленно изменяющейся функцией времени. Решение этого уравнения (оно называется уравнением Ван-дер-Поля) ищем в виде

$$x = X(\vartheta) \cos \psi, \quad \psi = \vartheta + \varphi(\vartheta),$$

считая X и φ медленно изменяющимися функциями ϑ . Согласно изложенному методу они определяются уравнениями

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - X^2 \cos^2 \psi) \sin^2 \psi d\psi X,$$

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - X^2 \cos^2 \psi) \sin \psi \cos \psi d\psi.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{dX}{d\vartheta} = \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{X^2}{4}\right) X, \quad \frac{d\varphi}{d\vartheta} = 0.$$

Мы видим, что $\varphi = \text{const}$. Из первого уравнения следует, что

$$\frac{d}{d\vartheta} X^2 = \varepsilon \left(1 - \frac{X^2}{4}\right) X^2,$$

откуда

$$\frac{dX^2}{\left(1 - \frac{1}{4} X^2\right) X^2} = \varepsilon d\vartheta,$$

или

$$\frac{dX^2}{4 - X^2} + \frac{dX^2}{X^2} = \varepsilon d\vartheta.$$

Интегрируя последнее выражение, получаем

$$\ln \frac{X^2}{4 - X^2} = \varepsilon \vartheta + \text{const}.$$

Константа представляет собой, очевидно, значение левой части этого равенства при $\vartheta = 0$. Поэтому ее можно записать в виде

$$\text{const} = \ln \frac{X_0^2}{4 - X_0^2},$$

где X_0 — значение X при $\vartheta = 0$. Таким образом,

$$\ln \frac{X^2}{4 - X^2} = \ln \frac{X_0^2}{4 - X_0^2} + \varepsilon \vartheta,$$

откуда

$$X = \frac{2X_0}{\sqrt{X_0^2 + (4 - X_0^2) e^{-\varepsilon \vartheta}}}.$$

Эта формула и определяет изменение амплитуды со временем. Из нее следует, что

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} X = 2,$$

т. е. установившиеся колебания определяются формулой

$$x = 2 \cos(\vartheta + \varphi)$$

или в старых переменных — формулой

$$u = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где

$$A = 2 \sqrt{\frac{2}{|f'''(\xi_0)|} \left(f'(\xi_0) - \frac{RC}{M - DL} \right)}.$$

частота колебаний совпадает с собственной частотой колебаний контура при $R = 0$, а амплитуда колебаний не зависит от начальных условий и определяется лишь характеристикой лампы и параметрами контура. К этому приводит нелинейность ламповой характеристики (в линейном случае $f'''(\mathcal{E}_0) = 0$ и амплитуда становится бесконечной).

§ 10.6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ

Определяя токи в различных цепях, мы считали, что в них действуют вполне определенные ЭДС — постоянные или переменные, но всегда являющиеся заданными функциями времени. Между тем в цепях неизбежно действуют и случайные ЭДС, точный вид которых принципиально не может быть установлен. Достаточно сказать, что посторонние токи наводят в каждой цепи ЭДС индукции, которые могут обладать произвольными частотами, фазами и амплитудами. Точно знать их мы не можем и описывать их можно только статистически, используя понятие вероятности.

Но если даже представить себе некоторую цепь электрически изолированной от окружающего мира, то и в этом случае в цепи будут течь случайные токи. В системе зарядов токи отсутствуют только в случае, когда система находится в состоянии статистического или теплового равновесия. В действительности же в любой системе обязательно имеют место отклонения от статистического равновесия, а при таких отклонениях (их называют тепловыми флуктуациями) всегда возникают электрические (флуктуационные) токи. Благодаря их существованию ток в цепи, в которой действует вполне определенная заданная ЭДС, будет отличаться от значения, определяемого ЭДС согласно обобщенному закону Ома: на это значение тока будет накладываться флуктуационный ток, возникающий вследствие тепловых флуктуаций.

Рассмотрим цепь, состоящую из конденсатора с емкостью C и сопротивления R (рис. 10.26). В отсутствие внешней ЭДС напряжение на конденсаторе u удовлетворяет уравнению

$$RC \frac{du}{dt} + u = 0,$$

решение которого имеет вид

$$u(t) = u(0) e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0,$$

где $u(0)$ — начальное значение u . Считаем в этом решении $u(0)$ случайной величиной. Случайность процесса означает, что среднее значение $u(0)$, которое берется по всем возможным значениям $u(0)$ (или по ансамблю значений $u(0)$, но не по времени!), равно нулю. Такого рода средние значения обозначаются с помощью угловых скобок, так что

$$\langle u(0) \rangle = 0.$$

Поэтому и $\langle u(t) \rangle = 0$ (угловые скобки не затрагивают фиксированного множителя $\exp(t/RC)$). Но среднее значение квадратичной величины $(u(0))^2$ не равно нулю. Действительно, мы можем рассматривать конденсатор как гигантскую броуновскую частицу,

находящуюся во внешней среде с температурой T . Поэтому можно считать, что в состоянии статистического равновесия энергия конденсатора (тепловая) должна равняться $\frac{1}{2}kT$, где k — постоянная Больцмана (на конденсаторе нет внешнего заряда). Но энергия конденсатора равна половине произведения его емкости на квадрат напряжения, поэтому

$$\frac{1}{2} C \langle u^2(0) \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

откуда $\langle u^2(0) \rangle = kT/C$. Учитывая это соотношение, умножим $u(t)$ на $u(0)$ и усредним произведение по ансамблю $u(0)$:

$$\langle u(0) u(t) \rangle = \frac{kT}{C} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0.$$

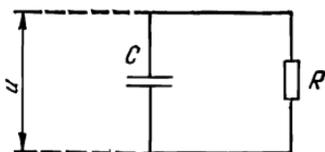


Рис. 10.26

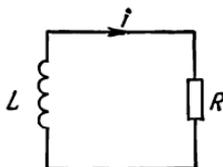


Рис. 10.27

Начальный момент времени можно, очевидно, выбирать произвольно. Поэтому эту формулу перепишем в более общем виде:

$$\langle u(t_1) u(t_2) \rangle = \frac{kT}{C} e^{-\frac{|t_1 - t_2|}{RC}},$$

где t_1 и t_2 — два произвольных момента времени. Величина $\langle u(t_1) u(t_2) \rangle$ называется корреляционной функцией напряжения. Она зависит от разности моментов времени и определяется емкостью и сопротивлением.

Выясним теперь, какой частотный состав, или частотный спектр, флуктуаций напряжения. Для этого флуктуации нужно разложить в интеграл Фурье. Но если раскладывать просто $u(t)$,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\omega} e^{i\omega t} d\omega,$$

то среднее значение каждой компоненты Фурье u_{ω} будет равно нулю, $\langle u_{\omega} \rangle = 0$. Поэтому в интеграл Фурье следует раскладывать не линейную, а квадратичную функцию напряжения. Такой функцией является корреляционная функция $\langle u(0) u(t) \rangle$, которую и раскладывают в интеграл Фурье:

$$\langle u(0) u(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Здесь символ $(u^2)_\omega$ служит для обозначения компоненты Фурье корреляционной функции напряжения. Используя известную формулу обращения

$$(u^2)_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(0) u(t) \rangle e^{-i\omega t} dt$$

и подставляя сюда выражение для корреляционной функции, получаем

$$(u^2)_\omega = \frac{kT}{2\pi C} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|t|}{RC} - i\omega t} dt.$$

Вычисляя интеграл, находим

$$(u^2)_\omega = \frac{kTR}{\pi(1 + \omega^2 R^2 C^2)}.$$

Это выражение и определяет частотную характеристику флуктуаций напряжения на конденсаторе. Если умножить его на $\omega^2 C^2$, то мы найдем компоненту Фурье $(i^2)_\omega$ корреляционной функции тока $\langle i(t_1) i(t_2) \rangle$:

$$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Поскольку комплексное сопротивление цепи, состоящей из емкости и сопротивления, определяется формулой

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C},$$

перепишем $(i^2)_\omega$ в виде

$$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{|Z|^2} = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{Z}.$$

Найдем теперь корреляционную функцию флуктуационного тока в цепи, состоящей из индуктивности и сопротивления (рис. 10.27). В этом случае в отсутствие внешней ЭДС сила тока $i(t)$ удовлетворяет уравнению

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0,$$

откуда

$$i(t) = i(0) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

В этом выражении $i(0)$ считаем случайной величиной, среднее от которой равно нулю: $\langle i(0) \rangle = 0$. В случае тепловых флуктуаций величина $\langle i^2(0) \rangle$ не будет равна нулю, а может быть просто связана с температурой T . Действительно, катушку самоиндукции можно рассматривать как единое целое, подобное частице, совер-

шающей броуновское движение в среде с температурой T . Поэтому средняя тепловая энергия катушки должна быть равной $\frac{1}{2}kT$. Но эту энергию можно отождествить со средней магнитной энергией $\frac{1}{2}L \langle i^2(0) \rangle$, имеющей флуктуационное происхождение, т. е.

$$\frac{1}{2} L \langle i^2(0) \rangle = \frac{kT}{2},$$

откуда

$$\langle i^2(0) \rangle = \frac{kT}{L}.$$

Умножим $i(t)$ на $i(0)$ и усредним произведение по возможным значениям $i(0)$. Учитывая значение $\langle i^2(0) \rangle$, получаем

$$\langle i(0) i(t) \rangle = \frac{kT}{L} e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0.$$

Эта величина и представляет собой корреляционную функцию флуктуационных токов в цепи, состоящей из катушки и сопротивления. Поскольку начальный момент времени можно выбирать произвольно, корреляционную функцию можно записать в общем виде:

$$\langle i(t_1) i(t_2) \rangle = \frac{kT}{L} e^{-\frac{R}{L}|t_1 - t_2|}.$$

Найдем теперь частотный спектр флуктуаций тока. Для этого корреляционную функцию $\langle i(0) i(t) \rangle$ нужно разложить в интеграл Фурье:

$$\langle i(0) i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (i^2)_{\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Компонента Фурье $(i^2)_{\omega}$ корреляционной функции определяется формулой

$$(i^2)_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle i(0) i(t) \rangle e^{-i\omega t} dt,$$

Подставляя сюда выражение для $\langle i(0) i(t) \rangle$, имеем

$$(i^2)_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kT}{L} e^{-\frac{R|t|}{L}} e^{-i\omega t} dt,$$

откуда

$$(i^2)_{\omega} = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Импеданс рассматриваемой цепи определяется формулой

$$Z = R + i\omega L,$$

поэтому $(i^2)_\omega$ можно представить в виде

$$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{|Z^2|} = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{Z}.$$

Это выражение имеет ту же структуру, что и выражение для спектрального распределения флуктуаций тока в цепи, состоящей из емкости и сопротивления. Такой же формулой определяется частотный спектр флуктуаций тока в самом общем случае для любой цепи:

$$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{|Z^2|} = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{R^2 + X^2},$$

где $Z = R + iX$ — импеданс цепи; R и $X \equiv X(\omega)$ — активное и реактивное сопротивления цепи. Эта формула называется формулой Найквиста.

Если активное сопротивление очень мало, то и компонента Фурье $(i^2)_\omega$ будет малой почти для всех частот. Исключение составляют только те частоты, для которых реактивное сопротивление обращается в нуль: $X(\omega) = 0$. Это уравнение определяет резонансные частоты цепи. Например, в случае контура, состоящего из катушки и конденсатора, $X(\omega) = \omega L - 1/\omega C$, X обращается в нуль при $\omega = (LC)^{-1/2}$. Для более сложных цепей возможно несколько резонансных частот, и все они являются корнями уравнения $X(\omega) = 0$. Компонента Фурье корреляционной функции флуктуационных токов в случае малого сопротивления цепи R имеет резкие максимумы при резонансных частотах.

§ 10.7. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

Мы изучали только такие электрические цепи, в которых индуктивность и емкость были сосредоточены в определенных местах — в одном месте находился конденсатор, а в другом — катушка индуктивности. Но важную роль играют также цепи, в которых индуктивность и емкость (не говоря уже о сопротивлении) распределены вдоль всей цепи, т. е. каждый элемент цепи обладает и емкостью, и индуктивностью, и активным сопротивлением. Такого рода цепями являются двухпроводные телеграфные и телефонные линии, кабельные линии, линии электропередачи, а также радиоантенны. Для этих цепей сила тока зависит не только от времени, но и от места, т. е. от пространственных координат. Перейдем теперь к изучению цепей, которые обычно называют длинными линиями.

Рассмотрим двухпроводную линию, состоящую из двух длинных и параллельных проводов, в начале которых включен источник ЭДС $e(t)$, а в конце находится нагрузка с импедансом Z (рис. 10.28). Обозначим напряжение между точками a и b прямого и обратного проводов на расстоянии x от генератора через

$u(x, t)$. Эта величина зависит, естественно, от координаты x и времени t . Сила тока вдоль линии также зависит от координаты x и времени: $i \equiv i(x, t)$. Наша задача заключается в том, чтобы установить уравнения, которым удовлетворяют функции $u \equiv u(x, t)$ и $i \equiv i(x, t)$. Рассмотрим для этого элемент линии длиной dx (рис. 10.29, а). Ток и напряжение в начале этого элемента равны i и u , а в конце — $i + di$, $u + du$, где $di = \partial i / \partial x dx$ и $du = \partial u / \partial x dx$. Напряжение вдоль элемента длины dx изменяется потому, что этот элемент обладает определенными сопротивлением и индуктивностью. Обозначим сопротивление и индуктивность, отнесенные к единице длины линии (прямого и обратного проводов), через R_1 и L_1 . Тогда элемент длины dx будет обладать сопротивлением $R_1 dx$ и индуктивностью $L_1 dx$. Схематически можно представить себе, что они содержатся, например, в прямом проводе

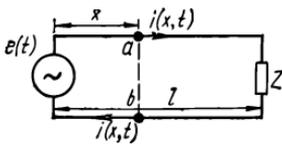


Рис. 10.28

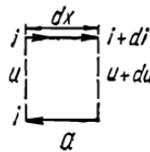
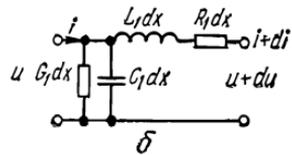


Рис. 10.29



(см. рис. 10.29, б). Тогда, обходя элемент dx вдоль направления тока, получаем

$$u - (u + du) = R_1 dx i + L_1 dx \frac{\partial i}{\partial t},$$

откуда

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Чтобы понять теперь изменение силы тока вдоль линии, нужно учесть, что каждый элемент длины линии обладает емкостью и активной проводимостью (утечкой!). Если эти величины, отнесенные к единице длины линии (прямого и обратного проводов), обозначить через C_1 и G_1 , то наш элемент длины будет обладать емкостью $C_1 dx$ и проводимостью $G_1 dx$. Схематически можно представить себе, что они включены в начале элемента dx (см. рис. 10,29, б). Ясно, что разность токов $i - (i + di)$ в начале и в конце элемента будет равна току, протекающему через емкость $C_1 dx$ и проводимость $G_1 dx$. Но через емкость $C_1 dx$ течет ток $C_1 dx \frac{\partial u}{\partial t}$, а через проводимость $G_1 dx$ — ток $G_1 dx u$; поэтому

$$i - (i + di) = G_1 dx u + C_1 dx \frac{\partial u}{\partial t},$$

откуда

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Итак, мы получили два дифференциальных уравнения (в частных производных) для тока и напряжения:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}, \\ -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения (они называются телеграфными), найдем распределение тока и напряжения вдоль длинной линии.

Предположим, что линия является идеальной, т. е. не имеет потерь ($R_1 = G_1 = 0$). В этом случае

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_1 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\frac{\partial u}{\partial x} = L_1 \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Дифференцируя первое уравнение по x , а второе по t и сравнивая результаты, получаем

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}.$$

Такое же уравнение справедливо для u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Таким образом, i и u удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

где $c = 1/\sqrt{L_1 C_1}$. Это уравнение называется волновым. Можно показать, что

$$L_1 = \frac{4}{c^2} \left(1 + 4 \ln \frac{D}{r}\right), \quad C_1 = \left(1 + 4 \ln \frac{D}{r}\right)^{-1}.$$

Здесь D — расстояние между проводами; r — радиус провода; c — скорость света в вакууме. Мы видим, что $L_1 C_1 = 1/c^2$.

Найдем решение волнового уравнения. Для этого перейдем от x и t к новым переменным $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$. Тогда волновое уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

откуда следует, что общее решение волнового уравнения представляет собой сумму произвольных функций $F_1(\xi)$ и $F_2(\eta)$, т. е.

$$f(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct).$$

Чтобы понять физический смысл этого решения, положим сперва $F_2 = 0$, так что $f(x, t) = F(x - ct)$. Поскольку время и координаты входят в f не независимо, а в виде одного аргумента, легко проверить, что $f(x + c\Delta t, t + \Delta t) = f(x, t)$. Иными словами, значения тока и напряжения в точке $x + \Delta x$ в момент времени $t + \Delta t$ будут такими же, как значения тока и напряжения в точке

x в момент времени t , если только $\Delta x = c\Delta t$. Это значит, что значения тока и напряжения в точке x «перенесли» вдоль линии за время Δt в соседнюю точку $x + \Delta x$, отстоящую от первой на расстояние $\Delta x = c\Delta t$, причем скорость переноса $\Delta x/\Delta t$ равна c , т. е. равна скорости света в вакууме. Иными словами, вдоль линии распространяются со скоростью света волна тока и волна напряжения.

Функцию F легко связать с ЭДС $e(t)$, действующей в начале линии. Действительно, при $x = 0$ (т. е. в начале линии) напряжение u должно совпадать с $e(t)$. Поэтому $u(x, t) = e(t - x/c)$. Волна тока очень просто связана с волной напряжения. Из уравнения $-du/dx = L_1 di/dt$ следует, что

$$L_1 \frac{di}{dt} = \frac{1}{c} e \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Поэтому

$$i(x, t) = \frac{1}{cL_1} e \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Поскольку $c = (L_1 C_1)^{-1/2}$, перепишем это соотношение в виде

$$i(x, t) = \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} u(x, t)$$

или

$$u(x, t) = \rho i(x, t), \quad \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Величина ρ называется волновым сопротивлением линии.

Таким образом, если $F_2 = 0$, то ток и напряжение имеют вид волн, распространяющихся вдоль линии в сторону возрастающих значений x , а связь между напряжением и током определяется законом Ома, в который входит волновое сопротивление. Эти волны называются бегущими.

Легко теперь понять смысл решения $F_2(x + ct)$. Ясно, что оно описывает волны, распространяющиеся не вдоль положительной, а вдоль отрицательной оси x , т. е. волны, распространяющиеся не от начала линии, а от ее конца. Поэтому в идеализированном случае бесконечной линии мы должны считать $F_2 = 0$. Для линии конечной длины, как правило, $F_2 \neq 0$. Это значит, что для линии конечной длины ток и напряжение обычно представляют собой суперпозиции двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях — от источника к нагрузке и от нагрузки к источнику. Первую из этих волн называют падающей, а вторую — отраженной.

Итак,

$$u(x, t) = u_f \left(t - \frac{x}{c} \right) + u_r \left(t + \frac{x}{c} \right),$$

$$i(x, t) = i_f \left(t - \frac{x}{c} \right) + i_r \left(t + \frac{x}{c} \right),$$

где индексы f и r служат для обозначения падающей и отраженной волн. Легко видеть, что

$$u_f = \rho i_f, \quad u_r = -\rho i_r.$$

Поэтому

$$u = u_f + u_r, \quad i = \frac{1}{\rho} (u_f - u_r)$$

(аргументы всех функций для простоты не выписаны). Если в конце линии ($x = l$) включено активное сопротивление R , то, очевидно, $u_{x=l} = Ri_{x=l}$. Тогда

$$\rho \left(\frac{u_f + u_r}{u_f - u_r} \right)_{x=l} = R.$$

Отсюда можно найти коэффициент отражения по напряжению в конце линии:

$$\Omega = \left(\frac{u_r}{u_f} \right)_{x=l}$$

(коэффициент отражения по току $(i_r/i_f)_{x=l}$ равен $-\Omega$). Легко убедиться, что

$$\Omega = \frac{\frac{R}{\rho} - 1}{\frac{R}{\rho} + 1}.$$

Отсюда вытекает важный вывод: если линия нагружена на сопротивление, равное волновому, то коэффициент отражения равен нулю, т. е. при $R = \rho$ отсутствуют отраженные волны тока и напряжения ($i_r = 0$, $u_r = 0$). Иными словами, линия конечной длины при $R = \rho$ ведет себя как бесконечная. Так как $\rho = \sqrt{L_1/C_1}$, то

$$\frac{1}{2} L_1 i_f^2 = \frac{1}{2} C_1 u_f^2, \quad \frac{1}{2} L_1 i_c^2 = \frac{1}{2} C_1 u_r^2.$$

Таким образом, и для падающей, и для отраженной волн магнитная и электрическая энергии одинаковы.

Рассмотрим теперь более подробно случай, когда действующая в начале линии ЭДС является синусоидальной функцией времени. При этом синусоидальными функциями времени будут и напряжения u , и ток i . Их можно представить в виде

$$u(x, t) = \text{Re} e^{-i\omega t} \bar{U}(x), \quad i(x, t) = \text{Re} e^{-i\omega t} \bar{I}(x),$$

где ω — частота; $\bar{U}(x)$ и $\bar{I}(x)$ — комплексные амплитуды напряжения и тока в точке x . Подставляя эти выражения в волновое уравнение, имеем

$$\frac{d^2 \bar{U}}{dx^2} + k^2 \bar{U} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{I}}{dx^2} + k^2 \bar{I} = 0,$$

где $k = \frac{\omega}{c}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \bar{U}(x) &= \bar{U}_f e^{ikx} + \bar{U}_r e^{-ikx}, \\ \bar{I}(x) &= \bar{I}_f e^{ikx} + \bar{I}_r e^{-ikx}, \end{aligned}$$

где $\bar{U}_f, \bar{U}_r, \bar{I}_f, \bar{I}_r$ — некоторые комплексные константы. Поэтому

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_f \cos(\omega t - kx) + U_r \cos(\omega t + kx + \alpha), \\ i(x, t) &= I_f \cos(\omega t - kx) - I_r \cos(\omega t + kx + \alpha), \end{aligned}$$

где U_f, U_r, I_f, I_r и α — вещественные константы.

Первые слагаемые в приведенных формулах представляют собой падающие волны, распространяющиеся от начала к концу линии, а вторые — отраженные волны, распространяющиеся от конца к началу линии. Амплитуды падающих (U_f, I_f) и отраженных (U_r, I_r) волн напряжения и тока связаны соотношениями

$$U_f = \rho I_f, \quad U_r = -\rho I_r.$$

В случае бесконечно длинной линии или линии конечной, но нагруженной на волновое сопротивление, распространяется только одна бегущая волна:

$$U(x, t) = U_f \cos(\omega t - kx), \quad i(x, t) = \frac{U_f}{\rho} \cos(\omega t - kx).$$

Монохроматическая волна, как мы видим, является пространственно периодической, причем пространственный период $\lambda = 2\pi/k$, называемый длиной волны, связан с временным периодом $T = 2\pi/\omega$ соотношением $\lambda = cT$. Следовательно, длина волны — это путь, проходимый волной за время T (скорость волны равна c).

Вернемся к комплексным амплитудам тока и напряжения. Расстояния будем отсчитывать не от начала линии, где включена ЭДС, а от конца, где включена нагрузка, — комплексное сопротивление (импеданс) Z . В этом случае

$$\begin{aligned} \bar{U}(x) &= \bar{U}_2 \cos kx + i\rho \bar{I}_2 \sin kx, \\ \bar{I}(x) &= \bar{I}_2 \cos kx + i \frac{\bar{U}_2}{\rho} \sin kx, \end{aligned}$$

где \bar{U}_2 и \bar{I}_2 — амплитуды напряжения и тока в конце линии. Они связаны соотношением

$$\bar{U}_2 = Z \bar{I}_2.$$

Отсюда следует, что напряжение и сила тока в начале линии определяются формулами

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{U}_2 \cos kl + i\rho \bar{I}_2 \sin kl, \\ \bar{I}_1 &= \bar{I}_2 \cos kl + i \frac{\bar{U}_2}{\rho} \sin kl, \end{aligned}$$

где l — длина линии. Используя эти соотношения, находим эквивалентное комплексное сопротивление Z_e , которое как бы подключено к источнику ЭДС в начале линии:

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} = \frac{Z \cos kl + i\rho \sin kl}{\cos kl + i \frac{Z}{\rho} \sin kl}.$$

Отметим, что если $Z = \rho$, то и $Z_e = \rho$.

§ 10.8. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

Рассмотрим два частных случая распределения тока и напряжения вдоль линии — когда линия разомкнута и когда линия замкнута накоротко. В первом случае $I_2 = 0$, $Z = \infty$, а во втором $U_2 = 0$, $Z = 0$. Для разомкнутой линии

$$\bar{U}(x) = \bar{U}_2 \cos kx, \quad \bar{I}(x) = i \frac{\bar{U}_2}{\rho} \sin kx.$$

Умножая $\bar{U}(x)$ и $\bar{I}(x)$ на $e^{-i\omega t}$ и беря от произведений вещественные части, находим мгновенные значения:

$$u(x, t) = U_2 \cos kx \cos \omega t,$$

$$i(x, t) = \frac{U_2}{\rho} \sin kx \sin \omega t.$$

Мы видим, что в случае разомкнутой линии в каждой точке существует своя амплитуда напряжения и тока, причем эти амплитуды распределены вдоль линии по синусоидальному закону (рис. 10.30). В конце линии ($x = 0$) амплитуда напряжения максимальна, а амплитуда тока равна нулю. На расстоянии четверти длины волны от конца ($x = \lambda/4$) амплитуда напряжения равна

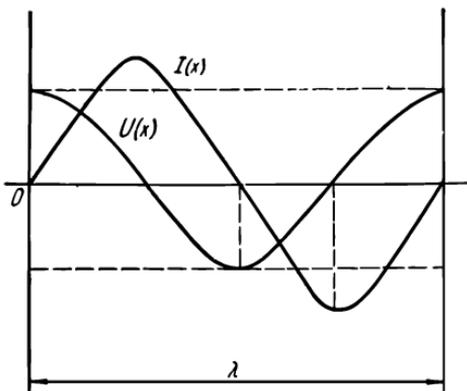


Рис. 10.30

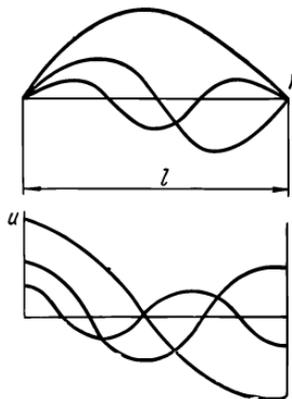


Рис. 10.31

нулю, а амплитуда тока максимальна (равна U_2/ρ). На расстоянии половины длины волны от конца ($x = \lambda/2$) амплитуда тока равна нулю, а амплитуда напряжения максимальна по абсолютному значению (равна $-U_2$). На расстоянии трех четвертей длины волны ($x = \frac{3}{4} \lambda$) амплитуда напряжения равна нулю, а амплитуда тока максимальна по абсолютному значению (равна $-U_2/\rho$). Наконец, при $x = \lambda$ амплитуды такие же, как и при $x = 0$. Далее вся картина периодически повторяется.

Таким образом, для разомкнутой линии характерно наличие точек, в которых напряжение и ток всегда равны нулю. Эти точки

называются узлами. Узлы напряжения сдвинуты, как видно из рис. 10.30, на четверть длины волны по отношению к узлам тока. Точно посередине между каждыми двумя узлами находятся пучности — точки, в которых амплитуда максимальна (точнее, максимальна по модулю). Пучности напряжения совпадают с узлами тока, а пучности тока — с узлами напряжения.

Картина распределения тока и напряжения разомкнутой линии коренным образом отличается от картины распределения тока и напряжения в бесконечной линии (или конечной линии, замкнутой на волновое сопротивление). В последнем случае амплитуды тока и напряжения всюду одинаковы, только они достигаются в разные моменты времени — мы имеем здесь бегущую волну. Картину распределения тока и напряжения в разомкнутой линии называют стоячей волной.

Почему образуется стоячая волна? Выше мы видели, что ток и напряжение вдоль линии всегда можно представить в виде суперпозиции двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях — падающей и отраженной волн. Коэффициент отражения Ω зависит от отношения Z/ρ . В случае разомкнутой линии, $Z = \infty$, коэффициент по напряжению обращается в 1, а по току — в -1 . Поэтому напряжение в случае разомкнутой линии определяется формулой

$$u(x, t) = U_f \cos(\omega t - kx) + U_f \cos(\omega t + kx) = U_2 \cos kx \cos \omega t,$$

где $U_2 = 2U_f$.

Коэффициент отражения по току в случае разомкнутой линии равен -1 , поэтому ток определяется формулой

$$i(x, t) = I_f \cos(\omega t - kx) - I_f \cos(\omega t + kx) = 2I_f \sin kx \sin \omega t,$$

где константу $2I_f$ следует отождествить с U_2/ρ . Таким образом, стоячая волна возникает при суперпозиции падающей и отраженной волн, если коэффициент отражения равен единице.

Отметим следующее важное обстоятельство. Так как в случае стоячих волн существуют определенные точки — узлы тока, в которых ток всегда равен нулю, то линию можно механически разрезать в этих точках; в отделенном таким способом от источника ЭДС участке линии будет течь ток без внешней ЭДС. Мы приходим, следовательно, к собственным колебаниям (собственным волнам) линии.

Так как узлы тока расположены в точках $x = 0$, $x = \lambda/2$, $x = \lambda$, то длина l отрезанного участка линии (считая от конца) связана с длиной волны λ собственных колебаний соотношением

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Это соотношение можно интерпретировать и иначе: если имеется разомкнутая с двух сторон линия длиной l , то в ней возможно существование собственных колебаний, длина волны которых определяется формулой

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Мы дали λ индекс n , чтобы подчеркнуть, что длина волны определяется целым числом n , которое определяет моду колебаний.

Наибольшая длина волны равна, как мы видим, удвоенной длине линии. Распределение амплитуд тока и напряжения для нескольких первых мод показано на рис. 10.31. Общее число мод бесконечно. В этом отношении собственные колебания линии принципиально отличаются от собственных колебаний контура, обладающего индуктивностью и емкостью. Контур обладает только одной собственной частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, линия же конечной длины l — бесконечным числом дискретных собственных частот:

$$\omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda_n} = n \frac{c}{l}.$$

Такое различие связано с тем, что контур представляет собой в электромагнитном отношении систему с одной степенью свободы — электромагнитное состояние контура можно характеризовать одним только значением силы тока, которая одинакова вдоль всего контура. Напротив, линия представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы — состояния линии также можно характеризовать силой тока, но она различна в разных точках линии. Чтобы яснее понять эту мысль, вспомним, что $c = 1/\sqrt{L_1 C_1}$. Тогда формулу для частот ω_n можно переписать в виде

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{L}{n} \frac{C}{n}}},$$

где $L = L_1 l$ и $C = C_1 l$ — полные индуктивность и емкость линии. Мы видим, что спектр собственных частот линии определяется не полными ее индуктивностью L и емкостью C , а величинами в n раз меньшими. Но это довольно естественно, так как в случае стоячих волн и ток и напряжение в разных участках линии различаются не только величиной, но и направлением; поэтому одних индуктивности L и емкости C недостаточно для характеристики электромагнитного состояния линии.

Рассмотрим короткозамкнутую линию. В этом случае, так же как и в случае разомкнутой линии, возникают стоячие волны, поскольку в конце линии ($x = 0$) происходит отражение волн с коэффициентом отражения по напряжению $\Omega = -1$ (коэффициент отражения по току равен $+1$). Отсюда следует, что

$$i(x, t) = I_f \cos(\omega t - kx) + I_f \cos(\omega t + kx) = 2I_f \cos kx \cos \omega t,$$

$$u(x, t) = U_f \cos(\omega t - kx) - U_f \cos(\omega t + kx) = 2U_f \sin kx \sin \omega t.$$

Легко заметить, что $2I_f = I_2$; кроме того, можно показать, что $2U_f = I_2 \rho$, так что

$$i(x, t) = I_2 \cos kx \cos \omega t,$$

$$u(x, t) = I_2 \rho \sin kx \sin \omega t.$$

Сравнение приведенных формул с формулами для тока и напряжения в случае разомкнутой линии показывает, что так же, как и в последнем случае, мы получаем стоячие волны; но при этом меняются роли тока и напряжения: там, где для разомкнутой линии были узлы тока, теперь будут узлы напряжения, а там, где были пучности тока, будут теперь пучности напряжения (рис. 10.32).

В точках, где $i(x, t) = 0$, можно, очевидно, разрезать линию; получаем условие $\cos kl = 0$ для определения собственных частот линии длиной l , закороченной с одной стороны (рис. 10.33). Отсюда следует, что

$$k = k_n = \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и, следовательно,

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n + 1/2}.$$

Напомним, что для разомкнутой линии собственные длины волн равнялись $\lambda_n = 2l/n$.

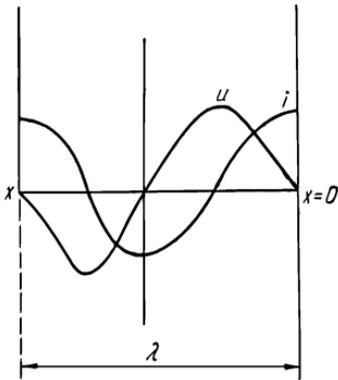


Рис. 10.32

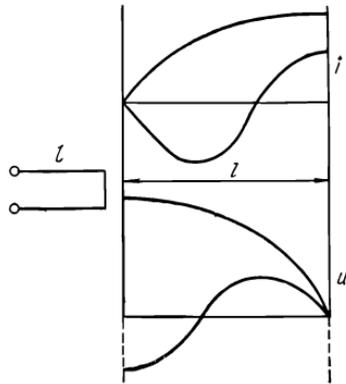


Рис. 10.33

До сих пор мы рассматривали идеальную линию без потерь. Выясним теперь роль активного сопротивления. Считая, что ЭДС, включенная в начале линии, изменяется по закону $\exp(-i\omega t)$, из телеграфных уравнений получаем следующие уравнения для определения комплексных амплитуд напряжения и тока:

$$-\frac{d\bar{I}}{dx} = Y_1 \bar{U}, \quad -\frac{d\bar{U}}{dx} = Z_1 \bar{I},$$

где

$$Y_1 = G_1 - i\omega C, \quad Z_1 = Rl - i\omega L.$$

Дифференцируя эти уравнения по x , находим

$$\frac{d^2 \bar{I}}{dx^2} = Z_1 Y_1 \bar{I}, \quad \frac{d^2 \bar{U}}{dx^2} = Z_1 Y_1 \bar{U},$$

откуда

$$\begin{aligned} \bar{I}(x) &= \bar{I}_f e^{Kx} + \bar{I}_r e^{-Kx}, \\ \bar{U}(x) &= \bar{U}_f e^{Kx} + \bar{U}_r e^{-Kx}, \end{aligned}$$

где $K = \sqrt{Z_1 Y_1}$ и $\bar{I}_f, \bar{I}_r, \bar{U}_f, \bar{U}_r$ — константы, связанные с граничными условиями.

Если потери в линии невелики, так что $R_1 \ll \omega L_1$, $G_1 \ll \omega C_1$, то

$$K = \frac{i\omega}{C} - \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{\rho} + G_1 \right),$$

где $\rho = \sqrt{L_1/C_1}$. В случае бесконечной линии мы должны оставить в выражениях для $\bar{I}(x)$ и $\bar{U}(x)$ только первые слагаемые (вторые слагаемые соответствуют бесконечному нарастанию амплитуд вдоль линии: x отсчитывается от начала линии).

Итак,

$$\begin{aligned} \bar{I}(x) &= \bar{I}_f e^{-\gamma x} e^{ikx}, \\ \bar{U}(x) &= \bar{U}_f e^{-\gamma x} e^{ikx}, \end{aligned}$$

где $k = \omega/c$. Из телеграфных уравнений для $\bar{I}(x)$ и $\bar{U}(x)$ следует, что

$$\bar{U}_f = \omega \bar{I}_f, \quad \omega = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}}.$$

Переходя к мгновенным значениям $u(x, t)$ и $i(x, t)$, окончательно находим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_f e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx), \\ i(x, t) &= \frac{U_f}{|\omega|} e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx - \alpha), \end{aligned}$$

где U_f — амплитуда напряжения в начале линии, $\alpha = \arg \omega$.

Мы получили бегущие волны для тока и напряжения, но в отличие от идеальной линии с $R_1 = C_1 = 0$ теперь амплитуды тока и напряжения не одинаковы вдоль линии, а экспоненциально уменьшаются при движении волны. Пространственное затухание определяется величина γ , растущая с увеличением R_1 и C_1 . Затухание бегущей волны приводит, естественно, к тому, что коэффициент отражения для линии конечной длины никогда не может быть точно равен по модулю единице. Поэтому благодаря потерям в линии не могут образовываться строго стоячие волны; всегда вместе со стоячей волной существует некоторая примесь бегущей волны.

§ 10.9. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

С теорией длинных линий тесно связана теория электрических фильтров, т. е. устройств, которые пропускают электрические токи только в некоторых интервалах частот. Фильтр представляет собой периодическую структуру, состоящую из последовательно соединенных тождественных элементов или ячеек. Схема ячейки изображена на рис. 10.34, где $Z/2$ и Y обозначают комплексные сопротивления и проводимость некоторых комбинаций индуктивностей и емкостей (предполагается, что ток имеет определенную частоту). Если изображенная ячейка является n -й от начала, то комплексные амплитуды тока и напряжения на ее входе обозна-

чаются через \bar{I}_n и \bar{U}_n , а соответствующие величины на ее выходе — через \bar{I}_{n+1} и \bar{U}_{n+1} . Ясно, что

$$\bar{U}_n = \frac{1}{2} Z \bar{I}_n + \frac{1}{2} Z \bar{I}_{n+1} + \bar{U}_{n+1},$$

$$\bar{I}_n = Y \left(\bar{U}_n - \frac{1}{2} Z \bar{I}_n \right) + \bar{I}_{n+1}.$$

Эти соотношения представляют собой основные уравнения фильтра. Они аналогичны телеграфным уравнениям длинной линии, но в отличие от последних являются не дифференциальными, а разностными и определяют ток и напряжение в зависимости от n , т. е. от места ячейки в структуре.

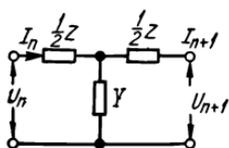


Рис. 10.34

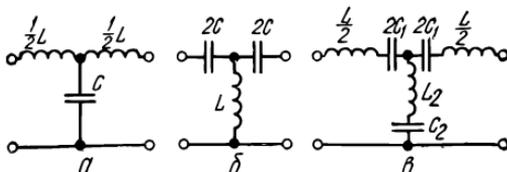


Рис. 10.35

Решение разностных уравнений с постоянными коэффициентами ищется в виде

$$\bar{U}_n = A e^{-\alpha n}, \quad \bar{I}_n = B e^{-\alpha n},$$

аналогичном решению дифференциальных уравнений. Здесь A и B — некоторые константы; α называется постоянной распространения. Подставляя эти выражения в разностные уравнения фильтра, получаем

$$A (1 - e^{-\alpha}) - \frac{1}{2} Z (1 + e^{-\alpha}) B = 0,$$

$$AY + \left(e^{-\alpha} - 1 - \frac{1}{2} ZY \right) B = 0.$$

Для того чтобы уравнения имели нетривиальные решения, нужно, чтобы детерминант этой системы обращался в нуль:

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{-\alpha}, & -\frac{1}{2} Z (1 + e^{-\alpha}) \\ Y, & \left(e^{-\alpha} - 1 - \frac{1}{2} ZY \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем следующее уравнение для определения постоянной распространения:

$$(1 - e^{-\alpha}) \left(e^{-\alpha} - 1 - \frac{1}{2} ZY \right) + \frac{1}{2} ZY (1 + e^{-\alpha}) = 0.$$

Это уравнение называется дисперсионным. Найдя из него α , далее определяем отношение констант A и B :

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{2} Z \frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{1}{2} Z \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2}.$$

Решение дисперсионного уравнения имеет вид

$$e^{-\alpha} = 1 + \frac{1}{2} ZY \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} ZY\right)^2 - 1},$$

откуда, вводя обозначение

$$\cos \beta = 1 + \frac{1}{2} ZY,$$

получаем

$$\alpha = \pm i\beta.$$

Поскольку возможны два значения α , то общее решение разностных уравнений для комплексных амплитуд напряжения и тока записывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}_n &= \bar{U}_f e^{-i\beta n} + \bar{U}_r e^{i\beta n}, \\ \bar{I}_n &= \bar{I}_f e^{-i\beta n} + \bar{I}_r e^{i\beta n}, \end{aligned}$$

где

$$\frac{\bar{U}_f}{\bar{U}_r} = \frac{1}{2} Zi \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\bar{U}_r}{\bar{I}_r} = -\frac{1}{2} iZ \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}.$$

Умножая \bar{U}_n и \bar{I}_n на $e^{i\omega t}$ и беря от произведений вещественные части, находим мгновенные значения напряжения и тока в n -й ячейке:

$$u_n = \operatorname{Re} (\bar{U}_n e^{i\omega t}), \quad i_n = \operatorname{Re} (\bar{I}_n e^{i\omega t}).$$

Они содержат слагаемые двух типов: слагаемые с U_f , I_f при вещественном β изменяются как $\cos(\omega t - \beta n)$, а слагаемые с U_r , I_r — как $\cos(\omega t + \beta n)$. Поэтому первые слагаемые соответствуют бегущей волне, распространяющейся в направлении роста n , или падающей волне, а вторые слагаемые соответствуют отраженной волне. Такая интерпретация слагаемых обоих типов остается справедливой и при комплексном β .

В случае вещественных β можно ввести фазовую скорость волны v_φ , определив ее как отношение числа ячеек Δn , проходимых волной за время Δt , к этому времени. Ясно, что $v_\varphi = \Delta n / \Delta t = \omega / \beta$. Если цепочка бесконечна, то вдоль нее будет распространяться только одна падающая волна. В случае конечной цепочки для этого необходимо, чтобы в конце цепочки находилась нагрузка с импедансом

$$Z_e = \frac{1}{2} Z \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2}.$$

В противном случае всегда будет распространяться как падающая, так и отраженная волна.

В общем случае α является комплексной величиной, причем $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$. Поэтому падающая волна всегда затухает при своем распространении. В идеальном фильтре сигнал проходит, если $\operatorname{Re} \alpha = 0$, т. е. если вещественна величина β . Так как $1 + \frac{1}{2} ZY =$

$= \cos \beta$, то Z и Y должны быть чисто мнимыми величинами, причем должны выполняться условия

$$ZY \leq 0, \quad |ZY| \leq 4,$$

которые и являются условиями прохождения сигнала в идеальном фильтре.

Рассмотрим простейшие случаи, которым соответствуют ячейки, изображенные на рис. 10.35. В случае, приведенном на рис. 10.35, а,

$$Z = i\omega L, \quad Y = i\omega C, \quad ZY = -\omega^2 LC.$$

Поэтому согласно условию пропускания частот

$$\omega \leq \omega_0, \quad \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

В этой схеме пропускаются только низкие частоты. Для схемы, показанной на рис. 10.35, б,

$$Z = \frac{1}{i\omega C}, \quad Y = \frac{1}{i\omega L}, \quad ZY = -\frac{1}{\omega^2 LC}.$$

Поэтому условие пропускания частот имеет вид

$$\omega \geq \omega_0, \quad \omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Фильтр в этом случае пропускает только высокие частоты. Для ячеек типа приведенных на рис. 10.35, в,

$$Z = i\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Y = \frac{1}{i\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)}, \quad ZY = \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}.$$

Условие пропускания имеет вид

$$\frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} < 0, \quad \left| \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \right| \leq 4$$

или

$$\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_2^2} < 0, \quad \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_2^2} \leq 4 \frac{L_2}{L_1},$$

где $\omega_1^2 = 1/L_1 C_1$, $\omega_2^2 = 1/L_2 C_2$. Предполагая, что $\omega_1 > \omega_2$, получаем

$$\omega_3 \leq \omega < \omega_1.$$

Здесь

$$\omega_3^2 = (\omega_1^2 + \xi \omega_2^2)/(1 + \xi), \quad \xi = 4L_2/L_1.$$

Таким образом, фильтр, построенный из рассмотренных ячеек, пропускает только ограниченную полосу частот.

Глава 11

ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 11.1. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В § 9.7 мы нашли ускоряющее вихревое электрическое поле в бетатроне. Но можно установить в самом общем виде связь между вихревым электрическим полем и вызывающим его переменным магнитным полем. Обратимся для этого к закону электромагнитной индукции, согласно которому

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Считая контур \mathcal{L} неподвижным, перепишем это уравнение в виде

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$$

и преобразуем согласно формуле Стокса линейный интеграл в поверхностный:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S}$$

(напомним, что элемент контура $d\mathbf{l}$ и элемент поверхности $d\mathbf{S}$ образуют правовинтовую систему).

Итак, мы получим

$$\int_S \left(\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = 0,$$

а поскольку контур \mathcal{L} и опирающаяся на него поверхность могут быть произвольными, то отсюда следует, что

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Это фундаментальное соотношение (первое уравнение Максвелла) показывает, что ротор электрического поля совпадает (с точностью до множителя $1/c$) со взятой с обратным знаком производной по времени от вектора магнитной индукции.

Подчеркнем еще раз, что электрическое поле, порождаемое переменным магнитным полем, является вихревым, а не потенциаль-

ным, и поэтому его силовые линии будут замкнутыми, в отличие от силовых линий электростатического поля, которые всегда разомкнуты.

Из первого уравнения Максвелла легко вывести закон электромагнитной индукции — для этого стоит лишь проинтегрировать обе части этого уравнения по какой-либо поверхности S , опирающейся на некоторый проводящий контур \mathcal{L} . Воспользовавшись далее формулой Стокса, можно преобразовать поверхностный интеграл от ротора электрического поля в циркуляцию этого поля вдоль контура \mathcal{L} . Таким образом, мы получим ЭДС, действующую в контуре, которая выразится через временную производную магнитного потока, пронизывающего контур. На этом основании мы можем сделать вывод, что первое уравнение Максвелла представляет собой закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме.

В действительности, однако, уравнение Максвелла содержит больше информации, чем закон электромагнитной индукции. Закон электромагнитной индукции неотъемлем от проводящего, или, в более общей формулировке, материального, контура. Уравнение Максвелла не связано с материальным контуром — в него входят в чистом виде сами поля, иными словами, это — полевое уравнение, связывающее поля в данном месте пространства и в данный момент времени.

Беря дивергенцию от обеих частей уравнения Максвелла и замечая, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, получаем $\partial/\partial t \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, откуда следует, что дивергенция магнитной индукции не зависит от времени. Такой вывод вытекает из первого уравнения Максвелла, но этот вывод не означает, что

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Последнее соотношение выполняется, но оно не вытекает из первого уравнения Максвелла, а выражает отдельный закон природы — закон отсутствия в природе магнитных зарядов. Напомним в этой связи, что магнитные силовые линии не имеют ни начала, ни конца.

§ 11.2. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Переменное магнитное поле создает вокруг себя вихревое электрическое поле. Но электрическое и магнитное поля во многом аналогичны. Поэтому естествен вопрос: не создает ли и переменное электрическое поле магнитное поле. То, что такая связь между переменными полями должна существовать, показывает элементарный анализ процесса разряда конденсатора. Действительно, соединим обкладки заряженного конденсатора проводом (рис. 11.1). Тогда по проводу пойдет разрядный ток, который создаст магнитное поле. Силовые линии поля охватывают проводник.

Если выбрать какой-либо контур \mathcal{L} , охватывающий провод, то циркуляция магнитной индукции вдоль \mathcal{L} должна определяться согласно закону полного тока силой тока, проходящего через произвольную поверхность, опирающуюся на \mathcal{L} . Но если взять две поверхности — поверхность S_1 , пересекающую провод, и поверхность S_2 , проходящую в пространстве между обкладками конденсатора (см. рис. 11.1), то через поверхность S_1 будет протекать разрядный ток i , а через поверхность S_2 — нет.

Таким образом, закон полного тока нарушается. Очевидно, конденсатор нарушает замкнутость тока проводимости. Но магнитное поле незамкнутого разрядного тока тем не менее несомненно существует, и, более того, циркуляция поля вдоль контура \mathcal{L} равна $(4\pi/c)i$. Ток i есть интеграл по поверхности S_1 от плотности тока \mathbf{j} , т. е.

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Но циркуляция не может зависеть от вида поверхности; важно



Рис. 11.1

только, чтобы она опиралась на \mathcal{L} . Поэтому должно существовать соотношение

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{S_2} \mathbf{X} d\mathbf{S}_2,$$

где S_2 — произвольная поверхность, проходящая между обкладками конденсатора; \mathbf{X} — некоторая неизвестная векторная величина. Для ее определения имеем уравнение

$$\int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S}_1 = \int_{S_2} \mathbf{X} d\mathbf{S}_2,$$

которое справедливо для всех поверхностей S_1 , пересекающих провод, включая поверхность обкладки конденсатора; поверхность S_2 , лежащая внутри конденсатора, может сколь угодно близко подходить к обкладке конденсатора.

Возьмем в качестве S_1 поверхность обкладки конденсатора. На ней плотность тока \mathbf{j} будет, очевидно, совпадать с $d\sigma/dt$, где σ — поверхностная плотность заряда, или в векторной форме

$$\mathbf{j} = \mathbf{n} \frac{d\sigma}{dt},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор вдоль нормали к обкладке. Плотность заряда σ можно выразить через напряженность поля E вблизи обкладки, $\sigma = (1/4\pi)E$, поэтому на поверхности обкладки

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \dot{E}.$$

Учтем теперь, что поверхность S_2 может изнутри подходить столь угодно близко к поверхности обкладки и поле внутри плоского конденсатора всюду одинаково. Поэтому по крайней мере в случае плоского конденсатора мы можем считать, что

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{E}}$$

и, следовательно,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{S_2} \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{E}} dS_2.$$

Преобразуем согласно формуле Стокса циркуляцию магнитной индукции в интеграл по поверхности S_2 :

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_2} \text{rot } \mathbf{H} dS_2.$$

Тогда получаем

$$\int_{S_2} \text{rot } \mathbf{H} dS_2 = \frac{1}{c} \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dS_2.$$

Так как поверхность S_2 внутри конденсатора произвольна, то должно выполняться соотношение

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

В данном соотношении нет ни емкости конденсатора, ни сопротивления провода, соединяющего его обкладки, ни разрядного тока; сюда входят лишь локально магнитная индукция и электрическое поле. Поэтому возникает вопрос, не является ли это соотношение универсальным и справедливым во всех тех случаях, когда имеется переменное электрическое поле и нет движущихся электрических зарядов. Максвелл впервые предположил, что переменное электрическое поле всегда создает вокруг себя магнитное поле в соответствии с написанным соотношением. Иными словами, переменное электрическое поле с точки зрения создания магнитного поля эквивалентно некоторому току, плотность которого определяется формулой

$$\mathbf{j}^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Этот ток называется током смещения, а \mathbf{j}^* — плотностью тока смещения.

Если имеются также движущиеся заряды, которым соответствует суммарная плотность тока \mathbf{j}_t (она включает как плотность тока проводимости \mathbf{j} , так и плотность молекулярных токов \mathbf{j}_b), то должен быть справедлив закон полного тока

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_t + \mathbf{j}^*),$$

в который входит сумма плотностей потока заряда движущихся частиц j_t и тока смещения j^* . Смысл этого соотношения, которое называется вторым уравнением Максвелла, заключается в том, что магнитное поле порождается как движущимися зарядами, так и переменным электрическим полем.

§ 11.3. СВОБОДНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Переменное электрическое поле создает вокруг себя, так же как и электрический ток, переменное магнитное поле. Но переменное магнитное поле создает вокруг себя электрическое поле, которое также будет переменным. Поэтому возникает вопрос, не могут ли переменные электрическое и магнитное поля, поддерживая друг друга, существовать в вакууме без зарядов и токов?

Вопрос сводится к тому, имеют ли уравнения Максвелла для полей в вакууме

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

решения, отличающиеся от тривиального: $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$. Ответ гласит, что такие решения существуют и их бесконечно много.

Чтобы убедиться в этом, исключим из уравнений одно из полей, например \mathbf{B} . Применим для этого операцию rot к обеим частям первого уравнения:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Используя далее второе уравнение, получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Учтем, наконец, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}.$$

Так как в вакууме $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, то окончательно имеем

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Легко проверить, что такому же уравнению — оно называется волновым — удовлетворяет в вакууме и поле \mathbf{B} :

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Покажем теперь, что волновое уравнение имеет бесчисленное множество нетривиальных решений. Рассмотрим для простоты случай, когда поля зависят только от одной декартовой координаты, например x . Тогда все отличные от нуля компоненты полей \mathbf{E} , \mathbf{B}

(обозначим их общей буквой f) удовлетворяют одному и тому же одномерному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Перепишывая это уравнение в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0$$

и вводя новые переменные

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct,$$

получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f = 0,$$

откуда следует, что общим решением волнового уравнения является следующее:

$$f = \mathcal{F}_1(\xi) + \mathcal{F}_2(\eta),$$

где \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 — две совершенно произвольные функции. В первоначальных переменных имеем

$$f(x, t) = \mathcal{F}_1(x - ct) + \mathcal{F}_2(x + ct).$$

Волновое уравнение и его общее решение уже упоминались в § 10.6 при исследовании длинных электрических линий. Мы видели, что функция $\mathcal{F}_1(x - ct)$ описывает волну, распространяющуюся со скоростью c вдоль положительной оси x , а функция $\mathcal{F}_2(x + ct)$ — волну, распространяющуюся с той же скоростью в противоположном направлении. Но в § 10.6 рассматривались волны, распространяющиеся вдоль проводов; здесь же мы показали, что поля в вакууме — в отсутствие проводов, зарядов и токов — представляют собой волны, распространяющиеся со скоростью c . Эти волны называются электромагнитными. Величина c равна скорости света в вакууме. Поэтому мы приходим к заключению, что скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света в вакууме. Более того, сам свет представляет собой электромагнитную волну, и, так же как световая волна, любая электромагнитная волна в вакууме обладает свойством поперечности. Это немедленно вытекает из уравнений $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Действительно, подставляя в эти уравнения $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x \mp ct)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x \mp ct)$, получаем

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0,$$

откуда $E_x = \text{const}$, $B_x = \text{const}$. Но мы рассматриваем здесь переменные, а не статические поля. Поэтому следует считать $E_x = B_x = 0$, т. е. переменные поля не имеют составляющих вдоль направления распространения волны и являются, следовательно, поперечными. Отличными от нуля в них могут быть только y - и z -составляющие. Легко установить связь между этими составляющими. Пусть, например, электрическое поле волны $\mathbf{E}(x - ct)$ направлено вдоль оси y (волна линейно поляризована вдоль оси

у). Тогда магнитная индукция волны $\mathbf{B}(x - ct)$ будет направлена вдоль оси z . Действительно, $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial/\partial t \mathbf{B}$, поэтому

$$\frac{d}{d\xi} \mathbf{B}(\xi) = \text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ d/d\xi & 0 & 0 \\ 0 & E(\xi) & 0 \end{vmatrix},$$

откуда

$$\frac{d}{d\xi} \mathbf{B}(\xi) = \mathbf{k} \frac{d}{d\xi} E(\xi).$$

Следовательно,

$$\mathbf{B} = \mathbf{k}E, \quad \mathbf{E} = \mathbf{j}E$$

(\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — орты вдоль осей x , y , z).

Таким образом, в рассматриваемой электромагнитной волне — она называется плоской, так как поля в ней зависят только от одной декартовой координаты и поэтому имеют одно и то же значение в каждой плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, — поля \mathbf{E} и \mathbf{B} равны по абсолютному значению, взаимно ортогональны и ортогональны к направлению распространения.

Если плоская волна распространяется не вдоль оси x , а вдоль некоторого произвольного направления \mathbf{n} (\mathbf{n} — единичный вектор), то поля в ней связаны соотношением

$$\mathbf{B} = [\mathbf{nE}],$$

причем

$$\mathbf{nE} = \mathbf{nB} = 0.$$

Последнее соотношение выражает свойство поперечности электромагнитной волны. В частности, плоская волна может быть монохроматической, т. е. поля в ней могут быть синусоидальными функциями времени. В этом случае, если пользоваться комплексным методом записи полей, поля определяются формулами

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)},$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 — комплексные амплитуды полей; ω — частота волны; $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega/c$ (эта величина называется волновым вектором).

Мы показали, что одномерное волновое уравнение имеет бесчисленное множество нетривиальных решений. Но этим же свойством обладает и трехмерное волновое уравнение, и все эти решения имеют вид волн, распространяющихся в разных направлениях со скоростью света c . Более того, оказывается, что любое решение трехмерного волнового уравнения может быть представлено в виде суперпозиции плоских монохроматических волн, распространяющихся с различными частотами и волновыми векторами.

Существование нетривиальных решений уравнений Максвелла в отсутствие токов и зарядов имеет фундаментальное значение. Оно означает, что переменные поля могут существовать в вакууме без зарядов и токов. Следовательно, электромагнитное поле следует рассматривать как физическую реальность, а не как атрибут зарядов. Чтобы окончательно быть в этом уверенным, нужно еще показать, что электромагнитное поле как и вещество, обладает

определенными энергией, импульсом и моментом. В следующем параграфе мы убедимся в этом, а затем можно будет с полным основанием утверждать, что электромагнитное поле действительно материально.

§ 11.4. ЭНЕРГИЯ И КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

С энергией электростатического поля мы уже встречались: рассматривая процесс зарядки конденсатора, мы показали, что затрачиваемая при этом работа против сил электростатического отталкивания зарядов не исчезает и можно считать, что она запасается в виде энергии электростатического поля W_e , плотность которой равна $\frac{1}{8\pi}E^2$. Однако с равным правом мы могли считать, что величина W_e представляет собой энергию зарядов, а не энергию поля. Поэтому рассмотрим теперь вопрос об энергии поля — электрического и магнитного — с более общей точки зрения, исходя из баланса энергии в системе, состоящей из поля и заряженных частиц.

Если в электромагнитном поле \mathbf{E} , \mathbf{B} двигаются частицы, то их движение определяется уравнением движения

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right),$$

где e — заряд частицы; \mathbf{v} и \mathbf{p} — скорость и импульс. Считаем, что поле создается нашими зарядами. Это значит, что в уравнениях Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

плотности тока и заряда определяются нашими зарядами, т. е.

$$\rho = \sum_i e_i n_i, \quad \mathbf{j} = \sum_i e_i n_i \mathbf{v}_i,$$

где n_i — плотность частиц с зарядом e_i и скоростью \mathbf{v}_i , а суммирование распространяется на различные сорта частиц i , находящихся в единице объема. Как будет изменяться кинетическая энергия частиц

$$\mathcal{K} = \sum_{(V)} \frac{1}{2} m v^2,$$

находящихся в некотором объеме V , с учетом воздействия поля на частицы? Изменение кинетической энергии одной частицы в единицу времени равно, очевидно,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = \mathbf{v} \frac{d}{dt} \mathbf{p},$$

Поскольку сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля, направлена перпендикулярно скорости частицы, то согласно уравнению движения частицы

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = e \mathbf{E} \mathbf{v}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \sum_{(V)} e \mathbf{E} \mathbf{v}.$$

Вводя плотности n_i частиц различных сортов, можно перейти в этом выражении от суммирования по всем частицам к интегрированию по объему V , занимаемому частицами с последующим суммированием только по различным сортам частиц:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \sum_i \int_V e_i n_i \mathbf{v}_i \mathbf{E} dV.$$

Учитывая определение плотности тока \mathbf{j} , перепишем это выражение в виде

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV.$$

Но согласно второму уравнению Максвелла

$$\mathbf{j} \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Замечая, что на основании первого уравнения Максвелла $-\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E}$, находим

$$\mathbf{j} \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \frac{c}{4\pi} (\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B}).$$

Это выражение нужно проинтегрировать по объему V . При этом мы учитываем, что

$$\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{B}]$$

и согласно теореме Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{B}] dV = \int_S [\mathbf{E} \mathbf{B}] dS,$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V ; dS — элемент поверхности S , направленный вдоль внешней нормали к ней. Так как

$$\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} E^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} B^2,$$

то в результате получаем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} \equiv \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) dV - \int_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{B}] dS.$$

Проанализируем это выражение. Предположим сперва, что на границе объема V поля обращаются в нуль. Тогда

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K} = - \frac{d}{dt} W,$$

где

$$W = \int_V \frac{1}{4\pi} (E^2 + B^2) dV.$$

Мы видим, что в этом случае $d\mathcal{K} = -dW$, т. е. приращение величины \mathcal{K} равно убыли величины W , так что сумма \mathcal{K} и W не изменяется с течением времени:

$$\mathcal{K} + W = \text{const.}$$

Так как \mathcal{K} представляет собой кинетическую энергию частиц, то полученное соотношение, определяющее баланс энергии, является законом сохранения энергии. Но мы рассматриваем только частицы и электромагнитное поле, которые взаимодействуют между собой и образуют замкнутую систему. Поэтому $\mathcal{K} + W$ есть полная энергия нашей системы, а величина W , зависящая только от полей E , B , — энергия электромагнитного поля:

$$W = \int_V \omega dV,$$

где V — объем, занимаемый полем; ω — плотность электромагнитной энергии:

$$\omega = \frac{1}{8\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi} B^2,$$

которая равна сумме плотностей электрической $\omega_e = \frac{1}{8\pi} E^2$ и магнитной $\omega_m = \frac{1}{8\pi} B^2$ энергий. Эти величины пропорциональны квадратам полей.

С плотностью электрической энергии мы познакомились в § 2.6 при изучении статического электрического поля. Что касается плотности магнитной энергии, то выражение для нее также можно получить, рассматривая статическое поле, т. е. магнитное поле постоянных токов. Напомним, что в § 9.6 мы ввели магнитную энергию токов

$$W_m = \frac{1}{2c^2} (L_1 I_1^2 + 2M I_1 I_2 + L_2 I_2^2),$$

которая только знаком отличается от потенциальной функции токов V . Поэтому, используя результаты § 8.12, можно утверждать, что

$$W_m = \int_V \frac{1}{8\pi} B^2 dV,$$

Обратимся теперь снова к общему выражению для $d/dt \mathcal{H}$, содержащему поверхностный интеграл

$$J = \int_S \Pi \, dS, \quad \Pi = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}].$$

С учетом этого интеграла баланс энергии рассматриваемой нами динамической системы — заряженные частицы и электромагнитное поле — записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{H} + \int_V w \, dV \right) = - \int_S \Pi \, dS.$$

Слева здесь стоит производная по времени от полной энергии системы, т. е. суммы кинетической энергии заряженных частиц и энергии электромагнитного поля. Эта производная не равна нулю, т. е. полная энергия системы не сохраняется. Ясно, что такая ситуация может возникнуть только потому, что энергия покидает или, наоборот, входит в объем V . Движение энергии происходит через поверхность S , ограничивающую объем V , поэтому в баланс энергии входит именно поверхностный интеграл J .

Таким образом, мы должны интерпретировать величину J как поток энергии, уходящей из объема V , т. е. количество электромагнитной энергии, покидающей объем V в единицу времени. Соответственно величину Π нужно интерпретировать как плотность потока электромагнитной энергии, т. е. как энергию, проходящую в одну секунду через площадку в 1 см^2 , которая ориентирована перпендикулярно вектору Π . Этот вектор называется вектором Пойнтинга. Он имеет размерность $\text{эрг}/\text{см}^2 \cdot \text{с}$.

Кроме энергии электромагнитное поле обладает еще количеством движения, или импульсом. Импульс электромагнитного поля в единице объема, т. е. плотность импульса поля \mathbf{g} , отличается от вектора Пойнтинга только множителем $1/c^2$:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \Pi = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{B}],$$

так что количество движения электромагнитного поля, находящегося в объеме V , определяется формулой

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} \, dV = \frac{1}{4\pi c} \int_V [\mathbf{E}\mathbf{B}] \, dV.$$

Поэтому выражение для полного импульса \mathfrak{H} системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля, имеет вид

$$\mathfrak{H} = \sum_{(V)} \mathbf{p} + \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{B}] \, dV,$$

где первое слагаемое представляет собой импульс частиц в объеме V .

Полный импульс в конечном объеме V не сохраняется, так как электромагнитное поле проходит через границу объема и переносит с собой часть импульса. Если $-T_{xn}dS$ представляет собой проекцию на ось x импульса, проходящего в единицу времени через площадку dS , внешняя нормаль к которой имеет направление n , то изменение проекции импульса \mathcal{P}_x нашей системы в единицу времени определяется формулой

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_x = \int_S T_{xn} dS.$$

Совокупность величин T_{xx} , T_{xy} называется тензором натяжений Максвелла. Компоненты этого тензора записываются в виде

$$T_{xx} = \frac{1}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + B_x^2 - B_y^2 - B_z^2);$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \frac{1}{4\pi} (E_x E_y + B_x B_y);$$

$$T_{zx} = T_{xz} = \frac{1}{4\pi} (E_z E_x + B_z B_x);$$

Поскольку изменение импульса тела в единицу времени определяет силу, действующую на тело, проекция на ось x силы, действующей на объем V со стороны окружающего поля, равна $\int T_{xn} dS$.

Наконец, поле обладает еще и определенным моментом количества движения, плотность которого

$$l = [g, \mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi c} [g, \mathbf{E}B],$$

так что момент поля в объеме V определяется формулой

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi c} \int_V [g, \mathbf{E}B] dV.$$

§ 11.5. УСРЕДНЕННЫЕ МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

Уравнения Максвелла, сформулированные в § 11.2, связывают электрическое и магнитное поля в вакууме между собой и с заданными токами и зарядами. Их можно рассматривать как законы движения электромагнитного поля в вакууме. Теперь наша задача состоит в том, чтобы установить аналогичные законы для электромагнитного поля в веществе — поля, в общем, переменного и неоднородного. При этом следует учитывать, что вещество построено из атомов, которые, в свою очередь, состоят из заряженных частиц — электронов и ядер. Поэтому мы должны исходить из представления об электромагнитном поле в вакууме, в котором находятся, постоянно двигаясь, частицы вещества, а так как они

заряжены, то, с одной стороны, они испытывают влияние поля в вакууме, а с другой — модифицируют это поле.

Таким образом, возникает задача о самосогласованном взаимодействии электромагнитного поля в вакууме и электронов и ядер вещества. Эту задачу, соответствующую электронной картине материи, впервые сформулировал Лоренц в конце прошлого столетия; он же указал путь ее принципиального решения.

Сложность задачи связана как с колоссальным числом электронов и ядер в любом макроскопическом участке вещества, так и с невероятно запутанным характером их движения. Но именно эта сложность в конечном счете и упрощает задачу, ибо она позволяет использовать для решения задачи статистический метод. Истинные поля в вакууме, модифицированные заряженными частицами вещества, — назовем эти поля микроскопическими — характеризуются чрезвычайной нерегулярностью. Нерегулярность — и в пространстве, и во времени — обусловлена атомной структурой вещества. Если взять, например, отдельный ион, то электрическое поле, порождаемое им, будет, очевидно, изменять свое направление на расстоянии порядка размеров иона, т. е. 10^{-8} см. Ясно далее, что электрическое и магнитное поля, создаваемые атомными электронами, будут претерпевать существенные изменения в течение характерного атомного времени, составляющего по порядку величины 10^{-16} с (такое время соответствует прохождению атомного расстояния примерно 10^{-8} см с характерной для электронов атома скоростью порядка 10^8 см/с).

Но все эти нерегулярности полей для многих задач совершенно несущественны. Поэтому их нужно исключить из рассмотрения, т. е. интересны не сами микроскопические поля, а усредненные их значения, не содержащие уже мелких нерегулярностей, или, образно выражаясь, «шероховатостей» полей, обусловленных атомной структурой вещества.

Итак, мы должны ввести усредненные, или, как их называют, макроскопические, поля. Усреднение следует производить как по пространственным координатам, так и по времени. Именно, если $f(\mathbf{r}, t)$ — некоторая микроскопическая величина, содержащая атомные нерегулярности, то соответствующая усредненная макроскопическая величина $\bar{f}(\mathbf{r}, t)$ определяется как

$$\bar{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int f(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t + \delta t) d\delta \mathbf{r} d\delta t,$$

где интегрирование производится по некоторому пространственному объему ΔV возле точки \mathbf{r} и некоторому временному интервалу Δt возле момента времени t . Объем усреднения ΔV должен быть большим по сравнению с объемом атома a^3 , но малым по сравнению с той областью пространства L^3 , где уже существенно изменяется сама усредненная величина (она ведь остается функцией координат и времени!).

Аналогичным образом время усреднения Δt должно быть большим по сравнению с характерным атомным временем τ_a (оно определяется как a/v_a , где v_a — средняя скорость электронов в атоме), но малым по сравнению со временем T существенного временного

изменения самой усредненной величины. Если выполняются условия

$$a \ll (\Delta V)^{1/3} \ll L, \tau_a \ll \Delta t \ll T,$$

то, очевидно, усредненная величина $\bar{f}(\mathbf{r}, t)$ не содержит атомных «шероховатостей», а является плавной функцией координат и времени. Именно такие усредненные или макроскопические величины мы и будем рассматривать.

Введем теперь усредненные поля — электрическое $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитное $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (вектор \mathbf{B} называется по исторической традиции магнитной индукцией). С микроскопическими полями, которые обозначим здесь через $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$, они связаны соотношениями

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t).$$

Задача заключается в том, чтобы выяснить, каким закономерностям подчиняются макроскопические поля в среде $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. При этом исходным пунктом должны быть закономерности для микроскопических полей $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ в вакууме. Эти закономерности выражаются уравнениями электромагнитного поля в вакууме. Первая группа уравнений записывается просто:

$$\text{rot } \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t), \quad \text{div } \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Чтобы написать вторую пару уравнений поля, нужно учесть, что вещество может содержать заряженные частицы различных сортов, и если число частиц в единице объема, обладающих зарядом e_i , равно n_i , то микроскопическая плотность электрического заряда равна $\sum_i e_i n_i$, где суммирование распространяется на все сорта i заряженных частиц. Если, далее, \mathbf{v}_i — скорость частиц сорта i , то микроскопическая плотность тока равна $\sum_i e_i n_i \mathbf{v}_i$. Поэтому вторую пару уравнений поля можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \sum_i \mathbf{e}_i n_i \mathbf{v}_i + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t), \\ \text{div } \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi \sum_i \mathbf{e}_i n_i. \end{aligned}$$

Обе пары уравнений представляют собой, по сути, уравнения Максвелла для полей в вакууме, в котором «плавают» заряженные частицы вещества. Но часто их называют уравнениями Максвелла—Лоренца, чтобы подчеркнуть тот подход, который был указан Лоренцом для вывода уравнений поля в средах на основе электронной картины материи.

Теперь усредним уравнения Максвелла—Лоренца. При этом, очевидно, усреднение не связано с операциями rot и div , т. е.

с дифференцированием по координатам и времени. Поэтому формально усреднение дает

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t); \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) &= 0; \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \sum_i \overline{e_i n_i \mathbf{v}_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t); \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi \sum_i \overline{e_i n_i}.\end{aligned}$$

Так как $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}$, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}$, то усредненная первая пара уравнений поля имеет вид

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0,\end{aligned}$$

а усредненная вторая пара уравнений — вид

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \sum_i \overline{e_i n_i \mathbf{v}_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \\ \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi \sum_i \overline{e_i n_i}.\end{aligned}$$

Первая пара уравнений имеет простой физический смысл: первое уравнение выражает для макроскопических полей закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме, а второе — отсутствие в природе магнитных зарядов.

§ 11.6. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ТОК И ТОК НАМАГНИЧЕНИЯ

Рассмотрим теперь вторую пару усредненных уравнений и выясним прежде всего смысл величины $\sum_i \overline{e_i n_i \mathbf{v}_i}$, представляющей собой усредненную плотность микроскопического тока. Чтобы определить ее, необходимо знать электронную структуру вещества. Но при общем феноменологическом описании мы должны различать плотность тока, обусловленного свободными зарядами, и плотность тока, обусловленного связанными зарядами. Обозначая обе эти величины соответственно через \mathbf{j} и \mathbf{j}_b и предполагая для общности, что оба типа зарядов имеются в теле, запишем

$$\sum_i \overline{e_i n_i \mathbf{v}_i} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_b.$$

В действительности, конечно, первое слагаемое присутствует только в проводниках. В этом случае для достаточно медленных полей и неподвижных проводников плотность тока \mathbf{j} (она называется

плотностью тока проводимости) пропорциональна напряженности макроскопического электрического поля:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где σ — коэффициент электропроводности вещества. Но несмотря на это, мы включили слагаемое \mathbf{j} в сумму $\sum e_i n_i v_i$, чтобы получить в дальнейшем общие соотношения, пригодные как для проводников, так и для непроводников.

Рассмотрим далее плотность тока, обусловленного связанными зарядами. Этот ток можно разделить на две части — ток, обусловленный смещением связанных зарядов, или иначе, их поляризацией, и ток, обусловленный вращением заряженных частиц, в первую очередь вращением электронов в атомах. Соответствующие плотности токов обозначим через \mathbf{j}_P и \mathbf{j}_M , так что

$$\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M.$$

Первая из приведенных величин — плотность поляризационного тока \mathbf{j}_P — может быть просто выражена через вектор поляризации \mathbf{P} , который определяется как усредненная сумма дипольных моментов $\mathbf{d}_i = e_i \mathbf{r}_i$ связанных частиц, содержащихся в единице объема (\mathbf{r}_i — радиус-вектор, определяющий положение связанного i -го заряда), т. е.

$$\mathbf{P} = \sum_{\text{(ед. объема)}} \overline{\mathbf{d}_i}.$$

Беря производную от \mathbf{P} по времени, получаем плотность тока

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}.$$

Рассмотрим плотность тока \mathbf{j}_M , обусловленного связанными вращающимися зарядами. Каждый такой заряд эквивалентен, очевидно, некоторому замкнутому молекулярному току, и вопрос сводится к тому, как связать величину \mathbf{j}_M с этими молекулярными токами. Определим суммарный ток $\mathbf{j}_M \Delta S$, проходящий через некоторую площадку ΔS , например через площадку ΔS_x , ориентированную перпендикулярно оси x (рис. 11.2). Так как молекулярные токи замкнуты, то, очевидно, суммарный ток через площадку ΔS_x будет определяться теми индивидуальными молекулярными токами, которые пересекают площадку ΔS_x не два, а только один раз; иными словами, существенные только те молекулярные токи, которые расположены на границе площадки ΔS_x . Если взять границу AB , то число таких токов равно $\Delta y s_y n$, где n — число молекулярных токов (т. е. атомов) в единице объема; s_y — проекция площади s , обтекаемой молекулярным током, на плоскость xz ; Δy — длина AB . Умножая эту величину на силу отдельного молекулярного тока i_m , находим общий молекулярный ток возле границы AB площадки ΔS_x . Замечая, что величина $m = \frac{1}{c} i_m s$ представляет собой магнитный момент отдельного молекулярного тока, запишем общий молекулярный ток вблизи границы AB в виде $\Delta y c (nm)_y$. Аналогичные выражения справедливы для общих моле-

кулярных токов вблизи границ $A'A$, $B'B$, $A'B'$. Приведенные выражения нужно сложить, в результате чего мы получим, очевидно, циркуляцию вектора cnt вдоль контура $ABA'B'$, ограничивающего площадку ΔS . Наконец, так как j_M по смыслу — макроскопическая величина, то cnt нужно еще усреднить, чтобы в нее не входили атомные нерегулярности. Учитывая, что общий молекулярный ток через площадку ΔS равен $j_M \Delta S$, получаем соотношение

$$j_M \Delta S = \oint_{ABA'B'} \overline{cnt} dl,$$

где dl — элемент контура $ABA'B'$, ограничивающего площадку.

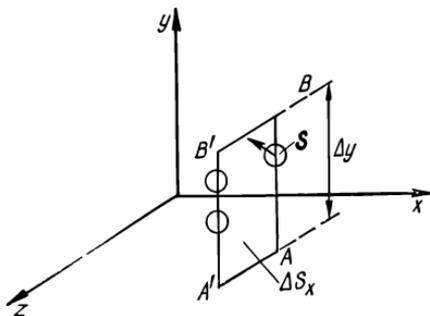


Рис. 11.2

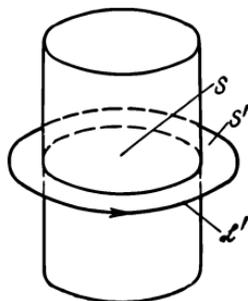


Рис. 11.3

Циркуляцию выразим согласно формуле Стокса через ротор вектора cnt , а так как площадка макроскопически мала, то имеем

$$j_M \Delta S = c \operatorname{rot} \overline{nt} \Delta S,$$

откуда

$$j_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \overline{nt}.$$

Величина \mathbf{M} называется вектором намагниченности. Его можно записать также в виде

$$\mathbf{M} = \sum_{(\text{ед. объема})} \overline{m_i},$$

где m_i — магнитный момент i -го вращающегося заряда, а суммирование производится по всем связанным зарядам, находящимся в единице объема.

Итак, плотность макроскопического тока, связанного с вращающимися связанными зарядами, равна с точностью до множителя c ротору вектора намагниченности \mathbf{M} . Отсюда легко заключить, что полный ток $\int_S j_M dS$, обусловленный вращающимися зарядами, через произвольное сечение S тела равен нулю. Действительно, так как ток j_M отличен от нуля только там, где $\mathbf{M} \neq 0$, а вне тела $\mathbf{M} = 0$, то $\int_S j_M dS = \int_{S'} j_M dS$, где S' — поверхность, включающая по-

верхность S и лежащая частично вне тела (рис. 11.3). Но по формуле Стокса

$$\int_{S'} \mathbf{j}_M d\mathbf{S} = \int_{S'} c \operatorname{rot} \mathbf{M} d\mathbf{S} = c \oint_{\mathcal{L}'} \mathbf{M} d\mathbf{l},$$

где \mathcal{L}' — контур, ограничивающий S' , а так как на нем $\mathbf{M} = 0$, мы приходим к равенству $\int_S \mathbf{j}_M d\mathbf{S} = 0$.

§ 11.7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ВЕЩЕСТВЕ

Теперь мы можем вернуться ко второй группе усредненных уравнений. Первое из них, представляющее собой дифференциальную форму закона полного тока в среде, запишем в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

или, учитывая, что

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M},$$

в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D},$$

где

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}.$$

Здесь вектор \mathbf{D} называется электрической индукцией, а вектор \mathbf{H} — напряженностью магнитного поля (напомним, что \mathbf{B} — магнитная индукция). Итак, ротор напряженности магнитного поля в среде определяется плотностью тока проводимости \mathbf{j} и производной по времени от электрической индукции \mathbf{D} .

Если ввести плотность \mathbf{j}^* тока смещения в среде

$$\mathbf{j}^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D},$$

то полученное соотношение принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}^*).$$

Это соотношение представляет собой окончательную формулировку закона полного тока для материальных сред в дифференциальной форме.

Обратимся к последнему уравнению второй группы усредненных уравнений; связывающему дивергенцию усредненного электрического поля \mathbf{E} с усредненной микроскопической плотностью за-

ряда $\overline{\Sigma e_i n_i}$. Эту величину можно представить в виде суммы плотностей свободных ρ и связанных ρ_b зарядов:

$$\sum_i \overline{e_i n_i} = \rho + \rho_b.$$

Производные по времени от плотностей зарядов ρ и ρ_b можно просто выразить через плотности токов \mathbf{j} и \mathbf{j}_b . Для этого следует воспользоваться законом сохранения заряда, согласно которому изменение в единицу времени общего заряда Q внутри некоторого объема V равно суммарной силе тока I , втекающей в объем V через окружающую его поверхность S . Так как

$$Q = \int_V \rho dV, \quad I = - \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S},$$

где ρ — объемная плотность заряда; \mathbf{j} — вектор плотности тока ($d\mathbf{S}$ имеет направление внешней к S нормали). то

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Учитывая, что

$$\int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV,$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = - \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

Это соотношение, представляющее собой закон сохранения заряда в дифференциальной форме (оно называется уравнением непрерывности), написано для свободных зарядов. Но такое же соотношение справедливо и для связанных зарядов, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_b = - \operatorname{div} \mathbf{j}_b.$$

Подставляя сюда $\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M$, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_b = - \operatorname{div} \mathbf{j}_P - \operatorname{div} \mathbf{j}_M.$$

Поскольку $\mathbf{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}$, $\mathbf{j}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{M} = 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_b = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Отсюда следует, что усредненная плотность связанных зарядов

$$\rho_b = - \operatorname{div} \mathbf{P}$$

(плотность ρ_b равна, очевидно, нулю при $\mathbf{P} = 0$). Интегрируя ρ_b по объему V , определяем суммарный усредненный связанный заряд в этом объеме:

$$Q_b = \int_V \rho_b dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV.$$

Согласно теореме Гаусса

$$Q_b = - \int_S \mathbf{P} d\mathbf{S},$$

т. е. связанный заряд определяется потоком вектора поляризации через поверхность S , окружающую объем, и не зависит от вектора намагниченности.

Итак,

$$\sum_i \overline{e_i n_i} = \rho - \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Поэтому последнее уравнение второй группы усредненных уравнений можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P})$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho,$$

где \mathbf{D} , как и ранее, — вектор электрической индукции. Это уравнение, справедливое для произвольных переменных полей, не отличается от известного уже нам уравнения электростатики, представляющего собой дифференциальную форму теоремы Гаусса о потоке электрической индукции: $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$.

Таким образом, мы пришли к следующим четырем уравнениям для усредненных полей:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho. \end{aligned}$$

Эти уравнения называются уравнениями Максвелла для материальных сред. Мы видим, что в них входит не два, как в случае вакуума, а четыре поля: \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{D} , \mathbf{H} . Из этих полей непосредственный физический смысл имеют поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . Они представляют собой усредненные микроскопические электрическое и магнитное поля. Поля \mathbf{D} и \mathbf{H} являются вспомогательными; чтобы их найти, нужно, кроме полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , знать еще поляризацию \mathbf{P} и намагниченность \mathbf{M} :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}.$$

Величины \mathbf{P} и \mathbf{M} зависят от \mathbf{E} и \mathbf{B} , но нахождение этих зависимостей представляет собой, в общем, очень сложную задачу, которая может быть решена только на основе атомной динамики, т. е. квантовой механики. О зависимости \mathbf{P} от \mathbf{E} в статическом случае мы уже упоминали в гл. 3, а характер намагничения для разных типов веществ рассмотрим в следующей главе. Здесь только заметим, что так как зависимость величин \mathbf{P} и \mathbf{M} от полей \mathbf{E} и \mathbf{B}

различна для разных веществ, то на границе раздела двух разных тел поля \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} не будут непрерывны, а напротив, будут испытывать скачки при переходе от одного тела к другому. Однако на границе будут выполняться вполне определенные граничные условия. Условия для статических полей \mathbf{E} и \mathbf{D} мы сформулировали в § 3.1 и видели, что всегда непрерывны тангенциальная составляющая электрического поля и нормальная составляющая электрической индукции, т. е.

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n},$$

где индексы 1 и 2 служат для обозначения двух соприкасающихся тел, а индексы t и n — для обозначения тангенциальной и нормальной (к границе раздела) составляющих векторов. Такие же граничные условия выполняются и в случае переменных полей.

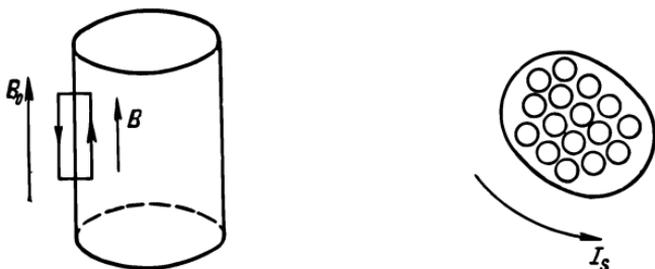


Рис. 11.4

Аналогичные граничные условия справедливы для напряженности магнитного поля и магнитной индукции. Всегда непрерывны тангенциальная \mathbf{H} и нормальная \mathbf{B} составляющие, т. е.

$$H_{1t} = H_{2t}, \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Тангенциальные составляющие магнитной индукции испытывают скачок на границе раздела двух сред, который можно связать с плотностью поверхностных токов на этой границе. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим какое-либо тело в форме цилиндра, помещенное в магнитное поле \mathbf{B}_0 , параллельное оси цилиндра. Картина молекулярных токов в сечении цилиндра схематически изображена на рис. 11.4. Мы видим, что молекулярные токи приводят к существованию поверхностного тока I_S на границе цилиндра. Ясно, что этот ток пропорционален длине l цилиндра.

Рассмотрим теперь замкнутый контур \mathcal{L} в виде прямоугольника, две длинные стороны которого, параллельные образующей цилиндра, находятся в непосредственной близости к границе цилиндра, причем одна сторона лежит внутри цилиндра, а другая — вне его. Циркуляция магнитной индукции вдоль контура \mathcal{L} равна $(B - B_0)l$, где B — индукция внутри цилиндра. Однако согласно закону полного тока ее следует приравнять $(4\pi/c)I$, где I — ток, пронизывающий контур \mathcal{L} . Но этот ток представляет собой поверхностный ток I_S . Поэтому

$$(B - B_0)l = \frac{4\pi}{c}I_S.$$

Поскольку поверхностный ток I_S пропорционален длине цилиндра l , можно ввести плотность поверхностного тока j_S , т. е. поверхностный ток, приходящийся на единицу длины цилиндра. В результате получаем соотношение

$$B_t - (B_0)_t = \frac{4\pi}{c} j_S,$$

где мы дали величинам B и B_0 индекс t , чтобы подчеркнуть, что они являются тангенциальными составляющими вектора магнитной индукции. В общем случае как угодно граничащих двух сред это соотношение имеет вид

$$[\mathbf{n}_{12}, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_S,$$

где \mathbf{n}_{12} — единичный вектор нормали, направленной из среды 1 в среду 2.

Все приведенные граничные условия, так же как и уравнения Максвелла для материальных сред, справедливы в случае, когда пространственный и временной интервалы существенного изменения макроскопических полей велики по сравнению с соответствующими атомными величинами.

§ 11.8. БАЛАНС ЭНЕРГИИ В СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В § 11.4 мы дали определение энергии электромагнитного поля в вакууме, основываясь на рассмотрении энергетического баланса в динамической системе, состоящей из поля в вакууме и заряженных частиц. Представим себе теперь, что вакуум заменяется материальной средой, в которой существует некоторое электромагнитное поле, и поставим вопрос о балансе энергии в этом случае.

Для определенности предполагаем, что имеется источник сторонней ЭДС, доставляющий в единицу времени энергию

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}^{(e)} dV,$$

где $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)})$ — плотность тока проводимости; $\mathbf{E}^{(e)}$ — поле сторонних источников (неэлектромагнитного происхождения); σ — проводимость среды. Как же расходуется эта мощность? Чтобы получить ответ на этот вопрос, воспользуемся законом полного тока в дифференциальной форме

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$$

и выразим отсюда \mathbf{j} через $\text{rot } \mathbf{H}$ и $(\partial/\partial t) \mathbf{D}$. Кроме того, заменим $\mathbf{E}^{(e)}$ на $(1/\sigma)\mathbf{j} - \mathbf{E}$. В результате получаем

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int \frac{1}{\sigma} j^2 dV + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} dV - \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} dV.$$

Учтем далее, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} dV + \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} dV = 0.$$

Прибавляя это выражение к $\mathcal{P}^{(e)}$ и учитывая, что

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}],$$

находим

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int \frac{1}{\sigma} j^2 dV + \int \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right) dV + \int \operatorname{div} \mathbf{\Pi} dV,$$

где

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Последний интеграл можно согласно теореме Гаусса преобразовать в поверхностный интеграл от $\mathbf{\Pi}$, так что

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int_V \frac{1}{\sigma} j^2 dV + \int_V \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right) dV + \int_S \mathbf{\Pi} dS,$$

где dS — ориентированный вдоль внешней нормали элемент поверхности S , ограничивающий объем V .

Это соотношение и определяет баланс энергии в среде. Первое слагаемое справа представляет собой джоулево тепло, выделяемое в среде благодаря существованию проводимости, а третье слагаемое — поток электромагнитной энергии, выходящей из объема за единицу времени:

$$I = \int_S \mathbf{\Pi} dS.$$

С таким выражением мы уже встречались в § 11.4 и назвали вектор $\mathbf{\Pi}$, определяющий плотность потока, вектором Пойнтинга. Это название сохраняется и теперь. Но в случае материальной среды, в отличие от вакуума, вектор Пойнтинга определяется векторным произведением векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , а не \mathbf{E} и \mathbf{B} . Так как в случае вакуума векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} совпадают, значит, вектор Пойнтинга всегда определяется векторным произведением $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$.

Второе слагаемое справа представляет собой работу, которую нужно совершить в единицу времени в объеме V , чтобы скорости изменения электрической и магнитной индукции были равны $(\partial/\partial t)\mathbf{D}$ и $(\partial/\partial t)\mathbf{B}$. Иными словами, эта величина представляет собой скорость произведенной работы по изменению \mathbf{D} и \mathbf{B} или работы δA , которую нужно затратить над единицей объема среды, чтобы изменить электрическую индукцию на $d\mathbf{D}$, а магнитную индукцию — на $d\mathbf{B}$:

$$\delta A = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B}).$$

Для полей в вакууме, когда $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, работа представляет собой полный дифференциал функции

$$\omega_0 = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2),$$

которую можно интерпретировать как плотность электромагнитной энергии в вакууме.

В случае материальной среды работа δA в общем не представляет собой полный дифференциал какой-либо функции состояния среды, подобно тому как работа при изменении объема тела $\delta A = p dV$, где p — давление, также не есть полный дифференциал функции состояния тела (поэтому мы пользуемся символом δ вместо d). Это, как известно, связано с тем, что давление зависит не только от объема, но и от других величин, например от температуры, поэтому работа зависит от процесса, при котором она выполняется. Подобным образом работа, которую нужно совершить при изменении индукций \mathbf{D} и \mathbf{B} на $d\mathbf{D}$ и $d\mathbf{B}$, зависит от процесса, при котором изменяются поля, в частности от теплового режима. Лишь в случае, когда поле \mathbf{E} является функцией только \mathbf{D} и аналогично поле \mathbf{H} зависит только от \mathbf{B} , работа δA будет полным дифференциалом функции

$$\omega = \int 4\pi (\mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B}),$$

где интегрирование по \mathbf{D} и \mathbf{B} производится от нулевых до заданных значений \mathbf{D} и \mathbf{B} . В этом случае величину ω можно интерпретировать как внутреннюю энергию единицы объема среды, причем она представляет собой сумму собственно электромагнитной энергии и энергии материальной среды, обусловленной электромагнитным полем. При линейных связях между \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{H} , \mathbf{B} величина ω имеет вид

$$\omega = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}\mathbf{D} + \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}\mathbf{B}.$$

Здесь первое слагаемое называется плотностью электрической энергии в среде, а второе — плотностью магнитной энергии в среде, хотя, как указано выше, в выражение для ω входят собственно энергия электромагнитного поля и энергия вещества, обусловленная электромагнитным полем.

Для переменных и пространственно неоднородных полей δA не представляет собой полного дифференциала какой-либо функции состояния полей, так как $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$, а величины \mathbf{P} и \mathbf{M} зависят, как правило, не только от \mathbf{E} и \mathbf{H} , но и от производных \mathbf{E} и \mathbf{H} по времени и координатам.

Однако и для постоянных однородных полей δA будет полным дифференциалом только в исключительных случаях, а именно для неполярных диэлектриков (см. § 3.5) и диамагнетиков (см. § 12.6), так как только для этих веществ \mathbf{P} и \mathbf{M} не зависят от температуры; в иных случаях они зависят от температуры, и соответственно работа δA зависит от процесса изменения полей. Если к работе δA , производимой над системой, прибавить тепло $\delta Q = T dS$, приобретаемое системой (S — энтропия системы; T — температура), мы получим полный дифференциал внутренней энергии системы. Поэтому если над средой не производится никакой другой работы,

кроме работы, связанной с изменением индукций \mathbf{D} и \mathbf{B} , то изменение внутренней энергии единицы объема среды определяется формулой

$$d\omega = Tds + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B}),$$

где s — плотность энтропии среды; при этом среда предполагается термодинамически равновесной, следовательно, поля считаются не зависящими от времени. В этом случае величина $d\omega$ является полным дифференциалом функции состояния среды $\omega \equiv \omega(\mathbf{D}, \mathbf{B}, s)$, представляющей собой плотность внутренней энергии среды — энергии, содержащей как собственно энергию электромагнитного поля (постоянного), так и часть энергии среды, обусловленной электромагнитным полем.

Перейдем от плотности энергии ω к плотности свободной энергии $F = \omega - Ts$. Ясно, что

$$dF = -sdT + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B}).$$

Согласно этой формуле для изотермического процесса второе слагаемое (т. е. δA) будет полным дифференциалом плотности свободной энергии среды $F = F(\mathbf{D}, \mathbf{B}, T)$. В частности, при линейных связях между \mathbf{D} , \mathbf{E} и \mathbf{B} , \mathbf{H} получаем

$$F = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}\mathbf{D} + \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}\mathbf{B}.$$

Здесь коэффициенты пропорциональности между индукциями и полями могут как угодно зависеть от температуры; если такой зависимости нет, то $F = \omega$. Величина F называется плотностью свободной энергии полей в среде (подчеркнем еще раз, что в выражение для F входит как плотность собственно энергии электромагнитного поля, так и часть плотности свободной энергии среды, связанной с полями).

Во всех приведенных формулах поля \mathbf{E} и \mathbf{B} представляют собой суперпозиции полей, создаваемых внешними источниками, и полей, порождаемых молекулярными токами и связанными зарядами среды. Но часто приходится относить работу не к изменению индукций \mathbf{D} и \mathbf{B} , а к изменению только внешних полей. В этом случае легко установить энергетический баланс в среде. Воспользуемся тем, что энергия дипольного момента \mathbf{d} во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}^{(e)}$ равна $-d\mathbf{E}^{(e)}$, а энергия магнитного момента \mathbf{m} во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}^{(e)}$ равна $-m\mathbf{H}^{(e)}$. Поэтому работа, совершаемая над моментами \mathbf{d} и \mathbf{m} , при изменении внешних полей на $d\mathbf{E}^{(e)}$ и $d\mathbf{H}^{(e)}$ определяется формулой

$$\delta a = -d d\mathbf{E}^{(e)} - m d\mathbf{H}^{(e)},$$

а работа внешних полей над электрическим и магнитным моментами, отнесенная к единице объема среды, — формулой

$$\delta A = -P d\mathbf{E}^{(e)} - M d\mathbf{H}^{(e)}.$$

Прибавляя к этому выражению тепло TdS , получаем полный дифференциал плотности энергии среды как функции переменных,

Отсюда следует, что дифференциал плотности свободной энергии $F = \omega - Ts$ среды при наличии внешних полей записывается в виде

$$dF = -sdT - PdE^{(e)} - MdH^{(e)}.$$

§ 11.9. СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЕДИНИЦ

При изучении электрических и магнитных явлений мы пользовались в основном (исключением была теория переменных токов) гауссовой системой единиц, в которой закон Кулона записывается в виде

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

и делается предположение об одинаковой размерности электрического и магнитного полей: $[E] = [B]$. Чисто механические величины измеряются при этом в системе СГС с тремя основными единицами: сантиметр — длина, секунда — время, грамм — масса

Гауссова система представляется естественной при общем исследовании электромагнитных явлений, так как она отражает главное свойство электромагнитного поля — его единство и относительность разделения на электрическую и магнитную компоненты. Однако для практического использования она часто бывает мало удобной. Значения электромагнитных величин, практически часто применяемых, т. е. значение зарядов, сил токов, напряженностей полей, емкостей, сопротивлений, индуктивностей, таковы, что в гауссовой системе они выражаются либо очень малыми, либо очень большими числами. Например, сила тока в один ампер соответствует примерно тысяче миллионов гауссовых единиц силы тока, а разность потенциалов в один вольт — одной трехсотой гауссовой единицы потенциала.

По этой причине в технике стали пользоваться системой СИ (или МКС), которая отличается также и от системы СГС для чисто механических величин. Мы разъясним в этом параграфе, как строится система СИ, но предварительно выясним общий вопрос: какие величины следует выбирать в качестве основных.

По традиции основными обычно считаются три величины — длина L , время T и масса M , для которых и выбираются основные единицы. В системе СИ ими являются метр, секунда и килограмм. Единицы для других величин — производные единицы — устанавливаются с помощью тех или иных физических законов, а их размерности выражаются через размерности L , T , M .

Но законов существует много, поэтому производные единицы могут выбираться, в общем, разными способами; более того, число основных единиц не обязательно должно быть равно трем. Например, в формуле закона всемирного тяготения

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

m_1 и m_2 — массы двух материальных точек, находящихся на расстоянии r друг от друга; G — гравитационная постоянная. В системе СГС $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{г}^{-1}$. Но так как она универ-

сальная постоянная, ее можно считать безразмерной и выбрать равной единице. Тогда закон всемирного тяготения примет вид

$$f = \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Эта формулировка должна быть согласована со вторым законом Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = f.$$

Приравнивая размерности силы f в обеих формулах, получаем $MLT^{-2} = M^2L^{-2}$, откуда $M = L^3T^{-2}$, т. е. размерность массы стала производной, а в качестве основных остались только две единицы — длины и времени.

Воспользовавшись универсальностью скорости света c в вакууме, примем ее безразмерной и равной единице. Тогда получим совпадающие размерности и совпадающие единицы для длины и времени: $L = T$. Соединив требования $G = 1$ и $c = 1$, найдем систему единиц с одной лишь основной единицей для длины. Размерность массы совпадает в этой системе с размерностью длины: $M = L$.

В квантовой физике вводится новая универсальная постоянная — постоянная Планка \hbar ; в системе СГС $\hbar = 10^{-27} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \times \text{с}^{-1}$. Но в силу универсальности \hbar считаем эту постоянную безразмерной и равной единице. Присоединяя сюда требование $c = 1$, получаем систему единиц с одной основной единицей, так как теперь $T = L$, $M = L^{-1}$, т. е. в качестве основной единицы может быть взята единица длины. Масса будет измеряться в обратных длинах. Заряд безразмерен; например, заряд электрона будет равен $1/\sqrt{137}$.

Вернемся теперь к вопросу о выборе единиц для электромагнитных величин. При решении этого вопроса необходимо исходить из наиболее общих формулировок основных законов электромагнетизма. Начнем с закона Кулона, который запишем в виде

$$F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где $q_{1,2}$ — заряд; k_1 — некоторый коэффициент, в общем, размерный, при выборе которого необходимо лишь выполнение условия

$$[k_1] [q]^2 = L^3 T^{-2} M.$$

Напряженность электрического поля E должна определяться как сила, действующая на единичный заряд, так что поле, создаваемое зарядом q на расстоянии r ,

$$E = k_1 \frac{q}{r^2}.$$

Рассмотрим взаимодействие между токами и запишем формулу Ампера для силы взаимодействия токов I_1 и I_2 , протекающих в двух параллельных, длинных и тонких проводках, в следующем общем виде:

$$F_A = 2k_2 \frac{I_1 I_2}{d} l.$$

где l — длина проводов; d — расстояние между ними и k_2 — некоторый, в общем, размерный коэффициент, аналогичный k_1 . Сила тока определяется при этом как производная от заряда по времени: $I = d/dtq$. Поэтому можно сравнить размерности k_1 и k_2 . Ясно, что

$$\left[\frac{k_1}{k_2} \right] = L^2 T^{-2},$$

т. е. k_1/k_2 имеет размерность квадрата скорости. Силы F и F_A можно тщательно измерить, поэтому величину k_1/k_2 можно определить экспериментально; она оказывается равной квадрату скорости света c в вакууме:

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2.$$

Введем магнитную индукцию B . Она должна определяться как величина, пропорциональная (но не равная!) силе, действующей согласно формуле Ампера на ток единичной силы:

$$B = 2k_2\alpha \frac{I}{d},$$

где α — некоторый, в общем, размерный коэффициент.

Вектор индукции \mathbf{B} должен входить также в закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\oint \mathbf{E} dl = -k_3 \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

где k_3 — также некоторый произвольный, но размерный коэффициент.

Итак, в нашем распоряжении имеется четыре коэффициента: k_1 , k_2 , α , k_3 . В зависимости от их выбора получаем различные системы единиц. Однако эти коэффициенты нельзя выбирать совершенно произвольно, так как они не независимы. Действительно, уравнения Максвелла имеют теперь вид

$$\text{rot } \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho,$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi k_2 \alpha \mathbf{j} + \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E},$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Для полей в вакууме отсюда следует волновое уравнение

$$\Delta \mathbf{B} - k_3 \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} = 0.$$

Но коэффициент при $\partial^2/\partial t^2 \mathbf{B}$ должен равняться $1/c^2$ независимо от систем единиц, $k_1/k_2 k_3 \alpha = c^2$, а так как $k_1/k_2 = c^2$, то $\alpha = 1/k_3$.

Таким образом, свободно можно распоряжаться только двумя из четырех коэффициентов k_1 , k_2 , k_3 , α , но выбирать их следует так, чтобы получаемые системы единиц были удобными либо для практического, либо для теоретического использования. Важную

роль играет также простота и даже красота написания уравнений Максвелла, о которых Больцман говорил: «Уж не Боги ли начертали эти знаки!». Следует также иметь в виду, что число основных единиц (как механических, так и электромагнитных) не должно быть обязательно равно трем.

К настоящему времени предложено пять систем единиц — электростатическая, электромагнитная, гауссова, система Хевисайда—Лоренца и рационализованная система МКС (СИ). В первых четырех основными величинами считаются длина, время, масса с размерностями L , T , M (единицы — сантиметр, секунда, грамм); в пятой системе к основным величинам добавляется размерность заряда Q или тока I (единицы — метр, секунда, килограмм, кулон или ампер). Значения констант k_1 , k_2 , k_3 , α в этих системах приведены в табл. 21. В системе СИ полагается $k_1 = 1/4\pi\epsilon_0$, $k_2 = \mu_0/4\pi$. Поэтому ϵ_0 и μ_0 имеют размерности $L^3T^{-2}MQ^{-2}$ и LMQ^{-2} (размерности k_1 и k_2 рассмотрены выше), т. е.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}, \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{Кл}^2}.$$

Выпишем теперь уравнения Максвелла во всех этих системах. Для полноты изложения приведем все соотношения сразу для материальных сред. Напомним, что электрическое поле в среде характеризуется двумя векторами \mathbf{E} и \mathbf{D} , связанными в гауссовой системе соотношением $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ (\mathbf{P} — вектор поляризации). В других системах это соотношение записывается в виде

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \beta\mathbf{P},$$

где величина ϵ_0 введена выше, а β — некоторая константа, которая всегда выбирается равной 1 либо 4π .

Магнитное поле в среде также характеризуется двумя векторами — средней напряженностью \mathbf{B} , называемой индукцией, и намагниченностью \mathbf{M} (аналогичной \mathbf{P}). Напряженность поля \mathbf{H} определяется соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \beta'\mathbf{M},$$

где величина μ_0 введена выше, а β' — некоторая константа, которая выбирается всегда равной 1 или 4π . Уравнения Максвелла вместе с выражением для силы Лоренца приведены в табл. 22. В табл. 23 приведены единицы в системе СИ и значения их в гауссовой системе (ГС).

В заключение дадим определения основных единиц в СИ. Метр определяется как длина, равная 1 650 763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86 (^{86}Kr); килограмм — как масса международного прототипа килограмма; секунда — как время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 (^{133}Cs); ампер — как сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает между проводниками силу, равную 2×10^{-7} Н/м.

Глава 12

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 12.1. МАГНИТНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Вектор намагниченности \mathbf{M} , введенный в § 11.6, зависит от магнитного поля в веществе, т. е. от магнитной индукции \mathbf{B} . Поэтому магнитная индукция \mathbf{B} и напряженность магнитного поля $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ не являются независимыми величинами. Напротив, они связаны между собой вполне определенным соотношением $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$, характерным для каждого вещества.

Покажем, как экспериментально можно найти связь между этими величинами. Будем считать поле статическим; тогда справедливо уравнение $\text{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ и вытекающий из него закон полного тока

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I,$$

где I — суммарный ток проводимости, пронизывающий контур \mathcal{L} . В частности, в случае достаточно длинного соленоида, заполненного каким-либо веществом, напряженность поля внутри соленоида определяется формулой

$$H = \frac{4\pi}{c} I n,$$

где I — сила тока; n — число витков, приходящееся на единицу длины соленоида. В эту формулу не входят величины, характеризующие свойства сердечника, — напряженность поля определяется только произведением силы тока на число витков и не зависит от магнитных свойств вещества, из которого сделан сердечник. Таким образом, при изменении силы тока через обмотку соленоида пропорционально изменяется напряженность поля в веществе сердечника соленоида.

Покажем далее, как можно определить индукцию B в веществе сердечника соленоида. Оденем для этого на сердечник соленоида проводящее кольцо K , соединенное с гальванометром G (рис. 12.1). Через это кольцо проходит поток магнитной индукции Φ , равный $\Phi = BS$, где S — площадь сечения сердечника. Если снять далее кольцо с сердечника, то поток магнитной индукции через него станет равным нулю, т. е. поток, пронизывающий кольцо, изменится, а следовательно, согласно закону электромаг

нитной индукции в кольце возникнет электрический ток. ЭДС индукции определяется формулой

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Тогда выражение для силы индукционного тока имеет вид

$$i_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{cR} S \frac{dB}{dt},$$

где R — суммарное сопротивление цепи, состоящей из кольца и гальванометра. Но сила тока равна производной по времени от протекающего заряда; поэтому мы можем написать соотношение

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{cR} S \frac{dB}{dt},$$

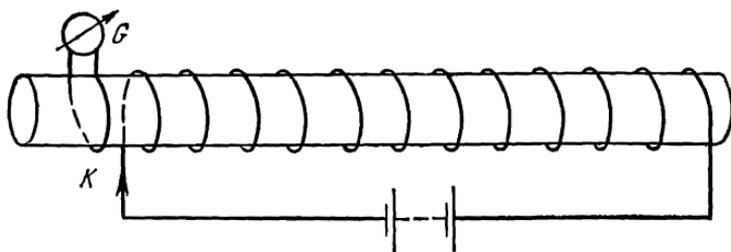


Рис. 12.1

откуда

$$q = \frac{S}{cR} B.$$

Эта формула определяет заряд q , протекающий через гальванометр в результате электромагнитной индукции при снятии кольца K . Мы видим, что заряд q пропорционален магнитной индукции B . Поэтому если устройство гальванометра позволяет регистрировать протекающий через него заряд, то такой гальванометр может служить для измерения B .

Изменяя силу тока, протекающего через соленоид, мы изменяем напряженность магнитного поля в сердечнике соленоида, так как она пропорциональна силе тока. Если при этом для каждого значения силы тока измерять соответствующее ему значение заряда q , протекающего через гальванометр при снятии кольца, то тем самым мы экспериментально определяем зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля в веществе соленоида.

В результате такого рода опытов установлено, что для большинства веществ магнитная индукция является линейной функцией напряженности поля вплоть до очень больших значений поля, и только для так называемых ферромагнетиков линейная зависимость наблюдается при малой напряженности поля и очень быстро сменяется сложной нелинейной зависимостью (см. гл. 13).

Для газов, жидкостей и поликристаллов различных веществ, исключая ферромагнетики, вектор магнитной индукции \mathbf{B} просто пропорционален вектору напряженности магнитного поля \mathbf{H} , т. е.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

где μ — некоторая константа, характерная для данного вещества. Она называется магнитной проницаемостью. Для монокристаллов векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} не параллельны, хотя связь между ними по-прежнему является линейной. В этом случае декартовы составляющие B_i, H_i ($i \equiv x, y, z$) векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} связаны между собой линейными соотношениями

$$B_i = \sum_j \mu_{ij} H_j,$$

в которые входят девять коэффициентов пропорциональности μ_{ij} . Их называют тензором магнитной проницаемости. Этот тензор симметричен, т. е. $\mu_{ij} = \mu_{ji}$. Поэтому число его независимых компонент равно шести; но в зависимости от симметрии кристалла число различных компонент тензора магнитной проницаемости может быть и меньше шести.

Полагая в соотношении $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, выразим намагниченность \mathbf{M} через напряженность поля:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad \chi = \frac{1}{4\pi} (\mu - 1).$$

Величина χ называется магнитной восприимчивостью вещества.

Если проводить аналогию между магнитными величинами \mathbf{B} и \mathbf{H} , с одной стороны, и электрическими величинами \mathbf{D} и \mathbf{E} — с другой,

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E},$$

то магнитная проницаемость μ будет аналогична диэлектрической постоянной или электрической проницаемости ϵ , а магнитная восприимчивость χ — электрической восприимчивости α :

$$\mu \rightarrow \epsilon, \quad \chi \rightarrow \alpha.$$

Аналогия эта особенно проявляется в граничных условиях для \mathbf{B} и \mathbf{H} :

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1t} = H_{2t},$$

подобных условиям

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1t} = E_{2t}$$

(1 и 2 обозначают две граничащие среды, а n и t — нормальную и тангенциальную составляющие векторов).

Заметим, что полагая в граничных условиях для магнитных векторов $B_1 = \mu_1 H_1$, $B_2 = \mu_2 H_2$ (μ_1, μ_2 — магнитные проницаемости обеих сред) и учитывая, что

$$B_n = B \cos \theta, \quad H_t = H \sin \theta,$$

где θ — угол между \mathbf{B} (или \mathbf{H}) и нормалью \mathbf{n} к границе сред, получим закон преломления магнитных силовых линий:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

(рис. 12.2), аналогичный закону преломления электрических силовых линий:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

Несмотря на такую аналогию между магнитной проницаемостью и диэлектрической постоянной, между ними есть принципиальное различие. Электрическая восприимчивость всегда положительна, поэтому $\epsilon > 1$, в то время как магнитная восприимчивость χ может быть как положительной, так и отрицательной, а следовательно, магнитная проницаемость может быть и больше и меньше единицы. В первом случае вещество называется парамагнитным, а во втором — диамагнитным.

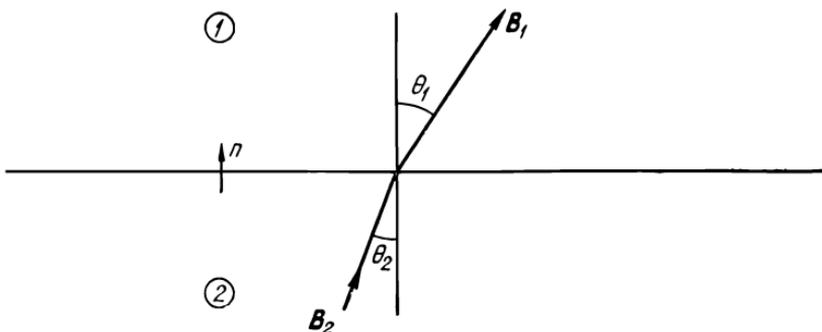


Рис. 12.2

Чтобы экспериментально убедиться в существовании двух различных типов веществ — парамагнетиков и диамагнетиков, — выясним, как происходит взаимодействие двух постоянных токов, находящихся не в вакууме, а в среде с определенной магнитной проницаемостью μ .

Напряженность магнитного поля \mathbf{H} в веществе в статическом случае определяется, как мы знаем, уравнением $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, в которое не входит магнитная проницаемость. Поэтому напряженность магнитного поля, порождаемого током в веществе, определяется законом Био — Савара

$$\mathbf{H} = \frac{I}{l} \oint \frac{[d\mathbf{l}\mathbf{r}]}{r^3},$$

так же как и в вакууме (здесь $d\mathbf{l}$ — элемент длины проводника, по которому течет ток I ; \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из элемента $d\mathbf{l}$ в точку, где ищется поле \mathbf{H}). Вектор магнитной индукции \mathbf{B} в μ раз больше \mathbf{H} , т. е.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{c} \oint \frac{[d\mathbf{l}\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Пусть теперь в рассматриваемой среде находится второй проводник, по которому течет ток I' . Какую силу будет испытывать этот проводник со стороны проводника с током I ? Если рассматривать отдельный заряд e , движущийся в среде со скоростью u , то на заряд действует сила Лоренца

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Эта формула ничем не отличается от формулы для силы, действующей на заряд со стороны магнитного поля в вакууме, — в обе формулы входит вектор \mathbf{B} . То, что в формулу для силы в случае движения частицы в среде, должен входить именно вектор магнитной индукции \mathbf{B} , а не вектор напряженности поля \mathbf{H} , следует из самого смысла магнитной индукции — эта величина представляет собой усредненную напряженность микроскопического магнитного поля, действующего в среде.

Из написанного выражения для силы Лоренца, действующей на одиночный заряд, вытекает, что на элемент проводника dl' с током I' , находящимся в среде, действует сила

$$d\mathbf{F}' = \frac{I'}{c} [dl' \mathbf{B}].$$

Подставляя сюда вместо \mathbf{B} магнитную индукцию, создаваемую током I , получаем

$$d\mathbf{F}' = \mu \frac{II'}{c^2} \left[dl', \oint \frac{[dl\mathbf{r}]}{r^3} \right].$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из dl в dl' , а интегрирование совершается по контуру с током I . Эта формула показывает, что сила взаимодействия токов в среде отличается только множителем μ от силы в случае вакуума. Поэтому если среда парамагнитна, то сила между токами больше, чем в случае вакуума; если же среда диамагнитна, то сила меньше, чем в случае вакуума.

Как мы только что видели, магнитная индукция, порождаемая некоторым током в среде, в μ раз больше, чем в случае, когда проводник с этим же током находится в вакууме. В частности, если взять прямой длинный провод, по которому течет ток I , и поместить провод в среду с магнитной проницаемостью μ , то напряженность поля H вне проводника на расстоянии r от его оси определяется формулой

$$H = \frac{2I}{cr}, \quad r \geq a,$$

а внутри проводника — формулой

$$H = \frac{2I}{cr} \frac{r}{a}, \quad r \leq a,$$

где a — радиус сечения проводника. Вне провода магнитная индукция

$$\mathbf{B} = \frac{2I\mu}{cr}, \quad r \geq a,$$

а внутри провода

$$B = \frac{2I\mu'}{ca} \frac{r}{a}, \quad r \leq a,$$

где μ' — магнитная проницаемость проводника. В длинном тонком соленоиде, через который протекает ток, напряженность поля

$$H = \frac{4\pi}{c} In,$$

а магнитная индукция

$$B = \frac{4\pi\mu}{c} In,$$

где μ — магнитная проницаемость вещества сердечника; n — число витков, приходящееся на единицу длины соленоида. Поэтому через площадь сечения S соленоида проходит магнитный поток

$$\Phi = BS = \frac{4\pi}{c} \mu InS.$$

Заменяя здесь n на N/l , где N — полное число витков и l — длина соленоида, представим Φ в виде

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m}.$$

где

$$\mathcal{E}_m = \frac{4\pi}{c} IN, \quad R_m = \frac{l}{\mu S}.$$

Магнитный поток можно сравнивать с током, а соленоид рассматривать как магнитопровод, через который проходит магнитный поток. Аналогия эта связана с тем, что плотность токов \mathbf{j} в отсутствие зарядов удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, и точно такому же уравнению удовлетворяет магнитная индукция \mathbf{B} , представляющая собой плотность магнитного потока: $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Поэтому написанное уравнение для Φ можно интерпретировать как закон Ома для магнитной цепи — величина \mathcal{E}_m играет при этом роль магнитодвижущей силы, а величина R_m — роль магнитного сопротивления цепи. Магнитодвижущая сила пропорциональна числу ампер-витков IN , а магнитное сопротивление связано с длиной и площадью сечения магнитопровода точно так же, как обычное сопротивление связано с длиной и площадью сечения проводника, только вместо коэффициента электропроводности в R_m входит магнитная проницаемость. Чем она больше, тем больше магнитный поток. На практике для получения больших потоков (при заданном числе ампер-витков) используют материалы с большими значениями μ , например в трансформаторах и динамомашинах — различные сорта железа и сплавы типа пермаллоя (20% Fe, 80% Ni), для которого магнитная проницаемость достигает значений порядка 10 000.

Закон Ома для магнитной цепи позволяет находить магнитный поток не только в простейшем случае замкнутого соленоида, заполненного однородным магнетиком (рис. 12.3, а), но и для более сложных магнитных цепей. Если, например, сердечник соленоида

состоит из двух частей (рис. 12.3, б) с различными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 , то магнитный поток определяется прежней формулой, но только под магнитным сопротивлением R_m следует понимать сумму магнитных сопротивлений $R_m^{(1)}$ и $R_m^{(2)}$ обоих участков соленоида:

$$R_m = R_m^{(1)} + R_m^{(2)},$$

$$R_m^{(1)} = \frac{l_1}{\mu_1 S}, \quad R_m^{(2)} = \frac{l_2}{\mu_2 S_2}$$

(l_1 и l_2 — длины; S_1 и S_2 — площади сечения обоих участков соленоида). Магнитная цепь может быть и разветвленной; например,

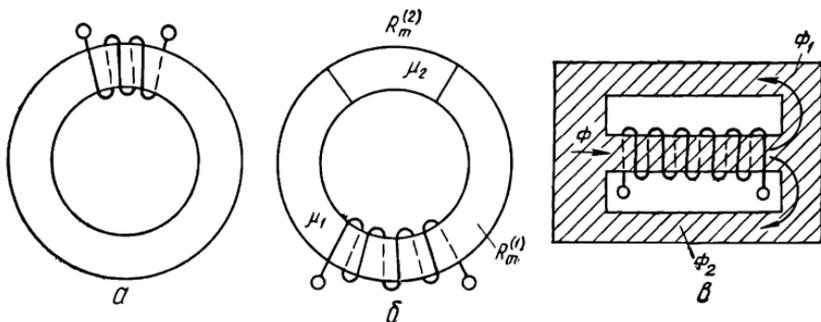


Рис. 12.3

в магнитной цепи, изображенной на рис. 12.3, в, магнитный поток разветвляется на два потока Φ_1 и Φ_2 , $\Phi \cong \Phi_1 + \Phi_2$. Чтобы найти Φ , нужно определить общее магнитное сопротивление R_m . При параллельном соединении проводников складываются обратные сопротивления, поэтому

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_m^{(1)}} + \frac{1}{R_m^{(2)}},$$

где $R_m^{(1)}$ и $R_m^{(2)}$ — магнитные сопротивления обоих участков цепи.

§ 12.2. МАГНЕТИК В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если внести какое-либо тело во внешнее магнитное поле — назовем это тело магнетиком, то в нем возникнет отличный от нуля вектор намагничивания \mathbf{M} (тело намагнитилось). Благодаря этому в свою очередь изменится поле. Действительно, пусть в вакууме до внесения магнетика имеется статическое поле $\mathbf{H}^{(e)} \equiv \mathbf{B}^{(e)}$. Оно определяется уравнениями

$$\text{rot } \mathbf{H}^{(e)} = \frac{4\pi}{g} \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{H}^{(e)} = 0,$$

где \mathbf{j} — плотность тока проводимости, создающего поле. После внесения магнетика первое из этих уравнений выполняется и для

нового поля, которое мы обозначим через \mathbf{H} , $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$. Второе уравнение заменится уравнением $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, из которого следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением электростатики $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$, мы видим, что у поля \mathbf{H} возникают источники с объемной плотностью заряда («магнитного заряда»)

$$\rho_m = -\operatorname{div} \mathbf{M}.$$

Кроме того, на границе магнетика с вакуумом появляется поверхностный заряд с плотностью

$$\sigma_m = M_n,$$

где M_n — нормальная к границе составляющая \mathbf{M} (внешняя нормаль). По этой причине поле \mathbf{H} складывается из двух слагаемых: поля $\mathbf{H}^{(e)}$, бывшего до внесения магнетика, и добавочного поля \mathbf{H}' , создаваемого источниками ρ_m и σ_m . Это поле определяется формулой электростатики

$$\mathbf{H}' = -\operatorname{grad} \varphi_m,$$

где φ_m — статический («магнитостатический») потенциал, порождаемый «магнитными зарядами»:

$$\varphi_m = \int_V \frac{\rho_m}{r} dV + \int_S \frac{\sigma_m}{r} dS$$

(V — объем; S — поверхность магнетика; r — расстояние от dV или dS до точки, где ищется φ_m).

Итак, \mathbf{H} отличается от $\mathbf{H}^{(e)}$. В частности, если поле до внесения магнетика было однородным, то после внесения магнетика оно перестанет быть однородным.

Если, однако, поле $\mathbf{H}^{(e)}$ однородно, а внесенный в него магнетик имеет вполне определенную форму, а именно форму произвольного эллипсоида, то эллипсоид намагнитится однородно, т. е. вектор \mathbf{M} внутри эллипсоида имеет повсюду одно и то же значение и одно и то же направление. При этом $\rho_m = 0$ и поле \mathbf{H}' внутри эллипсоида (но не вне его!) будет однородным, а следовательно, будет однородным и суммарное поле $\mathbf{H}^{(i)}$ внутри эллипсоида, но не вне его. Поле внутри эллипсоида $\mathbf{H}^{(i)}$ связано с однородным полем $\mathbf{H}^{(e)}$, бывшим до внесения эллипсоида, соотношением

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)} - 4\pi \hat{N} \mathbf{M},$$

где \hat{N} — некоторый тензор, не зависящий от поля и определяемый только формой эллипсоида и расположением его относительно поля $\mathbf{H}^{(e)}$. Он называется тензором размагничивающих коэффициентов.

Заметим, что такой же формулой определяется связь между внешним однородным электростатическим полем $\mathbf{E}^{(e)}$ и полем $\mathbf{E}^{(i)}$ внутри диэлектрического эллипсоида, внесенного в поле $\mathbf{E}^{(e)}$:

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}^{(e)} - 4\pi \hat{N} \mathbf{P},$$

где \mathbf{P} — вектор поляризации внутри эллипсоида. Одинаковая структура этих формул связана с тем, что граничные условия для векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} такие же, как и для векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} .

Вектор \mathbf{M} , входящий в формулу для $\mathbf{H}^{(i)}$, очевидно, определяется формулой

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)}),$$

где $\mathbf{B}^{(i)}$ — магнитная индукция в эллипсоиде. Если $\mathbf{B}^{(i)} = \mu\mathbf{H}^{(i)}$, то $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}^{(i)}$ ($\chi = \frac{1}{4\pi} (\mu - 1)$) и формула для $\mathbf{H}^{(i)}$ приобретает вид

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)} - 4\pi\chi\hat{N}\mathbf{H}^{(i)}.$$

В системе координат, оси которой совпадают с главными осями эллипсоида, тензор \hat{N} имеет только диагональные элементы N_1, N_2, N_3 , причем $N_1 + N_2 + N_3 = 1$. Если $\mathbf{H}^{(e)}$ направлено параллельно одной из главных осей эллипсоида, например оси j , то уравнение, связывающее $\mathbf{H}^{(i)}$ и $\mathbf{H}^{(e)}$, приобретает вид

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)} - 4\pi\chi N_j \mathbf{H}^{(i)},$$

откуда

$$\mathbf{H}^{(i)} = \frac{\mathbf{H}^{(e)}}{1 + 4\pi\chi N_j}.$$

В случае шара

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}.$$

Если магнетик имеет форму цилиндра, ось которого выбрана в качестве оси x_1 , то

$$N_1 = 0, \quad N_2 = N_3 = \frac{1}{2}.$$

Для сплюснутого эллипсоида вращения $(x_1^2 + x_2^2)/a^2 + x_3^2/c^2 = 1$, $a > c$,

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2} (1 - N_3), \quad N_3 = \frac{1 + e^2}{e^3} (e - \operatorname{arctg} e),$$

$$e = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1}.$$

Для вытянутого эллипсоида вращения $x_1^2/a^2 + (x_2^2 + x_3^2)/b^2 = 1$, $a > b$,

$$N_1 = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left(\ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2e \right), \quad N_2 = N_3 = \frac{1}{2} (1 - N_1),$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

§ 12.3. ПАРАМАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ГАЗА

В § 12.1 мы формально разделили все вещества на две группы — парамагнетики ($\mu > 1$) и диамагнетики ($\mu < 1$). Теперь покажем, что различие между ними связано с возможностью существования у атомов собственного или спонтанного магнитного момента, т. е. отличного от нуля магнитного момента в отсутствие внешнего магнитного поля. Если такой момент есть, то вещество будет парамагнитным, если же его нет, то вещество будет диамагнитным.

Собственный магнитный момент атома может иметь двойное происхождение: во-первых, он возникает благодаря движению атомных электронов, и, во-вторых, электрон обладает собственным магнитным моментом (так называемым спиновым магнитным моментом).

Магнитный момент, связанный с движением электронов, называется орбитальным. Возникновение его легко понять. Действительно, рассмотрим электрон, равномерно вращающийся со скоростью v по окружности радиуса r . Очевидно, сила тока, связанного с этим движением, $i = e/T$, где T — период обращения электрона по окружности. Умножая i на s/c , где s — ориентированная площадка, обтекаемая током (направление s связано с направлением тока правилом правого винта), находим орбитальный магнитный момент электрона $m_L = \frac{i}{c} s$. Учитывая, что $s = \frac{1}{2} [rv] T$, перепишем это выражение в виде

$$m_L = \frac{e}{2c} [rv].$$

Учтем теперь, что орбитальный момент количества движения электрона определяется формулой

$$K = m_e [rv],$$

где m_e — масса электрона; поэтому

$$m_L = \frac{e}{2m_e c} K.$$

Мы получили эту формулу, основываясь на определении момента количества движения в классической механике. Но она справедлива и в квантовой механике, только K будет не обычным, а «квантовым» вектором. Это значит, что его проекция на избранную ось (направление внешнего магнитного поля) принимает не любые, а только вполне определенные дискретные значения $m\hbar$, где $\hbar = 10^{-27}$ эрг · с — квантовая постоянная (постоянная Планка); m — целое положительное или отрицательное число, $-l \leq m \leq l$ (l — положительное целое число). При этом квадрат орбитального момента количества движения электрона $K^2 = \hbar^2 l(l+1)$.

Таким образом, проекция орбитального магнитного момента электрона на направление поля (ось z) может принимать только дискретные значения

$$(m_L)_z = -\mu_B m, \quad -l \leq m \leq l,$$

где

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e c} = 0,92732 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс.}$$

Эта величина называется магнетоном Бора. Она представляет собой минимальную «порцию» магнитного момента или его квант.

Эти формулы справедливы и для атома в целом — следует лишь под K понимать суммарный орбитальный момент количества движения всех электронов атома. Так как он измеряется в единицах \hbar , то его записывают в виде $\hbar L$, где L — безразмерный квантовый вектор, т. е. вектор с целочисленными проекциями $-l, -l + 1, \dots, 0, 1, 2, \dots, l$ на направление поля. Орбитальный магнитный момент атома можно, следовательно, записать в виде

$$m_L = \frac{e\hbar}{2m_e c} L$$

(так как $e < 0$, то вектор m_L направлен противоположно вектору L).

Но и покоящийся электрон обладает магнитным моментом. Он пропорционален внутреннему моменту количества движения электрона, называемому спином электрона. Спин электрона — это квантовый вектор, проекция которого на избранное направление — направление магнитного поля — может принимать только два дискретных значения: $-\hbar/2$ и $+\hbar/2$. Этим моментом электрон обладает всегда, т. е. независимо от того, покоится он или движется.

Со спином связан магнитный момент электрона, равный магнетону Бора. Если обозначить спиновый магнитный момент через m_s , то для электрона

$$m_s = \frac{e\hbar}{m_e c} s,$$

где $\hbar s$ — спиновый момент количества движения электрона: s — безразмерный квантовый вектор с двумя возможными проекциями: $-1/2$ и $1/2$ на направление магнитного поля. Вектор m_s может ориентироваться либо вдоль магнитного поля, либо против него, и при этом его проекции равны $\pm \mu_B$. Другие ориентации спинового магнитного момента электрона невозможны.

Формулой такого же типа определяется спиновый магнитный момент всего атома в целом — нужно лишь заменить s на сумму спиновых моментов количества движения всех электронов атомов $S = \sum s$. Таким образом, спиновый магнитный момент атома

$$m_S = \frac{e\hbar}{m_e c} S.$$

Складывая m_L и m_S , получаем суммарный магнитный момент атома:

$$m = m_L + m_S = \frac{e\hbar}{2m_e c} (L + 2S).$$

Сумма орбитального и спинового моментов количества движения определяет полный момент количества движения атома $\hbar I$:

$$I = L + S.$$

Мы видим, что суммарный магнитный момент атома m не параллелен суммарному моменту количества движения атома, хотя для составляющих — орбитального и спинового моментов — параллель-

ность и имеет место. Если $\mathbf{L} = \mathbf{S} = 0$, то собственный магнитный момент атома равен нулю.

Рассмотрим, как ведет себя газ, атомы которого обладают собственным магнитным моментом, во внешнем магнитном поле. Складывая магнитные моменты \mathbf{m} отдельных атомов в единице объема газа, находим вектор намагниченности газа

$$\mathbf{M} = \sum_{(\text{ед. объема})} \mathbf{m}.$$

В отсутствие поля такая сумма обращается в нуль, так как моменты отдельных атомов ориентированы различным образом. При $\mathbf{H} \neq 0$ возникает избранное направление — направление \mathbf{H} , и проекция \mathbf{M} на это направление становится отличной от нуля.

Вычислим эту проекцию, предполагая, что газ находится в состоянии статистического равновесия. В этом случае вероятность ω различных ориентаций \mathbf{m} относительно \mathbf{H} определяется формулой Больцмана

$$\omega \sim \exp(-U/kT),$$

где T — температура газа, а U — потенциальная энергия магнитного момента \mathbf{m} в поле \mathbf{H} . Согласно § 8.10

$$U = -\mathbf{m}\mathbf{H}.$$

Принимаем, что магнитный момент атома имеет орбитальное происхождение. Тогда $U = \mu_B m H$, $-l \leq m \leq l$, и вероятность того, что проекция \mathbf{m}_L на \mathbf{H} равна $m\mu_B$, определяется формулой

$$\omega_m = C \exp(-m\mu_B H/kT),$$

где C — нормировочная константа, равная $1/Z$, и

$$Z \equiv Z(\mu_B H/kT) = \sum_{m=-l}^l \exp(-m\mu_B H/kT).$$

Среднее значение

$$\bar{m} = \sum_{-l}^l m \omega_m = \sum_{-l}^l m e^{-m\xi} / \sum_{-l}^l e^{-m\xi},$$

где $\xi = \mu_B H/kT$. Эту величину можно также представить в виде

$$\bar{m} = -\frac{d}{d\xi} \ln Z(\xi).$$

Легко вычислить \bar{m} в случае слабых полей или высоких температур, когда $\xi \ll 1$. При этом

$$Z(\xi) = \sum_{m=-l}^l \left(1 + \frac{1}{2} m^2 \xi^2\right) = (2l+1) \left[1 + \frac{1}{6} l(l+1) \xi^2\right].$$

Отсюда следует, что если $\xi \ll 1$, то

$$\bar{m} = \frac{Z'(\xi)}{Z(\xi)} = \frac{1}{3} l(l+1) \xi.$$

Умножая \bar{m} на μ_B и на n (n — число атомов в единице объема), получаем проекцию M_{\parallel} вектора намагниченности \mathbf{M} на \mathbf{H} :

$$M_{\parallel} = \frac{\mu_B^2}{3kT} l(l+1) nH.$$

Проекция \mathbf{M} , перпендикулярная \mathbf{H} , равна нулю, так что $M_{\parallel} = M$. Учитывая определение магнитной восприимчивости $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$, находим, что восприимчивость нашего газа определяется формулой

$$\chi = \frac{\mu_B^2 n}{3kT} l(l+1).$$

Она положительна, т. е. газ, атомы которого обладают отличным от нуля собственным магнитным моментом, будет, как и утверждалось, парамагнетиком. Полученная формула для χ справедлива при $\mu_B H \ll kT$. В этих условиях восприимчивость обратно пропорциональна температуре. (Данное утверждение называется законом Кюри.)

Так как $\mathbf{m}_L = \mu_B \mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^2 = l(l+1)$, то формулу для χ можно еще записать в виде

$$\chi = \frac{m_L^2 n}{3kT}.$$

Эта формула аналогична формуле

$$\alpha = \frac{d_0^2 n}{3kT}$$

для электрической восприимчивости газа полярных молекул (см. § 3.7). Ее можно получить так же, как и формулу для α , если считать \mathbf{m}_L классическим вектором и пространственное распределение векторов \mathbf{m}_L определять по формуле

$$dn = C \exp(-U/kT) do,$$

где $U = -\mathbf{m}_L \mathbf{H} = -m_L H \cos \vartheta$, $do = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ (ϑ — угол между векторами \mathbf{m}_L и \mathbf{H}). При этом среднее значение $\cos \vartheta$ определяется формулой

$$\overline{\cos \vartheta} = \int \cos \vartheta \exp\left(\frac{m_L H}{kT} \cos \vartheta\right) do \bigg/ \int \exp\left(\frac{m_L H}{kT} \cos \vartheta\right) do,$$

а намагниченность — формулой

$$M = nm_L \overline{\cos \vartheta}.$$

При высокой температуре ($\mu_B H \ll kT$) различие в обоих подходах (\mathbf{m}_L — «квантовый» и \mathbf{m}_L — «классический» векторы) не проявляется. Однако при переходе к низкой температуре ($\mu_B H > kT$) это различие становится существенным. Более того, формула, получаемая для M в предположении, что угол ϑ между

векторами \mathbf{m}_L и \mathbf{H} может принимать произвольные значения,— формула Ланжевена

$$M = nm_L L\left(\frac{m_L H}{kT}\right), \quad L(\xi) = \coth \xi - \frac{1}{\xi}$$

($L(\xi)$ называется функцией Ланжевена) — является, в принципе, неправильной. Ведь из нее вытекает, что энтропия газа при $T \rightarrow 0$ стремится к бесконечности, тогда как она должна по теореме Нернста стремиться к нулю. При квантовом подходе такого противоречия с теоремой Нернста не возникает.

Предположим теперь, что собственный магнитный момент атома имеет спиновое происхождение, т. е. $\mathbf{m} = \mathbf{m}_s = e\hbar/m_e c \mathbf{S}$. В этом случае возможные значения проекции \mathbf{m}_s на \mathbf{H} равны $2\mu_B m'$, где $m' = -S, -S + 1, \dots, S$, а S — максимальное значение проекции спина на направление \mathbf{H} (для одного электрона $S = 1/2$). Потенциальная энергия момента в поле по-прежнему определяется формулой

$$U = -\mathbf{m}_s \mathbf{H} = 2\mu_B H m',$$

а вероятность данного значения m' — формулой

$$\omega_{m'} = e^{-2\mu_B H m' / kT} / Z(2\mu_B H / kT),$$

$$Z(\xi) = \sum_{m'=-S}^S e^{-\xi m'}.$$

Поэтому среднее значение m' записывается в виде

$$\bar{m}' = \frac{\sum m' e^{-m' \xi}}{\sum e^{-m' \xi}} = -\frac{d}{d\xi} \ln Z(\xi), \quad \xi = \frac{2\mu_B H}{kT}.$$

Отсюда может быть найдена намагниченность:

$$M = 2\mu_B n \bar{m}'.$$

Предположим для простоты, что $S = 1/2$. Тогда

$$\bar{m}' = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{2}\xi} - e^{-\frac{1}{2}\xi}}{e^{\frac{1}{2}\xi} + e^{-\frac{1}{2}\xi}} = \frac{1}{2} \operatorname{th} \left(\frac{\mu_B H}{kT} \right)$$

и, следовательно,

$$M = \mu_B n \operatorname{th} \left(\frac{\mu_B H}{kT} \right).$$

Это формула в соответствии с изложенным выше не совпадает с формулой Ланжевена, Если $\xi \ll 1$, то $\operatorname{th} \xi \approx \xi$; поэтому при $\mu_B H \ll kT$

$$M = \frac{n\mu_B^2}{kT} H.$$

Таким образом, газ атомов, обладающих спиновым магнитным моментом, парамагнитен, и его парамагнитная восприимчивость подчиняется закону Кюри.

Мы считали, что $S = 1/2$. При произвольном S формула для χ имеет вид

$$\chi = \frac{n\mu_B^2}{3kT} 4S(S+1).$$

Если отличны от нуля и m_L и m_S , а поле \mathbf{H} является очень слабым, то магнитная восприимчивость газа определяется формулой

$$\chi = \frac{n\mu_B^2 g_L^2 j(j+1)}{3kT},$$

где j — максимальное значение проекции суммарного момента количества движения атома $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ на направление поля \mathbf{H} и $g_L = 1 + \{j(j+1) + S(S+1) - l(l+1)\} \frac{1}{2j(j+1)}$ (эта величина называется множителем Ланде).

Итак, во всех случаях, когда атом обладает отличным от нуля собственным магнитным моментом, газ атомов будет парамагнитным, причем его парамагнитная восприимчивость будет зависеть от температуры, убывая с ее ростом.

Так как магнитная проницаемость $\mu = 1 + 4\pi\chi$ зависит от температуры, то величину

$$f_M = \frac{1}{8\pi} \mathbf{B}\mathbf{H} = \frac{\mu}{8\pi} H^2$$

при $T = \text{const}$ следует в соответствии с § 11.8 рассматривать как отнесенную к единице объема газа свободную энергию магнитного поля (она включает как энергию собственно магнитного поля, так и свободную энергию газа, связанную с магнитным полем).

§ 12.4. ПАРАМАГНЕТИЗМ ВЫРОЖДЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

В предыдущем параграфе мы определили парамагнитную восприимчивость классического, т. е. невырожденного, газа. Теперь рассмотрим вырожденный электронный газ в магнитном поле и определим его магнитную восприимчивость. Таким газом является, например, газ электронов проводимости в металлах.

Так как электрон обладает собственным спиновым магнитным моментом μ_B , то в поле \mathbf{H} он приобретает добавочную энергию $\pm \mu_B H$ (знак $+$ соответствует ориентации спина по полю, а знак $-$ — ориентации спина против поля). Поэтому если в отсутствие поля функция распределения вырожденного газа электронов, который мы предполагаем равновесным, имела вид

$$f(\epsilon) = \{\exp(\epsilon - \epsilon_0)/kT + 1\}^{-1},$$

где ϵ — энергия электрона, а ϵ_0 — химический потенциал, то в поле

мы получим две функции распределения $f_{\uparrow}(\epsilon)$ и $f_{\downarrow}(\epsilon)$ для двух ориентаций спина — по полю и против поля:

$$f_{\uparrow}(\epsilon) = \frac{1}{\exp(\epsilon + \mu_B H - \epsilon_0)/kT + 1},$$

$$f_{\downarrow}(\epsilon) = \frac{1}{\exp(\epsilon - \mu_B H - \epsilon_0)/kT + 1}.$$

Теперь легко найти намагниченность газа: так как при ориентации спина электрона вдоль поля проекция спинового магнитного момента электрона на \mathbf{H} равна $-\mu_B$, а при противоположной ориентации — μ_B , то

$$M = -\mu_B \int f_{\uparrow}(\epsilon) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} + \mu_B \int f_{\downarrow} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3},$$

или

$$M = \mu_B \int \left\{ \frac{1}{\exp(\epsilon - \mu_B H - \epsilon_0)/kT} - \frac{1}{\exp(\epsilon + \mu_B H - \epsilon_0)/kT} \right\} \times \\ \times v(\epsilon) d\epsilon \frac{d\Omega}{4\pi},$$

где $v(\epsilon) d\epsilon d\Omega/4\pi$ — число состояний электрона в интервале энергий $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$ и интервале телесных углов $d\Omega$ импульса (квазиимпульса) \mathbf{p} .

Разность фермиевских распределений, входящих в этот интеграл, может быть заменена в случае слабых полей на $-2\mu_B H df/d\epsilon$, а поскольку производная $df/d\epsilon$ имеет резкий максимум при $\epsilon = \epsilon_0$, то

$$-2\mu_B H \frac{df}{d\epsilon} \approx 2\mu_B H \delta(\epsilon - \epsilon_0).$$

Поэтому можно сразу выполнить интегрирование:

$$M = 2\mu_B^2 H v(\epsilon_0).$$

Таким образом, мы показали, что вырожденный электронный газ парамагнитен и его парамагнитная восприимчивость определяется формулой

$$\chi = 2\mu_B^2 v(\epsilon_0).$$

В отличие от восприимчивости невырожденного газа восприимчивость вырожденного газа не зависит от температуры и определяется только значением плотности уровней энергии электрона на границе фермиевского распределения. (Парамагнетизм вырожденного газа называется паулевским парамагнетизмом.)

Если считать $\epsilon = p^2/2m$ (в металле такая зависимость энергии электрона ϵ от его квазиимпульса p , в общем, не выполняется), то, как мы видели в § 5.7,

$$v(\epsilon) = \sqrt{2\epsilon} m^{3/2} / 2\pi^2 \hbar^3.$$

Учитывая, что

$$2 \frac{4\pi}{3} \frac{p_F^2}{(2\pi\hbar)^3} = n, \quad \frac{p_F^2}{2m_e} = \varepsilon_0$$

(p_F — граничный импульс; n — плотность электронов), получаем

$$\chi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{\mu_B^2 n^{1/3} m_e}{\hbar^3}.$$

По порядку величины

$$\chi \sim \frac{n\mu_B^2}{kT_0},$$

где T_0 — температура вырождения (эта формула отличается от формулы для парамагнитной восприимчивости обычного газа заменой T на T_0). Полагая $n \sim 10^{23}$ см⁻³, $T_0 \sim 10^5$ К, $\mu_B \sim 10^{-20}$ эрг/Гс, получаем $\chi = 10^{-6}$.

При вычислении магнитной восприимчивости электронного газа мы считали, что влияние магнитного поля сводится лишь к изменению энергии электрона. Иными словами, зависимость ε от p не изменится при включении поля и роль поля сводится только к тому, что к $\varepsilon(p)$ прибавляется $\pm \mu_B H$. Между тем поле изменяет и характер движения электрона. Действительно, как мы знаем, магнитное поле искривляет траекторию частицы (в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} , движение электрона происходит по окружности). Учет этого эффекта приводит к диамагнетизму электронов, в результате чего парамагнитная восприимчивость свободного электронного газа уменьшается на 1/3 своего значения (диамагнетизм Ландау). Явление это играет важную роль в магнетизме металлов.

§ 12.5. ЛАРМОРОВА ПРЕЦЕССИЯ

Покажем теперь, что если атомы вещества не обладают собственным магнитным моментом (моментом в отсутствие внешнего магнитного поля), то вещество будет диамагнитным, т. е. магнитная восприимчивость вещества будет отрицательной. Выясним с этой целью, какое влияние оказывает внешнее магнитное поле на движение электронов в атоме.

Если атом находится в магнитном поле \mathbf{H} , то каждый электрон атома испытывает действие силы Лоренца $\frac{e}{c} [\mathbf{vH}]$ (\mathbf{v} — скорость электрона). Поэтому если на электрон со стороны ядра и других электронов атома действует сила \mathbf{f} , то суммарная сила, действующая на электрон, определяется формулой

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}].$$

Предположим, что сила \mathbf{f} имеет центральный характер, т. е. зависит только от расстояния r между электроном и ядром. Перейдем к системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω относительно исходной (инерциальной) системы отсчета.

В неинерциальной системе отсчета появятся две добавочные силы — сила Кориолиса $2m_e[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$ и центробежная сила $m_e[\boldsymbol{\omega}[\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}]]$, где \mathbf{r} — радиус-вектор, определяющий положение частицы; \mathbf{v}' — ее скорость в неинерциальной системе отсчета:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$$

(\mathbf{v} — скорость частицы в инерциальной системе отсчета). Поэтому результирующая сила в неинерциальной системе записывается в виде

$$\mathbf{F}' = \mathbf{f}' + \frac{e}{c} [\mathbf{v}'\mathbf{H}] + 2m_e [\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}] + m_e [\boldsymbol{\omega}[\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}]],$$

где \mathbf{f}' — сила, соответствующая \mathbf{f} в неинерциальной системе. Так как мы предполагаем, что сила \mathbf{f} зависит только от расстояния r , а оно не изменяется при переходе к неинерциальной системе, то, очевидно, $\mathbf{f}' = \mathbf{f}$.

Пусть

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_L \equiv -\frac{e\mathbf{H}}{2m_e c}.$$

Тогда сила Лоренца и сила Кориолиса сократятся. Если теперь считать поле \mathbf{H} достаточно слабым, то в выражении для силы \mathbf{F}' в неинерциальной системе можно пренебречь центробежной силой, которая пропорциональна ω^2 ; получаем $\mathbf{F}' = \mathbf{f}' = \mathbf{f}$.

Следовательно, если частота вращения неинерциальной системы равна $\boldsymbol{\omega}_L$, то сила, действующая на электроны в этой системе, совпадает с точностью до квадратичных по $\boldsymbol{\omega}_L$ членов с силой, действующей на электроны в инерциальной системе в отсутствие магнитного поля. Поэтому можно утверждать, что движение электронов в атоме, находящемся в слабом однородном и постоянном магнитном поле, будет таким же, как и движение этих электронов без поля, но во вращающейся системе отсчета, угловая скорость которой равна $\boldsymbol{\omega}_L$.

Это утверждение можно сформулировать иначе. В слабом магнитном поле весь атом как целое прецессирует вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_L$. Это утверждение называется теоремой Лармора, а частота $\boldsymbol{\omega}_L$ — ларморовой частотой (заметим, что ларморова частота в два раза меньше циклотронной частоты электрона, движущегося по круговой орбите в магнитном поле \mathbf{H}). Теорема Лармора справедлива только в случае достаточно слабого магнитного поля, а именно необходимо, чтобы центробежная сила была значительно меньше силы Кориолиса, т. е. должно выполняться неравенство $v_a \gg \boldsymbol{\omega}_L a$, где a — длина порядка размеров атома; v_a — скорость порядка скорости электронов в атоме. Ясно также, что справедливость теоремы Лармора тесно связана с тем, что отношение e/m одинаково для всех подвижных частиц атома (т. е. электронов). Если бы в состав атома входили подвижные частицы различных сортов, для которых отношение заряда к массе было бы неодинаковым, то теорема Лармора не выполнялась бы.

В справедливости теоремы Лармора можно убедиться еще следующим образом. Выше мы видели, что если атом обладает орбитальным моментом количества движения \mathbf{K} , то он будет обладать

магнитным моментом $\mathbf{m}_L = \frac{e}{2m_e c} \mathbf{K}$. Но магнитный момент \mathbf{m}_L в магнитном поле имеет потенциальную энергию $U = -\mathbf{m}_L \mathbf{H} = -m_L H \cos \vartheta$ (ϑ — угол между \mathbf{m}_L и \mathbf{H}). Поэтому на магнитный момент действует пара сил с моментом

$$N = \frac{dU}{d\vartheta} = m_L H \sin \vartheta,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{N} = [\mathbf{m}_L \mathbf{H}].$$

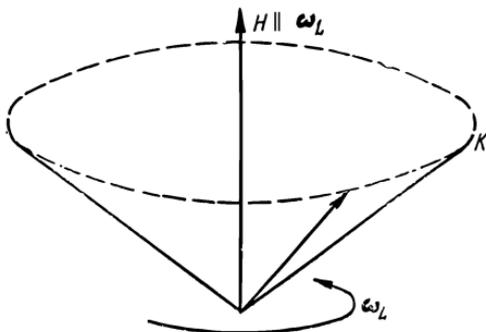


Рис. 12.4

Производная по времени от момента количества движения \mathbf{K} должна равняться моменту сил, т. е.

$$\dot{\mathbf{K}} = [\mathbf{m}_L \mathbf{H}].$$

Учитывая связь между \mathbf{M}_L и \mathbf{K} получаем

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{e}{2m_e c} [\mathbf{K} \mathbf{H}].$$

Эта формула имеет простой физический смысл: поскольку скорость точек вращающегося твердого тела определяется формулой

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}],$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости; \mathbf{r} — радиус-вектор точки; \mathbf{v} — ее скорость, легко заключить, что вектор \mathbf{K} совершает прецессионное движение около направления магнитного поля с угловой скоростью (рис. 12.4)

$$\boldsymbol{\omega}_L = -\frac{e\mathbf{H}}{2m_e c}.$$

Это и есть ларморова частота. Вместе с вектором \mathbf{K} в прецессии Лармора участвует весь атом. Таким образом, мы пришли к выводу, который соответствует приведенному выше доказательству теоремы Лармора.

Но одновременно мы приходим и к некоторому парадоксу. При прецессии вектора \mathbf{K} около направления поля \mathbf{H} ни величина этого вектора, ни его наклон по отношению к \mathbf{H} не изменяются. Магнитный момент атома \mathbf{m}_L (это — собственный момент!) пропорционален моменту количества движения атомов \mathbf{K} . Поэтому вектор \mathbf{m}_L также совершает равномерную прецессию около направления поля \mathbf{H} , при которой ни величина \mathbf{m}_L , ни угол наклона \mathbf{m}_L по отношению к \mathbf{H} не изменяются. Если теперь рассмотреть идеальный газ атомов с различно ориентированными магнитными моментами \mathbf{m}_L , то эти моменты будут независимо прецессировать около \mathbf{H} , не изменяя наклона к полю, и мы приходим к выводу, что газ никогда не сможет намагнититься. Разрешение этого парадокса заключается в том, что газ не является строго идеальным — в нем всегда происходит столкновение между атомами, и именно эти столкновения (либо другие процессы взаимодействия атомов с объектами, не входящими в состав газа) и приводят к намагничению газа, т. е. к изменению ориентации магнитных моментов его атомов относительно поля. Ясно, что чем столкновения реже, тем дольше длится процесс намагничения, поэтому можно ввести понятие времени релаксации намагничения.

§ 12.6. ДИАМАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Докажем, что если собственный магнитный момент у атомов отсутствует, то газ таких атомов диамагнитен. Будем исходить из формулы для орбитального магнитного момента атома

$$\mathbf{m}_L = \sum_i \frac{e}{2c} [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i],$$

где \mathbf{r}_i и \mathbf{v}_i — радиус-вектор и скорость i -го электрона в атоме; суммирование производится по всем электронам, входящим в состав атома. Вектор скорости электрона можно согласно теореме Лармора записать в виде

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^0 + [\omega_L, \mathbf{r}_i],$$

где \mathbf{v}_i^0 — скорость в отсутствие магнитного поля, а ω_L — ларморова частота. Подставляя это выражение в формулу для \mathbf{m}_L , получаем

$$\mathbf{m}_L = \sum_i \frac{e}{2c} [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i^0] + \sum_i \frac{e}{2c} [\mathbf{r}_i [\omega_L \mathbf{r}_i]].$$

Здесь первое слагаемое представляет собой собственный магнитный момент атома, который мы обозначим через \mathbf{m}_L^0 , а второе слагаемое — магнитный момент, обусловленный ларморовой прецессией. Это слагаемое, обозначаемое через \mathbf{m}_d , перепишем в виде

$$\mathbf{m}_d = \sum_i \frac{e}{2c} [\mathbf{r}_i [\omega_L \mathbf{r}_i]] = \sum_i \frac{e}{2c} \{ \omega_L \mathbf{r}_i^2 - \mathbf{r}_i (\omega_L \mathbf{r}_i) \}.$$

Полагаем, что атом сферически симметричен. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} \sum_i x_i y_i &= \sum_i y_i z_i = \sum_i z_i x_i = 0, & \sum_i x_i^2 &= \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \\ & & &= \frac{1}{3} \sum_i r_i^2, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\mathbf{m}_d = \frac{e}{3c} \omega_L \sum_i r_i^2.$$

Подставляя сюда $\omega_L = -e\mathbf{H}/2m_e c$ и вводя обозначение $\sum_i r_i^2 = Z\bar{r}^2$,

где Z — число электронов в атоме и \bar{r}^2 — среднее значение квадрата расстояния от электрона до ядра, получаем

$$\mathbf{m}_d = -\frac{e^2}{6m_e c^2} Z\bar{r}^2 \mathbf{H}.$$

Мы видим, что магнитный момент атома, обусловленный ларморовой прецессией, направлен против магнитного поля (этот вывод не зависит от знака заряда электрона).

Полный магнитный момент атома определяется формулой

$$\mathbf{m}_L = \mathbf{m}_L^0 - \frac{e^2}{6m_e c^2} Z\bar{r}^2 \mathbf{H}.$$

Поэтому вектор намагниченности газа записывается в виде

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}_L^0 \overline{\cos \vartheta} - \frac{e^2}{6m_e c^2} Z\bar{r}^2 n \mathbf{H},$$

где $\overline{\cos \vartheta}$ — среднее значение косинуса угла между векторами \mathbf{m}_L^0 и \mathbf{H} . Первое слагаемое приводит к парамагнитной, а второе — к диамагнитной восприимчивости. Обычно первое слагаемое значительно больше второго, поэтому при $\mathbf{m}_L^0 \neq 0$ второе слагаемое можно не учитывать. Но если $\mathbf{m}_L^0 = 0$, то остается только второе слагаемое: в этом случае газ будет диамагнитным с диамагнитной восприимчивостью:

$$\chi_d = -\frac{e^2}{6m_e c^2} Z\bar{r}^2 n.$$

В отличие от парамагнитной восприимчивости обычных газов, зависящей от температуры, диамагнитная восприимчивость от температуры не зависит. Величина χ_d очень мала. Например, для гелия $\chi_d = -0,2 \cdot 10^{-6}$, для висмута $\chi_d = -14,5 \cdot 10^{-6}$. Парамагнитная восприимчивость газов гораздо больше $|\chi_d|$. По порядку величины

$|\chi_d|/\chi_p = \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{\bar{r}^2}{\mu_B^2} kT$, а так как $\mu_B = e\hbar/2m_e c$ и $\hbar^2/m_e \bar{r}^2$ определяет по порядку величины энергию атома E_a , то

$$\frac{|\chi_d|}{\chi_p} \sim \frac{kT}{E_a}.$$

Учитывая, что $E_a \sim 1$ эВ соответствует температуре 10 400 К, приходим к заключению, что для невырожденных газов отношение $|\chi_d|/\chi_p$ очень мало.

Диамагнитная восприимчивость пропорциональна квадрату размеров атома (молекулы). Поэтому $|\chi_d|$ относительно больше у веществ, состоящих из больших молекул (например, у бензола).

§ 12.7. МАГНИТОКАЛОРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ И МАГНИТОСТРИКЦИЯ

В § 11.8 мы показали, что изменение плотности энергии вещества, находящегося во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}^{(e)}$, определяется формулой

$$dw = Tds - Md\mathbf{H}^{(e)},$$

где s — плотность энтропии. Если поле однородно, то аналогичная формула справедлива и для энергии всего тела:

$$dW = TdS - Id\mathbf{H}^{(e)},$$

где S — энтропия тела; $\mathbf{I} = \int \mathbf{M}dV$ — полный вектор намагниченности тела. Здесь предполагается, что объем тела V не изменяется: если же на тело действует внешнее давление p , то справа в выражении для dW должна быть добавлена работа, совершаемая над телом внешним давлением и равная $-pdV$:

$$dW = TdS - Id\mathbf{H}^{(e)} - pdV$$

(предполагается, что вектор \mathbf{I} направлен вдоль $\mathbf{H}^{(e)}$).

Пусть объем тела не изменяется. Вводя свободную энергию тела

$$\mathcal{F} = W - TS,$$

имеем

$$d\mathcal{F} = -SdT - Id\mathbf{H}^{(e)},$$

откуда

$$S = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}, \quad I = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{H}^{(e)}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{H}^{(e)}} = \frac{\partial I}{\partial T}.$$

Введем, далее, функцию

$$\Phi = S - \frac{1}{T} (W + IH^{(e)}).$$

Тогда

$$d\Phi = dS + \frac{1}{T^2} (W + IH^{(e)}) dT - \frac{1}{T} (dW + IdH^{(e)} + H^{(e)} dI).$$

Подставляя сюда выражение для dW , получаем

$$d\Phi = \frac{1}{T^2} (W + IH^{(e)}) dT - \frac{H^{(e)}}{T} dI,$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{1}{T^2} (W + IH^{(e)}), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial I} = -\frac{H^{(e)}}{T}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial I} (W + IH^{(e)}) = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H^{(e)}}{T} \right).$$

Рассмотрим важный случай, когда I представляет собой некоторую функцию $H^{(e)}/T : I = I(H^{(e)}/T)$. Тогда $H^{(e)}/T$ также будет некоторой функцией от I . Отсюда и из соотношения $H^{(e)}/T = \partial \Phi / \partial T$ вытекает, что

$$\Phi = \Phi_1(I) + \Phi_2(T),$$

где Φ_1 и Φ_2 — некоторые неизвестные функции одного аргумента. Учитывая, что $W + IH^{(e)} = T^2 \partial \Phi / \partial T$, мы приходим к заключению, что $W + IH^{(e)} = T^2 \Phi_2 T$, т. е. $W + IH^{(e)}$ представляет собой некоторую функцию T , или

$$W = -IH^{(e)} + f(T).$$

Применим полученные соотношения к исследованию магнитокалорического эффекта, заключающегося в том, что при адиабатическом процессе изменение намагничения вызывает изменение температуры. При адиабатическом процессе $S = \text{const}$, поэтому закон сохранения энергии имеет вид $dW = -IdH^{(e)}$ (объем по-прежнему предполагается постоянным). Считая независимыми переменными T и I , мы можем подставить сюда выражения

$$dW = \frac{\partial W}{\partial T} dT + \frac{\partial W}{\partial I} dI, \quad dH^{(e)} = \frac{\partial H^{(e)}}{\partial T} dT + \frac{\partial H^{(e)}}{\partial I} dI.$$

В результате получаем соотношение

$$\left(\frac{\partial W}{\partial T} + I \frac{\partial H^{(e)}}{\partial T} \right) dT = - \left(\frac{\partial}{\partial I} (W + IH^{(e)}) - H^{(e)} \right) dI,$$

Но выше мы видели, что $\frac{\partial}{\partial I} (W + IH^{(e)}) = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} (H^{(e)}/T)$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial T} (W + IH^{(e)}) dT = T \frac{\partial H^{(e)}}{\partial T} dI.$$

Это и есть окончательное соотношение, связывающее изменение температуры и намагничения при адиабатическом процессе.

Особенно прост случай, когда I зависит только от $H^{(e)}/T$. При этом $H^{(e)}/T$ будет некоторой функцией I : $H^{(e)}/T = \varphi(I)$, т. е. $H^{(e)} = T\varphi(I)$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial H^{(e)}}{\partial T} = \varphi(I) = \frac{H^{(e)}}{T},$$

и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial T} (W + IH^{(e)}) = H^{(e)} dI.$$

Но если $I = I(H^{(e)}/T)$, то, как мы только что видели,

$$W = -IH^{(e)} + f(T).$$

Значит,

$$f(T) dT = H^{(e)} dI.$$

Однако $f(T)$ представляет собой энергию в отсутствие поля, и, следовательно, $f'(T)$ есть теплоемкость C_V тела при $H^{(e)} = 0$. Итак,

мы показали, что если $I = I\left(\frac{H^{(e)}}{T}\right)$, то

$$C_V dT = H^{(e)} dI.$$

До сих пор мы считали, что объем тела постоянен. При его изменении

$$dW = TdS - IdH^{(e)} - pdV.$$

Вводя вместо W функцию

$$G = W - TS + pV$$

(она называется термодинамическим потенциалом), получаем

$$dG = -SdT - IdH^{(e)} + Vdp,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial G}{\partial T} = -S, \quad \frac{\partial G}{\partial H^{(e)}} = -I, \quad \frac{\partial G}{\partial p} = V,$$

и поэтому

$$-\left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)_{T, H^{(e)}} = \left(\frac{\partial V}{\partial H^{(e)}}\right)_{T, p}.$$

Таким образом, если намагничение зависит от давления, то объем тела будет изменяться с изменением внешнего поля. Это явление называется магнестрикцией.

В слабых полях $M = \chi H^{(e)}$, поэтому в слабом однородном поле $I = V\chi H^{(e)}$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial H^{(e)}} = -H^{(e)} \left(V \frac{\partial \chi}{\partial p} + \chi \frac{\partial V}{\partial p} \right).$$

Этой формулой определяется магнитострикция в случае слабых полей.

§ 12.8. МАГНИТНЫЙ МЕТОД ОХЛАЖДЕНИЯ

Как мы видели, $dW = TdS - IdH^{(e)}$; поэтому дифференциал свободной энергии $\mathcal{F} = W - TS$ имеет вид

$$d\mathcal{F} = -SdT - IdH^{(e)},$$

и следовательно,

$$S = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}, \quad I = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H^{(e)}}.$$

Так как \mathcal{F} зависит от $H^{(e)}$, то от $H^{(e)}$ зависит и энтропия тела S . Эта зависимость может быть использована для получения очень низких температур. Применяются обычно некоторые парамагнитные соли, парамагнетизм которых имеет спиновую природу (например, квасцы). Если образец из такой соли поместить в достаточно сильное магнитное поле $H^{(e)}$, то спины отдельных ионов имеют почти одинаковую ориентацию. Это значит, что система ионов характеризуется большим порядком и, следовательно, энтропия ионов будет небольшой. Такого порядка можно достичь, сильно намагнитив соль при постоянной температуре.

Представим себе, далее, что после изотермического намагничивания мы подвергаем образец адиабатическому размагничиванию, т. е. медленно и без обмена теплом с окружающими телами выключаем внешнее магнитное поле. При адиабатическом размагничивании энтропия соли не изменяется. Но выключение поля нарушает порядок в системе спинов, так как они уже не будут иметь почти одинаковой ориентации (вдоль поля). Поэтому должны произойти процессы, которые бы не позволили увеличиться энтропии. Но единственная возможность — это уменьшение температуры соли. Иными словами, адиабатическое размагничивание соли приводит к уменьшению температуры системы спинов. Спины ионов взаимодействуют с кристаллической решеткой соли. Поэтому вместе с понижением температуры спинов постепенно понизится и температура решетки.

Легко оценить возникающее уменьшение температуры. Для этого достаточно вспомнить, что в экспоненту в больцмановском распределении входит отношение ω/kT , где ω — энергия частицы. В случае намагниченной соли под ω следует понимать энергию спина в магнитном поле. Если m_S — магнитный момент иона (по порядку величины m_S совпадает с магнетоном Бора), то $\omega = m_S H + \omega_0$, где ω_0 — энергия взаимодействия спина с окружающими спинами. Эта величина пропорциональна m_S^2 , т. е. $\omega_0 \sim m_S^2/a^3$ (a — среднее расстояние между спинами). Поэтому мера порядка в си-

стеме спинов, т. е. энтропия спинов S , будет функцией $(m_S H + \omega_0)/kT$:

$$S = S \left(\frac{m_S H + \omega_0}{kT} \right).$$

Отсюда следует, что энтропия в момент изотермического намагничивания имеет вид

$$S_i = S \left(\frac{m_S H + \omega_0}{kT_i} \right),$$

где T_i — температура, при которой происходит намагничение. После адиабатического размагничивания, когда $H = 0$, энтропия определяется формулой

$$S_f = S \left(\frac{\omega_0}{kT_f} \right),$$

где T_f — конечная температура соли. Так как $S_i = S_f$, то

$$\frac{m_S H + \omega_0}{T_i} = \frac{\omega_0}{T_f},$$

откуда

$$T_f = T_i \frac{\omega_0}{m_S H + \omega_0}.$$

Но $\omega_0 \ll m_S H$, поэтому

$$T_f = T_i \frac{\omega_0}{m_S H}.$$

Следовательно, чем больше внешнее поле H , тем ниже конечная температура. Если бы энергия ω_0 равнялась нулю, то можно было бы достичь абсолютного нуля, а так как это невозможно, то мы лишний раз убеждаемся в том, что в этой задаче необходим учет взаимодействия между спинами. Поскольку энергия ω_0 пропорциональна m_S^2 , конечная температура пропорциональна магнитному моменту иона.

Полагая $\omega_0 = \frac{m_S^2}{a^3}$, получаем

$$T_f = T_i \frac{m_S}{a^3 H}.$$

Используя этот метод, можно понизить температуру от нескольких градусов до примерно 10^{-3} К (в качестве солей применяются хромокалиевые и железоаммониевые квасцы).

Метод адиабатического размагничивания позволяет получить и значительно более низкие температуры — порядка 10^{-5} К, но для этого должен быть использован не атомный, а ядерный парамагнетизм. Ведь протон и нейтрон, так же как и электрон, обладают собственным спиновым магнитным моментом, который на три порядка меньше электронного спинового магнитного момента. Спиновый магнитный момент электрона равен $e\hbar/2m_e c$, нуклонный спино-

вый магнитный момент (т. е. магнитный момент протона или нейтрона) составляет по порядку величины $e\hbar/2m_p c$, где m_p — масса протона. Так как эта величина на три порядка больше массы электрона, то на столько же порядков нуклонный магнитный момент меньше электронного магнитного момента. Поэтому если сперва изотермически намагнитить систему ядерных спинов, а затем адиабатически ее размагнитить, то конечная и начальная температуры будут связаны соотношением

$$T_f = T_i \frac{\mu_N}{a^3 H},$$

где μ_N — магнитный момент нуклона.

Практически метод магнитного охлаждения разделяется на два этапа. Сперва производится магнитное охлаждение парамагнитной соли, с помощью которой вещество, обладающее сильным ядерным магнетизмом (медь, натрий), охлаждается до температуры порядка 10^{-3} К. Затем это вещество подвергается изотермическому намагничиванию с последующим адиабатическим размагничиванием. В результате его температура достигает значений порядка 10^{-5} К.

§ 12.9. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА МАГНЕТИК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если в магнитное поле внести магнетик, то он будет испытывать со стороны поля некоторую силу. Чтобы понять это, достаточно вспомнить, что рамка с током, помещенная в магнитное поле, стремится повернуться перпендикулярно полю, а если поле неоднородно, то, кроме того, еще и переместиться в те места, где поле сильнее. Но в магнетике имеются молекулярные токи, т. е. молекулярные рамки с токами, взаимодействие которых с полем и будет приводить к силам, действующим на магнетик.

Исходя из такой картины легко определить силы, действующие на магнетик в магнитном поле. Воспользуемся для этого выражением

$$U = -mH_0$$

для энергии взаимодействия молекулярного магнитного момента m с внешним полем H_0 . Отсюда следует, что на m действует момент сил

$$N_m = [mH_0].$$

Если H_0 зависит от координат, то действует еще и сила

$$f = -\text{grad } U = (m \text{ grad}) H_0 + [m \text{ rot } H_0].$$

Последнее слагаемое в этом выражении, очевидно, отсутствует, если в объеме, занимаемом магнетиком, нет внешних токов. В этом случае

$$f = (m \text{ grad}) H_0.$$

Просуммировав выражения для f и N_m по всем магнитным моментам m , найдем результирующие силу F и момент сил N , действующие

щие на магнетик. Отнесенные к единице объема магнетика, они имеют вид

$$\mathbf{F} = (\mathbf{M} \operatorname{grad}) \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{N} = [\mathbf{M}\mathbf{H}_0],$$

где \mathbf{M} — вектор намагниченности магнетика. Здесь \mathbf{H}_0 — внешнее магнитное поле, но если магнитная проницаемость магнетика незначительно отличается от единицы, то \mathbf{H}_0 будет мало отличаться от поля \mathbf{H} внутри магнетика. Учитывая, что $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$, в этом случае ($\mathbf{H}_0 \approx \mathbf{H}$) получаем

$$\mathbf{F} = \chi (\mathbf{H} \operatorname{grad}) \mathbf{H} = \frac{\chi}{2} \operatorname{grad} H^2.$$

Эта формула оказывается справедливой независимо от того, обладают атомы магнетика собственным магнитным моментом или магнитный момент возникает в результате ларморовой прецессии, т. е. независимо от того, является вещество парамагнитным ($\chi > 0$) или диамагнитным ($\chi < 0$); необходимо лишь, чтобы выполнялось неравенство $|\chi| \ll 1$, так как в этом случае внутреннее поле \mathbf{H} мало отличается от внешнего поля \mathbf{H}_0 .

Мы видим, что сила \mathbf{F} пропорциональна градиенту квадрата поля и в зависимости от знака магнитной восприимчивости может быть направлена либо в сторону больших полей ($\chi > 0$), либо в сторону меньших полей ($\chi < 0$). Это значит, что парамагнетики увлекаются в места с большим полем, а диамагнетики выталкиваются из мест с большим полем.

§ 12.10. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

Если магнетик является проводником и по нему протекает ток, то в магнитном поле помимо силы, рассмотренной в предыдущем параграфе (обусловленной взаимодействием молекулярных токов с полем), на проводник действует еще сила, вызванная взаимодействием тока проводимости с полем. Объемная плотность этой силы равна $\frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}]$, где \mathbf{j} — плотность тока. При большой проводимости

эта сила может быть значительно больше силы взаимодействия молекулярных токов с внешним полем.

Рассмотрим подробнее жидкий или газообразный проводник с большой проводимостью, находящийся в магнитном поле. При возникновении движения в такой среде в ней будут индуцироваться токи, взаимодействующие с магнитным полем. Благодаря этому в среде появятся новые силы, влияющие на ее движение, а это, в свою очередь, вызовет изменение индуцированных токов. Индуцированные токи сами по себе создают магнитное поле, которое накладывается на внешнее исходное поле. Но изменение влияет на величину силы, что приводит к изменению движения среды.

Таким образом, возникает задача о нахождении скорости движения проводящей среды и действующего в ней магнитного поля. Решение задачи должно быть самосогласованным, т. е. должно учитываться как влияние поля на течение среды, так и влияние течения на поле. Такое самосогласованное течение называется магнитогидродинамическим.

Чтобы установить закон движения нашей проводящей среды (например, жидкости), напомним, что если p — давление жидкости, то на объем dV жидкости со стороны окружающей жидкости будет действовать сила $-dV \text{grad } p$. Сложив эту силу с электродинамической силой $\frac{1}{c} [\mathbf{jB}]dV$, получим результирующую силу, действующую на выделенный объем V жидкости (предполагается, что другие силы, кроме электродинамической, не действуют). Она равна произведению массы объема жидкости ρdV (ρ — плотность) на ускорение $d\mathbf{v}/dt$. Таким образом,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{c} [\mathbf{jB}].$$

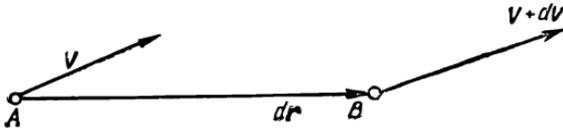


Рис. 12.5

Здесь \mathbf{v} — скорость определенной частицы жидкости, а $d\mathbf{v}/dt$ — ее ускорение. Но течение жидкости можно описывать, не рассматривая скорости отдельных частиц жидкости, а вводя поле скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. При этом $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ обозначает скорость не какой-либо определенной частицы жидкости, а скорость любой частицы, проходящей пространственную точку \mathbf{r} в момент времени t . В таком методе описания движения ускорение $d\mathbf{v}/dt$ равно, очевидно, $\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \text{grad})\mathbf{v}$. Действительно, рассмотрим сперва стационарное поле, когда $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$. Тогда, если в точке пространства A (рис. 12.5) скорость течения равна \mathbf{v} и мы следим за определенной частицей, следует учесть, что за время dt эта частица окажется в пространственной точке B , смещенной на $d\mathbf{r}$ от точки A . В точке B поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ равно $\mathbf{v}(\mathbf{r}) + (d\mathbf{r} \text{grad})\mathbf{v}$. Поэтому изменение скорости рассматриваемой определенной частицы равно $(d\mathbf{r} \text{grad})\mathbf{v}$. Деля эту величину на dt и учитывая, что $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, получаем $(\mathbf{v} \text{grad})\mathbf{v}$. Если поле не стационарно, то к этому выражению следует добавить $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Тогда

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad})\mathbf{v}.$$

Входящие в гидродинамическое уравнение движения величины \mathbf{v} и ρ должны, очевидно, удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \rho\mathbf{v} = 0,$$

выражающему закон сохранения массы жидкости.

Величины \mathbf{B} , \mathbf{H} и \mathbf{E} , определяющие электромагнитное поле в жидкости, должны удовлетворять уравнениям Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Здесь \mathbf{j} — плотность тока проводимости, определяемая законом Ома: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^*$, где σ — коэффициент электропроводности среды; \mathbf{E}^* — электрическое поле в системе отсчета, связанной с проводником. Эта величина согласно § 9.2 связана с полями \mathbf{E} и \mathbf{V} в системе отсчета, в которой среда движется, соотношением

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Током смещения мы пренебрегаем, считая, что он значительно меньше тока проводимости. Предполагая проводимость очень большой, можно считать, что поле $\mathbf{E}^* = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}$ равно нулю, откуда следует, что

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Поэтому первое уравнение Максвелла приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Подставив, далее, в гидродинамическое уравнение движения $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}$, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{H}].$$

Это уравнение вместе с записанным выше первым уравнением Максвелла определяет скорость течения и магнитное поле в среде.

Из первого уравнения Максвелла следует, что если взять произвольную жидкую поверхность, т. е. поверхность, образованную частицами среды, то магнитный поток через нее не будет изменяться при движении частиц. Действительно, обозначая такую поверхность через Σ , имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{\Sigma} \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{B}] d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{L}} [\mathbf{v}\mathbf{B}] dl$$

(последнее равенство написано на основании теоремы Стокса; dl — элемент длины контура \mathcal{L} , охватывающего Σ). Но $dl \parallel \mathbf{v}$, поэтому

$$\Phi \equiv \int_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \text{const.}$$

Рассмотрим далее две жидкие поверхности, на которых в некоторый момент времени $B_n = 0$ (\mathbf{n} — направление нормали к поверхности). Это равенство сохранится и во все последующие моменты времени. Линия пересечения этих поверхностей является, очевидно, магнитной силовой линией, а так как линия пересечения жидких поверхностей представляет собой жидкую линию, то мы приходим к выводу, что магнитные силовые линии скреплены с жидкими частицами. На этом основании вводят понятие вмороженности магнитных силовых линий.

Если взять элемент достаточно тонкой силовой трубки, то с течением времени его длина и площадь сечения ΔS изменяются, но магнитный поток остается неизменным, т. е.

$$B\Delta S = B_0\Delta S_0$$

(индекс 0 служит для обозначения начальных значений) Кроме того, масса жидкости в элементе трубки также не будет изменяться, т. е.

$$\rho\Delta S\Delta l = \rho_0\Delta S_0\Delta l_0$$

(Δl_0 и Δl — длины элемента в начальный и последующий моменты времени; ρ_0 и ρ — соответствующие значения плотности). Деля первое из написанных равенств на второе, получаем

$$\frac{B}{\rho\Delta l} = \frac{B_0}{\rho_0\Delta l_0} = \text{const.}$$

Таким образом, величина B/ρ изменяется пропорционально длине элемента магнитной силовой линии. Если жидкость несжимаема, то напряженность поля изменяется пропорционально «растяжению» силовых линий.

§ 12.11. МАГНИТОЗВУКОВЫЕ И АЛЬВЕНОВСКАЯ ВОЛНЫ

Как известно, возмущение плотности в каком-либо месте жидкости (или газа) не локализуется а распространяется в виде волны — продольной звуковой волны, квадрат скорости которой v_S равен адиабатической производной давления по плотности: $v_S^2 = (dp/d\rho)_S$.

В проводящей жидкости (или газе), находящейся в магнитном поле, происходит модификация звуковых волн — из каждой волны с определенным волновым вектором \mathbf{k} получаются две волны с тем же волновым вектором, но с разными частотами и разными скоростями, зависящими от магнитного поля. Они называются магнито-звуковыми волнами. Кроме того, возникает еще третья волна (с тем же \mathbf{k}), поперечная и не связанная с изменением плотности среды. Она называется альвеновской волной (по имени Альвена, открывшего ее); скорость ее определяется только магнитным полем (и плотностью среды).

Чтобы понять происхождение этих волн и найти их скорости, обратимся к уравнениям, описывающим магнитогидродинамическое решение, и положим в них $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$, где ρ_0 , p_0 , \mathbf{H}_0 — постоянные и не зависящие от координат значения плотности, давления и поля, соответствующие равновесному состоянию среды; ρ' , p' , \mathbf{h} — малые добавки к ним, описывающие возмущение среды. Обозначая через \mathbf{v}' скорость возникающего движения жидкости и считая эту величину также малой, после линеаризации магнитогидродинамических уравнений,

т. е. после пренебрежения в них квадратичными (со штрихом) членами, получаем

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = - \text{grad } p' + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{hB}_0],$$

$$\rho_0 \text{div } \mathbf{v}' + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v}'\mathbf{B}_0].$$

Эта система уравнений позволяет найти зависимость величин, характеризующих возмущение среды, от времени и координат. Но предварительно нужно определить возмущение давления p' . Давление жидкости является функцией плотности и температуры. нас интересуют быстрые изменения плотности, при которых не успевает происходить тепловой обмен между различными элементами жидкости. Иными словами, возмущение происходит адиабатически. Поэтому можно положить $p' = (dp/d\rho)_S \rho'$, где $(dp/d\rho)_S$ — производная p по ρ , взятая при постоянной энтропии S . С учетом этой связи мы имеем 7 линейных уравнений для определения 7 неизвестных — ρ' , \mathbf{v}' , \mathbf{h} . Ищем эти неизвестные в виде плоских монохроматических волн:

$$\begin{aligned} \rho' &= R e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{V} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \mathbf{h} = \mathfrak{H} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \end{aligned}$$

где ω и \mathbf{k} — частота и волновой вектор волны; R , \mathbf{V} и \mathfrak{H} — комплексные амплитуды возмущений плотности, скорости и поля. Учи тывая, что

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{h} &= -i [\mathbf{k}\mathfrak{H}] e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \\ \text{rot } [\mathbf{v}'\mathbf{B}_0] &= -i [\mathbf{k} [\mathbf{V}\mathbf{B}_0]] e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \end{aligned}$$

получаем следующие уравнения для определения комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \omega \rho_0 \mathbf{V} &= v_S^2 \mathbf{k} R + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B}_0 [\mathbf{k}\mathfrak{H}]], \\ -\rho_0 \mathbf{k}\mathbf{V} + \omega R &= 0, \\ -\omega \mathfrak{H} &= -[\mathbf{k} [\mathbf{V}\mathbf{B}_0]], \end{aligned}$$

где $v_S^2 = (dp/d\rho)_S$. Используя известную формулу $[\mathbf{a} [\mathbf{b}\mathbf{c}]] = \mathbf{b} (\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a}\mathbf{b})$, перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} \omega \rho_0 \mathbf{V} &= v_S^2 \mathbf{k} R + \frac{1}{4\pi\omega} \{ \mathbf{k} B_0^2 (\mathbf{k}\mathbf{V}) - \mathbf{k} (\mathbf{B}_0 \mathbf{V}) (\mathbf{k}\mathbf{B}_0) + \mathbf{V} (\mathbf{k}\mathbf{B}_0)^2 - \\ &\quad - \mathbf{B}_0 (\mathbf{k}\mathbf{V}) (\mathbf{k}\mathbf{B}_0) \}, \\ \rho_0 \mathbf{k}\mathbf{V} &= \omega R, \\ \omega \mathfrak{H} &= -\mathbf{V} (\mathbf{k}\mathbf{B}_0) + \mathbf{B}_0 (\mathbf{k}\mathbf{V}), \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что $k\mathfrak{H} = 0$, т. е. волна поля является поперечной. Умножая первое уравнение скалярно сперва на \mathbf{B}_0 , а затем на \mathbf{k} и используя второе уравнение, находим

$$\omega^2 (\mathbf{B}_0 \mathbf{V}) = v_S^2 (k\mathbf{B}_0) (k\mathbf{V}),$$

$$\omega \rho_0 (k\mathbf{V}) = v_S^2 k^2 \rho_0 \frac{(k\mathbf{V})}{\omega} + \frac{(k\mathbf{V})}{4\pi\omega} \left\{ B_0^2 k^2 - \frac{k^2 v_S^2}{\omega^2} (k\mathbf{B}_0)^2 \right\}.$$

Второе из этих уравнений показывает, что если $\mathbf{B}_0 = 0$, то $\omega/k = v_S$, т. е. v_S представляет собой скорость волны (звуковой) в жидкости.

При $\mathbf{B}_0 \neq 0$ следует различать две возможности: $R \neq 0$ и $R = 0$. В первом случае $\rho' \neq 0$, т. е. имеется волна плотности, при этом $k\mathbf{V} \neq 0$ и второе из написанных соотношений можно сократить на $k\mathbf{V}$. В результате после умножения на ω получаем

$$\omega^2 = v_S^2 k^2 + \frac{1}{4\pi\rho_0} \left\{ B_0^2 k^2 - v_S^2 \frac{k^2}{\omega^2} (k\mathbf{B}_0)^2 \right\},$$

откуда

$$v^4 - v_S^2 v^2 - v_A^2 (v^2 - v_S^2 \cos^2 \vartheta) = 0,$$

где $v = \omega/k$; ϑ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 ; $v_A^2 = B_0^2/4\pi\rho_0$. Полученное квадратное уравнение для v^2 имеет два корня, которые мы обозначим через v_{\pm}^2 :

$$v_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[v_S^2 + v_A^2 \pm \sqrt{(v_S^2 + v_A^2)^2 - 4v_S^2 v_A^2 \cos^2 \vartheta} \right].$$

Величины v_{\pm} имеют простой физический смысл: они представляют собой скорости двух волн с частотами $\omega_{\pm} = v_{\pm} k$, распространяющимися с волновым вектором \mathbf{k} под углом ϑ к полю \mathbf{B}_0 . Эти волны называются быстрой (v_+) и медленной (v_-) магнитозвуковыми волнами. При $\mathbf{B}_0 = 0$ быстрая магнитозвуковая волна переходит в обычную звуковую волну, а медленная исчезает.

Во втором случае $\rho' = 0$. При этом $k\mathbf{V} = 0$, т. е. при невозмущенной плотности жидкости волна скорости должна быть поперечной. Как видно из соотношения $\omega^2 (\mathbf{B}_0 \mathbf{V}) = v_S^2 (k\mathbf{B}_0) (k\mathbf{V})$, в этом случае вместе с $k\mathbf{V}$ в нуль обращается и $B_0 \mathbf{V}$, т. е. вектор скорости \mathbf{V} перпендикулярен как волновому вектору \mathbf{k} , так и полю \mathbf{B}_0 . Уравнения для комплексных амплитуд \mathbf{V} , \mathfrak{H} принимают вид

$$\omega \rho_0 \mathbf{V} = \frac{1}{4\pi\omega} (k\mathbf{B}_0)^2 \mathbf{V},$$

$$\omega \mathfrak{H} = -\mathbf{V} (k\mathbf{B}_0).$$

Полагая $\omega = v_a k$, получаем

$$v_a = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \cos \vartheta,$$

где ϑ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 .

Величина v_d представляет собой скорость волны, распространяющейся в проводящей жидкости с волновым вектором \mathbf{k} под углом ϑ к \mathbf{V}_0 . Эта волна поперечна и не связана с возмущением плотности ($\rho' = 0$). Она называется альвеновской волной. Используя полученное выражение для ее скорости v_d , из соотношения для \mathfrak{H} находим

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \mathbf{V},$$

откуда

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 = \frac{1}{2} \rho_0 V^2,$$

т. е. плотность магнитной энергии волны совпадает с плотностью механической энергии волны. Отметим, что в альвеновской волне

$$\mathbf{kV} = \mathbf{k}\mathfrak{H} = \mathbf{V}_0\mathbf{V} = \mathbf{V}_0\mathfrak{H} = 0.$$

§ 12.12. ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ

В предыдущем параграфе мы изучали влияние магнитного поля на макроскопическое движение проводящей жидкости. Но магнитное поле оказывает влияние и на внутреннее движение заряженных частиц в веществе, в частности на движение электронов проводимости в металлах. Это приводит к ряду эффектов, которые называются гальваномагнитными и термомагнитными явлениями.

Во-первых, благодаря магнитному полю изменяется сопротивление проводника. Во-вторых, если в отсутствие поля напряженность электрического поля \mathbf{E} и плотности тока \mathbf{j} имеют одинаковое направление (металл считается изотропным), то при наличии поля возникает добавочное электрическое поле, перпендикулярное \mathbf{H} и \mathbf{j} . Это поле называется холловским, а само явление — эффектом Холла.

Таким образом, если при $\mathbf{H} = 0$ согласно закону Ома $\mathbf{E} = \rho_0\mathbf{j}$, то при $\mathbf{H} \neq 0$ электрическое поле и плотность тока связаны между собой соотношением

$$\mathbf{E} = \rho\mathbf{j} + R[\mathbf{H}\mathbf{j}],$$

где ρ_0 и ρ — удельные сопротивления проводника при $\mathbf{H} = 0$ и $\mathbf{H} \neq 0$; R — константа Холла. Полученная формула относится к простейшему случаю изотропного проводника.

Чтобы понять возникновение холловского поля, представим себе, что сопротивление отсутствует, т. е. электроны не испытывают столкновений, приводящих к сопротивлению. В этом случае на электрон действуют только электрическое и магнитное поля. При этом, как мы знаем, возникает дрейф электронов в направлении, перпендикулярном \mathbf{E} и \mathbf{H} , со скоростью

$$\mathbf{v}_d = c[\mathbf{EH}]/H^2.$$

Умножая v_d на en (n — плотность электронов), находим плотность тока

$$\mathbf{j} = env_d = \frac{ecn}{H^2}[\mathbf{EH}].$$

Если $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, то, очевидно,

$$\mathbf{E} = R [\mathbf{H}j], \quad R = \frac{1}{ecn}.$$

Это и есть холловское поле. Мы видим, что константа Холла обратно пропорциональна плотности электронов.

К этому полю должно быть добавлено поле, связанное со столкновениями электронов. Чтобы найти его, нужно определить плотность тока при наличии полей \mathbf{E} и \mathbf{H} с учетом столкновений. Эта задача должна решаться с помощью кинетического уравнения для функции распределения электронов $f(\mathbf{p})$ в присутствии полей.

Кинетическое уравнение при $\mathbf{H} = 0$ сформулировано в § 5.7. Если $\mathbf{H} \neq 0$ и функция распределения f , так же как и в § 5.7, мало отличается от равновесного фермиевского распределения f_0 , то кинетическое уравнение имеет вид

$$e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = - \frac{f - f_0}{\tau},$$

где $\mathbf{v} = d\epsilon/d\mathbf{p}$ — скорость электрона; τ — среднее время между столкновениями. Это уравнение отличается от кинетического уравнения

§ 5.7 только тем, что в него входит сила Лоренца $e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right)$ вместо электрической силы $e\mathbf{E}$.

Вводя отклонение функции распределения от равновесной функции распределения $f - f_0 = \varphi$, $|\varphi| \ll f_0$ и учитывая, что

$$[\mathbf{vH}] \frac{df_0}{d\mathbf{p}} = [\mathbf{vH}] \frac{df_0}{d\epsilon} \mathbf{v} = 0,$$

из кинетического уравнения получаем следующее уравнение для определения неизвестной функции $\varphi(\mathbf{p})$:

$$\frac{1}{\tau} \varphi(\mathbf{p}) + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}] \frac{\partial \varphi(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = - e\mathbf{E}\mathbf{v} \frac{df_0}{d\epsilon}.$$

Электрическое поле считается слабым, и поэтому здесь пренебрегаем величиной $e\mathbf{E}\partial\varphi/\partial\mathbf{p}$.

Рассмотрим тот случай, когда $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. Направив \mathbf{H} вдоль оси z , перепишем уравнение для φ в виде

$$\frac{1}{\tau} \varphi + \frac{eH}{c} \left(v_y \frac{\partial}{\partial p_x} - v_x \frac{\partial}{\partial p_y} \right) \varphi = - e (E_x v_x + E_y v_y) \frac{df_0}{d\epsilon}.$$

Предположим, что энергия электрона проводимости ϵ связана с его импульсом (точнее, квазиимпульсом) \mathbf{p} таким же соотношением $\epsilon = \mathbf{p}^2/2m$, как и в случае свободного электрона. Тогда функцию φ следует искать в виде

$$\varphi(\mathbf{p}) = \Phi_1(\epsilon) v_x + \Phi_2(\epsilon) v_y,$$

где Φ_1 и Φ_2 — некоторые функции ε . Подставляя это выражение в уравнение для φ , имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} \Phi_1 - \omega_c \Phi_2 &= -e E_x \frac{df_0}{d\varepsilon}, \\ \frac{1}{\tau} \Phi_2 + \omega_c \Phi_1 &= -e E_y \frac{df_0}{d\varepsilon},\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{-e\tau(E_x + \omega_c \tau E_y)}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \frac{df_0}{d\varepsilon}, \\ \Phi_2 &= \frac{-e\tau(E_y - \omega_c \tau E_x)}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \frac{df_0}{d\varepsilon},\end{aligned}$$

где $\omega_c = eH/mc$ — циклотронная частота.

Найдем теперь плотность тока

$$\mathbf{j} = 2e \int \mathbf{v} f \mathbf{v}(\varepsilon) d\varepsilon \frac{d\omega}{4\pi}$$

($\mathbf{v}(\varepsilon)$ — плотность уровней электрона (см. § 5.7)). Учитывая, так же как и в § 5.7, что $df_0/d\varepsilon = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$, получаем

$$j_x = \sigma \frac{E_x + \omega_c \tau_0 E_y}{1 + \omega_c^2 \tau_0^2}, \quad j_y = \sigma \frac{E_y - \omega_c \tau_0 E_x}{1 + \omega_c^2 \tau_0^2},$$

где $\tau_0 \equiv \tau(\varepsilon_0)$, а σ — коэффициент электропроводности при $H = 0$, $\sigma = e^2 n \tau_0 / m$

Пусть ток течет вдоль оси x , тогда $j_y = 0$ и, следовательно, $E_y = \omega_c \tau_0 E_x$. Подставляя это выражение в формулу для j_x , находим

$$j_x = \sigma E_x.$$

Таким образом, мы пришли к старой формуле для плотности тока с проводимостью σ , не зависящей от \mathbf{H} . Действие поля \mathbf{H} сводится лишь к возникновению поперечного (холловского) поля:

$$E_y = \omega_c \tau_0 E_x = \frac{\omega_c \tau_0}{\sigma} j_x = RH j_x,$$

где $R = 1/ecn$ — константа Холла.

Такой вывод связан с нашим предположением о характере зависимости энергии электрона от импульса (квазиимпульса), именно мы предполагали, что $\varepsilon = p^2/2m$, а в этом случае значение скорости на границе фермиевского распределения ($\varepsilon = \varepsilon_0$) одинаково для всех электронов и действие поперечного электрического поля E_y компенсирует поперечную силу, создаваемую магнитным полем. Электроны находятся поэтому только под действием продольного поля E_x и столкновений.

Если значение скорости при $\varepsilon = \varepsilon_0$ будет различным для разных электронов, то ситуация существенно изменится. Разъясним это на примере двух групп электронов проводимости, находящихся в двух энергетических зонах. Будем считать, что в каждой из зон энергия электрона пропорциональна квадрату квазиимпульса, но

массы различны для обеих зон. Различны также времена свободного пробега, и могут различаться знаки носителей заряда в обеих зонах. Тогда плотности тока $j^{(1)}$ и $j^{(2)}$ для каждой из зон определяются прежними формулами:

$$j_x^{(\alpha)} = \frac{\sigma_\alpha E_x + R_\alpha H \sigma_\alpha^2 E_y}{1 + R_\alpha^2 H^2 \sigma_\alpha^2}, \quad j_y^{(\alpha)} = \frac{\sigma_\alpha E_y - R_\alpha H \sigma_\alpha^2 E_x}{1 + R_\alpha^2 H^2 \sigma_\alpha^2},$$

где индекс $\alpha = 1, 2$ нумерует зоны. Проекция суммарного тока:

$$j_x = j_x^{(1)} + j_x^{(2)}, \quad j_y = j_y^{(1)} + j_y^{(2)}.$$

Положив, как и выше, $j_y = 0$, найдем холловское поле

$$E_y = \frac{R_1 \sigma_1^2 + R_2 \sigma_2^2 + R_1 R_2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 H^2 (R_1 + R_2)}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 (R_1^2 \sigma_1 + R_2^2 \sigma_2) H^2} H E_x.$$

Подставив далее это выражение в формулы для $j_x^{(\alpha)}$, можно выразить j_x через E_x , или j_y через E_y :

$$j_x = \rho E_x,$$

где ρ — сопротивление при наличии магнитного поля. Записав ρ в виде $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, где ρ_0 — сопротивление в отсутствие поля, получим

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 (\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2)^2 H^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + H^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (R_1 + R_2)^2}.$$

Эта величина будет отлична от нуля, если $\sigma_1 R_1 \neq \sigma_2 R_2$, т. е. если $\tau_1/m_1 e_1 \neq \tau_2/m_2 e_2$. Мы видим, что достаточно предположить, что $m_1 \neq m_2$, и $\Delta\rho$ будет отлично от нуля даже при $\tau_1 = \tau_2$ и $e_1 = e_2$. В слабых полях $\Delta\rho \sim H^2$.

Подставив в формулу для E_y поле $E_x = 1/\rho j_x$, найдем константу Холла $R = E_y/H E_x$. Она так же, как и ρ , будет зависеть от H и времени свободного пробега $\tau_{1,2}$. Для слабых полей константа Холла определяется формулой

$$R = \frac{R_1 \sigma_1^2 + R_2 \sigma_2^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}.$$

Обратим внимание на то, что эта величина зависит не только от плотностей электронов, но и от времени их свободного пробега.

Выясним теперь, как ведут себя магнитосопротивление ρ и константа Холла R в области сильных магнитных полей. Легко убедиться, что в этом случае константа Холла R определяется соотношением $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$, откуда

$$R = \frac{1}{c(e_1 n_1 + e_2 n_2)}.$$

Мы специально выписали здесь разные заряды для носителей зарядов в обеих зонах, так как электроны в почти заполненной зоне

ведут себя как позитроны (так называемые дырки), Поэтому если проводимость обеих зон электронная, то

$$R = \frac{1}{ce(n_1 + n_2)}.$$

Если проводимость первой зоны электронная, а второй — дырочная, то

$$R = \frac{1}{ce(n_1 - n_2)}.$$

Поведение магнитосопротивления в области больших H зависит от того, отлична от нуля или равна нулю сумма холловских констант для обеих зон. Если $R_1 + R_2 \neq 0$, то в области больших полей магнитосопротивление будет достигать насыщения:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} \left(\frac{\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2}{R_1 + R_2} \right)^2.$$

В случае, когда число электронов равно числу дырок, т. е. $R_1 + R_2 = 0$, $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ будет всегда пропорционально H^2 :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\sigma_1\sigma_2(\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2)^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} H^2.$$

Мы выяснили поведение $\Delta\rho$ для модели двух энергетических зон, которые мы предполагали изотропными. Но полученные результаты справедливы и для общего анизотропного случая, когда энергия электрона сложным образом зависит от квазиимпульса. При этом зависимость сопротивления от H обусловлена тем, что эффективная масса электрона зависит от направления его движения. В общем анизотропном случае в области слабых магнитных полей $\Delta\rho$ по-прежнему пропорционально H^2 . При сильных полях, как правило, $\Delta\rho$ не зависит от H . Исключением является случай равенства числа электронов и дырок, когда $\Delta\rho$ остается пропорциональным H^2 при сколь угодно сильных полях. (Аналогичное поведение имеет место для особых направлений магнитного поля при специальной топологии поверхности Ферми.)

Рассмотренные гальваномагнитные явления могут быть названы поперечными, так как мы предполагали, что магнитное поле перпендикулярно электрическому полю и электрическому току. На первый взгляд кажется, что при другой конфигурации полей никаких эффектов происходить не может, так как сила Лоренца отлична от нуля только в том случае, когда магнитное поле не параллельно электрическому току. Между тем существует еще продольный гальваномагнитный эффект — изменение сопротивления металла в магнитном поле, направление которого совпадает с направлением плотности тока. Эффект этот имеет квантовое происхождение,

§ 12.13. ТЕРМОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ

До сих пор мы считали, что температура во всех точках металла одинакова. Пусть теперь температура в разных местах неодинакова, так что имеется градиент температуры ∇T . Тогда, как мы

видели в § 5.11, плотность тока \mathbf{j} будет зависеть не только от поля \mathbf{E} , но и от градиента температуры:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \beta \nabla T,$$

а плотность теплового потока \mathbf{q} будет зависеть не только от градиента температуры, но и от поля:

$$\mathbf{q} = \gamma \mathbf{E} + \zeta \nabla T,$$

где σ , β , γ , ζ , — некоторые константы (для простоты предполагается, что металл изотропен).

При наличии магнитного поля \mathbf{H} все эти константы (σ — коэффициент электропроводности) станут функциями \mathbf{H} . Однако этим роль магнитного поля не исчерпывается. Действительно, если даже температура во всех точках металла одинакова, то связь между \mathbf{E} и \mathbf{j} не определяется обычным законом Ома и \mathbf{E} содержит наряду со слагаемым $\rho \mathbf{j}$ еще холловское поле $R[\mathbf{Hj}]$. Если добавляется лишний вектор ∇T , то связи между различными величинами становятся еще сложнее.

Эти связи можно установить в общем виде, если считать, что они являются линейными относительно векторов \mathbf{E} , ∇T и \mathbf{j} , \mathbf{q} . При этом следует лишь учесть, что \mathbf{E} , ∇T , \mathbf{j} , \mathbf{q} — полярные векторы, а \mathbf{H} — аксиальный вектор. Поэтому магнитное поле может входить в выражение для какого-либо полярного вектора только в виде векторного произведения \mathbf{H} на какой-либо другой полярный вектор.

Будем для простоты рассматривать изотропный случай и выразим \mathbf{E} и \mathbf{q} через \mathbf{j} и ∇T . Согласно изложенному выше эти связи должны иметь следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \rho \mathbf{j} + R[\mathbf{Hj}] + Q \nabla T + N[\mathbf{H} \nabla T], \\ \mathbf{q} &= -\kappa \nabla T + \Pi \mathbf{j} + B[\mathbf{Hj}] + L[\mathbf{H} \nabla T]. \end{aligned}$$

Здесь ρ , R и κ , Π , Q — знакомые уже нам величины: ρ и R — сопротивление в магнитном поле и постоянная Холла; κ — коэффициент теплопроводности Q и Π — термоэлектрические константы, связанные между собой соотношением Онзагера $\Pi = QT$. Члены, содержащиеся в качестве множителей N , B и L , описывают термомагнитные эффекты. Величины B , N связаны с T также соотношением Онзагера $B = NT$. Все константы, входящие в формулы для \mathbf{E} и \mathbf{q} , являются функциями магнитного поля. В случае слабых полей, когда $\omega_c \tau \ll 1$, по порядку величины $NN/Q \approx \omega_c \tau$, $HL/\kappa \approx \omega_c \tau$.

Выясним, как проявляются термомагнитные явления. Магнитное поле \mathbf{H} будем считать направленным вдоль оси z , а ток \mathbf{j} — по оси x . Предположим сперва, что тепловой поток направлен по оси x , т. е. $q_y = 0$, и что $\partial T / \partial x = 0$. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{B}{\kappa} H j_x, \quad E_y = \left(R + \frac{QB}{\kappa} \right) H j_x.$$

Последняя формула определяет холловское поле в условиях, когда $q_y = 0$ и $\partial T / \partial x = 0$. Мы видим, что при указанных условиях возникает градиент температуры вдоль оси y , пропорциональный произведению тока на магнитное поле. Это явление называется эффектом Эттингаузена.

Предположим далее, что $j_x = j_y = 0$, $q_y = 0$; тогда

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{L}{\kappa} H \frac{\partial T}{\partial x},$$

т. е. температурный градиент вдоль оси x будет вызывать температурный градиент вдоль оси y . Это явление называется эффектом Ледюка—Риги.

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда $j_x = j_y = 0$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$. Тогда

$$E_y = NH \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Таким образом, градиент температуры вдоль оси x может создать электрическое поле вдоль оси y . Это явление называется эффектом Нернста.

Глава 13

ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

§ 13.1. ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ

У большинства парамагнетиков магнитная восприимчивость в обычных условиях мала, поэтому их намагниченность M (даже в сильных полях) мала по сравнению с предельным значением $M_\infty = nm$, соответствующим бесконечному значению величины mH/kT (m — магнитный момент атома; n — число атомов в единице объема).

Однако существует ряд твердых парамагнетиков, в первую очередь железо, у которых в обычных условиях уже при ничтожно малых полях намагничение достигает значений, сравнимых с M_∞ (у чистых монокристаллов железа это наблюдается в полях $H \sim 10^{-2}$ Гс). Это так называемые ферромагнетики. К ним помимо железа относятся никель, кобальт, гадолиний, диспрозий, а также многочисленные соединения и сплавы, содержащие эти металлы (например, пермаллой: 20% Fe + 80% Ni; сплав Гейслера: 25% Ni + 60% Cu + 15% Al).

Схематически идеализированная кривая намагничения ферромагнетика изображена на рис. 13.1. Мы видим, что при $H \rightarrow 0$ имеется конечная намагниченность M_S . Она называется спонтанной намагниченностью. Именно наличие спонтанной намагниченности отличает ферромагнетики от других кристаллов (парамагнетиков, диамагнетиков). При этом спонтанная намагниченность не обязательно сравнима с предельным значением намагниченности M_∞ : существует целый ряд ферромагнетиков (так называемые слабые ферромагнетики, например соединение $ZrZn_2$) с малым по сравнению с M_∞ значением спонтанной намагниченности.

Спонтанная намагниченность M_S зависит от температуры и уменьшается с ее ростом. Характер этой зависимости иллюстрирует рис. 13.2. При некоторой температуре T_C , называемой температурой Кюри, M_S обращается в нуль. Для железа $T_C = 1043$ К, для никеля — 631 К, для кобальта — 1388 К, для гадолиния — 289 К, для Cu_2AlMn — 600 К. В области низких температур ($T \ll T_C$) намагниченность M_S мало отличается от ее значения при $T = 0$; именно, разность между этими величинами теоретически должна быть пропорциональна $T^{3/2}$ (закон Блоха). Например, для ферромагнетиков, для которых намагниченность при нуле температур достигает своего предельно возможного значения M_∞ (к ним относятся, в частности, все ферромагнитные диэлектрики):

$$\frac{M_\infty - M_S}{M_\infty} \sim \left(\frac{T}{T_C} \right)^{3/2}.$$

При температуре выше точки Кюри специфические ферромагнитные свойства исчезают и вещество становится обычным парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого определяется формулой

$$\chi = \frac{C}{T - T_C},$$

где C — некоторая константа. Эта зависимость χ от температуры называется законом Кюри—Вейсса. В точке Кюри, при переходе от ферромагнитного в обычное парамагнитное состояние, наблюдается скачок в теплоемкости вещества (рис. 13.3).

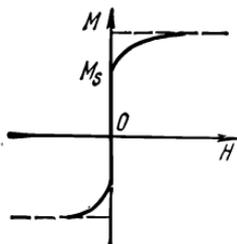


Рис. 13.1

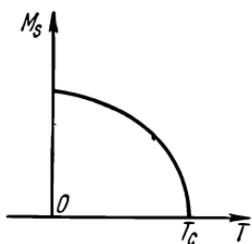


Рис. 13.2

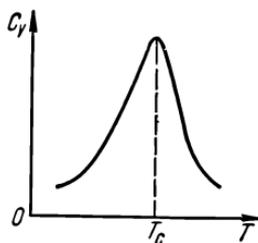


Рис. 13.3

Наконец, в точке Кюри наблюдается особенно большой магнитокалорический эффект. В § 12.7 мы показали, что

$$\frac{\partial}{\partial T} (W + MH) dT = T \frac{\partial H}{\partial T} dM.$$

Левая часть этого равенства равна $C_V dT$ (C_V — теплоемкость при $M=0$); правую часть мы можем вычислить, используя закон Кюри—Вейсса. Из него следует, что $H = \frac{M}{C} (T - T_C)$, поэтому $\partial H / \partial T = M/C$. В результате получаем

$$C_V dT = \frac{CT}{2(T - T_C)^2} d(H^2).$$

Из формулы видно, что магнитокалорический эффект будет особенно велик при приближении к точке Кюри.

На схематическом рис. 13.1 кривая намагничивания в точке $H = 0$ поднимается вертикально вверх, что соответствует идеализированному случаю $(dM/dH)_{H=0} = \infty$, т. е. бесконечной магнитной восприимчивости, и, следовательно, бесконечно большой магнитной проницаемости μ . В действительности величина dM/dH конечна, и поэтому магнитная проницаемость конечна, хотя достигает иногда больших значений. Например, у железа μ может быть порядка нескольких тысяч, а у пермаллоя — порядка сотен тысяч и даже миллиона.

Но магнитная восприимчивость не может служить характеристикой магнитного состояния ферромагнетика. Это объясняется следующим. Обычно парамагнетики и диамагнетики являются сла-

бомагнитными веществами и характеризуются в области малых магнитных полей вполне определенной магнитной восприимчивостью, зависящей только от внутренних параметров, свойственных веществу (таких, как магнитный момент атома и плотности атомов), а также от температуры. Для ферромагнетиков не существует однозначной и определенной магнитной восприимчивости, а в тех случаях, когда ее можно ввести, она оказывается зависящей от величины и направления поля, процесса намагничения, характера обработки ферромагнетика и присутствующих в нем примесей. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 13.4, на котором изображена зависимость намагнитченности M образца ферромагнетика от приложенного поля H . В исходном состоянии здесь $M = 0$ (при $H = 0$). С уве-

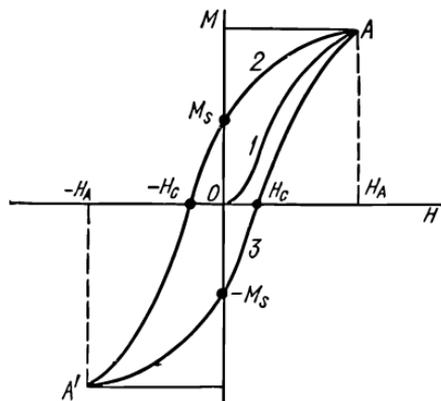


Рис. 13.4

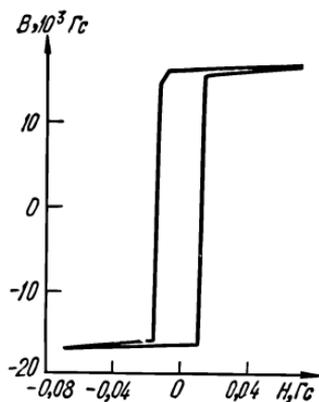


Рис. 13.5

личением H намагнитченность изменяется вдоль кривой OA . Если таким образом мы достигнем точки A (при $H = H_A$) и затем начнем уменьшать поле, то M будет изменяться не по кривой $A10$, а по кривой $A2$, лежащей выше $A10$. При $H = 0$ получим конечную намагнитченность M_s , которая называется остаточной. Она зависит от температуры и уменьшается с ее ростом: при $T = T_C$ остаточная намагнитченность обращается в нуль. Если изменить направление поля и увеличивать его, то M обратится в нуль при $H = -H_C$. Это значение поля называется коэрцитивной силой. Затем M изменит свой знак. Если, достигнув значения поля $H = -H_A$, начать уменьшать H по абсолютному значению, то намагнитченность изменится по кривой $A'3$ и при $H = 0$ получим $M = -M_s$. При изменении направления поля намагнитченность изменяется вдоль кривой $3A$, которая пересекает ось абсцисс при $H = H_C$; в этой точке $M = 0$. При дальнейшем увеличении поля вплоть до $H = H_A$ мы придем снова в точку A . Таким образом, будет закончен цикл намагничения, которому соответствует, как мы видим, замкнутая кривая на плоскости (H, M) . Она называется петлей гистерезиса.

Реальная кривая намагничения монокристалла кремнистого железа изображена на рис. 13.5 (по оси ординат отложена вели-

чина индукции $B = H + 4\pi M$, а не M). Мы видим, что намагниченность насыщения $M_s \sim 10^4$ Гс достигается при ничтожном поле порядка 10^{-2} Гс. Однако коэрцитивная сила ничтожно мала, т. е. намагниченность обращается в нуль практически при $H = 0$.

Коэрцитивная сила существенно зависит от характера обработки ферромагнитного образца; она равна 0,004 Гс в специальных сортах трансформаторного железа и 20 000 Гс в специальных постоянных магнитах большой стабильности. Величина M_s определяется типом ферромагнетика и зависит только от температуры. Значение поля, при котором достигается намагниченность M_s , зависит, в частности, от ориентации \mathbf{H} относительно кристаллографических осей. Те направления, для которых это поле минимально, называются направлениями легчайшего намагничения. Для железа, например, направления легчайшего намагничения совпадают с направлениями ребер кубической решетки этого металла.

Заметим, что под большой величиной магнитной восприимчивости ферромагнетиков подразумевают большое значение производной dM/dH на круто поднимающихся частях гистерезисной кривой, но, поскольку крутизна кривой намагничения зависит от H , μ не может служить характеристикой магнитного состояния ферромагнетика.

§ 13.2. ПРИРОДА ФЕРРОМАГНЕТИЗМА

Вещество будет парамагнитным, если его атомы обладают собственным магнитным моментом, могущим иметь как орбитальное, так и спиновое происхождение (см. § 12.3). В случае ферромагнетиков основную роль играют спиновые магнитные моменты определенных групп атомных электронов.

В основном спиновое происхождение ферромагнетизма следует из опыта, известного под названием опыта Эйнштейна—де-Гааза. Идея опыта основана на том, что орбитальный магнитный момент атома \mathbf{m}_L пропорционален орбитальному моменту количества движения $\hbar\mathbf{L}$, а спиновый момент \mathbf{m}_S — спиновому моменту количества движения $\hbar\mathbf{S}$, но с удвоенным коэффициентом пропорциональности. Поэтому при намагничении тела (любого парамагнетика!) должен изменяться момент количества движения его электронов. Если проекция M вдоль какой-либо оси z изменяется на ΔM_z , то претерпит изменение и проекция момента количества движения электронов на эту же ось. Отнесенная к единице объема, эта величина, которую мы обозначим через ΔK_z , пропорциональна ΔM_z :

$$\frac{\Delta K_z}{\Delta M_z} = \frac{1}{g},$$

где $g = \frac{\mu_e}{\hbar} = \frac{e}{2m_e c}$ при орбитальном происхождении магнитного момента и $g = \frac{2\mu_e}{\hbar} = \frac{e}{m_e c}$ при спиновом происхождении магнитного момента (если в магнитный момент атома вносят вклад и орбитальный, и спиновый моменты, то в это отношение будет входить еще множитель Ланде).

Учтем теперь, что при намагничении тела к нему не прикладываются внешние механические силы. Поэтому при намагничении будет сохраняться момент количества движения тела, а так как изменение намагничения связано с изменением момента количества движения электронов, то будет изменяться и момент количества движения остова тела — его кристаллической решетки. Это значит, что изменение намагничения подвешенного образца (рис. 13.6) должно приводить к вращению образца относительно оси, вдоль которой изменяется намагничение, и, наоборот, вращение ферромагнитного стержня должно приводить к его намагничению. Именно последний эффект и был обнаружен в точных опытах

Гарнета, который показал, что для железного стержня $g = \frac{e}{m_e c}$.

Этим была экспериментально доказана спиновая природа ферромагнетизма.

Мы приходим, таким образом, к выводу, что в ферромагнетике спины электронов (более точно, спины определенной группы электронов, так называемых магнитных электронов: d -электронов в металлах группы железа и их соединениях и f -электронов в редкоземельных металлах и их соединениях) в ничтожно слабом внешнем магнитном поле в подавляющем большинстве ориентированы по полю; тепловое движение не препятствует их ориентации, если только температура ниже температуры Кюри: при более высокой температуре преимущественная ориентация исчезает и вещество становится обычным парамагнетиком. В этом случае отдельные магнитные моменты распределены в отсутствие внешнего поля хаотически — установлению порядка в системе магнитных моментов мешает тепловое движение. Влияние его таково, что при $H \sim \sim 0,01$ Гс только один момент на 10^9 — 10^{10} моментов ориентируется по полю, в то время как в ферромагнетике при $T < T_C$ такое поле приводит к намагниченности насыщения порядка 10^3 — 10^4 Гс. Наглядно оба случая распределения магнитных моментов по направлениям в парамагнетиках и ферромагнетиках иллюстрирует рис. 13.7. Таким образом, ферромагнетик характеризуется магнитным упорядочением или сильной корреляцией между направлениями магнитных моментов отдельных носителей магнетизма (в железе — d -электронов). Такая корреляция должна быть следствием определенного взаимодействия магнитных моментов, но ясно, что это взаимодействие не может быть магнитным, так как магнитное взаимодействие двух магнитных моментов очень мало, да к тому же оно присуще всем парамагнетикам, а из них далеко не все являются ферромагнетиками.

Поскольку ферромагнетизм имеет спиновое происхождение, то спины определенной группы электронов в ферромагнетиках при $T < T_C$ преимущественно одинаково ориентированы. Этот эффект является не классическим, а чисто квантовым и связан с тем, что энергия системы электронов существенно зависит от свойств симметрии волновой функции этой системы. Волновая функция может обладать разной пространственной симметрией, и различным симметриям соответствуют различные значения энергии системы электронов. Например, у молекулы водорода, в состав которой входит два электрона, электронная волновая функция может либо не изменяться, либо изменять свой знак при перестановке местами электронов. В первом случае — случае пространственно симмет-

ричной волновой функции — энергия молекулы будет меньше, чем во втором случае, — случае пространственно антисимметричной волновой функции. Но электроны подчиняются принципу Паули, согласно которому волновая функция электронов с учетом их спинов всегда изменяет свой знак, если поменять местами электроны и их спины. Поэтому в случае пространственно симметричной волновой функции молекулы водорода спины ее электронов имеют разные ориентации, так что суммарный спин молекулы равен нулю. Напротив, в случае антисимметричной пространственной волновой функции спины обоих электронов имеют одинаковую ориентацию, так что суммарный их спин равен единице.

Таким образом, вследствие неразличимости электронов и действия принципа Паули возникает ситуация, при которой энергия



Рис. 13.6

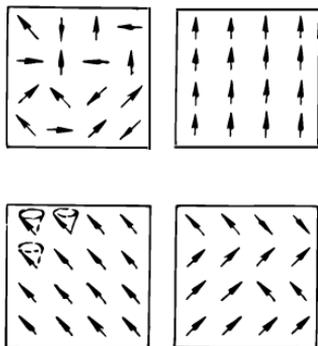


Рис. 13.7

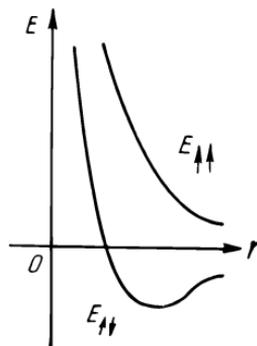


Рис. 13.8

молекулы водорода оказывается зависящей от величины суммарного спина электронов. Этот эффект называется обменным. Обменный эффект лежит в основе гомеоплярной химической связи — в системе двух атомов водорода энергия атома $E_{\uparrow\downarrow}$ при антипараллельной ориентации спинов обоих электронов меньше энергии $E_{\uparrow\uparrow}$, соответствующей параллельной ориентации спинов, причем зависимость $E_{\uparrow\downarrow}$ от расстояния между атомами (т. е. их ядрами) имеет минимум (рис. 13.8), которому и соответствует устойчивое состояние молекулы водорода.

Обменный эффект лежит и в основе ферромагнетизма. Ферромагнитный кристалл можно рассматривать как гигантскую молекулу, причем минимуму ее энергии соответствует параллельная ориентация спинов всех ее электронов (точнее, магнитных электронов), а не антипараллельная, как в случае молекулы водорода. Состояние с минимумом энергии осуществляется при абсолютном нуле, а этот минимум соответствует максимальному суммарному спину электронов, т. е. максимально возможному намагничению кристалла. При достаточно низкой температуре $T < T_C$ намагничение еще будет очень велико. (Это объяснение природы ферромагнетизма дано независимо Гейзенбергом, а также Френкелем и Дорфманом.)

Если бы можно было описывать спин классическим вектором, то часть энергии двух электронов, зависящая от их спинов, содер-

жала бы скалярное произведение спинов s_1 и s_2 обоих электронов, т. е. имела бы вид

$$E_s = -Js_1s_2,$$

где J — некоторая функция от расстояния между электронами (она называется обменным интегралом). При $J > 0$ параллельной ориентации спинов соответствует меньшая энергия, чем при антипараллельной ориентации; при $J < 0$ меньшей энергии соответствует антипараллельная ориентация спинов. Первый случай осуществляется в кристалле ферромагнетика, а второй — в молекуле водорода. Поэтому состояние, в котором спины всех электронов ферромагнетика расположены параллельно друг другу, обладает минимальной энергией. Это состояние реализуется при абсолютном нуле температуры. Величина J определяется электростатической энергией взаимодействия электронов двух соседних атомов: $J = \xi e^2/a$, где a — расстояние между атомами; ξ — численный коэффициент, который оказывается значительно меньше единицы.

Итак, спиновая корреляция — это квантовый эффект, связанный с зависимостью энергии системы электронов от их суммарного спина, а магнитное упорядочение в ферромагнетиках — следствие корреляции спинов. Зависимость энергии системы электронов от их суммарного спина обусловлена обменным взаимодействием; часть энергии электронов $E_s = -Js_1s_2$ называют обменной энергией.

Необходимо отметить, что спиновая корреляция и связанное с ней магнитное упорядочение не всегда носит такой характер, как в ферромагнетиках, т. е. не всегда в магнитоупорядоченных кристаллах минимуму энергии соответствует одинаковая ориентация спинов, а следовательно, и одинаковая ориентация магнитных моментов электронов. Возможны более сложные случаи магнитного упорядочения. Например, кристаллы многих солей металлов типа железа представляют собой совокупности двух вставленных друг в друга подрешеток, каждая из которых имеет отличное от нуля намагничение, но сумма векторов намагничения равна нулю. Подобные кристаллы называются антиферромагнетиками. Магнитная упорядоченность антиферромагнетиков, так же как и ферромагнетиков, ограничена областью низких температур, а именно температура не должна превосходить некоторой определенной температуры, называемой температурой Нееля. Кроме того, существуют магнитоупорядоченные кристаллы — ферриты, которые состоят из нескольких магнитных подрешеток, каждая со своим намагничением, но векторная сумма всех намагничений, в отличие от антиферромагнетиков, не обращается в нуль в отсутствие внешнего поля. К числу ферритов относятся, например, соли $MnO \cdot Fe_2O_3$, $3Y_2O_3 \cdot 5Fe_2O_3$.

§ 13.3. ГИПОТЕЗА МОЛЕКУЛЯРНОГО ПОЛЯ ВЕЙССА

Обменное взаимодействие электронов в ферромагнетике приводит к параллельной ориентации их спинов, а следовательно, и их магнитных моментов. Но так же действует и внешнее магнитное поле. Поэтому феноменологически обменное взаимодействие можно учесть, если добавить к внешнему магнитному полю $H^{(e)}$ некоторое

эффективное поле \mathbf{H}_W . Это эффективное поле (оно является фиктивным!) называется внутренним молекулярным полем Вейсса. Поскольку в нашем распоряжении имеется только один вектор — вектор намагниченности \mathbf{M} , то естественно предположить, что

$$\mathbf{H}_W = \nu \mathbf{M},$$

где ν — некоторая безразмерная константа. Таким образом, мы предполагаем, что обменное взаимодействие вместе с внешним полем эквивалентны по своему действию результирующему полю $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}^{(e)} + \nu \mathbf{M}$. Намагниченность парамагнитного газа, парамагнетизм которого имеет спиновую природу, определяется формулой

$$M = n\mu_B \operatorname{th} \frac{H^{(e)}\mu_B}{kT}.$$

Поскольку ферромагнетизм также имеет спиновую природу, то естественно применить эту же формулу к ферромагнетику, заменив в ней $H^{(e)}$ на H^* :

$$M = n\mu_B \operatorname{th} \frac{(H^{(e)} + \nu M)\mu_B}{kT}.$$

Полученная формула представляет собой трансцендентное уравнение для намагниченности M , определяющее ее как функцию $H^{(e)}$ и T : $M = M(H^{(e)}, T)$. Найдем решение этого уравнения (оно называется уравнением Вейсса). Вводя безразмерные переменные

$$y = \frac{M}{n\mu_B}, \quad x = \frac{H^*\mu_B}{kT}, \quad x_0 = \frac{H^{(e)}\mu_B}{kT},$$

получаем

$$y = \operatorname{th} x, \quad y = \frac{kT}{n\mu_B^2 \nu} (x - x_0).$$

Нам нужно найти значения y и x , удовлетворяющие этим уравнениям. Для этого удобно изобразить графически выписанную зависимость y от x (рис. 13.9, $\alpha = kT/n\mu_B^2 \nu$) и определить точки пересечения гиперболической тангенсоиды и прямой. Мы видим, что при $x_0 = 0$ (т. е. при $H^{(e)} = 0$) помимо тривиального решения $y = x = 0$ возможно нетривиальное решение $y \neq 0$. Для этого необходимо, чтобы прямая $y = \alpha x$ образовывала с осью x угол, меньший угла наклона касательной к тангенсоиде при $x = 0$. Тангенс последнего равен 1; поэтому должно выполняться неравенство $kT/n\mu_B^2 \nu < 1$ или $T < T_C$, где

$$kT_C = n\mu_B^2 \nu.$$

Следовательно, и в отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнетик может обладать отличной от нуля намагниченностью — необходимо лишь, чтобы температура была ниже температуры Кюри. Но это есть основное свойство ферромагнетика, и оно объясняется, как мы видим, предположением о внутреннем молекулярном поле.

Более того, гипотеза молекулярного поля объясняет и другие свойства ферромагнетиков — поведение их при $T > T_C$ и скачок теплоемкости при $T = T_C$. Если $T > T_C$, то намагниченность, если нет внешнего поля, отсутствует. Поэтому при малом $H^{(e)}$ будет мала и величина M , и мы можем считать, что $y = \text{th } x \approx x$. Таким образом, получаем уравнение $x = T/T_C (x - x_0)$, откуда

$$J = x = \frac{x_0}{T - T_C},$$

т. е. $M = \chi H$, где

$$\chi = \frac{n\mu^2_B}{k(T - T_C)}.$$

Мы пришли к закону Кюри — Вейсса.

Покажем, что гипотеза молекулярного поля приводит к скачку теплоемкости ферромагнетика при $T = T_C$. При изменении внешнего поля $H^{(e)}$ на величину $dH^{(e)}$ производится работа, равная $-MdH^{(e)}$ (работа отнесена к единице объема). Молекулярное поле $H_W = \nu M$ можно рассматривать как внешнее поле. Поэтому при

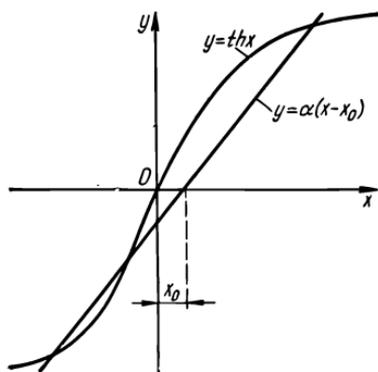


Рис. 13.9

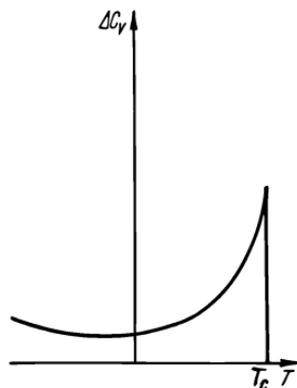


Рис. 13.10

его изменении на dH_W совершается работа $-MdH_W = -M\nu dM$. Если ферромагнетик не обменивается теплом с окружающей средой, то эта работа равна изменению плотности энергии w ферромагнетика при намагничении

$$dw = -M\nu dM = -d\left(\frac{\nu}{2} M^2\right).$$

Производная от w по T определяет теплоемкость c_V при постоянном объеме. Поэтому величина

$$\Delta c_V = \frac{\nu}{2} \frac{d}{dT} M^2$$

определяет изменение теплоемкости ферромагнетика при его намагничении. В отсутствие внешнего поля M обращается в нуль при $T > T_C$. Поэтому величина Δc_V при $H^{(e)} = 0$ испытывает скачок при $T = T_C$ (рис. 13.10). Если $T \rightarrow 0$, то из уравнения Вейсса следует, что

$$M = n\mu_B \left(1 - 2e^{-\frac{2T_C}{T}}\right).$$

Но это соотношение не подтверждается опытом: как указывалось выше, при $T \ll T_C$ справедливо соотношение

$$M = n\mu_B \left[1 - \gamma \left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}\right],$$

где γ — численная константа. Отсюда следует, что гипотеза молекулярного поля, объясняя основные черты ферромагнетизма, в первую очередь наличие спонтанного намагничения при $H^{(e)} = 0$, не может, однако, считаться полностью адекватной в области низких температур.

Оценим молекулярное поле $H_W = \nu M$. Полагая $n\mu_B \equiv \equiv M_\infty \equiv 1700$ Гс и $T_C \approx 10^3$ К, найдем $\nu \approx 10^4$ и, следовательно, $H_W \sim \sim \nu M_\infty \sim 1,5 \cdot 10^7$ Гс. Мы получили колоссальное поле, величину которого нельзя объяснить элементарным механизмом магнитного взаимодействия спиновых магнитных моментов. Величина H_W соответствует обменному взаимодействию, энергия которого определяется электростатической энергией взаимодействия электронов.

§ 13.4. ФЕРРОМАГНЕТИЗМ МЕТАЛЛОВ

Мы видели, что ферромагнетизм возникает благодаря обменному взаимодействию магнитных электронов (например, в случае железа — d -электронов). Это обменное взаимодействие мы описывали как взаимодействие спинового магнитного момента электрона с некоторым фиктивным магнитным полем — обменным полем Вейсса $H_W = \nu_W M$ (во избежание путаницы с плотностью электронных состояний $\nu(\epsilon)$ обозначим здесь коэффициент через ν_W). Сами же магнитные электроны при этом трактовались как (неподвижные) магнитные моменты с энергией $\mu_B H_W$ или $-\mu_B H_W$ в зависимости от направления спина электрона: по полю или против поля.

В действительности электроны в кристалле не неподвижны и обладают энергией $\epsilon(\mathbf{p})$, где \mathbf{p} — квазиимпульс. При этом допустимые значения энергии представляют собой не отдельные уровни (как в случае изолированного атома), а энергетические зоны конечной ширины. В металлах одна или несколько энергетических зон заполнены лишь частично; в частности, во многих ферромагнетиках, в том числе в металлах группы железа, частично заполнены две зоны: так называемые s - (зона проводимости) и d -зоны; но именно d -электроны ответственны за ферромагнитный порядок в металлах группы железа. Поэтому, чтобы понять, как возникает ферромагнетизм этих металлов, необходимо проследить поведение

в обменном поле Вейсса не отдельных магнитных моментов, а электронов частично заполненной энергетической зоны. (Впервые такая задача была рассмотрена Стонером.)

Если в отсутствие полей энергия электрона была $\varepsilon(\mathbf{p})$, то в эффективном поле $\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + \mathbf{H}_W$, складывающемся из внешнего поля \mathbf{H} и (параллельного ему) обменного поля \mathbf{H}_W , она станет равной $\varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{p}) \equiv \varepsilon(\mathbf{p}) + \mu_B H$ или $\varepsilon_{\downarrow}(\mathbf{p}) \equiv \varepsilon(\mathbf{p}) - \mu_B H^*$, в зависимости от того, по полю или против поля направлен спин электрона. Электроны подчиняются статистике Ферми — Дирака; поэтому их распределение по квазимпульсам имеет вид

$$f_{\uparrow}(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_{\uparrow}(\mathbf{p}) - \varepsilon_0}{kT}} + 1}, \quad f_{\downarrow}(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_{\downarrow}(\mathbf{p}) - \varepsilon_0}{kT}} + 1},$$

где T — температура, ε_0 — химический потенциал. Умножая n_{\uparrow} на $(-\mu_B)$, а n_{\downarrow} — на μ_B и суммируя по всем электронам единицы объема, получаем магнитный момент единицы объема металла:

$$M = \mu_B \int \{f_{\downarrow}(\mathbf{p}) - f_{\uparrow}(\mathbf{p})\} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Ширина энергетической зоны d -электронов больше, чем обменная энергия (отнесенная к одному электрону) $\mu_B H_W$. В случае никеля, например, ширина d -зоны больше, чем $\mu_B H_W$, на целый порядок. Обычно $\mu_B H_W \sim 0,01 \div 0,1$ эВ; величина $\mu_B H$ в реальных полях много меньше (даже если $H \sim 100$ кЭ, то $\mu_B H \sim 0,001$ эВ), поэтому энергия $\mu_B H^* = \mu_B (H_W + H)$ имеет тот же порядок величины, что энергия $\mu_B H_W$, и мала по сравнению с шириной d -зоны. Мы можем, таким образом, разложить интеграл в выражении для M в ряд по степеням $\mu_B H^*$. При этом нужно учитывать, что от величины $(\mu_B H^*)^2$ зависит и химический потенциал ε_0 : он определяется плотностью d -электронов:

$$n_d = \int \{f_{\downarrow}(\mathbf{p}) + f_{\uparrow}(\mathbf{p})\} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3},$$

а плотность d -электронов для каждого металла постоянная величина. Таким образом,

$$M = -2\mu_B^2 H^* \int f' \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} + \mu_B \left\{ -2(\mu_B H^*)^3 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial (\mu_B H^*)^2} \int f'' \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} - \frac{2}{3!} (\mu_B H^*)^3 \int f''' \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \right\},$$

где f' , f'' и f''' — первая, вторая и третья производные от фермиевской функции распределения по энергии. При температуре, равной нулю, $f(\mathbf{p}) = 1$, если $\varepsilon < \varepsilon_F$, и $f(\mathbf{p}) = 0$, если $\varepsilon > \varepsilon_F$; поэтому интеграл от $(-2f')$ сводится просто к плотности уровней на Ферми-

поверхности $\nu(\epsilon_F)$ (числу уровней, приходящихся вблизи Ферми-поверхности на единичный интервал энергии; коэффициент 2 связан с двумя возможными ориентациями спина электрона). При конечной температуре этот интеграл несколько меньше — на величину, пропорциональную квадрату ширины размытия Ферми-ступеньки $(kT/\epsilon_F)^2$:

$$\int (-2f') \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \nu(\epsilon_F) \left[1 - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right].$$

Выражение в фигурных скобках в последней формуле для M пропорционально кубу эффективного поля H^* ; его можно представить в виде

$$- \xi \mu_B^2 H^* \nu(\epsilon_F) \left(\frac{\mu_B H^*}{\epsilon_F} \right)^2,$$

где ξ — положительный множитель порядка единицы (зависящий от вида энергии электрона $\epsilon(\mathbf{p})$ как функции квазимпульса \mathbf{p}).

Учитывая, что $H_W = \nu_W M$ и оставляя лишь линейное по H (но не по H_W !) слагаемое, получаем

$$\begin{aligned} M \left\{ \mu_B \nu_W \nu(\epsilon_F) \left[1 - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right] - 1 \right\} = \\ = \xi \mu_B \nu_W \nu(\epsilon_F) M \left(\frac{\mu_B \nu_W M}{\epsilon_F} \right)^2 - \mu_B \nu(\epsilon_F) H. \end{aligned}$$

Положим сперва внешнее поле равным нулю. Получающееся уравнение для момента M имеет тривиальное решение $M = 0$, соответствующее парамагнитному состоянию, и нетривиальное решение

$$M = \frac{\epsilon_F}{\nu_W \mu_B \xi^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{\nu_W \mu_B \nu(\epsilon_F)} - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right\}^{1/2},$$

соответствующее ферромагнитному состоянию. Чтобы нетривиальное решение было возможно хотя бы при $T = 0$, необходимо выполнение неравенства

$$\nu_W \nu(\epsilon_F) \mu_B > 1.$$

Это неравенство называется критерием Стонера. Мы видим, что чем больше плотность уровней d -электронов, тем вероятнее возникновение ферромагнетизма.

Выражение для магнитного момента удобно представить в виде

$$M = M_0 \sqrt{1 - \frac{T^2}{T_C^2}},$$

где

$$M_0 = \frac{\epsilon_F}{\nu_W \mu_B \xi^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{\nu_W \mu_B \nu(\epsilon_F)} \right\}^{1/2};$$

$$T_C = \frac{6}{\pi^2} \frac{\epsilon_F^2}{k^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\nu_W \mu_B \nu(\epsilon_F)} \right\}.$$

Таким образом, магнитный момент убывает с температурой по закону $M \sim \sqrt{1 - T^2/T_C^2}$; именно такая зависимость $M(T)$ наблюдалась при низких температурах у железа и никеля (только при очень низких температурах эта зависимость должна замениться законом Блоха: $(M_0 - M) \sim T^{3/2}$. Температура T_C имеет, очевидно, смысл температуры Кюри.

Теперь учтем магнитное поле H . При этом уравнение для магнитного момента удобно переписать в виде

$$\left(\frac{M}{M_0}\right)^3 - \left(\frac{M}{M_0}\right)\left(1 - \frac{T^2}{T_C^2}\right) = 2\chi_0 \frac{H}{M_0},$$

где χ_0 — магнитная восприимчивость при $T = 0$:

$$\chi_0 = \frac{\frac{1}{2} \mu_B \nu (\epsilon_F)}{\mu_B \nu \nu (\epsilon_F) - 1}.$$

Это соотношение, связывающее плотность магнитного момента M , магнитное поле H и температуру T , называется изотермой Вольфарта. Теоретически оно справедливо как в ферромагнитном, так и в парамагнитном состоянии, лишь бы выполнялось условие $T \ll \ll T_F$. В некоторых веществах, например в соединении $ZrZn_2$, отклонений от изотермы Вольфарта не наблюдалось даже при температурах, значительно больших температуры Кюри.

§ 13.5. ОБМЕННАЯ ЭНЕРГИЯ

Вернемся к обменному взаимодействию электронов в ферромагнетике (d -электронов в железе), обуславливающему корреляцию в направлениях спинов электронов. Взяв сумму обменных энергий всех пар электронов, найдем общую обменную энергию ферромагнетика:

$$W_e = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{J}_{ij} s_i s_j,$$

где s_i — спин i -го электрона; \mathcal{J}_{ij} — обменный интеграл между i -м и j -м электронами (наличие множителя $1/2$ объясняется тем, что каждую пару электронов нужно учитывать один раз). Обменный интеграл \mathcal{J} для двух электронов, принадлежащих соседним атомам, определяет молекулярное поле Вейсса H_W и температуру Кюри T_C ферромагнетика:

$$\mu_B H_W \sim T_C \sim \mathcal{J}$$

(например, для железа $kT_C \approx 2\mathcal{J}$).

Считая спины s_i классическими векторами, можно переписать обменную энергию ферромагнетика в виде

$$W_e = -\frac{1}{2} s^2 \sum_{i,j} \mathcal{J}_{ij} \cos \varphi_{ij}.$$

где φ_{ij} — угол между s_i и s_j . Так как $\mathcal{J}_{ij} > 0$, то минимуму энергии W_e , т. е. энергии основного состояния ферромагнетика, соответствует одинаковая ориентация всех спинов $\varphi_{ij} = 0$. При малых углах φ_{ij} превышение энергии (обменной) над энергией основного состояния определяется формулой

$$\delta W_e = \frac{1}{4} s^2 \sum_{ij} \mathcal{J}_{ij} \varphi_{ij}^2.$$

Если ориентации спинов электронов неодинаковы, то вектор намагниченности \mathbf{M} имеет разную ориентацию в разных местах ферромагнетика, хотя абсолютное значение его будет повсюду одинаковым. Поэтому изменения вектора \mathbf{M} при $T \ll T_C$ сводятся к его вращениям относительно намагниченности M_0 , соответствующей основно-



Рис. 13.11

му состоянию. При малых поворотах φ , очевидно, $\delta M = |\mathbf{M} - \mathbf{M}_0| \approx M_0 \varphi$ (рис. 13.11), т. е. угол поворота пропорционален отклонению \mathbf{M} относительно \mathbf{M}_0 . Отсюда следует, что φ_{ij} — линейная функция разности векторов $\delta \mathbf{M}(\mathbf{r}_i) - \delta \mathbf{M}(\mathbf{r}_j) \equiv \mathbf{M}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{M}(\mathbf{r}_j)$, где $\mathbf{M}(\mathbf{r}_i)$ — намагниченность в точке \mathbf{r}_i . Величина $\mathcal{J}_{ij} \equiv \mathcal{J}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ быстро уменьшается с ростом $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, поэтому основной вклад в сумму W_e вносят пары электронов соседних атомов. Но в этом случае $\mathbf{M}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{M}(\mathbf{r}_j) \approx (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{M}(\mathbf{r})$, т. е. φ_{ij} — линейная функция $\text{grad } \mathbf{M}(\mathbf{r})$.

Поэтому δW_e будет квадратичной функцией пространственных производных $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Так, отнесенное к единице объема изменение обменной энергии при возникновении неоднородного намагничивания (оно называется плотностью энергии магнитной неоднородности) для ферромагнитного кристалла кубической симметрии (например, железа) имеет вид

$$\delta W_e = \frac{\alpha}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2 \right\},$$

где α — константа, пропорциональная \mathcal{J} , которая называется константой неоднородного обменного взаимодействия; по порядку величины $\alpha \sim k T_C a^2 / \mu_B^2 n$ (n — число магнитных электронов в единице объема).

§ 13.6. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОЙ АНИЗОТРОПИИ

Как мы видим, параллельной ориентации спинов всех электронов соответствует минимум обменной энергии ферромагнетика. Однако эта ориентация может быть произвольной, так как с точки зрения обменной энергии все направления эквивалентны — в выражение для W_e входят только скалярные произведения спинов, зависящие от углов между спинами. В соответствии с этим минимуму плотности обменной энергии W_e соответствует однородная намагниченность, но направление \mathbf{M} энергией W_e не определяется.

Между тем однородная намагниченность ферромагнитного кристалла \mathbf{M} имеет вполне определенное направление даже в отсутствие внешнего поля (в § 13.1 мы называли это направление направлением легчайшего намагничивания). Это значит, что разным направлениям \mathbf{M} (абсолютное значение \mathbf{M} неизменно) должны соответствовать различные значения энергии ферромагнитного кристалла — полной энергии, составной частью которой является обменная энергия, не зависящая от направления \mathbf{M} . Направлению же легчайшего намагничивания должен соответствовать минимум энергии. Чтобы понять это явление — явление магнитной анизотропии, следует учесть, что электроны, ответственные за ферромагнетизм, движутся во внутрикристаллическом электрическом поле \mathbf{E} . Благодаря этому электрон испытывает действие магнитного поля $\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{vE}]$, где \mathbf{v} — скорость электрона, и, следовательно, обладает в этом поле энергией

$$- m_s \mathbf{H} = 2\mu_B \mathbf{s} [\mathbf{vE}],$$

где $m_s = -2\mu_B \mathbf{s}$ — спиновый магнитный момент электрона. Эта энергия зависит от ориентации спина электрона \mathbf{s} по отношению к внутрикристаллическому электрическому полю \mathbf{E} . Взяв сумму этих энергий для всех электронов, получим добавочную (по отношению к обменной энергии) энергию ферромагнитного кристалла, зависящую, очевидно, от ориентации вектора \mathbf{M} относительно поля \mathbf{E} , а следовательно, и относительно кристаллографических осей ферромагнетика. Эта энергия называется энергией магнитной анизотропии.

Легко оценить величину энергии магнитной анизотропии. Заметим, что $E \sim e^2/a$, где a — длина порядка постоянной атомной решетки. Кроме того, $\hbar/a \sim m_e v$, где v — скорость атомного электрона. Поэтому

$$m_s H \sim \frac{v^2}{c^2} \frac{e^2}{a}.$$

Но $\frac{e^2}{a}$ — это порядок величины обменной энергии для двух соседних электронов. Поэтому энергия магнитной анизотропии составляет по порядку величины $(v/c)^2$ от обменной энергии. При $v \sim 10^8$ см/с отношение обеих энергий по порядку величины равно 10^{-4} . Энергия магнитной анизотропии зависит от направления вектора намагниченности \mathbf{M} относительно кристаллографических осей

ферромагнетика. Для одноосных кристаллов, например кристаллов кобальта, принадлежащего к гексагональной симметрии, энергия анизотропии является функцией угла θ между \mathbf{M} и гексагональной осью. Если ввести плотность энергии магнитной анизотропии W_a , то для кобальта ее приближенно можно записать в виде

$$W_a = K \sin^2 \theta,$$

где K — некоторая величина, не зависящая от угла θ , но зависящая от температуры и от упругих напряжений, действующих в кристалле. При комнатной температуре константа K для кобальта равна $4 \cdot 10^6$ эрг/см³.

Для кристаллов кубической симметрии, например железа,

$$W_a = K_1 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) + K_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — направляющие косинусы вектора \mathbf{M} относительно ребер куба; K_1 и K_2 — константы. При комнатной температуре для железа $K_1 = 4,2 \cdot 10^5$ эрг/см³, $K_2 = 1,5 \cdot 10^5$ эрг/см³. Мы видим, что для железа энергия анизотропии на порядок меньше, чем для кобальта.

Несмотря на относительно малую величину энергии магнитной анизотропии, она играет существенную роль, так как именно в результате ее существования в кристалле устанавливается вполне определенное направление спонтанного магнитного момента \mathbf{M} ферромагнетика — направление, соответствующее минимуму энергии магнитной анизотропии. Это направление называется направлением легкого намагничения, а направление, в котором энергия анизотропии максимальна, — направлением тяжелого намагничения. В кристалле кобальта, например, гексагональная ось представляет собой направление легкого намагничения. В кристалле железа есть три направления легкого намагничения — направления ребер куба (они обозначаются в кристаллографии через [100], [010], [001]). Направления пространственных диагоналей ([111] и др.) представляют собой направления тяжелого намагничения. В кристаллах никеля, относящегося также к кубической симметрии, направлениями легкого намагничения являются диагонали квадратных граней куба.

§ 13.7. МАГНИТОСТРИКЦИЯ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Константа K , входящая в выражение энергии магнитной анизотропии, зависит не только от температуры, но и от упругих напряжений, а следовательно, и от упругих деформаций в ферромагнетике. Образуется своеобразная магнитоупругая связь, которая проявляется в том, что при намагничивании тела в нем возникает упругая деформация. Этот эффект называется магнитострикцией (ср. § 12.7).

Упругую деформацию можно характеризовать относительными удлинениями в разных направлениях. Если взять в теле какую-

либо точку с координатами x, y, z , то в результате упругой деформации координаты этой точки станут следующими:

$$x' = (1 + u_{xx})x + \frac{1}{2}u_{xy}y + \frac{1}{2}u_{xz}z;$$

$$y' = \frac{1}{2}u_{yx}x + (1 + u_{yy})y + \frac{1}{2}u_{yz}z;$$

$$z' = \frac{1}{2}u_{zx}x + \frac{1}{2}u_{zy}y + (1 + u_{zz})z.$$

Величины $u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots$, определяющие относительные удлинения по разным направлениям, и характеризуют упругую деформацию. Эти величины называют тензором деформации; компоненты его симметричны, т. е. $u_{xy} = u_{yx}$ и т. д.

Если взять теперь в теле какой-либо отрезок l , направление которого определяется направляющими косинусами $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, то относительное изменение длины отрезка в результате деформации определяется формулой

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_{ij} \beta_i \beta_j.$$

Упругая энергия деформированного тела также определяется u_{ij} — плотность упругой энергии w_u является квадратичной функцией u_{ij} . Например, в случае кубических кристаллов

$$w_u = \frac{1}{2} c_{11} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + \frac{1}{2} c_{44} (u_{xy}^2 + u_{yz}^2 + u_{zx}^2) + c_{12} (u_{yy}u_{zz} + u_{xx}u_{zz} + u_{xx}u_{yy}),$$

где c_{11}, c_{44}, c_{12} — некоторые константы, называемые модулями упругости; величина их порядка 10^{12} эрг/см³.

От тензора деформации зависят и константы анизотропии K , причем в первом приближении изменение величины K при деформации пропорционально тензору деформации. В результате при деформации энергия анизотропии получает приращение, являющееся линейной функцией компонент тензора u_{ij} . Это приращение называется магнитоупругой энергией. Плотность этой энергии w_{mi} для кристаллов кубической симметрии

$$w_{mi} = B_1 (\alpha_1^2 u_{xx} + \alpha_2^2 u_{yy} + \alpha_3^2 u_{zz}) + B_2 (\alpha_1 \alpha_2 u_{xy} + \alpha_2 \alpha_3 u_{yz} + \alpha_3 \alpha_1 u_{zx}),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — направляющие косинусы вектора \mathbf{M} ; B_1 и B_2 — некоторые константы, называемые магнитоупругими. Для железа $B_1 = -2,9 \cdot 10^7$ эрг/см³, $B_2 = 3,2 \cdot 10^7$ эрг/см³.

Сложив w_u и w_{mi} , мы найдем ту часть энергии ферромагнетика (точнее, ее плотности), которая зависит от тензора деформации. Если бы намагничение равнялось нулю, то минимуму этой энергии соответствовали бы нулевые значения тензора деформации. При намагничении кристалла они уже не будут нулевыми, т. е.

при намагничении должна возникнуть деформация. Возникающее таким образом удлинение образца — магнитострикционное удлинение — определяется формулой

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{3}{2} \lambda_1 \left(\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2 - \frac{1}{3} \right) + 3\lambda_2 (\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3),$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — направляющие косинусы рассматриваемого отрезка ферромагнетика; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — направляющие косинусы вектора намагниченности; λ_1 и λ_2 — стрикционные константы. Они связаны с константами B_1, B_2 и c_{11}, c_{12}, c_{44} соотношениями

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3} \frac{B_1}{c_{11} - c_{12}}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3} \frac{B_2}{c_{44}}.$$

Для железа $\lambda_1 = 19,5 \cdot 10^{-6}$, $\lambda_2 = -18,8 \cdot 10^{-6}$.

§ 13.8. МАГНИТНАЯ ЭНЕРГИЯ ФЕРРОМАГНЕТИКА

В предыдущих параграфах мы считали, что внешнее магнитное поле отсутствует. Пусть теперь ферромагнетик находится во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}^{(e)}$. Тогда, как мы знаем, при изменении поля на $d\mathbf{H}^{(e)}$ совершается работа — $\mathbf{M}d\mathbf{H}^{(e)}$ (работа отнесена к единице объема). Поскольку \mathbf{M} практически не зависит от поля, то при изменении поля от нуля до $\mathbf{H}^{(e)}$ совершается работа — $\mathbf{M}\mathbf{H}^{(e)}$. Если ферромагнетик не обменивается теплом с окружающей средой, то эта величина представляет собой изменение энергии ферромагнетика \mathcal{W}_H , обусловленное внешним полем:

$$\mathcal{W}_H = -\mathbf{M}\mathbf{H}^{(e)}$$

(энергия отнесена к единице объема).

От энергии во внешнем поле $\mathbf{H}^{(e)}$ следует отличать магнитную энергию ферромагнетика, связанную с собственным магнитным полем $\mathbf{H}^{(m)}$, которое создается спиновыми магнитными моментами электронов ферромагнетика. Плотность этой энергии можно представить в виде

$$\mathcal{W}_M = \frac{1}{8\pi} (H^{(m)})^2$$

или

$$\mathcal{W}_M = -\frac{1}{2} \mathbf{M}\mathbf{H}^{(m)}.$$

По сравнению с формулой для \mathcal{W}_H сюда входит добавочный множитель $1/2$.

Если ферромагнетик намагничен однородно, т. е. вектор \mathbf{M} не зависит от координат, то поле $\mathbf{H}^{(m)}$ не будет в общем однородным. Только в случае, когда ферромагнетик имеет форму эллипсоида, из однородности \mathbf{M} вытекает однородность $\mathbf{H}^{(m)}$ внутри эллипсоида

(см. § 12.2). При этом компоненты $\mathbf{H}^{(m)}$ будут линейными функциями \mathbf{M} :

$$\mathbf{H}_i^{(m)} = -4\pi \sum_{j=1}^3 N_{ij} M_j,$$

где i, j — декартовы координаты; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и N_{ij} — компоненты тензора размагничивания. Отсюда следует, что плотность магнитной энергии в ферромагнитном эллипсоиде имеет вид

$$\mathcal{W}_M = 2\pi \sum_{i,j=1}^3 N_{ij} M_i M_j.$$

Если вектор \mathbf{M} направлен вдоль одной из главных осей эллипсоида x_i , то вдоль нее будет направлено и поле $\mathbf{H}^{(m)}$. В этом случае

$$\mathbf{H}^{(m)} = -4\pi N_i \mathbf{M},$$

где N_i — размагничивающие факторы. Прибавляя к $\mathbf{H}^{(m)}$ внешнее поле $\mathbf{H}^{(e)}$, получаем полное внутреннее поле в ферромагнетике:

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)} - 4\pi N_i \mathbf{M}.$$

Плотность магнитной энергии внутри ферромагнетика определяется суммой плотностей:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_H + \mathcal{W}_M &= -\mathbf{H}^{(e)} \mathbf{M} - \frac{1}{2} \mathbf{H}^{(m)} \mathbf{M} = \\ &= -\mathbf{H}^{(e)} \mathbf{M} + 2\pi N_i M^2. \end{aligned}$$

§ 13.9. ДОМЕННАЯ СТРУКТУРА ФЕРРОМАГНЕТИКОВ

В § 13.1 отмечалось, что у ферромагнетиков при ничтожном изменении поля возможен переход от нулевой к спонтанной M_s намагниченности. Это указывает на то, что ферромагнетик состоит из отдельных соприкасающихся макроскопических участков — доменов, каждый из которых обладает намагниченностью M_s , но эти намагниченности имеют разную ориентацию, так что намагниченность всего образца в отсутствие поля равна нулю.

Покажем, что доменная структура ферромагнетика в отсутствие внешнего магнитного поля обладает меньшей энергией, чем состояние с однородным намагничиванием. Связано это с уменьшением магнитной энергии образца в случае, если он имеет доменную структуру. На рис. 13.12, а, соответствующему однодоменному образцу, изображены магнитные силовые линии вне кристалла, которые можно считать создаваемыми «магнитными зарядами» на верхней и нижней поверхностях кристалла. Энергия этого поля велика, и ясно, что для двухдоменной структуры, когда образец состоит из двух половинок с противоположно ориентированными векторами намагниченности (рис. 13.12, б), магнитное поле кристалла меньше и соответственно магнитная энергия будет умень-

шена по сравнению с энергией однодоменного образца примерно в два раза. В случае четырехдоменной структуры (рис. 13.12, в) уменьшение энергии будет еще больше — примерно в четыре раза; при структуре, содержащей N доменов, — примерно в N раз. Можно представить домены другой формы и другого взаимного расположения, например домены, изображенные на рис. 13.12, г, д. На рис. 13.12, г наряду с двумя прямоугольными доменами имеются еще два домена в виде треугольных призм, расположенных у границ образца. Их намагниченности перпендикулярны намагниченностям прямоугольных доменов. Благодаря присутствию этих доменов не возникает «магнитных полюсов» на поверхностях образца; поэтому вне образца не образуется магнитное поле и магнитный

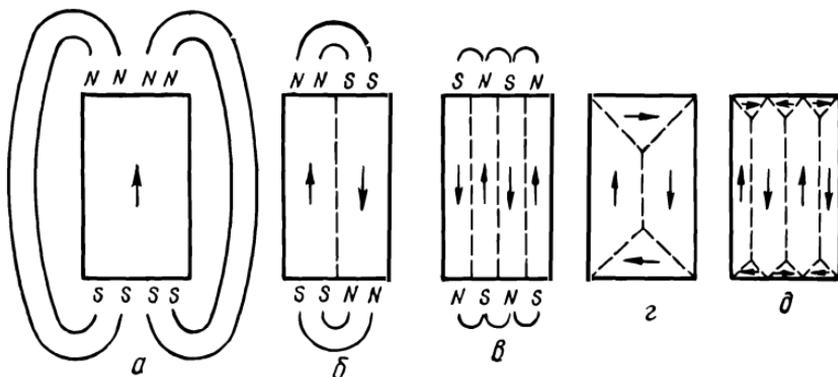


Рис. 13.12

поток замыкается внутри кристалла. Такие же домены («домены замыкания») имеются и в структуре, изображенной на рис. 13.12, д.

Следовательно, можно представить себе много типов доменных структур, которые приводят к уменьшению магнитной энергии, и на первый взгляд кажется, что чем больше доменов, тем структура энергетически выгоднее. Однако в действительности это не так, потому что кроме магнитной энергии нужно учитывать еще и обменную энергию, которая минимальна в случае однородного намагничивания. Между тем при переходе от домена к домену происходит резкое изменение направления намагничивания (на рис. 13.12, б, в — на 180°), что должно приводить к большому увеличению обменной энергии. Это видно из выражения $-\frac{1}{2}s^2 \sum_{ij} \mathcal{J}_{ij} \cos \varphi_{ij}$ для

обменной энергии, согласно которому резкий поворот спинов на угол 180° энергетически невыгоден; напротив, энергетически выгоднее, чтобы поворот спинов происходил постепенно.

Таким образом, энергетически выгодно, чтобы между двумя соседними доменами существовал граничный слой (он называется стенкой Блоха), в котором угол между направлениями соседних спинов был бы мал и только угол между спинами по обе стороны граничного слоя был бы равен 180° . Действительно, повороту двух спинов друг относительно друга на угол φ соответствует

дополнительная обменная энергия $\frac{1}{4}s^2\mathcal{J}\varphi^2$ (угол φ считается малым). Если между этими спинами поместить N спинов, так что поворот между каждыми двумя соседними спинами будет происходить на угол φ/N , то обменная энергия двух соседних спинов станет равной $\frac{1}{4}s^2\mathcal{J}(\varphi/N)^2$, а суммарная обменная энергия N спинов будет пропорциональна $\mathcal{J}s^2\varphi^2/N$, т. е. будет в N раз меньше, чем энергия, соответствующая резкому непосредственному повороту спинов на угол φ . Эту ситуацию разъясняет рис. 13.13, на котором изображен постепенный поворот спинов в стенке Блоха, содержащей N атомных слоев.

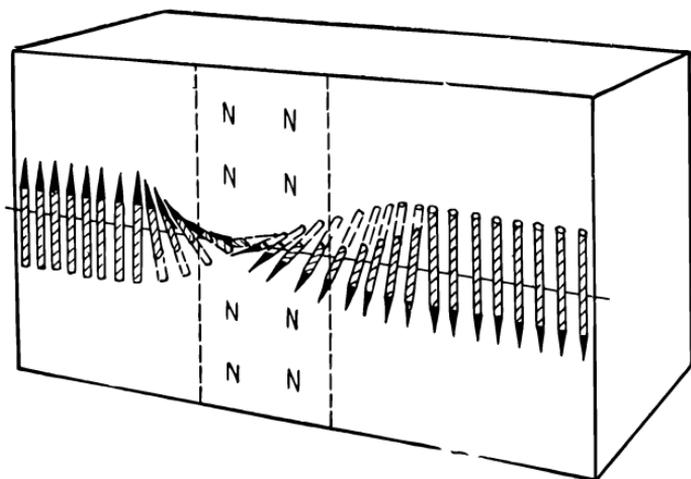


Рис. 13.13

Возникает теперь вопрос, чему равно число N ? Чтобы найти N , нужно учесть не только обменную энергию, но и энергию магнитной анизотропии. Вычислим суммарную энергию σ (обменную энергию и энергию магнитной анизотропии) стенки Блоха, приходящуюся на единицу ее площади. Для каждой цепочки из N атомов вдоль толщины стенки (рис. 13.14) обменная энергия равна $\frac{\pi^2}{4}\mathcal{J}s^2/N$. Таких цепочек приходится на единицу площади a^{-2} . Поэтому обменная энергия равна $\frac{\pi^2}{4}\mathcal{J}s^2/Na^2$. Если, далее, энергия магнитной анизотропии, приходящаяся на единицу объема, равна K , то энергия, приходящаяся на единицу площади слоя, равна KNa . Поэтому

$$\sigma = \frac{\pi^2\mathcal{J}s^2}{4Na^2} + KNa.$$

Эта величина является функцией N и достигает, очевидно, минимума при

$$N = \left(\frac{\pi^2\mathcal{J}s^2}{4Ka^3} \right)^{1/2}.$$

Соответствующая ширина слоя

$$\delta = Na = a \left(\frac{\pi^2 \mathcal{J} S^2}{4Ka^3} \right)^{1/2}.$$

Учитывая, что $\mathcal{J} \sim kT_C$, а $K \sim 10^6$ эрг/см³, находим $\delta \sim 300 a \sim 1000 \text{ \AA}$.

Энергию слоя, приходящуюся на единицу его площади, можно трактовать как поверхностную энергию ферромагнитного домена. Она определяется формулой

$$\sigma_W = 2\pi \left(\frac{\mathcal{J} K S^2}{a} \right)^{1/2}.$$

Для железа $\sigma \sim 1$ эрг/см².

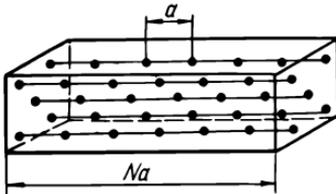


Рис. 13.14

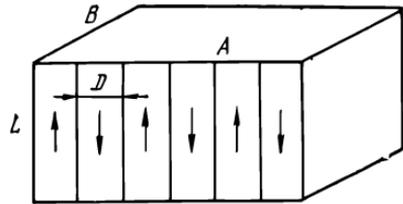


Рис. 13.15

Вернемся к вопросу о доменной структуре ферромагнетика. Чтобы определить, сколько должно возникнуть доменов предполагаемой нами конфигурации, следует найти суммарную энергию ферромагнетика, с учетом поверхностной энергии доменов, и минимизировать ее относительно числа доменов или параметров, характеризующих их вид и расположение. Рассмотрим, например, доменную структуру, изображенную на рис. 13.15. Число доменов определим из условия минимума энергии ферромагнетика, которая складывается из магнитной и поверхностной энергий доменов. Магнитная энергия ферромагнетика определяется общей формулой

$$\mathcal{W}_M = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} dV,$$

где $\mathbf{H}^{(m)}$ — собственное магнитное поле, порождаемое намагниченностью \mathbf{M} (вектор \mathbf{M} изменяет свое направление от домена к домену, как показано на рис. 13.15); интегрирование совершается по всему объему ферромагнетика. Как видно из формулы, достаточно знать поле $\mathbf{H}^{(m)}$ только внутри ферромагнетика. Здесь оно при большем числе доменов сосредоточено в основном вблизи верхней и нижней границ тела, причем внутрь поле $\mathbf{H}^{(m)}$ простирается на глубину порядка D , т. е. порядка ширины домена (эта ситуация аналогична ситуации с экранирующей сеткой — там электрическое поле проникало вглубь на расстояние порядка размеров ячейки). Поле в приграничной области близко к $-M$. Поэтому магнитная энергия

$$\mathcal{W}_M \sim 2M_0^2 DAB,$$

где A и B — размеры сечения ферромагнетика, перпендикулярного вектору намагничивания. (Коэффициент 2 обусловлен двумя границами ферромагнетика; точный расчет дает коэффициент, равный 1,7.)

Поверхностная энергия равна энергии блоховской стенки $\sigma_w L B$; умноженной на число поверхностей раздела, которое равно A/D . Таким образом, вся энергия ферромагнетика определяется формулой

$$W = \sigma_w \frac{L}{D} AB + 2M_0^2 DAB.$$

Это выражение нужно минимизировать по D . Условие минимума, как легко видеть, имеет вид $\sigma_w L/D = 2M_0^2 D$, откуда

$$D = \left(\frac{\sigma_w L}{2M_0^2} \right)^{1/2}.$$

При $L = 1$ см, считая, что $\sigma_w \sim 2$ эрг/см² и $M \sim 10^3$ Гс, получаем $D \sim 10^{-3}$ см. Напомним, что ширина блоховской стенки δ порядка 10^{-5} см, так что $\delta \ll D$, как и должно быть, чтобы понятие домена имело смысл.

Энергия доменной структуры при оптимальной ширине домена записывается в виде

$$W_D = \omega S, \quad \omega = 2 \left(\frac{2M_0^2 \sigma_w}{L} \right)^{1/2},$$

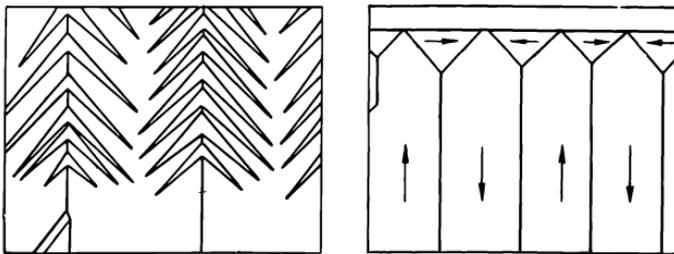


Рис. 13.16

где $S = AB$. При $L = 1$ см $\omega \sim 7 \cdot 10^3$ эрг/см², в то время как в однодоменном кристалле энергия ферромагнетика равнялась бы примерно $M^2 LS$, что при $M \sim 10^3$ Гс и $L = 1$ см в 10^3 раз больше энергии W_D . Таким образом, образование доменов приводит к значительному уменьшению энергии ферромагнетика*.

Отметим, что размеры домена D зависят от размеров тела L , причем $D \sim L^{1/2}$. Это значит, что размер домена не есть какая-то фундаментальная длина. При достаточно малых толщинах ферро-

* Идея существования доменов принадлежит Вейссу. Поверхностную энергию домена нашел Ф. Блох. Термодинамическую теорию доменов создали Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц.

магнетика (тонкие пленки с $L \sim 10^{-6}$ см) D будет порядка L . В этом случае образование доменов энергетически уже не выгодно, и поэтому они не будут образовываться. Не следует полагать, что домены должны обязательно иметь форму, изображенную на рис. 13.15. Это только простейший случай (который, впрочем, осуществляется). Возможны и более сложные структуры, в частности структура, приведенная на рис. 13.12, z .

Для экспериментального наблюдения доменов широко используется метод нанесения на ферромагнетик тонкого слоя коллоидной суспензии очень мелких ферромагнитных частиц. Эти частицы располагаются вдоль границ между доменами, и, наблюдая частицы через микроскоп, можно, таким образом, видеть границу доменов. На рис. 13.16 изображены некоторые из наблюдаемых картин.

§ 13.10. КРИВАЯ НАМАГНИЧЕНИЯ ФЕРРОМАГНЕТИКА

Выясним характер кривой намагничения ферромагнетика, т. е. природу коэрцитивной силы. Так как спонтанная намагниченность M_s практически не зависит от напряженности внешнего поля $H^{(e)}$ (она зависит только от температуры), то в случае однодоменного образца кривая намагничения имеет вид прямой, параллельной оси $H^{(e)}$ (рис. 13.17). Это значит, что «хитрые» гистерезисные кривые с необратимой зависимостью M от $H^{(e)}$ являются следствием существования доменов. При включении внешнего поля ферромагнетик приобретает добавочную энергию $-MH^{(e)}$. Поэтому при включении внешнего поля структура доменов не будет такой же, как в отсутствие поля. Если при $H^{(e)} = 0$ среднее на-

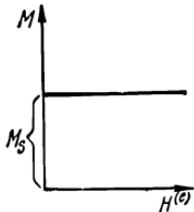


Рис. 13.17

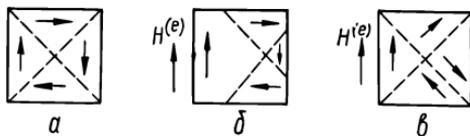


Рис. 13.18

магничение по доменам равно нулю, то при $H^{(e)} \neq 0$ эта величина уже не равна нулю, причем она зависит от величины и направления приложенного поля. Зависимость такого среднего по доменам намагничения от внешнего поля и изображает кривая намагничения.

Характер этой зависимости определяется двумя основными процессами: ростом одних доменов за счет других, точнее, смещением границы между доменами и вращением векторов спонтанной намагниченности M_s . Рис. 13.18 иллюстрирует оба процесса. На рис. 13.18, a изображен ненамагниченный образец ферромагнетика, состоящий в отсутствие внешнего поля из четырех доменов, спонтанные намагничения которых направлены друг относительно друга под углами $\pi/2$ и π и в сумме дают нуль. На рис. 13.18, $б$ изображена изменившаяся доменная структура при включенном внеш-

нем поле. Здесь вырос домен с намагниченностью, параллельной полю; объемы остальных доменов уменьшились. Поэтому образец в этом поле будет обладать отличным от нуля M . Рис. 13.18, θ соответствует намагничению образца благодаря вращению векторов спонтанной намагниченности доменов по направлению к $H^{(e)}$. В области слабых полей главную роль играет первый из указанных процессов, т. е. изменение намагниченности образца происходит вследствие смещения границ между доменами и роста одних доменов за счет других. Напротив, в сильных полях намагничение обусловлено главным образом вращением векторов спонтанной намагниченности M_s .

При слабых полях движение границы происходит обратимо, т. е. при увеличении поля — в одну сторону, а при уменьшении —

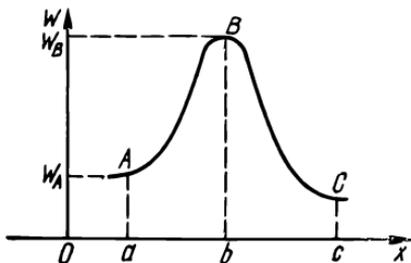


Рис. 13.19

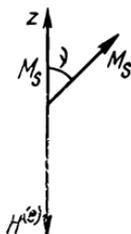


Рис. 13.20

в обратную. Однако в области более сильных полей это движение становится необратимым. Энергия ферромагнитного образца зависит от положения доменной границы, а эта зависимость может носить немонокотонный характер в основном из-за примесей и внутренних напряжений. Схематически зависимость энергии образца W от положения доменной границы x изображена на рис. 13.19, на котором точка $x = a$ соответствует положению границы в отсутствие поля. В этом состоянии образец обладает минимумом энергии W_A . Если теперь включить поле, то при его увеличении граница домена будет двигаться вправо; до тех пор, пока она достигнет точки $x = b$, соответствующей максимуму W_B , движение границы будет обратимым; при уменьшении поля она вернется в точку $x = a$.

Предположим теперь, что доменную границу надо сместить в точку $x = c$. Для этого, очевидно, следует включить сильное поле, чтобы добавочная энергия образца в поле $M_s H^{(e)}$ была достаточной для прохождения через потенциальный барьер, соответствующий максимуму W_B . Именно, необходимо, чтобы выполнялось условие $M_s H^{(e)} \geq W_B - W_A$ (объем образца считается равным единице).

Но пусть граница доменов достигла точки $x = c$, и мы хотим, уменьшая поле, вернуть ее в исходное положение $x = a$. Нам очевидно, это не удастся, так как на пути границы будет стоять потенциальный барьер. Нужно опять получить от внешнего поля добавочную энергию, равную $M_s H^{(e)} = W_B - W_C$, для того чтобы преодолеть этот барьер.

Таким образом, движение границы будет необратимым, причем величина $(W_B - W_C)/M_s$ представляет собой коэрцитивную силу.

Зависимость энергии ферромагнитного образца от положения доменной границы, изображенная на рис. 13.18, соответствует, как уже указывалось, случаю, когда в ферромагнетике есть примеси и внутренние напряжения, причем максимум кривой тем выше, чем больше примесей и внутренних напряжений. Поэтому коэрцитивная сила тем больше, чем больше в ферромагнетике примесей (особенно велика она в случае сплавов).

Однако необратимое движение доменной границы — не единственный механизм возникновения коэрцитивной силы. Он относится только к «мягким» ферромагнетикам, т. е. к ферромагнетикам, обладающим малой коэрцитивной силой. В ферромагнетиках с большой коэрцитивной силой — «твердых» ферромагнетиках — действует другой механизм, связанный с вращением векторов намагничивания отдельных однодоменных зерен, из которых состоит «твердый» ферромагнетик.

Выясним процесс намагничивания отдельного зерна. Пусть вначале магнитный момент зерна M_s направлен вдоль оси легкого намагничивания z (рис. 13.20). Для перемагничивания зерна, т. е. для ориентировки его магнитного момента вдоль отрицательной оси z , к зерну следует приложить внешнее магнитное поле $\mathbf{H}^{(e)}$, направленное вдоль отрицательной оси z . Но не при любом значении поля магнитный момент переориентируется. Действительно, если момент повернется на угол ϑ , то его энергия в поле $H^{(e)}$ уменьшится и станет равной $-\mathbf{M}\mathbf{H}^{(e)} = M_s H^{(e)} \cos \vartheta$, а энергия анизотропии увеличится и станет равной $K \sin^2 \vartheta$ (для простоты ферромагнетик предполагается одноосным и объем его считается равным единице). Поэтому суммарная энергия зерна определяется формулой

$$\omega = K \sin^2 \vartheta + M_s H^{(e)} \cos \vartheta.$$

Рассмотрим ω как функцию ϑ . Для этого введем обозначение $H_c = 2K/M_s$ и перепишем ω в виде

$$\omega = \frac{1}{2} M_s H_c (\sin^2 \vartheta + 2\xi \cos \vartheta),$$

где $\xi = H/H_c$. В случае малых полей, когда $\xi < 1$, кривая, изображающая зависимость ω от ϑ , имеет вид, представленный на рис. 13.21. Кривая при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ обладает двумя минимумами, а при $\vartheta = \vartheta_0$, где $\cos \vartheta_0 = \xi$, — максимумом, высота которого превосходит $\omega(0)$ на величину

$$\omega(\vartheta_0) - \omega_0 = \frac{1}{2} M_s H_c (1 - \xi)^2.$$

Энергию $\omega(\vartheta)$ следует рассматривать как потенциальную энергию вращающегося момента \mathbf{M}_s . Мы видим, что это вращение происходит как бы в поле с потенциальным барьером, высота которого равна $\frac{1}{2} M_s H_c (1 - \xi)^2$. Этот барьер и мешает переориентации момента, т. е. переходу из потенциальной ямы, соответствующей исходному состоянию $\vartheta = 0$, в потенциальную яму, соответствующую

щую состоянию $\vartheta = \pi$. Такой переход при заданном $H^{(e)}$, т. е. при заданном ξ , может быть осуществлен за счет какого-либо добавочного источника энергии, но у нас его нет. Зато мы можем, увеличив достаточно поле, просто уничтожить барьер. Действительно, высота барьера обращается в нуль при $\xi = 1$, т. е. при $H^{(e)} = H_c$. При таком поле состояние $\vartheta = \pi$ будет обладать меньшей энергией, чем состояние $\vartheta = 0$, и поэтому момент перейдет в состояние $\vartheta = \pi$, т. е. произойдет его поворот на 180° . Это достигается при поле, равном H_c , и, следовательно, величина $H_c = 2K/M_s$ определяет коэрцитивную силу нашего зерна. Кривая намагниченности зерна, очевидно, имеет вид, изображенный на

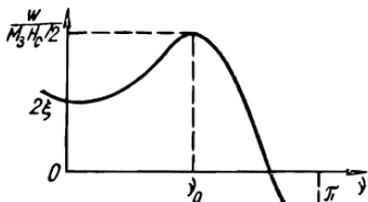


Рис. 13.21

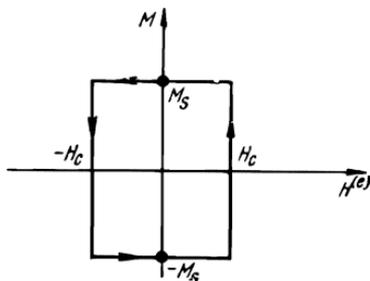


Рис. 13.22

рис. 13.22. Это простейшая прямоугольная гистерезисная петля с коэрцитивной силой, пропорциональной константе анизотропии K .

§ 13.11. СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ

В § 12.3 мы видели, что магнитный момент \mathbf{m} во внешнем поле \mathbf{H} будет прецессировать — вращаться — по закону

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = g [\mathbf{mH}],$$

где g — гиромангнитное отношение; если магнитный момент имеет спиновую природу, то $g = \frac{e}{m_e c}$. В ферромагнетике магнитные моменты электронов находятся под действием эффективного поля \mathbf{H}^* ; поэтому прецессия i -го момента должна описываться уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{m}_i}{\partial t} = g [\mathbf{m}_i \mathbf{H}_i^*],$$

где \mathbf{H}_i^* — эффективное поле, действующее на i -й момент. Если моменты всех атомов параллельны друг другу, то \mathbf{H}^* в отсутствие внешнего поля совпадает с обменным полем Вейсса: $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}_W = \nu n \mathbf{m}$, где n — число магнитных электронов в единице объема.

Мы видим, что при однородном распределении намагниченности все магнитные моменты параллельны эффективному полю, поэтому векторные произведения $[\mathbf{m}_i \mathbf{H}_i^*]$ обращаются в нуль и моменты не прецессируют.

Найдем эффективное поле, если направление намагниченности медленно изменяется в пространстве. При этом рассматриваем моменты как классические векторы и представим обменную энергию взаимодействия электрона i -го атома с электронами всех остальных атомов в виде

$$U = - \sum_j \mathcal{J}_{ij} s_i s_j = - \frac{1}{\mu_B} \sum_j \mathcal{J}_{ij} m_i m_j.$$

Обменный интеграл \mathcal{J} быстро падает с расстоянием; поэтому в сумме по j достаточно учесть лишь ближайших соседей i -го атома. Пусть направление магнитных моментов \mathbf{m} медленно изменяется вдоль оси x (для простоты ось x совпадает с одной из кристаллографических осей). Тогда если ввести энергию обменного взаимодействия электрона i -го атома с остальными электронами для однородного распределения моментов

$$U_0 = \sum_j \mathcal{J}_{ij} m^2,$$

то

$$U = U_0 - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{J}}{\mu_B} (m_i m_{i+1} + m_i m_{i-1} - 2m_i^2),$$

где $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{i, i+1} = \mathcal{J}_{i, i-1}$ — обменный интеграл между ближайшими соседями и $j = i - 1$, $j = i + 1$ — ближайшие соседи i -го атома в направлении оси x .

Если направление \mathbf{m} медленно изменяется от атома к атому, то можно считать, что \mathbf{m} — непрерывная функция координат, а m_i — значение этой функции в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$, где расположен i -й атом, $m_i = m(\mathbf{r}_i)$. Тогда

$$m_{i+1} = m + \frac{\partial m}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} a^2 + \dots,$$

$$m_{i-1} = m - \frac{\partial m}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} a^2 - \dots,$$

где a — постоянная решетки. Поэтому

$$U = U_0 - \frac{1}{2} \mathcal{J} a^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} m.$$

Таким образом, в случае неоднородного распределения магнитных моментов к энергии U_0 электрона i -го атома прибавляется слагаемое

$$\delta U = - \frac{1}{2} \mathcal{J} a^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} m.$$

Энергия магнитного момента \mathbf{m} в поле \mathbf{H}'

$$\delta U = -\mathbf{m}\mathbf{H}',$$

Следовательно, выражение

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{\mu_B} \mathcal{J} a^2 \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2}$$

и представляет собой эффективное поле магнитной неоднородности, т. е. обусловленную неоднородностью распределения намагничения добавку к обменному полю.

Если теперь сложить уравнения прецессии отдельных магнитных моментов по очень малому, но макроскопическому объему, получим уравнение вращения вектора плотности магнитного момента \mathbf{M} :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = g [\mathbf{M}\mathbf{H}'].$$

Эффективное поле \mathbf{H}' окажется пропорциональным второй пространственной производной от вектора \mathbf{M} :

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathcal{J} a^2}{n\mu_B} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2} \equiv \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2}.$$

Величина α совпадает с введенной в § 13.5 постоянной неоднородного обменного взаимодействия.

Предположим теперь, что равновесное направление магнитного момента совпадает с осью z . Тогда от координат и времени зависят компоненты M_x и M_y . Если при этом M_x и M_y малы, то M_z будет незначительно отличаться от равновесной намагниченности M_0 :

$$M_z \approx M_0 \left(1 - \frac{M_x^2 + M_y^2}{2M_0^2} \right).$$

Поэтому векторное уравнение вращения магнитного момента можно представить в виде двух скалярных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial t} &= -gM_0\alpha \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial M_y}{\partial t} &= gM_0\alpha \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Если обозначить через M_{\perp} проекцию магнитного момента на плоскость, перпендикулярную M_0 (плоскость x, y), то при вращении магнитного момента длина вектора \mathbf{M} не изменяется, а сам вектор равномерно вращается. Таким образом, если $M_x = M_{\perp} \cos \varphi$ и $M_y = M_{\perp} \sin \varphi$, то во времени и пространстве изменяется угол φ , но не величина M_{\perp} . Такие колебания называют циркулярно поляризованными; поскольку $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, для их описания удобно

ввести вместо M_x и M_y величину $M_+ = M_x + iM_y$. Тогда вместо двух уравнений для M_x и M_y получаем одно уравнение

$$\frac{\partial M_+}{\partial t} = i\alpha g M_0 \frac{\partial^2 M_+}{\partial x^2}.$$

Ищем решение этого уравнения в виде плоской волны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} :

$$M_+ \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Подстановка этого выражения в уравнение для M_+ приводит к следующей зависимости частоты спиновой волны от волнового вектора:

$$\omega(k) = \alpha g M_0 k^2.$$

Таким образом, отклонение магнитного момента от равновесного направления распространяется в ферромагнетике в виде особого типа колебаний, частота которых квадратично зависит от волнового вектора. Эти колебания называются спиновыми волнами (их существование было теоретически установлено Ф. Блохом)

Каждому колебанию с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} сопоставляется частица с энергией $\varepsilon = \hbar\omega$ и импульсом $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$; например, звуковым волнам сопоставляются фононы, у которых $\varepsilon = sp$ (s — скорость звука). Аналогично спиновой волне сопоставляется частица, называемая магноном. Для магнона, очевидно,

$$\varepsilon = \alpha g M_0 p^2 / \hbar.$$

Мы видели, что у многих ферромагнетиков намагниченность при нуле температур равна максимальному возможному значению $M_\infty = \mu_e n$, где n — число магнитных электронов в единице объема. При очень низких температурах намагниченность уменьшается с ростом температуры вследствие того, что из-за тепловых колебаний магнитные моменты случайно отклоняются от равновесия. Но такие отклонения обязательно распространяются в виде спиновых волн (магнонов); поэтому уменьшение намагниченности пропорционально числу тепловых магнонов — спиновых волн, возникающих благодаря тепловым колебаниям магнитных моментов.

Определим число тепловых магнонов. Магноны подобно фононам подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, поэтому их распределение описывается планковской функцией

$$N(p) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} - 1}$$

(здесь k_B — постоянная Больцмана). Таким образом, число магнонов в единице объема

$$N_m = \int \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} - 1} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Если вместо энергии ввести безразмерную переменную $x = \varepsilon/k_B T$, то импульс p будет пропорционален \sqrt{T} ; поэтому интеграл в выражении для N_m пропорционален $T^{3/2}$. Иными словами, плотность тепловых магнонов возрастает с температурой как $T^{3/2}$; по такому же закону возрастает разность $M_\infty - M_s$:

$$\frac{M_\infty - M_s}{M_\infty} \sim T^{3/2}.$$

Мы получили закон Блоха (см. § 13.1, 13.3) для температурной зависимости намагниченности.

§ 14.1. ДИАМАГНЕТИЗМ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Как указывалось, ряд чистых металлов, а также металлических сплавов при достаточно низких температурах находится в особом состоянии — состоянии сверхпроводимости, которое характеризуется полным отсутствием электрического сопротивления. Связано это явление с тем, что в сверхпроводниках происходит компенсация кулоновских сил отталкивания электронов друг от друга силами притяжения, обусловленными обменом фононом между электронами. Такая компенсация (она происходит в некотором интервале квазиимпульсов) приводит к возникновению своеобразной корреляции между электронами. Появляются как бы связанные электронные пары, которые беспрепятственно движутся в кристалле, так что течению тока, если уже оно началось, ничто не мешает.

Однако сверхпроводники характеризуются не только отсутствием электрического сопротивления. Они обладают еще другим замечательным свойством: магнитное поле внутри сверхпроводников равно нулю, т. е. $\mathbf{B} = 0$. Поэтому сверхпроводники можно назвать абсолютными диамагнетиками.

Равенство нулю магнитного поля в сверхпроводниках тесно связано с отсутствием электрического сопротивления. Действительно, представим себе, что сверхпроводник вносится во внешнее магнитное поле. Тогда, если бы магнитное поле проникало в сверхпроводник, то по крайней мере в начальный момент времени производная от поля по времени была бы положительной, т. е. величина \mathbf{B} была бы отличной от нуля. Но в таком случае согласно закону электромагнитной индукции в сверхпроводнике возникло бы электрическое поле \mathbf{E} . Так как электроны в сверхпроводнике движутся, не испытывая сопротивления, то сколь угодно малое поле \mathbf{E} вызвало бы сколь угодно большой ток. Индуцируемый ток, как мы знаем, направлен всегда так, чтобы ослабить причину, вызывавшую его, т. е. так, чтобы собственное магнитное поле тока было направлено против внешнего магнитного поля. При этом ток будет нарастать до тех пор, пока не произойдет полной компенсации полей, т. е. пока магнитное поле внутри проводника не обратится в нуль. Ток же в сверхпроводнике обязательно сохранится (без источника внешней ЭДС), так как его протекание необходимо для выполнения закона $\mathbf{B} = 0$.

Таким образом, внешнее магнитное поле не может проникнуть в сверхпроводник, точнее, в глубь сверхпроводника, поскольку,

в действительности, как мы скоро увидим, в тонком поверхностном слое сверхпроводника поле будет отлично от нуля.

До сих пор мы не упоминали о величине внешнего магнитного поля. Между тем его величина очень существенна. Только достаточно слабые поля не проникают внутрь сверхпроводников, сильное же поле разрушает сверхпроводимость, после чего проникает в металл, перешедший в нормальное состояние.

Граничное поле, начиная с которого разрушается сверхпроводимость (оно называется критическим магнитным полем и обозначается через H_c), зависит от температуры и уменьшается с ее по-

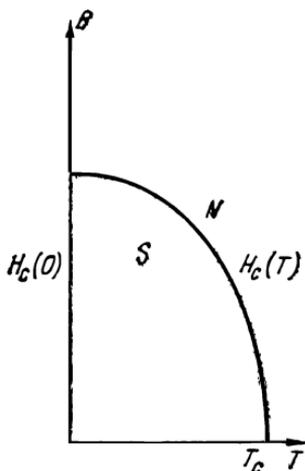


Рис. 14.1

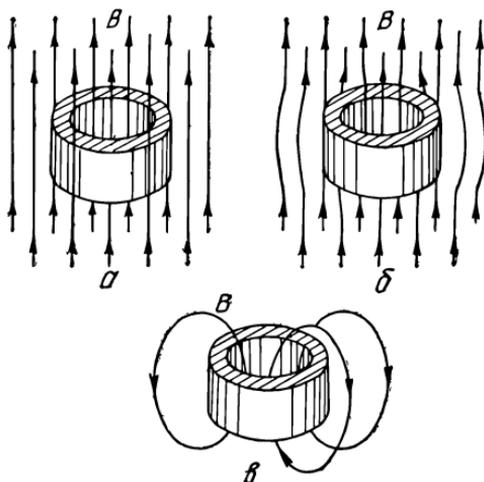


Рис. 14.2

вышением. При температуре перехода T_c поле H_c обращается в нуль. Ход зависимости $H_c(T)$ показан на рис. 14.1. Кривая $H_c(T)$ разделяет плоскость (B, T) на две части, из которых S соответствует сверхпроводящему, а N — нормальному состоянию, т. е. S соответствует сверхпроводящей, а N — нормальной фазе; вдоль кривой $B = H_c(T)$ обе фазы могут сосуществовать. Приблизительно зависимость H_c от T квадратична:

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - T^2/T_c^2\right).$$

Для ряда металлов T_c и $H_c(0)$ имеют следующие значения:

	Zn	Cd	Al	Ga	In	Ti	Sn	Pb
$H_c(0)$, Гс	53	30	99	51	283	162	306	803
T_c	0,88	0,56	1,19	1,09	3,41	1,37	3,72	7,18

Мы видим, что металлам с большей температурой сверхпроводящего перехода соответствует большее критическое магнитное поле.

Не следует полагать, что соотношение $\mathbf{B} = 0$ означает лишь невозможность проникновения достаточно слабого внешнего магнитного поля в глубь сверхпроводника, т. е. проводника, перешедшего в состояние сверхпроводимости до включения внешнего

магнитного поля. Можно поставить опыт и иначе, а именно взять нормальный проводник, создать в нем магнитное поле, и затем, охладив проводник, перевести его в сверхпроводящее состояние. Тогда оказывается, что магнитное поле будет вытолкнуто из сверхпроводника, т. е. внутри сверхпроводника снова будет выполняться соотношение $\mathbf{B} = 0$ (выталкивание магнитного поля из сверхпроводника называется эффектом Мейсснера).

Разъясним, как проявляется этот эффект на примере сверхпроводящего кольца. Поместим металлическое кольцо в нормальном состоянии во внешнее магнитное поле B (рис. 14.2, а). Затем охладим кольцо до температуры ниже критической. Тогда магнитное поле выталкивается из толщи кольца и силовые линии имеют вид, изображенный на рис. 14.2, б. Они проходят вне кольца и пронизывают отверстие кольца. Выключим внешнее поле, не изменяя температуры кольца. Легко видеть, что при этом поток Φ магнитного поля через отверстие в кольце не может измениться. Действительно, производная по времени от потока Φ равна циркуляции электрического поля по контуру, пронизываемому потоком Φ . Расположим контур внутри сверхпроводящего кольца. Так как внутри кольца $B = 0$, то поток, пронизывающий контур, совпадает с потоком Φ . Кроме того, электрическое поле на контуре, целиком находящемся в толще сверхпроводника, равно нулю. Поэтому производная от Φ по времени равна нулю, т. е. Φ — константа.

Иными словами, поток магнитного поля через отверстие в сверхпроводящем кольце не изменится при выключении внешнего поля. Это значит, что магнитные силовые линии, которые шли через отверстие, при включенном внешнем поле будут «заморожены» после выключения внешнего поля. Но «замороженные» линии должны быть замкнутыми. Картина поля после выключения внешнего поля имеет вид, изображенный на рис. 12.2, в.

Замкнутые силовые линии всегда связаны с токами. Поэтому по сверхпроводящему кольцу будет течь электрический ток, обеспечивающий постоянство магнитного потока через отверстие в сверхпроводящем кольце. Этот ток, как мы увидим далее, течет только в узком слое вблизи поверхности кольца.

Замечательным является факт, что магнитный поток Φ через отверстие в сверхпроводящем кольце может принимать только дискретные значения, а именно

$$\Phi = n\Phi_0,$$

где n — произвольное целое число, Φ_0 — «квант» магнитного потока,

$$\Phi_0 = \frac{c\hbar}{2e} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2.$$

§ 14.2. ТЕРМОДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Кривая $B = H_c(T)$ разделяет плоскость (B, T) на две части, из которых одна соответствует сверхпроводящей, а другая — нормальной фазе металла. Если поле и температура связаны между собой соотношением $B = H_c(T)$, то обе фазы будут сосуществовать, т. е. кривая $B = H_c(T)$ представляет собой кривую равновесия сверхпроводящей и нормальной фаз. По этой причине величина

критического магнитного поля является важнейшей характеристикой сверхпроводника.

Покажем прежде всего, что разность свободных энергий нормальной F_n и сверхпроводящей F_s фаз определяется критическим полем:

$$F_n(T) - F_s(T) = \frac{1}{8\pi} H_c^2(T)$$

($F_{n,s}$ — плотности свободной энергии). Представим, что цилиндр, сделанный из металла, который может находиться в сверхпроводящем состоянии, помещается в соленоид, по которому протекает постоянный ток I (см. рис. 14.3; для простоты считается, что радиус цилиндра совпадает с радиусом соленоида). Тогда свободная

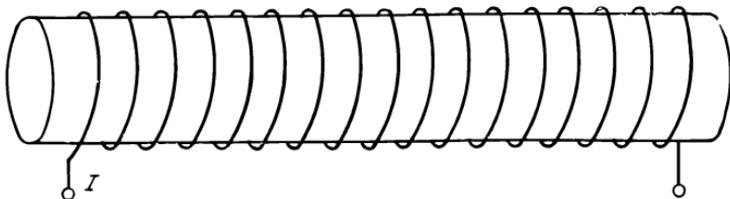


Рис. 14.3

энергия системы — цилиндр и поле, отнесенная к единице объема, очевидно, равна $F^{(1)} = F_n + \frac{1}{8\pi} B^2$, где $B = (4\pi/c)In$ — индукция в соленоиде (n — число витков на единице длины соленоида). Пусть теперь цилиндр переходит в сверхпроводящее состояние. Тогда плотность свободной энергии системы $F^{(2)} = F_s$, так как поле в сверхпроводящем цилиндре равно нулю. Предположим, что переход из нормального в сверхпроводящее состояние происходит при постоянной температуре, так что $B = H_c(T)$. Кроме того, полагаем, что сила тока в катушке не изменяется. Из условия постоянства температуры следует, что

$$F^{(1)} - F^{(2)} = A_{1 \rightarrow 2},$$

где $A_{1 \rightarrow 2}$ — работа, затрачиваемая при переходе $1 \rightarrow 2$, т. е. работа, которая совершается источником ЭДС, включенным в обмотку соленоида (работа должна быть отнесена к единице объема). Так как ток поддерживается неизменным, то, очевидно, $A_{1 \rightarrow 2} = I/c |\Phi_1 - \Phi_2|$, где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки, пронизывающие обмотку соленоида в состояниях 1 и 2. Поток в состоянии 2 равен нулю, так что $A_{1 \rightarrow 2} = I/c \Phi_1$. Учитывая, что $(4\pi/c)In = B$ и что поток, пронизывающий всю обмотку соленоида, равен $SBnl$ (l — длина соленоида), получаем

$$A_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi} H_c^2.$$

Поэтому

$$F^{(1)} - F^{(2)} = F_n + \frac{1}{8\pi} H_c^2 - F_s = \frac{1}{4\pi} H_c^2,$$

откуда и вытекает написанное выше соотношение для разности свободных энергий F_n и F_s .

С помощью этого соотношения можно найти разность энтропий нормальной и сверхпроводящей фаз, находящейся в равновесии. Используя общее соотношение $S = -(\partial F/\partial T)_B$, связывающее энтропию S со свободной энергией F , имеем

$$S_n(T) - S_s(T) = \frac{1}{4\pi} H_c(T) \frac{dH_c(T)}{dT}$$

(энтропии S_n и S_s относятся к единице объема). Как видно из рис. 14.1, $dH_c/dT < 0$; поэтому $S_n > S_s$, что и следовало ожидать, поскольку сверхпроводящая фаза отличается большим «порядком», чем нормальная фаза.

Умножая изменение энтропии на температуру, находим скрытую теплоту перехода $Q_{s \rightarrow n}$ из сверхпроводящей в нормальную фазу:

$$Q_{s \rightarrow n} = T(S_n - S_s) = -\frac{T}{4\pi} H_c \frac{dH_c}{dT}.$$

Правая часть этого равенства положительна вдоль осей кривой перехода $B = H_c(T)$, кроме точки $T = T_c$, где обращается в нуль критическое поле. Это значит, что при переходе из сверхпроводящего состояния в нормальное в присутствии магнитного поля поглощается тепло, т. е. такой переход является фазовым переходом первого рода. В отсутствие поля сверхпроводящий переход (при $T = T_c$) не сопровождается ни поглощением, ни выделением тепла, т. е. является фазовым переходом второго рода.

Если при переходе из сверхпроводящего в нормальное состояние проводник теплоизолирован, то его температура будет понижаться. Как указывалось в § 5.12, при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние теплоемкость металла испытывает скачок. Этот скачок также может быть связан с критическим магнитным полем. Вспомним соотношение

$$C = \frac{dQ}{dT} = T \frac{dS}{dT},$$

связывающее теплоемкость с энтропией. Учитывая, что $S_n - S_s = -\frac{1}{4\pi} H_c dH_c/dT$, находим скачок теплоемкости в точке перехода:

$$C_n - C_s = \left[T \frac{d}{dT} (S_n - S_s) \right]_{T=T_c} = -\frac{1}{4\pi} \left[T \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 \right]_{T=T_c}.$$

Это соотношение (формула Рутгерса) подтверждается экспериментально с точностью, превышающей 1%.

§ 14.3. ГЛУБИНА ПРОНИКНОВЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СВЕРХПРОВОДНИК

Хотя в толще сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$, не следует считать, что если сверхпроводник вносится во внешнее магнитное поле, то на границе сверхпроводника поле будет испытывать резкий скачок.

В действительности, поле по мере продвижения в глубь сверхпроводника уменьшается постепенно, но уже на сравнительно небольшой глубине становится очень малым. Эффективная глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник составляет примерно 500 \AA для таких металлов, как алюминий, олово, и достигает 2000 \AA для переходных металлов (ниобий, ванадий, тантал).

Покажем, как происходит затухание поля в сверхпроводнике. Но предварительно выясним, чем определяется электрический ток в сверхпроводнике. В нормальном проводнике плотность электрического тока пропорциональна электрическому полю. Ясно, что в сверхпроводнике такой связи не может быть, так как электроны в сверхпроводнике движутся без сопротивления, и поэтому даже бесконечно малое электрическое поле вызвало бы ток бесконечной силы. Это значит, что в сверхпроводнике плотность тока должна быть связана не с электрическим, а с магнитным полем. Но непосредственной линейной связи между плотностью электрического тока \mathbf{j} и магнитным полем \mathbf{B} так же не может быть, поскольку эти векторы имеют разную природу: вектор \mathbf{j} полярный, а вектор \mathbf{B} аксиальный. Полярным вектором является, как мы знаем, векторный потенциал \mathbf{A} , связанный с \mathbf{B} соотношением $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Поэтому в сверхпроводниках следует ожидать связи между величинами \mathbf{j} и \mathbf{A} — связи, естественно, линейной. Но непосредственный физический смысл имеет не векторный потенциал, а магнитное поле, так как к векторному потенциалу можно прибавить градиент любой скалярной функции, магнитное же поле, равное ротору векторного потенциала, при этом не изменяется. Поэтому можно с равным успехом пользоваться как векторным потенциалом \mathbf{A} , так и векторным потенциалом \mathbf{A}' , связанным с \mathbf{A} соотношением $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f$, где f — любая скалярная функция координат.

Какая же связь может существовать между вполне определенной плотностью сверхпроводящего тока \mathbf{j} и не полностью определенным векторным потенциалом \mathbf{A} ? Ответ следующий: сверхпроводящий ток определяется не только векторным потенциалом, но еще одной удивительной величиной — фазой потенциала спаривания электронов в сверхпроводнике. Мы не приводим здесь строгое определение потенциала спаривания. Заметим лишь, что существует такая величина — потенциал спаривания $\Delta(\mathbf{r})$, который определяет энергию связи пары электронов в сверхпроводнике. Эту величину можно записать в виде $\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta(\mathbf{r})| \exp(i\varphi(\mathbf{r}))$, где $\varphi(\mathbf{r})$ и есть фаза потенциала спаривания.

Если перейти от векторного потенциала \mathbf{A} к векторному потенциалу $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f$, то фаза потенциала спаривания изменится так, что величина

$$\mathbf{u} = \frac{\hbar}{2} \text{grad } \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

останется неизменной, т. е.

$$\frac{1}{2} \hbar \text{grad } \varphi' - \frac{e}{c} \mathbf{A}' = \frac{1}{2} \hbar \text{grad } \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A}.$$

Поэтому естественно предположить, что именно этой величине и пропорциональна плотность сверхпроводящего тока \mathbf{j} . Так как плотность тока должна быть пропорциональна плотности носителей заряда и их заряду и обратно пропорциональна их массе, то мы приходим к соотношению

$$\mathbf{j} = \frac{en_s}{m} \left(\frac{\hbar}{2} \text{grad } \varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right),$$

где n_s — плотность сверхпроводящих электронов, e и m — заряд и масса электрона. Это соотношение представляет собой простейшую линейную связь между векторами \mathbf{j} и \mathbf{A} . Простота заключается в том, что эта связь является локальной, т. е. векторы \mathbf{j} и \mathbf{A} , зависящие от положения, связываются между собой в одной и той же точке сверхпроводника.

Однако локальность связи сама по себе еще ни откуда не вытекает. Из общих соображений можно лишь утверждать, что при достаточно медленном изменении поля в пространстве связь должна быть локальной, вообще же она может быть и не локальной, т. е. ток в некоторой точке может определяться не только значением векторного потенциала в этой же точке, но и его значениями в соседних точках. Чтобы разобраться в этой ситуации, нужно понять, что означает медленность изменения поля. С этой целью мы сперва приведем все выводы, вытекающие из предположения о локальной связи, а затем вернемся к вопросу о нелокальности связи между векторами \mathbf{j} и \mathbf{A} .

Магнитное поле \mathbf{B} в сверхпроводнике связано с плотностью тока \mathbf{j} известным нам общим уравнением

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

в которое нужно подставить написанное выше выражение для \mathbf{j} . Так как в это выражение входит фаза потенциала спаривания, то желательно избавиться от нее. Это легко сделать, замечая, что $\text{rot grad } \varphi = 0$. Поэтому следует взять ротор от обеих частей написанного уравнения:

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}.$$

Так как $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, то мы приходим к уравнению, содержащему только одно магнитное поле:

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = -\frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2} \mathbf{B}.$$

Но $\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B}$, а $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Поэтому уравнение для \mathbf{B} приобретает вид

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B}, \quad \lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}}.$$

Это уравнение впервые установлено Ф. Лондоном и Г. Лондоном и называется уравнением Лондонов.

Легко найти решение уравнения Лондонов для случая, когда сверхпроводник занимает все полупространство $z > 0$ (рис. 14.4) и магнитное поле направлено вдоль границы сверхпроводника по оси x . Тогда уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} B$$

и имеет решение

$$B(z) = B(0) e^{-z/\lambda_L},$$

где B_0 — значение поля на границе сверхпроводника. (Уравнение допускает формально также решение, зависящее от z как $\exp z/\lambda_L$,

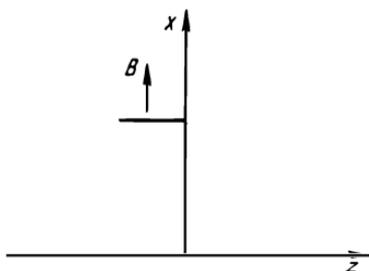


Рис. 14.4

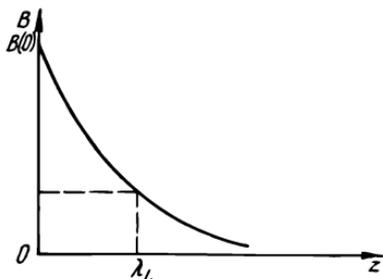


Рис. 14.5

но это решение должно быть отброшено, поскольку оно приводит к бесконечному полю при $z \rightarrow \infty$.)

Итак, мы пришли к выводу, что поле в сверхпроводнике экспоненциально убывает от границы и на глубине $z = \lambda_L$ уменьшается в e раз. Поэтому величину λ_L можно назвать глубиной проникновения поля (рис. 14.5). Так как ток пропорционален ротору поля, то на такую же глубину будет проникать и ток. Если поле направлено вдоль оси x , то, очевидно, плотность тока будет направлена вдоль оси y , причем

$$\frac{dB}{dz} = \frac{4\pi}{c} j,$$

откуда

$$j = \frac{c}{4\pi\lambda_L} B(0) e^{-z/\lambda_L}.$$

§ 14.4. СВЕРХПРОВОДНИКИ ДВУХ РОДОВ

Теперь вернемся к вопросу о том, что значит медленность изменения поля. Поле и ток в сверхпроводнике существенно изменяются на расстояниях порядка λ_L . Если эта величина (лондоновская глубина проникновения) велика по сравнению с другими характерными длинами, то поле можно считать изменяющимся медленно,

если же она мала по сравнению с другими длинами, возникающими в задаче, то поле нельзя считать изменяющимся медленно. Поэтому возникает вопрос, какие еще длины играют роль в проблеме сверхпроводимости

Мы рассматривали только массивные сверхпроводники, размеры которых значительно больше лондоновской глубины проникновения λ_L . Тогда единственной величиной, имеющей размерность длины и играющей роль в проблеме сверхпроводимости, будет «размер» пары электронов, связывающихся между собой вследствие обмена фононами. Эта величина, которую мы обозначим через ξ , тем меньше, чем больше энергия связи пары, т. е. потенциал спаривания $|\Delta|$, и тем больше, чем больше граничная фермиевская скорость v_F сверхпроводника. Оказывается, что

$$\xi = \frac{\hbar v_F}{\pi |\Delta|}.$$

Понять происхождение этой формулы можно, рассматривая, например, атом водорода. В этом случае уравнение движения электрона (если описывать движение классически) имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2},$$

где v и r — скорость электрона и радиус его орбиты. Присоединяя сюда условие квантования $mvr = \hbar$ и учитывая, что энергия электрона определяется формулой

$$\Delta = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r},$$

получаем

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad v = \frac{e^2}{\hbar}, \quad \Delta = -\frac{me^4}{\hbar^2},$$

откуда

$$r = \frac{\hbar v}{|\Delta|}.$$

Заменяя в этом выражении v на v_F , приходим к указанной выше формуле для ξ .

Итак, мы должны сравнить величины λ_L и ξ . Если $\lambda_L \gg \xi$, то можно считать поле медленно изменяющимся, если же $\lambda_L \lesssim \xi$, то этого полагать нельзя. В первом случае ($\lambda_L \gg \xi$) можно исходить из предположения о локальности связи между векторами \mathbf{j} и \mathbf{A} . Поэтому справедливо уравнение Лондонов. При $\lambda_L \lesssim \xi$ уравнение Лондонов не выполняется; вместо него должно быть получено другое уравнение, основанное на нелокальной связи между током и векторным потенциалом. Конкретно, если взять простые (непереходные) металлы — индий, свинец, олово, то для них $\lambda_L \approx 400 \div 700 \text{ \AA}$, а $\xi \approx 10^4 \text{ \AA}$, т. е. к таким металлам уравнение Лондонов неприменимо, и для описания эффекта Мейсснера требуется подход, основанный на нелокальности связи \mathbf{j} с \mathbf{A} . Напротив, в переходных металлах (ниобий, ванадий) и в интерметаллических соединениях

типа Nb_3Sn , V_3Ga лондоновская глубина велика, $\lambda_L \approx 2000 \text{ \AA}$, а параметр ξ мал ($\xi \approx 50 \text{ \AA}$), так что $\lambda_L \gg \xi$ и поэтому полностью справедливо уравнение Лондонов.

Сверхпроводники, для которых $\lambda_L \gg \xi$, называются сверхпроводниками второго рода (или лондоновскими), а сверхпроводники, для которых $\lambda_L < \xi$, — сверхпроводниками первого рода (пиппардовскими).

Разъясним характер нелокальной связи между плотностью тока и векторным потенциалом в сверхпроводниках первого рода. Рассмотрим массивный односвязный сверхпроводник (т. е. сверхпроводник не в виде кольца). Мы пользуемся векторным потенциалом \mathbf{A} , удовлетворяющим условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad A_n = 0,$$

где A_n — нормальная к поверхности сверхпроводника составляющая \mathbf{A} на границе сверхпроводника. Этими условиями векторный потенциал для односвязного сверхпроводника определяется однозначно по заданному магнитному полю, т. е. уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ для определения \mathbf{A} имеет одно единственное решение. Для массивного односвязанного сверхпроводника фазу φ потенциала спаривания можно считать постоянной (см. ниже). Поэтому в выражении для тока исчезает слагаемое, содержащее $\operatorname{grad} \varphi$, и для лондоновских сверхпроводников плотность тока определяется формулой

$$\mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{A}.$$

Здесь, как уже отмечалось, \mathbf{j} и \mathbf{A} относятся к одной и той же точке, и это соотношение справедливо только в случае, когда \mathbf{j} и \mathbf{A} медленно изменяются на расстоянии порядка ξ ($\lambda_L \gg \xi$). Если это условие не выполняется, то ток в какой-либо точке \mathbf{r} зависит от значений векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ во всех точках \mathbf{r}' , но в основном играют роль те точки \mathbf{r}' , расстояние от которых до точки \mathbf{r} меньше или порядка ξ , т. е. $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \lesssim \xi$. Этот эффект описывается следующей формулой:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = C \int (\mathbf{A}(\mathbf{r}') \mathbf{R}) \mathbf{R} \frac{e^{-R/\xi}}{R^4} d^3 r',$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, C — некоторая константа. Чтобы ее определить, представим себе, что $\xi \rightarrow 0$. Тогда величину $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ можно вынести за знак интеграла в точке $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ и мы получим уравнение Лондонов. Отсюда вытекает, что

$$C = -\frac{3n_s^2 e^2}{4\pi mc \xi}.$$

Входящий в формулу для тока (она называется формулой Пиппарда) экспоненциальный фактор $\exp(-R/\xi)$ «срезает» вклад далеких точек, а множитель R^4 в знаменателе «компенсирует» влияние двух множителей R в числителе и множителя R^3 , соответствующего величине объема интегрирования (более высокую степень R вводить в знаменатель нельзя, так как интеграл начнет расходиться при $R \rightarrow 0$).

Покажем теперь, как с помощью формулы Пиппарда оценить глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводники первого рода. Обозначим эту глубину в отличие от λ_L через λ_P . На расстояниях $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \sim \lambda_P$ потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ мало отличается от $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Если бы потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ не изменялся на больших расстояниях, порядка ξ (а не λ_P), то интеграл, определяющий плотность тока, сводился бы к формуле Лондонов $\mathbf{j} = -n_s e^2 / mc \mathbf{A}$. Но следует учитывать, что $\lambda_P \ll \xi$. Поэтому можно считать, что плотность тока уменьшится в ξ / λ_P раз. Таким образом; оцениваем плотность тока по формуле

$$\mathbf{j} = -\frac{n_s e^2 \lambda_P}{mc \xi} \mathbf{A}, \quad \lambda_P \ll \xi.$$

Теперь мы должны использовать это соотношение вместе с уравнением $\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi c \mathbf{j}$. Для геометрии, рассмотренной ранее (см. рис. 14.3), мы получим $B(z) = B(0) \exp(-z/\lambda_P)$, где λ_P определяется из уравнения

$$\lambda_P^{-2} = \frac{4\pi n_s e^2 \lambda_P}{mc^2 \xi},$$

откуда

$$\lambda_P = \lambda_L \left(\frac{\xi}{\lambda_L} \right)^{1/3} = \xi \left(\frac{\lambda_L}{\xi} \right)^{2/3}.$$

Мы видим, что

$$\lambda_L \ll \lambda_P \ll \xi.$$

Таким образом, глубина проникновения поля в сверхпроводник первого рода значительно больше лондоновской глубины проникновения, но тем не менее значительно меньше «размеров» пары.

До сих пор мы рассматривали односвязные сверхпроводники. Для них, как уже указывалось, можно считать фазу φ потенциала спаривания постоянной. Но для неодносвязных сверхпроводников такое предположение уже незаконно. Действительно, возьмем сверхпроводящее кольцо и рассмотрим внутри него некоторый произвольный замкнутый контур \mathcal{L} , лежащий далеко от поверхности кольца (рис. 14.6). На таком контуре плотность тока будет равна нулю, а поскольку плотность тока определяется величиной $\hbar/2g \text{grad } \varphi - e c \mathbf{A}$, то она равна нулю, т. е. на контуре \mathcal{L} справедливо равенство $A = c\hbar/2eg \text{grad } \varphi$. Возьмем теперь интеграл от этого выражения по контуру \mathcal{L} . Учитывая, что

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \Phi$$

представляет собой магнитный поток через поверхность, опирающуюся на контур \mathcal{L} , т. е. магнитный поток через отверстие в кольце, получаем

$$\Phi = \frac{c\hbar}{2e} \oint_{\mathcal{L}} d\varphi.$$

Таким образом, магнитный поток через отверстие в сверхпроводящем кольце пропорционален изменению фазы φ потенциала спаривания при обходе замкнутого контура \mathcal{L} . Если бы мы считали фазу постоянной, то поток Φ равнялся бы нулю, что не соответствует, как мы знаем, действительности. Это значит, что фаза должна обязательно входить в выражение для сверхпроводящего тока.

Кроме того, потенциал спаривания должен быть однозначной функцией координат. Отсюда следует, что изменение фазы при обходе замкнутого контура не может отличаться от кратного 2π , т. е.

$$\oint_{\mathcal{L}} d\varphi = 2\pi n,$$

где n — произвольное целое число.

Таким образом, мы приходим к замечательному результату:

$$\Phi = \frac{c\hbar}{2e} 2\pi n.$$

Иными словами, магнитный поток через отверстие в сверхпроводящем кольце всегда кратен некоторому элементарному потоку Φ_0 (см. § 14.1):

$$\Phi = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \pi \frac{c\hbar}{e}.$$

На этом факте основано очень точное измерение величины \hbar/e

§ 14.5. ПРОМЕЖУТОЧНОЕ СОСТОЯНИЕ

Сильное магнитное поле, как мы уже установили, разрушает сверхпроводимость. Это разрушение происходит независимо от того, каково происхождение поля, т. е. независимо от того, является ли поле внешним, или создается самим током, текущим в сверхпроводнике. Для существования сверхпроводимости поле не должно превышать некоторого критического значения, и это условие должно выполняться всюду. Но поле может быть различным в разных точках металлического проводника, поэтому может сложиться ситуация, когда в одних точках металла поле будет меньше критического поля H_c , а в других — больше H_c . Что же тогда произойдет? Полностью сверхпроводящим металлический проводник не может быть, но он не станет и полностью нормальным. Проводник разобьется на домены, одни из которых будут сверхпроводящими, а другие нормальными. Такое смешанное состояние проводника называется промежуточным.

Промежуточное состояние существенно определяется геометрией проводника, так как от нее зависит характер распределения магнитного поля. Если проводник в форме длинного цилиндра помещен во внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 , ориентированное вдоль оси цилиндра, то на всей поверхности цилиндра поле имеет одно и то же значение (в пренебрежении влиянием концов цилиндра). Поэтому, если поле H_0 не превышает критического значения H_c

(и температура ниже критической), весь цилиндр находится в сверхпроводящем состоянии. Но ситуация существенно изменится, если проводник имеет, например, форму шара. Действительно, пусть сверхпроводящая сфера находится в достаточно слабом внешнем магнитном поле H_0 . Тогда можно показать, что компонента поля, тангенциальная к поверхности сферы, определяется формулой

$$H_\theta = \frac{3}{2} H_0 \sin \theta,$$

где θ — полярный угол (рис. 14.7). Таким образом, поле на полю-

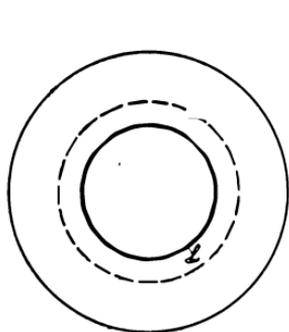


Рис. 14.6

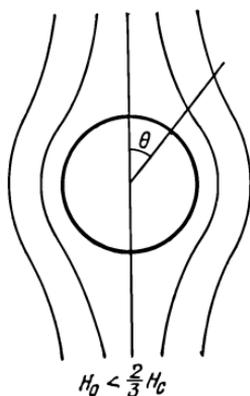


Рис. 14.7

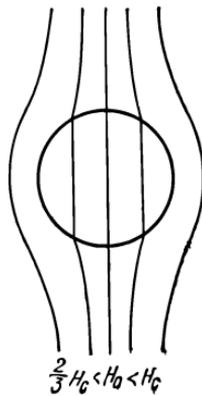


Рис. 14.8

сах сферы равно нулю, а на экваторе — $\frac{3}{2}H_0$. Пусть выполняется неравенство

$$\frac{2}{3}H_c < H_0 < H_c.$$

Тогда у экватора и близлежащих областей поле превосходит критическое поле H_c ; вблизи полюсов поле меньше H_c . Поэтому у экватора сверхпроводимость разрушится, а области вблизи полюсов будут сверхпроводящими (рис. 14.8).

Таким образом, в интервале полей $\frac{2}{3}H_c < H_0 < H_c$ сверхпроводящая сфера находится в промежуточном состоянии, в котором нормальные и сверхпроводящие области сосуществуют.

Еще более интересным примером является сверхпроводящая пластинка, которая помещена во внешнее магнитное поле, ориентированное перпендикулярно ее поверхности. В этом случае при любом поле H_0 , не превосходящем H_c , пластинка будет находиться в промежуточном состоянии. Действительно, пластинка не может находиться полностью в сверхпроводящем состоянии, так как при этом нарушалось бы условие непрерывности нормальной составляющей поля на поверхности пластинки — внутри пластинки поле равнялось бы нулю, а снаружи — H_0 . Не может пластинка нахо-

даться и полностью в нормальном состоянии — энергетически это невыгодно при $T < T_c$. Поэтому пластинка будет находиться в промежуточном состоянии, т. е. состоять из нормальных и сверхпроводящих доменов.

Можно предположить, что пластинка обладает ламинарной структурой типа, изображенного на рис. 14.9. Здесь N и S обозначают нормальные и сверхпроводящие домены, представляющие собой слои, перпендикулярные плоскости рисунка. Магнитные силовые линии проходят только через слои N , поэтому ввиду равновесия между областями N и S поле в областях N должно быть равно H_c (в областях S поле, естественно, равно нулю).

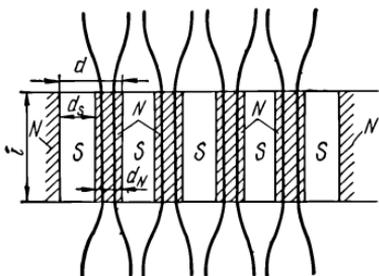


Рис. 14.9

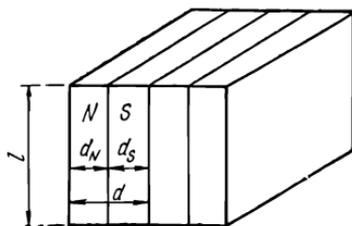


Рис. 14.10

Учтем теперь, что магнитный поток должен быть непрерывен на поверхности пластинки. Он равен, очевидно, снаружи пластинки SH_0 , где S — площадь поверхности пластинки, а внутри пластинки — $n(a d_n H_c + a d_S 0)$, где a — размер пластинки в направлении, перпендикулярном рисунку; d_n и d_S — толщины слоев N и S ; n — число слоев. Приравнявая эти выражения и учитывая, что $S = na(d_n + d_S)$, получаем

$$\delta_S \equiv \frac{d_S}{d_n + d_S} = 1 - \frac{H_0}{H_c}, \quad H_0 \leq H_c.$$

Эта формула определяет относительный размер сверхпроводящих доменов, который оказывается зависящим только от отношения полей H_0/H_c . (Величины d_S и d_n определяются экспериментальными методами; опыты показывают, что толщины слоев значительно меньше толщины пластинки l .)

Для определения абсолютных значений толщин слоев d_n и d_S нужно так же, как и при определении размеров доменов в ферромагнетике, рассмотреть полную энергию образца (точнее, свободную энергию) и выяснить, при каких условиях она имеет минимальное значение. При этом следует учитывать как энергию образца, которой он обладал бы в отсутствие поля и доменов, так и энергию магнитного поля в присутствии доменов, и, наконец, поверхностную энергию, связанную с существованием границы между сверхпроводящими и нормальными областями. Поверхностная энергия имеет особенно важное значение, так как она определяет толщину границы раздела между различными доменами, а эта толщина, в свою очередь, определяет размеры доменов.

Но существует еще одно более важное обстоятельство. Наше предложение о ламинарной структуре сверхпроводника в промежуточном состоянии основывается на предположении о положительности поверхностной энергии между доменами. Между тем это предположение необосновано и требуется специальное исследование характера поверхностной энергии. Анализ показывает, что сверхпроводники первого и второго родов существенно отличаются друг от друга своей поверхностной энергией. Только для сверхпроводников первого рода поверхностная энергия положительна; для сверхпроводников второго рода она отрицательна. Если обозначить поверхностную энергию (отнесенную к единице площади границы) через γ_i (индекс $i = 1, 2$ обозначает род сверхпроводника), то оказывается, что

$$\gamma_1 = \frac{H_c^2}{8\pi} \xi, \quad \gamma_2 = -\frac{H_c^2}{8\pi} \lambda_L,$$

где ξ — размер электронной пары, λ_L — глубина проникновения поля в сверхпроводник второго рода.

Таким образом, изображенная на рис. 14.8 ламинарная структура промежуточного состояния относится только к сверхпроводникам первого рода. Период этой структуры, т. е. величина $d = d_S + d_n$, существенно определяется поверхностной энергией $d \approx \sqrt{l\xi}$, где l — толщина пластинки (рис. 14.10).

§ 14.6. ВИХРЕВЫЕ НИТИ

Промежуточное состояние сверхпроводников второго рода не обладает простой ламинарной структурой (именно поэтому эти сверхпроводники и получили название сверхпроводников второго рода). Так как для них поверхностная энергия, связанная с границей раздела между нормальным и сверхпроводящим доменами, отрицательна, то эта граница должна быть максимально большой, т. е. области N и S должны быть подразделены очень мелко. Напротив, в сверхпроводниках первого рода граница между указанными областями должна быть минимальной.

Если лишь небольшая часть объема сверхпроводника второго рода находится в нормальном состоянии, а большая часть — в сверхпроводящем состоянии, то области N имеют вид не слоев, а нитей, которые называются вихревыми нитями. Структура изолированной вихревой нити в сверхпроводнике второго рода изображена на рис. 14.11. Здесь показаны конфигурации поля и тока, создаваемых нитью (рис. 14.11, *a*), изменение поля в зависимости от расстояния до центра нити (рис. 14.11, *б*) и зависимость плотности сверхпроводящих электронов от расстояния до оси нити (рис. 14.11, *в*). Мы видим, что поле максимально на оси нити и простирается от оси на расстоянии порядка глубины проникновения λ_L . Плотность сверхпроводящих электронов в центре нити равна нулю и на расстоянии порядка ξ от нити выходит на плато.

Возникает вопрос, какими параметрами характеризуется изолированная вихревая нить, т. е. какова величина магнитного поля нити на ее оси и каков ток нити? Для ответа мы исходим из того,

что нити соответствуют максимальному расслоению на нормальную и сверхпроводящую фазы. Поэтому поле, порождаемое нитью, должно быть по возможности минимальным. Мы знаем, что магнитный поток, связанный со сверхпроводящим током, кратен $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$. Поэтому естественно считать, что поток, связанный с одной нитью, равен Φ_0 . Отсюда можно показать, что поле нити при $\xi < r \ll \lambda_L$ определяется формулой

$$B = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \left(\ln \frac{\lambda_L}{r} + \text{const} \right),$$

а плотность тока — формулой

$$j = \frac{c}{2} \frac{\Phi_0}{(2\pi\lambda_L)^2} \frac{1}{r}, \quad \xi \ll r \ll \lambda_L.$$

В реальном сверхпроводнике имеется, естественно, не одна, а много вихревых нитей. В равновесии они образуют периодиче-

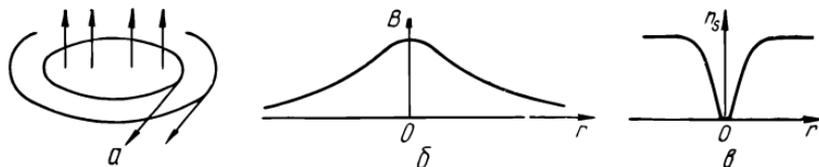


Рис. 14.11

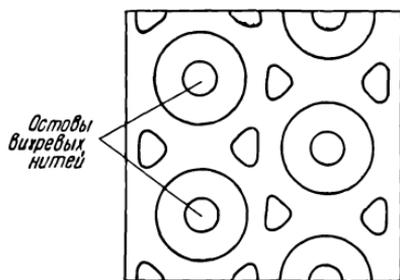


Рис. 14.12

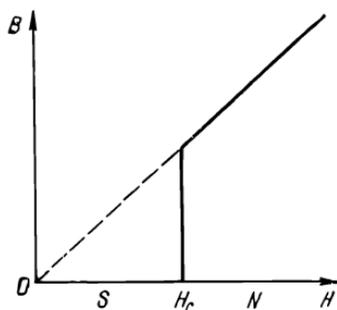


Рис. 14.13

ские решетки. Энергетически наиболее выгодной оказывается треугольная решетка. В ней нити параллельны полю и если пересечь их перпендикулярной плоскостью, то получим совокупность одинаковых приставленных друг другу правильных треугольников (на рис. 14.12 замкнутые линии представляют собой линии постоянных значений плотности сверхпроводящих электронов).

Сверхпроводники первого и второго рода отличаются друг от друга не только структурой промежуточного состояния, но и характером кривой намагничивания. Если сверхпроводник первого

рода в форме длинного цилиндра поместить в продольное поле (например, порождаемое током в соленоиде, намотанном на сверхпроводящий цилиндр), то кривая намагничивания, т. е. зависимость поля B в цилиндре от внешнего поля (силы тока в соленоиде), имеет вид, изображенный на рис. 14.13. Здесь H_c обозначает критическое поле, ниже которого существует сверхпроводящая, а выше — нормальная фаза.

Если теперь сверхпроводник второго рода также в виде длинного цилиндра поместить в продольное поле, то для него получим кривую намагничивания, изображенную на рис. 14.14. Для сверхпроводников второго рода, как мы видим, существуют два критических поля H_{c1} и H_{c2} , из которых $H_{c1} < H_c$ и $H_{c2} > H_c$. Кри-

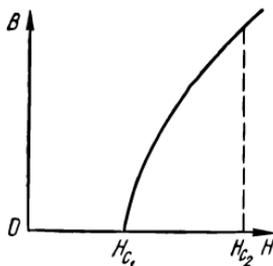


Рис. 14.14

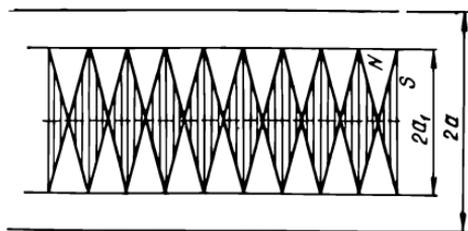


Рис. 14.15

тическое поле определяется термодинамически с помощью соотношения

$$F_n - F_s = \frac{1}{8\pi} H_c^2.$$

Вытеснение поля из сверхпроводников второго рода (эффект Мейснера) происходит не при $H < H_c$, как в случае сверхпроводников первого рода, а в меньшем интервале полей: $H < H_{c1}$ ($H_{c1} < H_c$). При $H_{c2} > H > H_{c1}$ силовые линии проникают в цилиндр, но не полностью. Именно при таких полях ($H_{c1} \leq H \leq H_{c2}$) и возникают вихревые нити. При $H > H_{c2}$ поле не вытесняется из образца, т. е. для него $B = H$, но сверхпроводимость полностью еще не разрушена, и вплоть до некоторого поля H_{c3} на поверхности цилиндра сохраняется сверхпроводящая прослойка, толщина которой порядка 10^3 \AA (поле H_{c3} порядка $1,7 H_{c2}$).

Пока мы рассматривали сверхпроводник, находящийся во внешнем магнитном поле. Но представим, что внешнего поля нет, а сверхпроводящий провод присоединен к генератору, создающему в проводе некоторый ток I . Этот ток будет создавать магнитное поле; на поверхности провода $H(a) = 2I/ca$, где a — радиус провода. Если $H(a) < H_c$, то провод будет полностью находиться в сверхпроводящем состоянии (сверхпроводник первого рода). Отсюда можно найти критический ток:

$$I_c = \frac{ca}{2} H_c.$$

При $I < I_c$ провод находится в сверхпроводящем состоянии. Если же $I > I_c$, то на поверхности провода поле будет больше H_c , и, следовательно, вблизи поверхности возникнет слой, находящийся в нормальном состоянии. Внутренний радиус этого слоя a_1 определяется из условия $H(a_1) = H_c$, откуда для тока, текущего по внутреннему сечению, получаем выражение

$$I_1 = \frac{ca_1}{2} H_c = I_0 \frac{a_1}{a}.$$

По внешней (нормальной) части сечения, таким образом, течет ток $I - I_1$. В этой части сечения существует, очевидно, электрическое поле, направленное вдоль провода.

Не следует, однако, считать, что внутренняя часть провода ($r \lesssim a_1$) должна полностью находиться в сверхпроводящем состоянии. В этом случае генератор мог бы быть замкнут накоротко сверхпроводящей сердцевинной. Поэтому внутренняя часть может находиться в промежуточном состоянии, структура которого изображена на рис. 14.15.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Сводка основных формул

Векторная алгебра

Вектор

$$\mathbf{a} = i a_x + j a_y + k a_z, \\ a_l = a_x \cos(l, x) + a_y \cos(l, y) + a_z \cos(l, z),$$

Скалярное произведение

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Векторное произведение

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \\ [\mathbf{ab}]_x = a_y b_z - a_z b_y, \dots, \\ \mathbf{a} [\mathbf{bc}] = \mathbf{b} [\mathbf{ca}] = \mathbf{c} [\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \\ [\mathbf{a} [\mathbf{bc}]] = \mathbf{b} (\mathbf{ac}) - \mathbf{c} (\mathbf{ab}).$$

Векторные поля

Градиент

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Дивергенция

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \\ \text{div grad } \varphi \equiv \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Ротор

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv [\nabla \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}, \\ (\text{rot } \mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \dots,$$

$$\nabla (\varphi + \psi) = \nabla \varphi + \nabla \psi, \quad \nabla (\varphi \psi) = (\nabla \varphi) \psi + \varphi (\nabla \psi), \\ \nabla (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \mathbf{a} + \nabla \mathbf{b},$$

$$\begin{aligned}
[\nabla (a + b)] &= [\nabla a] + [\nabla b], \\
\nabla (\varphi a) &= a \nabla \varphi + \varphi \nabla a, \\
[\nabla (\varphi a)] &= [\nabla \varphi a] + \varphi [\nabla a], \\
\nabla (ab) &= (a \nabla) b + (b \nabla) a + [a [\nabla b]] + [b [\nabla a]], \\
\nabla [ab] &= b [\nabla a] - a [\nabla b], \\
[\nabla [ab]] &= a (\nabla b) - b (\nabla a) + (b \nabla) a - (a \nabla) b, \\
[\nabla [\nabla a]] &= \nabla (\nabla a) - \Delta a, \\
[\nabla (\nabla \varphi)] &= 0, \quad \nabla [\nabla a] = 0.
\end{aligned}$$

Интегральные соотношения

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla \varphi dV &= \int_S \varphi n dS, \\
\int_V \nabla a dV &= \int_S a n dS, \\
\int_V [\nabla a] dV &= \int_S [na] dS
\end{aligned}$$

(объем V ограничен поверхностью S , n — единичный вектор, нормальный к поверхности и направленный вне ее),

$$\int_S [\nabla a] n dS = \int_{\mathcal{L}} a dl$$

(поверхность S ограничена контуром \mathcal{L}).

Электростатика в вакууме

Закон Кулона

$$F = \frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}.$$

Напряженность поля, создаваемого точечным зарядом,

$$\mathbf{E} = n \frac{e}{r^2}, \quad n = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Напряженность поля, создаваемого совокупностью зарядов,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$$

Электростатический потенциал, создаваемый точечным зарядом,

$$\varphi = \frac{e}{r}.$$

Электростатический потенциал, создаваемый совокупностью зарядов

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

Работа при перемещении заряда в поле

$$A_{a \rightarrow b} = e (\varphi^a - \varphi^b).$$

Связь между полем и потенциалом

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Теорема Гаусса

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi \sum_i e_i.$$

Потенциал и поле диполя

$$\varphi_d = \frac{dn}{r^2}, \quad \mathbf{E}_d = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{d}) - \mathbf{d}}{r^3}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Энергия диполя во внешнем поле

$$W = -\mathbf{d}\mathbf{E}^{(e)}.$$

Уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Уравнение Пуассона для плазмы и электролита

$$\Delta\varphi = -4\pi \sum_i e_i n_{i0} e^{-\frac{e_i \varphi}{kT}}$$

(n_{i0} — плотность частиц i -го сорта при $\varphi = 0$). Дебаевский радиус

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi \sum_i e_i^2 n_i}}.$$

Энергия взаимодействия зарядов в плазме

$$U = \frac{e_1 e_2}{r_{12}} e^{-\frac{r_{12}}{r_D}}.$$

Частота плазменных колебаний

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}}.$$

Потенциальный характер электростатического поля

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

Условия на границе проводника в электростатическом поле

$$E_n = 4\pi\sigma, \quad E_t = 0.$$

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{S}{4\pi d}.$$

Емкость шарового конденсатора

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{l}{2 \ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Энергия конденсатора

$$W = \frac{e^2}{2C} = \frac{1}{2} C \varphi^2 = \frac{1}{2} e \varphi.$$

Плотность электростатической энергии

$$w_e = \frac{1}{8\pi} E^2.$$

Электростатика диэлектриков

Закон Кулона в среде

$$F = \frac{e_1 e_2}{\epsilon r_{12}^2}.$$

Напряженность поля и потенциал точечного заряда

$$\mathbf{E} = n \frac{e}{\epsilon r^2}, \quad \varphi = \frac{e}{\epsilon r}$$

(n — единичный вектор от заряда в точку наблюдения).

Вектор электростатической индукции

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

Закон Гаусса

$$\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi \sum_i e_i^{(e)}$$

($e_i^{(e)}$ — сторонние заряды).

Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

Плотность свободной энергии в диэлектрике (связанной с электрическим полем)

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{D} = \frac{\epsilon}{8\pi} E^2.$$

Емкость плоского конденсатора, заполненного двумя диэлектриками,

$$C = \frac{S}{4\pi (d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2)}.$$

Поле внутри диэлектрического шара, находящегося в однородном поле,

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

Вектор поляризации диэлектрика

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{D} - \mathbf{E}).$$

Связь между диэлектрической проницаемостью и восприимчивостью газа или жидкости

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha.$$

Электрическая восприимчивость газа полярных молекул

$$\alpha = \frac{nd^2}{3kT}.$$

Диэлектрическая проницаемость плотных газов и жидкостей

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha,$$

$$\alpha = \frac{3}{16\pi} (4\pi\beta n - 1) + \sqrt{1 + \frac{8\pi}{3} \beta n + 16\pi^2 \beta^2 n^2}$$

(β — коэффициент поляризуемости отдельной молекулы), Формула Клаузиуса — Моссотти

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \beta n.$$

Сила, испытываемая единицей объема диэлектрика,

$$\mathbf{F} = (\mathbf{P}\nabla) \mathbf{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} (\mathbf{E}\nabla) \mathbf{E}.$$

Максвелловское натяжение

$$\mathbf{T}_n = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_n \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} n \varepsilon E^2.$$

Сила, действующая на границе раздела двух диэлектриков (отнесенная к единице площади),

$$\mathbf{T}_{1n} + \mathbf{T}_{2n} = \frac{1}{4\pi} (D_{2n} \mathbf{E}_2 - D_{1n} \mathbf{E}_1) - \frac{n}{8\pi} (D_2 \mathbf{E}_2 - D_1 \mathbf{E}_1).$$

Постоянный ток

Вектор плотности тока

$$\mathbf{j} = \sum_i e_i n_i \mathbf{v}_i.$$

Уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Граничные условия на границе раздела двух проводников

$$j_{1n} = j_{2n}, \quad E_{1t} = E_{2t}.$$

Закон Ома для цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Сопротивление линейного проводника

$$R = \oint \rho \frac{dl}{S}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma}.$$

Правила Кирхгофа

$$\sum \pm I = 0, \quad \sum \pm I_{\alpha} R_{\alpha} = \sum \pm \mathcal{E}.$$

Плотность джоулева тепла, отнесенная к единице времени,

$$q = \rho j^2.$$

Полное джоулево тепло

$$Q = RI^2.$$

Металлы

Граничная энергия и граничный импульс Ферми

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m_e}, \quad p_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar n^{1/3}.$$

Энергия электронного газа при абсолютном нуле

$$W = \frac{3^{5/3}}{10} \pi^{4/3} \frac{\hbar^2 n^{5/3}}{m_e} V$$

(V — объем газа).

Распределение Ферми

$$f_0(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1}$$

(ε — энергия частицы, μ — химический потенциал, T — температура).

Температура вырождения

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2m_e k} \hbar^2 n^{2/3}.$$

Теплоемкость вырожденного газа

$$C \approx k \frac{T}{T_F}.$$

Плотность тока насыщения

$$j_s = CT^2 e^{-A/kT}$$

($A = U - \mu$ — работа выхода, где U — глубина потенциальной ямы для электрона в металле; $C = 120,4 \text{ А/см}^2 \cdot \text{град}^2$).

Плотность электронов при холодном вырывании полем

$$n_{\text{вак}} \sim e^{-\gamma A^{3/2}/eE},$$

$$\gamma = \frac{4}{3\hbar} \sqrt{2m_e}.$$

Контактная разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{e} (A_1 - A_2).$$

Формула Друде для электропроводности металла

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m_e}.$$

Коэффициент электропроводности плазмы

$$\sigma \approx \frac{(kT)^{3/2}}{\sqrt{m_e} e^4}.$$

Кинетическое уравнение для электронов в электрическом поле

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^{\text{coll}} \approx -\frac{1}{\tau} (f - f_0).$$

Длина свободного пробега

$$\frac{1}{l} = \sum_i \frac{1}{l_i}$$

($l_i = \tau_i v_F$ — длина пробега по отношению к i -му процессу рассеяния, τ_i — время пробега по отношению к i -му процессу рассеяния, v_F — граничная скорость).

Длина пробега электрона по отношению к процессам рассеяния примесными атомами (l_i), фононами (l_f) и электронами (l_e)

$$l_i = \frac{1}{n'Q},$$

$$l_i \approx \begin{cases} \hbar v_F / kT, & T \gg T_D, \\ \hbar v_F / kT (T_D/T)^4, & T \ll T_D, \end{cases}$$

$$l_e \approx \hbar v_{F'e} / (kT)^2$$

(n' — плотность примесных атомов, $Q \approx 10^{-24} \text{ см}^2$, T_D — температура Дебая).

Удельное сопротивление

$$\rho = \rho_i + \rho_l + \rho_e,$$

$$\rho_i = \frac{m_e v_F}{e^2 n} \frac{1}{l_i}, \quad \rho_l = \frac{m_e v_F}{e^2 n} \frac{1}{l_e}, \quad \rho_e = \frac{m_e v_F}{e^2 n} \frac{1}{l_e}.$$

Температурная зависимость ρ

$$\rho \approx \rho_i + \rho_l, \quad \rho_l = \frac{m_e}{\hbar^2 e^2} \frac{kT}{n} \quad \text{при } T \gg T_D;$$

$$\rho \approx \rho_l, \quad \rho_l = \frac{p_F}{e^2 Q} c_l \approx 10^{-16} c_l, \quad c_l = \frac{n'}{n} \quad \text{при } T \ll T_D.$$

Коэффициент теплопроводности

$$\kappa = \frac{k^2 n}{m_e} T \tau, \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_i} + \frac{1}{\kappa_l},$$

$$\kappa_i \approx 10^4 \frac{T}{c_i} \text{ эрг/см} \cdot \text{с} \cdot \text{град},$$

$$\kappa_l = \begin{cases} \frac{k n}{m_e} \hbar & \text{при } T \gg T_D, \\ \frac{k n}{m_e} \hbar \left(\frac{T_D}{T}\right)^4 & \text{при } T \ll T_D. \end{cases}$$

Закон Видемана — Франца

$$\frac{\kappa_i}{\sigma_i T} \approx \frac{k^2}{e^2}.$$

Коэффициент электропроводности полупроводников, обусловленной рассеянием электронов примесями,

$$\sigma_i = \frac{e^2 n_0}{m_e v_T n' Q} e^{-\Delta/kT}$$

(n' — плотность примесных атомов).

Плотность тока и теплового потока при наличии градиента температуры

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} - \beta \text{grad } T,$$

$$\mathbf{j}_q = -\kappa \text{grad } T + \gamma \mathbf{E}.$$

Соотношение Онзагера

$$\gamma = \beta T.$$

ТермоЭДС

$$\mathcal{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (Q_a - Q_b) dT, \quad Q = \beta/\sigma$$

(металлы a и b спаяны в точках 1 и 2, T_1 и T_2 — температуры спаев),

Коэффициент термоЭДС

$$Q = \frac{\pi^2 k^2 T}{3e \varepsilon_F},$$
$$\mathcal{E}_T = \frac{T^2 k^2}{6e} (T_2^2 - T_1^2) \left(\frac{1}{\varepsilon_F^b} - \frac{1}{\varepsilon_F^a} \right).$$

Эффект Пельтье

$$q_{ab} = (\Pi_a - \Pi_b) j, \quad \Pi = QT.$$

Эффект Томсона

$$q_T = -\mu_T j \operatorname{grad} T, \quad \mu_T = T \frac{dQ}{dT}.$$

Электролиты

Закон действующих масс

$$\frac{[A_1]^{v_1} [A_2]^{v_2} \dots}{[A'_1]^{v'_1} [A'_2]^{v'_2} \dots} = p^{-(v_1+v_2+\dots-v'_1-v'_2-\dots)} k(T).$$

Степень диссоциации слабого электролита

$$\alpha = 2K/K + \sqrt{K^2 + 4cK}$$

(K — константа диссоциации, c — молярная концентрация). Электрическая часть энергии раствора сильного электролита

$$W_E = - \left(\frac{e}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^3 \sqrt{\frac{\pi}{kTV}} \left(\sum_a N_a Z_a^2 \right)^{3/2}$$

(N_a — число ионов с зарядом $Z_a e$, V и T — объем и температура, ε — диэлектрическая проницаемость).

Закон электролиза Фарадея

$$M_A = \frac{AIt}{Z_A F}, \quad F = eN_0 = 96496 \text{ Кл.}$$

Электропроводность раствора электролита

$$\sigma = \sum_a b_a (eZ_a)^2 n_a$$

(b_a — подвижность иона a).

Коэффициент электропроводности слабого электролита

$$\sigma = e^2 \alpha c N (b_+ + b_-)$$

(α — степень диссоциации).

Коэффициент электропроводности сильного электролита

$$\sigma = \sigma_0 (1 - \sqrt{c/c_0}), \quad \sigma_0 = e^2 N (b_+ + b_-).$$

Уравнение Гиббса — Гельмгольца для ЭДС

$$\mathcal{E} - T \frac{d\mathcal{E}}{dT} = v$$

(v — изменение энергии обратимого гальванического элемента при прохождении единичного заряда).

ЭДС концентрационного элемента

$$\mathcal{E} = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{c_1}{c_2}$$

(c_1 и c_2 — концентрации ионов с зарядом Ze у электродов).

Газовый разряд

Скорость электрона, прошедшего разность потенциалов φ ,

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \varphi.$$

Плотность тока в диоде

$$j_a = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{\varphi_a^{3/2}}{d^2}.$$

Температура электронов в сильном поле

$$kT_e = \frac{\sqrt{2}}{3\xi^{1/2}} eEl, \quad T_e \gg T$$

(ξ — средняя доля энергии электрона, переданная молекуле; l — длина свободного пробега электрона).

Направленная скорость электрона в сильном поле

$$u \approx \sqrt{\frac{eml}{m_e}} \xi^{1/4}.$$

Коэффициент диффузии электронов

$$D \approx \sqrt{\frac{kT}{m_e}} l, \quad T \ll T_e,$$

$$D \approx \sqrt{\frac{eEl}{m_e}} \xi^{-1/4} l, \quad T_e > T.$$

Направленная скорость диффузии электронов

$$v_D = -\frac{D}{n_e} \text{grad } n_e.$$

Результирующая направленная скорость

$$u = \frac{1}{n_e} (-D \text{grad } n_e + n_e b e E)$$

(b — коэффициент подвижности).

Соотношение Эйнштейна

$$D = bkT.$$

Поле, возникающее при амбиполярной диффузии,

$$E = \frac{D_+ - D_-}{b_+ e Z_+ + b_- e Z_-} \frac{\text{grad } n}{n}.$$

Коэффициент амбиполярной диффузии

$$D_a = \frac{b_+ b_-}{Z_+ b_+ + Z_- b_-} k (Z_- T_+ + Z_+ T_-).$$

Степень тепловой ионизации

$$\frac{x_i^2}{1 - x_i} n = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{(kT)^{3/2}}{\hbar^3} e^{-\varepsilon_i/kT}$$

(T — температура газа, ε_i — энергия ионизации атома, n — число атомов в единице объема).

Уменьшение плотности заряженных частиц вследствие рекомбинации

$$n = \frac{n_0}{1 + K_r n_0 t}$$

(K_r — коэффициент рекомбинации).

Электропроводность слабо ионизованного извне газа

$$\sigma = e^2 (b_+ + b_-) \sqrt{n_0 / K_r}$$

(n_0 — число частиц, ежесекундно поступающих от источника; b_+ и b_- — их подвижности).

Ионизационный коэффициент для электронов

$$\alpha = \frac{\omega_i}{I} e^{-\varepsilon_i/cEt}$$

(ω_i — вероятность ионизации газа электроном, ε_i — энергия ионизации).

Ток на аноде

$$I_a = I_0 \frac{e^{\alpha d}}{1 - \gamma (e^{\alpha d} - 1)}$$

(I_0 — начальный электронный ток на катоде).

Условие возникновения самостоятельного разряда

$$1 - \gamma (e^{\alpha d} - 1) = 0.$$

Критический анодный потенциал

$$\Phi_a^{(c)} = B \frac{pd}{\ln pd + \delta}$$

(p — давление, B и δ — постоянные).

Магнитное поле в вакууме

Сила Лоренца

$$\mathbf{f} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right).$$

Ларморов радиус и циклотронная частота

$$r_L = c \frac{mv_{\perp}}{eB}, \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}.$$

Скорость дрейфа

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \mathbf{B}].$$

Закон полного тока

$$\oint \mathbf{B} dl = \frac{4\pi}{c} \Sigma \pm I.$$

Поле соленоида

$$B = \frac{4\pi}{c} In$$

(n — число витков на единице длины соленоида).

Основные уравнения магнитостатики

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

(\mathbf{j}_t — полная плотность тока).

Векторный потенциал

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t.$$

Закон Био — Савара

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c} \oint \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3}$$

($d\mathbf{l}$ — элемент контура с током I , \mathbf{r} — радиус-вектор из $d\mathbf{l}$ в точку наблюдения).

Поле на оси кругового тока

$$\mathbf{B} = \frac{2\mathbf{m}}{r^3}, \quad \mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{S}$$

(\mathbf{S} — ориентированная площадь, обтекаемая током).

Поле магнитного момента

$$\mathbf{B} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{m}\mathbf{n}) - \mathbf{m}}{r^3}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad B = \frac{m}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

(θ — угол между \mathbf{m} и \mathbf{n}).

Скорость градиентного дрейфа

$$\mathbf{v}_G = c \frac{mv_{\perp}^2}{2} \frac{[\mathbf{B} \nabla B]}{eB^3}.$$

Скорость дрейфа, обусловленного кривизной силовых линий,

$$\mathbf{v}_R = cmv_{\parallel}^2 \frac{[\mathbf{R}\mathbf{B}]}{eR^2B^2}.$$

Адиабатический инвариант

$$v_{\perp}^2/B.$$

Условие возможности продольного движения

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} + m_L B(r) = \text{const.}$$

Сила, испытываемая элементом тока в поле,

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l}\mathbf{B}].$$

Электродинамическое взаимодействие токов (закон Ампера)

$$d\mathbf{F}_1 = \frac{I_1 I_2}{c^2} \left[dl_1, \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{[dl_2 \mathbf{r}_{21}]}{r_{21}^3} \right].$$

Магнитный поток

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Работа при перемещении контура с током в поле

$$A_{1 \rightarrow 2} = U_1 - U_2, \quad U = -\frac{I}{c} \Phi.$$

Момент сил, вращающих рамку с током в магнитном поле,

$$\mathbf{N} = [m\mathbf{B}], \quad m = \frac{I}{c} \mathbf{S}.$$

Коэффициенты индуктивности

$$U_{12} = -L_{12} \frac{I_1 I_2}{c^2}, \quad U_{11} = -\frac{1}{2} L_{11} \frac{I_1^2}{c^2}.$$

Потенциальная функция токов

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{2c^2} (L_1 I_1^2 + 2MI_1 I_2 + L_2 I_2^2), \\ L_1 \equiv L_{11}, \quad L_2 \equiv L_{22}, \quad M \equiv L_{12}.$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Преобразование полей в нерелятивистском случае

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{E}].$$

ЭДС индукции в равномерно вращающейся рамке

$$e(t) = \mathcal{E}_m \sin \omega t, \quad \mathcal{E}_m = \frac{1}{c} BS\omega.$$

ЭДС униполярной индукции

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c} \omega a^2 B.$$

ЭДС взаимной индукции и самоиндукции

$$e_{21}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{21}}{dt}, \quad \Phi_{21} = M \frac{i_1}{c},$$
$$e_{11}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{11}}{dt}, \quad \Phi_{11} = L_1 \frac{i_1}{c}.$$

Магнитная энергия токов

$$W_m = -U = \frac{1}{2c^2} (L_1 i_1^2 + 2M i_1 i_2 + L_2 i_2^2).$$

Вращающий момент электрического двигателя

$$\mathbf{N} = [h\mathbf{F}], \quad \mathbf{F} = \frac{i}{c} [i\mathbf{B}], \quad N_{\max} = \frac{i}{c} \Phi_{\max}$$

(h — вектор, соединяющий проводники с током).

Условие существования круговой орбиты в бетатроне

$$\bar{B}(t) \equiv \frac{\Phi(t)}{\pi R^2} = 2B(R, t).$$

Переменные токи

Уравнение для определения силы тока в контуре с индуктивностью

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t).$$

Изменение тока со временем при включении контура с индуктивностью на постоянную ЭДС

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}).$$

Постоянная времени контура с индуктивностью

$$\tau = L/R.$$

Закон Ома в комплексной форме для контура с индуктивностью при действии синусоидального напряжения

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{Z}, \quad Z = R + i\omega L.$$

Мощность в цепи переменного тока с индуктивностью

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} IU \cos \varphi = \frac{1}{2} I^2 R, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Уравнение для определения заряда конденсатора в контуре, содержащем емкость и сопротивление,

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u(t).$$

Изменение заряда конденсатора при включении обкладок на сопротивление

$$q = q_0 e^{-t/RC}.$$

Постоянная времени контура, содержащего емкость и сопротивление,

$$\tau_C = RC.$$

Закон Ома в комплексной форме для цепи с емкостью и сопротивлением, в которой действует синусоидальное напряжение,

$$\bar{I} = \frac{U}{Z}, \quad Z = R + \frac{1}{i\omega C}.$$

Импеданс при последовательном соединении индуктивности и емкости

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Сила тока при последовательном соединении индуктивности и емкости

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

Условие резонанса напряжений

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Импеданс при параллельном соединении индуктивности и емкости

$$Z = \frac{(R_1 + i\omega L) \left(R_2 + \frac{1}{i\omega C} \right)}{R_1 + R_2 + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

Уравнение для определения силы тока в колебательном контуре

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0.$$

Собственная частота и коэффициент затухания колебаний в колебательном контуре

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \gamma = \frac{B}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Логарифмический декремент колебаний

$$\delta = \gamma T', \quad T' = 2\pi/\omega_0'.$$

Закон изменения энергии контура

$$W = W_0 e^{-2\gamma t}.$$

Уравнение для определения управляющего напряжения в ламповом генераторе

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{M - DL}{LC} f'(\mathcal{E}_0 + u) \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0.$$

Эффективный коэффициент затухания (нарастания) малых колебаний

$$\gamma^* = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{M - DL}{LC} S_0 \right).$$

Усредненные уравнения для амплитуды и фазы колебаний

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{2\pi} U \int_0^{2\pi} F(U \cos \psi) \sin^2 \psi \, d\psi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(U \cos \psi) \cos \psi \sin \psi \, d\psi, \\ F(u) &= \frac{M - DL}{LC} f'(\mathcal{E}_0 + u) - \frac{R}{L}. \end{aligned}$$

Уравнение Ван дер Поля

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\vartheta^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{d\vartheta} + x &= 0, \quad \vartheta = \omega_0 t, \quad x = \frac{u}{\bar{U}}, \\ \varepsilon &= \left(\frac{M - DL}{LC} f'(\varepsilon_0) - \frac{R}{L} \right) \sqrt{LC}, \\ \bar{U} &= \left[\frac{2}{|f'''(\mathcal{E}_0)|} \left(f'(\mathcal{E}_0) - \frac{RC}{M - DL} \right) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Решение уравнения Ван дер Поля

$$\begin{aligned} x &= X(\vartheta) \cos(\vartheta + \varphi), \\ X(\vartheta) &= \frac{2X_0}{\sqrt{X_0^2 + (4 - X_0^2) e^{-\varepsilon\vartheta}}}, \quad X = 2, \quad \vartheta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Корреляционные функции флуктуаций напряжения на емкости и тока в катушке

$$\langle u(t_1) u(t_2) \rangle = \frac{kT}{c} e^{-|t_1 - t_2|RC},$$

$$\langle i(t_1) i(t_2) \rangle = \frac{kT}{L} e^{-|t_1 - t_2| \frac{R}{L}}.$$

Формула Найквиста для компоненты Фурье корреляционной функции флуктуационного тока

$$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{|Z|^2}.$$

Уравнения длинных линий

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Волновое уравнение для линии без потерь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Решение волнового уравнения

$$u(x, t) = u_f \left(t - \frac{x}{c} \right) + u_r \left(t + \frac{x}{c} \right),$$

$$i(x, t) = i_f \left(t - \frac{x}{c} \right) + i_r \left(t + \frac{x}{c} \right),$$

$$u_f = \rho i_f, \quad u_r = -\rho i_r, \quad \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Коэффициент отражения по напряжению

$$\Omega_u = \frac{\frac{R}{\rho} - 1}{\frac{R}{\rho} + 1}.$$

Уравнения монохроматических волн в линии

$$u = U_f \cos(\omega t - kx) + U_r \cos(\omega t + kx + \alpha),$$

$$i = I_f \cos(\omega t - kx) + I_r \cos(\omega t + kx + \alpha),$$

$$U_f = \rho I_f, \quad U_r = -\rho I_r, \quad k = \omega/c.$$

Связь между комплексными амплитудами напряжения и тока в начале и в конце линии без потерь

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2 \cos kl + i\rho \bar{I}_2 \sin kl,$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 \cos kl + i \frac{\bar{U}_2}{\rho} \sin kl,$$

$$\bar{U}_2 = Z \bar{I}_2.$$

Комплексное входное сопротивление линии

$$Z_e = \frac{Z \cos kl + i\rho \sin kl}{\cos kl + i \frac{Z}{\rho} \sin kl}$$

(Z — комплексное сопротивление нагрузки).

Уравнения стоячих волн в разомкнутой линии

$$u(x, t) = U_2 \cos kx \cos \omega t, \\ i(x, t) = \frac{U_2}{\rho} \sin kx \sin \omega t.$$

Собственные длины волн в разомкнутой с обеих сторон линии

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Уравнения стоячих волн в короткозамкнутой линии

$$i(x, t) = I_2 \cos kx \cos \omega t, \\ u(x, t) = I_2 \rho \sin kx \sin \omega t.$$

Уравнения собственных длин волн в закороченной с одной стороны и разомкнутой с другой стороны линии

$$\lambda_n = \frac{2l}{n + 1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Уравнения бегущей волны в линии с потерями

$$u(x, t) = U e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx), \\ i(x, t) = \frac{U}{|\omega|} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - kx + \alpha), \\ \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{\rho} + C_1 \rho \right), \quad \omega = \sqrt{\frac{R_1 + i\omega L_1}{C_1 + i\omega C_1}}, \quad \alpha = \arg \omega.$$

Основные уравнения фильтров

$$\bar{U}_n = \frac{1}{2} Z \bar{I}_n + \frac{1}{2} Z \bar{I}_{n+1} + \bar{U}_{n+1}, \\ \bar{I}_n = Y (\bar{U}_n - 1/2 Z \bar{I}_n) + \bar{I}_{n+1}.$$

Напряжение и ток вдоль ячеек фильтра

$$\bar{U}_n = \bar{U}_f e^{-i\beta n} + \bar{U}_r e^{i\beta n}, \\ \bar{I}_n = \bar{I}_f e^{-i\beta n} + \bar{I}_r e^{i\beta n}, \quad \cos \beta = 1 + \frac{1}{2} ZY.$$

Условия прохождения сигнала в идеальном фильтре

$$ZY \ll 0, \quad |ZY| \ll 4.$$

Фильтр, пропускающий низкие частоты,

$$Z = i\omega L, \quad Y = i\omega C,$$

$$\omega \leq \omega_0, \quad \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Фильтр, пропускающий высокие частоты,

$$Z = \frac{1}{i\omega C}, \quad Y = \frac{1}{i\omega L}, \quad \omega \geq \omega_0, \quad \omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Полосовой фильтр

$$Z = i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right), \quad Y = \frac{1}{i \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)},$$

$$\omega_3 \leq \omega \leq \omega_1,$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}, \quad \omega_3^2 = \frac{\omega_1^2 + \xi \omega_2^2}{1 + \xi},$$

$$\xi = 4 \frac{L_2}{L_1}, \quad \omega_1 > \omega_2.$$

Законы электромагнитного поля

Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме — первое уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Плотность тока смещения

$$\mathbf{j}^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Второе уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_t + \mathbf{j}^*)$$

(\mathbf{j}_t — плотность тока движущихся зарядов).

Уравнения Максвелла для полей в вакууме

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Волновое уравнение

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны в вакууме

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}r)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}r)},$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{\omega}{c}, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad \mathbf{B}_0 = [\mathbf{n} \mathbf{E}_0].$$

Энергия, поток энергии и количество движения электромагнитного поля в вакууме

$$W = \int_V w dV, \quad w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2),$$

$$I = \int_S \Pi dS, \quad \Pi = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{B}],$$

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} dV, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \mathbf{B}].$$

Усреднение уравнений Максвелла—Лоренца для микроскопических полей в вакууме

$$\text{rot } \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t),$$

$$\text{rot } \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \sum_i \overline{e_i n_i v_i t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_i \overline{e_i n_i}, \quad \text{div } \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Определение макрополей

$$\bar{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).$$

Поляризационный ток и ток намагничения

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j}_M = c \text{ rot } \mathbf{M},$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\text{ед. объема}} \bar{\mathbf{d}}_i, \quad \mathbf{M} = \sum_{\text{ед. объема}} \bar{\mathbf{m}}_i.$$

Уравнения Максвелла для макрополей

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi (\rho - \text{div } \mathbf{P})$$

(\mathbf{j} — плотность тока проводимости, ρ — плотность стороннего заряда), или

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}.$$

Граничные условия на границе двух сред

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad H_{1t} = H_{2t}, \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Баланс энергии в среде

$$P^{(e)} = \int_V \frac{1}{\beta} j^2 dV + \int_V \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}) dV + \int_S \Pi dS,$$

$$\Pi = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Поток электромагнитной энергии

$$J = \int_S \Pi dS.$$

Работа, затрачиваемая на изменение электрической и магнитной индукций (в единице объема),

$$\delta A = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B}).$$

Дифференциал плотности энергии среды

$$d\omega = T ds + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B})$$

(s — плотность энтропии).

Плотность свободной энергии полей в среде при линейных связях между полями

$$F = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}).$$

Работа внешних полей над электрическим и магнитным моментами

$$\delta A = -\mathbf{P} d\mathbf{E}^{(e)} - \mathbf{M} d\mathbf{H}^{(e)}.$$

Дифференциал плотности свободной энергии среды при наличии внешних полей

$$dF = -s dT - \mathbf{P} d\mathbf{E}^{(e)} - \mathbf{M} d\mathbf{H}^{(e)}.$$

Магнитные свойства вещества

Магнитная проницаемость и преломление магнитных силовых линий

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Закон Био—Савара в веществе

$$\mathbf{H} = \frac{I}{c} \oint \frac{[d\mathbf{l}r]}{r^3}.$$

Сила Лоренца в среде

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Сила, испытываемая элементом тока в магнитном поле в среде.

$$dF = \frac{l}{c} [dIB].$$

Напряженность поля в соленоиде

$$H = \frac{4\pi}{c} In, \quad B = \mu H.$$

Закон Ома для магнитной цепи

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{R}, \quad \mathcal{E}_m = \frac{4\pi}{c} IN, \quad R_m = \frac{l}{\mu S}.$$

Объемная и поверхностная плотности «магнитного» заряда

$$\rho_m = -\operatorname{div} \mathbf{M}, \quad \sigma_m = M_n.$$

Магнитное поле внутри эллипсоида, помещенного в однородное поле

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(i)} &= \mathbf{H}^{(e)} - 4\pi\hat{N}\mathbf{M} = \mathbf{H}^{(e)} - 4\pi\chi\hat{N}\mathbf{H}^{(i)}, \\ \chi &= \frac{\mu - 1}{4\pi}, \quad \mathbf{H}^{(i)} = \frac{\mathbf{H}^{(e)}}{1 + 4\pi\chi N_j}, \\ \mathbf{H}^{(e)} &\parallel Ox_j \end{aligned}$$

(x_j — главные оси эллипсоида).

Значения компонент тензора размагничивания

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

для шара

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3},$$

для цилиндра с осью вдоль x_1

$$N_1 = 0, \quad N_2 = N_3 = \frac{1}{2},$$

для сплюснутого эллипсоида вращения $((x_1^2 + x_2^2)/a^2 + x_3^2/c^2 = 1, a > c)$

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2} (1 - N_3),$$

$$N_3 = \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^3} (\varepsilon - \operatorname{arctg} \varepsilon), \quad \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1},$$

для вытянутого эллипсоида вращения $((x_1^2/a^2 + x_2^2 + x_3^2)/b^2 = 1, a > b)$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon^3} \left(\ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - 2\varepsilon \right), \quad N_2 = N_3 = \frac{1}{2} (1 - N_1), \\ \varepsilon &= \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \end{aligned}$$

Связь между орбитальным магнитным моментом и орбитальным моментом количества движения

$$\mathbf{m}_L = \frac{e}{2m_e c} \mathbf{K} = \mu_B \mathbf{L}, \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}, \quad \mathbf{K} = \hbar \mathbf{L}.$$

Связь между спиновым магнитным моментом и спиновым моментом количества движения

$$\mathbf{m}_S = \frac{e\hbar}{m_e c} \mathbf{S}.$$

Суммарные магнитный и механический моменты атома

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_L + \mathbf{m}_S = \frac{e\hbar}{2m_e c} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}), \quad \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}.$$

Парамагнитная восприимчивость газа в случае магнетизма орбитального происхождения

$$\chi_L = \frac{n\mu_B^2}{3kT} l(l+1), \quad l = \max L_H.$$

Парамагнитная восприимчивость газа в случае магнетизма спинового происхождения

$$\chi_S = \frac{n\mu_B^2}{3kT} 4s(s+1), \quad s = \max S_H.$$

Парамагнитная восприимчивость газа в общем случае

$$\chi = \frac{n\mu_B^2 g_L^2}{3kT} j(j+1), \quad j = \max J_H.$$

Множитель Ланде

$$g_L = 1 - [j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] \frac{1}{2j(j+1)}.$$

Плотность свободной энергии парамагнитного газа в магнитном поле

$$F = \frac{1}{8\pi} \mathbf{BH} = \frac{\mu}{8\pi} H^2.$$

Парамагнитная восприимчивость вырожденного электронного газа

$$\chi = 2\mu_B^2 v(\varepsilon_0) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{\mu_B^2 n^{1/3} m_e}{\hbar^3}.$$

Частота ларморовой прецессии

$$\omega_L = -\frac{eH}{2m_e c}.$$

Диамагнитная восприимчивость газа

$$\chi_d = -\frac{e^2}{6m_e c^2} Z \bar{r}^2 n.$$

Магнитокалорический эффект и магнитострикция

$$C_V dT - H^{(e)} dl, \quad l \equiv l(H^{(e)}/T).$$

Связь между конечной и начальной температурами при магнитном методе охлаждения

$$T_f = T_i \frac{\omega_0}{m_s H} \approx T_i \frac{m_s}{a^3 H}.$$

Плотности силы и момента, действующих на магнетик во внешнем магнитном поле,

$$\mathbf{F} = (M \nabla) \mathbf{H}^{(e)}, \quad \mathbf{N} = [M \mathbf{H}^{(e)}].$$

Основные уравнения магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{H}],$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v} \mathbf{B}].$$

Закон «растяжения» силовых линий

$$\frac{B}{\rho \Delta l} = \text{const.}$$

Скорости магнитозвуковых и альвеновской волн

$$v_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(v_s^2 + v_A^2 \pm \sqrt{(v_s^2 + v_A^2)^2 - 4v_s^2 v_A^2 \cos^2 \vartheta} \right),$$

$$v_a = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \cos \vartheta$$

$$\left(v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right).$$

Связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля в проводнике, находящемся в магнитном поле,

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} + R [\mathbf{H} \mathbf{j}].$$

Холловское поле и константа Холла

$$\mathbf{E} = R [\mathbf{H} \mathbf{j}], \quad R = 1/ecn.$$

Кинетическое уравнение для электронов металла при наличии электрического и магнитного полей

$$e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f - f_0}{\tau}.$$

Изменение сопротивления металла в магнитном поле в двухзонной модели

$$\frac{\Delta \varphi}{\rho_0} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 (\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2)^2 H^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + H^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (R_1 + R_2)^2}, \quad R_\alpha = \frac{1}{e_\alpha c n_\alpha}$$

(e_1 и e_2 могут иметь разные знаки). Если число электронов и дырок одинаково, то

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 (\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2)^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} H^2.$$

Связь между плотностями тока и теплового потока с полями при наличии градиента температуры

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \rho \mathbf{j} + R [\mathbf{Hj}] + Q \nabla T + N [\mathbf{H} \nabla T], \\ \mathbf{q} &= -\kappa \nabla T + \Pi \mathbf{j} + B [\mathbf{Hj}] + L [\mathbf{H} \nabla T], \\ \Pi &= QT, \quad B = NT. \end{aligned}$$

Эффект Эттингаузена

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{B}{\kappa} H j_x \quad (q_y = 0, \quad \partial T / \partial x = 0, \quad H \equiv H_z).$$

Эффект Ледюка — Риги

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{L}{\kappa} H \frac{\partial T}{\partial x} \quad (j_x = j_y = 0, \quad q_y = 0).$$

Эффект Нернста

$$E_y = NH \frac{\partial T}{\partial x} \quad \left(j_x = j_y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \right).$$

Ферромагнетизм

Закон Блоха

$$\frac{M_\infty - M_s}{M_\infty} \propto \left(\frac{T}{T_C} \right)^{3/2}.$$

Закон Кюри — Вейсса

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}.$$

Магнитокалорический эффект вблизи точки Кюри

$$C_V dT = \frac{CT}{2(T - T_C)^2} d(H^2).$$

Поле и уравнение Вейсса для определения спонтанной намагниченности

$$\begin{aligned} H_W &= v_W M, \\ M &= n \mu_B \text{th} \frac{(H^{(e)} + v_W M) \mu_B}{kT}, \quad T_C = \frac{1}{k} n \mu_B^2 v_W. \end{aligned}$$

Критерий Стонера возникновения ферромагнетизма металлов

$$v_W v(\epsilon_F) \mu_B > 1.$$

Изотерма Вольфарта

$$\left(\frac{M}{M_0} \right)^3 - \frac{M}{M_0} \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) = 2\chi_0 \frac{H}{M_0}, \quad \chi_0 = \frac{1}{2} - \frac{\mu_B v(\epsilon_F)}{\mu_B v_W v(\epsilon_F - 1)}.$$

Обменная энергия ферромагнетика

$$W_e = -\frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j, \quad I_{ij} > 0.$$

Изменение обменной энергии при неоднородном намагничении

$$\delta W_e = \frac{\alpha}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2 \right\},$$

$$\alpha \propto kT_c \frac{a^2}{n\mu_B}.$$

Энергия магнитной анизотропии
для кобальта

$$W_a = K \sin^2 \theta, \quad K = 4 \cdot 10^6 \text{ эрг/см}^3$$

(θ — угол между \mathbf{M} и гексагональной осью);
для железа

$$W_a = K_1 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) + K_2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3,$$

$$K_1 = 4,2 \cdot 10^5 \text{ эрг/см}^3,$$

$$K_2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ эрг/см}^3$$

($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — направляющие косинусы \mathbf{M}).

Плотность магнитоупругой энергии для кристаллов кубической симметрии

$$w_{mi} = B_1 (\alpha_1^2 u_{xx} + \alpha_2^2 u_{yy} + \alpha_3^2 u_{zz}) + B_2 (\alpha_1 \alpha_2 u_{xy} + \alpha_2 \alpha_3 u_{yz} + \alpha_3 \alpha_1 u_{zx})$$

(u_{ij} — компоненты тензора деформации);
для железа

$$B_1 = 2,9 \cdot 10^7 \text{ эрг/см}^3,$$

$$B_2 = 3,2 \cdot 10^7 \text{ эрг/см}^3.$$

Магнитострикционное удлинение

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{3}{2} \lambda_1 \left(\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2 - \frac{1}{3} \right) + 3\lambda_2 (\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3)$$

(β_i — направляющие косинусы отрезка);
для железа

$$\lambda_1 = 19,5 \cdot 10^{-6}, \quad \lambda_2 = -18,8 \cdot 10^{-6}.$$

Плотность энергии ферромагнетика во внешнем поле

$$w_H = -\mathbf{M}\mathbf{H}^{(e)}.$$

Плотность собственной магнитной энергии

$$w_M = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H}^{(m)})^2 = -\frac{1}{2} \mathbf{M}\mathbf{H}^{(m)}$$

для однородно намагниченного эллипсоида

$$\omega_M = 2\pi N_i N_j M_i M_j.$$

Полная плотность магнитной энергии

$$\omega = \omega_H + \omega_M = -\mathbf{H}^{(e)} \mathbf{M} + 2\pi N_i M^2 (\mathbf{M} \parallel O x_i).$$

Плотность поверхностной энергии домена

$$\sigma_W = 2\pi \left(\frac{IKs^2}{a} \right)^{1/2}$$

(для железа $\sigma_W = 1$ эрг/см²).

Ширина домена

$$D = \left(\frac{\sigma_W L}{2M_0^2} \right)^{1/2}$$

(L — размеры образца).

Уравнение вращения плотности магнитного момента

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = g [\mathbf{M} \mathbf{H}'], \quad \mathbf{H}' = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2}$$

(\mathbf{M} зависит от t и x).

Частота спиновой волны и энергия магнона

$$\omega = \alpha g M_0^2 k^2,$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{g}{\hbar} \alpha M_0^2 p^2, \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}.$$

Функция распределения тепловых магнонов и их плотность

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\varepsilon(\mathbf{p})/k_B T} - 1}$$

(k_B — постоянная Больцмана),

$$N_m = \int N(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \approx T^{3/2}.$$

Сверхпроводимость

Квантование магнитного потока через отверстие в сверхпроводящем кольце

$$\Phi = n\Phi_0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \Phi_0 = \frac{c\hbar}{2e} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2.$$

Разность свободных энергий нормальной и сверхпроводящей фаз

$$F_n(T) - F_s(T) = \frac{1}{8\pi} H_c^2(T).$$

Скрытая теплота перехода из сверхпроводящей в нормальную фазу

$$Q_{s \rightarrow n} = -\frac{T}{4\pi} H_c(T) \frac{dH_c(T)}{dT}.$$

Скачок теплоемкости

$$c_n - c_s = -\frac{1}{4\pi} \left[T \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 \right]_{T=T_c}.$$

Температурный ход теплоемкостей

$$c_n \sim k_B^2 \frac{T}{\epsilon_F}, \quad c_s \sim e^{-1,76T_c/T}.$$

Уравнение Лондонов

$$\Delta B = \frac{1}{\lambda_L^2} B, \quad \lambda_L = \sqrt{\frac{m_e c^2}{4\pi e^2 n_s}}.$$

Проникновение поля и тока в глубину в лондоновских сверхпроводниках (сверхпроводниках второго рода)

$$B(z) = B(0) e^{-z/\lambda_L}, \quad j(z) = \frac{cB(0)}{4\pi\lambda_L} e^{-z/\lambda_L}.$$

Глубина проникновения поля в сверхпроводники первого рода (пипардовские сверхпроводники)

$$\lambda_P = \lambda_L \left(\frac{\xi}{\lambda_L} \right)^{1/3}, \quad \xi = \frac{\hbar v_F}{\pi |\Delta|}, \quad \lambda_L \ll \lambda_P \ll \xi$$

(Δ — потенциал «спаривания» электронной пары).

Условие возникновения промежуточного состояния у сверхпроводящей сферы

$$\frac{2}{3} H_c < H_0 < H_c.$$

Относительный размер сверхпроводящих доменов в случае плоской сверхпроводящей пластины

$$\delta = 1 - \frac{H_0}{H_c}, \quad H_0 \ll H_c.$$

Плотности поверхностных энергий для сверхпроводников первого и второго рода

$$\gamma_1 = \frac{H_c^2}{8\pi} \xi, \quad \gamma_2 = -\frac{H_c^2}{8\pi} \lambda_L$$

(ξ — размер электронной «пары»).

Критический ток

$$I_c = \frac{1}{2} acH_c.$$

Поле и ток вихревой нити

$$B = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \left(\ln \frac{\lambda_L}{r} + \text{const} \right),$$
$$j = \frac{c}{2} \frac{\Phi_0}{(2\pi\lambda_L)^2} \frac{1}{r}, \quad \xi \ll r \ll \lambda_L.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица 1. Фундаментальные физические константы

Скорость света (в вакууме), c	2,997924 · 10 ⁸ м/с
Заряд электрона, e	1,602190 · 10 ⁻¹⁹ Кл
	4,803242 · 10 ⁻¹⁰ ед. СГС
Масса покоя электрона, m_e	9,109534 · 10 ⁻²⁸ г
Масса покоя протона, m_p	0,511003 МэВ
Классический радиус электрона, r_e	1,672649 · 10 ⁻²⁴ г
	2,817938 · 10 ⁻¹³ см
Магнетон Бора, $\mu_B = e\hbar/2m_e c$	1,602189 · 10 ⁻¹⁹ Дж
Магнитный момент электрона, μ_e	9,274096 · 10 ⁻²¹ эрг/Га
Ядерный магнетон, $\mu_N = e\hbar/2m_p c$	5,050951 · 10 ⁻²⁷
Постоянная Авогадро, N_A	6,022045 · 10 ²³ моль
Постоянная Фарадея, $F = N_A e$	9,648670 · 10 ⁴ Кл/моль
Универсальная газовая постоянная, R	8,31434 Дж/моль
Постоянная Больцмана, k_B	1,38066 · 10 ⁻²³ Дж/К
Постоянная Планка, h	6,626176 · 10 ⁻³⁴ Дж/Гц ×
	× 10 ⁻²⁷ эрг · с
Постоянная Планка, $\hbar = h/2\pi$	1,054589 · 10 ⁻³⁴ Дж · с ×
	× 10 ⁻²⁷ эрг · с
Гравитационная постоянная, G	6,6720 · 10 ⁻¹¹ Н · м ² /кг ² ×
	× 10 ⁻⁸ дин · см ² /г ²

Таблица 2. Удельное сопротивление металлов и сплавов (при 20°C)

Вещество	$\rho, \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}}{=10^{-6} \frac{\text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{Ом} \cdot \text{м}}}$	Вещество	$\rho, \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}}{=10^{-6} \frac{\text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{Ом} \cdot \text{м}}}$
Алюминий	0,0269	Ниобий	0,131
Бериллий	0,066	Олово	0,128
Бронза фосфористая	0,08	Натрий	0,042
Вольфрам	0,055	Ртуть	0,958
Железо	0,0971	Свинец	0,206
Золото	0,023	Серебро	0,016
Латунь	0,0175—0,071	Цинк	0,0592
Литий	0,0939	Нихром	1,0—1,1
Медь	0,01673	Константан	0,44—0,52
Молибден	0,050	Манганин	0,42—0,48
Никель	0,06844	Никелин	0,39—0,45

Примечание. Указанные в таблице значения являются усредненными, так как ρ зависит от чистоты образца, термообработки, приложенного давления и т. п., а для таких металлических кристаллов, как бериллий, марний, цинк, олово, висмут и некоторых других, ρ зависит и от направления в образце.

Т а б л и ц а 3. Удельное сопротивление электролитов для различных концентраций ρ' (при 18° С)

Растворенное вещество	ρ' , %	d , г/см ³	ρ , Ом·см
Азотная кислота	10	1,05	2,1
	20	1,12	1,5
	30	1,18	1,3
	40	1,25	1,4
Едкий натр	5	1,05	5,1
	10	1,11	3,2
	20	1,22	3,0
	40	1,43	8,3
Медный купорос	5	1,062	52,9
	10	1,107	31,5
	17,5	1,206	23,8
Нашатырь	5	1,011	10,9
	10	1,029	5,6
	20	1,057	3,8
Поваренная соль	5	1,034	14,9
	10	1,071	8,3
	20	1,148	5,1
Серная кислота	5	1,032	4,8
	20	1,14	1,5
	30	1,22	1,4
	40	1,30	1,5
Соляная кислота	5	1,023	2,5
	20	1,1	1,3
	40	1,2	1,9
Цинковый купорос	5	1,062	52,4
	10	1,107	31,2
	20	1,232	21,3

Т а б л и ц а 4. Диэлектрическая проницаемость (при 20° С)

Вещество	Химический состав	ϵ
Кварц (плавленный)	SiO ₂	3,75
Керамика (конденсаторная)	ZrTiO ₄	28—30
	TiO ₂	78—88
	CaTiO ₃	150—165
Слюда флогопит		5,5
Слюда мусковит		6,8—7,5
Стекло боросиликатное		8,4
Стекло титановое		11,0
Резина		2,5—5
Фарфор		5,5—6,5
Текстолит		8

Продолжение табл. 4

Вещество	Химический состав	ε
Эбонит		2,7—3,0
Каучук (натуральный)		2,3—2,4
Мрамор		6,6—8,5
Картон (электротехнический)		3,9—4,5
Титанат магния	$MgTiO_3$	14—16
Винипласт		3,1—3,5
Всск (пчелиный)		2,8—2,9
Гетинакс		7—8
Парафин	Смесь (C_nH_{2n+2})	1,9—2,2
Янтарь		2,8
Азот (жидкий)	N_2	1,445
Азот (газ)	N_2	1,00058
Кислород (газ)	O_2	1,000532
Вода (пар)	H_2O	1,0126
Масло (конденсаторное)		2,1—2,3

Примечание. Для газов принято давление 760 мм рт. ст.

Таблица 5. Электрохимические эквиваленты

Ион	Г-эков	К, мг/Кл	Ион	Г-эков	К, мг/Кл
H^+	1,008	0,0104	CO_3^{--}	30,0	0,3108
O^{--}	8,0	0,0829	Cu^{++}	31,8	0,3297
Al^{+++}	9,0	0,0936	Zn^{++}	32,7	0,3387
OH^-	17,0	0,1762	Cl^-	35,5	0,3672
Fe^{+++}	18,6	0,1930	SO_4^{--}	48,0	0,4975
Ca^{++}	20,1	0,2077	NO_3^-	62,0	0,642
Na^+	23,0	0,2388	Cu^+	63,6	0,6590

Примечание. Число плюсов или минусов у символов показывает число элементарных зарядов, переносимых одним ионом.

Таблица 6. Термоэлектродвижущая сила некоторых пар металлов

Температура спая, °С	Платина—платина с 10% родия	Железо—константан	Медь—константан	Температура спая, °С	Платина—платина с 10% родия	Железо—константан
—200	—	8	5,5	600	5,22	33
100	0,64	5	4	700	6,26	39
200	1,44	11	9	800	7,33	46
300	2,32	16	15	1000	9,57	58
400	3,25	22	21	1500	15,50	—
500	4,22	27	—	—	—	—

Примечание. Температура второго спая поддерживается равной 0° С.

Таблица 7. ЭДС гальванических элементов

Элемент	Отрицательный полюс	Положительный полюс	Раствор	ЭДС, В
Аккумулятор кислотный свинцовый	Губчатый свинец	Перекись свинца PbO_2	27—28%-ный раствор H_2SO_4 , свободный от хлора, плотность 1,20	2,0—1,9 (при 15°С)
Аккумулятор щелочной серебряно-цинковый	Окись цинка	Серебро	Раствор едкого калия (KOH)	1,5
Аккумулятор щелочной железоникелевый (или никелево-кадмиевый)	Порошкообразное железозинкелевое (или кадмий с примесями окислов железа)	Двуокись никеля	20%-ный раствор едкого калия (KOH)	1,4—1,1
Элемент Вестона (нормальный)	Амальгама кадмия	Ртуть	Насыщенный раствор $CdSO_4$, паста из Hg_2SO_4 и $CdSO_4$	1,0183
Элемент Грене	Цинк	Уголь	12 частей $K_2Cr_2O_7$, 25 частей H_2SO_4 , 100 частей H_2O	2,01
Элемент Даниэля	Цинк	Медь	Растворы у электродов разделены: цинк в растворе серной кислоты (5—10%), медь в насыщенном растворе медного купороса	1,1
Элемент Лекланше	Цинк	Уголь	Раствор нашатыря, перекись марганца с угольным порошком	1,46
Элемент Лекланше (сухой)	Цинк	Уголь	1 часть ZnO , 1 часть NH_4Cl , 3 части $ZnCl_2$ и вода до долушения пасты	1,3

Таблица 8. Абсолютные нормальные потенциалы металлов

Металл	U_H , В	Металл	U_H , В
Железо	-0,17	Ртуть	1,13
Кадмий	-0,13	Свинец	0,15
Марганец	-0,78	Серебро	1,07
Медь	0,61	Хром	-0,29
Никель	0,04	Цинк	-0,50

Таблица 9. Работа ионизации

Ионизация	$E_{ион}$, эВ	Ионизация	$E_{ион}$, эВ
He \rightarrow He ⁺	24,5	H \rightarrow H ⁺	13,5
Ne \rightarrow Ne ⁺	21,5	O \rightarrow O ⁺	13,5
N ₂ \rightarrow N ₂ ⁺	15,8	H ₂ O \rightarrow H ₂ O ⁺	13,2
Ar \rightarrow Ar ⁺	15,7	Xe \rightarrow Xe ⁺	12,8
H ₂ \rightarrow H ₂ ⁺	15,4	O ₂ \rightarrow O ₂ ⁺	12,5
N \rightarrow N ⁺	14,5	Hg \rightarrow Hg ⁺	10,4
CO ₂ \rightarrow CO ₂ ⁺	14,4	Na \rightarrow Na ⁺	5,1
Kr \rightarrow Kr ⁺	13,9	K \rightarrow K ⁺	4,3

Таблица 10. Подвижность ионов в водных растворах (при 18° С)

Катион	b_a , см ² /с·В	Анион	b_a , см ² /с·В
H ⁺	0,003263	OH ⁻	0,00180
K ⁺	0,000669	Cl ⁻	0,00068
Na ⁺	0,000450	NO ₃ ⁻	0,00062
Ag ⁺	0,00056	SO ₄ ²⁻	0,00068
Zn ²⁺	0,00048	CO ₃ ²⁻	0,00062
Fe ³⁺	0,00046		

Примечание. При повышении температуры на 1° С подвижность ионов возрастает примерно на 2%. Число плюсов или минусов у символа определяет число элементарных зарядов, переносимых одним ионом.

Таблица 11. Подвижность электронов в металлах, см²/с·В

Металл	Ag	Na	Be	Cu	Au	Li	Al	Cd	Zn
Подвижность	56	48	44	35	30	19	10	7,9	5,8

Примечание. Практически напряженность поля внутри металлов не превышает 0,001 В/см, поэтому численные значения скоростей электронов значительно меньше указанных в таблице численных значений подвижности.

Таблица 12. Подвижность ионов в газах, $\text{см}^2/\text{с} \cdot \text{В}$ (при 760 мм рт. ст. и 20° С)

Газ	Ионы		Газ	Ионы	
	положительные	отрицательные		положительные	отрицательные
Азот	2,7	—	Гелий	16,0	—
Аргон	1,5	1,7	Кислород	1,3	1,8
Водород	6,3	8,1	Пары ртути ($p =$ $= 1$ мм рт. ст.)	220	—
Воздух, насыщенный парами воды	1,4	2,1	Углекислый газ		
Воздух сухой	1,4	1,9		0,8	0,8

Примечание. В общем случае подвижность зависит от отношения напряженности электрического поля в газе к давлению газа. При небольших значениях E/p подвижность остается неизменной; при значениях упорядоченных скоростей ионов, сравнимых со скоростями их теплового движения, подвижность ионов изменяется.

Таблица 13. Свойства полупроводников

Вещество	$T_{\text{пл}}, ^\circ\text{С}$	$\Delta E, \text{эВ}$	$u_{-}, \text{см}^2/\text{с} \cdot \text{В}$	$u_{+}, \text{см}^2/\text{с} \cdot \text{В}$
Бор	2300	1,1	10	10
Графит	—	0,1	—	—
Алмаз	—	6—7	1800	1200
Кремний	1414	1,12	1900	500
Германий	958	0,75	3900	1900
Олово (серое)	—	0,08	3000	—
Сера	113	2,4	—	—
Селен (серый)	220	2,3	—	—
Теллур	452	0,36	1700	1200
Иод (I)	113,5	1,3	25	—
Ag_2Te	955	0,17	4000	—
HgTe	670	0,2	10000	100
V_2Te_3	585	0,25	600	150
Mg_2Sn	778	0,36	200	150
PbSe	1065	0,5	1400	1400
ZnTe	1240	0,6	100	—
PbS	1114	1,2	650	800
AgBr	430	1,35	35	—
CdTe	1045	1,45	450	100
Cu_2O	1232	1,5—1,8	—	100
Al_2O_3	2050	2,5	—	—
ZnO	1975	3,2	200	—

Примечание. $T_{\text{пл}}$ — температура плавления; ΔE — ширина запрещенной зоны; u_{-} , u_{+} — подвижность электронов и дырок. Значения подвижностей указаны для комнатной температуры при напряженностях, меньших критического поля.

Т а б л и ц а 14. Магнитная проницаемость парамагнетиков и диамагнетиков

Парамагнетик	$10^{-6} \frac{\mu-1}{\Gamma/\text{м}}$	Диамагнетик	$10^{-6} \frac{1-\mu}{\Gamma/\text{м}}$
Азот	0,013	Водород	0,063
Воздух	0,38	Бензол	7,5
Кислород	1,9	Вода	9,0
Эбонит	14	Медь	10,3
Алюминий	23	Стекло	12,6
Вольфрам	176	Каменная соль	12,6
Платина	360	Кварц	15,1
Кислород (жидкий)	3400	Висмут	176

Т а б л и ц а 15. Удельная магнитная восприимчивость ($\chi_p = \chi/\rho$) некоторых пара- и диамагнитных веществ (при 20° С)

Вещество	$\chi_p, \text{г}^{-1} \cdot 10^{-6}$	Вещество	$\chi_p, \text{г}^{-1} \cdot 10^{-6}$
Алюминий	+0,65	CO ₂	-0,47
Висмут	-1,35	NH ₃	-1,1
Золото	-0,15	HCl	-0,60
Калий	+0,52	H ₂ SO ₄	-0,40
Медь	-0,085	NaCl	-0,51
Платина	+0,97	NiCl ₂	+62,50
Ртуть	-0,168	(безводный)	
Свинец	-0,12	NiCl ₂	+34,20
Сера	-0,49	(гидрат)	
Серебро	-0,20	NiSO ₄ · 7H ₂ O	+16,0
Азот	-0,43	NiSO ₄ · K ₂ SO ₄ · 7H ₂ O	+11,1
Водород	-1,98	CuSO ₄ · 5H ₂ O	+6,1
Гелий	-0,47	MnSO ₄ · 4H ₂ O	+64,6
Кислород	+106,3		

Т а б л и ц а 16. Температура перехода металлов, соединений и сплавов в сверхпроводящее состояние

Вещество	$T_C, \text{К}$	Вещество	$T_C, \text{К}$
<i>Металлы</i>		<i>Сплавы</i>	
Алюминий	1,14	Bi—Pt	0,16
Ванадий	4,3	Pb—Au	2,0—7,3
Висмут	4,2	Sn—Zn	3,7
Галлий	1,07	Pb—Hg	4,1—7,3
Индий	3,37	Sn—Hg	4,2
Кадмий	0,54	Pb—Ag	5,8—7,3
Лантан	4,71	Pb—Sb	6,6

Продолжение табл. 16

Вещество	T_C , К	Вещество	T_C , К
<i>Металлы</i>		<i>Сплавы</i>	
Ниобий	9,22	Pb—Ca	7,0
Олово	3,69	<i>Соединения</i>	
Ртуть	4,12	NbN	15
Свинец	7,26	NbH	13
Титан	1,81	NbC	10,5
Цинк	0,79	TaC	9,5
Тантал	4,38	ZrN	9,5
Уран	1,2	MoC	7,6—8,3
Торий	1,32	Pb ₅ Na ₂	7,2
		Pb ₂ Au	7,0
		WC	2,5—4,2

Таблица 17. Температура Кюри ферромагнитных металлов, соединений и сплавов

Вещество	T_C , °С	Вещество	T_C , °С
Гадолиний	20	Пермаллой (78% Ni)	550
Железо	770	Fe—Al (7,1% Al)	756
Кобальт	1331	Fe—Al (19,7% Al)	664
Никель	358	Fe—Al (24,9% Al)	441
Co ₂ V	510	Fe—Al (26% Al)	494
Fe ₃ Al	500	Fe—Co (20% Co)	950
FeV	739	Fe—Co (33% Co)	970
FeCo	970	Fe—Co (50% Co)	980
Fe ₃ C	213	Fe—Co (75% Co)	870
FeVe ₅	0	Fe—Co (80% Co)	910
Пермаллой (30% Ni)	70		

Таблица 18. Коэффициент Холла для металлов и сплавов при различных температурах

Вещество	T , К	R , Вб/м ²	$10^{-10} R$, м ³ /Кл
Алюминий	273	0,54	—0,33
Литий	297	1,7—1,8	—1,70
Бериллий	290	0,3—2,0	+7,7
Кальций	293	0,3—1,0	—1,78
Титан	291	1,2—2,9	—0,26
Марганец	297	0,6—2,9	+0,84
Цинк	293	0,5—1,1	+1,04

Продолжение табл. 18

Вещество	T, K	$B, Bб/м^2$	$10^{-10} \frac{R_s}{M^3} K_{л}$
Серебро	273	0,54	-0,909
Ниобий	273	0,54	+0,88
Ванадий	293	—	+0,79
Вольфрам	297	1,7—1,8	+1,18
Mg—Li (2,55% Li)	293	—	-0,173
Mg—Li (4,42% Li)	293	—	+0,113
Mo—Nb (7,9% Nb)	290	—	+2,82
Mo—Re (7,4% Re)	290	—	+1,40
Cd—Cu (13,3% Cu)	289	—	-1,38

Таблица 19. Коэффициент Пельтье для различных металлов

Пара металлов	$T, ^\circ C$	$\pi, мкал/Кл$
As → Pb	20	0,91
Bi → Bi _⊥	20	3,59
Cd → Ni	15	1,53
Cu → Ag	0	0,0168
Cu → Al	14	0,405
Cu → Au	0	0,0813
Cu → Bi	18	3,85
Cu → Ni	0	1,90
Cu → Ni	14,4	1,385
Cu → константан	15,5	2,436
Fe → Cu	0	0,664
Fe → Ni	15	2,288
Fe → константан	0	3,10
Pb → Bi	20	5,16
Pb → константан	0	1,90
Pb → константан	100	2,73
Sb → Bi	20	10,7
Zn → Ni	15	1,534

Примечание. Стрелкой указано направление тока через нагретый спай металлов.

Т а б л и ц а 20. Коэффициент Томсона для металлов и сплавов

Вещество	T, K	$\mu_T, \text{мкВ/град}$	Вещество	T, K	$\mu_T, \text{мкВ/град}$
Алюминий	260	+0,11	Медь	70	-0,26
	300	-0,08		170	+0,47
	400	-0,56		300	+1,52
Железо (армко)	323	-15,3	Никель	100	-4,5
	423	-22,8		200	-12,1
	523	-26,3		260	-15,7
Золото	105	+0,29	Константан	323	-24,6
	150	+0,96		384	-25,5
	300	+1,61		446	-26,0
			Нейзильбер	328	-12,0

Т а б л и ц а 21. Значения констант в уравнениях Максвелла

Система	k_1	k_2	k_3	α
Электростатическая	1	$c^{-2} (L^{-2}T^2)$	1	1
Электромагнитная	$c^2 (L^2T^{-2})$	1	1	1
Гауссова	1	$c^{-2} (L^{-2}T^2)$	$c^{-1} (L^{-1}T)$	$c (LT^{-1})$
Хевисайда—Лоренца	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4} c^2 (L^{-2}T^2)$	$c^{-1} (L^{-1}T)$	$c (LT^{-1})$
СИ	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ $(L^3T^{-2}MQ^{-2})$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ (LMQ^{-2})	1	1

П р и м е ч а н и е. В скобках указаны размерности величин.

Т а б л и ц а 22. Уравнения Максвелла и сила Лоренца в разных системах

Система	ϵ_0	μ_0	D, H	Уравнения Максвелла	Сила Лоренца
Электростатическая	1	c^{-2}	$D = E + 4\pi P$ $H = c^2 B - 4\pi M$	$\text{rot } E = -\partial B / \partial t$ $\text{rot } H = 4\pi j + \partial D / \partial t$ $\text{div } D = 4\pi \rho$ $\text{div } B = 0$	$e(E + [vB])$
Электромагнитная	c^{-2}	1	$D = c^{-2}E + 4\pi P$ $H = B - 4\pi M$	$\text{rot } E = -\partial B / \partial t$ $\text{rot } H = 4\pi j + \partial D / \partial t$ $\text{div } D = 4\pi \rho$ $\text{div } B = 0$	$e(E + [vB])$
Гауссова	1	1	$D = E + 4\pi P$ $H = E - 4\pi M$	$\text{rot } E = \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$ $\text{rot } H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$ $\text{div } D = 4\pi \rho$ $\text{div } B = 0$	$e\left(E + \frac{1}{c} [vB]\right)$
Хевисайда — Лоренца	1	1	$D = E + P$ $H = B - M$	$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$ $\text{rot } H = \frac{1}{c} \left(j + \frac{\partial D}{\partial t}\right)$ $\text{div } D = \rho$ $\text{div } B = 0$	$e\left(E + \frac{1}{c} [v, B]\right)$

Система	ϵ_0	μ_0	D, H	Уравнения Максвелла	Сила Лоренца
СИ				$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$ $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$e(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}])$

Таблица 23. Основные величины и единицы их измерения в системе СИ

Величина	Размерность	Единица	Значение в единицах ГС
Длина	L	метр (м, m)	10^2 см
Масса	M	килограмм (кг, kg)	10^3 г
Время	T	секунда (с, S)	1 с
Сила электрического тока	I	ампер (А, A)	$3 \cdot 10^9$ ед. ГС
Сила	LMT^{-2}	ньютон (Н, N)	10^5 дин
Работа, энергия	L^2MT^{-2}	джоуль (Дж, J)	10^7 эрг
Мощность	L^2MT^{-3}	ватт (Вт, W)	10^7 эрг · с ⁻¹
Электрический заряд	TI	кулон (Кл, C)	$3 \cdot 10^9$ ед. ГС
Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр (А · м ⁻²)	$3 \cdot 10^5$ ед. силы тока ГС
Плотность заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр (Кл · м ⁻³)	$3 \cdot 10^8$ см ⁻³ ед. заряда ГС

Электрический потенциал, ЭДС	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт (В, V)	$1/300$ ед. потенциала ГС
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр (В · м)	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$ см ⁻¹ ед. потенциала ГС
Электрическая индукция	$L^{-2}T/I$	кулон на квадратный метр (Кл · м ²)	$12 \cdot 10^5$ см ⁻² ед. заряда ГС
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}I^2$	фарада (Ф, F)	$9 \cdot 10^{11}$ см
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом (Ом, Ф)	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ см ⁻¹ · с
Удельное электрическое сопротивление.	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ом · метр (Ом · м)	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$ с
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}I^2$	сименс (См, S)	$9 \cdot 10^{11}$ см · с ⁻¹
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла (Т, T)	10^4 гаусс (Гс, Gs)
Магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер (Вб, Wb)	10^8 Гс · см ² = 10^8 максвелл (Мкс, Mx)
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр (А · м)	$4 \cdot 10^{-3}$ эрстед (Э, Oe)
Намагниченность	$L^{-1}I$	ампер на метр (А · м)	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^4$ Гс
Индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри (Г, H)	10^9 см

П р и м е ч а н и е. В скобках после названия единицы указано сокращенное обозначение единицы — русское и международное.

Стандартный одновалентный металл (по Пиппарду)

$$k_F = 1,21 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{см}}$$

$$v_F = 1,4 \cdot 10^8 \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

$$\mathcal{E}_F = 8,93 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 5,57 \text{ эВ}$$

$$T_F = \mathcal{E}_F/k = 64700 \text{ К}$$

$$\text{Циклотронная частота } \omega_c = 1,76 \cdot 10^7/\text{Н}, \text{ с}^{-1} (\text{Н} \cdot \text{Гс})$$

$$\text{Радиус максимальной орбиты } R = 7,96/\text{Н}, \text{ см}$$

$$\text{Электропроводность } \sigma = 1,27 \cdot 10^{11} l, \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{см}} (l, \text{ см})$$

$$\text{Теплоемкость } c_V = 632 T \frac{\text{эрг}}{\text{град} \cdot \text{см}^3}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Хронология открытий в области электромагнетизма

- 1600 г.— Вышел в свет трактат У. Гильберта «О магните, магнитных телах и большом магните Земли», в котором заложены основы электро- и магнитостатики.
- 1780 г.— Л. Гальвани в электрофизиологических опытах с лягушками открыл существование электрического тока.
- 1785 г.— Ш. Кулон экспериментально установил основной закон электростатики (закон Кулона).
- 1799 г.— А. Вольта сконструировал первый источник постоянного электрического тока — «вольтов столб» (электрическую батарею).
- 1820 г.— Х. Эрстед открыл магнитное действие тока.
— Ж. Био и Ф. Савар открыли закон, определяющий напряженность магнитного поля прямого тока (закон Био—Савара).
- 1820— А. Ампер установил основные законы взаимодействия электрических токов друг с другом и с магнитами.
- 1822 гг. — А. Ампер установил основные законы взаимодействия электрических токов друг с другом и с магнитами.
- 1821 г.— М. Фарадей установил, что проводник с током вращается вокруг магнита.
— Г. Дэви установил зависимость сопротивления проводника от его длины, поперечного сечения и температуры.
— Т. Зеебек открыл термоэлектричество (эффект Зеебека).
- 1827 г.— Г. Ом установил основной закон электрической цепи (закон Ома).
- 1831 г.— М. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции.
— Дж. Генри и С. даль Негро независимо построили первый электродвигатель.
- 1832 г.— Дж. Генри открыл явление самоиндукции.
— И. Пикси построил генератор переменного тока.
— К. Гаусс и В. Вебер создали абсолютную систему электрических и магнитных единиц.
— Русский ученый П. Л. Шиллинг построил первый электромагнитный телеграф.
— Американец С. Морзе предложил проект телеграфного аппарата, а в 1835 г. построил модель телеграфа (в 1833 г. простейшую телеграфную линию построили также К. Гаусс и В. Вебер).
- 1833 г.— Э. Х. Ленц сформулировал правило определения направления электродвижущей силы индукции (закон Ленца).
— М. Фарадей установил основные законы электролиза.

- 1835 г.— Э. Х. Ленц экспериментально доказал уменьшение сопротивления металлов при охлаждении.
- 1837 г.— М. Фарадей обнаружил влияние диэлектриков на взаимодействие электрических зарядов.
- 1838 г.— Б. С. Якоби изобрел гальванопластику.
- 1841 г.— Дж. Джоуль установил закон теплового действия тока (в 1842 г. его открыл также Э. Х. Ленц, отсюда и название — закон Джоуля — Ленца).
- 1842 г.— Дж. Генри установил колебательный характер разряда конденсатора.
- 1843 г.— М. Фарадей экспериментально доказал закон сохранения электрического заряда.
- 1845 г.— М. Фарадей открыл пара- и диамагнетизм, вращение плоскости поляризации света в магнитном поле, впервые употребил термин «магнитное поле».
- Г. Кирхгоф установил закономерности в распределении электрического тока в разветвленной цепи.
- 1860— Создание Дж. Максвеллом теории электромагнитного поля
- 1865 гг. (первые дифференциальные уравнения поля записаны им в 1855 г.).
- 1860 г.— Построен двигатель постоянного тока с коллектором (кольцевой электродвигатель) и изобретена динамомашин (А. Пачинотти),
- 1865 г.— Дж. Максвелл постулировал существование электромагнитных волн.
- Дж. Максвелл выдвинул идею электромагнитной природы света.
- Р. Клаузиус ввел понятие энтропии.
- 1872 г.— У. Томсон изобрел электрический счетчик.
- А. Н. Лодыгин изобрел электрическую лампу накаливания, в 1879 г. Т. Эдисон создал лампу накаливания с угольной нитью долговечной конструкции, удобную для промышленного изготовления,
- Л. Больцман вывел основное кинетическое уравнение газов.
- 1873 г.— Дж. К. Максвелл опубликовал «Трактат об электричестве и магнетизме», содержащий полное изложение теории электромагнитного поля и электромагнитной теории света.
- Английский физик У. Смит открыл внутренний фотоэффект (фотопроводимость).
- Дж. Максвелл теоретически определил величину давления света (идея светового давления выдвинута И. Кеплером в 1619 г.).
- 1874 г.— Н. А. Умов ввел понятие скорости и направления движения энергии в потоке энергии (вектор Умова). Применительно к электромагнитной энергии это сделал в 1884 г. Дж. Пойнтинг (вектор Пойнтинга).
- Дж. Стоней высказал мысль о дискретности электрического заряда и вычислил его величину (опубликовано в 1881 г.); в 1891 г. он предложил для постулированной единицы электрического заряда название электрон.
- Ф. Кольрауш установил возрастание проводимости электролитов с ростом температуры.
- 1876 г.— П. Н. Яблочков изобрел первый практически пригодный источник электрического освещения (свеча Яблочкова).
- А. Белл изобрел телефонный аппарат.

- 1876 г — Изготовлен селеновый фотоэлемент (В. Адамс, Р. Дэй).
- 1879 г.— Э. Холл открыл гальваномагнитное явление, названное его именем (эффект Холла).
- 1880 г.— Э. Варбург ввел понятие гистерезиса.
- 1881 г.— Дж. Томсон ввел понятие электромагнитной массы.
— Установлены международные единицы измерения физических величин (ампер, вольт, ом, джоуль и др.).
- 1884 г.— Т. Эдисон открыл явление термоионной эмиссии (эффект Эдисона).
- 1886 г.— Открытие канальных лучей (Э. Гольдштейн).
- 1887 г.— Г. Герц сконструировал генератор электромагнитных колебаний (вibrator Герца).
- 1888 г.— Г. Герц экспериментально доказал существование электромагнитных волн.
— А. Г. Столетов установил закон внешнего фотоэффекта.
— Открыто явление вращающегося магнитного поля (Н. Тесла, Г. Феррарис).
— М. И. Доливо-Добровольский создал генератор трехфазного тока.
- 1890 г.— М. И. Доливо-Добровольский создал асинхронный короткозамкнутый двигатель трехфазного тока и изобрел трансформатор трехфазного тока.
- 1892 г.— Х. Лоренц создал классическую электронную теорию.
- 1894 г.— А. С. Попов изобрел антенну.
— Описание необычных диэлектрических свойств сегнетовой соли (Поккельсон).
- 1895 г.— В. Рентген открыл излучение, названное его именем (рентгеновские лучи).
— А. С. Попов изобрел радио.
— Экспериментально доказано, что катодные лучи являются потоком отрицательно заряженных частиц (Ж. Перрен).
— П. Кюри установил температурную зависимость магнитной восприимчивости парамагнетиков (закон Кюри).
— Х. Лоренц создал электродинамику движущихся сред.
- 1897 г.— Дж. Дж. Томсон и Э. Вихерт открыли электрон.
— Дж. Лармор установил теорему о прецессии электрона в магнитном поле.
— А. С. Попов создал радиолокацию.
- 1899 г.— П. Н. Лебедев экспериментально доказал, что свет оказывает давление на твердые тела.
- 1900 г.— М. Планк ввел квант действия, положив начало квантовой теории.
— П. Друде и Дж. Дж. Томсон создали основы классической теории металлов.
- 1901 г.— Дж. Таусенд создал теорию самостоятельного газового разряда.
— Г. Маркони осуществил первую трансатлантическую радиопередачу.
- 1902 г.— В. Вин установил отклонение канальных лучей в электрическом и магнитном полях.
— М. Абрагам ввел понятие электромагнитного импульса.
- 1903 г.— О. Ричардсон установил закон для плотности тока насыщения термоэлектронной эмиссии в зависимости от температуры.

- 1905 г.— А. Эйнштейн объяснил фотоэффект на основе гипотезы квантов.
— П. Ланжевен разработал классическую теорию диа- и парамагнетизма.
- 1906 г.— Л. Форест изобрел триод.
- 1907 г.— А. Эйнштейн разработал первую квантовую теорию теплоемкости твердых тел.
— П. Вейсс выдвинул гипотезу о существовании ферромагнитных доменов.
- 1911 г.— Г. Каммерлинг-Оннес открыл явление сверхпроводимости.
- 1912 г.— Развита теория колебаний кристаллической решетки (Д. Дебай, М. Борн, Т. Карман).
- 1913 г.— Г. Каммерлинг-Оннес обнаружил, что сверхпроводимость разрушается под действием сильных магнитных полей.
— Э. Резерфорд предсказал протон.
— Использование триода для генерирования незатухающих электрических колебаний (А. Мейсснер).
— И. Ленгмюр установил закон для термоионного тока.
- 1918 г.— П. Вейсс и Г. Пикар открыли магнитокалорический эффект.
- 1919 г.— Г. Баркгаузен открыл явление скачкообразного изменения намагниченности ферромагнетиков при непрерывном изменении поля.
- 1920 г.— М. Саха вывел формулу, определяющую степень термической ионизации в газе.
- 1923 г.— Луи де Бройль высказал идею о волновых свойствах материи.
- 1924 г.— В. Паули сформулировал принцип запрета (принцип Паули).
— Г. Каммерлинг-Оннес показал возможность создания незатухающего тока в кольце, состоящем из двух различных сверхпроводников, находящихся в контакте.
— П. Л. Капица разработал методику получения кратковременных магнитных полей напряженностью до 500 тысяч эрстед.
- 1926 г.— Э. Ферми, П. Дирак разработали квантовую статистику для частиц с полуцелым спином — статистика Ферми — Дирака.
— Э. Шредингер построил волновую механику.
— Э. Ферми построил теорию вырожденного электронного газа.
- 1927 г.— В. Паули разработал теорию парамагнетизма электронного газа.
- 1928 г.— П. Дирак и В. Гейзенберг открыли обменное взаимодействие.
— А. Зоммерфельд разработал первую квантовую теорию металлов.
— Ф. Блох и Л. Бриллюэн разработали основы зонной теории твердых тел.
— В. Гейзенберг и Я. И. Френкель независимо построили первую квантовомеханическую теорию ферромагнетизма.
- 1930 г.— Л. В. Шубников и В. де Гааз открыли эффект, названный их именем.
— Л. Д. Ландау теоретически предсказал диамагнетизм электронов в металлах.
— Ф. Блох ввел понятие спиновых волн.

- 1930 г.— Ф. Блох вывел закон для температурного хода намагниченности ферромагнетика при низких температурах.
— Н. С. Акулов разработал феноменологическую теорию магнитной анизотропии и магнитострикции.
— К. Вагнер обнаружил существование двух типов полупроводников — электронных и дырочных.
- 1932 г.— Л. Неель предсказал антиферромагнетизм.
— А. Хиппель доказал электронную природу электрического прибора.
- 1933 г.— В. Мейсснер и Р. Оксенфельд установили, что сверхпроводник выталкивает приложенное снаружи магнитное поле.
- 1934 г.— И. К. Кикоин и М. М. Носков открыли явление возникновения электрического поля в полупроводнике, помещенном в магнитное поле, при освещении его сильно поглощаемым светом.
— К. Гортер предложил метод адиабатического ядерного размагничивания для получения сверхнизких температур.
— Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц разработали теорию доменной структуры ферромагнетиков.
- 1935 г.— Ф. Лондон и Г. Лондон развили феноменологическую теорию электродинамических свойств сверхпроводников.
- 1937 г.— Л. Д. Ландау разработал теорию промежуточной структуры сверхпроводников.
- 1944 г.— В. И. Векслер открыл новый принцип ускорения частиц — принцип автофазировки.
— Б. М. Вул обнаружил высокие сегнетоэлектрические свойства у титаната бария.
- 1945 г.— В. Л. Гинзбург разработал термодинамическую теорию сегнетоэлектрических явлений.
- 1950 г.— В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау развили полуфеноменологическую квантовую теорию сверхпроводимости.
— Выдвинута идея термоизоляции горячей плазмы магнитным полем, положенная в основу работы всех термоядерных установок (И. Е. Тамм и др.).
— Х. Альвен открыл магнитогидродинамические (альвеновские) волны и заложил основы магнитной гидродинамики.
- 1952 г.— Г. И. Будкер выдвинул идею удержания плазмы магнитным полем, силовые линии которого имеют места сгущения (магнитные пробки).
- 1953 г.— А. Пиппард предложил нелокальную модификацию уравнения Лондонов.
- 1956 г.— А. Купер показал возможность существования связанных пар электронов в металле.
- 1957 г.— Д. Бардин, Л. Купер, Д. Шриффер дали микроскопическую теорию сверхпроводимости. В 1958 г. математически строгую теорию сверхпроводимости построил Н.Н. Боголюбов.
— А. А. Абрикосов построил теорию магнитных свойств сверхпроводящих сплавов и развил теорию вихревых нитей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрикосов А. А.* Введение в теорию нормальных металлов.— М.: Наука, 1972.—288 с.
2. *Барфут Дж.* Введение в физику сегнетоэлектрических явлений.— М.: Мир, 1970.—352 с.
3. *Блох Ф.* Молекулярная теория магнетизма.— Киев: Гостехиздат, 1934.— 109 с.
4. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика.— М.: Мир, 1965.— 702 с.
5. *Де Жен П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов.— М.: Мир, 1968.—280 с.
6. *Киттель К.* Физическая теория доменной структуры ферромагнетиков.— Успехи физ. наук, 1950, 151, вып. 4, с. 452—544.
7. *Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г.* Справочник по элементарной физике. 6-е. изд.— М.: Наука, 1974.—255 с.
8. *Кэй Дж., Лэви Т.* Таблица физических и химических постоянных — М.: Физматгиз, 1962.—246 с.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М., Гостехиздат, 1957.—532 с.
10. *Саттон Дж., Шерман А.* Основы технической магнитной газодинамики.— М.: Мир, 1968.—492 с.
11. *Смоленский Г. А., Боков В. А., Исупов В. А. и др.* Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики.— Л.: Наука, 1971.—476 с.
12. *Таблицы физических величин.* Справочник/Под ред. И. К. Кирикоина.— М.: Атомиздат, 1976.—1006 с.
13. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества.— М.: Наука, 1966.— 624 с.
14. *Тейлор Б., Паркер В., Лангенберг Д.* Фундаментальные константы и квантовая электродинамика.— М.: Атомиздат, 1972.— 327 с.
15. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 9. Квантовая механика. II.— М.: Мир, 1967.—259 с.
16. *Храмов Ю. А.* Физики: Биограф. справочник.— Киев: Наук. думка, 1974.—509 с.
17. *Энгель А., Штенбек М.* Физика и техника электрического разряда в газах: В 2-х т. М.: ОНТИ, 1935.— Т.1.245 с.; Т.2. 383 с.
18. *Rippard A. B.* Experimental analysis of the electronic structure of metals.— Repts Progr. Phys., 1960, 23, p. 176—266,

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатический инвариант 218
Аккумулятор 169
Альвеновская волна 361, 364
Амбиполярная диффузия 184
Анизотропия магнитная 385
Антиферромагнетики 377
- Бетатрон 254
Бора магнетон 341
Блоха закон для намагниченности 371, 401
— стенка 390
- Вектор поляризации 70
Векторный потенциал 207
Вейсса гипотеза 377
— молекулярное поле 378
— уравнение 378, 380
Видемана — Франца закон 143
Вмороженность поля 360
Водорода молекула 376
Волновое сопротивление 291
— уравнение 306
Вольфарта изотерма 383
Вращающееся магнитное поле 249
Время свободного пробега электрона 130, 135
Вырожденный электронный газ 113
- Гальваномагнитные явления 364
Гаусса теорема 17
Гиббса — Гельмгольца уравнение 168
Гистерезис 373
Главные направления поляризуемости 80
Градиентный дрейф 216
- Граничный импульс Ферми 115
Граничная энергия Ферми 115
- Дебая радиус 29
— температура 139
Джоулево тепло 110
Диамagnetная восприимчивость 350
Диод 173
Диполь электрический 22
Длина свободного пробега электрона 130, 138
Домены нормальные в сверхпроводнике 413
— сверхпроводящие 413
— ферромагнитные 389
Друде формула 130, 136
- Емкость конденсатора 47
- Закон действующих масс 157
— полного тока 204
— электромагнитной индукции 238
Зона проводимости 152
- Импеданс 260
Интеграл столкновений электронов 132
Ирншоу теорема 56
- Квазимпульс 131
Кирхгофа правило 102
Клаузиуса — Моссотти формула 76
Контактная разность потенциалов 127
Коэрцитивная сила 373, 394, 396
Корреляционная функция 285
Коэффициент взаимной индукции 230
— самоиндукции 232

- теплопроводности металла 142
- Критическое магнитное поле сверхпроводника 403
- Критическая температура сверхпроводника 150
- Кулона закон 11
- Куперовские пары 151
- Кюри — Вейсса закон 372, 379
- Кюри температура 371

- Ландау диамагнетизм 347
- Ланде множитель 345, 374
- Ланжевена функция 344
- Лапласа уравнение 26
- Лармора теорема 348
- Ларморов радиус 200
- Ледюка — Риги эффект 370
- Ленгмюра частота 32
- Лондонов уравнение 408
- Ленца правило 237

- Магнитная неоднородность 384, 399
- Магнитное зеркало 220
- Магнитный момент 210
- Магнитогидродинамический генератор 245
- Магнитогидродинамическое течение 358
- Магнитозвуковые волны 361, 363
- Магнитострикция 354
 - ферромагнетиков 386
- Магнитоупругая энергия 387
- Магноны 400
- Максвелла уравнения 321, 359
- Мейсснера эффект 404, 418

- Найквиста формула 288
- Намагниченность 318
 - спонтанная 371
- Направление легчайшего намагничивания 374, 385
- Напряженность магнитного поля 319
- Нееля температура 377
- Нернста эффект 370

- Обменная энергия 377, 383
- Обменное взаимодействие 377, 398
- Обменный интеграл 377, 398
 - эффект 376
- Ома закон 91, 360
 - для магнитной цепи 336
- Онзагера соотношения 147, 369
 - формула 75
- Остаточная намагниченность 373
- Остаточное сопротивление 141

- Паули парамагнетизм 346
 - принцип 114
- Пельтье эффект 149
- Пиппарда формула 411
- Планка постоянная 114
 - распределение 139
- Плотность электрической энергии 51
 - электромагнитной энергии 325
 - электронных состояний 122, 153
- Полупроводник примесный 145
 - собственный 145
- Поляризуемость 68
- Постоянная времени контура 259
- Потенциал спаривания в сверхпроводнике 407
- Поток магнитной индукции 227
- Промежуточное состояние сверхпроводника 413
- Пуассона уравнение 24
- Пьезоэлектрический эффект 87

- Работа выхода электрона 124
- Размагничивающие факторы 389
- Резонансная частота 270
- Ричардсона — Дешмана формула 125
- Рутгерса формула 406

- Сверхпроводники второго рода (лондоновские) 411, 416, 418
 - первого рода (пиппардовские) 411, 416, 418
- Сегнетоэлектрики 83
- Синхронный генератор 242
- Скорость дрейфа 202
- Спиновые волны 400
- Стелларатор 224
- Степень диссипации 156
 - тепловой ионизации 187
- Стокса формула (теорема) 206, 360
- Стонера критерий 382
- Температура вырождения 119

- Тензор магнитной проницаемости 333
— натяжений 313
— размагничивающих коэффициентов 338
Теплоемкость электронного газа 120
Терромагнитные явления 368
ТермоЭДС 148
Термоэлектронная эмиссия 123
Токамак 224
Ток смещения 305
Томсона эффект 149
Трехфазный ток 242
Удельное сопротивление 97
Униполярная индукция 247
Уравнение непрерывности 91, 359
Фарадея число 161
Ферми механизм ускорения космических лучей 221
— распределение 117
Фононы 138
Фотоэффект 126
Химический потенциал электрона 118
Холла константа 364
Эйнштейна — де-Гааза опыт 374
Эйнштейна соотношение для подвижности 183
— — — фотоэффекта 126
Экранированное кулоновское поле 26
Электрических изображений метод 43
Электродвижущая сила (ЭДС) 97
Электролиз 161
Электроны проводимости 123
Энергетические зоны 122
Энергия магнитной анизотропии 385

АЛЕКСАНДР ИЛЬИЧ АХИЕЗЕР
ОБЩАЯ ФИЗИКА.
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ.

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

*Печатается по решению редакционной коллегии
справочной литературы АН УССР*

Редактор *А. Я. Бельдий*
Редактор-библиограф *Л. П. Шевченко*
Художественный редактор *А. В. Косяк*
Технический редактор *И. Н. Лукашенко*
Корректоры *Л. П. Осьмушникова,*
Т. Я. Чорная, Л. М. Тищенко

Инфор. бланк № 3953.

Сдано в набор 22.09.80.
Подп. в печ. 08.04.81.
БФ 01551. Формат 84×108/32.
Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печ.
Усл. печ. л. 24,78. Уч.-изд. л. 30,44. Усл. кр. от.
24,99. Тираж 100 000 (1 завод 1—40000) экз.
Заказ 1-187. Цена 1 руб. 70 коп.

Издательство „Наукова думка“
252601, Киев, ГСП. Репина, 3.

Отпечатано с матриц книжной фабрики
им. М. В. Фрунзе на книжной фабрике «Ком-
мунист» РПО «Полиграфкинига» Госкомиздата
УССР, 310012, Харьков-12, Энгельса, 11,

1 р. 70 к.

«НАУКОВА ДУМКА»