

530.3

А 95

УДК 538.11

**«Спиновые волны»**, Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В., монография, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1967.

В качестве вводного описания подробно излагается обменная модель ферромагнетика и антиферромагнетика. Развита феноменологическая (макроскопическая) теория спиновых волн. Рассмотрено поведение ферромагнетиков и антиферромагнетиков в высокочастотном внешнем поле (ферромагнитный и антиферромагнитный резонанс). Развита теория взаимодействия между упругими деформациями и спиновыми волнами. Изложена квантовая теория спиновых волн. Рассмотрены термодинамические свойства ферромагнетиков и антиферромагнетиков (спиновая теплоемкость, магнитно-калорический эффект). Развита формализм гриновских функций применительно к рассматриваемым задачам. Кратко рассмотрены эффекты, связанные с флуктуациями магнитных характеристик (в частности рассеяние медленных нейтронов на спиновых волнах). Описаны кинетические эффекты в ферромагнетиках (магنون-магنونное и магنون-фононное рассеяние). Рис. 20, библи. 124 назв.

*Александр Ильич Ахиезер,  
Виктор Григорьевич Барьяхтар,  
Сергей Владимирович Пелетминский*

Спиновые волны

М., 1967 г. 368 стр. с илл.

Редактор *К. П. Гуров*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *Л. Н. Боровина и О. А. Сигаля*

---

Слано в набор 4/V 1967 г. Подписано к печати 8/VIII 1967 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.  
Физ. печ. л. 11,5. Услонн. печ. л. 19,32. Уч. изд. л. 19,21. Тираж 10 000 экз. Т-07074.  
Цена книги 1 р. 39 к. Заказ № 704.

---

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой  
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.  
Измайловский проспект, 29.

2-3-6

103 67

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	8
<b>Глава I. Ферромагнетики и антиферромагнетики . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Обменная модель ферромагнетика . . . . .	11
1. Магнитное упорядочение . . . . .	11
2. Молекула водорода . . . . .	12
3. Обменный гамильтониан ферромагнетика . . . . .	18
4. Обменная энергия ферромагнетика . . . . .	22
§ 2. Магнитное дипольное взаимодействие . . . . .	25
1. Энергия дипольного взаимодействия . . . . .	25
2. Тензор размагничивающих коэффициентов . . . . .	29
§ 3. Энергия магнитной анизотропии и полная энергия ферромагнетика . . . . .	32
1. Спин-орбитальное взаимодействие . . . . .	32
2. Плотность энергии магнитной анизотропии . . . . .	34
3. Полная энергия ферромагнетика . . . . .	36
§ 4. Энергия антиферромагнетика . . . . .	38
1. Обменная энергия антиферромагнетика . . . . .	38
2. Энергия магнитной анизотропии и полная энергия антиферромагнетика . . . . .	41
<b>Глава II. Макроскопическая теория спиновых волн . . .</b>	<b>43</b>
§ 5. Уравнение движения магнитного момента и уравнение переноса тепла в ферромагнетиках . . . . .	43
1. Уравнение движения магнитного момента . . . . .	43
2. Поток и диссипация энергии . . . . .	46
3. Уравнение переноса тепла в ферромагнетике . . . . .	50
4. Граничные условия для вектора намагничивания . . . . .	52
5. Равновесные состояния ферромагнетиков и линеаризованное уравнение движения плотности магнитного момента . . . . .	54
§ 6. Спиновые волны в ферромагнетиках . . . . .	60
1. Тензор высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетика . . . . .	60

2. Закон дисперсии спиновых волн . . . . .	62
3. Затухание спиновых волн . . . . .	64
§ 7. Уравнения движения магнитных моментов в антиферромагнетиках . . . . .	68
1. Эффективные магнитные поля в антиферромагнетиках	68
2. Равновесные состояния антиферромагнетиков . . . . .	69
§ 8. Спиновые волны в антиферромагнетиках . . . . .	70
1. Тензор высокочастотной магнитной восприимчивости антиферромагнетиков . . . . .	70
2. Спектр спиновых волн в антиферромагнетиках . . . . .	73
§ 9. Электромагнитные волны в магнитоупорядоченных кристаллах . . . . .	75
1. Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн	75
2. Взаимодействие между собственно электромагнитными и спиновыми волнами . . . . .	78
3. Вращение плоскости поляризации в одноосных ферромагнетиках . . . . .	81
<b>Глава III. Высокочастотные свойства ферромагнетиков и антиферромагнетиков . . . . .</b>	<b>83</b>
§ 10. Однородный ферромагнитный и антиферромагнитный резонансы . . . . .	83
1. Уравнение для определения частот однородного резонанса . . . . .	83
2. Однородный ферромагнитный резонанс . . . . .	85
3. Однородный антиферромагнитный резонанс . . . . .	88
4. Поглощение энергии вблизи резонанса . . . . .	89
§ 11. Неоднородный ферромагнитный резонанс . . . . .	91
1. Общие уравнения для определения частот неоднородного резонанса . . . . .	91
2. Пластика . . . . .	93
3. Шар . . . . .	95
4. Эллипсоид вращения . . . . .	98
5. Резонанс на стоячих спиновых волнах . . . . .	99
§ 12. Поверхностный импеданс ферромагнетиков . . . . .	102
1. Дисперсионное уравнение для ферромагнитного металла . . . . .	102
2. Соотношения между амплитудами полей в ферромагнитном металле . . . . .	104
3. Поверхностный импеданс . . . . .	108
4. Плотность потока энергии через поверхность ферромагнетика . . . . .	110
5. Пространственная дисперсия высокочастотной магнитной восприимчивости и поверхностный импеданс ферромагнитных металлов . . . . .	111

§ 13.	Параметрическое возбуждение спиновых волн . . . . .	116
1.	Уравнения параметрического ферромагнитного резонанса . . . . .	116
2.	Инкремент нарастания амплитуд неоднородных колебаний магнитного момента . . . . .	119
§ 14.	Когерентное усиление спиновых волн потоком заряженных частиц . . . . .	125
1.	Условия резонанса . . . . .	125
2.	Инкремент нарастания амплитуд спиновых волн . . . . .	126
3.	Немоноэнергетический пучок . . . . .	134
<b>Глава IV. Связанные магнитоупругие волны . . . . .</b>		<b>136</b>
§ 15.	Уравнения теории упругости и уравнение движения магнитного момента в ферромагнетиках . . . . .	136
1.	Эффективное магнитное поле и тензор натяжений в упруго деформированном ферромагнетике . . . . .	136
2.	Плотность потенциальной энергии ферромагнетика . . . . .	141
3.	Граничные условия . . . . .	143
4.	Следствия из закона сохранения момента количества движения . . . . .	146
5.	Изменение энтропии деформированного ферромагнетика . . . . .	149
6.	Основные уравнения . . . . .	149
7.	Случай малых неоднородностей . . . . .	151
§ 16.	Связанные магнитоупругие волны в ферромагнетиках . . . . .	154
1.	Линеаризованные уравнения движения . . . . .	154
2.	Взаимодействие звуковых волн со спиновыми волнами и магнитоакустический резонанс . . . . .	156
3.	Затухание магнитоупругих волн . . . . .	164
4.	Вращение плоскости поляризации поперечной магнитоупругой волны . . . . .	168
<b>Глава V. Квантовая теория спиновых волн . . . . .</b>		<b>170</b>
§ 17.	Квантование спиновых волн в ферромагнетиках . . . . .	170
1.	Магноны . . . . .	170
2.	Операторы рождения и уничтожения магнонов и фононов . . . . .	173
§ 18.	Представление гамильтониана ферромагнетика с помощью операторов рождения и уничтожения магнонов . . . . .	175
1.	Реализация операторов спина с помощью бозевских операторов . . . . .	175
2.	Унитарное преобразование . . . . .	180
3.	Энергия магнона . . . . .	182
§ 19.	Связанные состояния двух магнонов . . . . .	185
1.	Уравнение Шредингера для связанных состояний двух магнонов . . . . .	185
2.	Спектр связанных состояний . . . . .	189

<b>Глава VI. Термодинамика ферромагнетиков и антиферромагнетиков . . . . .</b>	<b>196</b>
§ 20. Термодинамика ферромагнетиков . . . . .	196
1. Термодинамический потенциал идеального газа магнонов . . . . .	196
2. Равновесный магнитный момент и спиновая теплоемкость ферромагнетиков . . . . .	197
3. Магнитокалорический эффект . . . . .	205
4. Влияние взаимодействия между спиновыми волнами на термодинамический потенциал ферромагнетика . . . . .	207
§ 21. Термодинамика антиферромагнетиков . . . . .	210
1. Спиновая теплоемкость антиферромагнетиков . . . . .	210
2. Тензор статической магнитной восприимчивости антиферромагнетиков . . . . .	213
§ 22. Спиновые функции Грина и высокочастотная магнитная восприимчивость ферромагнетиков . . . . .	215
1. Корреляционные функции спинов и двухвременные функции Грина . . . . .	215
2. Связь тензора высокочастотной магнитной восприимчивости с двухвременной запаздывающей функцией Грина . . . . .	218
3. Энергия, поглощаемая ферромагнетиком . . . . .	224
§ 23. Спиновые функции Грина и намагниченность ферромагнетика . . . . .	228
1. Уравнение для запаздывающей функции Грина . . . . .	228
2. Равновесный магнитный момент ферромагнетика в случае спина, равного половине . . . . .	231
3. Равновесный магнитный момент ферромагнетика в случае произвольного спина . . . . .	233
§ 24. Флуктуации магнитных величин и рассеяние медленных нейтронов и света на спиновых волнах . . . . .	237
1. Корреляторы флуктуаций магнитных величин в ферромагнетиках . . . . .	237
2. Рассеяние медленных нейтронов на спиновых волнах . . . . .	240
3. Комбинационное рассеяние света на спиновых волнах . . . . .	245
<b>Глава VII. Кинетические явления в ферромагнетиках . . . . .</b>	<b>252</b>
§ 25. Процессы взаимодействия между магнонами . . . . .	252
1. Гамильтониан взаимодействия магнонов друг с другом . . . . .	252
2. Вероятности распада и слияния магнонов . . . . .	254
3. Вероятность рассеяния магнонов магнонами . . . . .	259
§ 26. Процессы взаимодействия магнонов и фононов . . . . .	261
1. Гамильтониан взаимодействия магнонов с фононами . . . . .	261
2. Вероятности испускания магноном фонона и превращения двух магнонов в фонон . . . . .	263
3. Вероятности процессов взаимодействия фононов с магнонами . . . . .	265

§ 27. Релаксация магнитного момента в ферромагнетиках . . .	268
1. Квазиравновесные бозевские распределения магнонов и фононов . . . . .	268
2. Уравнения для определения параметров квазиравновесных распределений . . . . .	273
3. Релаксация магнитного момента и выравнивание температур спинов и решетки . . . . .	276
4. Релаксация магнитного момента в области очень низких температур . . . . .	278
§ 28. Теплопроводность ферромагнетиков . . . . .	281
1. Поток энергии спиновых волн . . . . .	281
2. Кинетические уравнения для определения функций распределения магнонов и фононов . . . . .	284
3. Теплопроводность ферромагнетиков при низких температурах . . . . .	287
4. Второй звук в ферромагнетиках . . . . .	292
<b>Глава VIII. Квантовая теория спиновых волн, использующая индефинитную метрику . . . . .</b>	<b>296</b>
§ 29. Квантование спиновых волн . . . . .	295
1. Операторы идеализированных спинов . . . . .	295
2. Индефинитная метрика . . . . .	299
3. Связь матричных элементов спинов и идеализированных спинов . . . . .	301
4. Теорема о следах . . . . .	305
5. Связь между различными реализациями операторов спина . . . . .	305
6. Представление статистической суммы ферромагнетика с помощью бозевских операторов . . . . .	307
§ 30. Термодинамический потенциал ферромагнетика . . . . .	316
1. Разложение термодинамического потенциала по степеням температуры . . . . .	316
2. Уравнения, определяющие амплитуду рассеяния двух магнонов . . . . .	320
3. Амплитуда рассеяния магнонов в области малых импульсов . . . . .	323
§ 31. Теория высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетиков . . . . .	328
1. Связь тензора высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетика с функциями Грина магнонов . . . . .	328
2. Нахождение функций Грина магнонов . . . . .	331
3. Компоненты тензора высокочастотной магнитной восприимчивости . . . . .	338
<b>Дополнение. Спиновые волны в неферромагнитных металлах (В. П. Силин) . . . . .</b>	<b>344</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>364</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы, особенно в связи с различными приложениями, интенсивно развиваются исследования магнитоупорядоченных кристаллов — ферромагнетиков, антиферромагнетиков и ферритов. Многие свойства этих кристаллов — в первую очередь высокочастотные, а также термодинамические и кинетические свойства — определяются в области низких температур специфическими волнами, могущими распространяться в этих телах, так называемыми спиновыми волнами, представляющими собой передающиеся от атома к атому колебания атомного магнитного момента.

Эти волны и связанные с ними частицы — магноны, открытые в 1930 г. Блохом, во многом аналогичны дебаевским квантам звука — фононам в обычных кристаллах. Как те, так и другие подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, и вносят свой вклад в теплоемкость и теплопроводность магнитоупорядоченных кристаллов. В отличие от фононов спиновые волны — магноны — обладают магнитным моментом, поэтому они определяют не только тепловые, но и магнитные свойства магнитоупорядоченных кристаллов.

Настоящая книга посвящена теории спиновых волн. Мы начинаем с изложения основ теории ферромагнетизма — модели Гейзенберга, и далее последовательно излагаем сперва феноменологическую, а затем микроскопическую теорию спиновых волн.

Феноменологическая теория, базирующаяся на уравнениях электромагнитного поля Максвелла и уравнении движения магнитного момента, позволяет исследовать высокочастотные свойства магнитоупорядоченных кристаллов, в частности однородный и неоднородный ферромагнитный и антиферромагнитный резонансы, поверхностный импеданс, параметрическое возбуждение спиновых волн, когерентное

усиление спиновых волн потоками заряженных частиц. Она позволяет также, с привлечением теории упругости, развить теорию связанных магнитоупругих волн, в частности теорию магнитоакустического резонанса.

Фундаментальной проблемой в микроскопической теории спиновых волн является проблема их квантования, сводящаяся к представлению операторов спина с помощью бозевских операторов рождения и уничтожения магнонов. Мы излагаем два метода решения этой проблемы, принадлежащие Голстейну и Примакову и Дайсону. Кроме того, мы приводим решение задачи о связанных состояниях двух магнонов.

Микроскопическая теория спиновых волн позволяет исследовать термодинамические и кинетические свойства магнитоупорядоченных кристаллов в области низких температур. При исследовании термодинамических свойств магнитоупорядоченный кристалл можно рассматривать как совокупность идеальных газов магнонов, фононов и электронов проводимости. Мы определяем зависимости намагниченности и теплоемкости магнитоупорядоченных кристаллов от температуры и внешнего магнитного поля, а также излагаем теорию флуктуаций магнитных величин, позволяющую исследовать такие явления, как рассеяние медленных нейтронов и рассеяние электромагнитных волн на спиновых волнах.

Кинетические свойства магнитоупорядоченных кристаллов существенно связаны с неидеальностью газов магнонов, фононов и электронов проводимости. Поэтому для их исследования необходим учет различных процессов взаимодействия между магнонами, фононами и электронами проводимости, а также между этими частицами и примесными атомами. Мы ограничиваемся рассмотрением только достаточно чистых магнитоупорядоченных диэлектриков, кинетические свойства которых определяются процессами рассеяния магнона магноном и черенковским излучением фонона магноном. Мы излагаем теорию релаксации магнитного момента и выравнивания температур спинов и решетки в таких кристаллах, а также теорию теплопроводности магнитоупорядоченных диэлектриков; наконец, мы излагаем квантовую теорию высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетиков.

Мы надеемся, что эта книга, несмотря на ее неполноту — в ней отсутствует, например, микроскопическая теория кинетических явлений в ферромагнитных металлах и не содержится теория спиновых волн в сложных (винтовых) магнитных структурах, — будет, тем не менее, полезной как теоретикам,



так и экспериментаторам, работающим в области физики магнитоупорядоченных кристаллов.

Для понимания большей части книги достаточно знания основ квантовой механики и статистической физики, и только последняя глава, содержащая более абстрактный материал, требует знания квантовой теории поля. Из этой главы, которая в первом чтении может быть опущена, для экспериментаторов должен представлять интерес последний раздел последнего параграфа.

Мы хотели бы в заключение выразить благодарность И. А. Ахиезеру, написавшему для книги параграф о флуктуациях магнитных величин и рассеянии медленных нейтронов и электромагнитных волн на спиновых волнах, и В. П. Силину, написавшему дополнение о спиновых волнах в неферромагнитных металлах. Мы благодарны также В. В. Ганну, В. А. Попову, М. А. Савченко и Л. А. Шишкину за помощь в подготовке рукописи.

*Авторы*

## ГЛАВА I

### ФЕРРОМАГНЕТИКИ И АНТИФЕРРОМАГНЕТИКИ

#### § 1. Обменная модель ферромагнетика

**1. Магнитное упорядочение.** Целый ряд кристаллов обладает упорядоченной магнитной структурой. Это значит, что в отсутствие стороннего магнитного поля среднее (квантовомеханическое) значение магнитного момента по крайней мере одного из атомов в каждой элементарной ячейке кристалла отлично от нуля.

В простейшем типе магнитоупорядоченных кристаллов — ферромагнетиках (Fe, Ni, Co, Dy) — средние значения магнитных моментов всех атомов имеют одинаковую ориентацию, если только температура ферромагнетика не превосходит определенной критической температуры — температуры Кюри. Благодаря этому ферромагнетики обладают спонтанным магнитным моментом, т. е. макроскопическим магнитным моментом, отличным от нуля в отсутствие стороннего магнитного поля.

В более сложных магнитоупорядоченных кристаллах — антиферромагнетиках (к их числу относятся карбонаты, безводные сульфаты, окислы, фториды переходных металлов Mn, Ni, Co, Fe) — средние значения магнитных моментов атомов (в отсутствие стороннего магнитного поля) компенсируют друг друга в пределах каждой элементарной ячейки. Иными словами, антиферромагнетик представляет собой совокупность нескольких подрешеток (их называют магнитными подрешетками), для каждой из которых среднее значение магнитных моментов атомов отлично от нуля. Такая магнитная упорядоченность имеет место, если температура антиферромагнетика ниже определенной критической температуры — температуры Нееля.

Наконец, существует еще один тип магнитоупорядоченных кристаллов — ферриты, которые состоят из нескольких магнитных подрешеток, магнитные моменты которых, в отличие от антиферромагнетиков, не компенсируются, так что феррит обладает спонтанным магнитным моментом. Ферритами являются, например, соединения переходных металлов типа комплексных солей  $MnO \cdot Fe_2O_3$ ,  $Zn_2O_3 \cdot 5Fe_2O_3$  и др.

Магнитная упорядоченность ферро- и антиферромагнетиков возникает благодаря корреляции между направлениями спинов электронов отдельных атомов этих тел, магнитный момент которых имеет в основном спиновую природу. Эта корреляция обусловлена в свою очередь взаимосвязью между пространственной симметрией волновой функции и величиной суммарного спина системы электронов. Такая взаимосвязь, являющаяся следствием принципа неразличимости одинаковых частиц, приводит к зависимости энергии системы от величины ее полного спина, так как волновым функциям, обладающим различной пространственной симметрией, соответствуют, вообще говоря, различные значения энергии системы.

Существенно, что при этом гамильтониан системы может не содержать членов, описывающих магнитные, т. е. релятивистские, взаимодействия электронов, так что речь идет о чисто квантовом эффекте, связанном с тем, что электроны подчиняются статистике Ферми — Дирака. Этот эффект называют обменным эффектом, а о зависимости энергии системы от величины ее полного спина (т. е. о зависимости энергии от свойств симметрии волновой функции) обычно говорят, что она обусловлена обменным взаимодействием.

**2. Молекула водорода.** Разъясним характер обменного взаимодействия на простейшем примере молекулы водорода, два электрона которой электростатически взаимодействуют между собой и с обоими протонами молекулы [1].

Гамильтониан системы электронов при закрепленных на заданном расстоянии ядрах имеет, очевидно, вид

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + e^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b1}} - \frac{1}{r_{b2}} \right),$$

где  $p_1$ ,  $p_2$  — операторы импульсов электронов,  $m$  и  $e$  — их масса и заряд и, наконец,  $r_{\alpha\beta}$  — расстояние между частицами  $\alpha$  и  $\beta$  (1, 2 — индексы электронов,  $a$ ,  $b$  — индексы ядер,  $r = r_{ab}$ ). Так как  $\mathcal{H}$  не содержит членов, описывающих магнитное взаимодействие электронов, то волновую функцию

системы электронов  $\psi$  можно представить в виде произведения пространственной  $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  и спиновой  $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$  волновых функций;

$$\psi(\mathbf{r}_1\sigma_1, \mathbf{r}_2\sigma_2) = \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2)$$

( $\sigma_1, \sigma_2$  — проекции спинов электронов на некоторую ось).

Функция  $\psi$  должна быть, согласно принципу Паули, антисимметричной относительно одновременной перестановки координат и спиновых переменных электронов. Это значит, очевидно, что симметричной спиновой функции соответствует антисимметричная пространственная функция и, наоборот, антисимметричной спиновой функции соответствует симметричная пространственная функция. Функция  $\chi$  будет симметричной, если суммарный спин  $S$  обоих электронов равен единице,  $S=1$ , и антисимметричной, если  $S=0$ . Поэтому пространственная волновая функция будет антисимметричной при  $S=1$  и симметричной при  $S=0$ . Мы будем обозначать эти функции соответственно через  $\varphi_a$  и  $\varphi_s$ .

Предполагая, что взаимодействие между атомами является слабым и что оба они находятся в основном состоянии, можно приближенно построить функции  $\varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  и  $\varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  с помощью волновых функций электрона, движущегося в кулоновском поле каждого из ядер:

$$\varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^2)}} \{ \varphi(\mathbf{r}_{a1})\varphi(\mathbf{r}_{b2}) + \varphi(\mathbf{r}_{a2})\varphi(\mathbf{r}_{b1}) \}, \quad S=0,$$

$$\varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2(1-\gamma^2)}} \{ \varphi(\mathbf{r}_{a1})\varphi(\mathbf{r}_{b2}) - \varphi(\mathbf{r}_{a2})\varphi(\mathbf{r}_{b1}) \}, \quad S=1,$$

где  $\varphi(\mathbf{r}_{ai})$  — нормированная волновая функция атома водорода, «состоящего» из  $i$ -го электрона ( $i=1, 2$ ) и  $a$ -го ядра ( $a=a, b$ ) и

$$\gamma = \int \varphi(\mathbf{r}_{a1})\varphi(\mathbf{r}_{b1}) d\mathbf{r}_1.$$

Значения энергии молекулы в состояниях с  $S=1$  и  $S=0$  связаны с функциями  $\varphi_a$  и  $\varphi_s$  соотношениями

$$E_{\uparrow\uparrow}(r) = \int \varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{H} \varphi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

$$E_{\uparrow\downarrow}(r) = \int \varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{H} \varphi_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

(в интегралах опущен знак комплексного сопряжения, так как  $\varphi_a$  и  $\varphi_s$  являются вещественными функциями в силу

предположения о том, что атомы находятся в основном состоянии). Подставляя сюда приведенные выше выражения для  $\Phi_a$  и  $\Phi_s$ , найдем

$$E_{\uparrow\uparrow}(r) = \frac{A(r) - B(r)}{\sqrt{1 - \gamma^2}}, \quad E_{\uparrow\downarrow}(r) = \frac{A(r) + B(r)}{\sqrt{1 + \gamma^2}},$$

где

$$A(r) = \int U \Phi^2(\mathbf{r}_{a1}) \Phi^2(\mathbf{r}_{b2}) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

$$B(r) = \int U \Phi(\mathbf{r}_{a1}) \Phi(\mathbf{r}_{b1}) \Phi(\mathbf{r}_{a2}) \Phi(\mathbf{r}_{b2}) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

и

$$U = e^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b1}} \right),$$

(в выражениях для  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  и  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$  отброшены не зависящие от  $r$  слагаемые, представляющие собой энергию двух атомов водорода, находящихся на бесконечном расстоянии друг от друга).

Величина  $A(r)$  определяет, очевидно, электростатическую энергию взаимодействия обоих атомов в предположении, что каждый из электронов «жестко» связан с одним из ядер (электрон 1 с ядром  $a$  и электрон 2 с ядром  $b$ ), а величина  $B(r)$  — их обменную энергию. Последнее название связано с тем, что величина  $B(r)$  представляет собой матричный элемент электростатической энергии взаимодействия электронов  $U$  между состоянием, в котором электрон 1 «принадлежит» ядру  $a$  и электрон 2 — ядру  $b$ , и состоянием, в котором электрон 1 «принадлежит» ядру  $b$  и электрон 2 — ядру  $a$ .

Обменная энергия отличается важной особенностью: она быстро (экспоненциально) уменьшается с увеличением расстояния между ядрами, в отличие от медленно спадающей энергии их кулоновского взаимодействия. Это объясняется тем, что в  $B(r)$  входят произведения волновых функций электронов, «привязанных» к разным ядрам,  $\Phi(\mathbf{r}_{a1})\Phi(\mathbf{r}_{b1})$  и  $\Phi(\mathbf{r}_{a2})\Phi(\mathbf{r}_{b2})$ . Поэтому  $B(r)$  зависит от того, в какой мере «перекрываются» волновые функции  $\Phi(\mathbf{r}_{ai})$  и  $\Phi(\mathbf{r}_{bi})$ , а это «перекрывание» экспоненциально уменьшается с ростом  $r$ . На этом основании можно сказать, что обменное взаимодействие является короткодействующим.

Качественно ход изменения величин  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  и  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$  с ростом  $r$ , т. е. расстояния между ядрами, изображен на рис. 1. Мы видим, что два невозбужденных атома водорода

могут образовывать молекулу водорода (которой соответствует кривая  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$  с минимумом) только при антипараллельной ориентации спинов обоих электронов.

Этот пример наглядно показывает, что чисто квантовый эффект обмена электронов приводит к эффективному взаимодействию между атомами, существенно зависящему от суммарного спина атомов, хотя спиновые переменные и не входят явно в исходный, «микроскопический» гамильтониан совокупности атомов, учитывающий только электростатические взаимодействия.

Обменное взаимодействие, лежащее, как показывает рассмотренный пример, в основе гомеоплярной химической связи\*), объясняет также природу ферро- и антиферромагнетизма.

В отличие от молекулы водорода, для которой обменная энергия отрицательна ( $B(r) < 0$ ), благодаря чему состояние с суммарным спином  $S = 0$  оказывается обладающим меньшей энергией, чем состояние со спином  $S = 1$ , в ферромагнетиках состоянию с большим спином соответствует меньшая энергия, так что в основном состоянии ферромагнетика спины всех атомов имеют параллельную ориентацию\*\*).

Для того чтобы математически описать обменное взаимодействие, введем в рассмотрение оператор

$$\mathcal{H} = -J(r) \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 + E(r),$$

где  $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$  — операторы спинов электронов и  $J(r)$ ,  $E(r)$  — некоторые функции от  $r$ , которые мы подберем таким образом, чтобы собственные значения оператора  $\mathcal{H}$  (действующего в пространстве спиновых переменных) совпадали со значениями энергии  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$  и  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$ .

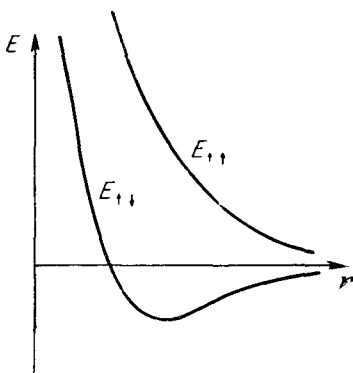


Рис. 1.

\*) Квантово-механическое объяснение химической связи было дано Гейтлером и Лондоном [1].

\*\*) Это объяснение природы ферромагнетизма принадлежит Гайзенбергу [2], Френкелю [3] и Дорфману [4].

Так как

$$\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2) = \frac{1}{2} S(S+1) - \frac{3}{4},$$

то собственные значения оператора  $\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2$  равны:  $-\frac{3}{4}$  при  $S=0$  и  $\frac{1}{4}$  при  $S=1$ . Поэтому собственные значения  $\mathcal{H}$  будут совпадать с величинами  $E_{\uparrow\downarrow}(r)$  и  $E_{\uparrow\uparrow}(r)$ , если положить

$$J(r) = E_{\uparrow\downarrow}(r) - E_{\uparrow\uparrow}(r),$$

$$E(r) = \frac{3}{4} E_{\uparrow\uparrow}(r) + \frac{1}{4} E_{\uparrow\downarrow}(r).$$

Величина  $E(r)$  определяет, очевидно, среднее значение энергии атомов (параллельной ориентации спинов электронов соответствует статистический вес  $3/4$ , а антипараллельной ориентации — статистический вес  $1/4$ ), а  $J(r)$  — обменную энергию. Отвлекаясь от этой средней энергии, мы будем в дальнейшем рассматривать только первое слагаемое в выражении для  $\mathcal{H}$ , зависящее от спинов электронов. Его называют гамильтонианом обменного взаимодействия электронов и обозначают через  $\mathcal{H}_e^*$ )

$$\mathcal{H}_e = -J(r) \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2. \quad (1.2.1)$$

Мы получили выражение для гамильтониана обменного взаимодействия, рассматривая конкретно молекулу водорода. Но к нему можно прийти и из более общих соображений, а именно исходя из требования инвариантности гамильтониана взаимодействия частиц относительно пространственных вращений.

Действительно, поставим вопрос о нахождении наиболее общего выражения для гамильтониана взаимодействия двух одинаковых частиц, предполагая, что он зависит только от координат и спинов частиц. Так как из операторов спинов частиц  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$  и радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , определяющего их относительное положение, можно построить только три независимых инварианта относительно преобразований пространственных вращений:

$$r^2, \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2, (\mathbf{s}_1 \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \mathbf{r}),$$

---

\*) В таком виде гамильтониан обменного взаимодействия был впервые получен Дираком [5].

то искомый гамильтониан  $\mathcal{H}$  может быть произвольной функцией этих инвариантов. Взамен  $(\mathbf{s}_1\mathbf{r})(\mathbf{s}_2\mathbf{r})$  удобнее ввести инвариант

$$s_{12} = 3(\mathbf{s}_1\mathbf{n})(\mathbf{s}_2\mathbf{n}) - \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2,$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , и записать поэтому  $\mathcal{H}$  в виде

$$\mathcal{H} = f(r, \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2, s_{12}),$$

где  $f$  — произвольная функция трех независимых переменных.

Если спин каждой из частиц равен  $s = \frac{1}{2}$ , то это выражение может быть значительно упрощено, благодаря следующему свойству спина  $\frac{1}{2}$ : любая целая положительная степень матриц  $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$  и  $s_{12}$ , а также произведение таких степеней выражаются в виде линейной комбинации самих этих матриц и единичной матрицы. Это свойство является следствием известного соотношения для компонент спина  $s = \frac{1}{2}$

$$s_k s_l = \frac{i}{2} \epsilon_{klm} s_m + \frac{1}{4} \delta_{kl}.$$

Используя это соотношение, легко проверить, например, что

$$(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)^2 = \frac{3}{16} - \frac{1}{2} \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2,$$

$$s_{12}^2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 - \frac{1}{2} s_{12}$$

$$s_{12}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2) = (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)s_{12} = \frac{1}{4} s_{12}.$$

Отсюда следует, что, разложив функцию  $f$  в ряд по степеням ее аргументов, можно привести гамильтониан  $\mathcal{H}$  к виду

$$\mathcal{H} = U_1(r) + U_2(r) \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 + U_3(r) s_{12}, \quad (1.2.2)$$

где  $U_1(r)$ ,  $U_2(r)$  и  $U_3(r)$  — некоторые функции от расстояния между частицами. Подчеркнем еще раз, что эта формула справедлива только в случае частиц, имеющих спин  $s = \frac{1}{2}$ .

С первыми двумя слагаемыми в выражении для  $\mathcal{H}$  мы уже познакомились выше, при рассмотрении молекулы водорода. Что касается третьего слагаемого, то в случае двух электронов оно представляет собой энергию их магнитного взаимодействия, т. е. энергию взаимодействия магнитных моментов



электронов,  $\frac{e\hbar}{mc} \mathbf{s}_1$  и  $\frac{e\hbar}{mc} \mathbf{s}_2$  ( $m$  — масса электрона,  $\hbar$  — квантовая постоянная). При этом  $U_3(r) \approx \left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^3}$ . Эта энергия содержит по сравнению с  $U_1(r) + U_2(r) \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2$  добавочный множитель  $\frac{1}{c^2}$  (точнее говоря, множитель  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ , где  $v$  — величина порядка скорости электрона в атоме). В случае молекулы водорода мы не учитывали этой энергии, имеющей релятивистское происхождение, так как  $v \ll c$ .

**3. Обменный гамильтониан ферромагнетика.** Перейдем теперь к установлению вида гамильтониана ферромагнетика. Главный вопрос, который нас интересует, заключается в выяснении характера энергетического спектра ферромагнетика вблизи основного состояния, которому, как показывает опыт, и как должна объяснить теория, соответствует параллельная ориентация магнитных моментов отдельных атомов ферромагнетика. Сперва мы не будем учитывать сравнительно слабых релятивистских взаимодействий. Поэтому исходный — микроскопический гамильтониан ферромагнетика будет содержать в качестве потенциальной энергии лишь энергию кулоновского взаимодействия электронов и ядер и, кроме того, кинетическую энергию частиц, т. е. сумму операторов Лапласа для каждой из частиц. Волновые функции этого гамильтониана должны обладать определенными свойствами симметрии, благодаря чему, как было разъяснено выше, устанавливается корреляция между значениями общего спина системы и значениями ее энергии.

Если предполагать, что кристалл формируется аналогично молекуле водорода, т. е. из отдельных атомов, каждый из которых содержит по одному электрону в основном состоянии, то, используя указанный микроскопический гамильтониан, можно приближенно найти энергетические уровни кристалла.

Однако для исследования более общих случаев микроскопический гамильтониан является слишком сложным, чтобы им можно было непосредственно пользоваться. Поэтому естественно попытаться перейти от микроскопического гамильтониана к гамильтониану, имеющему более простую математическую структуру и приводящему в главных чертах к такому же энергетическому спектру, как и исходный гамильтониан. Этот переход можно произвести аналогично рассмотренному

выше переходу от микроскопического гамильтониана двух атомов водорода, содержащего два лапласиана и электростатические потенциальные энергии различных пар частиц, к обменному гамильтониану, имеющему значительно более простую математическую структуру, чем исходный гамильтониан. При этом, как мы видели, если речь идет об энергетических состояниях, возникающих из основных состояний двух атомов и отличающихся только значением суммарного спина  $S$ , то исходный гамильтониан эквивалентен обменному гамильтониану.

Наше главное предположение заключается в том, что мы получим правильную физическую картину энергетического спектра ферромагнетика вблизи его основного состояния, если заменим микроскопический гамильтониан ферромагнетика суммой обменных гамильтонианов различных пар его атомов \*).

Будем для простоты предполагать сперва, что все атомы ферромагнетика имеют спин  $s = \frac{1}{2}$ . Тогда обменный гамильтониан ферромагнетика, которым мы заменяем исходный, микроскопический гамильтониан, будет иметь вид суммы гамильтонианов (1.2.1)

$$\mathcal{H}_e = -\frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(\mathbf{R}_{lm}) \mathbf{s}_l \mathbf{s}_m, \quad (1.3.1)$$

где  $\mathbf{s}_l$  и  $\mathbf{s}_m$  — спины атомов, находящихся в  $l$ -м и  $m$ -м узлах решетки и  $J(\mathbf{R}_{lm})$  — некоторая функция от радиус-вектора  $\mathbf{R}_{lm}$ , соединяющего  $l$ -й и  $m$ -й узлы (суммирование производится по всем парам атомов кристалла). Эта функция, носящая название обменного интеграла  $l$ -го и  $m$ -го атомов, очень быстро, экспоненциально, убывает с увеличением расстояния между атомами, так как она определяется степенью перекрытия волновых функций атомов. Поэтому практически величина  $J(\mathbf{R}_{lm})$  отлична от нуля только в том случае, если  $l$ -й и  $m$ -й атомы являются соседними; при этом

$$J(\mathbf{R}_{lm}) \sim \xi \frac{e^2}{a},$$

где  $a$  — постоянная решетки и  $\xi$  — численный параметр порядка 0.1, определяемый степенью перекрытия волновых функций соседних атомов.

---

\*) Вывод выражения для эквивалентного гамильтониана в рамках гомеоплярной модели кристалла принадлежит Боголюбову и Тябликову [6].

В гамильтониане (1.3.1) расстояния между атомами считаются заданными, а динамическими переменными являются только операторы спинов атомов, которые действуют (а вместе с ними и оператор  $\mathcal{H}_e$ ) на волновую функцию системы, представляющую собой функцию только от спиновых переменных, но не от пространственных координат частиц.

Для ферромагнетика обменный интеграл положителен,

$$J(\mathbf{R}_{lm}) > 0,$$

благодаря чему в основном состоянии спины всех атомов имеют одну и ту же ориентацию (эта ориентация, однако, никак не выделена, если учитывать только обменное взаимодействие, см. ниже).

Как мы убедимся далее, обменный гамильтониан ферромагнетика (1.3.1) приводит не только к правильному заключению о том, что спины, а следовательно, и магнитные моменты атомов ферромагнетика, являющиеся в основном спиновыми, имеют в состоянии с наименьшей энергией одинаковую ориентацию, но правильно описывает также ту часть энергетического спектра ферромагнетика, которая находится вблизи основного состояния. Поэтому использование обменного гамильтониана приводит к разумным физическим результатам в области достаточно низких температур (т. е. температур, малых по сравнению с температурой Кюри), когда возбуждены главным образом энергетические состояния, близкие к основному состоянию. Мы будем далее предполагать, что выражение (1.3.1) для гамильтониана обменного взаимодействия справедливо не только в случае  $s = 1/2$ , но и при произвольном спине атомов.

Важным свойством обменного гамильтониана (1.3.1), который обычно называется гайзенберговским гамильтонианом (говорят также о модели ферромагнетика Гайзенберга, понимая под этим ферромагнетик, который описывается гамильтонианом (1.3.1)), является то, что он коммутирует с каждой из проекций суммарного спина ферромагнетика

$$\mathbf{S} = \sum_l \mathbf{s}_l.$$

Действительно, используя известные перестановочные соотношения для операторов проекций спина атома

$$[s_{l\alpha}, s_{m\beta}] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} s_{l\gamma} \delta_{lm} \quad (1.3.2)$$

( $\alpha, \beta, \gamma$  — координатные индексы), легко убедиться, что

$$(\mathbf{s}_l + \mathbf{s}_m) \mathbf{s}_l \mathbf{s}_m = \mathbf{s}_l \mathbf{s}_m (\mathbf{s}_l + \mathbf{s}_m)$$

и поэтому

$$\mathcal{H}_e \mathbf{S} = \mathbf{S}_e \mathcal{H}.$$

Отсюда следует, что если учитывать только обменное взаимодействие, то квадрат полного спина системы и его проекция на какую-либо ось будут квантовомеханическими интегралами движения, т. е. обменное взаимодействие само по себе не может изменить этих величин. Это обстоятельство является совершенно понятным, если вспомнить, что с микроскопической точки зрения обменное взаимодействие — это чисто электростатическое взаимодействие с учетом симметрии волновой функции системы.

Как уже указывалось, магнитный момент ферромагнетика имеет в основном спиновую природу. Поэтому можно определить оператор плотности магнитного момента ферромагнетика  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  в точке  $\mathbf{r}$  как сумму

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 2\mu_0 \sum_l \mathbf{s}_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l), \quad (1.3.3)$$

где  $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$  — магнетон Бора,  $\mathbf{R}_l$  — радиус-вектор, определяющий положение  $l$ -го узла кристаллической решетки.

Гамильтониан обменного взаимодействия  $\mathcal{H}_e$  можно выразить через оператор плотности магнитного момента:

$$\mathcal{H}_e = - \frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}) \mathbf{M}(\mathbf{r}').$$

Действительно, подставляя сюда вместо  $\mathbf{M}$  выражение (1.3.3), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e = & - \frac{1}{2(2\mu_0)^2} \sum_{l \neq m} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \mathbf{s}_l \mathbf{s}_m J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) \times \\ & \times \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_m) (2\mu_0)^2 = - \frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(\mathbf{R}_{lm}) \mathbf{s}_l \mathbf{s}_m, \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (1.3.1).

Легко видеть, используя (1.3.2), что операторы проекций плотности магнитного момента удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[M_i(\mathbf{r}), M_k(\mathbf{r}')] = 2i\mu_0 \varepsilon_{ikl} M_l(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.3.4)$$

Если ввести оператор полного магнитного момента ферромагнетика

$$\mathfrak{M} = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1.3.5)$$

то его проекции будут удовлетворять перестановочным соотношениям

$$[\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_k] = 2i\mu_0 \varepsilon_{ikl} \mathfrak{M}_l. \quad (1.3.6)$$

**4. Обменная энергия ферромагнетика.** Гамильтониану (1.3.1) соответствует макроскопическая обменная энергия ферромагнетика

$$W_e = - \frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \bar{J}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \mathbf{M}(\mathbf{r}', t), \quad (1.4.1)$$

где  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  — плотность макроскопического магнитного момента ферромагнетика, являющаяся, вообще говоря, функцией координат  $\mathbf{r}$  и времени  $t$  и  $\bar{J}(\mathbf{r})$  — некоторая функция от  $\mathbf{r}$ , а также от температуры  $T$ . Эта функция, так же как и функция  $J(\mathbf{r})$ , быстро уменьшается с ростом  $r$  и при достаточно низких температурах ( $T \ll T_c$ ,  $T_c$  — температура Кюри) мало отличается от функции  $J(\mathbf{r})$ .

Плотность макроскопического магнитного момента связана с оператором плотности магнитного момента  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  соотношением

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \overline{\text{Sp } \rho \mathbf{M}(\mathbf{r})},$$

где  $\rho$  — локально равновесная матрица плотности ферромагнетика и черта сверху обозначает усреднение по физически бесконечно малому элементу объема.

Так как в основном состоянии ферромагнетика суммарный спин имеет максимально возможное значение, то в соответствии с нашим представлением о природе ферромагнетизма мы будем предполагать, что при достаточно низких температурах ( $T \ll T_c$ ) модуль плотности макроскопического момента практически не меняется со временем, так что возможные изменения вектора  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  со временем сводятся в основном к его вращениям, практически без изменения модуля вектора  $\mathbf{M}$ .

Возвращаясь к формуле (1.4.1) для обменной энергии ферромагнетика, напомним, что обменный интеграл  $\bar{J}(\mathbf{r})$  быстро уменьшается с увеличением  $r$ . Поэтому в формуле

(1.4.1) можно разложить  $M(r', t)$  в ряд по степеням  $r' - r$  и ограничиться членами не выше второго порядка:

$$M_l(r', t) = M_l(r, t) + (x'_i - x_i) \frac{\partial M_l(r, t)}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2} (x'_i - x_i)(x'_k - x_k) \frac{\partial^2 M_l(r, t)}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Подставляя это разложение в (1.4.1) и отбрасывая первое слагаемое, как несущественную постоянную, получим

$$W_e = - \frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int \bar{J}(r - r')(x'_i - x_i) d(r' - r) \int M(r, t) \times \\ \times \frac{\partial M(r, t)}{\partial x_i} dr - \frac{1}{4} \frac{1}{(2\mu_0)^2} \int \bar{J}(r - r')(x'_i - x_i)(x'_k - x_k) \times \\ \times d(r' - r) \int M(r, t) \frac{\partial^2 M(r, t)}{\partial x_i \partial x_k} dr.$$

Мы будем предполагать, что каждый узел решетки является ее центром симметрии. В этом случае первое слагаемое здесь обращается в нуль, и мы приходим к следующему выражению для обменной энергии:

$$W_e = - \frac{1}{2} \int dr \alpha_{ik} M(r, t) \frac{\partial^2 M(r, t)}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (1.4.2)$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int \bar{J}(r) x_i x_k dr. \quad (1.4.3)$$

Выполнив в (1.4.2) интегрирование по частям, можно представить обменную энергию ферромагнетика в виде [7]

$$W_e = \int_V w_e dr, \quad (1.4.4)$$

где

$$w_e = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial M}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial M}{\partial x_k}$$

( $V$  — объем ферромагнетика). Эта величина представляет собой плотность макроскопической обменной энергии ферромагнетика.

Обратим внимание на то, что величина  $w_e$  не зависит от направления вектора плотности магнитного момента  $M$ . Это обстоятельство является фундаментальным свойством обменного взаимодействия.

Структура выражения для  $w_e$  может быть понята, если рассматривать обменную энергию ферромагнетика феноменологически как энергию магнитной неоднородности. Действительно, рассмотрим зависимость плотности энергии ферромагнетика от градиентов компонент вектора  $\mathbf{M}$ . Основному состоянию ферромагнетика соответствует одинаковая ориентация спинов атомов, т. е. некоторый постоянный по величине и направлению вектор намагничения. Напротив, для возбужденных состояний компоненты вектора намагничения будут зависеть от координат. Для состояний, близких к основному, компоненты  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  будут медленно меняться от точки к точке, и поэтому плотность энергии можно разложить в ряд по степеням градиентов компонент  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , ограничившись первыми неисчезающими членами. Коэффициенты в этом разложении представляют собой некоторые тензоры, обладающие свойствами симметрии кристалла.

Если в числе элементов симметрии кристалла есть центр инверсии, то разложение плотности энергии  $w_e$  будет начинаться с членов, квадратичных относительно градиентов, т. е. будет иметь вид

$$w_e = \frac{1}{2} \alpha_{iklm} \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial M_l}{\partial x_m}, \quad (1.4.5)$$

где  $\alpha_{iklm}$  — некоторый тензор 4-го ранга. Но энергия  $w_e$  имеет обменное происхождение, а это значит, что  $w_e$  не должно зависеть от направления вектора  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , иными словами, в выражении (1.4.5) должны совпадать индексы  $l$  и  $i$ , т. е. тензор  $\alpha_{iklm}$  должен быть вида  $\alpha_{km} \delta_{il}$ , и мы приходим к полученному выше выражению (1.4.4) для  $w_e$ , в котором  $\alpha_{ik}$  представляет собой некоторый тензор второго ранга, который в принципе может зависеть от квадрата вектора  $\mathbf{M}$  (и от температуры) и который отличается тем свойством, что квадратичная относительно градиентов форма  $w_e$  должна быть существенно положительной.

Заметим, что соображения, которые привели нас к этому выражению, являются более общими, чем приведенный выше вывод, исходным пунктом которого было выражение (1.3.1) для обменной энергии, справедливое, строго говоря, при  $s = 1/2$ . Действительно, мы нигде не пользовались тем, что спин атома равен  $s = 1/2$  и использовали только основное свойство обменного взаимодействия, а именно, его инвариантность относительно вращений момента  $\mathbf{M}$ . Поэтому можно считать, что полученное нами выражение для  $W_e$  является

общим и справедливым независимо от того, какое значение имеет спин отдельного атома ферромагнетика.

Симметричный тензор  $a_{ik}$ , входящий в выражение для обменной энергии, определяется в модели Гайзенберга формулой (1.4.3), в которую входит обменный интеграл между соседними атомами. В более общем случае он может, как уже указывалось выше, зависеть от квадрата намагничивания (и температуры), но всегда по порядку величины равен

$$a_{ik} \sim \frac{J_0}{(2\mu_0)^2} a^5, \quad (1.4.6)$$

где  $J_0$  — величина обменного интеграла между соседними атомами; этот интеграл определяет по порядку величины также температуру Кюри  $T_c$  (в энергетических единицах); поэтому

$$a_{ik} \sim \frac{T_c}{\mu_0 M_0} a^2,$$

где  $M_0 \approx \frac{\mu_0}{a^3}$ .

В одноосных кристаллах тензор  $a_{ik}$  имеет две независимые компоненты, и поэтому  $w_e$  имеет вид

$$w_e = \frac{1}{2} \alpha_1 \left\{ \left( \frac{\partial M}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial M}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \alpha_2 \left( \frac{\partial M}{\partial z} \right)^2 \quad (1.4.7)$$

(ось  $z$  совпадает с осью кристалла).

В кубических кристаллах  $a_{ik} = a\delta_{ik}$ .

## § 2. Магнитное дипольное взаимодействие

**1. Энергия дипольного взаимодействия.** Обменное взаимодействие является наибольшим, но не единственным взаимодействием между атомами ферромагнетика. Наряду с ним имеет место магнитное взаимодействие между магнитными моментами атомов и взаимодействие между магнитными моментами и электрическим полем кристаллической решетки. Оба эти взаимодействия являются релятивистскими, и поэтому соответствующие им энергии значительно меньше обменной энергии  $W_e$ , составляя по порядку величины  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 W_e$ , где  $v$  — величина порядка скорости электронов в атоме.

Однако, несмотря на то, что релятивистские взаимодействия значительно слабее обменного взаимодействия, они играют существенную роль. Эта роль двоякая.



Во-первых, благодаря релятивистским взаимодействиям в кристалле возникает избранное направление намагничения, которому соответствует минимальное значение энергии ферромагнетика. На этом основании говорят, что релятивистские взаимодействия приводят к появлению энергии анизотропии, т. е. к зависимости энергии ферромагнетика от направления намагничения  $\mathbf{M}$  (обменная энергия, как видно из (1.4.4), не зависит от направления вектора  $\mathbf{M}$ ).

Во-вторых, благодаря релятивистским взаимодействиям устанавливается статистическое равновесие в системе спинов ферромагнетика. Если бы этих взаимодействий не было, а также не было взаимодействия спинов с колебаниями решетки, то статистическое равновесие в решетке не могло бы установиться.

Перейдем к рассмотрению релятивистских взаимодействий. Начнем с магнитного дипольного взаимодействия.

Магнитное дипольное взаимодействие описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H}_m = 2\mu_0^2 \sum_{l \neq m} \frac{1}{R_{lm}^5} \{ (s_l s_m) R_{lm}^2 - 3 (s_l R_{lm}) (s_m R_{lm}) \}, \quad (2.1.1)$$

где  $s_l$  — спин атома в  $l$ -м узле и  $R_{lm}$  — радиус-вектор, соединяющий узлы  $l$  и  $m$ .

Гамильтониану  $\mathcal{H}_m$  соответствует макроскопическая энергия магнитного дипольного взаимодействия

$$W_m = -\frac{1}{2} v_0^2 \sum_{l \neq m} M_l(R_l) M_k(R_m) \frac{\partial^2}{\partial R_{lm}^l \partial R_{lm}^k} \cdot \frac{1}{R_{lm}},$$

где  $M(R_l) = \frac{2\mu_0}{v_0} \bar{s}_l$  (черта над  $s_l$  служит для обозначения усреднения) и  $v_0$  — объем элементарной ячейки.

Чтобы придать этому выражению обычный феноменологический вид, нужно перейти в нем от суммирования по отдельным узлам решетки к интегрированию по объему ферромагнетика. Однако, так как при формальном переходе от суммирования к интегрированию возникает неопределенность при  $R_{lm} \rightarrow 0$ , то поэтому следует предварительно выделить область малых  $R_{lm}$ . Для этого мы разобьем  $W_m$  на два

слагаемых,

$$W_m = W'_m + W''_m,$$

$$W'_m = -\frac{1}{2} v_0^2 \sum_{\substack{l, j \\ (R_{lj} > \rho)}} M_l(\mathbf{R}_l) M_k(\mathbf{R}_j) \frac{\partial^2}{\partial R_{lj}^i \partial R_{lj}^k} \cdot \frac{1}{R_{lj}},$$

$$W''_m = -\frac{1}{2} v_0^2 \sum_{\substack{l \neq j \\ (R_{lj} < \rho)}} M_l(\mathbf{R}_l) M_k(\mathbf{R}_j) \frac{\partial^2}{\partial R_{lj}^i \partial R_{lj}^k} \cdot \frac{1}{R_{lj}}, \quad (2.1.2)$$

где  $\rho$  — достаточно малая макроскопическая длина; если  $L$  — длина, на которой существенно меняется плотность магнитного момента, то величину  $\rho$  мы выберем таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$a \ll \rho \ll L.$$

Так как  $M(\mathbf{R}_l)$  медленно меняется на расстояниях порядка  $a$ , то первое слагаемое можно представить в виде двойного интеграла по объему ферромагнетика  $V$ :

$$W'_m = -\frac{1}{2} \int_{|r-r'| > \rho} dr \int dr' M_i(r) M_k(r') \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x'_k} \frac{1}{|r-r'|}. \quad (2.1.3)$$

Во втором же слагаемом можно вынести величину  $M_k(\mathbf{R}_j)$  за знак суммы, заменив  $M_k(\mathbf{R}_j)$  на  $M_k(\mathbf{R}_l)$ . Вводя далее обозначение \*)

$$\beta_{ik} = v_0 \sum_{\substack{j \\ (j \neq l; R_{lj} < \rho)}} \frac{\partial^2}{\partial R_{lj}^i \partial R_{lj}^k} \frac{1}{R_{lj}},$$

представим  $W''_m$  в виде

$$W''_m = -\frac{1}{2} \beta_{ik} \int_V dr M_i(r) M_k(r). \quad (2.1.4)$$

Покажем, что

$$W'_m = -\frac{1}{2} \int_V dr \left\{ \frac{4\pi}{3} M^2 + \mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} \right\}, \quad (2.1.5)$$

\*) Так как  $\rho \gg a$ , то величина  $\beta_{ik}$  не зависит от  $\rho$ .

где  $H^{(m)}$  — статическое магнитное поле, создаваемое намагничиванием  $M$ . Это поле удовлетворяет уравнениям магнитостатики

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H^{(m)} &= 0, \\ \operatorname{div} (H^{(m)} + 4\pi M) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

и условиям непрерывности на границе ферромагнетика тангенциальных составляющих вектора магнитного поля  $H^{(m)}$  и нормальной составляющей вектора индукции  $B^{(m)} = H^{(m)} + 4\pi M$

$$(H_+^{(m)})_\tau = (H_-^{(m)})_\tau, \quad (H_+^{(m)})_\nu + 4\pi M_\nu = (H_-^{(m)})_\nu, \quad (2.1.7)$$

где индексы плюс и минус служат для обозначения полей внутри и вне ферромагнетика, а индексы  $\tau$  и  $\nu$  обозначают тангенциальные и нормальные составляющие векторов на поверхности ферромагнетика  $S$ .

Решение уравнений магнитостатики с граничными условиями (2.1.7) имеет, как известно, вид

$$H^{(m)}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}), \quad (2.1.8)$$

где  $\varphi(\mathbf{r})$  — магнитостатический потенциал, определяемый формулой

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_V d\mathbf{r}' \frac{\operatorname{div} M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_S dS_i \frac{M_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.1.9)$$

Эту формулу можно переписать также в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' M_i(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x'_i} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.1.10)$$

откуда

$$\begin{aligned} H_i^{(m)}(\mathbf{r}) &= - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \\ &= - \frac{4\pi}{3} M_i(\mathbf{r}) + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > \rho} d\mathbf{r}' M_k(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу (2.1.5), мы приведем ее к виду (2.1.3).

Таким образом, энергия магнитного дипольного взаимодействия имеет вид

$$W_m = - \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \left\{ \beta_{ik} M_i(\mathbf{r}) M_k(\mathbf{r}) + \frac{4\pi}{3} M^2(\mathbf{r}) + M(\mathbf{r}) H^{(m)}(\mathbf{r}) \right\}. \quad (2.1.11)$$

Покажем, что интеграл от третьего слагаемого в этом выражении может быть приведен к виду

$$-\frac{1}{2} \int_V \mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} d\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{H}^{(m)})^2 d\mathbf{r}, \quad (2.1.12)$$

где интегрирование в правой части равенства производится по всему пространству. Заметим для этого, что, согласно уравнениям (2.1.6),

$$\mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi B_i^{(m)} - \frac{(\mathbf{H}^{(m)})^2}{4\pi}.$$

Поэтому

$$-\frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{H}^{(m)})^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi} \int_S \varphi B_i^{(m)} dS_i,$$

где интегрирование во втором интеграле совершается по поверхности тела. Так как потенциал  $\varphi$  и нормальная составляющая вектора индукции  $\mathbf{B}^{(m)}$  непрерывны на поверхности тела, то поверхностный интеграл может быть преобразован в объемный интеграл по объему  $V'$ , окружающему ферромагнетик:

$$\frac{1}{8\pi} \int_S \varphi B_i^{(m)} dS_i = -\frac{1}{8\pi} \int_{V'} d\mathbf{r} \operatorname{div} \varphi \mathbf{H}^{(m)}.$$

Учитывая, что  $\operatorname{div} (\varphi \mathbf{H}^{(m)}) = -(\mathbf{H}^{(m)})^2$ , мы получим формулу (2.1.12)

**2. Тензор размагничивающих коэффициентов.** Рассмотрим однородно намагниченный ферромагнетик,  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \text{const}$ . Магнитное поле  $\mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r})$  в таком ферромагнетике имеет, согласно (2.1.10), вид

$$\mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r}) = \nabla (\mathbf{M} \nabla) \int_V \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \hat{N}(\mathbf{r}) \mathbf{M}, \quad (2.2.1)$$

где  $\hat{N}(\mathbf{r})$  тензор с компонентами:

$$N_{ik}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \int_V \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.2.2)$$

Это поле не является, вообще говоря, однородным. Но, если придать ферромагнетiku форму произвольного эллипсоида, то при  $\mathbf{M} = \text{const}$  поле внутри него (но не вне) будет однородным. Действительно, в этом случае, как можно убе-

даться, для точек внутри эллипсоида справедливо равенство

$$\int_V \frac{dr'}{|r-r'|} = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{R_s} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s} \right),$$

где

$$R_s = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

$a, b, c$  — полуоси эллипсоида и  $x, y, z$  — проекции радиус-вектора  $r$  произвольной точки внутри эллипсоида на главные оси эллипсоида. Так как интеграл  $\int_V \frac{dr'}{|r-r'|}$  представляет

собой квадратичную функцию координат точки  $r$ , то тензор  $\hat{N}$  не будет зависеть от координат, т. е. поле  $H^{(m)}$  будет однородным.

Тензор  $\hat{N}$  называется тензором размагничивающих коэффициентов. В системе координат, оси которой совпадают с главными осями эллипсоида этот тензор имеет только диагональные элементы [8]:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)R_s}, \\ N_2 &= \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)R_s}, \\ N_3 &= \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)R_s}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Легко убедиться, что сумма размагничивающих коэффициентов  $N_1, N_2, N_3$  всегда равна единице:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1. \quad (2.2.4)$$

Приведем значения размагничивающих коэффициентов в некоторых случаях.

Если тело имеет форму шара, то

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}.$$

Если тело имеет форму цилиндра, ось которого направлена вдоль оси  $x$  ( $a = \infty$ ,  $b = c$ ), то

$$N_1 = 0, \quad N_2 = N_3 = \frac{1}{2}.$$

В случае вытянутого эллипсоида вращения  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$ , ( $a > b$ ) размагничивающие коэффициенты имеют вид

$$N_1 = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left( \ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2e \right), \quad N_2 = N_3 = \frac{1}{2} (1 - N_1),$$

$$e = \sqrt{1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2}.$$

Наконец, в случае сплюснутого эллипсоида вращения  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $a > c$ ) коэффициенты  $N_i$  равны

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2} (1 - N_3), \quad N_3 = \frac{1 + e^2}{e^3} (e - \operatorname{arctg} e),$$

$$e = \sqrt{\left( \frac{a}{c} \right)^2 - 1}.$$

До сих пор мы не учитывали магнитного поля, создаваемого сторонними источниками. При наличии такого поля, которое мы будем называть сторонним и обозначать через  $H_0^{(e)}$ , к энергии ферромагнетика должно быть добавлено слагаемое

$$W_H = - \int dr M H_0^{(e)}. \quad (2.2.5)$$

Если стороннее поле однородно и тело имеет форму эллипсоида, то поле и намагничение внутри тела также будут однородными. При этом связь между магнитным полем  $H^{(i)}$  внутри тела, намагничением  $M$  и сторонним магнитным полем  $H_0^{(e)}$  имеет вид

$$H^{(i)} = H^{(m)} + H_0^{(e)} = H_0^{(e)} - 4\pi \hat{N} M. \quad (2.2.6)$$

Заметим, что, говоря об однородности поля и намагниченности ферромагнетика, мы не принимали во внимание возможной доменной структуры ферромагнетика. Это справедливо в случае достаточно сильных внешних магнитных полей. Если же ферромагнетик распадается на домены, то в приведенных выше формулах под полем и намагниченностью следует понимать усредненные значения этих величин по доменной структуре ферромагнетика.

### § 3. Энергия магнитной анизотропии и полная энергия ферромагнетика

**1. Спин-орбитальное взаимодействие.** Перейдем теперь к рассмотрению взаимодействия магнитных моментов атомов ферромагнетика с электрическим полем кристаллической решетки. Гамильтониан этого взаимодействия, которое называется спин-орбитальным, можно представить в общем виде

$$\mathcal{H}_{sl} = \sum_k s_k A_k, \quad (3.1.1)$$

где  $s_k$  — спин  $k$ -го атома,  $A_k = -2\mu_0 H_k$  и  $H_k$  — магнитное поле, испытываемое  $k$ -м атомом благодаря его движению в электрическом поле  $E_k$  кристаллической решетки. Если  $v_k$  — скорость  $k$ -го атома, то, очевидно,

$$H_k = \frac{1}{c} (v_k \times E_k).$$

Отнесенная к одному атому энергия спин-орбитального взаимодействия составляет по порядку величины

$$\mu_0 \frac{v}{c} \cdot \frac{e}{a^2} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{e^2}{a}.$$

Гамильтониан спин-орбитального взаимодействия содержит скорости, т. е. операторы импульсов частиц, и соответствует поэтому микроскопическому гамильтониану, о котором говорилось в начале этой главы. Переходя к модели Гайзенберга, мы должны заменить операторы скоростей операторами, построенными только из спинов частиц (и расстояний между ними), причем эта замена, как разъяснялось выше, не должна изменить структуры энергетического спектра ферромагнетика (по крайней мере вблизи его основного состояния).

Если бы мы имели дело с изотропным пространством, а не с решеткой и спин атомов равнялся бы  $s = \frac{1}{2}$ , то такой модифицированный гамильтониан спин-орбитального взаимодействия должен был бы иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{sl} = & \sum_{ik} f(R_{ik}) s_i s_k + \\ & + (2\mu_0)^2 \sum_{ik} \beta(R_{ik}) \{3(s_i R_{ik})(s_k R_{ik}) - (s_i s_k) R_{ik}^2\}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

где  $f(R_{ik})$  и  $\beta(R_{ik})$  — некоторые функции расстояний между узлами решетки. Первая из этих сумм не отличается по своей

структуре от гамильтониана обменного взаимодействия, поэтому она может быть отнесена к этому гамильтониану и здесь может не рассматриваться.

Вторая сумма имеет ту же структуру, что гамильтониан магнитного дипольного взаимодействия. Различие заключается в том, что в эту сумму (ее иногда называют гамильтонианом псевдодипольного взаимодействия) входит быстро спадающая с увеличением расстояний между атомами функция  $\beta(\mathbf{R}_{ik})$ , тогда как в гамильтониан дипольного взаимодействия, являющегося длиннодействующим, входит медленно меняющаяся функция  $R_{ik}^{-3}$ .

В кристаллической решетке ситуация осложняется из-за неэквивалентности различных направлений. Благодаря этому скалярная функция  $\beta(\mathbf{R}_{ik})$  заменяется некоторым тензором второго ранга  $\hat{\beta}(\mathbf{R}_{ik})$  и гамильтониан спин-орбитального взаимодействия приобретает вид

$$\mathcal{H}_{sl} = 2\mu_0^2 \sum_{ik} \beta_{\alpha\gamma}(\mathbf{R}_{ik}) s_{i\alpha} s_{k\gamma}.$$

Переходя здесь от спинов к плотности магнитного момента, получим следующее выражение для макроскопической энергии спин-орбитального взаимодействия:

$$W_{sl} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \hat{\beta}_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') M_i(\mathbf{r}) M_k(\mathbf{r}'). \quad (3.1.3)$$

Так как функция  $\hat{\beta}_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  быстро уменьшается с увеличением расстояния  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  между атомами, то функцию  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$  можно разложить в ряд по степеням  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и сохранить в этом разложении только первый член. В результате мы получим

$$W_{sl} = \int_V \omega_a(\mathbf{M}) d\mathbf{r}, \quad (3.1.4)$$

где

$$\omega_a(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \hat{\beta}_{ik} M_i M_k$$

и

$$\hat{\beta}_{ik} = \int \beta_{ik}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Сравнение этого выражения для  $W_{sl}$  с выражением для энергии магнитного дипольного взаимодействия  $W_m$  показывает, что два слагаемых под знаком интеграла в (2.1.11) имеют ту же структуру, что и  $\omega_a(\mathbf{M})$ . Поэтому можно



отнести эти слагаемые к  $\omega_a(\mathbf{M})$  и понимать под энергией магнитного дипольного взаимодействия величину

$$W_m = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M} \mathbf{H}^{(m)} dr. \quad (3.1.5)$$

При выводе формулы для  $W_{sl}$  мы предполагали, что  $s = \frac{1}{2}$ . В общем случае при  $s \neq \frac{1}{2}$  она, строго говоря, не справедлива и о  $\omega_a(\mathbf{M})$  можно только сказать, что эта величина представляет собой некоторую функцию плотности магнитного момента, причем в отличие от плотности обменной энергии, не зависящей от направления вектора намагничения, плотность энергии спин-орбитального взаимодействия зависит от направления этого вектора относительно кристаллографических осей.

**2. Плотность энергии магнитной анизотропии.** При достаточно низких температурах ( $T \ll T_c$ ) модуль вектора  $\mathbf{M}$  представляет собой практически, как мы уже говорили, некоторую постоянную величину и  $\omega_a(\mathbf{M})$  можно рассматривать только как функцию направления  $\mathbf{M}$ . Эту функцию обычно называют плотностью энергии магнитной анизотропии.

При феноменологическом описании ферромагнетика функцию  $\omega_a(\mathbf{M})$  обычно представляют в виде разложения в ряд по степеням компонент  $\mathbf{M}$  и сохраняют в нем несколько первых членов [8—10]. В это разложение должны, очевидно, входить только такие комбинации произведений компонент вектора  $\mathbf{M}$ , которые являются инвариантами относительно элементов симметрии кристалла. В числе элементов симметрии содержится, очевидно, также и преобразование обращения времени ( $t \rightarrow -t$ ), при котором компоненты  $\mathbf{M}$  меняют свой знак; поэтому разложение  $\omega_a(\mathbf{M})$  должно содержать только четные степени компонент  $\mathbf{M}$ .

Рассмотрим, например, одноосный ферромагнетик. Если ограничиться в разложении  $\omega_a(\mathbf{M})$  членами второго порядка по степеням компонент  $\mathbf{M}$ , то мы получим

$$\omega_a(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \beta M_0^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \beta M_0^2 - \frac{1}{2} \beta (\mathbf{nM})^2, \quad (3.2.1)$$

где  $\theta$  — угол между вектором  $\mathbf{M}$  и осью симметрии кристалла  $\mathbf{n}$  и  $\beta$  — некоторая константа, называемая константой анизотропии. Эта константа является, вообще говоря, функцией температуры.

Если  $\beta > 0$ , то минимум энергии анизотропии достигается при  $\theta = 0$ , т. е. энергия анизотропии будет минимальна при намагничении вдоль оси симметрии (ось  $z$ ), которая является, как говорят, направлением легкого намагничения. Если  $\beta < 0$ , то энергия анизотропии достигает минимума при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , т. е. при намагничении, лежащем в плоскости  $xu$ , перпендикулярной оси  $z$ . Для определения направления легкого намагничения приведенного выражения для  $w_a(\mathbf{M})$  недостаточно и необходим учет дальнейших членов разложения  $w_a(\mathbf{M})$  по степеням компонент  $\mathbf{M}$ .

Если кристалл относится к тетрагональной симметрии, то анизотропия в базисной плоскости (плоскости  $xu$ ) определяется инвариантом  $M_x^2 M_y^2$ . При гексагональной симметрии кристалла анизотропия в базисной плоскости (плоскости  $xu$ ) проявляется лишь в членах 6-го порядка относительно компонент  $\mathbf{M}$  и определяется инвариантом

$$\frac{1}{6i} \{ (M_x + iM_y)^6 - (M_x - iM_y)^6 \}.$$

Если кристалл обладает кубической симметрией, то первыми исчезающими членами в разложении энергии магнитной анизотропии по степеням компонент  $\mathbf{M}$  будут члены 4-го порядка. Кубическая симметрия допускает два инварианта 4-го порядка, составленных из компонент вектора  $\mathbf{M}$ :

$$M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2, \quad M_x^4 + M_y^4 + M_z^4.$$

Второй инвариант не является, однако, независимым, так как он равен  $M^4 - 2(M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2)$ . Поэтому энергия магнитной анизотропии кубического ферромагнетика, учитывающая только члены 4-го порядка относительно компонент  $\mathbf{M}$ , имеет вид

$$w_a(\mathbf{M}) = \beta' (M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2) \quad (3.2.2)$$

или, что эквивалентно,

$$w_a(\mathbf{M}) = -\frac{1}{2} \beta' (M_x^4 + M_y^4 + M_z^4), \quad (3.2.3)$$

где  $\beta'$  — некоторая константа (константа анизотропии).

Ясно, что при  $\beta' > 0$  направление легкого намагничения совпадает с направлениями трех ребер куба. Если  $\beta' < 0$ , то энергия анизотропии будет минимальной при намагничении

вдоль какой-либо из четырех пространственных диагоналей куба.

Отметим, что спин-орбитальное взаимодействие обуславливает не только энергию магнитной анизотропии, но оказывает также влияние на гиромагнитное отношение атомов в ферромагнетиках. Действительно, рассмотрим магнитный момент атома

$$m = 2\mu_0 s + \mu_0 l,$$

где  $l$  — его орбитальный момент. Если бы не было спин-орбитального взаимодействия, то среднее значение орбитального момента равнялось бы нулю. Благодаря спин-орбитальному взаимодействию среднее значение вектора  $l$  становится отличным от нуля,

$$\langle l \rangle = \hat{\lambda} s,$$

где  $\hat{\lambda}$  — некоторый тензор с компонентами порядка  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ , и выражение для  $m$  приобретает вид

$$m = 2\mu_0 \hat{g} s, \quad \hat{g} = I + \frac{1}{2} \hat{\lambda}. \quad (3.2.4)$$

Отличие тензора  $\hat{g}$  от единичного тензора  $I$  составляет по порядку величины  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 10^{-2} - 10^{-4}$ .

**3. Полная энергия ферромагнетика.** Сложив энергии обменного, спин-орбитального и магнитного дипольного взаимодействий, а также энергию ферромагнетика в стороннем магнитном поле, получим полную макроскопическую энергию ферромагнетика

$$W = \int_V dr \left\{ F\left(\mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2} \mathbf{M} H^{(m)} - \mathbf{M} H_0^{(e)} \right\}, \quad (3.3.1)$$

$$F\left(\mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial M}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial M}{\partial x_k} + \varpi_a(\mathbf{M}) + f(M^2).$$

Здесь  $f(M^2)$  — некоторая функция от  $M^2$ , причем отвечающая ей энергия имеет в основном обменное происхождение.

Если учесть энергию магнитной неоднородности, обусловленную релятивистскими взаимодействиями, то с точностью до членов, квадратичных по  $\frac{\partial M_i}{\partial x_k}$ , функция  $F$  будет иметь

вид

$$F\left(\mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2} \alpha_{ik;lm}(\mathbf{M}) \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial M_l}{\partial x_m} + \\ + \gamma_{ik}(\mathbf{M}) \frac{\partial M_i}{\partial x_k} + w_a(\mathbf{M}) + f(M^2), \quad (3.3.2)$$

где тензоры  $\alpha_{ik;lm}(\mathbf{M})$  и  $\gamma_{ik}(\mathbf{M})$  представляют собой некоторые функции от плотности магнитного момента  $\mathbf{M}$  (а также от температуры). Второе слагаемое в выражении для  $F$  отсутствует в случае ферромагнетиков, обладающих центром инверсии.

Выражение (3.3.1) для энергии ферромагнетика справедливо, строго говоря, в статическом случае. При этом поле  $\mathbf{H}^{(m)}$ , создаваемое магнитными моментами атомов, удовлетворяет уравнениям магнитостатики (2.1.6). Однако выражением (3.3.1) и уравнениями магнитостатики можно пользоваться и в том случае, когда величины  $\mathbf{H}^{(m)}$  и  $\mathbf{M}$  изменяются со временем, если только это изменение происходит достаточно медленно, именно, фазовая скорость волн, связанных с колебаниями  $\mathbf{H}^{(m)}$  и  $\mathbf{M}$ , должна быть малой по сравнению со скоростью света.

Используя (2.1.12), можно переписать выражение для  $W$  в виде

$$W = \int w \, dr,$$

где

$$w = F\left(\mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H}^{(m)})^2 - \mathbf{M}\mathbf{H}_0^{(e)} \quad (3.3.3)$$

и интегрирование совершается по всему пространству.

Приведенное выражение для макроскопической энергии ферромагнетика относится, как уже упоминалось, к квазистатическому случаю, когда магнитное поле  $\mathbf{H}^{(m)}$  и плотность магнитного момента  $\mathbf{M}$  медленно изменяются со временем. Но в дальнейшем мы будем, кроме квазистатических полей, изучать также электромагнитные волны в ферромагнетике. В этом случае нужно пользоваться не уравнениями магнитостатики, а полной системой уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (3.3.4)$$

где  $E$  — электрическое поле,  $H$  — магнитное поле за вычетом стороннего магнитного поля,  $B = H + 4\pi M$  — магнитная индукция,  $D$  — электрическая индукция и  $j$  — плотность тока проводимости.

В области частот, малых по сравнению с оптическими частотами, дисперсия диэлектрической проницаемости несущественна и плотность электрической энергии равна  $\frac{1}{8\pi} ED$ .

В этом случае выражение для макроскопической энергии ферромагнетика приобретает вид

$$W = \int dr \left\{ F\left(M, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{8\pi} (H^2 + ED) - MH_0^{(e)} \right\}. \quad (3.3.5)$$

## § 4. Энергия антиферромагнетика

**1. Обменная энергия антиферромагнетика.** В предыдущих параграфах, исходя из гайзенберговской модели ферромагнетика, мы получили выражение для макроскопической энергии ферромагнетика. Переходя теперь к рассмотрению антиферромагнетиков, заметим прежде всего, что не существует микроскопической модели антиферромагнетика, аналогичной гайзенберговской модели ферромагнетика. Это связано с тем, что невозможно микроскопическое описание антиферромагнетика как кристалла, в котором спины соседних атомов были бы ориентированы противоположно друг другу. Действительно, если все атомы антиферромагнетика одинаковы (а такая ситуация имеет место в ряде случаев), то гамильтониан антиферромагнетика не может измениться при перестановке местами двух атомов. Поэтому его собственные функции должны либо не изменяться, либо изменять свой знак при такой перестановке. С другой стороны, волновая функция атомов в рассматриваемом случае явно не удовлетворяет этому условию, так как перестановка спинов соседних атомов нарушает исходный порядок.

Не имея микроскопической модели антиферромагнетика, аналогичной модели Гайзенберга для ферромагнетика, можно тем не менее построить макроскопическую теорию антиферромагнетизма, предполагая, что антиферромагнетик представляет собой совокупность нескольких магнитных подрешеток, каждая из которых характеризуется своей плотностью магнитного момента. В отсутствие стороннего магнитного поля сумма плотностей магнитных моментов подрешеток обращается

в нуль, при наличии же стороннего поля эта сумма отличается от нуля и возникает макроскопический магнитный момент антиферромагнетика [11 — 13].

Такое представление об антиферромагнетике как совокупности нескольких намагниченных подрешеток, хорошо согласуется с экспериментальными данными о тепловых и магнитных свойствах антиферромагнетиков, а также с результатами нейтронографии антиферромагнетиков.

Мы будем рассматривать только антиферромагнетики простейшей структуры, состоящие из двух одинаковых магнитных подрешеток. При достаточно низких температурах ( $T \ll T_N$ , где  $T_N$  — температура Нееля) модули плотностей их магнитных моментов  $\mathbf{M}_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{M}_2(\mathbf{r}, t)$  одинаковы,  $|\mathbf{M}_1(\mathbf{r}, t)| = |\mathbf{M}_2(\mathbf{r}, t)|$ , причем с большой степенью точности это общее значение плотностей моментов можно, так же как и в случае ферромагнетиков, считать не зависящим от времени. Если стороннее магнитное поле отсутствует, то, как уже указывалось выше, в основном состоянии антиферромагнетика плотности магнитных моментов его подрешеток, одинаковые по величине, имеют противоположное направление.

Так же как и для ферромагнетика, энергия антиферромагнетика складывается из обменной энергии  $W_e$ , энергии спин-орбитального взаимодействия  $W_{sl}$ , энергии магнитного дипольного взаимодействия  $W_m$  и энергии антиферромагнетика  $W_H$  в стороннем магнитном поле. Две последние энергии определяются теми же формулами, что и в случае ферромагнетика:

$$W_m = -\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \mathbf{H}^{(m)} dr, \quad (4.1.1)$$

$$W_H = - \int_V (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \mathbf{H}_0^{(e)} dr,$$

где  $\mathbf{H}^{(m)}$  — магнитное поле, создаваемое магнитными моментами атомов антиферромагнетика и интегрирование производится по объему антиферромагнетика. В статическом и квазистатическом случаях поле  $\mathbf{H}^{(m)}$  определяется уравнениями магнитостатики (2.1.6), в которых под величиной  $\mathbf{M}$  нужно понимать сумму плотностей магнитных моментов подрешеток,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ .

Установим теперь вид макроскопической обменной энергии  $W_e$ . Плотность этой энергии  $w_e$ , зависящую от плотностей

магнитных моментов обеих подрешеток  $M_1$  и  $M_2$ , можно, так же как и в случае ферромагнетика, разложить в ряд по степеням градиентов  $M_1$  и  $M_2$ . При этом следует иметь в виду, что плотность энергии  $w_e$ , согласно основному свойству обменного взаимодействия, должна быть инвариантной относительно пространственных вращений векторов  $M_1$  и  $M_2$ . Поэтому разложение в ряд с точностью до членов, квадратных относительно градиентов  $M_1$  и  $M_2$  должно иметь вид [14, 15]

$$w_e = f(M_1 M_2, M_1^2, M_2^2) + \frac{1}{2} \alpha_{ik} \left( \frac{\partial M_1}{\partial x_i} \frac{\partial M_1}{\partial x_k} + \frac{\partial M_2}{\partial x_i} \frac{\partial M_2}{\partial x_k} \right) + \alpha'_{ik} \frac{\partial M_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial x_k},$$

где  $f$  — некоторая симметричная функция магнитных моментов  $M_1$  и  $M_2$ , входящих в нее в виде инвариантов  $M_1 M_2$ ,  $M_1^2$ ,  $M_2^2$ , и  $\alpha_{ik}$ ,  $\alpha'_{ik}$  — тензоры, аналогичные тензору  $\alpha_{ik}$ , определяющему плотность обменной энергии ферромагнетика.

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой плотность обменной энергии однородно намагниченных подрешеток, а второе и третье слагаемые — плотность обменной энергии, связанной с неоднородностью магнитных моментов; при этом второе слагаемое описывает обменное взаимодействие в каждой из подрешеток, а третье слагаемое — обменное взаимодействие между подрешетками.

Таким образом, обменная энергия антиферромагнетика имеет вид

$$W_e = \int_V dr \left\{ f(M_1 M_2, M_1^2, M_2^2) + \frac{1}{2} \alpha_{ik} \left( \frac{\partial M_1}{\partial x_i} \frac{\partial M_1}{\partial x_k} + \frac{\partial M_2}{\partial x_i} \frac{\partial M_2}{\partial x_k} \right) + \alpha'_{ik} \frac{\partial M_1}{\partial x_i} \frac{\partial M_2}{\partial x_k} \right\}. \quad (4.1.2)$$

При достаточно низких температурах квадраты плотностей магнитных моментов практически постоянны и функцию  $f$  можно считать зависящей только от одной переменной  $M_1 M_2$ . В простейшей модели антиферромагнетика считают, что

$$f(M_1 M_2, M_1^2, M_2^2) = \delta M_1 M_2,$$

где  $\delta$  — некоторая положительная постоянная.

Оценим величины  $\alpha_{ij}$ ,  $\alpha'_{ij}$  и  $\delta$ . По аналогии с ферромагнетиками можно считать, что по порядку величины

$$\alpha \sim \alpha' \sim a^2 \frac{T_N}{\mu_0 M_0},$$

где  $T_N$  — температура Нееля.

При больших градиентах магнитного момента, когда  $\frac{\partial M}{\partial x} \sim \frac{M_0}{a}$ , все слагаемые в выражении для  $\omega_e$  равны по порядку величины. Поэтому

$$\delta \sim \frac{a}{a^2} \sim \frac{T_N}{\mu_0 M_0}.$$

Так как  $T_N \gg \mu_0 M_0$ , то  $\delta \gg 1$ .

**2. Энергия магнитной анизотропии и полная энергия антиферромагнетика.** Рассмотрим, наконец, энергию спин-орбитального взаимодействия в антиферромагнетиках. Плотность этой энергии является функцией плотностей магнитных моментов  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  обеих подрешеток и зависит от ориентации этих векторов относительно кристаллических осей. При достаточно низких температурах ( $T \ll T_N$ ), когда  $M_1^2 = M_2^2 = \text{const}$ , плотность энергии спин-орбитального взаимодействия можно интерпретировать как плотность энергии магнитной анизотропии. Эту величину, так же как и в случае ферромагнетика, можно представить в виде разложения по степеням векторов  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$ , содержащего такие комбинации произведений компонент этих векторов, которые являются инвариантами по отношению к преобразованиям симметрии кристалла. Например, в случае одноосного антиферромагнетика плотность энергии магнитной анизотропии имеет вид [14, 15]

$$\omega_a(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = -\frac{1}{2} \beta \{(\mathbf{M}_1 \mathbf{n})^2 + (\mathbf{M}_2 \mathbf{n})^2\} - \beta' (\mathbf{M}_1 \mathbf{n})(\mathbf{M}_2 \mathbf{n}), \quad (4.2.1)$$

где  $\beta$  и  $\beta'$  — константы магнитной анизотропии и  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль оси анизотропии.

Если при поворотах вокруг оси симметрии одна из подрешеток не переходит в другую, то к этому выражению может быть добавлено слагаемое [16]

$$\omega_a = d((\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2) \mathbf{n}), \quad (4.2.2)$$



где  $d$  — некоторая константа того же порядка, что и константы анизотропии  $\beta$  и  $\beta'$  (энергия  $w_d$ , так же как и энергия  $w_a$ , имеет релятивистское происхождение).

Наличие энергии  $w_d$  может приводить к тому, что в отсутствие стороннего магнитного поля магнитные моменты подрешеток в состоянии равновесия не будут ориентированы точно противоположно друг другу, т. е. антиферромагнетик при  $H_0^{(e)} = 0$  будет обладать отличным от нуля суммарным магнитным моментом. Этот момент будет однако мал, так как энергия  $w_d$  имеет не обменное, а релятивистское происхождение. На этом основании антиферромагнетики с константой  $d$ , отличной от нуля, называют антиферромагнетиками со слабым ферромагнетизмом [16] (подробнее об условиях появления малого магнитного момента в антиферромагнетиках см. [17]).

Сложив энергии  $W_m$ ,  $W_e$ ,  $W_{sl}$  и  $W_H$ , найдем полную макроскопическую энергию антиферромагнетика:

$$W = \int dr \left\{ F + \frac{1}{8\pi} (H^{(m)})^2 - (M_1 + M_2) H_0^{(e)} \right\},$$

где

$$F = f(M_1 M_2, M_1^2, M_2^2) + \frac{1}{2} \alpha_{ik} \left( \frac{\partial M_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial x_k} + \frac{\partial M_2}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial x_k} \right) + \alpha'_{ik} \frac{\partial M_1}{\partial x_i} \frac{\partial M_2}{\partial x_k} + w_a, \quad (4.2.3)$$

и интегрирование производится по всему пространству.

## ГЛАВА II

### МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН

#### § 5. Уравнение движения магнитного момента и уравнение переноса тепла в ферромагнетиках

1. Уравнение движения магнитного момента. Сильная корреляция между ориентациями спинов отдельных атомов в магнитоупорядоченных кристаллах приводит к существованию в таких кристаллах специфических волн.

Чтобы понять их происхождение, рассмотрим сначала ферромагнетики и будем предполагать, что  $T=0$ . В этом случае все магнитные моменты атомов ферромагнетика имеют одинаковую ориентацию, соответствующую минимуму его энергии. Представим себе теперь, что мы изменили ориентацию магнитного момента какого-либо одного атома и предоставили затем атом самому себе. Тогда это изменение ориентации не останется локализованным в исходном атоме, а благодаря обменному взаимодействию будет переходить от атома к атому, т. е. будет распространяться в виде волны. Такие волны носят название спиновых волн\*). Они могут распространяться как при  $T=0$ , так и при  $T \neq 0$ , как в ферромагнетиках, так и в антиферромагнетиках и характеризуются определенными зависимостями частоты от волнового вектора.

Спиновые волны можно рассматривать как колебания плотности магнитного момента, распространяющиеся в магнитоупорядоченном кристалле. Поэтому для их исследования необходимо иметь уравнение, определяющее изменение плотности магнитного момента со временем.

---

\*) Они были открыты Блохом [1].

Чтобы установить это уравнение, напомним сначала простейшую задачу о движении «жесткого» магнитного момента  $\mathbf{m}$  во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Такой момент прецессирует вокруг направления поля  $\mathbf{H}$  согласно уравнению

$$\dot{\mathbf{m}} = g (\mathbf{m} \times \mathbf{H}), \quad (5.1.1)$$

где  $g = \frac{2\mu_0}{\hbar}$ .

Рассмотрим теперь ферромагнетик. Благодаря сильному обменному взаимодействию между спинами отдельных атомов ферромагнетика его магнитный момент с большой степенью точности является «жестким», если только температура ферромагнетика достаточно низка. Иными словами, модуль вектора плотности магнитного момента ферромагнетика лишь в очень слабой степени может зависеть от времени. Поэтому изменение со временем плотности магнитного момента должно в первом приближении носить характер прецессии, т. е. происходить по закону

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = g (\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)), \quad (5.1.2)$$

где  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)$  — некоторый вектор, который мы будем называть эффективным магнитным полем. По смыслу уравнения (5.1.2) этот вектор можно определить только с точностью до произвольного вектора, параллельного вектору  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ .

Прежде чем переходить к определению эффективного магнитного поля  $\tilde{\mathbf{H}}$ , разясним, что означает уравнение движения магнитного момента ферромагнетика (5.1.2), или, как мы будем его называть, уравнение прецессии, с точки зрения квантовой механики [2].

Точное квантовомеханическое уравнение движения для оператора плотности магнитного момента ферромагнетика  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  имеет, как известно, вид

$$i\hbar \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = [\mathcal{H}, \mathbf{M}], \quad (5.1.3)$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан ферромагнетика и  $[A, B] = AB - BA$  — коммутатор операторов  $A$  и  $B$ .

Чтобы найти коммутатор  $[\mathcal{H}, \mathbf{M}]$ , удобно представить гамильтониан  $\mathcal{H}$  в следующем общем виде:

$$\mathcal{H} \{ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \} = \sum_n \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n f_{i_1 i_2 \dots i_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \times \\ \times M_{i_1}(\mathbf{r}_1, t) M_{i_2}(\mathbf{r}_2, t) \dots M_{i_n}(\mathbf{r}_n, t),$$

где  $f_{i_1 i_2 \dots i_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$  — некоторые функции координат

нат, симметричные относительно любой перестановки переменных  $l_k r_k$  и  $l_i r_i$  (эти функции могут содержать также  $\delta$ -функции от разностей координат и их производные).

Коммутатор  $[\mathcal{H}, M_i(\mathbf{r}, t)]$  равен, очевидно,

$$[\mathcal{H}, M_i(\mathbf{r}, t)] = \sum_n \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n f_{i_1 i_2 \dots i_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \times \\ \times \sum_{k=1}^n M_{i_1}(\mathbf{r}_1, t) \dots M_{i_{k-1}}(\mathbf{r}_{k-1}, t) \times \\ \times [M_{i_k}(\mathbf{r}_k, t), M_i(\mathbf{r}, t)] M_{i_{k+1}}(\mathbf{r}_{k+1}, t) \dots M_{i_n}(\mathbf{r}_n, t).$$

Замечая, что согласно (1.3.4)

$$[M_{i_k}(\mathbf{r}_k, t), M_i(\mathbf{r}, t)] = 2i\mu_0 \varepsilon_{i_k i j} M_j(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k),$$

перепишем уравнение движения для  $\mathbf{M}$  в виде

$$\frac{\partial M_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{2\mu_0}{\hbar} \sum_n \sum_{k=1}^n \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{k-1} d\mathbf{r}_{k+1} \dots d\mathbf{r}_n \times \\ \times f_{i_1 i_2 \dots i_n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_{k+1}, \dots, \mathbf{r}_n) M_{i_1}(\mathbf{r}_1, t) \dots \\ \dots M_{i_{k-1}}(\mathbf{r}_{k-1}, t) M_j(\mathbf{r}, t) M_{i_{k+1}}(\mathbf{r}_{k+1}, t) \dots M_{i_n}(\mathbf{r}_n, t) \varepsilon_{i_k i j}. \quad (5.1.4)$$

Перейдем к макроскопическому описанию ферромагнетика. Для этого необходимо усреднить уравнение (5.1.4) при помощи матрицы плотности ферромагнетика. При таком усреднении оператора  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  мы получим локальную величину — плотность макроскопического магнитного момента  $M_i(\mathbf{r}, t)$ .

Если рассматривать достаточно медленные изменения макроскопического магнитного момента, характеризующиеся временами, которые значительно больше времени установления локального квазиравновесия в ферромагнетике, то в левой части равенства (5.1.4) мы получим производную по времени от плотности макроскопического магнитного момента. Справа мы должны усреднять произведения операторов плотностей моментов в разных точках пространства. Ферромагнетик отличается тем свойством, что в нем благодаря сильному обменному взаимодействию очень быстро устанавливается локальное квазиравновесное распределение магнитного момента. Поэтому с большой степенью точности усреднение произведения операторов плотностей моментов дает произведение

локальных макроскопических плотностей момента, являющихся уже, разумеется,  $c$ -числами. Таким образом, в результате усреднения (5.1.4) мы получим соотношение, имеющее ту же структуру, что и исходное соотношение, в котором, однако, не нужно различать порядка множителей  $M_{i_1}(\mathbf{r}_1, t)$ ,  $M_{i_2}(\mathbf{r}_2, t)$ ...

Функции  $f_{i_1 i_2 \dots i_n}$  после усреднения (при помощи матрицы плотности) также претерпят изменение и станут, вообще говоря, зависеть от температуры. Эти модифицированные функции (мы будем по-прежнему обозначать их через  $f_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ) определяют макроскопическую энергию ферромагнетика

$$W = \sum_n \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n f_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \times \\ \times M_{i_1}(\mathbf{r}_1, t) \dots M_{i_n}(\mathbf{r}_n, t).$$

Возвращаясь к формуле (5.1.4), в которой величины  $M_i(\mathbf{r}, t)$  представляют собой  $c$ -числа, мы можем переписать ее в виде уравнения прецессии

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = g(\mathbf{M} \times \tilde{\mathbf{H}}),$$

где вектор  $\tilde{\mathbf{H}}$  определяется формулой

$$\tilde{\mathbf{H}}_j = \sum_n \int d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n f_{j, i_2, \dots, i_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \times \\ \times M_{i_2}(\mathbf{r}_2, t) \dots M_{i_n}(\mathbf{r}_n, t).$$

Эта формула показывает, что вектор  $\tilde{\mathbf{H}}$ , т. е. эффективное магнитное поле, представляет собой функциональную производную от энергии ферромагнетика  $W$  по магнитному моменту  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  [3]:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}. \quad (5.1.5)$$

Формула (5.1.5) показывает также, что вариация энергии связана с вариацией плотности магнитного момента  $\delta \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  соотношением:

$$\delta W = - \int \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) \delta \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (5.1.6)$$

**2. Поток и диссипация энергии.** Уравнение движения магнитного момента, которое мы установили в предыдущем разделе, не учитывает диссипации энергии. Микроскопическая теория процессов, приводящих к диссипации энергии,

будет изложена в главе VII, здесь же мы покажем, как феноменологически описать эти процессы.

Введем для этого в правую часть уравнения движения магнитного момента (5.1.2) добавочное слагаемое  $R$ :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = g(\mathbf{M} \times \tilde{\mathbf{H}}) + \mathbf{R}, \quad (5.2.1)$$

и будем предполагать, что вектор  $\mathbf{R}$  (он называется релаксационным членом) перпендикулярен вектору  $\mathbf{M} \times \tilde{\mathbf{H}}$  и является линейной функцией эффективного магнитного поля

$$R_i = r_{ik} \tilde{H}_k, \quad \mathbf{R}(\mathbf{M} \times \tilde{\mathbf{H}}) = 0, \quad (5.2.2)$$

где  $r_{ik}$  — некоторый тензор, зависящий, вообще говоря, от  $M$ .

Свойства тензора  $r_{ik}$ , так же как и вид эффективного магнитного поля, могут быть, как мы сейчас убедимся, установлены из закона сохранения энергии [4].

При феноменологическом описании мы будем исходить из следующего выражения для энергии ферромагнетика:

$$W = \int dr \omega, \\ \omega = F\left(\mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) - \mathbf{M} H_0^{(e)} + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H}^{(m)})^2 + \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} D,$$

где  $F$  — некоторая функция от  $M_i$  и  $\frac{\partial M_i}{\partial x_k}$ , которую можно рассматривать как потенциальную энергию единицы объема ферромагнетика.

Дифференцируя плотность энергии по времени и используя уравнение движения магнитного момента (5.2.1), а также уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(m)} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}^{(m)} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(m)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

где  $\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)} + 4\pi \mathbf{M}$  и  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  ( $\sigma$  — проводимость ферромагнетика), получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial M_i}{\partial t} \left( H_i^{(m)} + H_{0i}^{(e)} - \frac{\partial F}{\partial M_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M_i}{\partial x_k}} \right) - \sigma E^2 + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H}^{(m)} \times \mathbf{E})_k + \frac{\partial M_i}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M_i}{\partial x_k}} \right\}. \quad (5.2.3)$$

Если сначала пренебречь диссипацией энергии, т. е. считать  $\sigma = 0$ ,  $\mathbf{R} = 0$ , то изменение плотности энергии со временем должно сводиться к пространственной дивергенции плотности потока энергии  $\Pi$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_k}{\partial x_k} = 0.$$

Поэтому первое слагаемое в (5.2.3) должно обращаться в нуль.

Учитывая уравнение прецессии (5.1.2), отсюда можно заключить, что множитель при  $-\frac{\partial M_i}{\partial t}$  должен с точностью до произвольного слагаемого, пропорционального  $\mathbf{M}$ , совпадать с эффективным магнитным полем  $\tilde{H}_i$ . Опуская это несущественное слагаемое, получим следующее выражение для эффективного магнитного поля:

$$\tilde{H} = H^{(i)} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k}}, \quad (5.2.4)$$

где  $H^{(i)} = H^{(m)} + H_0^{(e)}$ . (Это выражение  $\tilde{H}$ , как будет показано далее, находится в соответствии с формулой (5.1.5).)

Второе слагаемое в (5.2.3) показывает, что [4]

$$\Pi_k = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^{(m)})_k - \frac{\partial M_i}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M_i}{\partial x_k}}. \quad (5.2.5)$$

Учтем теперь диссипацию энергии. Тогда уравнение (5.2.3) примет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_k}{\partial x_k} = -\sigma E^2 - \tilde{H} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}.$$

Используя уравнение (5.2.1) для  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$  и выражение (5.2.2) для  $\mathbf{R}$ , отсюда получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \Pi = -\sigma E^2 - r_{ik} \tilde{H}_i \tilde{H}_k. \quad (5.2.6)$$

Мы видим, что диссипация энергии определяется симметричной частью тензора  $r_{ik}$ . Поскольку правая часть равенства (5.2.6) должна быть всегда отрицательной, то тензор  $r_{ik}$  должен быть таким, чтобы форма  $r_{ik} x_i x_k$  была существенно положительной. В дальнейшем мы будем пользоваться следующим простейшим выражением для  $r_{ik}$ :

$$r_{ik} = \frac{1}{v_2} \delta_{ik} - \frac{1}{v_1} (n_i n_k - \delta_{ik}), \quad (5.2.7)$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{M}}{M}$  и  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — две константы, имеющие размерность времени, причем  $\frac{1}{\tau_2} > 0$ ,  $\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} > 0$ . Эти константы, зависящие от температуры, мы оценим в § 27. Вектор  $\mathbf{R}$  определяется при этом формулой

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\tau_2} \tilde{\mathbf{H}} - \frac{1}{\tau_1} (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}})). \quad (5.2.8)$$

Покажем в заключение этого раздела, что выражение (5.2.4) для эффективного магнитного поля в приближении магнитостатики представляет собой функциональную производную от энергии ферромагнетика по плотности магнитного момента.

Вычислим для этого вариацию энергии ферромагнетика  $W$ , связанную с изменением плотности момента  $\delta \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ . Заметим прежде всего, что

$$\begin{aligned} \delta \int V F d\mathbf{r} = \int_V d\mathbf{r} \left( \frac{\partial F}{\partial M_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M_i}{\partial x_k}} \right) \delta M_i + \\ + \int_S dS_k \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M_i}{\partial x_k}} \delta M_i, \end{aligned}$$

где  $V$  — объем, а  $S$  — поверхность ферромагнетика.

Найдем далее вариацию магнитной энергии  $\frac{1}{8\pi} \int (H^{(m)})^2 d\mathbf{r}$ . Легко видеть, что в приближении магнитостатики, когда

$$\mathbf{H}^{(m)} = -\nabla\varphi,$$

имеет место соотношение

$$\int \mathbf{B}^{(m)} \delta \mathbf{H}^{(m)} d\mathbf{r} = 0, \quad (5.2.9)$$

где  $\delta \mathbf{H}^{(m)}$  — вариация магнитного поля, связанная с вариацией плотности магнитного момента  $\delta \mathbf{M}$ . Действительно, замечая, что  $\text{div} \mathbf{B}^{(m)} = 0$ , имеем

$$\int \mathbf{B}^{(m)} \delta \mathbf{H}^{(m)} d\mathbf{r} = \int_S dS \mathbf{B}_+^{(m)} \delta \varphi_+ - \int_S dS \mathbf{B}_-^{(m)} \delta \varphi_-,$$

где индексы плюс и минус служат для обозначения полей внутри и вне ферромагнетика. Последнее выражение обращается в нуль в силу непрерывности потенциала  $\varphi$  и



нормальной составляющей вектора  $\mathbf{B}^{(m)}$  на границе ферромагнетика.

Из формулы (5.2.9) вытекает, что

$$\delta \frac{1}{8\pi} \int (H^{(m)})^2 dr = - \int_V \mathbf{M} \delta H^{(m)} dr.$$

Но, согласно (2.1.8) и (2.1.10),

$$\int_V \mathbf{M} \delta H^{(m)} dr = \int_V H^{(m)} \delta \mathbf{M} dr.$$

Поэтому окончательно мы получим следующее выражение для вариации энергии:

$$\delta W = - \int_V dr \left( H_i^{(i)} - \frac{\partial F}{\partial M_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M_i}{\partial x_k}} \right) \delta M_i + \int_S dS_k \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M_i}{\partial x_k}} \delta M_i,$$

где  $H^{(i)} = H^{(m)} + H_0^{(e)}$ .

Отсюда видно, что

$$-\frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}} = H^{(i)} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k}},$$

т. е.  $-\frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{H}}$  в соответствии с формулой (5.1.5).

**3. Уравнение переноса тепла в ферромагнетике.** До сих пор мы нигде не учитывали того обстоятельства, что плотность энергии  $w$  зависит также от плотности энтропии  $s$ . Поэтому под  $\partial w / \partial t$  в уравнении (5.2.6) нужно, строго говоря, понимать производную от плотности энергии по времени при постоянной энтропии, т. е. записывать уравнение (5.2.6) в виде

$$\left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_s + \operatorname{div} \mathbf{\Pi} = -\sigma E^2 - r_{ij} \tilde{H}_i \tilde{H}_j. \quad (5.3.1)$$

Ясно, что

$$\left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_s = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t}.$$

С другой стороны, в постоянном стороннем магнитном поле  $H_0^{(e)}$  имеет место закон сохранения энергии, в силу

которого

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(\Pi - \kappa \nabla T) = 0, \quad (5.3.2)$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности, а  $-\kappa \nabla T$  — плотность потока тепла (для простоты мы не рассматриваем анизотропии теплопроводности). Поэтому из (5.3.1), (5.3.2) вытекает соотношение

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\frac{\kappa}{T} \nabla T\right) = \kappa \left(\frac{1}{T} \nabla T\right)^2 + \frac{1}{T} \sigma E^2 + \frac{1}{T} r_{ij} \tilde{H}_i \tilde{H}_j, \quad (5.3.3)$$

(напомним, что  $\frac{\partial w}{\partial s} = T$ ).

Величина  $-\frac{\kappa}{T} \nabla T$  представляет собой плотность потока энтропии, а правая часть равенства (5.3.3) — источники энтропии.

В уравнение теплопроводности (5.3.3) входит энтропия неравновесного состояния ферромагнетика, которое характеризуется заданием двух независимых величин — температуры и плотности магнитного момента (в состоянии равновесия плотность магнитного момента является определенной функцией температуры и стороннего магнитного поля). Эту энтропию можно определить как энтропию ферромагнетика, находящегося в некотором состоянии равновесия, которое характеризуется температурой  $T$  и сторонним магнитным полем, равным  $H_0^{(e)} - \tilde{H}$ .

Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$\left(\frac{\partial w}{\partial M}\right)_s = -\tilde{H}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_M = T,$$

и, следовательно,

$$d(w + \tilde{H}M - sT) = M d\tilde{H} - s dT.$$

Величина  $V(w + \tilde{H}M - sT)$  представляет собой, очевидно, термодинамический потенциал  $\Omega$  ферромагнетика в дополнительном стороннем поле, равном  $-\tilde{H}$  (при наличии этого дополнительного поля величина  $M$  будет являться равновесной плотностью магнитного момента ферромагнетика). Таким образом,

$$d\frac{\Omega}{V} = M d\tilde{H} - s dT$$

и, следовательно,

$$s = -\frac{1}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial T}, \quad M = \frac{1}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{H}},$$

что и утверждалось.

Уравнение (5.2.1) вместе с уравнением теплопроводности (5.3.3) и уравнениями Максвелла представляют собой полную систему уравнений для определения величин  $M$ ,  $E$ ,  $H$ ,  $T$ .

#### 4. Граничные условия для вектора намагничивания.

Так как в уравнение движения магнитного момента входят производные по координатам от плотности магнитного момента  $M$ , то необходимо еще выяснить, каким условиям удовлетворяет плотность магнитного момента на границе ферромагнетика [5—7].

Используем для этого непрерывность нормальной составляющей плотности потока энергии на поверхности ферромагнетика:

$$\Pi_{-v} = \Pi_{+v},$$

где  $v$  — единичный вектор нормали к поверхности ферромагнетика. Эти составляющие вне и внутри ферромагнетика определяются формулами

$$\Pi_{-v} = \frac{c}{4\pi} v (E_{-} \times H_{-}^{(m)}) = \frac{c}{4\pi} H_{-}^{(m)} (v \times E_{-}), \quad (5.4.1)$$

$$\Pi_{+v} = \frac{c}{4\pi} H_{+}^{(m)} (v \times E_{+}) - v_k \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M}{\partial x_k}} \frac{\partial M}{\partial t}.$$

Так как тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей непрерывны на границе ферромагнетика, то отсюда следуют соотношения

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M_i}{\partial x_k}} v_k \Big|_s = 0, \quad (5.4.2)$$

которые и представляют собой граничные условия для вектора плотности магнитного момента.

Обратим внимание на то, что если при феноменологическом описании ферромагнетика релаксационный член  $R$  выбрать таким образом, что  $RM = 0$ , то из уравнений (5.2.1) будет следовать соотношение

$$M^2 = \text{const}, \quad (5.4.3)$$

означающее, что уравнения движения (5.2.1) вырождаются в систему двух дифференциальных уравнений. Поэтому в этом случае уравнения движения магнитного момента будут несовместны с тремя граничными условиями (5.4.2).

Такая ситуация возникает, например, в том случае, если положить в выражении (5.2.7) для тензора  $r_{ij}$  константу  $\tau_2$  равной бесконечности.

Чтобы понять причину этого противоречия, предположим, что величина  $\tau_2$  хотя и велика, но конечна. Тогда при любом конечном  $\tau_2$  уравнения движения магнитного момента (5.2.1) будут совместны с граничными условиями (5.4.2). Отсюда следует, что при больших  $\tau_2$  вблизи границы должен образовываться пограничный слой, толщина которого стремится к нулю при  $\tau_2 \rightarrow \infty$  и в котором нельзя пренебрегать диссипативными слагаемыми, нарушающими закон сохранения (5.4.3). Толщина этого слоя по порядку величины равна

$\delta \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\omega \tau_2}}$ , где  $\omega$  — частота изменения магнитного момента.

В пограничном слое происходит резкое изменение вектора  $v_k \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M}{\partial x_k}}$ , так что вблизи поверхности, но вне пограничного

слоя граничные условия (5.4.2) уже несправедливы.

Посмотрим, как можно получить из граничного условия (5.4.2) и уравнений движения магнитного момента (5.2.1) новое эффективное граничное условие в случае  $\tau_2 \rightarrow \infty$ , которое позволило бы избежать детального рассмотрения свойств пограничного слоя.

Интегрируя уравнения движения (5.2.1) по толщине пограничного слоя в направлении нормали к поверхности ферромагнетика и учитывая граничное условие (5.4.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta \mathbf{M} dz = g \int_0^\delta dz \left\{ \mathbf{M} \times \left( \mathbf{H}^{(t)} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}} \right) - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \times \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}} + \right. \\ \left. + \mathbf{M} \times \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y}} \right) + \mathbf{R} \right\} + \\ + g \left( \mathbf{M} \times \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}} \right) \Big|_{z=\delta} \end{aligned}$$

где  $z$  — координата вдоль нормали ( $z=0$  соответствует границе ферромагнетика). Так как  $M$  и  $\frac{\partial M}{\partial x_k}$  могут иметь в пограничном слое только конечный разрыв ( $\delta$ -образное изменение испытывает только  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M}{\partial x_k}}$ ) и толщина слоя  $\delta$  при  $\tau_2 \rightarrow \infty$  стремится к нулю, то в отсутствие диссипации ( $R=0$ ) мы получим из последнего уравнения

$$M \times v_k \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M}{\partial x_k}} \Big|_S = 0 \quad (5.4.4)$$

(векторное произведение вычисляется вблизи поверхности, но вне пограничного слоя). Условие (5.4.4) и представляет собой искомое граничное условие в отсутствие диссипации.

Заметим, что граничное условие (5.4.4) также обеспечивает непрерывность нормальной составляющей плотности потока энергии. Действительно, используя формулы (5.4.1) и непрерывность тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля, получим

$$\Pi_{-v} - \Pi_{+v} = v_k \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M}{\partial x_k}} \frac{\partial M}{\partial t}.$$

Но так как в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial M}{\partial t} = g(M \times \tilde{H}),$$

то

$$\Pi_{-v} - \Pi_{+v} = -g\tilde{H} \left( M \times v_k \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M}{\partial x_k}} \right),$$

откуда в силу граничного условия (5.4.4)

$$\Pi_{-v} = \Pi_{+v}.$$

**5. Равновесные состояния ферромагнетиков и линеаризованное уравнение движения плотности магнитного момента.** Из уравнения движения плотности магнитного момента (5.2.1) следует, что, приравняв нулю эффективное магнитное поле, мы получим уравнение для определения равно-

весных значений плотности магнитного момента

$$\tilde{H} = 0. \quad (5.5.1)$$

Вспомяная определение эффективного магнитного поля

$$\tilde{H} = - \frac{\delta W}{\delta M},$$

мы видим, что обращение эффективного магнитного поля в нуль соответствует минимуму энергии ферромагнетика. Используя выражение (3.3.1) для энергии ферромагнетика, легко убедиться, что \*)

$$\tilde{H} = H^{(i)} - \frac{\partial w_a}{\partial M} - 2Mf'(M^2) + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (5.5.2)$$

Мы будем далее изучать только простейший и наиболее важный случай, когда равновесному состоянию ферромагнетика соответствует однородное намагничение и не будем изучать явлений, связанных с возможной доменной структурой ферромагнетика. Если ферромагнетик помещен в однородное и постоянное стороннее магнитное поле  $H_0^{(e)}$ , то для однородности намагничения необходимо, как мы видели в § 2, чтобы ферромагнетик имел форму эллипсоида. В этом случае, который мы и будем далее рассматривать, поле внутри ферромагнетика  $H_0^{(i)}$  и стороннее магнитное поле  $H_0^{(e)}$  связаны между собой соотношением

$$H_0^{(i)} = H_0^{(e)} - 4\pi \hat{N} M_0, \quad (5.5.3)$$

где  $M_0$  — равновесная плотность магнитного момента и  $\hat{N}$  — тензор размагничивающих коэффициентов.

Условие равновесия в случае однородного намагничения имеет вид

$$H_0^{(i)} - \frac{\partial w_a(M_0)}{\partial M_0} - 2M_0 f'(M_0^2) = 0.$$

Для одноосного ферромагнетика

$$w_a(M) = - \frac{1}{2} \beta (Mn)^2$$

( $n$  — единичный вектор вдоль оси анизотропии) и, следовательно,

$$H_0^{(i)} + \beta n (M_0 n) - 2M_0 f'(M_0^2) = 0.$$

\*) Эффективное магнитное поле, действующее на магнитный момент ферромагнетика, было введено Ландау и Лифшицем [3].

или

$$H_0^{(e)} + \beta n (M_0 n) - 4\pi \hat{N} M_0 - 2M_0 f'(M_0^2) = 0. \quad (5.5.4)$$

Последнее уравнение в принципе может служить для определения равновесной плотности магнитного момента  $M_0$  при заданном стороннем поле  $H_0^{(e)}$ . Однако фактически вид функции  $f(M^2)$  нам неизвестен, и поэтому модуль вектора  $M_0$  определить с помощью (5.5.4) нельзя; направление же вектора  $M_0$  при заданной его величине определяется уравнением (5.5.4) полностью. Действительно, умножая (5.5.4) векторно на  $M_0$ , мы получим уравнение

$$(H_0^{(e)} + \beta n (M_0 n) - 4\pi \hat{N} M_0) \times M_0 = 0, \quad (5.5.5)$$

не содержащее  $f'(M_0^2)$ , из которого можно найти  $M_0/M_0$ . Это уравнение имеет, вообще говоря, несколько решений, и мы должны взять те из них, которые соответствуют минимуму плотности энергии  $\omega(M)$  ферромагнетика,

$$\begin{aligned} \omega(M) &= -\frac{1}{2} \beta (Mn)^2 - H_0^{(e)} M - \frac{1}{2} H^{(m)} M = \\ &= -\frac{1}{2} \beta (Mn)^2 - H_0^{(e)} M + 2\pi M \hat{N} M. \end{aligned}$$

Рассмотрим в качестве примера ферромагнетик, имеющий форму сферы, и предположим, что  $H_0^{(e)} = 0$ . В этом случае уравнение (5.5.5) принимает вид

$$(M_0 n) (M_0 \times n) = 0.$$

Таким образом,  $M_0$  может быть направлено либо параллельно, либо перпендикулярно оси анизотропии.

Если  $\beta > 0$ , то минимум энергии достигается при  $M_0 \parallel n$ . В этом случае говорят о ферромагнетиках с магнитной анизотропией типа «легкая ось». Если  $\beta < 0$ , то минимум энергии достигается при  $M_0 \perp n$ . В этом случае говорят о ферромагнетиках с магнитной анизотропией типа «легкая плоскость». Схематически результаты решения уравнения (5.5.5) в некоторых наиболее интересных случаях приведены на рисунках на стр. 198—199.

В дальнейшем мы будем изучать малые адиабатические ( $\kappa = 0$ ,  $s = \text{const}$ ) колебания плотности магнитного момента ферромагнетика  $M$  и соответствующие колебания магнитного поля  $H^{(i)}$  около их равновесных значений. Уравнение движения плотности магнитного момента в этом случае сильно

упрощается, так как эффективное магнитное поле становится линейной функцией отклонений магнитного момента и магнитного поля от их равновесных значений.

Рассмотрим, например, одноосный ферромагнетик. Полагая

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0^{(i)} + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t),$$

где  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{h}$  — малые отклонения от  $\mathbf{M}_0$  и  $\mathbf{H}_0^{(i)}$ , получим, согласно (5.5.2), (5.5.4), следующее выражение для эффективного магнитного поля с точностью до квадратичных по  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{h}$  членов:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{h} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{M_0^2} \{ \mathbf{M}_0 \mathbf{H}_0^{(i)} + \beta (\mathbf{M}_0 \mathbf{n})^2 \} \mathbf{m} + \\ + \beta \mathbf{n} (\mathbf{m} \mathbf{n}) - 4 M_0 f''(M_0^2) (\mathbf{M}_0 \mathbf{m}). \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Поэтому уравнение движения плотности магнитного момента в случае малых отклонений от равновесных значений, которое мы будем называть линеаризованным уравнением движения, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = g \left( \mathbf{M}_0 \times \left[ \mathbf{h} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i \partial x_k} + \beta \mathbf{n} (\mathbf{m} \mathbf{n}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{M_0^2} (\mathbf{M}_0 \mathbf{H}_0^{(i)} + \beta (\mathbf{M}_0 \mathbf{n})^2) \mathbf{m} \right] \right). \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

Если ферромагнетик обладает магнитной анизотропией типа «легкая ось» ( $\beta > 0$ ) и  $\mathbf{H}_0^{(i)}$  параллельно вектору  $\mathbf{n}$ , то линеаризованное эффективное магнитное поле равно

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{h} - \left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right) \mathbf{m} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i \partial x_k} + (\beta - 4 M_0^2 f''(M_0^2)) (\mathbf{m} \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (5.5.8)$$

Если ферромагнетик обладает магнитной анизотропией типа «легкая плоскость» ( $\beta < 0$ ) и  $\mathbf{H}_0^{(i)} \perp \mathbf{n}$ , то линеаризованное эффективное магнитное поле равно

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{h} - \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \mathbf{m} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i \partial x_k} + \beta \mathbf{n} (\mathbf{m} \mathbf{n}) - 4 M_0 f''(M_0^2) (\mathbf{M}_0 \mathbf{m}). \quad (5.5.9)$$

К линеаризованному уравнению движения плотности магнитного момента (5.5.7) должны быть присоединены граничные условия для плотности магнитного момента. Общее граничное условие для плотности магнитного момента было



сформулировано выше:

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k}} \mathbf{v}_k \Big|_S = 0,$$

где  $F$  — плотность энергии ферромагнетика, определяемая формулой (3.3.2), и  $\mathbf{v}$  — единичный вектор вдоль внешней нормали к поверхности ферромагнетика.

Нас интересуют малые отклонения магнитного момента от равновесного значения и малые градиенты момента. В этом случае

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial M_i}{\partial x_k}} = \alpha_{kj} \frac{\partial m_l}{\partial x_j} + \gamma_{ik;l} m_l, \quad \gamma_{ik;l} = \left( \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial M_l} \right)_{M=M_0}$$

и граничные условия приобретают вид

$$\left( \alpha_{kj} \frac{\partial m_l}{\partial x_j} + \gamma_{ik;l} m_l \right) \mathbf{v}_k \Big|_S = 0. \quad (5.5.10)$$

В предыдущем разделе мы видели, что если не учитывать диссипативных процессов, нарушающих закон сохранения квадрата плотности магнитного момента, то граничные условия (5.4.2) становятся несправедливыми и должны быть заменены условиями (5.4.4). В этом случае вместо (5.5.10) мы получим

$$\varepsilon_{rpi} M_{0p} \left( \alpha_{kl} \frac{\partial m_l}{\partial x_l} + \gamma_{ik;l} m_l \right) \mathbf{v}_k \Big|_S = 0. \quad (5.5.11)$$

Если в числе элементов симметрии кристаллической решетки имеется центр инверсии, то, как известно, для нее нельзя построить тензор третьего ранга, т. е.  $\gamma_{ik;l} = 0$ , и граничные условия (5.5.11) принимают вид

$$\mathbf{v}_k \alpha_{kl} \frac{\partial m_l}{\partial x_l} \Big|_S = 0 \quad (5.5.12)$$

(заметим, что  $\mathbf{m} \perp \mathbf{M}_0$ ).

Во многих случаях энергия анизотропии сильно возрастает вблизи поверхности ферромагнетика, и поэтому коэффициенты в линеаризованном уравнении движения плотности магнитного момента будут зависеть от координат. Это сильно осложняет исследование уравнений движения. Однако, как мы сейчас покажем, если длины волн, связанных с колебаниями плотности магнитного момента, велики по сравнению с толщиной слоя  $\delta$ , на котором существенно изменяется константа

анизотропии, то в уравнении движения магнитного момента можно не учитывать зависимости константы анизотропии от координат, но при этом следует пользоваться некоторым эффективным граничным условием вида (5.5.11), в котором величины  $\gamma_{ik;l}$  определяются характером зависимости константы анизотропии от координат.

Чтобы убедиться в этом, предположим, что ось анизотропии перпендикулярна границе ферромагнетика и константа анизотропии зависит от расстояния  $z$  до границы,  $\beta = \beta(z)$  (ферромагнетик занимает полупространство  $z > 0$ ). Линеаризованное уравнение движения плотности магнитного момента имеет тогда вид

$$\frac{\partial m}{\partial t} = g [M_0 \times \tilde{H}],$$

где

$$\tilde{H} = h - \beta(z) m + \alpha \Delta m.$$

Предполагая, что функция  $\beta(z)$  резко возрастает в тонком слое толщины  $\delta$ , на котором  $m$  и  $h$  практически не меняются, получим после интегрирования этого уравнения по  $z$  от нуля до  $\delta$

$$\delta \frac{\partial m}{\partial t} = g \left[ M_0 \times \left( h\delta - m \int_0^\delta \beta(z) dz + \alpha \frac{\partial m}{\partial z} \Big|_{z=\delta} + \alpha \left( \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right) \delta \right) \right], \quad (5.5.13)$$

причем здесь мы учли, что  $\frac{\partial m}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$  в силу граничного условия (5.5.12).

Предполагая далее, что при  $\delta \rightarrow 0$  интеграл  $\int_0^\delta \beta(z) dz$  остается конечным, получим из последнего уравнения эффективное граничное условие

$$d \frac{\partial m}{\partial z} - m \Big|_{z=0} = 0, \quad (5.5.14)$$

где

$$d = \frac{\alpha}{\delta \int_0^\delta \beta(z) dz}.$$

Для того чтобы можно было пренебречь в уравнении (5.5.13) членами, пропорциональными  $\delta$ , необходимо, очевидно, чтобы частота изменения плотности магнитного момента  $\omega$ , длина волны  $\lambda$  и величина  $\beta(0)$  удовлетворяли условиям

$$\omega \ll g M_0 \beta(0), \quad \lambda \gg \sqrt{\frac{\alpha}{\beta(0)}}, \quad \beta(0) \gg 1. \quad (5.5.15)$$

Кроме того, необходимо, чтобы плотность магнитного момента медленно менялась в слое толщины  $\delta$ . Считая, что в этом слое изменение плотности магнитного момента описывается уравнением

$$\alpha \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} - \beta(0) m = 0,$$

легко заключить, что величина  $\delta$  должна удовлетворять условию

$$\delta \ll \sqrt{\frac{\alpha}{\beta(0)}}$$

или

$$\delta \ll d.$$

Если длина волны  $\lambda$  удовлетворяет неравенствам  $\sqrt{\delta d} \ll \lambda \ll d$ , то эффективное граничное условие приобретает вид [5]

$$\left. \frac{\partial m}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \sqrt{\delta d} \ll \lambda \ll d. \quad (5.5.16)$$

Если же  $\lambda \gg d$ , то [6]

$$m|_{z=0} = 0, \quad \lambda \gg d. \quad (5.5.17)$$

## § 6. Спиновые волны в ферромагнетиках

1. **Тензор высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетика.** Перейдем теперь к исследованию колебаний плотности магнитного момента ферромагнетика  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  около равновесного значения  $\mathbf{M}_0$ . Вместе с колебаниями плотности магнитного момента будут происходить также колебания магнитного поля  $\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$  около равновесного значения  $\mathbf{H}_0^{(i)}$ , причем отклонения плотности магнитного момента  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  и магнитного поля  $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$  будут связаны между собой линеаризованными уравнениями движения (5.5.7).

Переходя в этом уравнении к компонентам Фурье отклонений  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{m}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega,$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega,$$

получим

$$-i\omega \mathbf{m}(\mathbf{k}, \omega) = g \left( M_0 \times \left[ \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega) - \left\{ \alpha_{ij} k_i k_j + \frac{M_0 H_0^{(i)}}{M_0^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \beta \frac{(M_0 n)^2}{M_0^2} \right\} \mathbf{m}(\mathbf{k}, \omega) + \beta n(n\mathbf{m}(\mathbf{k}, \omega)) \right] \right).$$

Это уравнение устанавливает связь между компонентами Фурье  $\mathbf{m}(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega)$ , которую мы будем записывать в виде [3]

$$m_i(\mathbf{k}, \omega) = \chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) h_j(\mathbf{k}, \omega), \quad (6.1.1)$$

где

$$\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.1.2)$$

$$\chi_{xx} = \frac{g\Omega_1 M_0}{\Omega_1 \Omega_2 - \omega^2}, \quad \chi_{yy} = \frac{g\Omega_2 M_0}{\Omega_1 \Omega_2 - \omega^2},$$

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx} = \frac{t\omega g M_0}{\Omega_1 \Omega_2 - \omega^2},$$

$$\Omega_1 = g M_0 \left( \alpha_{ij} k_i k_j + \frac{M_0 H_0^{(i)}}{M_0^2} + \beta \cos^2 \psi \right),$$

$$\Omega_2 = g M_0 \left( \alpha_{ij} k_i k_j + \frac{M_0 H_0^{(i)}}{M_0^2} + \beta \cos 2\psi \right)$$

и  $\psi$  — угол между осью анизотропии  $\mathbf{n}$  и вектором  $\mathbf{M}_0$ ; ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{M}_0$ , ось  $x$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{M}_0$ . Величины  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  образуют, очевидно, некоторый тензор, который называется тензором высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетика. Обратим внимание на то, что компоненты тензора  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  зависят не только от частоты  $\omega$ , но также и от волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Это значит, что в ферромагнетиках имеет место как временная, так и пространственная дисперсия магнитной восприимчивости.

Если ферромагнетик обладает анизотропией типа «легкая ось» ( $\beta > 0$ ) и  $\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{n} \parallel \mathbf{H}_0^{(i)}$ , то

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega,$$

где

$$\Omega = g M_0 \left( \alpha_{ij} k_i k_j + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta \right). \quad (6.1.3)$$

Относящиеся к этому случаю формулы справедливы также для ферромагнетиков кубической симметрии. При этом нужно лишь произвести замену  $\beta$  на  $2\beta' M_0^2$ , если ось легкого намагничивания направлена вдоль ребра куба, и  $\beta$  на  $\frac{4}{3} |\beta'| M_0^2$ , если ось легкого намагничивания направлена вдоль пространственной диагонали куба, где  $\beta'$  — константа анизотропии, входящая в формулу (3.2.3) для плотности энергии анизотропии.

Если ферромагнетик обладает магнитной анизотропией типа «легкая плоскость» ( $\beta < 0$ ) и  $\mathbf{M}_0 \perp \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}_0^{(i)}$ , то

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= g M_0 \left( \alpha_{ij} k_i k_j + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right), \\ \Omega_2 &= g M_0 \left( \alpha_{ij} k_i k_j + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + |\beta| \right). \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

**2. Закон дисперсии спиновых волн.** Перейдем к установлению зависимости частоты  $\omega$  спиновой волны от ее волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Для этого нужно воспользоваться как уравнением движения магнитного момента, так и уравнениями Максвелла. Уравнение движения магнитного момента эквивалентно, как мы только что видели, введению тензора высокочастотной магнитной восприимчивости  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ . Поэтому нам нужно еще учесть связь между величинами  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$ , вытекающую из уравнений Максвелла. Но спиновые волны являются низкочастотными магнитными волнами и для них можно не учитывать электрического поля, а магнитное поле считать безвихревым. Иными словами, при исследовании спиновых волн можно пользоваться магнитостатическим приближением, т. е. считать, что величины  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = -4\pi \text{div } \mathbf{m}(\mathbf{r}, t).$$

Переходя в этих уравнениях от величин  $m(\mathbf{r}, t)$  и  $h(\mathbf{r}, t)$  к их компонентам Фурье, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega) &= 0, \\ \mathbf{k}h(\mathbf{k}, \omega) &= -4\pi\mathbf{k}m(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Из первого уравнения следует, что магнитное поле  $h(\mathbf{k}, \omega)$  параллельно волновому вектору  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega) = -i\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k}, \omega),$$

где  $\varphi(\mathbf{k}, \omega)$  — компонента Фурье магнитного потенциала. Учитывая, что

$$m(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)h(\mathbf{k}, \omega),$$

представим второе уравнение (6.2.1) в виде

$$(k^2 + 4\pi k_i k_j \chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega))\varphi(\mathbf{k}, \omega) = 0,$$

откуда

$$k^2 + 4\pi k_i k_j \chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (6.2.2)$$

Это соотношение, связывающее частоту  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  спиновой волны (оно называется дисперсионным уравнением), и определяет спектр спиновых волн в ферромагнетике.

Используя выражение (6.1.2) для  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ , приведем дисперсионное уравнение (6.2.2) к виду

$$1 + \frac{4\pi g M_0 \Omega_1}{\Omega_1 \Omega_2 - \omega^2} \cdot \frac{k_x^2}{k^2} + \frac{4\pi g M_0 \Omega_2}{\Omega_1 \Omega_2 - \omega^2} \cdot \frac{k_y^2}{k^2} = 0,$$

откуда

$$\omega_s(\mathbf{k}) = \sqrt{\Omega_1 \Omega_2 + 4\pi g M_0 (\Omega_1 \cos^2 \varphi_k + \Omega_2 \sin^2 \varphi_k) \sin^2 \vartheta_k}, \quad (6.2.3)$$

где  $\vartheta_k$  и  $\varphi_k$  — полярный и азимутальный углы волнового вектора  $\mathbf{k}$  (напомним, что ось  $z$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{M}_0$ , а ось  $x$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{M}_0$  и  $\mathbf{n}$ ). В области волновых векторов  $ak^2 \gg 1$  выражение для частоты спиновой волны значительно упрощается [8]:

$$\omega_s(\mathbf{k}) = g M_0 a_{ij} k_i k_j.$$

В изотропном случае эта формула приобретает вид

$$\omega_s(\mathbf{k}) = \frac{\theta_c}{h} (ak)^2, \quad (6.2.4)$$

где  $\theta_c = \hbar \frac{gM_0}{a^2} \alpha$  ( $\theta_c$  по порядку величины совпадает с температурой Кюри). Таким образом в области волновых векторов  $\alpha k^2 \gg 1$  частота спиновой волны пропорциональна квадрату волнового вектора.

**3. Затухание спиновых волн.** В предыдущем разделе мы не учитывали диссипативных процессов и пришли поэтому к выводу о том, что спиновые волны не затухают. В действительности, однако, спиновые волны всегда затухают, хотя это затухание при низких температурах ( $T \ll \theta_c$ ) очень мало. Оно вызывается взаимодействием спиновых волн между собой, а также с колебаниями решетки и электронами проводимости. Эти механизмы затухания мы изучим позднее, здесь же ограничимся феноменологическим рассмотрением процесса затухания спиновых волн.

Для этого необходимо воспользоваться уравнением движения плотности магнитного момента содержащим релаксационный член  $\mathbf{R}$  и уравнением теплопроводности. Мы в дальнейшем не будем учитывать процесса теплопроводности, считая колебания плотности магнитного момента адиабатическими.

Если выбрать релаксационный член  $\mathbf{R}$  в форме (5.2.8), то уравнение для  $\mathbf{M}$  будет иметь вид

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = g (\mathbf{M} \times \tilde{\mathbf{H}}) + \frac{1}{\tau_2} \tilde{\mathbf{H}} - \frac{1}{\tau_1} (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}})), \quad (6.3.1)$$

где  $\mathbf{n} = \frac{M_0}{M_0}$ , и эффективное магнитное поле определяется формулой (5.5.6). Исходя из этого уравнения и поступая так же, как и в предыдущем разделе, можно определить тензор высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетика с учетом диссипативных процессов.

Мы ограничимся здесь рассмотрением одноосного ферромагнетика, причем будем предполагать, что поле  $\mathbf{H}_0^{(i)}$  параллельно оси легкого намагничения. В этом случае, согласно (5.5.8),

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{h} - \left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right) \mathbf{m} + \alpha_{ik} \frac{\partial^2 m}{\partial x_i \partial x_k} + \left( \beta - 4 M_0^2 f''(M_0^2) \right) (\mathbf{m} \mathbf{n}).$$

Входящую в выражение для  $\tilde{\mathbf{H}}$  величину  $f''(M_0^2)$  легко связать со статической магнитной восприимчивостью ферромагнетика  $\chi_{zz}^0 = \frac{\partial M_0}{\partial H_0^{(i)}}$ . Действительно, в состоянии

равновесия, как мы видели,

$$H_0^{(l)} + \beta M_0 - 2M_0 f'(M_0^2) = 0,$$

откуда

$$(2M_0)^2 f''(M_0^2) = \frac{1}{\chi_{zz}^0} - \frac{H_0^{(l)}}{M_0}. \quad (6.3.2)$$

Используя эти формулы, получим следующие выражения для компонент тензора высокочастотной магнитной восприимчивости:

$$\hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{xx} = \chi_{yy} &= \frac{gM_0\Omega - \frac{i\omega}{\tau} + \frac{\Omega}{gM_0\tau^2}}{\Omega^2 - \left(\omega + \frac{i\Omega}{gM_0\tau}\right)^2}, \\ \chi_{zz} &= \frac{\chi_{zz}^0}{1 + \chi_{zz}^0 (\alpha_{ij} k_i k_j - i\omega\tau_2)}, \\ \chi_{xy} = -\chi_{yx} &= \frac{i\omega gM_0}{\Omega^2 - \left(\omega + \frac{i\Omega}{gM_0\tau}\right)^2} \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

и

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}, \quad \Omega = gM_0 \left( \alpha_{ij} k_i k_j + \frac{H_0^{(l)}}{M_0} + \beta \right).$$

Заметим, что  $\frac{1}{gM_0\tau} \ll 1$ . Отметим также, что компонента  $\chi_{zz}$  тензора  $\chi(\mathbf{k}, \omega)$  отлична от нуля, в то время как при  $\tau_2 = \infty$  она равнялась нулю.

Подставив (6.3.3) в (6.2.2), получим уравнение для определения частот спиновой волны как функции ее волнового вектора. При  $R \neq 0$  это уравнение имеет комплексные корни, вещественная часть которых определяет частоты, а мнимая — коэффициенты затухания спиновых волн (декременты затухания).

Так как  $\frac{\Omega}{gM_0\tau} \ll |\omega|$ , то коэффициент затухания спиновой волны  $\gamma_s(\mathbf{k})$  определяется формулой

$$\gamma_s(\mathbf{k}) = \frac{1}{gM_0\tau} (\Omega + 2\pi gM_0 \sin^2 \vartheta_k). \quad (6.3.4)$$



Эта величина мала по сравнению с частотой, которая с точностью до членов порядка  $(gM_0\tau)^{-2}$  по-прежнему определяется формулами (6.2.3), (6.1.2).

Формулы (6.3.3) для тензора высокочастотной магнитной восприимчивости мы получили, исходя из феноменологического уравнения движения плотности магнитного момента с релаксационным членом, содержащим величину  $\tau$  как некоторую материальную константу. В § 31 будет дана микроскопическая теория высокочастотной магнитной восприимчивости, основанная на учете конкретных процессов взаимодействия между спиновыми волнами, которая показывает, что формулы (6.3.3) не передают правильно характера функций  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  при произвольных  $\mathbf{k}$  и  $\omega$ . Мы увидим, что только в области малых частот, когда  $\omega \ll \omega_s(0) \ll \frac{T}{\hbar}$  и  $ak^2 \ll 1$ , а также при частотах, близких к частоте спиновой волны,  $|\omega - \omega_s(\mathbf{k})| \ll \ll \omega_s(\mathbf{k})$ , формулы (6.3.3.) правильно определяют тензор  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ . При этом в первом случае величина  $\tau$  является некоторой функцией температуры, а во втором — функцией температуры и волнового вектора.

Таким образом, уравнение движения плотности магнитного момента с релаксационным членом, содержащим  $\tau$  как некоторую материальную константу, имеет ограниченную применимость при исследовании поведения ферромагнетика в стороннем переменном магнитном поле.

Ограниченная применимость этого уравнения проявляется также при определении декремента затухания спиновой волны, а именно: формула (6.3.4) для декремента затухания спиновой волны с величиной  $\tau$  как некоторой материальной константой оказывается справедливой только в том случае, если  $ak^2 \ll 1$ . При этом, как будет показано в § 31,

$$\gamma_s(\mathbf{k}) = \frac{\beta^2}{24\pi} g M_0 \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^2, \quad ak^2 \ll 1. \quad (6.3.5)$$

Если же  $ak^2 \gg 1$ , то

$$\gamma_s(\mathbf{k}) \approx \frac{\theta_c}{\hbar} (ak)^3 \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{5/2}, \quad \hbar\omega_s(\mathbf{k}) \gg T. \quad (6.3.6)$$

Как упоминалось выше, уравнение движения плотности магнитного момента с релаксационным членом (5.2.8) приводит, при наличии стороннего переменного магнитного поля, к правильным результатам в области малых частот. С другой стороны, как мы убедимся в главе VII, уравнение движения

плотности магнитного момента с релаксационным членом пригоден для описания процесса релаксации магнитного момента, т. е. приближения его к равновесному значению. Следует, однако, иметь в виду, что для описания процесса релаксации и поведения ферромагнетика в стороннем переменном магнитном поле приходится пользоваться разными релаксационными константами. Это обстоятельство лишней раз подчеркивает качественный характер уравнения движения плотности магнитного момента с релаксационным членом.

Рассмотрим более подробно процесс релаксации магнитного момента. Положим для этого в уравнении (6.3.1)

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m},$$

где  $\mathbf{m}$  — малая добавка к равновесной плотности магнитного момента  $\mathbf{M}_0$ , которую будем считать функцией только времени, но не координат. В простейшем случае, рассмотрением которого мы здесь ограничимся, когда стороннее магнитное поле направлено вдоль оси легкого намагничивания и образец имеет форму шара, эффективное магнитное поле с точностью до линейных относительно  $\mathbf{m}$  членов равно

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & - \left( \frac{4\pi}{3} + \beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} \right) \mathbf{m} + \\ & + \left( \beta - \frac{4\pi}{3} + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} - \frac{1}{\chi_{zz}^0} \right) (\mathbf{m} \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned}$$

и решение уравнения (6.3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} m_z &= m_{z0} e^{-\gamma_z t}, \\ m_x + im_y &= (m_{x0} + im_{y0}) e^{-\gamma_{\perp} t} e^{i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

где  $\omega_0 = g M_0 \left( \beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} \right)$ ,

$$\gamma_z = \frac{1}{\tau_z} \left( \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{\chi_{zz}^0} \right), \quad \gamma_{\perp} = \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \left( \beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} \right) \quad (6.3.8)$$

и  $m_{z0}$  и  $m_{x0} + im_{y0}$  — начальные значения продольной и поперечной (относительно  $\mathbf{M}_0$ ) составляющих отклонения плотности магнитного момента  $\mathbf{m}$  от равновесного значения  $\mathbf{M}_0$ .

Величины

$$\tau_z = \frac{1}{\gamma_z}, \quad \tau_{\perp} = \frac{1}{\gamma_{\perp}}$$

представляют собой времена релаксации продольной и поперечной составляющих магнитного момента. Так как  $M_0$  в очень малой степени зависит от  $H_0^{(t)}$ , то  $\chi_{zz}^0 \ll 1$  и, следовательно,  $\gamma_z \approx \frac{1}{\tau_2 \chi_{zz}^0}$ . Мы видим, что форма тела мало сказывается на величине  $\gamma_z$ .

Если  $\beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} \gg 1$ , то форма тела не оказывает влияния также и на  $\gamma_{\perp}$ ; в этом случае

$$\gamma_z = \frac{1}{\tau_2 \chi_{zz}^0}, \quad \gamma_{\perp} = \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \left( \beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} \right). \quad (6.3.9)$$

## § 7. Уравнения движения магнитных моментов в антиферромагнетиках

**1. Эффективные магнитные поля в антиферромагнетиках.** Изучив спиновые волны в ферромагнетиках, мы перейдем теперь к изучению спиновых волн в антиферромагнетиках, которые, так же как и спиновые волны в ферромагнетиках, представляют собой распространяющиеся колебания магнитных моментов. Для этого нужно прежде всего установить уравнения движения магнитных моментов в антиферромагнетиках.

В отличие от простой магнитной структуры ферромагнетиков, магнитные структуры антиферромагнетиков отличаются, как уже указывалось выше, большим разнообразием. Мы ограничимся здесь рассмотрением только простейшего случая — одноосных антиферромагнетиков с двумя зеркальными магнитными подрешетками.

Если не учитывать диссипации энергии, то уравнения движения плотностей магнитных моментов  $M_1(\mathbf{r}, t)$  и  $M_2(\mathbf{r}, t)$  обеих магнитных подрешеток будут иметь такой же вид, как и уравнение движения (5.1.2) для плотности магнитного момента ферромагнетика [9],

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial t} &= g (M_1 \times \tilde{H}_1), \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} &= g (M_2 \times \tilde{H}_2), \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

где  $g$  — гиромангнитное отношение и  $\tilde{H}_1$  и  $\tilde{H}_2$  — эффективные магнитные поля, действующие на моменты  $M_1(\mathbf{r}, t)$  и  $M_2(\mathbf{r}, t)$ .

Эти поля связаны с энергией антиферромагнетика  $W$  общим соотношением (5.1.5)

$$\tilde{H}_1 = -\frac{\delta W}{\delta M_1}, \quad \tilde{H}_2 = -\frac{\delta W}{\delta M_2}.$$

Используя выражение для энергии антиферромагнетика  $W$ , получим отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= H^{(i)} - \frac{\partial F}{\partial M_1} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial M_1}, \\ \tilde{H}_2 &= H^{(i)} - \frac{\partial F}{\partial M_2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial M_2}, \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

где  $H^{(i)}$  — магнитное поле внутри антиферромагнетика.

Заметим, что уравнения движения плотностей магнитных моментов находятся в соответствии с законом сохранения энергии и приводят к следующему выражению для плотности потока энергии в антиферромагнетике:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{c}{4\pi} [E \times H^{(m)}]_i - \alpha_{ij} \left( \frac{\partial M_1}{\partial x_j} \frac{\partial M_1}{\partial t} + \frac{\partial M_2}{\partial x_j} \frac{\partial M_2}{\partial t} \right) - \\ &\quad - \alpha'_{ij} \left( \frac{\partial M_1}{\partial x_j} \frac{\partial M_2}{\partial t} + \frac{\partial M_2}{\partial x_j} \frac{\partial M_1}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

## 2. Равновесные состояния антиферромагнетиков.

Прежде чем изучать спиновые волны в антиферромагнетиках, мы должны еще определить равновесные значения плотностей магнитных моментов  $M_{10}$  и  $M_{20}$  обеих подрешеток [10], возле которых происходят колебания моментов  $M_1$  и  $M_2$ . С этой целью нужно, так же как и в случае ферромагнетиков, приравнять нулю эффективные магнитные поля. Можно, однако, учитывая «жесткость» магнитных моментов подрешеток ( $M_1 = M_2 = M_0$ ), исходить из того, что равновесному состоянию антиферромагнетика соответствуют такие направления магнитных моментов подрешеток, при которых достигается минимум плотности энергии антиферромагнетика

$$\begin{aligned} \omega &= \delta M_1 M_2 - \frac{1}{2} \beta [(M_1 n)^2 + (M_2 n)^2] - \\ &\quad - \beta' (M_1 n) (M_2 n) - H_0^{(e)} (M_1 + M_2) \end{aligned}$$

(Мы пренебрегли здесь для простоты энергией  $\omega_d$ , ответственной за возникновение слабого ферромагнетизма [11] и энергией  $2\pi (M_1 + M_2) \hat{N} (M_1 + M_2)$ , зависящей от формы

тела. Основные состояния и спектр спиновых волн с учетом энергии  $\omega_d$  подробно рассмотрены в монографиях [12, 13].)

Предположим сначала, что стороннее магнитное поле отсутствует. Если при этом  $\beta - \beta' > 0$ , то, как легко убедиться, минимум  $\omega$  достигается в том случае, когда магнитные моменты подрешеток ориентированы вдоль оси анизотропии и  $M_{10} + M_{20} = 0$ . О таких антиферромагнетиках говорят, что они обладают магнитной анизотропией типа «легкая ось». Если  $\beta - \beta' < 0$ , то минимум  $\omega$  достигается в том случае, когда магнитные моменты подрешеток ориентированы перпендикулярно оси анизотропии и  $M_{10} + M_{20} = 0$ . В этом случае говорят, что антиферромагнетик обладает магнитной анизотропией типа «легкая плоскость» \*).

Нетрудно определить равновесные направления магнитных моментов  $M_{10}$  и  $M_{20}$  и при наличии стороннего магнитного поля  $H_0^{(e)}$ . Результаты соответствующих вычислений схематически приведены на стр. 204.

## § 8. Спиновые волны в антиферромагнетиках

1. Тензор высокочастотной магнитной восприимчивости антиферромагнетиков. Имея уравнения движения магнитных моментов в антиферромагнетике и зная равновесные значения этих моментов, можно найти тензор высокочастотной магнитной восприимчивости антиферромагнетика. Для этого следует положить в уравнениях движения (7.1.1) и в уравнениях (7.1.2), определяющих эффективные магнитные поля,

$$M_1(r, t) = M_{10} + m_1(r, t), \quad M_2(r, t) = M_{20} + m_2(r, t), \\ H^{(i)}(r, t) = H_0^{(i)} + h(r, t),$$

где  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $h$  — малые отклонения от равновесных величин  $M_{10}$ ,  $M_{20}$ ,  $H_0^{(i)}$ , и произвести затем линеаризацию этих уравнений. В результате мы приходим к системе двух линейных дифференциальных уравнений для определения отклонений моментов  $m_1(r, t)$  и  $m_2(r, t)$ .

Производная в этих уравнениях преобразование Фурье, можно выразить компоненты Фурье отклонений магнитных моментов

---

\*) В качестве примера антиферромагнетиков с магнитной анизотропией типа «легкая ось» можно привести  $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ ,  $\text{FeCO}_3$ ; антиферромагнетиками с магнитной анизотропией «легкая плоскость» являются гематит, карбонаты и фториды переходных металлов.

$m_1(\mathbf{k}, \omega)$  и  $m_2(\mathbf{k}, \omega)$  через компоненту Фурье переменного магнитного поля  $\mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega)$  и найти суммарный переменный магнитный момент антиферромагнетика

$$m(\mathbf{k}, \omega) = m_1(\mathbf{k}, \omega) + m_2(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega), \quad (8.1.1)$$

где  $\hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$  — некоторый тензор, зависящий от  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$  и величин, характеризующих равновесное состояние антиферромагнетика. Этот тензор и представляет собой тензор высокочастотной магнитной восприимчивости антиферромагнетика.

Найдем его прежде всего для антиферромагнетика с магнитной анизотропией типа «легкая ось». Если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  параллельно оси анизотропии и  $H_0^{(e)} < H_1$ , где  $H_1 = M_0 \sqrt{2\delta(\beta - \beta')}$ , то линеаризованные уравнения для  $m_1(\mathbf{k}, \omega)$  и  $m_2(\mathbf{k}, \omega)$  имеют, согласно (7.1.2), (4.2.1), (4.2.3), следующий вид:

$$-i\omega m_1(\mathbf{k}, \omega) = g \left( M_{10} \times \left[ \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega) - \left( \delta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} + \beta - \beta' + \alpha_{ij} k_i k_j \right) m_1(\mathbf{k}, \omega) - \left( \delta + \alpha'_{ij} k_i k_j \right) m_2(\mathbf{k}, \omega) \right] \right), \quad (8.1.2)$$

$$-i\omega m_2(\mathbf{k}, \omega) = g \left( M_{20} \times \left[ \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega) - \left( \delta - \frac{H_0^{(e)}}{M_0} + \beta - \beta' + \alpha_{ij} k_i k_j \right) m_2(\mathbf{k}, \omega) - \left( \delta + \alpha'_{ij} k_i k_j \right) m_1(\mathbf{k}, \omega) \right] \right), \quad (8.1.3)$$

откуда [9]

$$\hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \frac{1}{2} \chi_0 \left( \frac{\Omega_+ (\Omega_+ - gH_0^{(e)})}{\Omega_+^2 - \omega^2} + \frac{\Omega_- (\Omega_- + gH_0^{(e)})}{\Omega_-^2 - \omega^2} \right),$$

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx} = i\omega \chi_0 \left( \frac{\Omega_+ - gH_0^{(e)}}{\Omega_+^2 - \omega^2} - \frac{\Omega_- + gH_0^{(e)}}{\Omega_-^2 - \omega^2} \right)$$

и

$$\Omega_{\pm} = gM_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left( \frac{H_1}{M_0} \right)^2} \pm gH_0^{(e)}. \quad \chi_0 = \frac{1}{\delta}$$

(ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии и магнитное поле  $H_0^{(e)}$  параллельно оси анизотропии); так как магнитный момент антиферромагнетика мал, то  $H_0^{(i)} = H_0^{(e)}$ .

Поступая аналогичным образом, можно определить тензор высокочастотной магнитной восприимчивости антиферромагнетика в том случае, когда магнитное поле  $H_0^{(e)}$  ориентировано перпендикулярно оси анизотропии:

$$\hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ 0 & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}, \quad (8.1.4)$$

где

$$\chi_{xx} = \chi_0 \frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - \omega^2}, \quad \chi_{yy} = \chi_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 - \omega^2}, \quad \chi_{zz} = \chi_0 \frac{(gH_0^{(e)})^2}{\Omega_1^2 - \omega^2},$$

$$\chi_{yz} = -\chi_{zy} = \chi_0 \frac{i\omega g H_0^{(e)}}{\Omega_1^2 - \omega^2}$$

и

$$\Omega_1 = gM_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij})k_i k_j + \left(\frac{H_1}{M_0}\right)^2 + \left(\frac{H_0^{(e)}}{M_0}\right)^2},$$

$$\Omega_2 = gM_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij})k_i k_j + \left(\frac{H_1}{M_0}\right)^2}$$

(предполагается, что  $H_0^{(e)} \ll H_2$ ,  $H_2 = 2\delta M_0$ , ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии, ось  $x$  вдоль  $H_0^{(e)}$ ).

Рассмотрим теперь антиферромагнетики с магнитной анизотропией типа «легкая плоскость». Если поле  $H_0^{(e)}$  перпендикулярно оси анизотропии и  $H_0^{(e)} \ll H_2$ , то тензор высокочастотной магнитной восприимчивости определяется формулой [13]

$$\hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ 0 & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}, \quad (8.1.5)$$

где

$$\chi_{xx} = \chi_0 \frac{\Omega_2'^2}{\Omega_2'^2 - \omega^2}, \quad \chi_{yy} = \chi_0 \frac{(gH_0^{(e)})^2}{\Omega_1'^2 - \omega^2},$$

$$\chi_{zz} = \chi_0 \frac{\Omega_1'^2}{\Omega_1'^2 - \omega^2}, \quad \chi_{yz} = -\chi_{zy} = -\chi_0 \frac{i\omega g H_0^{(e)}}{\Omega_1'^2 - \omega^2}$$

и

$$\Omega'_1 = g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left(\frac{H_0^{(e)}}{M_0}\right)^2},$$

$$\Omega'_2 = g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left(\frac{H_1}{M_0}\right)^2}$$

(ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии, а ось  $x$  вдоль магнитного поля  $H_0^{(e)}$ ).

Если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  параллельно оси анизотропии, то

$$\hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}, \quad (8.1.6)$$

где

$$\chi_{xx} = \chi_0 \frac{(gH_0^{(e)})^2}{\Omega_1''^2 - \omega^2}, \quad \chi_{yy} = \chi_0 \frac{\Omega_1''^2}{\Omega_1''^2 - \omega^2},$$

$$\chi_{zz} = \chi_0 \frac{\Omega_2''^2}{\Omega_2''^2 - \omega^2}, \quad \chi_{xy} = -\chi_{yx} = i\chi_0 \frac{\omega g H_0^{(e)}}{\Omega_1''^2 - \omega^2}$$

и

$$\Omega_1'' = g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left(\frac{H_1}{M_0}\right)^2 + \left(\frac{H_0^{(e)}}{M_0}\right)^2},$$

$$\Omega_2'' = g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j \left(1 - \left(\frac{H_0^{(e)}}{H_2}\right)^2\right)}$$

(ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии, а ось  $x$  лежит в плоскости магнитных моментов подрешеток).

## 2. Спектр спиновых волн в антиферромагнетиках.

Зная тензор высокочастотной магнитной восприимчивости антиферромагнетика, легко найти спектр его спиновых волн [14]. Для этого следует воспользоваться общим дисперсионным уравнением (6.3.2), которое определяет спектр спиновых волн в магнитостатическом приближении как для ферромагнетиков, так и для антиферромагнетиков,

$$k^2 + 4\pi k_i k_j \chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = 0.$$

Однако фактически в случае антиферромагнетика решать это уравнение не нужно, так как компоненты тензора  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  для антиферромагнетика пропорциональны малому параметру  $\chi_0$ , и поэтому с точностью до членов порядка  $g M_0 \chi_0$



частоты спиновых волн должны совпадать с полюсами тензора  $\hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$ . Отсюда следует, например, что в случае антиферромагнетиков с магнитной анизотропией типа «легкая ось» частоты спиновых волн определяются формулами [15, 9, 16]

$$\left. \begin{aligned} \omega_{s1}(\mathbf{k}) \equiv \Omega_+ &= g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left(\frac{H_1}{M_0}\right)^2 + g H_0^{(e)}}, \\ \omega_{s2}(\mathbf{k}) \equiv \Omega_- &= g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left(\frac{H_1}{M_0}\right)^2 - g H_0^{(e)}}. \end{aligned} \right\} (8.2.1)$$

если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  параллельно оси анизотропии и  $H_0^{(e)} < H_1$  и формулами [16]

$$\left. \begin{aligned} \omega_{s1}(\mathbf{k}) \equiv \Omega_1 &= g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left(\frac{H_1}{M_0}\right)^2 + \left(\frac{H_0^{(e)}}{M_0}\right)^2}, \\ \omega_{s2}(\mathbf{k}) \equiv \Omega_2 &= g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left(\frac{H_1}{M_0}\right)^2}. \end{aligned} \right\} (8.2.2)$$

если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  перпендикулярно оси анизотропии.

В случае антиферромагнетиков с магнитной анизотропией типа «легкая плоскость» частоты спиновых волн определяются формулами [12, 13]

$$\left. \begin{aligned} \omega_{s1}(\mathbf{k}) \equiv \Omega_1'' &= g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left(\frac{H_1}{M_0}\right)^2 + \left(\frac{H_0^{(e)}}{M_0}\right)^2}, \\ \omega_{s2}(\mathbf{k}) \equiv \Omega_2'' &= g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j \left(1 - \left(\frac{H_0^{(e)}}{H_2}\right)^2\right)}. \end{aligned} \right\} (8.2.3)$$

если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  параллельно оси анизотропии, и формулами [17]

$$\left. \begin{aligned} \omega_{s1}(\mathbf{k}) \equiv \Omega_1' &= g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left(\frac{H_0^{(e)}}{M_0}\right)^2}, \\ \omega_{s2}(\mathbf{k}) \equiv \Omega_2' &= g M_0 \sqrt{2\delta(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) k_i k_j + \left(\frac{H_1}{M_0}\right)^2}. \end{aligned} \right\} (8.2.4)$$

если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  перпендикулярно оси анизотропии.

Во всех случаях в антиферромагнетиках, в отличие от ферромагнетиков, имеется не одна, а две ветви спиновых волн, причем в области больших волновых векторов обе частоты спиновых волн пропорциональны волновому вектору.

## § 9. Электромагнитные волны в магнитоупорядоченных кристаллах

1. Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн. В предыдущих параграфах мы изучили спиновые волны, представляющие собой распространяющиеся магнитоэлектростатические колебания магнитных моментов в магнитоупорядоченных кристаллах. Но наряду с такими волнами в этих кристаллах могут распространяться также и собственно электромагнитные волны. Для исследования этих волн недостаточно пользоваться уравнениями магнитоэлектростатики, а необходимо исходить из полной системы уравнений Максвелла и учитывать при этом закон движения магнитных моментов. Этот учет приводит, как мы видели, к соотношению

$$m(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega), \quad (9.1.1)$$

где  $m(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega)$  — амплитуды переменных составляющих плотности магнитного момента и магнитного поля и  $\hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$  — тензор высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетика или антиферромагнетика.

Уравнения Максвелла для плоских волн с учетом связи (9.1.1) имеют вид

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{e}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{b}, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{h}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{d}, \quad (9.1.2)$$

где  $\mathbf{b} = \hat{\mu} \mathbf{h}$  и  $\mathbf{d} = \hat{\epsilon} \mathbf{e}$  — амплитуды переменных составляющих магнитной и электромагнитной индукции,  $\hat{\mu}(\mathbf{k}, \omega) = 1 + 4\pi \hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$  — тензор магнитной проницаемости и  $\hat{\epsilon}$  — тензор диэлектрических постоянных. В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать случай, когда  $\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$  и считать  $\epsilon$  не зависящим от  $\mathbf{k}$  и  $\omega$ .

Приравняв нулю детерминант системы (9.1.2), получим дисперсионное уравнение, связывающее частоты и волновые векторы электромагнитных волн в магнитоупорядоченных кристаллах [4]:

$$D(\mathbf{k}, \omega) = A(\mathbf{k}, \omega) n^4 + B(\mathbf{k}, \omega) n^2 + C(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (9.1.3)$$

где  $n = \frac{ck}{\omega \sqrt{\epsilon}}$  — показатель преломления,

$$A(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi}{k^2} k_i k_j \chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$B(\mathbf{k}, \omega) = \left( \frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) \Delta_{ij}(\mathbf{k}, \omega), \quad (9.1.4)$$

$$C(\mathbf{k}, \omega) = \det \mu_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$$

и  $\Delta_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  — миноры определителя  $\det \mu_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ .

Это дисперсионное уравнение определяет при заданном волновом векторе  $\mathbf{k}$ , вообще говоря, не одну, а несколько частот. Для ферромагнетика таких частот три, а для антиферромагнетика — четыре. Различные частоты, соответствующие одному и тому же  $\mathbf{k}$ , определяют различные ветви колебаний.

Хотя решить дисперсионное уравнение в общем виде нельзя, но тем не менее исследовать характер различных ветвей колебаний можно. С этой целью следует прежде всего выделить те участки ветвей колебаний, которые соответствуют спиновым волнам и собственно электромагнитным волнам.

Спиновые волны характеризуются, вообще говоря, малой фазовой скоростью (по сравнению со скоростью света в вакууме  $c$ ), фазовая же скорость собственно электромагнитных волн порядка  $c$ . Поэтому для спиновых волн показатель преломления значительно больше единицы,  $n \gg 1$ , и дисперсионное уравнение для них должно получаться из общего дисперсионного уравнения (9.1.3), если сделать в нем предельный переход  $n \rightarrow \infty$  (формально это означает, что мы полагаем  $c = \infty$ , что в свою очередь соответствует магнитостатическому приближению, в котором мы исследуем спиновые волны).

И действительно, разделив (9.1.3) на  $n^4$  и устремив затем  $n$  к бесконечности, мы получим уравнение

$$A(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (9.1.5)$$

которое совпадает с дисперсионным уравнением

$$1 + \frac{4\pi}{k^2} k_i k_j \chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = 0$$

для спиновых волн.

Замечая, что частота спиновых волн  $\omega_s(\mathbf{k})$  порядка  $gM_0$ , можно сказать, что спиновым волнам соответствуют значения

волнового вектора  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющие неравенству

$$k \gg \frac{gM_0}{c}$$

или

$$\lambda \ll \frac{c}{gM_0}$$

( $\lambda$  — длина волны).

Кроме спиновой волны при  $k \gg \frac{gM_0}{c}$  существуют также две собственно электромагнитные волны, характеризующиеся законом дисперсии:

$$\omega = \frac{ck}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Наша задача заключается теперь в том, чтобы выяснить, как ведут себя ветви электромагнитных колебаний при  $k \leq \frac{gM_0}{c}$ .

Так как  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \gg \frac{gM_0}{c}$ , то в этой области волновых векторов  $\alpha k^2 \ll 1$ , и, следовательно, несущественна пространственная дисперсия тензора высокочастотной магнитной восприимчивости. Это значит, что коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в дисперсионном уравнении (9.1.3) при  $k \ll \frac{gM_0}{c}$  будут зависеть только от частоты и направления волнового вектора, но не от его величины.

В этих условиях дисперсионное уравнение удобно рассматривать как уравнение относительно  $n$  или, что то же самое, относительно модуля волнового вектора  $k$  при заданных частоте и направлении распространения. Решение этого уравнения имеет вид

$$n_{1,2}^2 = \left( \frac{ck_{1,2}}{\omega \sqrt{\epsilon}} \right)^2 = \frac{-B(\mathbf{x}, \omega) \pm \sqrt{B^2(\mathbf{x}, \omega) - 4A(\mathbf{x}, \omega)C(\mathbf{x}, \omega)}}{2A(\mathbf{x}, \omega)}, \quad (9.1.6)$$

где  $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ .

Вещественным показателям преломления  $n_i$  соответствуют волны, распространяющиеся с фазовой скоростью:

$$v_i(\mathbf{x}, \omega) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon} n_i(\mathbf{x}, \omega)}.$$

Эта скорость является функцией  $\omega$  и  $\mathbf{x}$ .

**2. Взаимодействие между собственно электромагнитными и спиновыми волнами.** Дальнейшее исследование ветвей электромагнитных колебаний в области  $k \leq \frac{gM_0}{c}$  требует детального знания тензора высокочастотной магнитной восприимчивости. Мы ограничимся здесь рассмотрением одноосного ферромагнетика, причем будем предполагать, что стороннее магнитное поле направлено вдоль оси анизотропии. Тензор  $\hat{\mu}(k, \omega)$  в этом случае имеет вид

$$\hat{\mu}(k, \omega) = \begin{pmatrix} \mu & i\mu' & 0 \\ -i\mu' & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.2.1)$$

где

$$\mu(\omega) = 1 + \frac{4\pi g M_0 \Omega_0}{\Omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu'(\omega) = \frac{4\pi g M_0 \omega}{\Omega_0^2 - \omega^2},$$

$$\Omega_0 = g M_0 \left( \beta + \frac{H_0^{(l)}}{M_0} \right)$$

и ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии (так как нас интересует область, в которой несущественна пространственная дисперсия тензора  $\hat{\mu}$ , то мы пренебрегли в выражении для  $\Omega$  членом  $\alpha k^2$ ).

Вводя в рассмотрение орты

$$j_1 = \frac{n \times k}{|n \times k|}, \quad j_2 = \frac{k \times (n \times k)}{|k \times (n \times k)|}, \quad j_3 = \frac{k}{k},$$

где  $n$  — единичный вектор вдоль оси анизотропии, представим векторы  $b, h, e$  в виде

$$b = b_1 j_1 + b_2 j_2,$$

$$h = h_1 j_1 + h_2 j_2 + h_3 j_3,$$

$$e = e_1 j_1 + e_2 j_2.$$

Исключая из уравнений (9.1.2) вектор  $e$ , получим

$$k(k \times h) - k^2 h = -\frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} b,$$

откуда

$$b_1 = n^2 h_1, \quad b_2 = n^2 h_2. \quad (9.2.2)$$

Так как  $\mathbf{b} = \hat{\mu}\mathbf{h}$ , то

$$\left\{ n^2 - \frac{\mu \cos^2 \vartheta_k + (\mu^2 - \mu'^2) \sin^2 \vartheta_k}{\mu \sin^2 \vartheta_k + \cos^2 \vartheta_k} \right\} b_1 - i \frac{\mu' \cos \vartheta_k}{\mu \sin^2 \vartheta_k + \cos^2 \vartheta_k} b_2 = 0,$$

$$i \frac{\mu' \cos \vartheta_k}{\mu \sin^2 \vartheta_k + \cos^2 \vartheta_k} b_1 + \left\{ n^2 - \frac{\mu}{\mu \sin^2 \vartheta_k + \cos^2 \vartheta_k} \right\} b_2 = 0, \quad (9.2.3)$$

где  $\vartheta_k$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью анизотропии. Исключение из этих уравнений амплитуд  $b_1$  и  $b_2$  приводит к следующим значениям показателя преломления [18, 19]:

$$n_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\mu \sin^2 \vartheta_k + \cos^2 \vartheta_k)^{-1} \left\{ \mu (1 + \cos^2 \vartheta_k) + \right.$$

$$\left. + (\mu^2 - \mu'^2) \sin^2 \vartheta_k \pm \sqrt{(\mu^2 - \mu'^2 - \mu)^2 \sin^4 \vartheta_k + 4\mu'^2 \cos^2 \vartheta_k} \right\} \quad (9.2.4)$$

(эти формулы являются частным случаем общих формул (9.1.6) для одноосного кристалла).

Значения величин  $b_1$  и  $b_2$  для волны с показателем преломления  $n_j$  связаны между собой соотношением

$$\frac{b_1^{(j)}}{b_2^{(j)}} = i\rho_j,$$

где

$$\rho_j = \frac{n_j^2 \cos^2 \vartheta_k - \mu (1 - n_j^2 \sin^2 \vartheta_k)}{\mu' \cos \vartheta_k}. \quad (9.2.5)$$

Заметим, что

$$\rho_1 \rho_2 = -1$$

и, следовательно,

$$\frac{b_1^{(1)}}{b_2^{(1)}} = -\frac{b_2^{(2)}}{b_1^{(2)}} = i\rho_1. \quad (9.2.6)$$

Учитывая вещественность  $\rho_j$ , отсюда легко заключить, что рассматриваемые волны являются эллиптически поляризованными, причем главные оси эллипсов поляризации направлены по ортам  $\mathbf{j}_1$  и  $\mathbf{j}_2$ . Эллипсы поляризации обеих волн имеют одинаковое отношение осей, но повернуты друг относительно друга на  $90^\circ$ ; направление вращения в них противоположно.

Из формул (9.2.2) следует:

$$\frac{h_1^{(j)}}{h_2^{(j)}} = i\rho_j, \quad \frac{h_3^{(j)}}{h_2^{(j)}} = \frac{\mu' \sin \vartheta_k + (\mu - 1) \sin \vartheta_k \cos \vartheta_k}{\mu \sin^2 \vartheta_k + \cos^2 \vartheta_k}$$

(индекс  $j$  служит здесь, как и ранее, для обозначения волны с показателем преломления  $n_j$ ).

Обратимся теперь к формулам (9.2.4) для показателей преломления и выясним, при каких значениях  $\omega$  волновой вектор обращается в нуль. Так как при  $\omega \rightarrow 0$  правые части (9.2.4) имеют конечные пределы, равные  $\mu(0)$  и  $\frac{\mu(0)}{\cos^2 \vartheta_k + \mu(0) \sin^2 \vartheta_k}$ , то  $k$  обращается в нуль вместе с  $\omega$ , причем в области  $\omega \ll gM_0$

$$k_1 = \omega \frac{\sqrt{\epsilon \mu(0)}}{c},$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon \mu(0)}}{\sqrt{\cos^2 \vartheta_k + \mu(0) \sin^2 \vartheta_k}}. \quad (9.2.7)$$

Кроме того, волновой вектор обращается в нуль при некотором значении  $\omega$  порядка  $gM_0$ , а именно при

$$\omega = \omega_0 = g(H_0^{(i)} + 4\pi M_0 + \beta M_0). \quad (9.2.8)$$

Полученные результаты позволяют схематически изобразить ход ветвей электромагнитных колебаний в одноосном ферромагнетике, что сделано на рис. 2.

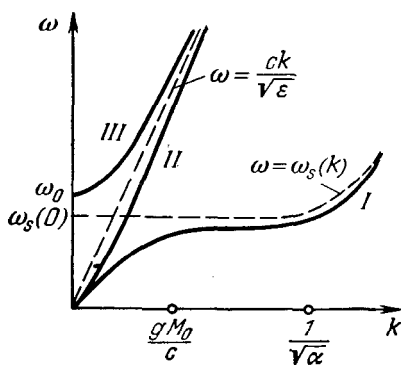


Рис. 2.

На этом рисунке спиновым волнам соответствует пунктирная кривая  $\omega = \omega_s(k)$ , а собственно электромагнитным волнам — пунктирная прямая  $\omega = \frac{ck}{V\epsilon}$ . Эта кривая асимптотически совпадает с частью ветви I при  $k \gg \frac{gM_0}{c}$ , а прямая является общей асимптотой ветвей II и III (так же при  $k \gg \frac{gM_0}{c}$ ). Легко показать, что расхождение этих ветвей относительно прямой  $\omega = \frac{ck}{V\epsilon}$  определяется при  $k \gg \frac{gM_0}{c}$

формулой

$$\omega_{II, III} = \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon}} \left( 1 \pm \frac{2\pi g M_0}{ck} \sqrt{\varepsilon} \cos \vartheta_k \right). \quad (9.2.9)$$

Остановимся еще на свойствах поляризации рассматриваемых ветвей электромагнитных колебаний. Легко убедиться, что вектор индукции  $b$  при  $k \rightarrow 0$  направлен вдоль вектора  $j_1$  для колебаний ветви I и вдоль вектора  $j_2$  для колебаний ветви II; ветвь III характеризуется при  $k \rightarrow 0$  эллиптической поляризацией, причем для нее

$$\frac{b_1^{III}}{b_2^{III}} = \frac{i}{\cos \vartheta_k}.$$

В области больших  $k$  ( $k \gg \frac{g M_0}{c}$ ) ветви II и III имеют круговую поляризацию.

В области больших  $k$  у ветвей II и III магнитное поле является поперечным, а у ветви I — продольным, в области же малых  $k$  для них характерно наличие как поперечных, так и продольных составляющих магнитного поля, причем обе эти составляющие имеют одинаковый порядок величины \*).

**3. Вращение плоскости поляризации в одноосных ферромагнетиках.** Так как в ферромагнетиках заданному значению частоты соответствуют, вообще говоря, два значения волнового вектора, то в них возможен эффект вращения плоскости поляризации (эффект Фарадея).

Пусть, например, линейно поляризованная волна падает нормально на ферромагнетик, ось анизотропии которого совпадает с направлением нормали. Тогда компоненты магнитного поля в ферромагнетике могут быть записаны в виде

$$h_1 = \frac{1}{2} A (e^{ik_1 z} + e^{ik_2 z}) e^{-i\omega t},$$

$$h_2 = \frac{1}{2} A (e^{ik_1 z} - e^{ik_2 z}) e^{-i\omega t},$$

где  $A$  — амплитуда падающей волны и  $k_{1,2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\mu \pm \mu'}$  (направление поляризации падающей волны совпадает с осью  $x$ ;  $z=0$  соответствует границе слоя). Вводя обозначения

\*) Взаимодействие спиновых и электромагнитных волн в антиферромагнетиках исследовано в [20], а в металлах — в [21].



$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ ,  $\kappa = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$ , перепишем эти выражения в виде

$$\begin{aligned}h_1 &= A \cos \kappa z \cdot e^{i(kz - \omega t)}, \\h_2 &= A \sin \kappa z e^{i(kz - \omega t)}.\end{aligned}$$

При выходе из слоя ферромагнетика отношение величин  $h_1$  и  $h_2$  будет равно

$$\frac{h_2}{h_1} = \operatorname{tg} \kappa l, \quad (9.3.1)$$

где  $l$  — толщина слоя. Мы видим, что плоскость поляризации при прохождении слоя ферромагнетика поворачивается, причем угол поворота  $\varphi$  пропорционален толщине слоя:

$$\varphi = \kappa l = \frac{\omega l}{2c} \sqrt{\varepsilon} \left( \sqrt{\mu(\omega) + \mu'(\omega)} - \sqrt{\mu(\omega) - \mu'(\omega)} \right). \quad (9.3.2)$$

## ГЛАВА III

### ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ФЕРРОМАГНЕТИКОВ И АНТИФЕРРОМАГНЕТИКОВ

#### § 10. Однородный ферромагнитный и антиферромагнитный резонансы

1. Уравнение для определения частот однородного резонанса. В предыдущих параграфах при нахождении спектра спиновых волн мы не учитывали размеров тела, иными словами, мы считали, что длина спиновой волны значительно меньше размеров тела. Перейдем теперь к исследованию спиновых волн в ограниченных образцах ферромагнетиков и антиферромагнетиков, когда размеры образцов сравнимы с длинами спиновых волн.

Рассмотрим сначала однородные колебания плотности магнитного момента. Чтобы возбудить такие колебания, нужно придать образцу эллипсоидальную форму и поместить его в стороннее переменное магнитное поле, длина волны которого  $\lambda$  велика по сравнению с размерами образца  $L$ :

$$\lambda \gg L.$$

В этом случае можно считать стороннее магнитное поле однородным, а так как образец имеет форму эллипсоида, то магнитное поле внутри образца также будет однородным. Переменные составляющие этих полей  $h^{(e)}$  и  $h^{(i)}$  связаны между собой соотношением

$$h^{(i)} + 4\pi\hat{N}m = h^{(e)}, \quad (10.1.1)$$

где  $m$  — переменная составляющая магнитного момента, зависящая только от времени, и  $\hat{N}$  — тензор размагничивающих коэффициентов.

Если магнитное поле  $\mathbf{h}^{(i)}$  изменяется по закону  $\mathbf{h}^{(i)} \sim e^{-i\omega t}$ , то

$$\mathbf{m} = \widehat{\chi}(\omega) \mathbf{h}^{(i)}, \quad (10.1.2)$$

где  $\widehat{\chi}(\omega)$  — тензор высокочастотной магнитной восприимчивости тела, соответствующий однородным колебаниям магнитного момента (компоненты этого тензора могут быть получены из общих формул для компонент тензора высокочастотной магнитной восприимчивости  $\widehat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$ , если положить в них  $k = 0$ ). Подстановка (10.1.2) в (10.1.1) дает

$$(1 + 4\pi\widehat{N}\widehat{\chi}(\omega)) \mathbf{h}^{(i)} = \mathbf{h}^{(e)},$$

откуда

$$\mathbf{h}^{(i)} = (1 + 4\pi\widehat{N}\widehat{\chi}(\omega))^{-1} \mathbf{h}^{(e)},$$

или

$$h_l^{(i)} = \frac{\Delta_{ll'}(\omega)}{\Delta(\omega)} h_{l'}^{(e)},$$

где  $\Delta(\omega) = \det(1 + 4\pi\widehat{N}\widehat{\chi}(\omega))$  и  $\Delta_{ll'}(\omega)$  — миноры детерминанта  $\Delta(\omega)$ .

Если бы диссипативные процессы в спиновой системе отсутствовали, то нули  $\omega_j^{(r)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) детерминанта  $\Delta(\omega)$  были бы вещественными; поэтому в этом случае при изменении частоты  $\omega$  источника поля и приближении  $\omega$  к одному из значений  $\omega_j^{(r)}$  поле внутри образца неограниченно бы возрастало (при неизменной амплитуде переменного стороннего поля  $\mathbf{h}^{(e)}$ ). Это значит, что внутри образца, в отсутствие внешних источников, могли бы существовать переменные магнитные поля конечной амплитуды с частотами  $\omega_j^{(r)}$ . Таким образом, величины  $\omega_j^{(r)}$  представляют собой собственные частоты однородных магнитных колебаний рассматриваемого нами эллипсоидального образца ферромагнетика или антиферромагнетика. Они носят название частот однородного резонанса — ферромагнитного или антиферромагнитного, в зависимости от вещества эллипсоида.

Итак, мы видим, что частоты однородного резонанса являются корнями уравнения

$$\det(1 + 4\pi\widehat{N}\widehat{\chi}(\omega)) = 0, \quad (10.1.3)$$

где под  $\widehat{\chi}(\omega)$  следует понимать тензор высокочастотной магнитной восприимчивости  $\widehat{\chi}(0, \omega)$ , вычисленный, в предположении об отсутствии диссипации в спиновой системе.

**2. Однородный ферромагнитный резонанс.** Перейдем к определению частот однородного резонанса\*) в различных случаях. Начнем с рассмотрения одноосного ферромагнетика, ось легкого намагничивания которого и постоянное стороннее магнитное поле  $H_0^{(e)}$  направлены вдоль одной из главных осей эллипсоида, например оси  $z$ . Тензор  $\hat{\chi}(\omega)$  в этом случае, согласно (6.3.3), имеет вид

$$\hat{\chi}(\omega) = \begin{pmatrix} \chi_{xx}(\omega) & \chi_{xy}(\omega) & 0 \\ \chi_{yx}(\omega) & \chi_{yy}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.2.1)$$

где

$$\chi_{xx}(\omega) = \chi_{yy}(\omega) = \frac{gM_0\Omega_0 - i\omega\gamma}{\Omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\Omega_0 \frac{\gamma}{gM_0}},$$

$$\chi_{xy}(\omega) = -\chi_{yx}(\omega) = \frac{i\omega gM_0}{\Omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\Omega_0 \frac{\gamma}{gM_0}}$$

и

$$\Omega_0 = gM_0 \left( \beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} - 4\pi N_3 \right), \quad \gamma = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$$

(мы пренебрегли здесь величиной  $\chi_{zz}$ , так как  $\chi_{zz}^{(0)} \ll 1$ ).

Если оси  $x$  и  $y$  направлены вдоль двух других главных осей эллипсоида, то тензор размагничивающих коэффициентов  $\hat{N}$  будет иметь вид

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & (1 + 4\pi\hat{N}\hat{\chi}(\omega))^{-1} = \\ & = \frac{1}{\Delta(\omega)} \begin{pmatrix} 1 + 4\pi N_2 \chi_{xx}(\omega), & -4\pi N_1 \chi_{xy}(\omega), & 0 \\ 4\pi N_2 \chi_{xy}(\omega), & 1 + 4\pi N_1 \chi_{xx}(\omega), & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(\omega) \end{pmatrix}, \quad (10.2.2) \end{aligned}$$

\*) Однородный ферромагнитный резонанс был открыт Гриффитсом [2], а теория этого резонанса дана Киттелем [1].

где

$$(\Delta\omega) = \det(1 + 4\pi\hat{N}\hat{\chi}(\omega)) = \frac{\omega_1\omega_2 - \omega^2 - i\omega(\omega_1 + \omega_2) \frac{\gamma}{gM_0}}{\Omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\Omega_0 \frac{\gamma}{gM_0}},$$

$$\omega_1 = \Omega_0 + 4\pi N_1 g M_0, \quad \omega_2 = \Omega_0 + 4\pi N_2 g M_0.$$

Мы видим, что в одноосном ферромагнетике с магнитной анизотропией «легкая ось» имеется одна частота однородного резонанса, равная [1]

$$\begin{aligned} \omega^{(r)} &= \sqrt{\omega_1\omega_2} = \\ &= gM_0 \sqrt{\left(\beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} + 4\pi(N_1 - N_3)\right) \left(\beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} + 4\pi(N_2 - N_3)\right)}. \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

Эта частота зависит от формы образца и величины стороннего поля  $H_0^{(e)}$ , возрастая с увеличением последнего.

Приведем значения резонансной частоты для образцов различной формы.

Если образец имеет форму шара, то  $N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$  и

$$\omega^{(r)} = gM_0 \left( \beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} \right). \quad (10.2.4)$$

Если образец имеет форму цилиндра, ось которого совпадает с осью легкого намагничивания, то  $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}$ ,  $N_3 = 0$  и

$$\omega^{(r)} = gM_0 \left( \beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} + 2\pi \right). \quad (10.2.5)$$

Если образец имеет форму цилиндра, ось которого перпендикулярна оси легкого намагничивания, то  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = N_3 = \frac{1}{2}$  и

$$\omega^{(r)} = gM_0 \sqrt{\left(\beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0}\right) \left(\beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} - 2\pi\right)} \quad (10.2.6)$$

(цилиндр будет однородно намагничен в направлении, перпендикулярном его оси, если имеет место неравенство  $H_0^{(e)} + \beta M_0 - 2\pi M_0 > 0$ ).

Если образец имеет форму пластинки, поверхность которой параллельна оси легкого намагничивания, то  $N_1 = N_3 = 0$ ,  $N_2 = 1$  (ось  $y$  направлена в глубину пластинки) и [1, 2]

$$\omega^{(r)} = g M_0 \sqrt{\left(\beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0}\right) \left(\beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} + 4\pi\right)} \quad (10.2.7)$$

Наконец, для пластинки, ось легкого намагничивания которой перпендикулярна поверхности пластинки,  $N_1 = N_2 = 0$ ,  $N_3 = 1$  и

$$\omega^{(r)} = g M_0 \left(\beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} - 4\pi\right) \quad (10.2.8)$$

(в этом случае пластинка однородно намагничивается, если  $H_0^{(e)} + \beta M_0 - 4\pi M_0 > 0$ ).

Формула (10.2.3) определяет частоту однородного ферромагнитного резонанса в том случае, когда стороннее магнитное поле направлено вдоль оси легкого намагничивания.

Если стороннее магнитное поле направлено перпендикулярно оси легкого намагничивания и образец имеет форму шара, то его резонансная частота определяется формулами [3, 4]

$$\omega^{(r)} = \begin{cases} g M_0 \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{H_0^{(e)}}{M_0}\right)^2}, & H_0^{(e)} < \beta M_0, \\ g M_0 \sqrt{\frac{H_0^{(e)}}{M_0} \left(\frac{H_0^{(e)}}{M_0} - \beta\right)}, & H_0^{(e)} > \beta M_0. \end{cases} \quad (10.2.9)$$

Эта резонансная частота сначала убывает с ростом  $H_0^{(e)}$ , обращается в нуль при  $H_0^{(e)} = \beta M_0$ , а затем возрастает с ростом  $H_0^{(e)}$ . Поэтому при фиксированной частоте стороннего переменного магнитного поля и изменении величины поля  $H_0^{(e)}$  ферромагнитный резонанс наступает дважды: один раз в слабом и второй раз в сильном стороннем магнитном поле.

Мы рассмотрели одноосные ферромагнетики с магнитной анизотропией типа «легкая ось» ( $\beta > 0$ ). Рассмотрим теперь одноосные ферромагнетики с магнитной анизотропией типа «легкая плоскость» ( $\beta < 0$ ).

Тензор высокочастотной магнитной восприимчивости таких ферромагнетиков определяется формулами (6.1.2), (6.1.4). Полагая в них  $k \approx 0$  и используя общее уравнение (10.1.3), найдем резонансную частоту ферромагнетика с магнитной

анизотропией типа «легкая плоскость»:

$$\begin{aligned} \omega^{(r)} = \\ = g M_0 \sqrt{\left( |\beta| + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} + 4\pi(N_1 - N_3) \left( \frac{H_0^{(e)}}{M_0} + 4\pi(N_2 - N_3) \right) \right)} \end{aligned} \quad (10.2.10)$$

(мы, как и ранее, предполагаем, что стороннее магнитное поле  $H_0^{(e)}$  и магнитный момент направлены вдоль оси  $z$ ).

**3. Однородный антиферромагнитный резонанс.** Перейдем теперь к рассмотрению собственных однородных колебаний магнитных моментов в ограниченных образцах антиферромагнетиков, предполагая по-прежнему, что они имеют эллипсоидальную форму.

В § 8 мы видели, что компоненты тензора высокочастотной магнитной восприимчивости антиферромагнетика пропорциональны малому параметру  $\chi_0$ . Поэтому с точностью до членов порядка  $\chi_0 g M_0$  корни уравнения (10.1.3) для определения частот однородного резонанса в случае антиферромагнетика совпадают с полюсами тензора  $\hat{\chi}(\omega)$ . С другой стороны, частоты спиновых волн, как мы видели, являются в этом же приближении полюсами тензора  $\hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$ . Таким образом, частоты однородного антиферромагнитного резонанса равны частотам спиновых волн при  $\mathbf{k} = 0$ . Эти частоты практически не зависят от формы образца антиферромагнетика, в отличие от частот ферромагнитного резонанса, которые существенно зависят от формы образца.

В случае антиферромагнетиков с магнитной анизотропией типа «легкая ось» частоты однородного антиферромагнитного резонанса определяются формулами [5]

$$\omega_1^{(r)} = g(H_1 + H_0^{(e)}), \quad \omega_2^{(r)} = g(H_1 - H_0^{(e)}), \quad (10.3.1)$$

если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  параллельно оси анизотропии и  $H_0^{(e)} < H_1$ , и формулами

$$\omega_1^{(r)} = g \sqrt{H_1^2 + (H_0^{(e)})^2}, \quad \omega_2^{(r)} = g H_1, \quad (10.3.2)$$

если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  перпендикулярно оси анизотропии.

Заметим, что экспериментальное изучение антиферромагнитного резонанса позволяет определить энергетическую щель в спектре спиновых волн, т. е. величину  $H_1 = M_0 \sqrt{2\delta(\beta - \beta')}$ .

В случае антиферромагнетиков с магнитной анизотропией типа «легкая плоскость» частоты однородного антиферромагнитного резонанса определяются формулами

$$\omega_1^{(r)} = g \sqrt{H_1^2 + (H_0^{(e)})^2}, \quad \omega_2^{(r)} = 0, \quad (10.3.3)$$

если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  параллельно оси анизотропии, и формулами [6, 7]

$$\omega_1^{(r)} = gH_0^{(e)}, \quad \omega_2^{(r)} = gH_1, \quad (10.3.4)$$

если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  перпендикулярно оси анизотропии.

**4. Поглощение энергии вблизи резонанса.** В предыдущих разделах мы не учитывали диссипативных процессов в спиновой системе и пришли поэтому к выводу о существовании незатухающих собственных колебаний.

Рассмотрим теперь роль диссипативных процессов. Эти процессы вызывают, во-первых, затухание собственных колебаний и, во-вторых, если образец находится в переменном стороннем поле  $h^{(e)}$ , приводят к поглощению энергии этого поля веществом образца.

Затухание собственных колебаний частоты  $\omega_j^{(r)}$  характеризуется декрементом затухания  $\gamma_j^{(r)}$ , определяющим изменение со временем амплитуды собственных колебаний  $A_j$ ,

$$A_j(t) = A_j(0)e^{-\gamma_j^{(r)}t}.$$

Чтобы найти декременты затухания  $\gamma_j^{(r)}$ , нужно решить уравнение

$$\Delta(\omega) = \det(1 + 4\pi\hat{N}\hat{\chi}(\omega)) = 0,$$

в котором компоненты тензора  $\hat{\chi}(\omega)$  определены с учетом диссипативных процессов в спиновой системе. Корни этого уравнения будут комплексными, причем их вещественные части будут определять частоты, а мнимые части — декременты затухания собственных колебаний.

Перейдем к определению энергии, которую поглощает образец, находящийся в стороннем переменном поле:

$$h^{(e)}(t) = \frac{1}{2} (\hat{h}_0 e^{-i\omega t} + \hat{h}_0^* e^{i\omega t}).$$

Мы будем предполагать, что период этого поля значительно больше времени установления локального равновесия



в веществе образца. В этом случае уравнения (5.2.1), (5.2.4), выведенные для постоянного поля, будут справедливы и для переменного поля. Поэтому  $\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\mathbf{h}^{(e)}} = 0$  и, следовательно, производная от энергии образца по времени будет равна

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{h}^{(e)}} \frac{\partial \mathbf{h}^{(e)}}{\partial t} = -VM \frac{\partial \mathbf{h}^{(e)}}{\partial t},$$

где  $V$  — объем образца (мы учли однородность поля  $\mathbf{h}^{(e)}$ ).

Усредняя это выражение по времени, найдем среднюю энергию, поглощаемую ферромагнетиком или антиферромагнетиком в единицу времени:

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial t}} = -V \overline{\mathbf{m}} \frac{\partial \mathbf{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad (10.4.1)$$

где  $\mathbf{m}$  — переменная составляющая магнитного момента и черта сверху означает усреднение по времени. Вспоминая, что

$$\mathbf{m}(\omega) = \hat{\chi}(\omega) (1 + 4\pi \hat{N} \hat{\chi}(\omega))^{-1} \mathbf{h}^{(e)}(\omega),$$

и используя соотношение

$$\chi_{ij}(-\omega) = \chi_{ij}^*(\omega),$$

представим  $\mathbf{m}(t)$  в виде

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2} \hat{\chi}'(\omega) \mathbf{h}_0 e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} \hat{\chi}'^*(\omega) \mathbf{h}_0^* e^{i\omega t}, \quad (10.4.2)$$

где

$$\hat{\chi}'(\omega) = \hat{\chi}(\omega) (1 + 4\pi \hat{N} \hat{\chi}(\omega))^{-1}.$$

Подставляя, наконец, это выражение в (10.4.1) и производя усреднение по времени, получим

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \overline{W}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{4} \mathbf{h}_0^* (\hat{\chi}'(\omega) - \hat{\chi}'^*(\omega)) \mathbf{h}_0. \quad (10.4.3)$$

Мы видим, что поглощение энергии образцом определяется антиэрмитовой частью тензора  $\hat{\chi}'(\omega)$ , который связывает переменную составляющую плотности магнитного момента со сторонним переменным магнитным полем.

Антиэрмитова часть тензора  $\hat{\chi}'(\omega)$  особенно велика в области резонансных частот. Например, в случае одноосного ферромагнетика с магнитной анизотропией типа «легкая ось»

и  $H_0^{(e)} \parallel n$  тензор  $\hat{\chi}'(\omega)$  имеет, согласно (10.2.2), (10.2.1), следующий вид:

$$\hat{\chi}'(\omega) = \frac{gM_0}{\omega_1\omega_2 - i\frac{\omega_1 + \omega_2}{gM_0\tau}\omega - \omega^2} \begin{pmatrix} \omega_2 - i\frac{\omega}{\tau} & i\omega & 0 \\ -i\omega & \omega_1 - i\frac{\omega}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.4.4)$$

и поэтому его антиэрмитова часть при  $\omega$ , близких к частоте однородного ферромагнитного резонанса, определяется формулой

$$\hat{\chi}'(\omega) - \hat{\chi}'^+(\omega) = \frac{2i\omega^{(r)} \frac{\omega_1 + \omega_2}{\tau}}{[(\omega^{(r)})^2 - \omega^2]^2 + \omega^{(r)2} \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{gM_0\tau}\right)^2} \begin{pmatrix} \omega_2 & i\omega^{(r)} & 0 \\ -i\omega^{(r)} & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.4.5)$$

## § 11. Неоднородный ферромагнитный резонанс

**1. Общие уравнения для определения частот неоднородного резонанса.** В предыдущем параграфе мы рассмотрели простейший вид собственных колебаний плотности магнитного момента в ферромагнитных и антиферромагнитных образцах — однородные колебания. Перейдем теперь к рассмотрению более сложных собственных колебаний плотности магнитного момента, при которых поле и намагничение зависят от координат, но колебания по-прежнему являются магнитостатическими [8, 9]. Для этого необходимо, чтобы фазовая скорость волн, соответствующих таким колебаниям, была значительно меньше скорости света  $c$ , т. е.

$$\lambda\omega \ll c,$$

где  $\lambda$  — длина волны и  $\omega$  — частота колебаний. Кроме того мы будем предполагать, что пространственная дисперсия магнитной восприимчивости незначительна. Это предположение справедливо, если длина волны колебаний  $\lambda$  удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{a} \ll \lambda,$$

где  $\alpha = a \sqrt{\frac{\theta_c}{2\mu_0 M_0}}$ . Итак, мы предполагаем, что длина волны колебаний лежит в интервале \*)

$$\sqrt{\alpha} \ll \lambda \ll \frac{c}{\omega}. \quad (11.1.1)$$

Для нахождения частот собственных колебаний воспользуемся уравнениями магнитостатики:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{h}^{(e)} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{h}^{(e)} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{h}^{(i)} &= 0, & \operatorname{div} (\mathbf{h}^{(i)} + 4\pi \mathbf{m}) &= 0 \end{aligned}$$

для переменных составляющих магнитного поля вне и внутри образца, которые мы считаем гармоническими функциями времени:

$$\mathbf{h}^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}^{(e)}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{h}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}^{(i)}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}.$$

Вводя потенциалы  $\varphi^{(i)}$  и  $\varphi^{(e)}$ , связанные с полями  $\mathbf{h}^{(i)}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{h}^{(e)}(\mathbf{r})$  соотношениями

$$\mathbf{h}^{(i)}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi^{(i)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{h}^{(e)}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi^{(e)}(\mathbf{r}), \quad (11.1.2)$$

перепишем уравнения магнитостатики в виде

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^{(e)} &= 0, \\ \Delta\varphi^{(i)} + 4\pi\chi_{ik} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x_i \partial x_k} &= 0. \end{aligned} \quad (11.1.3)$$

К этим уравнениям должны быть добавлены граничные условия: непрерывность на границе образца тангенциальных составляющих магнитного поля и нормальной составляющей магнитной индукции,

$$\mathbf{h}_\tau^{(i)} = \mathbf{h}_\tau^{(e)}, \quad h_\nu^{(i)} + 4\pi m_\nu = h_\nu^{(e)}$$

(индексы  $\tau$  и  $\nu$  служат для обозначений тангенциальных и нормальной составляющих векторов), а также условие на бесконечности, заключающееся в том, что при  $r \rightarrow \infty$  поле  $\mathbf{h}^{(e)}(\mathbf{r})$ , а следовательно, и  $\varphi^{(e)}$  должны обращаться в нуль,

$$\varphi_{r \rightarrow \infty}^{(e)} = 0. \quad (11.1.4)$$

---

\*) Считая  $\lambda \sim L$ , где  $L$  — размеры образца и  $\omega \approx 10^{11}$  —  $10^{11} \text{ сек}^{-1}$ , получим отсюда  $10^{-6} \text{ см} \ll L \ll 1 \text{ см}$ .

Используя (11.1.2), можно представить граничные условия в виде

$$\varphi^{(i)} = \varphi^{(e)}, \quad v_k \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_k} + 4\pi v_k \chi_{kj} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_j} = v_k \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x_k} \quad (11.1.5)$$

( $v_k$  — проекция единичного вектора вдоль нормали на ось  $k$ ).

Сформулированная таким образом граничная задача имеет нетривиальные решения не при произвольных, а только при вполне определенных значениях входящих в уравнение (11.1.3) и граничные условия (11.1.5) параметров  $\chi_{ij}$ . С другой стороны, величины  $\chi_{ij}$  являются определенными функциями частоты,  $\chi_{ij} = \chi_{ij}(\omega)$ . Поэтому, найдя значения параметров  $\chi_{ij}$  и зная вид этих функций, можно в принципе определить соответствующие значения частот, которые и представляют собой частоты собственных колебаний плотности магнитного момента в образце. Эти частоты обычно называют частотами неоднородного резонанса.

**2. Пластика.** Рассмотрим сначала колебания магнитного момента в бесконечной плоскопараллельной пластинке. Граничные условия (11.1.4) и (11.1.5) в этом случае принимают вид

$$\varphi^{(e)}|_{z=\pm L} = \varphi^{(i)}|_{z=\pm L} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial z} \right|_{z=\pm L} = \left( \mu_{zz} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial z} + \mu_{zy} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial y} + \mu_{zx} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x} \right) \Big|_{z=\pm L}, \quad (11.2.1)$$

$$\varphi^{(e)}|_{z=\pm\infty} = 0,$$

где  $\mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik}$  и  $2L$  — толщина пластинки (ось  $z$  перпендикулярна поверхности пластинки, оси  $x$  и  $y$  лежат в плоскости пластинки; плоскость  $z = 0$  проходит через середину пластинки).

Будем искать потенциалы  $\varphi^{(i)}$  и  $\varphi^{(e)}$  в виде

$$\varphi^{(i)} = e^{i(k_x x + k_y y)} (A e^{ik_z z} + B e^{-ik_z z}),$$

$$\varphi^{(e)} = e^{i(k_x x + k_y y)} \begin{cases} C e^{-fz}, & z > L, \\ D e^{fz}, & z < -L, \end{cases} \quad (11.2.2)$$

где  $A, B, C, D$  — некоторые константы.

Подставляя эти выражения в (11.1.3) и используя граничные условия (11.2.1), получим [10]

$$f = \sqrt{k_x^2 + k_y^2},$$

$$k^2 + 4\pi(\chi_{xx}k_x^2 + \chi_{yy}k_y^2 + \chi_{zz}k_z^2) = 0, \quad (11.2.3)$$

$$\operatorname{ctg} 2k_z L = \frac{(\mu_{zz}k_z)^2 - (\mu_{zx}k_x + \mu_{zy}k_y)^2 - k_x^2 - k_y^2}{2f\mu_{zz}k_z}.$$

Эти уравнения определяют частоты и волновые векторы собственных магнитостатических колебаний пластинки.

Рассмотрим подробнее ферромагнитную пластинку, предполагая, что ось анизотропии и стороннее магнитное поле  $H_0^{(e)}$  направлены перпендикулярно поверхности пластинки (вдоль оси  $z$ ). В этом случае тензор высокочастотной магнитной восприимчивости  $\hat{\chi}(\omega)$  определяется формулами (6.1.2), (6.1.3), подстановка которых в (11.2.3) дает

$$\omega^{(r)^2} = \Omega_0(\Omega_0 + 4\pi g M_0 \sin^2 \vartheta),$$

$$\operatorname{ctg} 2k_z L = \frac{1}{2} \left( \frac{k_z}{k_{\perp}} - \frac{k_{\perp}}{k_z} \right), \quad (11.2.4)$$

где  $\sin^2 \vartheta = \frac{k_{\perp}^2}{k^2}$ ,  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ ,  $k^2 = k_z^2 + k_{\perp}^2$ ,  $\Omega_0 = g M_0 \left( \frac{H_0^{(e)}}{M_0} + \beta - 4\pi \right)$ . Отсюда следует

$$k_{\perp} L = \begin{cases} k_z L \operatorname{tg} k_z L, & \pi n \leq |k_z L| \leq \pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \\ -k_z L \operatorname{ctg} k_z L, & \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \leq |k_z L| \leq \pi (n + 1), \end{cases}$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  и

$$\omega^{(r)} = \begin{cases} \sqrt{\Omega_0(\Omega_0 + 4\pi g M_0 \sin^2 k_z L)}, & \pi n \leq |k_z L| \leq \pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \\ \sqrt{\Omega_0(\Omega_0 + 4\pi g M_0 \cos^2 k_z L)}, & \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \leq |k_z L| \leq \pi (n + 1). \end{cases} \quad (11.2.5)$$

Мы видим, что возможные значения частот собственных колебаний ферромагнитной пластинки заключены в интервале

$$\Omega_0 \leq \omega^{(r)} \leq \sqrt{\Omega_0(\Omega_0 + 4\pi g M_0)}. \quad (11.2.6)$$

Заметим, что если  $k_z L \ll 1$ , то

$$k_{\perp} L \approx (k_z L)^2.$$

т. е. степень неоднородности поля вдоль пластинки меньше степени неоднородности поля вдоль нормали к пластинке. При  $k_z L \rightarrow 0$ , частота  $\omega^{(r)}$  совпадает с частотой ферромагнитного резонанса пластинки, определяемой формулой (10.2.8).

Если стороннее магнитное поле и ось легкого намагничивания лежат в плоскости пластинки, то можно показать, что собственные частоты колебаний определяются формулами

$$\omega^{(r)} = \sqrt{\Omega_0 (\Omega_0 + 4\pi g M_0 \sin^2 \vartheta)},$$

$$2k_z \operatorname{ctg} 2k_z L = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \left( k_z^2 - k_x^2 - k_y^2 - 4\pi \frac{g M_0}{\Omega_0} k^2 \frac{k_y^2}{k_x^2} \right),$$

где  $\sin^2 \vartheta = \frac{k_y^2 + k_z^2}{k^2}$ ,  $\Omega_0 = g M_0 \left( \frac{H_0^{(e)}}{M_0} + \beta \right)$  (ось  $x$  направлена вдоль оси анизотропии, а ось  $z$  — вдоль нормали к поверхности пластинки). Эти частоты заключены по-прежнему в интервале (11.2.6). При  $k_z \rightarrow 0$  частота  $\omega^{(r)}$  совпадает с частотой однородного ферромагнитного резонанса пластинки, определяемой формулой (10.2.7) (чтобы убедиться в этом, следует иметь в виду, что при  $k_z \rightarrow 0$  величины  $k_x, k_y \sim k_z^2$ ).

**3. Шар.** Найдем частоты собственных колебаний плотности магнитного момента в шаре [9]. Потенциалы магнитного поля  $\varphi^{(i)}(\mathbf{r})$  и  $\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$  внутри и вне шара удовлетворяют уравнениям (11.1.3)

$$\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} = 0, \quad (11.3.1)$$

$$\Delta \varphi^{(e)} = 0,$$

где ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии и  $\mu = 1 + 4\pi \chi_{xx}$  [ $\chi_{xx}$  определяется формулами (6.1.2), (6.1.3), в которых  $\Omega = g M_0 \left( \beta - \frac{4\pi}{3} + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} \right)$ ].

Потенциал  $\varphi^{(e)}$  магнитного поля вне шара можно взять в виде

$$\varphi^{(e)} = \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{lm}(\cos \theta) e^{-lm\varphi}, \quad (11.3.2)$$

где  $\varphi$  и  $\theta$  — азимутальный и полярный углы радиус-вектора  $\mathbf{r}$ ,  $n$  и  $m$  — целые числа и  $P_n^{lm}$  — присоединенные полиномы

Лежандра. Этот потенциал, как известно, является решением уравнения Лапласа и удовлетворяет условию на бесконечности (11.1.4).

Для нахождения потенциала  $\varphi^{(l)}$  внутри шара заметим, что функция

$$F(r) = e^{im\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} f(iz + \rho \cos \alpha) \cos m\alpha \, d\alpha,$$

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $f(z)$  — некоторая произвольная функция — удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому решение уравнения (11.3.1) для  $\varphi^{(l)}$  может быть представлено в виде

$$\varphi^{(l)}(r) = e^{im\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r [i\sqrt{\mu} \cos \theta + \sin \theta \cos \alpha]) \cos m\alpha \, d\alpha.$$

Подберем функцию  $f$  таким образом, чтобы на поверхности шара выполнялось условие

$$\varphi^{(l)}(r)|_{r=a} = \varphi^{(e)}(r)|_{r=a}$$

( $a$  — радиус шара), т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(a [i\sqrt{\mu} \cos \theta + \sin \theta \cos \alpha]) \cos m\alpha \, d\alpha = \frac{1}{a^{n+1}} P_n^{l,m}(\cos \theta) \quad (11.3.3)$$

(из равенства потенциалов  $\varphi^{(l)}(r)$  и  $\varphi^{(e)}(r)$  на поверхности шара следует непрерывность тангенциальных составляющих магнитного поля).

Легко видеть, что условие (11.3.3) будет выполняться, если в качестве  $f(z)$  выбрать функцию

$$f(z) = C_n^m P_n \left( \frac{z}{a\sqrt{1-\mu}} \right),$$

где  $C_n^m$  — некоторая постоянная, которую мы определим в дальнейшем. Действительно, используя теорему сложения для полиномов Лежандра

$$\begin{aligned} P_n(xx' + \sqrt{(1-x^2)(1-x'^2)} \cos \alpha) &= \\ &= \sum_{m=-n}^n (-1)^m \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n^{l,m}(x) P_n^{l,m}(x') \cos m\alpha, \end{aligned}$$

легко показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_n \left( \frac{i\sqrt{\mu} \cos \theta + \sin \theta \cos \alpha}{\sqrt{1-\mu^2}} \right) \cos m\alpha \, d\alpha = \\ = 2\pi (-1)^m \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n^{|m|}(\cos \theta) P_n^{|m|} \left( i\sqrt{\frac{\mu}{1-\mu}} \right).$$

Поэтому граничное условие (11.3.3) будет выполняться, если в качестве  $C_n^m$  выбрать

$$C_n^m = \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^m}{a^{n+1}} \cdot \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \cdot \frac{1}{P_n^{|m|} \left( i\sqrt{\frac{\mu}{1-\mu}} \right)}.$$

Таким образом, потенциал  $\varphi^{(l)}(\mathbf{r})$ , удовлетворяющий уравнению (11.3.1) и граничному условию (11.3.3), имеет вид

$$\varphi^{(l)}(\mathbf{r}) = C_n^m e^{im\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n \left( \frac{r}{a} \cdot \frac{i\sqrt{\mu} \cos \theta + \sin \theta \cos \alpha}{\sqrt{1-\mu^2}} \right) \cos m\alpha \, d\alpha. \quad (11.3.4)$$

Потенциал  $\varphi^{(l)}(\mathbf{r})$  должен удовлетворять еще второму граничному условию (11.1.5), означающему непрерывность нормальной составляющей магнитной индукции. В сферических координатах это условие имеет вид

$$\left\{ \mu \sin \theta \left( \frac{\partial \varphi^{(l)}}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial \varphi^{(l)}}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + \cos \theta \left( \frac{\partial \varphi^{(l)}}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial \varphi^{(l)}}{\partial \theta} \right) - \frac{i\mu'}{r} \frac{\partial \varphi^{(l)}}{\partial \varphi} \right\} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial r} \Big|_{r=a}.$$

Подставляя сюда вместо  $\varphi^{(l)}(\mathbf{r})$  и  $\varphi^{(e)}(\mathbf{r})$  выражения (11.3.4) и (11.3.2), получим

$$n+1 + m\mu'(\omega) + s \frac{d}{ds} \ln P_n^{|m|}(s) = 0, \quad (11.3.5)$$

где

$$s = i\sqrt{\frac{\mu(\omega)}{1-\mu(\omega)}}, \quad i\mu' \equiv \mu_{xy}.$$

Это условие может выполняться, очевидно, не при произвольных, а только при вполне определенных значениях  $\omega$ , которые и представляют собой частоты неоднородного ферромагнитного резонанса.



Таким образом, мы получили дисперсионное уравнение для определения частот собственных колебаний магнитного момента в ферромагнитном шаре. Корни этого уравнения, которые мы будем обозначать через  $\omega_{nmp}^{(r)}$ , зависят от целых чисел  $n$  и  $m$ , где  $m = -n, -n+1, \dots, n$ , и не зависят ни от каких непрерывных параметров ( $p$  обозначает номер решения). Иными словами, спектр колебаний ферромагнитного шара является дискретным.

Легко видеть, что магнитное поле внутри шара при  $n = 1$ ,  $m = \pm 1$  является однородным. В этом случае дисперсионное уравнение (11.3.5) имеет единственное решение

$$\omega_{1, \pm 1}^{(r)} = gM_0 \left( \beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} \right)$$

(мы учли, что в случае сферы  $\Omega_0 = gM_0 \left( \beta - \frac{4\pi}{3} + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} \right)$ ). Эта частота, как и следовало ожидать, совпадает с частотой однородного ферромагнитного резонанса шара, определяемой формулой (10.2.4).

При  $n = 2$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ) корни дисперсионного уравнения (11.3.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_{20}^{(r)} &= \sqrt{\Omega_0 \left( \Omega_0 + \frac{16\pi}{5} gM_0 \right)}, \\ \omega_{21}^{(r)} &= \Omega_0 + \frac{4\pi}{5} gM_0, \\ \omega_{22}^{(r)} &= \Omega_0 + \frac{8\pi}{5} gM_0. \end{aligned} \quad (11.3.6)$$

Можно показать, что при  $m = n, n-1$ , независимо от величины  $n$  имеется только один корень уравнения (11.3.5)

$$\omega_{nm}^{(r)} = \Omega_0 + \frac{m}{2n+1} 4\pi gM_0, \quad m = n, n-1.$$

Наконец, можно показать, что частоты собственных колебаний шара  $\omega_{nmp}^{(r)}$  удовлетворяют неравенству

$$|\omega_{nmp}^{(r)} - \Omega_0| \leq 2\pi gM_0. \quad (11.3.7)$$

**4. Эллипсоид вращения.** Уравнение (11.3.5) определяет частоты неоднородного ферромагнитного резонанса для шара. Если ферромагнетик имеет форму эллипсоида вращения, ось которого совпадает с осью легкого намагничивания, то, как

можно показать, частоты неоднородного ферромагнитного резонанса определяются из дисперсионного уравнения [9]

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \ln Q_n^m(\xi) - m\mu' \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \xi' \frac{\partial}{\partial \xi'} \ln P_n^{l,m}(\xi') = 0, \quad (11.4.1)$$

где

$$\xi^2 = \frac{b^2}{b^2 - a^2}, \quad \xi'^2 = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \mu}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \mu - 1},$$

$a$  и  $b$  — полуоси эллипсоида  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  ( $b < a$ ) и  $Q_n^m(z)$  — функции Лежандра второго рода.

Корни этого дисперсионного уравнения являются дискретными и зависят от целых чисел  $n$  и  $m$ . Частоты собственных колебаний эллипсоида, которые мы будем обозначать через  $\omega_{nmp}^{(r)}$  ( $p$  — служит для обозначения номера решения), так же как и частоты собственных колебаний шара, заключены в интервале (11.3.7).

При  $n = 1$ ,  $m = 1$  дисперсионное уравнение (11.4.1) имеет единственное решение

$$\omega_{11}^{(r)} = \Omega_0 + 4\pi g M_0 N_1,$$

где

$$N_1 = \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} Q_1^1(\xi)\right)^{-1}. \quad (11.4.2)$$

Эта величина, как можно показать, представляет собой разматничивающий фактор сплюснутого эллипсоида вращения.

Сравнивая формулы (11.4.2) и (10.2.3), мы видим, что корень  $\omega_{11}^{(r)}$  дисперсионного уравнения (11.4.1) является частотой однородного ферромагнитного резонанса эллипсоида вращения.

**5. Резонанс на стоячих спиновых волнах.** До сих пор при исследовании собственных колебаний плотности магнитного момента в ограниченных ферромагнетиках мы не учитывали пространственной дисперсии высокочастотной магнитной восприимчивости. Это законно, как следует из (11.1.1), для не слишком малых образцов. Однако условие (11.1.1) нарушается, если размеры образцов достаточно малы. В этом случае при исследовании собственных колебаний магнитного момента необходимо учитывать зависимость тензора

высокочастотной магнитной восприимчивости не только от частоты, но и от волнового вектора.

Рассмотрим в качестве примера тонкую ферромагнитную пластинку, причем для простоты будем считать, что ось легкого намагничивания и поле  $H_0^{(e)}$  направлены перпендикулярно поверхности пластинки и что в плоскости пластинки магнитное поле и магнитный момент однородны, т. е. все величины зависят только от координаты  $z$ , перпендикулярной плоскости пластинки [11].

Так как проекция переменной составляющей плотности магнитного момента на ось  $z$  равна нулю, то  $\operatorname{div} \mathbf{m} = 0$ , и поэтому переменное магнитное поле удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0, \quad (11.5.1)$$

справедливым как внутри, так и вне пластинки. Ясно, что эти уравнения, вместе с однородными граничными условиями  $\mathbf{h} = 0$  при  $z = \pm \infty$ , имеют только тривиальное решение  $\mathbf{h} = 0$ . Отсюда однако не следует, что  $\mathbf{m} = 0$ . Действительно, считая, что  $\mathbf{m}$  изменяется пропорционально  $e^{-i(\omega t - \mathbf{k}z)}$ , и учитывая соотношение  $\mathbf{m} = \hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{h}$ , мы получим следующее уравнение для определения  $\mathbf{m}$ :

$$\hat{\chi}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{m} = 0, \quad (11.5.2)$$

которое имеет нетривиальное решение, если

$$\det \hat{\chi}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = 0.$$

Вводя циркулярные компоненты магнитного момента  $m_{\pm} = m_x \pm im_y$  и используя выражения (6.1.2), (6.1.3) для  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ , можно переписать уравнения (11.5.2) в виде

$$\begin{aligned} (\omega - \Omega(\mathbf{k})) m_+ &= 0, \\ (\omega + \Omega(\mathbf{k})) m_- &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\Omega(\mathbf{k}) = g M_0 \left( \alpha k_z^2 + \beta - 4\pi + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} \right).$$

Мы видим, что частота собственных колебаний пластинки равна

$$\omega^{(r)} = \Omega(\mathbf{k}) \quad (11.5.3)$$

и что отлична от нуля только циркулярная компонента магнитного момента  $m_+$ .

Допустимые значения  $k_z$  могут быть определены из граничных условий. При этом, помимо обычных граничных условий для векторов  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}$ , которые автоматически выполняются, если  $\mathbf{h} = 0$  и  $m_z = 0$ , следует использовать еще граничные условия для магнитного момента, так как при наличии пространственной дисперсии уравнение движения магнитного момента содержит производные по координатам. Эти граничные условия, согласно (5.5.14), имеют вид

$$\left(d \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z} - \mathbf{m}\right)\Big|_{z=L} = 0, \quad \left(d \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z} + \mathbf{m}\right)\Big|_{z=-L} = 0, \quad (11.5.4)$$

где  $2L$  — толщина пластинки.

Полагая

$$m_+ = Ae^{-i(\omega t - k_z z)} + Be^{-i(\omega t + k_z z)} \quad (11.5.5)$$

и исключая произвольные постоянные  $A$ ,  $B$ , найдем, что допустимые значения  $k_z$  удовлетворяют одному из уравнений:

$$\begin{aligned} k_z L \operatorname{tg} k_z L &= -\frac{L}{d}, \\ k_z L \operatorname{tg} k_z L &= \frac{L}{d}. \end{aligned} \quad (11.5.6)$$

Первое из этих уравнений соответствует симметричным относительно замены  $z$  на  $-z$  решениям (11.5.5), а второе уравнение — антисимметричным решениям.

Если  $d \gg L$ , то возможные значения  $k_z$  равны

$$k_z = \begin{cases} \frac{\pi}{L} n & \text{для симметричного решения,} \\ \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) & \text{для антисимметричного решения,} \end{cases}$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (эти значения  $k_z$  являются следствием граничного условия  $\left.\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z}\right|_{z=\pm L} = 0$ ).

Если  $d \ll L$ , то возможные значения  $k_z$  равны

$$k_z = \begin{cases} \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) & \text{для симметричного решения,} \\ \frac{\pi}{L} n & \text{для антисимметричного решения} \end{cases}$$

(эти значения  $k_z$  вытекают из граничного условия  $\mathbf{m}|_{z=\pm L} = 0$ ).

Подставляя эти значения  $k_z$  в (11.5.3), найдем частоты собственных колебаний плотности магнитного момента в

пластинке с учетом пространственной дисперсии магнитной проницаемости. Как видно из полученных формул, интервал между соседними резонансными частотами равен  $gM_0\alpha\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ . Поэтому для наблюдения резонанса на этих частотах удобно пользоваться тонкими пленками. Измерение интервала между резонансными частотами позволяет экспериментально определить константу обменного взаимодействия  $\alpha$ . Данные экспериментов по определению обменных констант различных ферромагнетиков приведены в обзоре [12].

## § 12. Поверхностный импеданс ферромагнетиков

1. Дисперсионное уравнение для ферромагнитного металла. Результаты предыдущего параграфа относятся, строго говоря, к магнитоупорядоченным диэлектрикам, а не к металлам, так как мы нигде не учитывали проводимости вещества. Представляет поэтому интерес выяснить, как проявляется ферромагнитный резонанс в ферромагнитных металлах.

Как известно, электромагнитная волна затухает, распространяясь в металле. При этом, если длина свободного пробега электронов проводимости  $l$  достаточно мала, то глубина проникновения электромагнитного поля в металл равна по порядку величины

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \quad (12.1.1)$$

где  $\omega$  — частота поля,  $\sigma$  — проводимость. Эта формула определяет глубину проникновения в том случае, если выполняется условие  $l \ll \delta$ . Ясно, что если размеры образца  $L$  малы по сравнению с глубиной проникновения электромагнитного поля, то скин-эффект не будет проявляться, и формулами предыдущих параграфов можно пользоваться независимо от того, является ли ферромагнетик диэлектриком или металлом. Если же  $L \gg \delta$ , то проводимость будет оказывать существенное влияние на распределение поля в образце и результаты предыдущего параграфа будут неприменимы к металлам.

Мы перейдем теперь к исследованию этого влияния, предполагая, что

$$L \gg \delta.$$

В этом случае, очевидно, ни форма ни размеры тела несущественны, и мы приходим к задаче об отражении и преломле-

нии электромагнитной волны на границе ферромагнитного металла, заполняющего полупространство.

Пусть на ферромагнетик падает плоская монохроматическая волна  $e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})}$  с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_0$ . Электромагнитное поле в ферромагнетике будет иметь тогда вид суперпозиции ряда плоских монохроматических волн, с той же частотой  $\omega$ , что и у падающей волны, но с отличающимися от  $\mathbf{k}_0$  волновыми векторами  $\mathbf{k}$ . Для каждой такой волны электрическое и магнитное поля изменяются по закону  $e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})}$  и удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned}(\mathbf{k} \times \mathbf{e}) &= \frac{\omega}{c} \hat{\mu} \mathbf{h}, \\(\mathbf{k} \times \mathbf{h}) &= -\frac{4\pi i}{c} \hat{\sigma} \mathbf{e},\end{aligned}\tag{12.1.2}$$

где  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\sigma}$  — тензоры магнитной проницаемости и проводимости ферромагнетика, зависящие, вообще говоря, от  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Приравняв нулю детерминант этой системы, мы получим дисперсионное уравнение, которое определит возможные значения  $\mathbf{k}$  при заданной  $\omega$ . Предполагая, что  $l \ll \delta$ , мы можем считать, что  $\sigma$  не зависит ни от  $\mathbf{k}$ , ни от  $\omega$ . Кроме того, чтобы упростить вычисления, мы будем считать, что  $\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij}$  и  $4\pi\sigma \gg \omega$ . Легко видеть, что в этом случае волновой вектор  $\mathbf{k}$  направлен перпендикулярно к поверхности ферромагнетика. Действительно, тангенциальные составляющие волнового вектора непрерывны на границе образца, модуль же волнового вектора внутри тела значительно больше  $\mathbf{k}_0$ , если  $4\pi\sigma \gg \omega$ .

Полагая в (12.1.2)  $\mathbf{k} = -k\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  — единичный вектор вдоль внешней нормали к ферромагнетика, найдем

$$\mathbf{e} = -i \frac{ck}{4\pi\sigma} (\mathbf{v} \times \mathbf{h}),\tag{12.1.3}$$

и, следовательно,

$$i \frac{ck^2}{4\pi\sigma} (\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{h})) = \frac{\omega}{c} \hat{\mu}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{h},\tag{12.1.4}$$

откуда

$$\det \left\{ \frac{1}{2} \delta^2 k^2 (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_k - \delta_{ik}) + i\mu_{ik}(\mathbf{k}, \omega) \right\} = 0.\tag{12.1.5}$$

Это дисперсионное уравнение позволяет найти волновой вектор  $\mathbf{k}$  как функцию частоты  $\omega$  и углов между нормалью к поверхности  $\mathbf{v}$  и кристаллографическими осями. При этом, очевидно, следует выбирать те решения, для которых  $\text{Im } k > 0$ .

Мы ограничимся рассмотрением одноосного ферромагнетика, причем будем считать, что равновесное значение его магнитного момента направлено вдоль оси легкого намагничивания. В этом случае

$$\hat{\mu}(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \mu(\mathbf{k}, \omega) & i\mu'(\mathbf{k}, \omega) & 0 \\ -i\mu'(\mathbf{k}, \omega) & \mu(\mathbf{k}, \omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\mu(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\Omega\Omega' - \left(\omega + \frac{i\Omega}{gM_0\tau}\right)\left(\omega + \frac{i\Omega'}{gM_0\tau}\right)}{\Omega^2 - \left(\omega + \frac{i\Omega}{gM_0\tau}\right)^2}, \quad (12.1.6)$$

$$\mu'(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi g M_0 \omega}{\Omega^2 - \left(\omega + \frac{i\Omega}{gM_0\tau}\right)^2}$$

и

$$\Omega = gM_0 \left( \alpha k^2 + \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right),$$

$$\Omega' = \Omega + 4\pi g M_0$$

(мы считаем, что  $\mu_{zz} = 1$ , так как  $\chi_{zz}^0 = \frac{\partial M_0}{\partial H_0^{(i)}} \ll 1$ ; см. (6.3.3)).

**2. Соотношения между амплитудами полей в ферромагнитном металле.** Предположим сначала, что стороннее магнитное поле  $H_0^{(e)}$  направлено параллельно оси легкого намагничивания, которая лежит в плоскости, ограничивающей ферромагнетик. Уравнения (12.1.4) приобретают в этом случае вид

$$\begin{aligned} \left( i \frac{k^2 \delta^2}{2} + 1 \right) h_z &= 0, \\ \left( i \frac{k^2 \delta^2}{2} + \mu \right) h_x + i\mu' h_y &= 0, \\ -i\mu' h_x + \mu h_y &= 0, \end{aligned} \quad (12.2.1)$$

где  $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$  (ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии, а ось  $y$  — вдоль внутренней нормали к поверхности ферромагнетика).

Эта система уравнений допускает решение, для которого волновой вектор равен

$$k_1 = \frac{1+i}{\delta}$$

и электромагнитное поле имеет компоненты

$$\mathbf{e}^{(1)} = (e_x^{(1)}, 0, 0), \quad \mathbf{h}^{(1)} = (0, 0, h_z^{(1)}),$$

причем

$$e_x^{(1)} = -\zeta_1 h_z^{(1)} \quad (12.2.2)$$

и

$$\zeta_1 = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}.$$

Кроме этого решения, система (12.2.1) допускает решения с  $h_z = 0$ , для которых волновой вектор  $\mathbf{k}$  удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$\frac{1}{2} k^2 \delta^2 - i\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (12.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\mu^2(\mathbf{k}, \omega) - \mu'^2(\mathbf{k}, \omega)}{\mu(\mathbf{k}, \omega)} = \\ &= \frac{\Omega'^2 - \left(\omega + i \frac{\Omega'}{gM_0\tau}\right)^2}{\Omega\Omega' - \left(\omega + i \frac{\Omega}{gM_0\tau}\right)\left(\omega + i \frac{\Omega'}{gM_0\tau}\right)}. \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

Это уравнение является кубическим относительно  $k^2$ , и поэтому имеется, вообще говоря, три решения с  $h_z = 0$ . Компоненты полей для этих решений характеризуются следующими соотношениями:

$$\mathbf{e} = (0, 0, e_z), \quad \mathbf{h} = (h_x, h_y, 0), \quad (12.2.5)$$

причем

$$h_y = i \frac{\mu'(\mathbf{k}, \omega)}{\mu(\mathbf{k}, \omega)} h_x, \quad e_z = \frac{ick}{4\pi\sigma} h_x.$$

Кубическое дисперсионное уравнение (12.2.3) превращается в уравнение первого порядка относительно  $k^2$  в том случае, когда можно не учитывать пространственной дисперсии магнитной восприимчивости, т. е. зависимости  $\mu(\mathbf{k}, \omega)$  от волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Вдали от ферромагнитного резонанса для этого необходимо, как видно из формулы (12.2.4), выполнение условия  $\alpha|k|^2 \ll 1$ , а вблизи резонанса — условия  $\alpha|k|^2 \ll \frac{1}{gM_0\tau}$  (последнее условие далее будет уточнено).

Мы будем сначала предполагать выполненными эти условия. Тогда уравнение (12.2.3) будет иметь единственное решение

$$k_2 = \frac{1+i}{\delta'}, \quad (12.2.6)$$



где

$$\delta' = \frac{\delta}{\sqrt{\tilde{\mu}(\omega)}}$$

и

$$\tilde{\mu}(\omega) = \tilde{\mu}(0, \omega).$$

Подставляя это значение волнового вектора в (12.2.5), запишем компоненты поля, соответствующие волновому вектору  $k_2$ , в виде

$$e^{(2)} = (0, 0, e_z^{(2)}), \quad h^{(2)} = (h_x^{(2)}, h_y^{(2)}, 0),$$

причем

$$e_z^{(2)} = \zeta_2 h_x^{(2)},$$

$$h_y^{(2)} = i \frac{\mu'(0, \omega)}{\mu(0, \omega)} h_x^{(2)}, \quad (12.2.7)$$

где

$$\zeta_2 = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega \tilde{\mu}(\omega)}{8\pi\sigma}}.$$

Величины  $\delta$  и  $\delta'$  имеют простой физический смысл: если пренебречь диссипативными слагаемыми в  $\chi_{ij}(\omega)$ , то  $\delta$  и  $\delta'$  будут определять глубины проникновения в ферромагнетик волн с комплексными волновыми векторами  $k_1$  и  $k_2$  (поля будут затухать в металле по закону  $e^{-y/\delta}$  и  $e^{-y/\delta'}$ ).

Обратим внимание на то, что величина  $\zeta_2$  обращается при  $\frac{1}{\tau} = 0$  в бесконечность, если частота  $\omega$  принимает значение:

$$\omega^{(r)} = \sqrt{\Omega_0 \Omega_0'} = g M_0 \sqrt{\left(\frac{H_0^{(e)}}{M_0} + \beta\right) \left(\frac{H_0^{(e)}}{M_0} + \beta + 4\pi\right)},$$

где  $\Omega_0$  и  $\Omega_0'$  — значения  $\Omega$  и  $\Omega'$  при  $k = 0$  (мы учли, что если поле  $H_0^{(e)}$  параллельно поверхности пластинки, то  $H_0^{(i)} = H_0^{(e)}$ ). Эта частота представляет собой частоту ферромагнитного резонанса пластинки, поверхность которой параллельна оси легкого намагничивания (см. формулу (10.2.7)).

Мы рассмотрели случай, когда ось легкого намагничивания лежит в плоскости, ограничивающей ферромагнетик. Аналогично можно рассмотреть случай, когда ось легкого намагничивания и стороннее магнитное поле  $H_0^{(e)}$  направлены перпендикулярно этой плоскости. Уравнения (12.1.4) приобретают

в этом случае вид

$$\begin{aligned} h_z &= 0, \\ \left(\frac{1}{2} ik^2 \delta^2 + \mu\right) h_x + \mu' h_y &= 0, \\ -\mu' h_x + \left(\frac{1}{2} ik^2 \delta^2 + \mu\right) h_y &= 0 \end{aligned} \quad (12.2.8)$$

(ось  $z$  предполагается здесь направленной вдоль вектора  $\mathbf{v}$ ).

Исключая из этой системы  $h_x$  и  $h_y$ , получим дисперсионное уравнение для определения  $k$

$$\left(\frac{1}{2} ik^2 \delta^2 + \mu(\mathbf{k}, \omega)\right)^2 - \mu'^2(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (12.2.9)$$

или

$$\frac{1}{2} ik^2 \delta^2 = \pm \mu'(\mathbf{k}, \omega) - \mu(\mathbf{k}, \omega).$$

Компоненты электромагнитного поля определяются при этом формулами

$$\mathbf{e} = (e_x, \pm i e_x, 0), \quad \mathbf{h} = (h_x, \pm i h_x, 0),$$

где

$$e_x = \mp \frac{ck}{4\pi\sigma} h_x \quad (12.2.10)$$

и знаки плюс и минус берутся в соответствии с тем, с каким знаком берется  $\mu'$  в уравнении (12.2.9).

В условиях, когда можно пренебречь пространственной дисперсией высокочастотной магнитной восприимчивости, каждое из уравнений (12.2.9) имеет по одному решению. Эти решения имеют вид

$$k_+ = \frac{1+i}{\delta_+}, \quad k_- = \frac{1+i}{\delta_-}, \quad (12.2.11)$$

где

$$\delta_{\pm} = \frac{\delta}{\sqrt{\mu \pm \mu'}}$$

и

$$\mu \mp \mu' = \frac{\omega \pm \Omega' \left(1 \pm \frac{i}{gM_0\tau}\right)}{\omega \pm \Omega \left(1 \pm \frac{i}{gM_0\tau}\right)}. \quad (12.2.12)$$

Величины  $\delta_+$  и  $\delta_-$  (как и ранее величины  $\delta$ ,  $\delta'$ ) определяют при  $\frac{1}{\tau} = 0$  глубины проникновения полей  $\mathbf{e}^{(+)}$ ,  $\mathbf{h}^{(+)}$

и  $e^{(-)}$ ,  $h^{(-)}$ , соответствующих волновым векторам  $k_+$  и  $k_-$ . Эти поля имеют следующие компоненты:

$$\begin{aligned} e^{(+)} &= (e_x^{(+)}, -ie_x^{(+)}, 0), & h^{(+)} &= (h_x^{(+)}, -ih_x^{(+)}, 0), \\ e^{(-)} &= (e_x^{(-)}, ie_x^{(-)}, 0), & h^{(-)} &= (h_x^{(-)}, ih_x^{(-)}, 0), \end{aligned} \quad (12.2.13)$$

причем  $e_x^{(\pm)}$  и  $h_x^{(\pm)}$  связаны между собой соотношениями

$$e_x^{(+)} = -i\zeta^{(+)}h_x^{(+)}, \quad e_x^{(-)} = i\zeta^{(-)}h_x^{(-)}, \quad (12.2.14)$$

где

$$\zeta^{(\pm)} = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega(\mu \pm \mu')}{8\pi\sigma}}.$$

Как следует из формул (12.2.12) для  $\mu \pm \mu'$ , величина  $\zeta^{(\pm)}$  обращается при  $\frac{1}{\tau} = 0$  в бесконечность, если частота переменного поля принимает значение

$$\omega^{(r)} = \Omega_0 = gM_0 \left( \beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0} - 4\pi \right)$$

(мы учли, что если  $H_0^{(e)}$  параллельно  $\mathbf{v}$ , то  $H_0^{(i)} = H_0^{(e)} - 4\pi M_0$ ). Эта частота представляет собой частоту ферромагнитного резонанса пластинки, поверхность которой перпендикулярна оси легкого намагничивания и стороннему магнитному полю  $H_0^{(e)}$  (см. формулу (10.2.8)).

Выше мы сформулировали условие пренебрежения пространственной дисперсией вблизи резонанса, т. е. при  $\omega \approx \approx \sqrt{\Omega_0 \Omega_0'}$  в виде неравенства  $\alpha |k|^2 \ll \frac{1}{gM_0\tau}$ . Учитывая теперь, что вблизи резонанса  $k \sim \frac{1}{\delta} \sqrt{gM_0\tau}$ , можно переписать это неравенство в виде

$$\alpha g M_0 \frac{\sigma}{c^2} \ll \frac{1}{(gM_0\tau)^2}. \quad (12.2.15)$$

При выполнении последнего неравенства, накладывающего ограничения на величины  $\sigma$  и  $\frac{1}{\tau}$ , возможно пренебрежение пространственной дисперсией в условиях резонанса.

**3. Поверхностный импеданс.** Установив соотношения между амплитудами полей внутри ферромагнетика, можно сформулировать граничные условия для определения электромагнитного поля вне ферромагнетика. Так как на границе ферромагнетика непрерывны тангенциальные составляющие

электрического и магнитного полей, а внутри ферромагнетика эти составляющие связаны линейными однородными соотношениями, то искомое граничное условие должно иметь вид [13]

$$\mathbf{e}_{0\tau} = \hat{\zeta}(\mathbf{h}_{0\tau} \times \mathbf{v}), \quad (12.3.1)$$

где  $\mathbf{e}_{0\tau}$  и  $\mathbf{h}_{0\tau}$  — тангенциальные составляющие полей  $\mathbf{e}_0$  и  $\mathbf{h}_0$  вне ферромагнетика вблизи его границы и  $\hat{\zeta}$  — некоторый двумерный тензор. Этот тензор, называемый тензором поверхностного импеданса, зависит только от частоты поля и констант, характеризующих ферромагнетик.

Так как внутри ферромагнетика электромагнитные волны распространяются вдоль нормали (если  $4\pi\sigma \gg \omega$ ), то  $b_v = d_v = 0$ . Поэтому вне ферромагнетика, вблизи его границы, должны выполняться также граничные условия

$$\mathbf{e}_{0v} = \mathbf{h}_{0v} = 0. \quad (12.3.2)$$

Компоненты тензора поверхностного импеданса могут быть найдены, если заметить, что внутри ферромагнетика вблизи его границы имеет место равенство

$$\mathbf{e}_\tau = \hat{\zeta}(\mathbf{h}_\tau \times \mathbf{v}) \quad (12.3.3)$$

и воспользоваться соотношениями между компонентами электромагнитного поля  $\mathbf{e}_\tau$  и  $\mathbf{h}_\tau$ , полученными в предыдущем разделе.

Рассмотрим сначала тот случай, когда ось анизотропии и стороннее магнитное поле лежат в плоскости, ограничивающей ферромагнетик. Выбирая оси координат так же, как в аналогичном случае, разобранным в предыдущем разделе, перепишем соотношение (12.3.3) в виде

$$e_x = -\zeta_{xx}h_z + \zeta_{xz}h_x,$$

$$e_z = -\zeta_{zx}h_z + \zeta_{zz}h_x.$$

Подставляя в эти равенства вместо  $\mathbf{e}_\tau$ ,  $\mathbf{h}_\tau$  сначала  $\mathbf{e}_\tau^{(1)}$ ,  $\mathbf{h}_\tau^{(1)}$ , а потом  $\mathbf{e}_\tau^{(2)}$ ,  $\mathbf{h}_\tau^{(2)}$ , получим, используя (12.2.2), (12.2.7):

$$\zeta_{xx} = \zeta_1, \quad \zeta_{zz} = \zeta_2, \quad \zeta_{xz} = \zeta_{zx} = 0.$$

Таким образом, тензор поверхностного импеданса в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\hat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{pmatrix}. \quad (12.3.4)$$

Определим тензор поверхностного импеданса в том случае, когда ось легкого намагничивания направлена перпендикулярно к поверхности ферромагнетика. Выбирая оси координат так же, как и в аналогичном случае, разобранным в предыдущем разделе, перепишем соотношение (12.3.3) в виде

$$\begin{aligned} e_x &= \zeta_{xx} h_y - \zeta_{xy} h_x, \\ e_y &= \zeta_{yx} h_y - \zeta_{yy} h_x. \end{aligned}$$

Подставляя сюда сначала  $e_{\tau}^{(+)}$ ,  $h_{\tau}^{(+)}$ , а потом  $e_{\tau}^{(-)}$ ,  $h_{\tau}^{(-)}$ , получим, используя (12.2.13), (12.2.14), следующую систему уравнений для определения компонент тензора поверхностного импеданса:

$$\begin{aligned} i\zeta_{xx} + \zeta_{xy} &= i\zeta^{(+)}, & i\zeta_{yx} + \zeta_{yy} &= \zeta^{(+)}, \\ i\zeta_{xx} - \zeta_{xy} &= i\zeta^{(-)}, & -i\zeta_{yx} + \zeta_{yy} &= \zeta^{(-)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \zeta_{xx} &= \zeta_{yy} = \frac{1}{2}(\zeta^{(+)} + \zeta^{(-)}), \\ \zeta_{xy} &= -\zeta_{yx} = \frac{i}{2}(\zeta^{(+)} - \zeta^{(-)}). \end{aligned}$$

Таким образом, тензор поверхностного импеданса в том случае, когда ось легкого намагничивания и стороннее магнитное поле направлены перпендикулярно поверхности ферромагнетика, имеет вид

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\zeta^{(+)} + \zeta^{(-)}) & \frac{i}{2}(\zeta^{(+)} - \zeta^{(-)}) \\ -\frac{i}{2}(\zeta^{(+)} - \zeta^{(-)}) & \frac{1}{2}(\zeta^{(+)} + \zeta^{(-)}) \end{pmatrix}. \quad (12.3.5)$$

**4. Плотность потока энергии через поверхность ферромагнетика.** С поверхностным импедансом можно связать среднее по времени значение плотности потока энергии через поверхность металла:

$$\bar{\Pi}_v = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} e_{0\tau} (h_{0\tau}^* \times \mathbf{v}).$$

Замечая, что

$$h_{0\tau}^* \times \mathbf{v} = (\hat{\xi}^{-1})^* e_{0\tau}^*,$$

получим

$$\bar{\Pi}_v = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} e_{0\tau} (\hat{\xi}^{-1})^* e_{0\tau}^* = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (h_{0\tau}^* \times \mathbf{v}) \hat{\xi} (h_{0\tau} \times \mathbf{v}). \quad (12.4.1)$$

Если тензор поверхностного импеданса диагонален, то эти формулы приобретают вид

$$\bar{\Pi}_v = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{|e_{0x}|^2}{\xi_{xx}^*} + \frac{|e_{0z}|^2}{\xi_{zz}^*} \right) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (\xi_{xx} |h_{0z}|^2 + \xi_{zz} |h_{0x}|^2). \quad (12.4.2)$$

Зависимость потока энергии  $\bar{\Pi}_v$  от частоты  $\omega$  при неизменной амплитуде магнитного поля на поверхности ферромагнетика определяет форму линии поглощения электромагнитного поля в ферромагнитном металле. Эта форма линии, как следует из (12.4.1), фактически определяется зависимостью компонент тензора поверхностного импеданса от частоты.

Как мы видели в предыдущем разделе, изменение компонент тензора  $\xi$  с частотой имеет резонансный характер, причем эти компоненты достигают максимума при совпадении частоты  $\omega$  с частотой ферромаг-

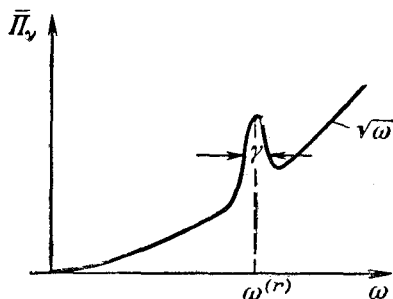


Рис. 3.

нитного резонанса  $\omega^{(r)}$ ; ширина линии резонанса по порядку величины равна, очевидно,  $1/\tau$ . Вдали от резонанса компоненты тензора  $\xi$  ведут себя как  $\sqrt{\omega}$ . Схематически ход зависимости  $\bar{\Pi}_v$  от частоты (при  $h_{0\tau} = \text{const}$ ) показан на рис. 3.

**5. Пространственная дисперсия высокочастотной магнитной восприимчивости и поверхностный импеданс ферромагнитных металлов.** До сих пор мы не учитывали пространственной дисперсии магнитной восприимчивости ферромагнетика. При этом ширина линии ферромагнитного резонанса, как мы видели, определяется только релаксационной постоянной  $1/\tau$  и не зависит от электропроводности металла  $\sigma$ . Покажем теперь, что учет пространственной дисперсии тензора магнитной восприимчивости  $\chi(\mathbf{k}, \omega)$  приводит к дополнительному уширению линии ферромагнитного резонанса, обусловленному проводимостью  $\sigma$  [14, 15].

С этой целью мы должны определить компоненты тензора поверхностного импеданса вблизи ферромагнитного резонанса при наличии пространственной дисперсии. Для определенности будем предполагать, что ось легкого намагничивания,

параллельная стороннему магнитному полю, лежит в плоскости, ограничивающей ферромагнетик.

В этом случае, независимо от предположения о характере пространственной дисперсии, в ферромагнетике может существовать электромагнитное поле:

$$e^{(1)} = (e_x^{(1)}, 0, 0), \quad h^{(1)} = (0, 0, h_z^{(1)}),$$

соответствующее волновому вектору

$$k_1 = \frac{1+i}{\delta},$$

причем

$$e_x^{(1)} = -\zeta_1 h_z^{(1)}.$$

Рассмотрим уравнение (12.2.3) и исследуем его решения вблизи резонанса, т. е. при  $\omega \sim \omega^{(r)}$ ,  $\omega^{(r)} = \sqrt{\Omega_0 \Omega'_0}$ . Предполагая, что вблизи резонанса выполняется неравенство  $\alpha |k|^2 \ll 1$  (что будет далее оправдано), перепишем уравнение (12.2.3) в виде

$$k^2 \delta^2 \left\{ \frac{4\pi g M_0 \Omega'_0}{\tilde{\mu}(\omega)} + (\Omega_0 + \Omega'_0) g M_0 \alpha k^2 \right\} = 8\pi i g M_0 \Omega'_0.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\alpha k_{2,3}^2 = - \frac{2\pi \Omega'_0}{(\Omega_0 + \Omega'_0) \tilde{\mu}(\omega)} \pm \sqrt{\left[ \frac{2\pi \Omega'_0}{(\Omega_0 + \Omega'_0) \tilde{\mu}(\omega)} \right]^2 + i \frac{8\pi \Omega'_0 \alpha}{(\Omega_0 + \Omega'_0) \delta^2}}. \quad (12.5.1)$$

Так как  $\frac{\alpha}{\delta^2} \ll 1$  и вблизи резонанса  $|\tilde{\mu}(\omega)| \gg 1$ , то волновые векторы  $k_2$  и  $k_3$ , как и утверждалось, удовлетворяют условию  $\alpha |k_{2,3}|^2 \ll 1$ .

Заметим, что если релаксационная постоянная  $1/\tau$  достаточно велика, так что

$$|\tilde{\mu}(\omega)|^{-2} \sim (g M_0 \tau)^{-2} \gg \frac{\alpha}{\delta^2},$$

то выражения для корней  $k_2$  и  $k_3$  значительно упрощаются:

$$k_2^2 \approx 4\pi i \frac{\omega \sigma}{c^2} \tilde{\mu}(\omega), \quad k_3^2 \approx - \frac{4\pi \Omega'_0}{\alpha (\Omega_0 + \Omega'_0) \tilde{\mu}(\omega)},$$

и мы возвращаемся к случаю, рассмотренному в предыдущем разделе (так как  $|k_3| \gg |k_2|$ , то поле, соответствующее волновому вектору  $\mathbf{k}_3$ , практически не проникает в ферромагнетик; поэтому это поле не фигурировало в предыдущем разделе).

Волновым векторам  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$  соответствуют решения уравнений Максвелла (12.2.5):

$$\mathbf{h}^{(2)} = (h_x^{(2)}, h_y^{(2)}, 0), \quad \mathbf{h}^{(3)} = (h_x^{(3)}, h_y^{(3)}, 0),$$

где

$$h_y^{(2)} = i \frac{\mu'(\mathbf{k}_2, \omega)}{\mu(\mathbf{k}_2, \omega)} h_x^{(2)}, \quad h_y^{(3)} = i \frac{\mu'(\mathbf{k}_3, \omega)}{\mu(\mathbf{k}_3, \omega)} h_x^{(3)}. \quad (12.5.2)$$

Эти решения, однако, непосредственно не представляют собой магнитных полей, могущих существовать в ферромагнетике, так как они не удовлетворяют граничным условиям для плотности магнитного момента. Последние должны, очевидно, учитываться, если существенна пространственная дисперсия тензора магнитной восприимчивости (в этих условиях уравнения движения магнитного момента содержат вторые производные магнитного момента по пространственным координатам).

Граничные условия, согласно (5.5.14), имеют вид

$$\left( \mathbf{m} - d \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (12.5.3)$$

Этих условий два, так как  $m_z = 0$  (мы пренебрегаем диссипативными слагаемыми, изменяющими величину плотности магнитного момента).

Граничным условиям (12.5.3) удовлетворяет решение (12.2.2), соответствующее волновому вектору  $\mathbf{k}_1$ , так как для него  $\mathbf{m}^{(1)} \equiv 0$ , но не удовлетворяют решения (12.5.2), соответствующие волновым векторам  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ . Более того, в силу однородности граничных условий им, строго говоря, нельзя удовлетворить и суперпозицией этих решений.

Однако вблизи резонанса граничные условия (12.5.3) не являются независимыми и, как мы покажем, выполнение одного из них автоматически влечет за собой выполнение другого. Действительно, так как  $\mathbf{m} = \hat{\chi}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{h}$ , то в силу (12.5.2) имеем

$$m_x^{(j)} = \frac{1}{4\pi} [\tilde{\mu}(\mathbf{k}_j, \omega) - 1] h_x^{(j)},$$

$$m_y^{(j)} = - \frac{i}{4\pi} \frac{\mu'(\mathbf{k}_j, \omega)}{\mu(\mathbf{k}_j, \omega)} h_x^{(j)}, \quad j = 2, 3. \quad (12.5.4)$$



Поэтому

$$\frac{m_x^{(j)}}{m_y^{(j)}} = i \frac{\mu^2(\mathbf{k}_j, \omega) - \mu'^2(\mathbf{k}_j, \omega) - \mu(\mathbf{k}_j, \omega)}{\mu'(\mathbf{k}_j, \omega)}.$$

Но вблизи резонанса, когда  $\omega \approx \omega^{(r)} = \sqrt{\Omega_0 \Omega_0'}$ , можно считать, что  $\mu'(\mathbf{k}_j, \omega) = \mu'(0, \omega^{(r)})$  и  $\mu(\mathbf{k}_j, \omega) = 0$  (напомним, что  $\alpha |k_j|^2 \ll 1$ ). Таким образом, при  $\omega \approx \omega^{(r)}$

$$\frac{m_x^{(j)}}{m_y^{(j)}} \approx -i\mu'(0, \omega^{(r)}),$$

т. е. отношение  $m_x^{(j)}/m_y^{(j)}$  не зависит от типа решения.

Следует заметить, что при строгом решении задачи дисперсионное уравнение (12.2.3) имеет не два, а три корня и с помощью полей, соответствующих этим решениям, всегда можно удовлетворить граничным условиям (12.5.3).

Найдем теперь суперпозицию полей  $\mathbf{h}^{(2)}$ ,  $\mathbf{e}^{(2)}$  и  $\mathbf{h}^{(3)}$ ,  $\mathbf{e}^{(3)}$ , удовлетворяющую граничным условиям (12.5.3) вблизи резонанса.

Используя первую из формул (12.5.4) и учитывая, что  $|\tilde{\mu}(\mathbf{k}_j, \omega)| \gg 1$ , имеем

$$m_x' \equiv m_x^{(2)} + m_x^{(3)} = \frac{1}{4\pi} \{ \tilde{\mu}(\mathbf{k}_2, \omega) h_x^{(2)} + \tilde{\mu}(\mathbf{k}_3, \omega) h_x^{(3)} \}.$$

Поэтому граничное условие (12.5.3) имеет вид

$$(1 - ik_2d) \tilde{\mu}(\mathbf{k}_2, \omega) h_x^{(2)} + (1 - ik_3d) \tilde{\mu}(\mathbf{k}_3, \omega) h_y^{(3)} \Big|_{y=0} = 0.$$

Замечая, что  $\tilde{\mu}(\mathbf{k}_j, \omega) = -i \frac{c^2 k_j^2}{4\pi\sigma\omega}$ , получим

$$(1 - ik_2d) k_2^2 h_x^{(2)} + (1 - ik_3d) k_3^2 h_x^{(3)} \Big|_{y=0} = 0,$$

откуда вытекает соотношение между амплитудами полей

$$h_x^{(3)} = - \frac{k_2^2}{k_3^2} \frac{1 - ik_2d}{1 - ik_3d} h_x^{(2)}.$$

Следовательно, согласно (12.5.2),

$$h_y^{(2)} = i \frac{\mu'(\mathbf{k}_2, \omega)}{\mu(\mathbf{k}_2, \omega)} h_x^{(2)}, \quad h_y^{(3)} = -i \frac{\mu'(\mathbf{k}_3, \omega)}{\mu(\mathbf{k}_3, \omega)} \frac{k_2^2}{k_3^2} \frac{1 - ik_2d}{1 - ik_3d} h_x^{(2)}. \quad (12.5.5)$$

Таким образом, искомая суперпозиция полей  $\mathbf{h}' = \mathbf{h}^{(2)} + \mathbf{h}^{(3)}$ ,  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}^{(2)} + \mathbf{e}^{(3)}$ , удовлетворяющая граничным условиям для момента, имеет вид

$$\mathbf{h}' = (h'_x, h'_y, 0), \quad \mathbf{e}' = (0, 0, e'_z),$$

где

$$\begin{aligned} h'_x &= \left(1 - \frac{k_2^2}{k_3^2} \frac{1 - ik_2 d}{1 - ik_3 d}\right) h_x^{(2)}, \\ h'_y &= i \left( \frac{\mu'(k_2, \omega)}{\mu(k_2, \omega)} - \frac{\mu'(k_3, \omega)}{\mu(k_3, \omega)} \frac{k_2^2}{k_3^2} \frac{1 - ik_2 d}{1 - ik_3 d} \right) h_x^{(2)}, \\ e'_z &= \frac{ic}{4\pi\sigma} \left( k_2 - \frac{k_2^2}{k_3} \frac{1 - ik_2 d}{1 - ik_3 d} \right) h_x^{(2)}. \end{aligned} \quad (12.5.6)$$

Найдя поля, могущие существовать внутри ферромагнетика, легко определить компоненты тензора поверхностного импеданса вблизи резонанса. Воспользуемся для этого уравнениями

$$\begin{aligned} e_x &= -\zeta_{xx} h_x + \zeta_{xz} h_z, \\ e_z &= -\zeta_{zx} h_x + \zeta_{zz} h_z. \end{aligned}$$

Подставляя в них  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^{(1)}$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}^{(1)}$ , получим

$$\zeta_{xx} = \zeta_1, \quad \zeta_{zx} = 0. \quad (12.5.7)$$

Подставляя далее  $\mathbf{h} = \mathbf{h}'$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}'$ , найдем

$$\zeta_{zz} = \frac{ic}{4\pi\sigma} \frac{k_2 k_3 \left( k_2 + k_3 + \frac{i}{d} \right)}{k_2^2 + k_3^2 + k_2 k_3 + \frac{i}{d} (k_2 + k_3)}, \quad \zeta_{xz} = 0. \quad (12.5.8)$$

Последнюю формулу удобно переписать в виде

$$\zeta_{zz} = (1 - i) \sqrt{\frac{\bar{\mu}(\omega)}{8\pi\sigma}}, \quad (12.5.9)$$

где  $\bar{\mu}(\omega)$  — некоторая функция от частоты, которая может быть определена с помощью формул (12.5.1).

Приведем формулы для  $\bar{\mu}(\omega)$  в двух предельных случаях  $|k_j d| \ll 1$  и  $|k_j d| \gg 1$  [16]:

при  $|k_j d| \ll 1$

$$\bar{\mu}(\omega) = \frac{4\pi g M_0 \Omega'_0}{\Omega_0 \Omega'_0 + 2(\Delta\omega^{(r)})^2 - \omega^2 - i\omega \frac{1}{gM_0} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{\tau'}\right)}; \quad (12.5.10)$$

при  $|k_j d| \gg 1$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\omega) = & \frac{4\pi g M_0 \Omega'_0}{\Omega_0 \Omega'_0 + (\Delta\omega^{(r)})^2 - \omega^2 - i\omega (\Omega_0 + \Omega'_0) \frac{1}{gM_0} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'}\right)} + \\ & + (1-i) \frac{4\pi g M_0 \Omega'_0 (\Delta\omega^{(r)})^2}{\left[\Omega_0 \Omega'_0 + (\Delta\omega^{(r)})^2 - \omega^2 - i\omega (\Omega_0 + \Omega'_0) \frac{1}{gM_0} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'}\right)\right]^2}, \end{aligned} \quad (12.5.11)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau'} & \approx 2 \sqrt{\pi} \frac{V\alpha}{\delta} \frac{(gM_0)^2}{V\Omega_0 (\Omega_0 + \Omega'_0)}, \\ (\Delta\omega^{(r)})^2 & \approx 2 \frac{V\alpha}{\delta} gM_0 V\pi\Omega'_0 (\Omega_0 + \Omega'_0). \end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что учет пространственной дисперсии магнитной проницаемости и скин-эффекта эквивалентен увеличению релаксационной постоянной на величину порядка [14]:

$$\frac{1}{\tau'} \approx gM_0 \frac{V\alpha}{\delta} \approx \sqrt{\frac{T_c}{\mu_0 M_0}} \cdot \frac{a}{\delta} gM_0.$$

### § 13. Параметрическое возбуждение спиновых волн

**1. Уравнения параметрического ферромагнитного резонанса.** При изучении однородного ферромагнитного резонанса мы исходили из линеаризованного уравнения движения плотности магнитного момента и пришли поэтому к заключению, что переменное однородное магнитное поле возбуждает только однородные колебания плотности магнитного момента. В действительности в силу нелинейности уравнения движения плотности магнитного момента однородные колебания связаны с неоднородными колебаниями, и поэтому однородное переменное магнитное поле может возбуждать как однородные, так и неоднородные колебания плотности магнитного момента. Это возбуждение носит характер параметрического резонанса

и может быть названо параметрическим возбуждением спиновых волн [17, 18].

При рассмотрении параметрического возбуждения спиновых волн для определенности будем считать, что ферромагнетик имеет форму эллипсоида вращения, вдоль оси вращения которого направлены векторы  $H_0^{(e)}$  и  $M_0$  (мы выберем ее за ось  $z$  координатной системы).

Чтобы установить связь между однородными и неоднородными колебаниями плотности магнитного момента, будем исходить из уравнений движения для циркулярных компонент  $m_{\pm} = m_x \pm im_y$  отклонения плотности магнитного момента от равновесного значения  $m = M - M_0$ ,

$$\dot{m}_{\pm} = \pm ig (M_z \tilde{H}_{\pm} - \tilde{H}_z m_{\pm}), \quad (13.1.1)$$

где

$$\tilde{H}_{\pm} = \tilde{H}_x \pm i\tilde{H}_y, \quad M_z = M_0 + m_z.$$

Так как  $M^2 = M_0^2$ , то

$$m_z = -\frac{1}{2} \frac{m_+ m_-}{M_0} + \dots$$

Для простоты мы не будем учитывать энергии магнитной анизотропии, т. е. будем считать, что эффективное магнитное поле имеет вид

$$\tilde{H} = \alpha \Delta m + h + H_0^{(i)},$$

где  $h$  — переменная составляющая магнитного поля в ферромагнетике и  $H_0^{(i)} = H_0^{(e)} - 4\pi N_3 M_0$  ( $N_3$  — размагничивающий коэффициент вдоль оси  $z$ ). Таким образом,

$$\tilde{H}_{\pm} = \alpha \Delta m_{\pm} + h_{\pm}, \quad \tilde{H}_z = \alpha \Delta m_z + h_z + H_0^{(i)}.$$

Перейдем к пространственным компонентам Фурье отклонения плотности момента от равновесного значения

$$m(r, t) = \sum_k m(k) e^{ikr}, \quad m(k) = \frac{1}{V} \int m(r, t) e^{-ikr} dr$$

и установим уравнения для компонент Фурье  $m(k)$  (мы не отмечаем в числе аргументов  $m(k)$  времени). При этом следует иметь в виду, что спиновые волны соответствуют магнитостатическому приближению, т. е. поле  $h(r, t)$  удовлетворяет уравнениям магнитостатики. Отсюда следует, что

компоненты Фурье поля  $h(\mathbf{k})$  связаны с  $m(\mathbf{k})$  соотношениями

$$h(\mathbf{k}) = \begin{cases} -\frac{4\pi k(km(\mathbf{k}))}{k^2}, & \mathbf{k} \neq 0, \\ h^{(e)}(t) - 4\pi\hat{N}m(0), & \mathbf{k} = 0, \end{cases}$$

где  $h^{(e)}(t)$  — стороннее переменное поле, которое мы будем предполагать ориентированным перпендикулярно  $M_0$  и изменяющимся по закону

$$h^{(e)} = \frac{1}{2}(h_0 e^{-i\omega t} + h_0^* e^{i\omega t}), \quad h_0 M_0 = 0. \quad (13.1.2)$$

Запишем прежде всего уравнения движения для компонент  $m_{\pm}(\mathbf{k})$  при  $\mathbf{k} = 0$ . Так как однородные колебания возбуждаются сторонним полем и связь между однородными и неоднородными колебаниями в общем невелика, то естественно исходить для  $m_{\pm}(0)$  из линеаризованного уравнения движения, которое как легко убедиться, имеет вид

$$\dot{m}_{\pm}(0) = \pm ig M_0 h_{\pm}^{(e)} \mp i\omega^{(r)} m_{\pm}(0), \quad (13.1.3)$$

где  $\omega^{(r)} = g M_0 \left( \frac{H_0^{(l)}}{M_0} + 4\pi N_1 \right)$  — частота однородного ферромагнитного резонанса в рассматриваемом случае ( $N_1$  — размагничивающий множитель, соответствующий осям  $x$  и  $y$ ).

Запишем уравнения движения для  $m_{\pm}(\mathbf{k})$  при  $\mathbf{k} \neq 0$ . Так как неоднородные колебания возбуждаются не непосредственно, а благодаря связи с однородными колебаниями, то в уравнениях движения для  $m_{\pm}(\mathbf{k})$  мы должны удержать не только линейные по  $m_{\pm}(\mathbf{k})$  члены, но и билинейные члены типов  $m_{\pm}(0)m_{\pm}(\mathbf{k})$ . Легко убедиться, что уравнения движения с учетом таких членов имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{m}_{+}(\mathbf{k}) &= -iA_k m_{+}(\mathbf{k}) - iB_k m_{-}(\mathbf{k}) + F_{+}(\mathbf{k}), \\ \dot{m}_{-}(\mathbf{k}) &= iA_k m_{-}(\mathbf{k}) + iB_k^* m_{+}(\mathbf{k}) + F_{-}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (13.1.4)$$

где

$$A_k = \Omega + 2\pi g M_0 \frac{k_+ k_-}{k^2}, \quad B_k = 2\pi g M_0 \frac{k_+^2}{k^2},$$

$$\Omega = g M_0 \left( \alpha k^2 + \frac{H_0^{(l)}}{M_0} \right),$$

$$\begin{aligned} F_{\pm}(\mathbf{k}) &= \pm 2\pi ig \frac{k_z}{k^2} \{ (m_{+}(0)m_{-}(\mathbf{k}) + m_{-}(0)m_{+}(\mathbf{k}))k_{\pm} + \\ &\quad + m_{\pm}(0)(k_+ m_{-}(\mathbf{k}) + k_- m_{+}(\mathbf{k})) \}. \end{aligned}$$

Так как величины  $m_{\pm}(0)$  определяются уравнением, в которое не входят величины  $m_{\pm}(k)$  с  $k \neq 0$ , то уравнения (13.1.4) для  $m_{\pm}(k)$  представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (пропорциональными  $m_{\pm}(0)$ ).

**2. Инкремент нарастания амплитуд неоднородных колебаний магнитного момента.** Для дальнейшего исследования системы уравнений (13.1.4) удобно перейти от переменных  $m_{+}(k)$ ,  $m_{-}(k)$  к нормальным координатам  $c_k$ ,  $c_{-k}^*$ :

$$m_{+}(k) = u_k c_k + v_k^* c_{-k}^*,$$

$$m_{-}(k) = u_k^* c_{-k}^* + v_k c_k,$$

где

$$u_k = \sqrt{\frac{A_k + \omega_s(k)}{2\omega_s(k)}}, \quad v_k = -\frac{B_k^*}{|B_k|} \sqrt{\frac{A_k - \omega_s(k)}{2\omega_s(k)}},$$

$$\omega_s(k) = \sqrt{A_k^2 - |B_k|^2}.$$

Тогда уравнение для  $c_k$  будет иметь вид

$$\dot{c}_k = -i\omega_s(k) c_k + u_k^* F_{+}(k) - v_k^* F_{-}(k), \quad (13.2.1)$$

где

$$u_k^* F_{+}(k) - v_k^* F_{-}(k) = 4\pi i g \frac{k_z}{k^2} \left\{ (k_{+} u_k + k_{-} v_k^*) \times \right.$$

$$\times (u_k m_{+}(0) + v_k^* m_{-}(0)) c_{-k}^* + [(k_{+} v_k + k_{-} u_k) \times$$

$$\times (u_k m_{+}(0) + v_k^* m_{-}(0)) - \frac{1}{2} (k_{-} m_{+}(0) - k_{+} m_{-}(0))] c_k \left. \right\}.$$

Найдем входящие сюда величины  $m_{\pm}(0)$ . Чтобы не получить бесконечных значений  $m_{\pm}(0)$  при резонансе, мы должны, очевидно, ввести в уравнения движения (13.1.3) для  $m_{\pm}(0)$  затухание спиновых волн, т. е. заменить их уравнениями

$$\dot{m}_{\pm}(0) = \mp l(\omega^{(r)} \mp i\gamma^{(r)}) m_{\pm}(0) \pm ig M_0 h_{\pm}^{(e)}, \quad (13.2.2)$$

где  $\gamma^{(r)}$  — коэффициент затухания при резонансе. Решение этого уравнения имеет вид

$$m_{+}(0) = \frac{1}{2} g M_0 \left\{ \frac{h_0^{+} e^{-i\omega t}}{\omega^{(r)} - \omega - i\gamma^{(r)}} + \frac{h_0^{*+} e^{i\omega t}}{\omega^{(r)} + \omega - i\gamma^{(r)}} \right\}, \quad (13.2.3)$$

$$m_{-}(0) = \frac{1}{2} g M_0 \left\{ \frac{h_0^{*-} e^{i\omega t}}{\omega^{(r)} - \omega + i\gamma^{(r)}} + \frac{h_0^{-} e^{-i\omega t}}{\omega^{(r)} + \omega + i\gamma^{(r)}} \right\}.$$

Остается подставить эти выражения в (13.2.1) и решить полученные линейные уравнения с переменными коэффициентами. Удобно положить с этой целью

$$c_k(t) = x_k(t) \cdot e^{-i\omega_s(\mathbf{k})t}.$$

Мы получим тогда для  $x_k$  уравнение вида

$$\dot{x}_k = x_{-k}^* (\alpha_k e^{-i\omega t} + \bar{\alpha}_k e^{i\omega t}) e^{2i\omega_s(\mathbf{k})t} + x_k (\beta_k e^{-i\omega t} + \bar{\beta}_k e^{i\omega t}),$$

где  $\alpha_k, \bar{\alpha}_k, \beta_k, \bar{\beta}_k$  — некоторые константы, зависящие от  $\mathbf{k}$  и пропорциональные амплитуде стороннего магнитного поля  $h^{(e)}$ .

Мы рассмотрим далее наиболее интересный случай, когда  $\omega \approx 2\omega_s(\mathbf{k})$ . В этом случае в последнем уравнении можно сохранить только одно слагаемое, пропорциональное  $\alpha_k$ :

$$\dot{x}_k = \alpha_k e^{-i(\omega - 2\omega_s(\mathbf{k}))t} x_{-k}^*,$$

где, как легко видеть из (13.2.1), (13.2.3),

$$\alpha_k = 2\pi i g \frac{k_z}{k^2} (k_+ u_k + k_- v_k^*) g M_0 \times \\ \times \left\{ \frac{h_0^+ u_k}{\omega^{(r)} - \omega - i\nu^{(r)}} + \frac{h_0^- v_k^*}{\omega^{(r)} + \omega + i\nu^{(r)}} \right\}. \quad (13.2.4)$$

Ясно, что величина  $x_{-k}^*$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_{-k}^* = \alpha_k^* e^{i(\omega - 2\omega_s(\mathbf{k}))t} x_k,$$

используя которое получим окончательно следующее уравнение для определения  $x_k$ :

$$\ddot{x}_k + i(\omega - 2\omega_s(\mathbf{k})) \dot{x}_k - |\alpha_k|^2 x_k = 0. \quad (13.2.5)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x_k(t) = x_k^{(1)} e^{\lambda_+ t} + x_k^{(2)} e^{\lambda_- t}, \quad (13.2.6)$$

где

$$\lambda_{\pm} = -i \left( \frac{\omega}{2} - \omega_s(\mathbf{k}) \right) \pm \sqrt{|\alpha_k|^2 - \left( \frac{\omega}{2} - \omega_s(\mathbf{k}) \right)^2}$$

и  $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}$  — произвольные постоянные.

Мы видим, что если выполняется неравенство

$$|\alpha_k| > \left| \frac{\omega}{2} - \omega_s(\mathbf{k}) \right|,$$

то величина  $\lambda_+$  будет иметь положительную вещественную часть:

$$\operatorname{Re} \lambda_+ \equiv \eta_k(\omega) = \sqrt{|\alpha_k|^2 - \left(\frac{\omega}{2} - \omega_s(k)\right)^2}, \quad (13.2.7)$$

т. е. амплитуда колебаний будет экспоненциально нарастать со временем с инкрементом  $\eta_k(\omega)$ .

Этот вывод основан на предположении, что спиновые волны не затухают. Если учитывать их затухание, то нарастание колебаний будет иметь место только в том случае, если инкремент нарастания  $\eta_k(\omega)$  превосходит декремент затухания спиновых волн  $\gamma_s(k)$

$$\eta_k(\omega) > \gamma_s(k),$$

или

$$|\alpha_k|^2 > \left(\frac{\omega}{2} - \omega_s(k)\right)^2 + \gamma_s^2(k). \quad (13.2.8)$$

Естественно, что экспоненциальный рост амплитуд спиновых волн не будет продолжаться бесконечно долго, так как при достаточно больших амплитудах начнут играть роль не учтенные нами в уравнениях (13.1.4) нелинейные эффекты, которые в конечном счете приведут к некоторому стационарному режиму, который будет характеризоваться определенными амплитудами как однородных, так и неоднородных колебаний плотности магнитного момента. Мы не будем здесь решать этой нелинейной задачи, решение которой дано в работе [17], а ограничимся лишь рассмотрением начальной стадии, когда происходит экспоненциальное нарастание амплитуды колебаний  $A_k$  по закону

$$A_k = A_k(0) e^{(\eta_k - \gamma_s(k)) t}.$$

Из выражения (13.2.4) следует, что инкремент нарастания амплитуды спиновой волны  $\eta_k(\omega)$  будет особенно велик, если частота стороннего поля  $\omega$  близка к частоте ферромагнитного резонанса  $\omega^{(r)}$ . В этом случае

$$|\alpha_k| = \frac{\rho(k)}{M_0} \cdot \frac{|h_0^+|}{\sqrt{(\omega^{(r)} - \omega)^2 + \gamma^{(r)2}}},$$

где

$$\rho(k) = 2\pi(gM_0)^2 \frac{k_z}{k^2} |u_k(k_+ u_k + k_- v_k^*)|.$$



и условие (13.2.6) приобретает вид

$$|h_0^+| > h_c,$$

где

$$h_c = M_0 \frac{\sqrt{\{(\omega^{(r)} - \omega)^2 + \gamma^{(r)2}\} \left\{ \left( \frac{\omega}{2} - \omega_s(\mathbf{k}) \right)^2 + \gamma_s^2(\mathbf{k}) \right\}}}{\rho(\mathbf{k})}. \quad (13.2.9)$$

Мы видим, что возбуждение однородным полем неоднородных колебаний будет происходить в том случае, если амплитуда стороннего переменного магнитного поля превосходит некоторое минимальное критическое значение  $h_c$ . В условиях резонанса, когда

$$\omega = \omega^{(r)} = 2\omega_s(\mathbf{k}),$$

критическое поле определяется формулой

$$h_c = \frac{\gamma_s(\mathbf{k}) \gamma^{(r)}}{\rho(\mathbf{k})} M_0.$$

По порядку величины

$$h_c = M_0 \frac{\gamma_s(\mathbf{k})}{gM_0} \frac{\gamma^{(r)}}{gM_0}.$$

Считая  $\frac{\gamma_s(\mathbf{k})}{gM_0} \sim \frac{\gamma^{(r)}}{gM_0} \sim 10^{-1}$ , получим  $h_c \sim 10^{-2} M_0 \approx 10$  эс.

Подставляя в условия резонанса  $\omega^{(r)} = 2\omega_s(\mathbf{k})$

$$\omega^{(r)} = gM_0 \left( \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta + 4\pi N_1 \right),$$

$$\omega_s(\mathbf{k}) =$$

$$= gM_0 \sqrt{\left( \alpha k^2 + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta + 4\pi \sin^2 \vartheta_k \right) \left( \alpha k^2 + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta \right)},$$

получим следующее выражение для величины волнового вектора параметрически возбуждаемой спиновой волны:

$$\alpha k^2 = \sqrt{(2\pi \sin^2 \vartheta_k)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta + 4\pi N_1 \right)^2} - 2\pi \sin^2 \vartheta_k - \frac{H_0^{(i)}}{M_0} - \beta.$$

Отсюда следует, что для параметрического возбуждения спиновых волн должно выполняться условие

$$H_0^{(i)} + \beta M_0 < 4\pi N_1 M_0. \quad (13.2.10)$$

(Напомним, что условием однородного намагничения эллипсоида является неравенство  $H_0^{(i)} + \beta M_0 \equiv H_0^{(e)} - 4\pi N_3 M_0 + \beta M_0 > 0$ .) Мы видим, что наличие большой константы магнитной анизотропии препятствует возможности параметрического возбуждения неоднородных колебаний плотности магнитного момента.

Заметим, что если  $H_0^{(i)} + \beta M_0$  близко к  $4\pi N_1 M_0$ , то возбуждаемые спиновые волны распространяются в узком конусе, ось которого направлена вдоль вектора  $M_0$ , причем угол раствора этого конуса равен

$$\vartheta = 2 \sqrt{\frac{4\pi N_1 M_0 - H_0^{(i)} - \beta M_0}{4\pi M_0}}. \quad (13.2.11)$$

Мы рассмотрели параметрическое возбуждение спиновых волн с частотой  $\omega_s(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \omega^{(r)}$ . Но возможно также параметрическое возбуждение однородным магнитным полем неоднородных колебаний магнитного момента с частотами  $\omega_s(\mathbf{k}) = \frac{n}{m} \omega^{(r)}$ , где  $n$  и  $m$  — произвольные целые числа.

В частности, возможно параметрическое возбуждение спиновых волн с частотой  $\omega_s(\mathbf{k}) = \omega^{(r)}$ . Для того чтобы найти инкремент нарастания амплитуды таких волн, необходимо в уравнении движения магнитного момента при  $\mathbf{k} \neq 0$  сохранить члены типов  $m_{\pm}(\mathbf{k}) m_{\pm}^2(0)$ .

Мы не будем приводить здесь подробные вычисления, а приведем лишь окончательное выражение для инкремента нарастания амплитуды колебаний, предполагая, что частоты  $\omega_s(\mathbf{k})$ ,  $\omega^{(r)}$  и  $\omega$  близки друг к другу:

$$\eta'_k(\omega) = \sqrt{|\alpha'_k|^2 - (\omega - \omega_s(\mathbf{k}))^2},$$

где

$$|\alpha'_k| = \frac{|h_0^+|^2 \rho'(\mathbf{k})}{M_0^2 \{(\omega^{(r)} - \omega)^2 + \gamma^{(r)^2}\}},$$

$$\rho'(\mathbf{k}) = \frac{1}{8} (g M_0)^3 u_k^2 \left( \alpha k^2 + 4\pi \frac{k_z^2}{k^2} - 4\pi N_1 \right).$$

Амплитуда спиновых волн будет нарастать со временем, если  $\eta'_k(\omega)$  превосходит декремент затухания спиновых волн  $\gamma_s(\mathbf{k})$ :

$$\eta'_k(\omega) > \gamma_s(\mathbf{k}).$$

Это условие можно записать в виде

$$|h_0^+| > h'_c,$$

где

$$h'_c = \frac{1}{\sqrt{\rho'(\mathbf{k})}} \{(\omega - \omega_s(\mathbf{k}))^2 + \gamma_s^2(\mathbf{k})\}^{1/4} \{(\omega - \omega^{(r)})^2 + (\gamma^{(r)})^2\}^{1/2}. \quad (13.2.12)$$

В условиях резонанса, когда

$$\omega = \omega^{(r)} = \omega_s(\mathbf{k}),$$

критическое значение поля определяется формулой

$$h'_c = \frac{\gamma_s^{1/2}(\mathbf{k}) \gamma^{(r)}}{\sqrt{\rho'(\mathbf{k})}} M_0;$$

по порядку величины

$$h'_c \approx M_0 \left( \frac{\gamma_s(\mathbf{k})}{gM_0} \right)^{1/2} \frac{\gamma^{(r)}}{gM_0}.$$

Мы видим, что  $h'_c \gg h_c$ .

Из условия резонанса  $\omega^{(r)} = \omega_s(\mathbf{k})$  легко получить выражение для величины волнового вектора параметрически возбуждаемой спиновой волны:

$$\alpha k^2 = -\frac{H_0^{(i)}}{M_0} - \beta - 2\pi \sin^2 \vartheta_k + \sqrt{(2\pi \sin^2 \vartheta_k)^2 + \left( \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta + 4\pi N_1 \right)^2}.$$

Отсюда следует, что независимо от величины  $H_0^{(i)} + \beta M_0$  возможно возбуждение спиновых волн в интервале углов

$$\sin^2 \vartheta_k < 2N_1.$$

Если же мы хотим, чтобы спиновые волны возбуждались в интервале углов  $\sin^2 \vartheta_k > 2N_1$ , то должно выполняться условие

$$\frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta < \frac{4\pi N_1^2}{\sin^2 \vartheta_k - 2N_1}.$$

Мы рассмотрели параметрическое возбуждение неоднородных колебаний плотности магнитного момента в том случае, когда  $\mathbf{h}^{(e)}$  перпендикулярно  $\mathbf{M}_0$ . Но параметрическое возбуждение колебаний плотности магнитного момента возможно и при  $\mathbf{h}_0^{(e)}$  параллельно  $\mathbf{M}_0$ . Мы, однако, не будем здесь рассматривать этот случай (см. [19]).

Параметрическое возбуждение спиновых волн возможно не только с помощью переменного магнитного поля, но и с помощью звука. Такое возбуждение было исследовано в [20].

#### § 14. Когерентное усиление спиновых волн потоком заряженных частиц

**1. Условия резонанса.** Если через ферромагнетик движется заряженная частица с достаточно большой скоростью, то она будет возбуждать в нем как собственно электромагнитные, так и спиновые волны. Для этого необходимо лишь, чтобы фазовая скорость волны совпадала с проекцией скорости частицы  $v$  на направление волнового вектора. Иными словами, должно выполняться условие резонанса

$$vk = \omega(k),$$

где  $\omega(k)$  — частота волны с волновым вектором  $k$ .

Это явление (черенковское излучение) может быть использовано для усиления спиновых волн пучком заряженных частиц, например электронов, проходящих через ферромагнетик [21]. При этом пучок частиц будет наиболее интенсивно возбуждать те спиновые волны, для которых выполняется условие

$$\omega_s(k) = kv_0, \quad (14.1.1)$$

где  $v_0$  — скорость пучка.

Коэффициент усиления, точнее говоря, инкремент нарастания амплитуды спиновых волн, существенно зависит от степени моноэнергетичности частиц в пучке. Если разброс частиц по скоростям не мал, то инкремент нарастания будет пропорционален плотности частиц  $n_0$ , в случае же большой моноэнергетичности пучка инкремент может быть пропорционален  $n_0^{1/3}$  (предполагается, что плотность частиц достаточно мала).

Возбуждение спиновых волн пучком заряженных частиц, проходящих через ферромагнетик, аналогично возбуждению плазменных колебаний пучком заряженных частиц, проходящих через плазму, причем в обоих случаях зависимость инкремента нарастания амплитуды колебаний от плотности частиц в пучке одинакова.

Наряду с возбуждением спиновых волн при выполнении условия  $\omega_s(k) = kv_0$ , которое можно назвать черенковским

возбуждением, возможно еще, так же как и в плазме, находящейся в постоянном магнитном поле, возбуждение спиновых волн при выполнении условий [22]

$$\omega_s(\mathbf{k}) = k\mathbf{v}_0 + l\omega_B, \quad (14.1.2)$$

где  $\omega_B = \frac{|e|B_0}{mc}$  — циклотронная частота электрона ( $B_0$  — магнитная индукция в ферромагнетике) и  $l = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Это возбуждение при  $l = -1, -2, \dots$  называется циклотронным.

## 2. Инкремент нарастания амплитуд спиновых волн.

Мы рассмотрим здесь простейшую задачу о прохождении скомпенсированного плазменного пучка через ферромагнетик, причем сначала будем пренебрегать тепловым движением частиц в пучке. В этом случае пучок можно характеризовать «гидродинамическими» величинами — плотностью и скоростью каждой из его компонент, в простейшем случае — двух: легкой и тяжелой. До процесса взаимодействия пучка с ферромагнетиком, т. е. в невозмущенном пучке, плотность и скорость имеют одинаковые значения для обеих компонент пучка. Мы будем обозначать их через  $n_0$  и  $\mathbf{v}_0$  и предполагать не зависящими ни от времени, ни от координат. Чтобы это невозмущенное состояние не могло измениться под влиянием постоянного магнитного поля в ферромагнетике, мы будем предполагать, что движение пучка происходит вдоль вектора постоянной составляющей магнитной индукции  $B_0$  в ферромагнетике, т. е.  $\mathbf{v}_0$  параллельна  $B_0$ .

Под влиянием переменных полей, возникающих в результате совместного действия частиц пучка и атомов ферромагнетика, плотность и скорость пучка будут изменяться во времени и в пространстве. Мы будем предполагать, что изменению подвергается только плотность и скорость легкой компоненты пучка, плотность же и скорость тяжелой компоненты будем считать неизменными.

Так, как мы пренебрегаем тепловым движением частиц пучка, то для определения изменения плотности и скорости легкой компоненты пучка, которые мы будем обозначать через  $n(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , можно воспользоваться уравнениями гидродинамики, не содержащими давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{e} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times (B_0 + \mathbf{b})) \right\}, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (14.2.1)$$

где  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{b}$  — переменное электрическое поле и переменная составляющая магнитной индукции, создаваемые частицами легкой компоненты пучка и атомами ферромагнетика ( $e$  и  $m$  — заряд и масса частиц легкой компоненты). Эти величины вместе со связанными с ними переменным магнитным полем  $\mathbf{h}$  и переменной электрической индукцией  $\mathbf{d}$  подчиняются уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{e} (n\mathbf{v} - n_0\mathbf{v}_0) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{d} &= 4\pi e (n - n_0), \\ \operatorname{div} \mathbf{b} &= 0, \end{aligned} \quad (14.2.2)$$

в которые входят переменные составляющие плотности заряда и плотности тока, связанные с легкой компонентой пучка. Векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{h}$  связаны между собой соотношением

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m},$$

где  $\mathbf{m} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0$  — отклонение плотности магнитного момента  $\mathbf{M}$  от равновесного значения, причем  $\mathbf{M}$  подчиняется уравнению движения (5.2.1), наконец,

$$\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e},$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная ферромагнетика.

Наша задача заключается в совместном решении уравнений гидродинамики (14.2.1) и уравнений Максвелла (14.2.2). Эта задача однако слишком сложна, так как и уравнения гидродинамики и уравнения Максвелла содержат нелинейные члены. Мы ограничимся поэтому здесь исследованием только начальной стадии взаимодействия пучка с ферромагнетиком, когда плотность и скорость пучка еще мало отличаются от своих невозмущенных значений. Соответственно этому мы положим

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= n_0 + n_1(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

где  $n_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$  — отклонения плотности и скорости пучка от невозмущенных значений, и будем считать, что  $|n_1| \ll n_0$ ,  $|\mathbf{v}_1| \ll \mathbf{v}_0$ . Уравнения (14.2.1) заменятся при этом

линеаризованными уравнениями гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_1 = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{e} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{b}) + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \right\}, \quad (14.2.3)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_0 \nabla) n_1 = 0,$$

а уравнения (14.2.2) — линеаризованными уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} e (n_1 \mathbf{v}_0 + n_0 \mathbf{v}_1) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}, \quad (14.2.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = 4\pi e n_1,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0.$$

Для исследования полученных линеаризованных уравнений перейдем к компонентам Фурье, считая, что все переменные величины пропорциональны  $e^{-i(\omega t - \mathbf{k}r)}$ . Мы получим тогда следующую систему однородных линейных алгебраических уравнений для компонент Фурье:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{h} = -\frac{4\pi i}{c} e (\mathbf{v}_0 n_1 + n_0 \mathbf{v}_1) - \frac{\omega \varepsilon}{c} \mathbf{e},$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e} = \frac{\omega}{c} \hat{\mu} \mathbf{h}, \quad (14.2.5)$$

$$-i(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_1 = \frac{e}{m} \mathbf{e} + \frac{e}{mc} (\mathbf{v}_0 \times \hat{\mu} \mathbf{h}) + \frac{e}{mc} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0),$$

$$(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0) n_1 - n_0 (\mathbf{k} \mathbf{v}_0) = 0,$$

где  $\hat{\mu}(\mathbf{k}, \omega)$  — тензор магнитной проницаемости (при изучении взаимодействия пучка со спиновыми волнами диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  можно считать не зависящей ни от  $\omega$ , ни от  $\mathbf{k}$ , так как дисперсия диэлектрической проницаемости проявляется при частотах  $\omega \gg g M_0$ ).

Приравняв нулю детерминант этой системы уравнений, мы получим дисперсионное уравнение для определения частот как функций волнового вектора. Корни этого уравнения будут, как мы увидим далее, комплексными, причем некоторые из них будут иметь положительную мнимую часть,  $\operatorname{Im} \omega > 0$ . Соответствующие им решения линеаризованных уравнений гидродинамики и Максвелла будут представлять собой волны с экспоненциально нарастающей со временем

амплитудой  $A_k$ :

$$A_k = A_k(0) e^{\eta_k t},$$

где  $\eta_k = \text{Im } \omega$  (эта величина называется инкрементом нарастания амплитуды колебаний). Наличие таких решений и означает усиление волн в ферромагнетике пучком частиц — как спиновых, так и собственно электромагнитных. Кроме того, оно означает неустойчивость исходного, невозмущенного состояния пучка, ибо произвольные бесконечно малые флуктуации плотности и скорости пучка будут нарастать экспоненциально со временем.

Ясно, что в действительности этот экспоненциальный рост в конце концов прекратится, так как при увеличении  $n_1$  и  $v_1$  начнут действовать не учитываемые нами нелинейные эффекты, которые приведут к возникновению некоторого стационарного состояния, характеризуемого определенными постоянными амплитудами. Мы не будем здесь решать этой нелинейной задачи, а ограничимся, как уже упоминалось выше, только рассмотрением начального этапа взаимодействия пучка с ферромагнетиком, который можно исследовать, пользуясь линейным приближением.

Для определенности будем предполагать, что ферромагнетик обладает магнитной анизотропией типа «легкая ось». В этом случае тензор высокочастотной магнитной восприимчивости определяется формулами (6.1.2), (6.1.3), используя которые и исключая из системы (14.2.5) величины  $e$ ,  $h$ ,  $n_1$ ,  $v_1$  получим следующее дисперсионное уравнение:

$$D(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\Omega_p^2 \omega^2}{\varepsilon(\omega')^2 [(\omega')^2 - \omega_B^2]} G(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (14.2.6)$$

где

$$\begin{aligned} D(\mathbf{k}, \omega) &= \omega^4 (n^2 - \mu) [n_z^2 - \mu (1 - n_\perp^2)] + \omega^4 \mu'^2 (n_\perp^2 - 1), \\ G(\mathbf{k}, \omega) &= \omega^2 (\omega'^2 - \omega_B^2) \{ (\mu'^2 - \mu^2) (1 - n_\perp^2) + \mu n_z^2 (2 - n_\perp^2) - n_z^4 \} + \\ &+ \omega^2 \omega'^2 \left\{ (\mu'^2 - \mu^2) (1 - n_\perp^2) n_\perp^2 \left( \frac{v_0}{c} \right)^2 + \mu n_\perp^2 (1 - n_\perp^2) + \right. \\ &+ \left. n_z^2 n_\perp^2 \mu \left( \frac{v_0}{c} \right)^2 - n_\perp^2 n_z^2 + 2\mu' n_\perp^2 \frac{\omega_B}{\omega} \right\} + \\ &+ \omega^4 \left\{ (\mu'^2 - \mu^2) (2 - n_\perp^2) + \mu (n^2 + n_z^2) - 2\mu' n^2 \frac{\omega_B}{\omega'} \right\}, \\ \Omega_p^2 &= \frac{4\pi n_0 e^2}{m}, \quad \omega' = \omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0, \quad n = \frac{ck}{\omega \sqrt{\varepsilon}}, \quad n_\perp = \sqrt{n^2 - n_z^2}. \end{aligned}$$



(Мы пренебрегли здесь членами, квадратичными относительно плотности пучка  $n_0$ .)

В отсутствие пучка это уравнение переходит в известное уже нам дисперсионное уравнение

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 0,$$

определяющее частоты трех ветвей электромагнитных колебаний в ферромагнетике. Благодаря воздействию поля пучка происходит модификация этих ветвей, определяемая вторым слагаемым в (14.2.6).

Если плотность пучка достаточно мала (мы будем рассматривать далее только этот случай), то его влияние на спектры колебаний будет особенно существенным в тех случаях, когда мала одна из величин  $(\omega')^2$ ,  $(\omega')^2 - \omega_B^2$ , иными словами, если выполняется одно из условий (эти условия должны выполняться с точностью до членов порядка  $\Omega_p$ )

$$\omega_i(\mathbf{k}) \approx k v_0, \quad \omega_i(\mathbf{k}) \approx k v_0 \pm \omega_B, \quad (14.2.7)$$

где индекс  $i$  служит для обозначения ветви колебаний. Первое из этих условий можно интерпретировать в случае малых плотностей пучка как условие резонанса между колебаниями  $i$ -й ветви и ленгмюровскими колебаниями пучка (в системе координат, связанной с пучком, частота этих колебаний равна  $\omega' = \Omega_p / \sqrt{\epsilon}$ ), а второе условие — как условие резонанса между колебаниями  $i$ -й ветви и циклотронными колебаниями пучка.

Интересуясь влиянием пучка только на спектр спиновых волн, мы будем далее понимать под  $\omega_i(\mathbf{k})$  частоту спиновой волны  $\omega_s(\mathbf{k})$ .

Рассмотрим сначала взаимодействие спиновых волн с ленгмюровскими колебаниями пучка. Полагая в (14.2.6)

$$\omega = \omega_s(\mathbf{k}) + \xi(\mathbf{k}), \quad \omega_s(\mathbf{k}) = k v_0$$

и считая, что  $|\xi(\mathbf{k})| \ll \omega_s(\mathbf{k})$ , получим следующее уравнение для определения  $\xi(\mathbf{k})$ :

$$\xi^3(\mathbf{k}) = \frac{\Omega_p^2 \omega_s^2(\mathbf{k})}{\epsilon \omega_B^2} \cdot \frac{G(\mathbf{k}, \omega)}{\frac{\partial}{\partial \omega} D(\mathbf{k}, \omega)} \Bigg|_{\omega = \omega_s(\mathbf{k})}$$

Один из корней этого уравнения вещественен, а два других — имеют мнимые части. Корню с  $\text{Im } \xi(\mathbf{k}) > 0$ , соответствует, очевидно, нарастание амплитуды спиновой волны со

временем по закону

$$A_k = A_k(0) e^{\eta_s(k)t},$$

где  $\eta_s(k) = \text{Im } \xi(k)$ . Эта величина есть инкремент нарастания амплитуды спиновой волны, она равна

$$\eta_s(k) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\Omega_p \omega_s(k)}{\omega_B} \right)^{2/3} \left( \frac{G(k, \omega)}{\varepsilon \frac{\partial}{\partial \omega} D(k, \omega)} \right)^{1/3} \Big|_{\omega = \omega_s(k)}. \quad (14.2.8)$$

Так как  $\Omega_p \sim \sqrt{n_0}$ , то инкремент нарастания амплитуды спиновых волн, удовлетворяющих условию резонанса  $\omega_s(k) = kv_0$ , будет, как уже упоминалось, пропорционален  $n_0^{1/3}$ . Этот результат существенно связан с двумя предположениями: малостью плотности пучка и моноэнергетичностью его частиц.

Замечая, что

$$G(k, \omega_s) = \frac{c^2 k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\omega_s(k)}{\Omega(k)} \right)^2 \omega_B^2, \quad \Omega(k) = g M_0 \left( \alpha k^2 + \beta + \frac{H_0^{(l)}}{M_0} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} D(k, \omega) \Big|_{\omega = \omega_s(k)} = \left( \frac{c^2 k^2}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\omega_s(k)}{\Omega(k)} \cdot \frac{1}{2\pi g M_0 \sin^2 \vartheta_k},$$

представим окончательно инкремент нарастания амплитуды спиновых волн в виде

$$\eta_s(k) = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_s(k) \left\{ \frac{2\pi g M_0 \sin^2 \vartheta_k}{\Omega(k)} \left( \frac{\Omega_p}{ck} \right)^2 \right\}^{1/3}. \quad (14.2.9)$$

Эта формула показывает, что относительный инкремент нарастания особенно велик при малых  $k$ .

Для того чтобы реально могло происходить усиление спиновых волн пучком частиц, необходимо, очевидно, выполнение неравенства

$$\eta_s(k) > \gamma_s(k),$$

где  $\gamma_s(k)$  — декремент затухания спиновой волны.

Величина  $\xi(k)$  наряду с мнимой имеет вещественную часть  $\text{Re } \xi(k) = \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_s(k)$ , которая определяет смещение частоты спиновой волны, обусловленное взаимодействием с пучком. Так как  $\eta_s(k) \ll \omega_s(k)$ , то это смещение несущественно и его можно не учитывать.

Из условия резонанса  $\omega_s(k) = kv_0$  легко найти минимальную скорость, которой должен обладать пучок, чтобы

возбуждать спиновые волны:

$$v_{\min} = 2gM_0 \sqrt{\alpha \left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right)}. \quad (14.2.10)$$

Заметим, что при заданных  $v_0$  и  $\vartheta_k$  условие резонанса может, вообще говоря, выполняться для нескольких значений волнового вектора (число этих значений определяется характером функции  $\omega_s(\mathbf{k})$  при больших  $k$ ,  $k \sim \frac{1}{a}$ ).

Если выполняется неравенство  $v_0 \cos \vartheta_k \gg v_{\min}$ , то будут возбуждаться спиновые волны с частотами, близкими к  $\omega_s(0) = gM_0 \sqrt{\left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right) \left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + 4\pi \sin^2 \vartheta_k \right)}$ , и волновыми векторами  $k = \frac{\omega_s(0)}{v_0 \cos \vartheta_k}$ . Относительный инкремент нарастания амплитуд этих волн равен

$$\frac{\eta_s(0)}{\omega_s(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\pi g M_0}{2\omega_s(0)} \right)^{1/3} \left( \frac{v_0}{c} \frac{\Omega_p}{\omega_s(0)} \right)^{2/3} f(\vartheta_k), \quad (14.2.11)$$

где

$$f(\vartheta_k) = \left\{ \frac{\sin^2 2\vartheta_k}{\left[ 1 + \left( \frac{2\pi g M_0}{\omega_s(0)} \right)^2 \sin^4 \vartheta_k \right]^{1/2} - \frac{2\pi g M_0}{\omega_s(0)} \sin^2 \vartheta_k} \right\}^{1/3}.$$

Эта величина может достигать значения  $\frac{\eta_s}{\omega_s(0)} \sim 10^{-1}$ , если  $\frac{v_0}{c} \sim 10^{-1}$ ,  $n_0 \sim 10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

Так как относительный декремент затухания спиновых волн в достаточно чистых иттриевых ферритах [24] составляет  $10^{-2} - 10^{-3}$ , то они, по-видимому, могут быть использованы для наблюдения эффекта когерентного усиления спиновых волн пучком заряженных частиц. При этом пучок должен быть достаточно монсоэнергетичным, а именно, относительный разброс скоростей должен быть меньше  $\eta_s(0)/\omega_s(0)$ .

Если, кроме неравенства  $v_0 \cos \vartheta_k \gg v_{\min}$ , выполняется еще неравенство  $v_0 \cos \vartheta_k \ll gM_0 \frac{\alpha}{a}$ , то, кроме «длинноволновой» спиновой волны с частотой  $\omega_s(0)$  и волновым вектором  $k = \frac{\omega_s(0)}{v_0 \cos \vartheta_k}$ , могут возбуждаться «коротковолновые» спиновые волны с волновым вектором  $k = \frac{\hbar v_0 \cos \vartheta_k}{\theta_c \cdot a^2}$ . Относи-

тельный инкремент нарастания таких спиновых волн определяется формулой

$$\frac{\eta_s(\mathbf{k})}{\omega_s(\mathbf{k})} = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\pi)^{1/3} \frac{\theta_c}{\mu_0 M_0} \left( \frac{\Omega_p v_0}{g M_0 c} \right)^{2/3} \left( \frac{g M_0 a}{v_0} \right)^2 \left( \frac{\sin \vartheta_k}{\cos^2 \vartheta_k} \right)^{2/3}. \quad (14.2.12)$$

Эта величина значительно меньше относительно инкремента  $\frac{\eta_s(0)}{\omega_s(0)}$  нарастания амплитуд спиновых волн с волновыми векторами  $k \sim \frac{\omega_s(0)}{v_0 \cos \vartheta_k}$ .

Рассмотрим взаимодействие пучка частиц со спиновыми волнами, для которых выполняется условие резонанса \*)

$$\omega_s(\mathbf{k}) = \mathbf{k}v_0 - \omega_B.$$

Полагая

$$\omega = \omega_s(\mathbf{k}) + \xi(\mathbf{k}), \quad |\xi(\mathbf{k})| \ll \omega_s(\mathbf{k}),$$

получим, согласно (14.2.6),

$$\xi^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega_p^2 \omega_s^2(\mathbf{k})}{\epsilon \omega_B^3} \cdot \frac{G(\mathbf{k}, \omega)}{\frac{\partial}{\partial \omega} D(\mathbf{k}, \omega)} \Bigg|_{\omega = \omega_s(\mathbf{k})},$$

откуда легко найти относительный инкремент нарастания амплитуды спиновых волн:

$$\frac{\eta_s(\mathbf{k})}{\omega_s(\mathbf{k})} = \frac{\text{Im } \xi}{\omega_s(\mathbf{k})} = \sqrt{\pi} \frac{\Omega_p}{\omega_s(\mathbf{k})} \left( \frac{g M_0 \Omega(\mathbf{k}) \omega_B}{\omega_s(\mathbf{k}) c^2 k^2} \right)^{1/2} \times \left| \left( 1 + \frac{\omega_s(\mathbf{k})}{\Omega(\mathbf{k})} \right) \cos \vartheta_k + \frac{\mathbf{k}v_0 \omega_s(\mathbf{k})}{\omega_B \Omega(\mathbf{k})} \sin^2 \vartheta_k \right|. \quad (14.2.13)$$

Минимальная скорость частиц пучка в этом случае равна

$$v_{\min} = 2gM_0 \sqrt{\alpha \left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \frac{\omega_B}{gM_0} \right)}. \quad (14.2.14)$$

Если  $v_0 \cos \vartheta_k \gg v_{\min}$ , то будут возбуждаться спиновые волны с частотой  $\omega = \omega_s(0)$  и волновым вектором  $k = \frac{\omega_s(0) + \omega_B}{v_0 \cos \vartheta_k}$ . Относительный инкремент этих волн по

\*) Спиновые волны, для которых выполняется условие резонанса  $\omega_s(\mathbf{k}) = \mathbf{k}v_0 + l\omega_B$ , где  $l \neq -1$ , при движении пучка вдоль направления магнитной индукции  $\mathbf{B}_0$  не усиливаются.

порядку величины равен

$$\frac{\eta_B}{\omega_s(0)} \approx \frac{\Omega_p}{gM_0} \frac{v_0}{c}. \quad (14.2.15)$$

**3. Немоноэнергетический пучок.** В предыдущем разделе мы считали пучок частиц строго моноэнергетичным и описывали его поэтому гидродинамически. В действительности, благодаря тепловому движению частиц в пучке, всегда имеется разброс частиц по скоростям. Это разброс характеризуется величиной  $v_T/v_0$ , где  $v_T = \sqrt{2T_B/\pi m}$  — тепловая скорость частиц в пучке ( $T_B$  — температура пучка) и  $v_0$  — средняя скорость направленного движения частиц в пучке. Разброс по скоростям можно считать малым и не учитывать его, если относительный инкремент нарастания амплитуды спиновых волн значительно больше  $v_T/v_0$ :

$$\frac{\eta_s(k)}{\omega_s(k)} \gg \frac{v_T}{v_0}.$$

При выполнении этого неравенства справедливы результаты предыдущего раздела. Если же выполняется неравенство

$$\frac{v_T}{v_0} > \frac{\eta_s(k)}{\omega_s(k)},$$

то результаты предыдущего раздела становятся неприменимыми, так как в этом случае нельзя пользоваться гидродинамическим описанием пучка и нужно пользоваться кинетическим описанием [23].

Мы не будем здесь подробно исследовать этот случай и отметим лишь, что инкремент нарастания амплитуды спиновой волны при  $\frac{v_T}{v_0} > \frac{\eta_s(k)}{\omega_s(k)}$  будет пропорционален не  $n_0^{1/2}$  или  $n_0^{1/2}$ , как это имело место для моноэнергетического пучка, а невозмущенной плотности пучка  $n_0$  в первой степени. Так как плотность пучка считается малой, то это означает, что немонаэнергетичность пучка приводит к уменьшению инкремента нарастания.

Если  $\frac{v_T}{v_0} \gg \eta_s(k)/\omega_s(k)$ , то декремент затухания спиновой волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  определяется формулой

$$\gamma_s(\mathbf{k}) = \left(\frac{\Omega_p}{ck}\right)^2 \omega_s(\mathbf{k}) \frac{\omega_s^2(\mathbf{k}) + \Omega^2(\mathbf{k}) \cos^2 \vartheta_k}{kv_T \omega_s(\mathbf{k})} \frac{2\pi g M_0}{\Omega(\mathbf{k})} (\mathbf{k}v_{\min} - \mathbf{k}v_0). \quad (14.3.1)$$

где

$$k\mathbf{v}_{\min} = \omega_s(\mathbf{k}) \left\{ 1 + \left( \frac{ck}{\Omega_p} \right)^2 \frac{\Omega(\mathbf{k})}{2\pi g M_0} \frac{k v_T \gamma_s^{(0)}(\mathbf{k})}{\omega_s^2(\mathbf{k}) + \Omega^2(\mathbf{k}) \cos^2 \vartheta_{\mathbf{k}}} \right\}$$

и  $\gamma_s^0(\mathbf{k})$  — декремент затухания спиновой волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  в отсутствие пучка. Мы видим, что декремент затухания обращается в нуль при  $k\mathbf{v}_0 = k\mathbf{v}_{\min}$  и становится отрицательным, если  $k\mathbf{v}_0 > k\mathbf{v}_{\min}$ ; при этом спиновые волны перестают затухать и становятся нарастающими.

Уменьшение декремента затухания при приближении  $\mathbf{v}_0$  к  $\mathbf{v}_{\min}$  ( $v_0 < v_{\min}$ ) приводит к увеличению интенсивности случайных спиновых волн в ферромагнетике.

Можно показать [23], что отношение квадрата амплитуды случайных спиновых волн при наличии пучка к этой же величине в отсутствие пучка равняется по порядку величины

$$\frac{A^2(\mathbf{k})}{A_0^2(\mathbf{k})} \sim \frac{T_B}{\hbar \omega_s(\mathbf{k})} \left( e^{\frac{\hbar \omega_s(\mathbf{k})}{T}} - 1 \right) \frac{\gamma_s^0(\mathbf{k})}{\gamma_s(\mathbf{k})}, \quad (14.3.2)$$

где  $T$  — температура ферромагнетика.

Заметим, что сильное увеличение интенсивности случайных спиновых волн при приближении скорости пучка  $\mathbf{v}_0$  к  $\mathbf{v}_{\min}$  должно приводить к значительному увеличению сечения рассеяния медленных нейтронов, а также электромагнитных волн в ферромагнетике. Это явление аналогично известному явлению критической опалесценции вблизи точек фазового перехода второго рода.

## ГЛАВА IV

### СВЯЗАННЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ

#### § 15. Уравнения теории упругости и уравнение движения магнитного момента в ферромагнетиках

**1. Эффективное магнитное поле и тензор натяжений в упруго деформированном ферромагнетике.** До сих пор мы не учитывали связи между спинами и движением ионов кристаллической решетки. В действительности же такая связь существует, благодаря чему колебания спинов сопровождаются колебаниями ионов, а колебания ионов — колебаниями спинов. Иными словами, спиновые волны в ферромагнетиках и в антиферромагнетиках должны сопровождаться упругими волнами и упругие волны — спиновыми волнами. Выражаясь более точно, можно сказать, что в магнитоупорядоченных кристаллах должны распространяться не чисто магнитные и не чисто упругие, а связанные магнитоупругие волны [1, 2].

Связь между спиновыми и упругими волнами, однако, невелика и практически проявляется только при выполнении определенных условий — условий резонанса (они будут далее подробно исследованы). Если же эти условия не выполняются, то с большой степенью точности можно говорить о раздельном существовании спиновых и упругих волн, которые тем не менее взаимодействуют между собой.

Перейдем к исследованию связанных магнитоупругих волн. Для этого нам необходимо иметь уравнения, определяющие изменение со временем не только плотности магнитного момента ферромагнетика, но и вектора смещения каждого его элемента.

При феноменологическом описании ферромагнетика, которым мы будем пользоваться, естественно предполагать, что эти уравнения имеют «гидродинамический» характер. Иными

словами, характеризуя состояние ферромагнетика магнитным моментом единицы массы  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t)$  и вектором упругого смещения элемента ферромагнетика  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , которые рассматриваются как функции эйлеровых координат  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ , мы предполагаем, что уравнения движения для  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\mathbf{u}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} &\equiv \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial x_i} = g(\boldsymbol{\mu} \times \tilde{\mathbf{H}}) + \frac{1}{\rho} \mathbf{R}, \\ \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} &\equiv \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right) = \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (15.1.1)$$

Здесь  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — скорость элемента ферромагнетика,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i},$$

$\tilde{\mathbf{H}}$  — эффективное магнитное поле,  $\mathbf{f}$  — упругая сила, отнесенная к единице массы ферромагнетика,  $\mathbf{R}$  — релаксационный член и  $\rho$  — плотность ферромагнетика. Величины  $\tilde{\mathbf{H}}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{R}$  мы будем считать зависящими только от  $\mu_i$ ,  $\frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}$ ,  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  и  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ . Иными словами, мы считаем, что состояние ферромагнетика однозначно определяется заданием в начальный момент времени распределения магнитного момента  $\boldsymbol{\mu}$  и векторов смещения  $\mathbf{u}$  и скорости  $\mathbf{v}$ .

Из закона сохранения импульса следует, как известно, что сила  $\mathbf{f}$  может быть представлена в виде

$$f_i = \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k}, \quad (15.1.2)$$

где  $t_{ik}$  — некоторый тензор, который мы будем называть тензором натяжений.

Чтобы иметь полную систему уравнений, к уравнениям (15.1.1) необходимо добавить еще уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0 \quad (15.1.3)$$

и уравнения магнитостатики

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (15.1.4)$$



где  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция, связанная с магнитным моментом  $\boldsymbol{\mu}$  соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = \mathbf{H} + 4\pi\rho\boldsymbol{\mu},$$

и  $\mathbf{j}$  — плотность тока:

$$\mathbf{j} = \sigma \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\}. \quad (15.1.5)$$

(Мы считаем, что источники стороннего магнитного поля отсутствуют, так что  $\mathbf{H}_0^{(e)} = 0$ , и вместо  $\mathbf{H}^{(m)}$  пользуемся обозначением  $\mathbf{H}$ .)

Перейдем к определению величин  $\tilde{H}$ ,  $f$ ,  $R$  [1]. Введем для этого плотность энергии ферромагнетика  $\omega$ . Она складывается из плотности магнитной энергии  $\frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2$ , плотности кинетической энергии движущихся элементов ферромагнетика  $\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2$  и плотности потенциальной энергии ферромагнетика. Последняя является некоторой функцией  $\mu_i$ ,  $\frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}$  и  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ . Отнесенную к единице массы потенциальную энергию ферромагнетика мы будем обозначать через  $F = F\left(\mu_i, \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$ . Таким образом,

$$\omega = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2 + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho F\left(\mu_i, \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right). \quad (15.1.6)$$

Дифференцируя плотность энергии  $\omega$  по времени и используя уравнения (15.1.1), (15.1.3), (15.1.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} = & - \left\{ H_l - \frac{\partial F}{\partial \mu_l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial x_k}} \right) \right\} \rho \frac{d\mu_l}{dt} + \\ & + \left\{ f_l - \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_l - M \frac{\partial H}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial x_k}} \cdot \frac{\partial \mu_l}{\partial x_l} \right) - \right. \\ & - \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_l}{\partial x_k}} b_{ll} \right) \right\} v_l - \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 v_k + \right. \\ & + \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \times \mathbf{E})_k + \mathbf{H} M v_k - F \rho v_k + \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial x_k}} \frac{\partial \mu_l}{\partial t} + \\ & \left. + \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_l}{\partial x_k}} b_{ll} v_l \right\}, \quad (15.1.7) \end{aligned}$$

где  $b_{ll} = \delta_{ll} - \frac{\partial u_l}{\partial x_l}$ .

Предположим сначала, что не происходит диссипации энергии, т. е.  $R=0$ ,  $j=0$ . В этом случае упругая сила, которую мы будем обозначать через  $f^{(0)}$ , не должна зависеть от  $\partial v_i / \partial x_k$ , и изменение плотности энергии со временем должно сводиться к пространственной дивергенции от плотности потока энергии  $\Pi^{(0)}$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \Pi^{(0)} = 0.$$

Поэтому мы должны считать выражение в фигурных скобках, стоящее перед  $v_i$ , равным нулю. Это приводит к следующему выражению для силы  $f^{(0)}$  в отсутствие диссипации энергии:

$$f_i^{(0)} = M \frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \frac{\partial F}{\partial u_i} b_{ik} - \rho \frac{\partial F}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} \right). \quad (15.1.8)$$

Кроме того, мы должны считать выражение, стоящее перед  $-\rho \frac{d\mu}{dt}$ , равным  $\tilde{H}$ , что приводит к следующему выражению для эффективного магнитного поля:

$$\tilde{H}_i = H_i - \frac{\partial F}{\partial \mu_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \frac{\partial F}{\partial \mu_i} \right). \quad (15.1.9)$$

Отсюда, в соответствии с (15.1.7), следует, что плотность потока энергии  $\Pi^{(0)}$  равна

$$\begin{aligned} \Pi_k^{(0)} = & \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_k - \rho \frac{\partial F}{\partial \mu_i} \cdot \frac{\partial \mu_i}{\partial t} + \\ & + v_i \left\{ \delta_{ik} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho F - \mathbf{H}\mathbf{M} \right) - \rho \frac{\partial F}{\partial u_i} b_{ik} \right\}. \end{aligned} \quad (15.1.10)$$

Замечая, что в приближении магнитостатики (при  $\sigma=0$ )

$$M \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{1}{4\pi} \left( H_i B_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik} \right),$$

можно представить  $f_i^{(0)}$  в виде

$$f_i^{(0)} = \frac{\partial t_{ik}^{(0)}}{\partial x_k},$$

где

$$t_{lk}^{(0)} = t_{lk}^{(u)} + t_{lk}^{(m)},$$

$$t_{lk}^{(u)} = \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_l}{\partial x_k}} b_{ll} - \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial x_k}} \frac{\partial \mu_l}{\partial x_l},$$

$$t_{lk}^{(m)} = \frac{1}{4\pi} \left( H_l B_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{lk} \right).$$
(15.1.11)

Формулы (15.1.9), (15.1.10), (15.1.11) справедливы в отсутствие диссипации энергии ( $\mathbf{j} = 0$ ,  $\mathbf{R} = 0$ ).

При наличии диссипации энергии тензор натяжений будет отличаться от  $t_{lk}^{(0)}$ ; мы запишем его в виде

$$t_{lk} = t_{lk}^{(0)} + t'_{lk},$$
(15.1.12)

где  $t_{lk}^{(0)}$  определяется формулой (15.1.11), а  $t'_{lk}$  представляет собой некоторый тензор, связанный с диссипацией энергии.

Чтобы определить диссипацию энергии, воспользуемся формулой (15.1.7)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_l^{(0)}}{\partial x_l} = -\rho \tilde{H} \frac{d\mu}{dt} + \mathbf{v} \left( \mathbf{f} - \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \mathbf{f}^{(0)} \right) - \frac{j^2}{\sigma},$$
(15.1.13)

где  $\mathbf{f}^{(0)}$ ,  $\tilde{H}$  и  $\Pi^{(0)}$  определяются формулами (15.1.8), (15.1.9), (15.1.10). Замечая, что в силу уравнений (15.1.4) и формул (15.1.8), (15.1.11) при  $\sigma \neq 0$  имеет место равенство

$$f_l^{(0)} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_l = \frac{\partial}{\partial x_k} t_{lk}^{(0)},$$

и учитывая (15.1.13), получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} = -q,$$
(15.1.14)

где

$$\Pi_l = \Pi_l^{(0)} + v_{rl} t'_{rl}$$
(15.1.15)

и

$$q = \frac{j^2}{\sigma} + R\tilde{H} + t'_{lk} \frac{\partial v_l}{\partial x_k}.$$

Вектор  $\Pi$  представляет собой плотность потока энергии при наличии диссипации, а  $q$  — количество тепла, выделяющееся в единицу времени в единице объема ферромагнетика.

(Здесь не учитывается процесс теплопроводности, который мы рассмотрим позже.) Ясно, что величины  $t'_{ik}$  и  $R_i$  должны быть такими, чтобы выделяющееся тепло  $q$  было положительным  $q \geq 0$ .

## 2. Плотность потенциальной энергии ферромагнетика.

До сих пор мы считали, что плотность потенциальной энергии ферромагнетика является произвольной функцией  $\mu_i$ ,  $\partial\mu_i/\partial x_k$ ,  $\partial u_i/\partial x_k$ . В действительности, однако, эти величины могут входить не произвольным образом, а только в виде определенных комбинаций, обеспечивающих инвариантность функции  $F$  относительно произвольных вращений ферромагнетика, при которых происходит поворот как решетки, так и магнитного момента [3].

Чтобы определить эти комбинации или, как мы будем их называть, инварианты, удобно ввести наряду с эйлеровыми координатами лагранжевы координаты  $\xi$ , связанные с эйлеровыми координатами соотношением

$$r = \xi + u(\xi, t), \quad (15.2.1)$$

где вектор смещения  $u$  рассматривается как функция  $\xi$  и  $t$ .

При повороте тела преобразовываются проекции магнитного момента ферромагнетика  $\mu_k$  и эйлеровы координаты  $x_k$ , соответствующие положениям точек тела в деформированном состоянии, лагранжевы же координаты  $\xi_k$ , служащие для того, чтобы «нумеровать» отдельные элементы ферромагнетика, остаются неизменными.

Нам нужно составить инвариантные комбинации переменных  $\mu_i$ ,  $\frac{\partial\mu_i}{\partial x_k}$  и  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ , или, что то же самое, переменных  $\mu_i$ ,  $\frac{\partial\mu_i}{\partial \xi_k}$ ,  $\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}$ . В последних векторным индексом является только индекс  $i$  (индекс  $k$ , связанный с лагранжевыми координатами можно не учитывать, так как эти координаты не подвергаются вращению). Поэтому задача состоит в том, чтобы построить все независимые инварианты с помощью трех векторов  $\mu_i$ ,  $\mu'_i = \frac{\partial\mu_i}{\partial \xi_k}$ ,  $x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}$ .

Можно показать, что число таких инвариантов равно 18 и что в качестве них могут быть взяты инварианты

$$I_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}, \quad K_i = \mu_k \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}, \quad K_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_j}. \quad (15.2.2)$$

Другие инварианты, например:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \mu_k \mu_k, \quad G_{ij} = \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_j}, \quad Q_i = \mu_k \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_i}, \\ C &= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmr} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_r}, \quad W_{lm} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial \mu_j}{\partial \xi_m} \mu_k, \\ G &= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \frac{\partial \mu_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial \mu_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_n}, \quad P_{rn} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmr} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_r}, \\ Q_{rn} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmr} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial \mu_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_n}, \quad T_n = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_m} \mu_k, \\ P_r &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmr} \frac{\partial \mu_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial \mu_j}{\partial \xi_m} \mu_k, \end{aligned}$$

могут быть выражены через инварианты  $I_{ij}$ ,  $K_i$ ,  $K_{ij}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \mu^2 &= K_i I_{ir}^{-1} K_i, \quad G_{lm} = K_{mn} I_{nr}^{-1} K_{rl}, \quad C^2 = \det I_{ij}, \\ G &= \frac{1}{C} \det K_{ij}, \quad P_{rn} = C I_{rm}^{-1} K_{nm}, \quad T_r = C I_{rs}^{-1} K_s, \\ Q_{rn} &= \frac{1}{2C} \varepsilon_{tkl} \varepsilon_{lmr} I_{lt} K_{mk} K_{ns}, \quad W_{lm} = \frac{1}{C} \varepsilon_{nst} I_{ln} K_{ms} K_t, \\ P_r &= \frac{1}{2C} \varepsilon_{kst} \varepsilon_{lmr} K_{lk} K_{ms} K_t. \end{aligned}$$

Таким образом, ограничения, связанные с инвариантностью функции  $F$  относительно вращений, сводятся к тому, что  $F$  является не произвольной функцией переменных  $\mu_i$ ,  $\frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}$ ,  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  (число их равно 21), а функцией только 18 инвариантов  $I_{ij}$ ,  $K_i$ ,  $K_{ij}$

$$F = F(I_{ij}, K_i, K_{ij}). \quad (15.2.3)$$

Так как инварианты  $I_{ij}$ ,  $K_i$ ,  $K_{ij}$  содержат производные от  $\mu_k$  и  $x_k$  по лагранжевым переменным  $\xi_i$ , то мы приведем здесь выражения для эффективного магнитного поля  $\tilde{H}$  и тензора натяжений  $t_{ik}^{(u)}$  в лагранжевых переменных.

Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} &= \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_s}{\partial \xi_p}} \frac{\partial x_s}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_p} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_s}{\partial \xi_p}} \frac{\partial \mu_s}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_p}, \\ \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}} &= \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_i}{\partial \xi_p}} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_p}, \end{aligned} \quad (15.2.4)$$

получим из (15.1.11), (15.1.9)

$$t_{lk}^{(u)} = \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_l}{\partial \xi_m}} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_m},$$

$$\tilde{H}_l = H_l^{(l)} - \frac{\partial F}{\partial \mu_l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_m}} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_m} \right). \quad (15.2.5)$$

**3. Граничные условия.** Сформулируем условия, которые должны удовлетворяться на границе ферромагнетика с вакуумом.

Рассмотрим прежде всего граничные условия для магнитного и электрического полей. Из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  следует непрерывность нормальной компоненты вектора магнитной индукции на поверхности ферромагнетика  $S$ :

$$\mathbf{v} \mathbf{B}_+ = \mathbf{v} \mathbf{B}_-, \quad (15.3.1)$$

где индексы плюс и минус здесь и в дальнейшем служат для обозначения полей внутри и вне ферромагнетика вблизи его поверхности и  $\mathbf{v}$  — единичный вектор нормали к поверхности.

Граничные условия для тангенциальных компонент поля проще всего получить путем перехода от неподвижной системы отсчета  $K$  к системе отсчета  $K'$ , движущейся вместе с данным элементом поверхности тела, скорость которой (направленную вдоль нормали  $\mathbf{v}$ ) обозначим через  $v_v$ . В системе  $K'$  справедливы обычные граничные условия — непрерывность тангенциальных составляющих  $E'_\tau$  и  $H'_\tau$ . Согласно релятивистским формулам преобразования эти требования эквивалентны условию непрерывности тангенциальных компонент векторов  $\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ,  $\mathbf{H} - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{D}) \approx \mathbf{H}$  (приближение магнитостатики формально соответствует тому, что  $\mathbf{D} = 0$ ).

Взяв проекции этих векторов на плоскость, перпендикулярную к  $\mathbf{v}$ , получим искомые граничные условия

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = \frac{v_v}{c} (\mathbf{B}_+ - \mathbf{H}_-),$$

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = 0. \quad (15.3.2)$$

Покажем далее, что тензор натяжений  $t_{ik}$  удовлетворяет граничному условию

$$t_{ik} v_k |_S = t_{ik}^{(e)} v_k |_S, \quad (15.3.3)$$

где  $t_{ik}^{(e)}$  — тензор натяжений электромагнитного поля вне ферромагнетика

$$t_{ik}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \left( H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik} \right) \quad (15.3.4)$$

и  $H$  — магнитное поле вне ферромагнетика. Введем для этого импульс ферромагнетика

$$P_i = \int \rho v_i dr$$

(в приближении магнитостатики можно не учитывать импульсы электромагнитного поля внутри ферромагнетика). Изменение импульса в единицу времени должно равняться силе, действующей на ферромагнетик со стороны электромагнитного поля вне ферромагнетика, т. е.

$$\frac{dP_i}{dt} = \int_S t_{ik}^{(e)} dS_k.$$

С другой стороны,

$$\frac{dP_i}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho v_i dr + \int_S \rho v_i v_k dS_k.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = \rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_e} \rho v_e v_i,$$

и используя уравнения упругости (15.1.1), (15.1.2), получим

$$\int_S t_{ik}^{(e)} dS_k = \int_S t_{ik} dS_k,$$

откуда и следует соотношение (15.3.3).

Используем, наконец, непрерывность нормальной составляющей плотности потока энергии на границе ферромагнетика:

$$\mathbf{S}^+ \mathbf{v} = \mathbf{S}^- \mathbf{v}, \quad (15.3.5)$$

где  $\mathbf{S}^+$  и  $\mathbf{S}^-$  — плотности потока энергии вблизи границы внутри и вне ферромагнетика. Эти величины должны быть определены с учетом движения границы ферромагнетика. Поэтому, если  $\Pi$  — плотность потока через неподвижную поверхность внутри ферромагнетика (она определяется формулой (15.1.15)), то плотность потока  $\mathbf{S}^+$  через подвижную

границу ферромагнетика будет иметь вид

$$S_k^+ = \Pi_k - v_k \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho F + \frac{H_+^2}{8\pi} \right) \quad (15.3.6)$$

(второе слагаемое в этом выражении представляет собой плотность потока энергии, обусловленную движением поверхности тела). Аналогично

$$S_k^- = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_- \times \mathbf{H}_-)_k - v_k \frac{H_-^2}{8\pi}, \quad (15.3.7)$$

где второе слагаемое, так же как и второе слагаемое в формуле для  $S^+$ , представляет собой поток энергии, обусловленный движением поверхности тела.

Используя соотношения (15.1.10), (15.1.15), (15.1.11), (15.1.12), можно представить  $S^+ \mathbf{v}$  в виде

$$S^+ \mathbf{v} = -v_l t_{lk} v_k + \frac{c}{4\pi} \mathbf{v} [E_+, H_+] + \\ + v_l \left\{ t_{lk} v_k - v_l \left( H_+ M + \frac{H_+^2}{8\pi} \right) \right\} - \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}} v_k \frac{d\mu_i}{dt}.$$

Подставляя сюда выражение (15.1.11) для  $t_{lk}$ , получим

$$S^+ \mathbf{v} = -v_l t_{lk} v_k + (H_+)_\tau \left\{ \frac{c}{4\pi} (\mathbf{v} \times (\mathbf{E}_+)_\tau) - \frac{1}{4\pi} v_\nu (B_+)_\tau \right\} + \\ + \frac{1}{4\pi} B_\nu v_\tau (H_+)_\tau - \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}} v_k \frac{d\mu_i}{dt}.$$

Используя (15.3.4), можно представить  $S^- \mathbf{v}$  в виде

$$S^- \mathbf{v} = -v_l t_{lk}^{(e)} v_k + (H_-)_\tau \left\{ \frac{c}{4\pi} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_-)_\tau - \frac{1}{4\pi} v_\nu (H_-)_\tau \right\} + \\ + \frac{1}{4\pi} (H_-)_\nu v_\tau (H_-)_\tau.$$

Сравнивая это выражение с выражением для  $S^+ \mathbf{v}$  и используя граничные условия (15.3.2), (15.3.3), получим

$$v_k \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}} \Big|_S = 0. \quad (15.3.8)$$

Заметим, что при учете теплопроводности непрерывность нормальной составляющей плотности потока энергии также будет выполняться, так как температура удовлетворяет



граничному условию

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} v_k \Big|_S = 0. \quad (15.3.9)$$

(Мы пренебрегаем процессом лучеиспускания; при учете последнего необходимо учитывать также наличие дополнительного теплового потока электромагнитной энергии вне и внутри тела.)

**4. Следствия из закона сохранения момента количества движения.** Для учета диссипации энергии мы ввели чисто формально в уравнения движения тензор  $t'_{ik}$  и релаксационный член  $R_i$ . Покажем теперь, что между этими величинами существует определенная связь, вытекающая из закона сохранения момента количества движения [3, 4].

В обычной теории упругости плотность момента количества движения равна, как известно,  $\rho \varepsilon_{ikl} x_k v_l$ . В ферромагнетике к этому выражению должна быть добавлена плотность спинового момента количества движения  $\frac{1}{g} \rho \mu_i$ . Поэтому момент количества движения ферромагнетика определяется формулой

$$J = \int \rho \left\{ (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{g} \boldsymbol{\mu} \right\} d\mathbf{r} \quad (15.4.1)$$

(мы не учитываем здесь момента количества движения электромагнитного поля, так как пользуемся магнитостатическим приближением). Продифференцируем это выражение по времени:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_i}{dt} = & \int \left\{ \varepsilon_{ikl} x_k v_l + \frac{1}{g} \mu_i \right\} \rho v_n dS_n + \\ & + \int \left\{ \varepsilon_{ikl} x_k \frac{\partial}{\partial t} \rho v_l + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \rho \mu_i \right\} d\mathbf{r} \end{aligned}$$

(первое слагаемое определяет изменение  $J_i$ , обусловленное изменением поверхности тела со временем). Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_l &= \rho \frac{dv_l}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k v_l), \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho \mu_i &= \rho \frac{d\mu_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \mu_i v_k) \end{aligned}$$

и учитывая уравнения упругости (15.1.1), (15.1.2), получим

$$\frac{dJ_i}{dt} = \int \varepsilon_{ikl} x_k t'_{lj} dS_j + \int \left\{ -\varepsilon_{ikl} t'_{lk} + \frac{1}{g} \rho \frac{d\mu_i}{dt} \right\} d\mathbf{r}, \quad (15.4.2)$$

В силу закона сохранения момента количества движения объемный интеграл в этом выражении должен обращаться в нуль, т. е.

$$\int \left\{ \varepsilon_{ikl} t_{lk} - \rho (\mathbf{u} \times \tilde{\mathbf{H}})_i - \frac{1}{g} R_l \right\} dr = 0. \quad (15.4.3)$$

(Мы использовали здесь уравнение движения магнитного момента.) Поверхностный же интеграл, в соответствии с (15.3.3), представляет собой момент сил, действующих на тело со стороны электромагнитного поля вне тела:

$$\frac{dJ_i}{dt} = \int \varepsilon_{ikl} x_k t_{lj}^{(e)} dS_j.$$

Тензор  $t_{lk}$  содержит, как видно из формулы (15.1.11), только первые производные магнитного момента  $\mu$  по координатам, а эффективное магнитное поле  $\tilde{\mathbf{H}}$  содержит также и вторые производные  $\frac{\partial^2 \mu_i}{\partial x_j \partial x_k}$ . Поэтому, используя граничное условие (15.3.8), можно переписать уравнение (15.4.3) в виде

$$\int \left\{ \varepsilon_{ikl} t_{lk} + \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mu_k}{\partial x_s} \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial x_s}} - \rho \left[ \mathbf{u} \times \left( \mathbf{H} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \right) \right]_i - \frac{1}{g} R_l \right\} dr = 0,$$

откуда

$$\varepsilon_{ikl} t_{lk} = \rho \varepsilon_{ikl} \mu_k \left( H_l - \frac{\partial F}{\partial \mu_l} \right) - \rho \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mu_k}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial x_j}} + \frac{1}{g} R_l. \quad (15.4.4)$$

Это соотношение заменяет в случае ферромагнетиков соотношение симметрии  $t_{lk} = t_{kl}$  для тензора натяжений в обычной теории упругости [3, 4].

Если бы диссипация энергии отсутствовала, то соотношение (15.4.4) имело бы вид

$$\varepsilon_{ikl} t_{lk}^{(0)} = \rho \varepsilon_{ikl} \mu_k \left( H_l - \frac{\partial F}{\partial \mu_l} \right) - \rho \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mu_k}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial x_j}}. \quad (15.4.5)$$

Легко, однако, убедиться, что последнее соотношение справедливо и при наличии диссипации энергии. Действительно, замечая, что  $t_{lk}^{(0)} = t_{lk}^{(u)} + t_{lk}^{(m)}$ , и используя выражение (15.1.11)

для  $t_{lk}^{(m)}$ , перепишем (15.4.5) в виде

$$\varepsilon_{ikl} t_{lk}^{(u)} = -\rho \varepsilon_{ikl} \mu_k \frac{\partial F}{\partial \mu_l} - \rho \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \mu_k}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial x_j}}.$$

Учитывая далее формулы (15.2.4), (15.2.5), можно преобразовать это соотношение к виду

$$\varepsilon_{ikl} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_m}} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_m} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_m}} \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_m} + \mu_k \frac{\partial F}{\partial \mu_l} \right\} = 0. \quad (15.4.6)$$

Но  $F$  является не произвольной функцией величин  $\frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_k}$ ,  $\mu_l$ ,  $\frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_k}$ , а функцией инвариантов  $I_{ij}$ ,  $K_i$ ,  $K_{ij}$ , построенных из этих величин. Поэтому, как легко проверить, это соотношение удовлетворится тождественно.

Вспоминая, что  $t_{lk} = t_{lk}^{(0)} + t'_{lk}$ , получим из (15.4.4), (15.4.5)

$$R_i = g \varepsilon_{ikl} t'_{lk}. \quad (15.4.7)$$

Это важное соотношение, связывающее между собой диссипативные члены  $R_i$  и  $t'_{lk}$ , является, как мы видим, следствием закона сохранения момента количества движения.

Разлагая тензор  $t'_{lk}$  на симметричную и антисимметричную части:

$$t'_{lk} = t_{lk}^{(s)} + t_{lk}^{(a)}, \quad (15.4.8)$$

представим, согласно (15.4.7), выражение (15.1.15) для количества выделяемого тепла  $q$  в виде

$$q = \frac{J^2}{\sigma} + R \left( \tilde{H} + \frac{1}{2g} \operatorname{rot} \mathbf{v} \right) + t_{lk}^{(s)} \frac{\partial v_l}{\partial x_k}. \quad (15.4.9)$$

Это выражение должно быть положительным при произвольных значениях  $\tilde{H}_i$  и  $\frac{\partial v_l}{\partial x_k}$ . Поэтому мы можем положить

$$R_i = r_{ik} \left( \tilde{H}_k + \frac{1}{2g} \operatorname{rot}_k \mathbf{v} \right),$$

$$t_{lk}^{(s)} = \eta_{lk; sp} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_s}{\partial x_p} + \frac{\partial v_p}{\partial x_s} \right), \quad (15.4.10)$$

где величины  $r_{ik}$ ,  $\eta_{lk; sp}$  представляют собой положительно определенные тензоры, т. е. тензоры, для которых

$$r_{ik}x_i x_k > 0, \quad \eta_{lk; sp}y_{lk}y_{sp} > 0$$

при произвольных значениях  $x_i$  и  $y_{lk}$ , отличных от нуля.

Таким образом, формула (15.4.9) принимает вид

$$q = \frac{1}{\sigma} j^2 + r_{ik} \left( \tilde{H}_i + \frac{1}{2g} \text{rot}_i \mathbf{v} \right) \left( \tilde{H}_k + \frac{1}{2g} \text{rot}_k \mathbf{v} \right) + \\ + \eta_{lk; sp} \frac{\partial v_s}{\partial x_p} \frac{\partial v_l}{\partial x_k}. \quad (15.4.11)$$

**5. Изменение энтропии деформированного ферромагнетика.** В формуле (15.1.14), так же как и во всех предыдущих формулах, не учитывалось изменение энтропии ферромагнетика. Между тем плотность энергии зависит от энтропии, поэтому под  $\partial w / \partial t$  следует понимать производную от плотности энергии по времени при постоянной энтропии единицы массы  $s$ , и, следовательно, уравнение (15.1.14) правильно записывать в виде

$$\left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_s + \frac{\partial \Pi_k}{\partial x_k} = -q,$$

где

$$\left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_s = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

С другой стороны, в силу закона сохранения энергии

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Pi_k - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = 0, \quad (15.5.1)$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Поэтому

$$-\rho T \frac{ds}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = -q$$

(мы учли, что  $\frac{\partial w}{\partial s} = \rho T$ ). Используя далее уравнение непрерывности, получим окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho s v_k - \frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \kappa \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{q}{T}. \quad (15.5.2)$$

Величина  $\rho s v_k - \frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k}$  представляет собой плотность потока энтропии, а правая часть равенства — плотность источников энтропии.

**6. Основные уравнения.** Выпишем для удобства основные уравнения, определяющие изменение со временем

различных величин, характеризующих упруго деформированный ферромагнетик.

Уравнение движения магнитного момента единицы массы ферромагнетика имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = g(\boldsymbol{\mu} \times \tilde{\mathbf{H}}) + \frac{1}{\rho} \mathbf{R}, \quad (15.6.1)$$

где эффективное магнитное поле  $\mathbf{H}$  и релаксационный член  $\mathbf{R}$  определяются формулами

$$\tilde{H}_j = H_j - \frac{\partial F}{\partial \mu_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_j}{\partial x_k}} \right), \quad (15.6.2)$$

$$R_j = r_{jk} \left( \tilde{H}_k + \frac{1}{2g} \text{rot}_k \boldsymbol{\nu} \right).$$

Уравнение движения для вектора смещения и уравнение непрерывности имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 u_l}{dt^2} &= \frac{\partial t_{lk}}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \boldsymbol{\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (15.6.3)$$

где тензор натяжений  $t_{ik}$ , складывающийся из бездиссипативной  $t_{ik}^{(0)}$  и диссипативной  $t'_{ik}$  частей, определяется формулами

$$\begin{aligned} t_{ik} &= t_{ik}^{(0)} + t'_{ik}, \quad t_{ik}^{(0)} = t_{ik}^{(u)} + t_{ik}^{(m)}, \\ t_{ik}^{(u)} &= \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u_l}{\partial x_k}} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mu_l}{\partial x_k}} \frac{\partial \mu_l}{\partial x_i}, \\ t_{ik}^{(m)} &= \frac{1}{4\pi} \left( H_i B_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik} \right), \\ t'_{ik} &= \frac{1}{2} \eta_{ik; sp} \left( \frac{\partial v_s}{\partial x_p} + \frac{\partial v_p}{\partial x_s} \right) + \frac{1}{2g} \varepsilon_{ikl} R_l. \end{aligned} \quad (15.6.4)$$

Уравнения магнитостатики имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div} \mathbf{D} &= 0, \end{aligned} \quad (15.6.5)$$

где  $j$  — плотность тока,

$$\mathbf{j} = \sigma \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\}. \quad (15.6.6)$$

Наконец, уравнение, определяющее изменение энтропии единицы массы, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho s v_k - \frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \kappa \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{q}{T}, \quad (15.6.7)$$

где  $q$  — количество тепла, выделяемое в единице объема ферромагнетика,

$$q = \frac{j^2}{\sigma} + r_{ik} \left( \tilde{H}_i + \frac{1}{2g} \text{rot}_i \mathbf{v} \right) \left( \tilde{H}_k + \frac{1}{2g} \text{rot}_k \mathbf{v} \right) + \eta_{ls; pk} \frac{\partial v_s}{\partial x_l} \frac{\partial v_k}{\partial x_p}. \quad (15.6.8)$$

**7. Случай малых неоднородностей.** В заключение этого параграфа приведем выражения для плотности потенциальной энергии ферромагнетика, тензора натяжений и эффективного магнитного поля в случае малых градиентов плотности магнитного момента и вектора упругого смещения.

Записав инварианты  $I_{ij}$ ,  $K_i$ ,  $K_{ij}$  в виде

$$I_{ij} = \delta_{ij} + 2u_{ij}, \quad K_i = \mu_i + \mu_k \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i}, \quad K_{ij} = \frac{\partial \mu_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j},$$

где  $u_{ij}$  — тензор деформаций в лагранжевых переменных

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right),$$

разложим функцию  $F(I_{ij}, K_i, K_{ij})$  в ряд по степеням  $u_{ij}$  и  $K_{ij}$ , ограничиваясь членами до второго порядка включительно:

$$F = a + 2\lambda_{lm} u_{lm} + 2\beta_{lm; l'm'} u_{lm} K_{l'm'} + \gamma_{lm} K_{lm} + \frac{1}{2} \lambda_{lm; l'm'} u_{lm} u_{l'm'} + \frac{1}{2} \gamma_{lm; l'm'} K_{lm} K_{l'm'}. \quad (15.7.1)$$

Здесь  $a$ ,  $\lambda_{lm}$ ,  $\beta_{lm; l'm'}$ ,  $\gamma_{lm}$ ,  $\lambda_{lm; l'm'}$ ,  $\gamma_{lm; l'm'}$  — некоторые функции инвариантов  $K_i$ , причем, очевидно, в функциях  $\beta_{lm; l'm'}$ ,  $\lambda_{lm; l'm'}$ ,  $\gamma_{lm; l'm'}$  можно заменить  $K_i$  на  $\mu_i$ . Что же касается функций  $a(K_i)$ ,  $\lambda_{lm}(K_i)$ ,  $\gamma_{lm}(K_i)$ , то они должны быть разложены в ряд по степеням  $\mu_k \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i}$  вплоть до членов

второго порядка:

$$a(K_i) = a(\mu_i) + \frac{\partial a}{\partial \mu_s} \mu_k \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \mu_s \partial \mu_\rho} \mu_k \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_s} \mu_l \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_\rho},$$

$$\lambda_{lm}(K_i) = \lambda_{lm}(\mu_i) + \frac{\partial \lambda_{lm}}{\partial \mu_k} \mu_s \frac{\partial \mu_s}{\partial \xi_k}, \quad (15.7.2)$$

$$\gamma_{lm}(K_i) = \gamma_{lm}(\mu_i) + \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial \mu_k} \mu_s \frac{\partial \mu_s}{\partial \xi_k}.$$

Подставляя эти разложения в (15.7.1), получим окончательно

$$F = \frac{1}{2} \gamma_{lm; l'm'} \frac{\partial \mu_m}{\partial \xi_l} \frac{\partial \mu_{m'}}{\partial \xi_{l'}} + \left\{ \frac{1}{2} \lambda_{lm; l'm'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \mu_m \partial \mu_{m'}} \mu_l \mu_{l'} + \lambda_{mm'} \delta_{ll'} + 2 \frac{\partial \lambda_{lm}}{\partial \mu_{m'}} \mu_{l'} \right\} \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_m} \frac{\partial \mu_{l'}}{\partial \xi_{m'}} + \left\{ 2 \lambda_{lm} + \frac{\partial a}{\partial \mu_m} \mu_l \right\} \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_m} + \gamma_{lm} \frac{\partial \mu_m}{\partial \xi_l} + a + \left\{ \gamma_{ls} \delta_{km} + \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial \mu_s} \mu_k + 2 \beta_{ks; lm} \right\} \frac{\partial \mu_k}{\partial \xi_s} \frac{\partial \mu_m}{\partial \xi_l}. \quad (15.7.3)$$

Здесь величины  $\gamma_{lm; l'm'}$ ,  $\lambda_{lm; l'm'}$ ,  $\lambda_{lm}$ ,  $\gamma_{lm}$ ,  $\beta_{ks; lm}$ ,  $a$ , являются произвольными функциями  $\mu_l$ , ограниченными только соотношениями симметрии:

$$\gamma_{lm; l'm'} = \gamma_{l'm'; lm'}, \quad \lambda_{lm; l'm'} = \lambda_{l'm'; lm} = \lambda_{m'l'; lm'},$$

$$\lambda_{lm} = \lambda_{ml}, \quad \beta_{ks; lm} = \beta_{sk; lm}. \quad (15.7.4)$$

Заметим, что величины  $\gamma_{lm; l'm'}$  и  $a$  связаны с величинами  $\alpha_{lm; l'm'}$  и  $\omega_a$ , введенными в § 3, соотношениями

$$\gamma_{lm; l'm'} = \rho_0 \alpha_{lm; l'm'}, \quad a = \frac{1}{\rho_0} \omega_a,$$

где  $\rho_0$  — плотность ферромагнетика в отсутствие деформаций, а величина  $\gamma_{lm}$  совпадает с величиной  $\gamma_{lm}$ , введенной в § 3.

Как видно из (15.7.3), плотность потенциальной энергии ферромагнетика содержит как члены, зависящие только от плотности магнитного момента и только от градиента вектора смещения, так и члены смешанного типа, зависящие и от плотности магнитного момента и от градиента вектора смещения. Последние члены и обуславливают связь между спиновыми и упругими волнами в ферромагнетике.

Величина  $\frac{1}{\rho} a(\mu)$  в выражении для  $F$  представляет собой плотность энергии однородно намагниченного ферромагнетика, т. е. плотность энергии анизотропии. Обратим внимание на то, что эта величина входит в потенциальную энергию ферро-

магнетика также и в виде первой и второй производных по плотности магнитного момента. Благодаря этому возникает дополнительное слагаемое в плотности магнитоэластической энергии (слагаемое  $\frac{\partial a}{\partial \mu_m} \mu_l \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_m}$ ) и в плотности упругой энергии (слагаемое  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \mu_m \partial \mu_{m'}} \mu_l \mu_{l'} \cdot \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_m} \cdot \frac{\partial \mu_{l'}}{\partial \xi_{m'}}$ ). Иными словами, энергия магнитной анизотропии приводит к дополнительной магнитоэластичности и к дополнительному изменению модулей упругости. Важно подчеркнуть, что эти изменения не могут быть сведены к переопределению величин  $\lambda_{lm}$  и  $\lambda_{lm}; l'm'$ , так как при этом нарушались бы свойства симметрии (15.7.4).

Отметим также, что в плотность потенциальной энергии ферромагнетика вектор смещения входит в виде  $\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}$ , а не в виде симметричного тензора деформации  $u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}$ , как это имеет место в обычной теории упругости. Это связано с тем, что в инварианты, определяющие плотность потенциальной энергии ферромагнетика, наряду с градиентом вектора смещения входит плотность магнитного момента.

Используя формулы (15.7.3), (15.6.2) и (15.6.4), можно найти эффективное магнитное поле  $\tilde{H}$  и тензор натяжений  $t_{lk}^{(u)}$  в случае малых градиентов магнитного момента и вектора смещений:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_s = & H_s - \frac{\partial a}{\partial \mu_s} - \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial \mu_s} \frac{\partial \mu_m}{\partial \xi_l} - \\ & - \left( 2 \frac{\partial \lambda_{lm}}{\partial \mu_s} + \frac{\partial^2 a}{\partial \mu_m \partial \mu_s} \mu_l + \delta_{ls} \frac{\partial a}{\partial \mu_m} \right) \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_m} + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \rho \left\{ \gamma_{ks; ml} \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_m} + \gamma_{ks} + \right. \\ & \left. + [2\beta_{lt; ks} + \gamma_{kl} \delta_{ls} + \gamma_{is} \delta_{kl} + \frac{\partial \gamma_{ks}}{\partial \mu_l} \mu_l] \frac{\partial \mu_l}{\partial \xi_i} \right\}, \\ t_{lm}^{(u)} = & 2\rho \left\{ \frac{1}{2} \lambda_{lm; l'm'} + \lambda_{mm'} \delta_{ll'} + \lambda_{lm'} \delta_{ml'} + \frac{\partial \lambda_{lm}}{\partial \mu_{m'}} \mu_{l'} + \right. \\ & + \frac{\partial \lambda_{l'm'}}{\partial \mu_m} \mu_l + \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial \mu_{m'}} \mu_l \delta_{ml'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \mu_m \partial \mu_{m'}} \mu_l \mu_{l'} \left. \right\} \frac{\partial \mu_{l'}}{\partial \xi_m} + \\ & + \left\{ 2\beta_{lm; ks} + \gamma_{km} \delta_{ls} + \frac{\partial \gamma_{ks}}{\partial \mu_m} \mu_l \right\} \frac{\partial \mu_s}{\partial \xi_k} + 2\lambda_{lm} + \frac{\partial a}{\partial \mu_m} \mu_l. \end{aligned}$$



## § 16. Связанные магнитоупругие волны в ферромагнетиках

1. **Линеаризованные уравнения движения.** Используя полученные в предыдущем разделе выражения для эффективного магнитного поля и тензора натяжений, легко вывести уравнение движения для магнитного момента и вектора смещения, которые в принципе могут служить для исследования связанных магнитоупругих волн произвольной амплитуды, лишь бы градиенты магнитного момента и вектора смещения были достаточно малы. Однако мы не будем здесь заниматься нелинейными магнитоупругими волнами, а ограничимся только исследованием волн малой амплитуды. С этой целью мы должны провести в выражениях (15.7.3), (15.7.5) добавочное разложение в ряд по степеням отклонения магнитного момента  $\mu$  от его равновесного значения  $\mu_0$ , для которого выполняются равенства

$$\lambda_{lm}(\mu_0) = 0, \quad \left( \frac{\partial a}{\partial \mu} \right)_{\mu=\mu_0} = 0,$$

являющиеся условиями минимума потенциальной энергии. Приведем результаты разложения, предполагая для простоты, что ферромагнетик является одноосным.

Плотность энергии имеет вид

$$\begin{aligned} w = & \frac{1}{8\pi} H^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \lambda_{lm; l'm'} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_{l'}}{\partial x_{m'}} + \\ & + \frac{1}{2} \rho \alpha \left( \frac{\partial \mu_{1l}}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} f \rho_0^2 \mu_0^2 (n_l n_{l'} \delta_{mm'} - n_m n_m \delta_{ll'}) \times \\ & \times \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_{l'}}{\partial x_{m'}} + \frac{1}{2} \beta \rho_0^2 \mu_0^2 \left( \frac{\partial (\mathbf{u} \mathbf{n})}{\partial x_m} \right)^2 + \\ & + \mu_0 \rho_0^2 \{ f (n_l \mu_{1m} + n_m \mu_{1l}) + \beta n_l \mu_{1m} + \\ & + (\mu_1 \mathbf{n}) [(b+d) n_l n_m + c \delta_{lm}] \} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{1}{2} \rho_0^2 \beta \mu_1^2 + \frac{1}{2} \rho_0^2 b (\mu_1 \mathbf{n})^2. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu_1$  — малое отклонение магнитного момента  $\mu$  от равновесного значения  $\mu_0$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль оси легкого намагничения, т. е. параллельный вектору  $\mu_0$ ,  $\alpha$  — обменная константа,  $\rho_0$  — равновесная плотность ферромагнетика  $\beta$ ,  $b$ ,  $f$ ,  $c$  и  $d$  — некоторые постоянные, входящие в выражения

$$\text{для } \left( \frac{\partial^2 a}{\partial \mu_l \partial \mu_k} \right)_0 \text{ и } \left( \frac{\partial \lambda_{lm}}{\partial \mu_s} \right)_0:$$

$$\frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial \mu_l \partial \mu_k} \right)_0 = \beta \delta_{lk} + b n_l n_k, \quad (16.1.1)$$

$$\frac{2}{\rho_0^2} \left( \frac{\partial \lambda_{lm}}{\partial \mu_s} \right)_0 = f \mu_0 (\delta_{ms} n_l + \delta_{ls} n_m) + c \delta_{lm} n_s \mu_0 + d n_l n_m n_s \mu_0^3. \quad (16.1.2)$$

(постоянная  $\beta$  совпадает с константой анизотропии, введенной в § 3); в рассматриваемом приближении эйлеровы и лагранжевы координаты, очевидно, не различаются.

Эффективное магнитное поле определяется формулой

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \mathbf{h} - \rho_0 \beta \boldsymbol{\mu}_1 + \rho_0 \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x_i \partial x_k} - \rho_0 \mu_0 [(f + \beta) \nabla (\mathbf{n} \mathbf{u}) + \\ & + f (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{u}] - n \rho_0 [b (\mathbf{n} \boldsymbol{\mu}_1) + c (\nabla \mathbf{u}) + (b + \mu_0^2 d) (\mathbf{n} \nabla) (\mathbf{n} \mathbf{u})]; \end{aligned} \quad (16.1.3)$$

тензоры натяжений  $t_{lm}^{(u)}$ ,  $t_{lm}^{(m)}$  и  $t'_{lm}$  имеют вид

$$\begin{aligned} t_{lm}^{(u)} = & \rho_0 \{ \lambda'_{lm; l'm'} + (\rho_0 \mu_0)^2 (f + \beta) \delta_{mm'} n_l n_{l'} - \\ & - f (\mu_0 \rho_0)^2 \delta_{ll'} n_m n_{m'} \} \frac{\partial u_{l'}}{\partial x_{m'}} + \rho_0^2 \mu_0 \{ (f + \beta) \mu_{1m} n_l + \\ & + f \mu_{ll'} n_m + [c \delta_{lm} + (b + \mu_0^2 d) n_l n_m] \mu_1 n \}, \\ t_{lm}^{(m)} = & \rho_0 \mu_0 h_{l'm'}. \end{aligned} \quad (16.1.4)$$

$$t'_{lm} = \eta_{lm; l'm'} \frac{\partial v_{l'}}{\partial x_{m'}} + \frac{1}{2g} \varepsilon_{lmnp} r_{pk} \left( \tilde{H}_k + \frac{1}{2g} \text{rot}_k \mathbf{v} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda'_{lm; l'm'} = & \lambda_{lm; l'm'} + (\mu_0 \rho_0)^2 \{ (b + \mu_0^2 d) n_l n_m n_{l'} n_{m'} + \\ & + c (\delta_{lm} n_{l'} n_{m'} + \delta_{l'm'} n_l n_m) + f (\delta_{mm'} n_l n_{l'} + \\ & + \delta_{ll'} n_m n_{m'} + \delta_{lm} n_{l'} n_{m'} + \delta_{l'm'} n_l n_{m'}) \}. \end{aligned}$$

Используя эти формулы, получим, согласно (15.6.1) — (15.6.4), следующую систему линеаризованных уравнений:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_1}{\partial t} = g \mu_0 (\mathbf{n} \times \tilde{H}) + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{R},$$

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}',$$

$$\text{div} (\mathbf{h} + 4\pi \rho_0 \boldsymbol{\mu}_1 + 4\pi \rho_1 \boldsymbol{\mu}_0) = 0, \quad (16.1.5)$$

$$\text{rot } \mathbf{h} = 0, \quad \rho_1 + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

где  $\rho_1$  — отклонение плотности ферромагнетика от равновесного значения и  $F, F'$  — плотности упругой силы и силы трения.

$$F_l = \frac{\partial}{\partial x_m} (t_{lm}^{(u)} + t_{lm}^{(m)}) = \rho_0 \{ \lambda'_{lm; l'm'} + (\mu_0 \rho_0)^2 (f + \beta) \delta_{mm'} n_e n_e - \\ - (\mu_0 \rho_0)^2 f \delta_{ll'} n_m n_{m'} \} \frac{\partial^2 u_{l'}}{\partial x_m \partial x_{m'}} + \rho_0^2 \mu_0 \left\{ (f + \beta) n_l \frac{\partial \mu_{1m}}{\partial x_m} + \right. \\ \left. + f (n \nabla) \mu_{1l} + \left[ c \frac{\partial}{\partial x_{l'}} + (b + \mu_0^2 d) n_{l'} (n \nabla) \right] (\mu_1 n) \right\} + \rho_0 \mu_0 (n \nabla) h_l. \quad (16.1.6)$$

$$F'_l = \frac{\partial}{\partial x_m} t'_{lm} = \eta_{lm; l'm'} \frac{\partial^2 v_{l'}}{\partial x_m \partial x_{m'}} + \frac{1}{2g} \text{rot}_l R.$$

Наконец, релаксационный член определяется формулой

$$R = \frac{1}{\tau_2} \left( \tilde{H} + \frac{1}{2g} \text{rot } v \right) - \frac{1}{\tau_1} \left\{ n \times \left[ n \times \left( \tilde{H} + \frac{1}{2g} \text{rot } v \right) \right] \right\}.$$

Полученные линеаризованные уравнения показывают, что изменение магнитного момента происходит не только благодаря действию магнитных сил, но и благодаря деформации ферромагнетика, а изменение вектора смещения — не только благодаря действию упругих сил, но и благодаря неоднородности магнитного поля и магнитного момента. Эта связь между магнитными и упругими величинами обусловливается магнитоупругостью, энергией магнитной анизотропии и пондеромоторными силами.

**2. Взаимодействие звуковых волн со спиновыми волнами и магнитоакустический резонанс.** Предполагая, что величины  $\mu_1, u, h$  и  $\rho_1$  изменяются со временем по закону  $e^{-i(\omega t - kr)}$ , где  $\omega$  и  $k$  — частота и волновой вектор связанных магнитоупругих волн, можно с помощью линеаризованных уравнений (16.1.5) получить дисперсионное уравнение, связывающее между собой величины  $\omega$  и  $k$ . Однако в общем случае произвольных тензоров  $\lambda'_{ik; lm}, \eta_{ik; lm}$  и произвольного направления распространения волны это уравнение имеет очень громоздкий вид и его трудно исследовать. Поэтому, чтобы проанализировать основные свойства связанных магнитоупругих волн, мы ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда ферромагнетик можно считать изотропным относительно его упругих свойств, т. е. будем предполагать, что

$$\lambda'_{ik; lm} = [(s'_l)^2 - 2(s'_l)^2] \delta_{ik} \delta_{lm} + (s'_l)^2 (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}), \\ \eta_{ik; lm} = (\eta_l^2 - 2\eta_l^2) \delta_{ik} \delta_{lm} + \eta_l^2 (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl})$$

( $s'_l$  и  $s'_t$  — представляют собой скорости продольного и поперечного звука). Кроме того, мы будем считать, что магнитоупругая волна, распространяется вдоль оси анизотропии (ось  $z$ ) и отсутствуют релаксационные слагаемые, приводящие к изменению величины магнитного момента ( $\frac{1}{\tau_2} = 0$ ). В этом случае мы получим из (16.1.5) следующие уравнения для циркулярных компонент  $\mu_1^\pm = \mu_{1x} \pm i\mu_{1y}$  и  $u^\pm = u_x \pm iu_y$  векторов  $\mu_1$  и  $u$ :

$$\begin{aligned} \{\omega \mp \omega_s(\mathbf{k})(1 \mp i\delta_s)\} \mu_1^\pm &= \\ &= \pm ikfgM_0 \frac{M_0}{\rho_0} \left\{ 1 \mp i\delta_s \left( 1 \mp \frac{\omega}{2fgM_0} \right) \right\} u^\pm, \\ \{\omega^2 - \omega_t^2(\mathbf{k})(1 - i\delta_t)\} u^\pm &= \\ &= -ikfM_0 \left\{ 1 \mp i \frac{\omega_s(\mathbf{k})}{2fgM_0} \delta_s \right\} \mu_1^\pm, \\ \{\omega^2 - \omega_t^2(\mathbf{k})(1 - i\delta_t)\} u_z &= 0, \end{aligned} \quad (16.2.1)$$

где  $\omega_s(\mathbf{k}) = gM_0(\alpha k^2 + \beta)$  — частота спиновой волны ( $M_0 = \rho_0 \mu_0$ ),  $\omega_t(\mathbf{k}) = s_t k$  и  $\omega_l(\mathbf{k}) = s_l k$  — частоты поперечной и продольной звуковых волн, в которые входят модифицированные скорости звука  $s_t$  и  $s_l$ ,

$$s_t^2 = s_l^2 + \frac{M_0^2}{\rho_0} (\beta - 4\pi), \quad s_l^2 = (s'_l)^2 - f \frac{M_0^2}{\rho_0},$$

и, наконец,  $\delta_s$ ,  $\delta_t$  и  $\delta_l$  — величины, определяющие диссипацию энергии,

$$\delta_s = \frac{1}{gM_0\tau_1}, \quad \delta_t = \frac{\omega}{\rho_0 s_t^2} \eta_t^2 - \delta_s f \frac{M_0^2}{\rho s_t^2}, \quad \delta_l = \frac{\omega}{\rho_0 s_l^2} \eta_l^2.$$

Не учитывая сначала диссипативных процессов, мы будем исходить из уравнений:

$$\begin{aligned} [\omega \mp \omega_s(\mathbf{k})] \mu_1^\pm &= \pm ikfgM_0 \frac{M_0}{\rho_0} u^\pm, \\ \{\omega^2 - \omega_t^2(\mathbf{k})\} u^\pm &= -ikfM_0 \mu_1^\pm, \\ \{\omega^2 - \omega_l^2(\mathbf{k})\} u_z &= 0. \end{aligned} \quad (16.2.2)$$

Мы видим, что вдоль оси анизотропии могут распространяться независимо продольная и поперечные волны.

Скорость распространения продольных звуковых волн  $s_l$  мало отличается от  $s'_l$ , так как  $\frac{M_0^2}{\rho_0 s_l^2} \ll 1$ , но в принципе

изменение скорости продольной волны можно наблюдать, если включить вдоль оси анизотропии стороннее магнитное поле  $H_0^{(e)}$ , так как в этом случае скорость продольных звуковых волн будет зависеть от  $H_0^{(e)}$  (при  $H_0^{(e)} \neq 0$  в формуле для  $s_l$  величину  $\beta$  надо заменить на  $\beta + \frac{H_0^{(e)}}{M_0}$ ).

Рассмотрим поперечные магнитоупругие волны, распространяющиеся вдоль оси анизотропии. Исключая из первых двух уравнений системы (16.2.2) амплитуды  $u^\pm$ ,  $\mu_1^\pm$ , получим следующие дисперсионные уравнения:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_l^2(\mathbf{k}))(\omega - \omega_s(\mathbf{k})) - \zeta g M_0 \omega_l^2(\mathbf{k}) &= 0, \\ (\omega^2 - \omega_l^2(\mathbf{k}))(\omega + \omega_s(\mathbf{k})) + \zeta g M_0 \omega_l^2(\mathbf{k}) &= 0, \end{aligned} \quad (16.2.3)$$

где  $\zeta = f^2 \frac{M_0^2}{\rho_0 s_l^2}$ . Первое из этих уравнений определяет частоты магнитоупругих волн с «левой» круговой поляризацией ( $u^+ \neq 0$ ,  $u^- = 0$ ), а второе — частоты магнитоупругих волн с «правой» круговой поляризацией ( $u^- \neq 0$ ,  $u^+ = 0$ ).

Если в этих уравнениях положить  $\zeta = 0$ , то дисперсионные уравнения распадутся на уравнения, определяющие частоты двух поперечных упругих волн и частоту спиновой волны. Поэтому величину  $\zeta$  можно рассматривать как параметр связи между упругими и спиновыми волнами. Обычно  $f \approx 3 \div 10$ ,  $M_0 \approx 10^3$  гс,  $\rho_0 \approx 10$  г/см<sup>3</sup> и  $s_l \approx 3 \cdot 10^5$  см/сек, поэтому  $\zeta \approx 10^{-5} \div 10^{-4}$ . Таким образом, как и указывалось выше, связь между упругими и спиновыми волнами является слабой.

Учитывая малость параметра  $\zeta$ , легко найти корни дисперсионных уравнений (16.2.3). Прежде всего из второго уравнения (16.2.3) имеем

$$\omega = \omega_l(\mathbf{k}) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta g M_0}{\omega_l(\mathbf{k}) + \omega_s(\mathbf{k})} \right). \quad (16.2.4)$$

Мы видим, что взаимодействие поперечной звуковой волны с «правой» круговой поляризацией со спиновой волной приводит к изменению частоты  $\omega_l(\mathbf{k})$  на величину порядка  $\zeta \omega_l(\mathbf{k})$ .

Рассмотрим теперь взаимодействие поперечной звуковой волны с «левой» круговой поляризацией со спиновой волной. При этом следует различать два случая в зависимости от того, велико или мало различие между величинами  $\omega_s(\mathbf{k})$  и  $\omega_l(\mathbf{k})$ .

Если волновой вектор  $\mathbf{k}$  таков, что  $|\omega_s(\mathbf{k}) - \omega_t(\mathbf{k})| \gg \zeta\omega_t(\mathbf{k})$ , то корни дисперсионного уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_t(\mathbf{k}) \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta \frac{gM_0}{\omega_s(\mathbf{k}) - \omega_t(\mathbf{k})} \right), \\ \omega &= \omega_s(\mathbf{k}) \left( 1 + \zeta \frac{gM_0\omega_t^2(\mathbf{k})}{\omega_s(\mathbf{k})(\omega_s^2(\mathbf{k}) - \omega_t^2(\mathbf{k}))} \right). \end{aligned} \quad (16.2.5)$$

Эти формулы показывают, что поперечная звуковая волна с «левой» круговой поляризацией взаимодействует со спиновой волной значительно сильнее, чем поперечная звуковая волна с «правой» круговой поляризацией.

Если величины  $\omega_s$  и  $\omega_t$  мало отличаются друг от друга, то первое из уравнений (16.2.3) можно переписать в виде

$$(\omega - \omega_t(\mathbf{k}))(\omega - \omega_s(\mathbf{k})) - \frac{1}{2} \zeta g M_0 \omega_t(\mathbf{k}) = 0.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_I &= \frac{1}{2}(\omega_t + \omega_s) - \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_t - \omega_s)^2 + 2\zeta g M_0 \omega_t}, \\ \omega_{II} &= \frac{1}{2}(\omega_t + \omega_s) + \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_t - \omega_s)^2 + 2\zeta g M_0 \omega_t}. \end{aligned} \quad (16.2.6)$$

Эти формулы справедливы, если  $|\omega_s - \omega_t| \leq \omega_t \sqrt{\zeta}$ .

Обратим внимание на то, что в области волновых векторов  $|\omega_s - \omega_t| \leq \omega_t \sqrt{\zeta}$  отличие частот связанных магнитоупругих волн  $\omega_I, \omega_{II}$  от невозмущенных частот  $\omega_t, \omega_s$  составляет по порядку величины  $\sqrt{\zeta} \omega_t$ , в то время как при  $|\omega_s - \omega_t| \gg \zeta \omega_t$  это отличие составляет  $\zeta \omega_t$  или  $\zeta \omega_s$ .

На рис. 4 изображен примерный ход ветвей связанных магнитоупругих волн при распространении их вдоль оси анизотропии. Ветви I и II соответствуют взаимодействующим спиновой и поперечной звуковой волне с «левой» круговой поляризацией. В области малых волновых векторов,  $k < k_0$ ,

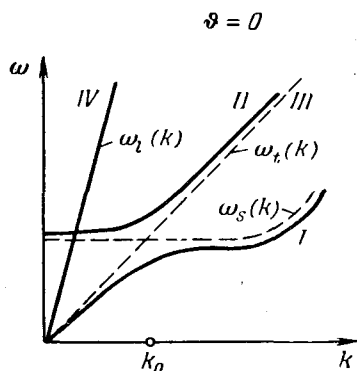


Рис. 4.

где  $k_0$  определяется из условия  $\omega_s(k_0) = \omega_t(k_0)$ , ветвь I соответствует звуковой волне, а ветвь II — спиновой волне;

в области же больших волновых векторов,  $k > k_0$ , ветвь *I* соответствует спиновой волне, а ветвь *II* — звуковой волне [5]. Ветвь *III* соответствует поперечной звуковой волне с «правой» круговой поляризацией, которая практически не взаимодействует со спиновой волной. Наконец, ветвь *IV* соответствует продольной звуковой волне, которая также в рассматриваемом случае практически не взаимодействует со спиновой волной.

Возвратимся к уравнениям (16.2.2). Из них следует, что амплитуды циркулярных компонент магнитного момента и вектора смещения связаны между собой соотношением

$$\mu_1^\pm = \pm \frac{ikfgM_0 \frac{M_0}{\rho_0}}{\omega \mp \omega_s(\mathbf{k})} u^\pm, \quad (16.2.7)$$

или, что то же самое, соотношением

$$u^\pm = -i \frac{kfM_0}{\omega^2 - \omega_t^2(\mathbf{k})} \mu_1^\pm. \quad (16.2.8)$$

Эти формулы показывают, что если в ферромагнетике возбудить упругие колебания, то эти колебания вызовут в свою очередь магнитные колебания, и наоборот, если возбудить магнитные колебания, то они вызовут упругие колебания.

Рассмотрим для определенности возбуждение магнитных колебаний звуковыми. Обращаясь в этом случае к формуле (16.2.7), мы должны понимать в ней под  $\omega$  тот корень дисперсионного уравнения, который близок к  $\omega_t$  (при рассмотрении возбуждения звуковых колебаний магнитными нужно в формуле (16.2.8) понимать под  $\omega$  тот корень дисперсионного уравнения, который близок к  $\omega_s$ ). Мы видим, что возбуждение колебаний носит резонансный характер и что амплитуда магнитных колебаний, возбуждаемых звуковыми колебаниями (и соответственно амплитуда звуковых колебаний возбуждаемых магнитными колебаниями), будет особенно велика в том случае, когда выполняется условие

$$\omega_s(\mathbf{k}) = \omega_t(\mathbf{k}). \quad (16.2.9)$$

Таким образом, можно говорить об определенном резонансе, который мы будем называть магнитоакустическим резонансом.

Определим частоты магнитоакустического резонанса. Из условия резонанса

$$s_t k = g M_0 (a k^2 + \beta)$$

легко найти соответствующие значения волнового вектора  $k$ :

$$k_{1,2} = \frac{s_t}{2\alpha g M_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{s_t}{\alpha g M_0} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}}.$$

Так как  $\frac{s_t^2}{\alpha (g M_0)^2} \sim \frac{\theta_D^2}{\mu_0 M_0 \theta_c} \gg 1$ , то

$$k_1 \approx \frac{\beta g M_0}{s_t}, \quad k_2 \approx \frac{s_t}{\alpha g M_0}.$$

Этим волновым векторам соответствуют частоты магнитоакустического резонанса

$$\omega_1^{(r)} \approx \beta g M_0, \quad \omega_2^{(r)} \approx \frac{s_t^2}{\alpha g M_0}.$$

Считая  $M_0 \approx 10^3$  гс,  $s_t \approx 3 \cdot 10^5$  см/сек,  $\beta \approx 1$  и  $\alpha = \frac{\theta_c}{\mu_0 M_0} a^2 \approx 10^{-2}$  см<sup>2</sup>, получим  $\omega_2^{(r)} \approx 10^{13}$  сек<sup>-1</sup>,  $\omega_1^{(r)} \approx 10^{10}$  сек<sup>-1</sup>.

Таким образом, частоты магнитоакустического резонанса лежат в области ультра- и гиперзвука. Поэтому явление магнитоакустического резонанса может быть использовано для создания генераторов гиперзвука.

До сих пор мы для простоты рассматривали распространение магнитоупругих волн вдоль оси анизотропии. В этом направлении для изотропного (в смысле упругих свойств) ферромагнетика отсутствует взаимодействие продольной звуковой и спиновой волны. Однако здесь сказывается не свойство продольности звуковой волны, а избранность направления распространения. Если распространение происходит в произвольном направлении, то имеет место взаимодействие спиновой волны со всеми ветвями упругих колебаний, т. е. как с поперечными, так и с продольной звуковыми волнами. Это значит, что при произвольном направлении распространения происходит изменение законов дисперсии как поперечных звуковых и спиновой волн, так и продольной звуковой волны. Аналогичное положение имеет место, естественно, для всех ветвей упругих колебаний в случае анизотропного (в смысле упругих свойств) ферромагнетика, когда разделение на поперечные и продольные колебания вообще не имеет смысла.

Взаимодействие между спиновой волной и всеми ветвями упругих колебаний должно приводить к резонансному возбуждению спиновой волной, как правило, всех звуковых волн и всеми звуковыми волнами — спиновой волны. Иными сло-



вами, магнитоакустический резонанс может иметь место не только на поперечной, но и на продольной звуковой волне. Он возникает всякий раз, когда совпадают невозмущенные частоты различных ветвей колебаний. В такой формулировке условие резонанса справедливо и для анизотропного (в смысле упругих свойств) ферромагнетика, а также для антиферромагнетиков [6].

Дисперсионное уравнение при произвольном направлении распространения волны имеет сложный вид, и мы не будем приводить его здесь, а приведем лишь решения дисперсионного уравнения для изотропного (в смысле упругих свойств) ферромагнетика, справедливые в окрестностях магнитоакустических резонансов.

Рассмотрим сначала окрестность магнитоакустического резонанса на продольной звуковой волне. Этот резонанс имеет место при выполнении условия

$$\omega_l(\mathbf{k}) = \omega_s(\mathbf{k}), \quad (16.2.10)$$

где  $\omega_l(\mathbf{k}) = s_l k$ . Частоты магнитоупругих волн в окрестности этого резонанса определяются формулами [7]

$$\omega_I = \omega_{III} = s_l k,$$

$$\omega_{II}^2 = \frac{1}{2}(\omega_l^2 + \omega_s^2) + \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_l^2 - \omega_s^2)^2 + 4(gM_0)^2 \frac{M_0^2}{\rho_0 s_l^2} (\beta + 2f - 4\pi)^2 \omega_l^2 F_l}, \quad (16.2.11)$$

$$\omega_{IV}^2 = \frac{1}{2}(\omega_l^2 + \omega_s^2) - \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_l^2 - \omega_s^2)^2 + 4(gM_0)^2 \frac{M_0^2}{\rho_0 s_l^2} (\beta + 2f - 4\pi)^2 \omega_l^2 F_l},$$

где  $F_l = \left( \alpha k^2 + \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right) \sin^2 \vartheta_k \cos^2 \vartheta_k$  и  $\vartheta_k$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью анизотропии. Частоты  $\omega_I$ ,  $\omega_{III}$  соответствуют поперечным звуковым волнам, которые в окрестности рассматриваемого резонанса не взаимодействуют со спиновой волной, а частоты  $\omega_{II}$ ,  $\omega_{IV}$  — продольной звуковой волне и спиновой волне, взаимодействующим между собой.

Рассмотрим теперь окрестность магнитоакустического резонанса на поперечной звуковой волне, который имеет место

при выполнении условия

$$\omega_s(\mathbf{k}) = \omega_t(\mathbf{k}). \quad (16.2.12)$$

В окрестности этого резонанса частоты магнитоупругих волн определяются формулами:

$$\begin{aligned} \omega_I^2 &= \frac{1}{2}(\omega_s^2 + \omega_t^2) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_s^2 - \omega_t^2)^2 + 4(gM_0)^2 \omega_t^2 \frac{M_0^2}{\rho_0 s_t^2} F_t}, \\ \omega_{II}^2 &= \frac{1}{2}(\omega_s^2 + \omega_t^2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_s^2 - \omega_t^2)^2 + 4(gM_0)^2 \omega_t^2 \frac{M_0^2}{\rho_0 s_t^2} F_t}, \end{aligned} \quad (16.2.13)$$

$$\omega_{III} = s_t k,$$

$$\omega_{IV} = s_l k,$$

где

$$\begin{aligned} F_t &= [(\beta + f) \sin^2 \vartheta_k - f \cos^2 \vartheta_k]^2 \left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \alpha k^2 \right) + \\ &\quad + f^2 \cos^2 \vartheta_k \left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \alpha k^2 + 4\pi \sin^2 \vartheta_k \right). \end{aligned}$$

Частота  $\omega_{IV}(\mathbf{k})$  в рассматриваемом случае соответствует продольной звуковой волне, не взаимодействующей со спиновой волной, а частота  $\omega_{III}(\mathbf{k})$  — одной из двух поперечных звуковых волн, которая также не взаимодействует со спиновой волной; частоты  $\omega_I(\mathbf{k})$  и  $\omega_{II}(\mathbf{k})$  соответствуют взаимодействующим спиновой волне и второй поперечной звуковой волне.

Мы видим, что при произвольном направлении распространения, как и в случае  $\vartheta_k = 0$ , со спиновой волной в окрестности резонанса взаимодействует только одна из двух поперечных звуковых волн.

Отметим, что возникающая благодаря взаимодействию звуковых и спиновых волн дисперсия скорости звука особенно велика в области магнитоакустических резонансов\*).

\*) Эта дисперсия скорости звука была обнаружена экспериментально на монокристалле YIG [8].

На рис. 5 схематически изображен ход ветвей магнитоупругих колебаний при произвольном направлении их распространения. В области волновых векторов  $k < k'_0$  ( $k'_0$  определяется из условия  $\omega_l(\mathbf{k}) = \omega_s(\mathbf{k})$ ) ветви I и III соответствуют поперечным звуковым волнам, ветвь II — продольной звуковой волне и ветвь IV — спиновой волне; при  $k'_0 < k < k_0$  ветви I и III по-прежнему соответствуют поперечным звуковым волнам, ветвь II — спиновой волне и ветвь IV — продольной звуковой волне; наконец, при  $k > k_0$  ветвь I соответствует спиновой волне, ветви II и III — поперечным звуковым волнам и ветвь IV — продольной звуковой волне.

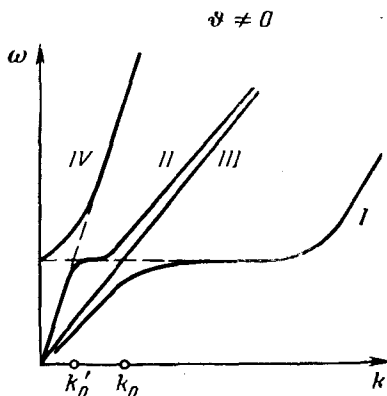


Рис. 5.

Отметим, что различные участки ветви II соответствуют продольным звуковым, спиновым и поперечным звуковым волнам. Это обстоятельство может быть использовано для преобразования продольных звуковых волн в спиновые и поперечные звуковые волны. Для этого необходимо приложить к телу слабо-неоднородное магнитное поле, благодаря чему при заданной частоте волновой вектор будет меняться вдоль тела [11].

**3. Затухание магнитоупругих волн.** Перейдем к исследованию затухания связанных магнитоупругих волн, которое обусловлено диссипативными процессами в спиновой системе и в решетке.

Коэффициент или декремент затухания  $\gamma(\mathbf{k})$  определяет изменение со временем амплитуды плоской волны  $A_{\mathbf{k}}$  при заданном волновом векторе  $\mathbf{k}$ ,

$$A_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}}(0) e^{-\gamma(\mathbf{k})t}.$$

Чтобы найти  $\gamma(\mathbf{k})$ , следует воспользоваться дисперсионным уравнением

$$\Delta(\omega, \mathbf{k}) = 0,$$

выведенным с учетом диссипативных процессов. Корни этого уравнения будут комплексными, причем вещественные их части представляют собой частоты, а мнимые части — декременты затухания соответствующих волн,

$$\gamma_j(\mathbf{k}) = \text{Im } \omega_j(\mathbf{k}).$$

Подчеркнем, что каждая ветвь колебаний характеризуется своим декрементом затухания.

Если декременты затухания достаточно малы,  $\gamma(\mathbf{k}) \ll \ll |\omega(\mathbf{k})|$ , то для их нахождения не обязательно решать дисперсионное уравнение с учетом диссипативных процессов, а можно определять  $\gamma(\mathbf{k})$  непосредственно по формуле

$$\gamma(\mathbf{k}) = \frac{\overline{T_s}}{2\overline{W}} = \frac{\overline{q}}{2\overline{W}},$$

где  $q$  — количество тепла, выделяющееся в единицу времени в теле благодаря диссипации энергии, и  $W$  — энергия тела; при этом переменные величины, от которых зависят  $q$  и  $W$ , должны определяться в пренебрежении затуханием (черта означает усреднение по времени).

Чтобы выяснить характер затухания магнитоупругих волн мы снова начнем с рассмотрения простейшего случая, когда волны распространяются вдоль оси анизотропии. Дисперсионные уравнения в этом случае с учетом диссипативных процессов имеют, согласно (16.2.1), следующий вид:

$$\begin{aligned} \{\omega^2 - \omega_t^2(1 - i\delta_t)\} \{\omega - \omega_s(1 - i\delta_s)\} - \\ - \zeta g M_0 \omega_t^2 \left\{ 1 - i\delta_s \left( 1 + \frac{\omega_s - \omega}{2fgM_0} \right) \right\} = 0, \\ \{\omega^2 - \omega_t^2(1 - i\delta_t)\} \{\omega + \omega_s(1 + i\delta_s)\} - \\ - \zeta g M_0 \omega_t^2 \left\{ 1 + i\delta_s \left( 1 + \frac{\omega_s + \omega}{2fgM_0} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16.3.1)$$

Наша задача заключается в нахождении мнимых частей корней этих уравнений при заданном значении волнового вектора  $\mathbf{k}$ . При этом следует различать два случая в зависимости от того, велико или мало различие между частотами  $\omega_s(\mathbf{k})$  и  $\omega_t(\mathbf{k})$ . Если волновой вектор  $\mathbf{k}$  таков, что  $|\omega_s(\mathbf{k}) - \omega_t(\mathbf{k})| \gg \zeta\omega_t(\mathbf{k})$ , то декременты затухания поперечных звуковых волн  $\gamma_{1t}$ ,  $\gamma_{2t}$

и спиновой волны  $\gamma_s$  имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_{1t} &= \frac{1}{2} \omega_t \left\{ \delta_t + \zeta \delta_s \frac{g M_0 \omega_s}{(\omega_t - \omega_s)^2} \right\}, \\ \gamma_{2t} &= \frac{1}{2} \omega_t \left\{ \delta_t + \zeta \delta_s \frac{g M_0 \omega_s}{(\omega_t + \omega_s)^2} \right\} \approx \frac{1}{2} \omega_t \delta_t, \\ \gamma_s &= \omega_s \left\{ \delta_s + \zeta \delta_s \frac{g M_0 \omega_t}{\omega_s^2 - \omega_t^2} + \zeta \delta_t \frac{g M_0 \omega_t^3}{(\omega_s^2 - \omega_t^2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (16.3.2)$$

Первая из этих формул определяет декремент затухания той из двух поперечных звуковых волн, которая взаимодействует со спиновой волной (ей соответствует «левая» круговая поляризация), а вторая формула — декремент затухания второй поперечной звуковой волны (с «правой» круговой поляризацией), которая не взаимодействует со спиновой волной.

Мы видим, что затухание звуковой волны, не взаимодействующей со спиновой волной, практически определяется только диссипативными процессами, протекающими в решетке, в то время как затухание взаимодействующих звуковой и спиновой волн определяется вблизи магнитоакустического резонанса как диссипативными процессами в решетке, так и диссипативными процессами в спиновой системе.

Заметим, что декремент затухания  $\gamma_t$  продольной звуковой волны, распространяющейся при  $\Phi_k = 0$  независимо от поперечных звуковых волн и спиновой волны, определяется только диссипативными процессами в решетке

$$\gamma_t = \frac{1}{2} \delta_t \omega_t.$$

Пусть теперь частоты  $\omega_s(\mathbf{k})$  и  $\omega_t(\mathbf{k})$  мало отличаются друг от друга, так что  $|\omega_s(\mathbf{k}) - \omega_t(\mathbf{k})| \leq \sqrt{\zeta} \omega_s(\mathbf{k})$ . Тогда корни уравнения (16.3.1), соответствующие ветвям колебаний I и II, изображенным на рис. 4, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \omega_I &= \frac{1}{2} (\omega_s + \omega_t) - \frac{i}{2} (\delta_s \omega_s + \delta_t \omega_t) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{[\omega_s - \omega_t + i(\delta_t \omega_t - \delta_s \omega_s)]^2 + 2g M_0 \zeta (1 - i\delta_s) \omega_t}, \\ \omega_{II} &= \frac{1}{2} (\omega_s + \omega_t) - \frac{i}{2} (\delta_s \omega_s + \delta_t \omega_t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{[\omega_s - \omega_t + i(\delta_t \omega_t - \delta_s \omega_s)]^2 + 2g M_0 \zeta (1 - i\delta_s) \omega_t}. \end{aligned}$$

В условиях магнитоакустического резонанса

$$\omega_I = \omega_s - \frac{i}{2} \omega_s (\delta_s + \delta_t) - \frac{1}{2} \sqrt{2g M_0 \zeta \omega_s (1 - i\delta_s) - \omega_s^2 (\delta_t - \delta_s)^2},$$

$$\omega_{II} = \omega_s - \frac{i}{2} \omega_s (\delta_s + \delta_t) + \frac{1}{2} \sqrt{2g M_0 \zeta \omega_s (1 - i\delta_s) - \omega_s^2 (\delta_t - \delta_s)^2}.$$

Последние формулы показывают, что если затухание невзаимодействующих волн достаточно мало ( $(\delta_t - \delta_s)^2 \ll \zeta$ ), то декременты магнитоупругих волн одинаковы

$$\gamma_I = \gamma_{II} = \frac{1}{2} \omega_s (\delta_s + \delta_t). \quad (16.3.3)$$

Мы видим, что в этом случае декременты затухания обеих взаимодействующих волн при резонансе одинаковы, причем они определяются как диссипативными процессами в решетке, так и в спиновой системе.

Если  $(\delta_t - \delta_s)^2 \gg \zeta$ , то  $\gamma_I = \omega_s \delta_s$ ,  $\gamma_{II} = \omega_t \delta_t$ . Таким образом, в случае очень слабой связи ( $\zeta \ll (\delta_t - \delta_s)^2$ ) затухание каждой ветви колебаний определяется диссипативными процессами в «своей» системе.

Рассмотрим подробнее тот случай, когда диссипация энергии в решетке значительно меньше диссипации энергии в спиновой системе,  $\delta_t \leq \zeta \delta_s$ . В этом случае вдали от магнитоакустического резонанса декременты затухания взаимодействующих звуковой и спиновой волн определяются формулами

$$\gamma_t = \frac{1}{2} \zeta \delta_s \omega_t g M_0 \frac{\omega_s}{(\omega_t - \omega_s)^2},$$

$$\gamma_s = \delta_s \omega_s.$$

При магнитоакустическом резонансе декременты затухания обеих магнитоупругих волн становятся одинаковыми:

$$\gamma_I = \gamma_{II} = \frac{1}{2} \delta_s \omega_s.$$

Мы видим, что если  $\delta_t \leq \zeta \delta_s$ , то декремент затухания звуковой волны сильно, в  $1/\zeta$  раз, возрастает в условиях магнитоакустического резонанса.

Если имеет место обратное соотношение между величинами  $\delta_t$  и  $\delta_s$ , т. е.  $\delta_s \leq \zeta \delta_t$ , то при магнитоакустическом резонансе сильно возрастает декремент затухания спиновой волны, достигая значения

$$\gamma_I = \gamma_{II} \approx \frac{1}{2} \delta_t \omega_s.$$

Остановимся еще на характере затухания магнитоупругих волн при произвольном направлении их распространения, когда имеет место взаимодействие магнитной волны не только с поперечными, но и с продольной звуковыми волнами. Благодаря этому взаимодействию диссипативные процессы в спиновой системе оказывают влияние на затухание упругих колебаний, а диссипативные процессы в решетке — на затухание магнитных колебаний, причем оно особенно велико в условиях магнитоакустических резонансов.

В случае резонанса на продольной звуковой волне ( $\omega_t = \omega_s$ ) декременты затухания магнитоупругих волн определяются формулами

$$\begin{aligned} \gamma_I &= \gamma_{III} = \frac{1}{2} \delta_t \omega_t, \\ \gamma_{II} &= \gamma_{IV} = \frac{1}{2} \omega_s (\delta_t + \delta_s), \end{aligned} \quad (16.3.4)$$

а в случае резонанса на поперечной звуковой волне ( $\omega_t = \omega_s$ ) — формулами

$$\begin{aligned} \gamma_I &= \gamma_{II} = \frac{1}{2} \omega_s (\delta_t + \delta_s), \\ \gamma_{III} &= \frac{1}{2} \delta_t \omega_t, \\ \gamma_{IV} &= \frac{1}{2} \delta_t \omega_t \end{aligned} \quad (16.3.5)$$

(индексы I, II, III, IV обозначают ветви колебаний, изображенные на рис. 5).

**4. Вращение плоскости поляризации поперечной магнитоупругой волны.** Дисперсионное уравнение (17.2.3), рассматриваемое как уравнение относительно волнового вектора  $k$  при заданной частоте  $\omega$ , имеет несколько корней, благодаря чему может возникать вращение плоскости поляризации поперечных магнитоупругих волн [9, 2]. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим длинные магнитоупругие волны, когда выполняется неравенство  $ak^2 \ll 1$ , т. е. несущественна зависимость частоты спиновых волн от волнового вектора. В этом случае дисперсионное уравнение (16.2.3) имеет два корня:

$$k_1 = \frac{\omega}{s_t} \sqrt{\frac{\omega - \omega_s(0)}{\omega - \omega_s(0) - \xi g M_0}}, \quad k_2 = \frac{\omega}{s_t}, \quad (16.4.1)$$

причем волновому вектору  $k_1$  соответствует волна с «левой» круговой поляризацией, а волновому вектору  $k_2$  — волна с «правой» круговой поляризацией.

Компоненты вектора смещения  $u$  определяются, очевидно, формулами

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ u^+ e^{-i\omega t + ik_1 z} + u^- e^{-i\omega t + ik_2 z} \}, \\ u_y &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ -iu^+ e^{-i\omega t + ik_1 z} + iu^- e^{-i\omega t + ik_2 z} \}, \end{aligned} \quad (16.4.2)$$

где  $u^\pm$  — произвольные константы и ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии. Если при  $z=0$  колебания происходят вдоль оси  $x$  (при этом  $u^+ = u^- = u = u^*$ ), то формулы (16.4.2) приобретают вид

$$\begin{aligned} u_x &= u \cos \left( \omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z \right) \cos \frac{k_1 - k_2}{2} z, \\ u_y &= u \cos \left( \omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z \right) \sin \frac{k_1 - k_2}{2} z. \end{aligned} \quad (16.4.3)$$

Мы видим, что при распространении волны плоскость, в которой происходят колебания вектора смещения, поворачивается, причем угол  $\varphi$  между направлением колебаний и осью  $x$  изменяется пропорционально  $z$ :

$$\varphi = \frac{k_1 - k_2}{2} z. \quad (16.4.4)$$

Таким образом, вращение плоскости поляризации магнитоупругой волны характеризуется величиной  $\frac{k_1 - k_2}{2}$ . Эта величина называется коэффициентом вращения плоскости поляризации.

Если частота  $\omega$  не слишком близка к частоте  $\omega_s(0)$ , то коэффициент вращения плоскости поляризации равен

$$\frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{1}{2} \zeta \frac{\omega}{s_l} \cdot \frac{\omega \omega_s(0)}{\omega^2 - \omega_s^2(0)}. \quad (16.4.5)$$

В заключение отметим, что резонансное изменение коэффициента вращения плоскости поляризации было обнаружено экспериментально [10].



## ГЛАВА V

### КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН

#### § 17. Квантование спиновых волн в ферромагнетиках

**1. Магноны.** В предыдущих параграфах было показано, что если отклонить магнитный момент какого-либо атома ферромагнетика от направления, соответствующего минимуму энергии ферромагнетика и предоставить его затем самому себе, то в кристалле начнет распространяться спиновая волна. Ясно, что энергия этой волны будет равна энергии возбуждения кристалла, связанной с изменением ориентации спинов его атомов.

Мы получим энергию элементарного возбуждения, связанного со спиновой волной, если умножим ее частоту  $\omega_s(\mathbf{k})$  ( $\mathbf{k}$  — волновой вектор спиновой волны) на квантовую постоянную  $\hbar$ . Эту энергию

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \hbar\omega_s(\mathbf{k}) \quad (17.1.1)$$

можно рассматривать как энергию некоторой частицы, а величину

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

— как ее импульс. Эту частицу мы будем называть магноном.

Так как спиновая волна распространяется не в свободном пространстве, а в кристаллической решетке, то вектор  $\mathbf{p}$  может быть определен только с точностью до  $2\hbar\boldsymbol{\tau}$ , где  $\boldsymbol{\tau}$  — вектор обратной решетки. Поэтому вектор  $\mathbf{p}$  называют не импульсом, а квазиимпульсом магнона.

Если энергия возбуждения ферромагнетика  $E_s$  невелика, то ее можно представить в виде суммы энергий отдельных распространяющихся в нем спиновых волн или, выражаясь

иначе, в виде суммы энергий магновов

$$E_s \{n\} = \sum_k \hbar \omega_s(k) n(k). \quad (17.1.2)$$

Здесь  $n(k)$  — число магновов (спиновых волн) с волновым вектором  $k$ , и суммирование производится по всем значениям  $k$ .

Выражение (17.1.2) определяет, естественно, только магнитную часть энергии ферромагнетика, связанную с различными взаимными ориентациями спинов его атомов. Оно справедливо, если энергия возбуждения ферромагнетика достаточно мала, так как только в этом случае можно исходить из концепции идеального газа магновов, которой соответствует формула для энергии (17.1.2).

Малые энергии возбуждения соответствуют низким температурам,  $T \ll T_c$  ( $T_c$  — температура Кюри). Поэтому выражением (17.1.2) можно пользоваться, если  $T \ll T_c$ . В этом случае средняя энергия магнона будет равна по порядку величины температуре

$$\overline{\varepsilon_s(k)} \sim T$$

(мы пользуемся энергетической шкалой температур). Подставляя сюда

$$\varepsilon_s(k) = \theta_c (ak)^2$$

(мы пренебрегаем релятивистскими взаимодействиями), получим

$$\theta_c \overline{(ak)^2} \sim T,$$

откуда

$$\overline{ak} \sim \sqrt{\frac{T}{\theta_c}}.$$

Так как  $\theta_c \sim T_c$  и  $T \ll T_c$ , то

$$\overline{ak} \ll 1.$$

Это неравенство означает, что длина волны магнона  $\lambda = \frac{1}{k}$  велика по сравнению с постоянной решетки:

$$\lambda \gg a.$$

Иными словами, при низких температурах в ферромагнетике возбуждены в основном длинноволновые магновы. Но длинноволновые колебания магнитных моментов можно описывать

чисто феноменологически, основываясь на макроскопической электродинамике, что мы и делали в предыдущих главах.

Таким образом, мы приходим к важному физическому выводу, заключающемуся в том, что найденный нами феноменологически закон дисперсии спиновых волн определяет энергию длинноволновых магнонов, а тем самым и энергию ферромагнетика в области низких температур, когда  $T \ll T_c$ .

До сих пор мы говорили о ферромагнетиках, но все сказанное в равной мере относится и к антиферромагнетикам. Разница заключается лишь в том, что в антиферромагнетиках, в отличие от ферромагнетиков, может распространяться не одна, а несколько спиновых волн с одним и тем же волновым вектором  $\mathbf{k}$  (в случае антиферромагнетиков с двумя зеркальными магнитными подрешетками таких волн две).

Обозначая частоты спиновых волн в антиферромагнетике через  $\omega_{sj}(\mathbf{k})$ , где индекс  $j$  служит для обозначения типа спиновой волны, можно сказать, что в антиферромагнетике энергия магнона типа  $j$  с волновым вектором  $\mathbf{k}$  равна

$$\varepsilon_{sj}(\mathbf{k}) = \hbar\omega_{sj}(\mathbf{k}). \quad (17.1.3)$$

Если энергия возбуждения антиферромагнетика достаточно мала, то ее можно, так же как и в случае ферромагнетика, представить в виде суммы энергий отдельных магнонов

$$E_s = \sum_{\mathbf{k}j} \hbar\omega_{sj}(\mathbf{k}) n_j(\mathbf{k}), \quad (17.1.4)$$

где суммирование, в отличие от формулы (17.1.2), относящейся к ферромагнетику, производится не только по волновым векторам  $\mathbf{k}$ , но и по типам спиновых волн  $j$ .

Так же как и в случае ферромагнетика этой формулой можно пользоваться, если температура антиферромагнетика достаточно низка, т. е.  $T \ll T_N$ , где  $T_N$  — температура Нееля.

Формулы (17.1.2) и (17.1.4) для магнитной части энергии ферромагнетика и антиферромагнетика аналогичны формуле

$$E_l = \sum_{\mathbf{f}j} \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) N_j(\mathbf{f}) \quad (17.1.5)$$

для энергии колебаний кристалла, где  $N_j(\mathbf{f})$  — число фононов, т. е. частиц, связанных с звуковой волной, характеризующейся волновым вектором  $\mathbf{f}$ , поляризацией  $j$  и частотой  $\omega_{pj}(\mathbf{f})$ .

Энергия магнона равна умноженной на  $\hbar$  частоте спиновой волны, так же как и энергия фонона равна умноженной на  $\hbar$  частоте звуковой волны.

Аналогия между этими волнами простирается дальше — как фононы, так и магноны подчиняются одной и той же статистике — статистике Бозе — Эйнштейна. Поэтому в состоянии статистического равновесия средние значения чисел магнов и фононов определяются единой формулой Планка

$$n_j(\mathbf{k}) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{sj}(\mathbf{k})}{T}} - 1}, \quad N_j(\mathbf{f}) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{pj}(\mathbf{f})}{T}} - 1}. \quad (17.1.6)$$

Эти выражения вместе с выражениями (17.1.2), (17.1.4), (17.1.5) позволяют в принципе находить все термодинамические величины для магнитоупорядоченных кристаллов, связанные со спиновой системой и с колебаниями решетки.

Если кристалл является проводником, то, естественно, для определения его термодинамических величин нужно учитывать еще вклад, вносимый электронами проводимости. Мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением только магнитоупорядоченных диэлектриков, термодинамические свойства которых определяются магنونным и фононным спектрами.

Знание этих спектров, т. е. знание законов дисперсии спиновых волн и фононов, а также статистики, которой подчиняются магноны и фононы, достаточно для построения термодинамики магнитоупорядоченных кристаллов, но недостаточно для исследования их кинетических свойств. Последние зависят от длин свободного пробега магнов и фононов, которые в свою очередь определяются различными процессами взаимодействия спиновых волн и фононов.

**2. Операторы рождения и уничтожения магнов и фононов.** Чтобы иметь возможность изучать как термодинамические, так и кинетические свойства магнитоупорядоченных кристаллов, желательно с самого начала иметь метод, позволяющий описывать процессы взаимодействия магнов и фононов. Таким методом является метод вторичного квантования, в котором состояние кристалла задается волновой функцией — или вектором состояния — в пространстве чисел частиц. На эту функцию действуют операторы рождения и уничтожения частиц, которые мы будем обозначать через  $c_j^\dagger(\mathbf{k})$ ,  $c_j(\mathbf{k})$  для магнона типа  $j$  с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и через  $b_j^\dagger(\mathbf{f})$ ,  $b_j(\mathbf{f})$  для фонона с волновым вектором  $\mathbf{f}$  и поляризацией  $j$ .

Так как магнаны и фононы подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, то операторы  $c_j^+(\mathbf{k})$ ,  $c_j(\mathbf{k})$ ,  $b_j^+(\mathbf{f})$ ,  $b_j(\mathbf{f})$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [c_j(\mathbf{k}), c_j^+(\mathbf{k}')] &= \delta_{j,j'} \Delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), & [c_j(\mathbf{k}), c_{j'}(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [b_j(\mathbf{f}), b_j^+(\mathbf{f}')] &= \delta_{j,j'} \Delta(\mathbf{f}-\mathbf{f}'), & [b_j(\mathbf{f}), b_{j'}(\mathbf{f}')] &= 0, \end{aligned} \quad (17.2.1)$$

где  $[A, B]$  обозначает коммутатор операторов  $A$  и  $B$  и

$$\Delta(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{k} = 0, \\ 0, & \mathbf{k} \neq 0. \end{cases}$$

Как известно, из этих соотношений следует, что операторы

$$n_j(\mathbf{k}) = c_j^+(\mathbf{k}) c_j(\mathbf{k}), \quad N_j(\mathbf{f}) = b_j^+(\mathbf{f}) b_j(\mathbf{f})$$

имеют только целые неотрицательные собственные значения:

$$\begin{aligned} c_j^+(\mathbf{k}) c_j(\mathbf{k}) \Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots} &= n_j(\mathbf{k}) \Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots}, \\ b_j^+(\mathbf{f}) b_j(\mathbf{f}) \Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots} &= N_j(\mathbf{f}) \Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots}, \end{aligned} \quad (17.2.2)$$

где собственный вектор  $\Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots}$  описывает состояние, в котором имеется  $n_j(\mathbf{k})$  магненов типа  $j$  с импульсом  $\hbar \mathbf{k}$  и  $N_j(\mathbf{f})$  фононов с импульсом  $\hbar \mathbf{f}$  и поляризацией  $j$ .

Операторы  $c_j^+(\mathbf{k})$ ,  $b_j^+(\mathbf{f})$  при действии на вектор состояния  $\Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots}$  увеличивают число частиц на единицу, а операторы  $c_j(\mathbf{k})$ ,  $b_j(\mathbf{f})$  при действии на  $\Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots}$  уменьшают число частиц на единицу:

$$\begin{aligned} c_j^+(\mathbf{k}) \Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots} &= \sqrt{n_j(\mathbf{k}) + 1} \Phi_{\dots n_j+1 \dots N_j \dots}, \\ c_j(\mathbf{k}) \Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots} &= \sqrt{n_j(\mathbf{k})} \Phi_{\dots n_j-1 \dots N_j \dots}, \\ b_j^+(\mathbf{f}) \Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots} &= \sqrt{N_j(\mathbf{f}) + 1} \Phi_{\dots n_j \dots N_j+1 \dots}, \\ b_j(\mathbf{f}) \Phi_{\dots n_j \dots N_j \dots} &= \sqrt{N_j(\mathbf{f})} \Phi_{\dots n_j \dots N_j-1 \dots}. \end{aligned} \quad (17.2.3)$$

По этой причине  $c_j^+(\mathbf{k})$  и  $b_j^+(\mathbf{f})$  называются операторами рождения, а  $c_j(\mathbf{k})$  и  $b_j(\mathbf{f})$  — операторами уничтожения магнана и фонона.

Через операторы рождения и поглощения магненов и фононов можно выразить оператор энергии магнитоупорядо-

ченного кристалла. Если бы магныоны не взаимодействовали между собой и с фононами, то оператор спиновой части энергии кристалла имел бы вид

$$\mathcal{H}_s = \sum_{\mathbf{k}j} \hbar\omega_{sj}(\mathbf{k}) c_j^+(\mathbf{k}) c_j(\mathbf{k}), \quad (17.2.4)$$

где суммирование производится по всем значениям волнового вектора  $\mathbf{k}$  и по различным типам  $j$  спиновых волн. Действительно, собственные значения этого оператора равны, согласно (17.2.2),

$$E_s = \sum_{\mathbf{k}j} \hbar\omega_{sj}(\mathbf{k}) n_j(\mathbf{k}), \quad (17.2.5)$$

что находится в соответствии с формулой (17.1.4).

Аналогичным образом, если бы фононы не взаимодействовали между собой и с магныонами, то оператор, соответствующий колебательной энергии кристалла, имел бы вид

$$\mathcal{H}_l = \sum_{\mathbf{f}j} \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) b_j^+(\mathbf{f}) b_j(\mathbf{f}), \quad (17.2.6)$$

где суммирование производится по всем значениям волнового вектора фонона  $\mathbf{f}$  и по различным поляризациям фононов  $j$ . Собственные значения этого оператора равны, согласно (17.2.2),

$$E_l = \sum_{\mathbf{f}j} \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) N_j(\mathbf{f}). \quad (17.2.7)$$

## § 18. Представление гамильтониана ферромагнетика с помощью операторов рождения и уничтожения магныонов

**1. Реализация операторов спина с помощью бозевских операторов.** В главе I мы выразили гамильтониан ферромагнетика через операторы спинов его атомов. С другой стороны, в предыдущем параграфе мы показали, что гамильтониан ферромагнетика в пренебрежении взаимодействиями между магныонами может быть выражен через операторы рождения и уничтожения магныонов. Поэтому возникает фундаментальный вопрос, как связать операторы проекций спина атома с операторами рождения и уничтожения магныонов, иными словами, как построить с помощью операторов  $c^+(\mathbf{k})$ ,  $c(\mathbf{k})$ , удовлетворяющих перестановочным соотношениям (17.2.1), операторы  $s_i^z$ ,  $s_i^\pm$ , удовлетворяющие перестановочным соотношениям (1.3.2).

Для решения этой задачи введем в рассмотрение операторы  $a_i^+$  и  $a_i$ , удовлетворяющие перестановочным

соотношениям

$$[a_l, a_l^+] = \delta_{ll}, \quad (18.1.1)$$

и построим с помощью этих операторов, которые мы будем называть бозевскими операторами, операторы [1]

$$\begin{aligned} s_l^+ &= s_l^x + is_l^y = \sqrt{2s} a_l^+ \sqrt{1 - \frac{a_l^+ a_l}{2s}}, \\ s_l^- &= s_l^x - is_l^y = \sqrt{2s} \sqrt{1 - \frac{a_l^+ a_l}{2s}} a_l, \\ s_l^z &= -s + a_l^+ a_l, \end{aligned} \quad (18.1.2)$$

где радикалы понимаются формально, как бесконечные ряды по степеням  $\frac{a_l^+ a_l}{2s}$ .

Легко убедиться, что построенные таким образом операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям (1.3.2) для операторов спинов. Поэтому операторы  $s_l^+$ ,  $s_l^-$ ,  $s_l^z$  можно, казалось бы, интерпретировать как операторы проекций спинов атомов. Однако следует иметь в виду, что операторы  $s_l^+$  и  $s_l^-$  должны быть эрмитово сопряженными, а оператор  $s_l^z$  — само-сопряженным. Эти условия эрмитовости выполняются, очевидно, только в подпространстве собственных векторов оператора  $\frac{a_l^+ a_l}{2s}$ , которые принадлежат собственным значениям этого оператора, меньшим или равным единице. Поэтому только в этом подпространстве операторы (18.1.2) можно, строго говоря, интерпретировать как операторы спинов атомов.

Перейдем теперь к выяснению связи между операторами  $a_l^+$ ,  $a_l$  и операторами рождения и уничтожения магнов. Так как первые являются функциями координат узлов решетки, а вторые — функциями волновых векторов, то прежде всего мы перейдем к компонентам Фурье операторов  $a_l^+$ ,  $a_l$ ,

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}R_l}, \quad a_l^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}R_l}, \quad (18.1.3)$$

где  $N$  — число элементарных ячеек в теле, и волновой вектор  $\mathbf{k}$  лежит в первой зоне Бриллюэна.

Легко убедиться, что операторы  $a^+(\mathbf{k})$ ,  $a(\mathbf{k})$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = \Delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0, \quad (18.1.4)$$

где

$$\Delta(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{k} = 0, \\ 0, & \mathbf{k} \neq 0, \end{cases}$$

совпадающим с перестановочными соотношениями (17.2.1) для операторов рождения и уничтожения магнонов  $c^+(\mathbf{k})$  и  $c(\mathbf{k})$ . Поэтому можно утверждать, что операторы  $a^+(\mathbf{k})$ ,  $a(\mathbf{k})$  и  $c^+(\mathbf{k})$ ,  $c(\mathbf{k})$  связаны между собой некоторым унитарным преобразованием. Чтобы найти это преобразование, необходимо иметь конкретный вид гамильтониана ферромагнетика, выраженного через операторы спинов его атомов. Предполагая для простоты, что гамильтониан магнитной анизотропии имеет вид

$$\mathcal{H}_a = -\frac{\beta}{s} \mu_0 M_0 \sum_l (s_l^z)^2, \quad \mu_0 = \frac{|e| \hbar}{2mc}, \quad M_0 = \frac{2s\mu_0}{v_0},$$

где  $\beta$  — константа анизотропии (ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии), мы будем исходить из следующего выражения для гамильтониана ферромагнетика:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{1}{2} \sum_{l \neq l'} J(R_{ll'}) s_l s_{l'} + \\ & + 2\mu_0^2 \sum_{l \neq l'} \frac{1}{R_{ll'}^5} \{R_{ll'}^2 s_l s_{l'} - 3(R_{ll'} s_{l'}) (R_{ll'} s_l)\} + \\ & + 2\mu_0 H \delta^{(e)} \sum_l s_l^{(z)} - \frac{\beta}{s} \mu_0 M_0 \sum_l (s_l^z)^2. \end{aligned} \quad (18.1.5)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой гамильтониан обменного взаимодействия, второе слагаемое — гамильтониан магнитного дипольного взаимодействия и третье слагаемое — гамильтониан взаимодействия спинов со сторонним магнитным полем (для простоты мы считаем, что это поле направлено вдоль оси анизотропии).

Выразим гамильтониан ферромагнетика через бозевские операторы  $a^+(\mathbf{k})$  и  $a(\mathbf{k})$ . Запишем (18.1.2) в виде рядов по степеням  $\frac{a_l^+ a_l}{2s}$ :

$$\begin{aligned} s_l^+ &= \sqrt{2s} \left\{ a_l^+ - \frac{1}{4s} a_l^+ a_l^+ a_l + \dots \right\}, \\ s_l^- &= \sqrt{2s} \left\{ a_l - \frac{1}{4s} a_l^+ a_l a_l + \dots \right\}, \\ s_l^z &= -s + a_l^+ a_l \end{aligned} \quad (18.1.6)$$



и подставим эти разложения в (18.1.5). Тогда гамильтониан ферромагнетика представится в виде

$$\mathcal{H}_s = W_0 + \mathcal{H}_s^{(2)} + \mathcal{H}_s^{(3)} + \mathcal{H}_s^{(4)} + \dots \quad (18.1.7)$$

где  $W_0$  не содержит операторов  $a_l^\dagger$ ,  $a_l$ ,

$$\begin{aligned} W_0 &= \\ &= -\frac{s^2}{2} \sum_{l \neq l'} J(R_{ll'}) - 2\mu_0 s H_0^{(e)} N + 2\mu_0 s M_0 v_0 \sum_{l \neq l'} \frac{R_{ll'}^2 - 3z_{ll'}^2}{R_{ll'}^5}, \end{aligned} \quad (18.1.8)$$

$\mathcal{H}_s^{(2)}$  — некоторая квадратичная форма относительно операторов  $a_l^\dagger$ ,  $a_l$ ,  $\mathcal{H}_s^{(3)}$  — форма третьего порядка относительно этих операторов,  $\mathcal{H}_s^{(4)}$  — форма четвертого порядка и т. д.

Величина  $W_0$  представляет собой, очевидно, энергию ферромагнетика в основном состоянии, когда спины рассматриваются как классические величины.

Мы приведем здесь явное выражение только для оператора  $\mathcal{H}_s^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s^{(2)} = \sum_{l \neq m} \left\{ A_1(R_{lm}) a_l^\dagger a_m + A_2(R_{lm}) a_l^\dagger a_l + \frac{1}{2} B(R_{lm}) a_l a_m + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B^*(R_{lm}) a_l^\dagger a_m^\dagger \right\}, \end{aligned} \quad (18.1.9)$$

где

$$A_1(R_{lm}) = -2sJ(R_{lm}) - \frac{2\mu_0^2 s}{R_{lm}^5} (R_{lm}^2 - 3z_{lm}^2),$$

$$A_2(R_{lm}) = 2sJ(R_{lm}) - \frac{4\mu_0^2 s}{R_{lm}^5} (R_{lm}^2 - 3z_{lm}^2) + \frac{2\mu_0}{N} (H_0^{(e)} + \beta M_0),$$

$$B(R_{lm}) = -\frac{6\mu_0^2 s}{R_{lm}^5} (R_{lm}^-)^2, \quad R_{lm}^\pm = x_{lm} \pm iy_{lm}.$$

Переходя в выражении для  $\mathcal{H}_s^{(2)}$  от операторов  $a_l^\dagger$ ,  $a_l$  к их компонентам Фурье согласно формулам (19.1.3), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s^{(2)} = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ A_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} B_{\mathbf{k}} a(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B_{\mathbf{k}}^* a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) \right\}, \end{aligned} \quad (18.1.10)$$

где

$$A_{\mathbf{k}} = A_0 + 2\mu_0^2 s \sum_l \frac{R_{lm}^2 - 3z_{lm}^2}{R_{lm}^5} (1 - e^{i\mathbf{k}R_{lm}}) + 2s (J(0) - J(\mathbf{k})),$$

$$B_{\mathbf{k}} = B_0 + 6\mu_0^2 s \sum_l \frac{(R_{lm}^-)^2}{R_{lm}^5} (1 - e^{i\mathbf{k}R_{lm}}),$$

$$J(\mathbf{k}) = \sum_l J(R_{lm}) e^{i\mathbf{k}R_{lm}}$$

и

$$A_0 = 2\mu_0 (H_0^{(e)} + \beta M_0) - 6\mu_0^2 s \sum_l \frac{R_{lm}^2 - 3z_{lm}^2}{R_{lm}^5},$$

$$B_0 = -6\mu_0^2 s \sum_l \frac{(R_{lm}^-)^2}{R_{lm}^5}.$$

Поступая аналогичным образом, можно представить операторы  $\mathcal{H}_s^{(3)}$ ,  $\mathcal{H}_s^{(4)}$  в виде [2]

$$\mathcal{H}_s^{(3)} = \sum_{123} \{ \Phi_s(12,3) a_1^+ a_2^+ a_3 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \text{э. с.} \},$$

$$\mathcal{H}_s^{(4)} = \sum_{1234} \{ \Phi_s(12,34) a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) + (18.1.11)$$

$$+ \Phi'_s(123,4) a_1^+ a_2^+ a_3^+ a_4 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) + \text{э. с.} \},$$

где  $\Phi_s(12,3)$ ,  $\Phi_s(12,34)$  и  $\Phi'_s(123,4)$  — некоторые функции от волновых векторов  $\mathbf{k}_i$  (мы пользуемся обозначениями  $1 \equiv \mathbf{k}_1$ ,  $2 \equiv \mathbf{k}_2$  и не учитываем процессов переброса).

По порядку величины

$$\Phi_s(12,3) \sim \frac{\mu_0 M_0}{\sqrt{N}}, \quad \Phi'_s(123,4) \sim \frac{\mu_0 M_0}{N}. \quad (18.1.12)$$

Функция  $\Phi_s(12,34)$  в области волновых векторов  $ak \gg \sqrt{\frac{\mu_0 M_0}{J_0}}$  имеет, согласно (18.1.11) и (18.1.5), вид

$$\Phi_s(12,34) = \frac{1}{8N} \{ J(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) + J(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) + J(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) + \\ + J(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) - J(\mathbf{k}_1) - J(\mathbf{k}_2) - J(\mathbf{k}_3) - J(\mathbf{k}_4) \}. \quad (18.1.13)$$

Если  $\sqrt{\frac{\mu_0 M_0}{J_0}} \ll ak \ll 1$  ( $J_0$  — значение обменного интеграла между соседними атомами), то

$$\Phi_s(12,34) \approx - \frac{J_0}{4N} a^2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4). \quad (18.1.14)$$

Наконец, если  $ak \ll \sqrt{\frac{\mu_0 M_0}{J_0}}$ , то

$$\Phi_s(12,34) \sim \frac{\mu_0 M_0}{N}. \quad (18.1.15)$$

Оператор  $\mathcal{H}_s^{(2)}$  представляет собой гамильтониан невзаимодействующих спиновых волн или, выражаясь иначе, гамильтониан идеального газа магнов, а операторы  $\mathcal{H}_s^{(3)}$ ,  $\mathcal{H}_s^{(4)}$  — гамильтонианы взаимодействия магнов друг с другом. Поэтому мы будем пользоваться также обозначениями

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{ss},$$

где

$$\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}_s^{(2)}, \quad \mathcal{H}_{ss} \equiv \mathcal{H}_s^{(3)} + \mathcal{H}_s^{(4)} + \dots$$

**2. Унитарное преобразование.** Мы можем теперь установить вид унитарного преобразования, связывающего бозевские операторы  $a^+(\mathbf{k})$ ,  $a(\mathbf{k})$  и операторы рождения и уничтожения магнов  $c^+(\mathbf{k})$ ,  $c(\mathbf{k})$ . Это преобразование, которое мы запишем в виде [1, 3]

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= u_{\mathbf{k}} c(\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}}^* c^+(-\mathbf{k}), \\ a^+(\mathbf{k}) &= u_{\mathbf{k}}^* c^+(\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}} c(-\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (18.2.1)$$

где  $u_{\mathbf{k}}$  и  $v_{\mathbf{k}}$  — некоторые функции волнового вектора  $\mathbf{k}$ , должно приводить квадратичную форму  $\mathcal{H}_s^{(2)}$  к диагональному виду

$$\mathcal{H}_s^{(2)} = E_s^{(2)} + \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) c^+(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}). \quad (18.2.2)$$

Здесь  $\varepsilon_s(\mathbf{k})$  — энергия магнона с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и  $E_s^{(2)}$  — величина, не содержащая операторов рождения и уничтожения магнов, которую можно интерпретировать как энергию нулевых колебаний в системе спинов.

Покажем, как найти величины  $u_{\mathbf{k}}$  и  $v_{\mathbf{k}}$ . Прежде всего, так как операторы  $a^+(\mathbf{k})$ ,  $a(\mathbf{k})$  и  $c^+(\mathbf{k})$ ,  $c(\mathbf{k})$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям, то  $u_{\mathbf{k}}$  и  $v_{\mathbf{k}}$

должны удовлетворять условию

$$|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1. \quad (18.2.3)$$

Воспользуемся далее квантовомеханическим уравнением движения для  $a(\mathbf{k})$ :

$$\dot{a}(\mathbf{k}) = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_s^{(2)}, a(\mathbf{k})].$$

Подставляя сюда выражение (18.1.10) для  $\mathcal{H}_s^{(2)}$ , получим

$$\dot{a}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{\hbar} A_k a(\mathbf{k}) - \frac{i}{\hbar} B_k^* a^+(-\mathbf{k}),$$

откуда, учитывая (18.2.1),

$$\dot{a}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{\hbar} (A_k u_k + B_k^* v_k) c(\mathbf{k}) - \frac{i}{\hbar} (A_k v_k^* + B_k^* u_k) c^+(-\mathbf{k}).$$

С другой стороны,

$$\dot{a}(\mathbf{k}) = u_k \dot{c}(\mathbf{k}) + v_k^* \dot{c}^+(-\mathbf{k}),$$

где

$$\dot{c}(\mathbf{k}) = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_s^{(2)}, c(\mathbf{k})] = -\frac{i}{\hbar} \varepsilon_s(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}).$$

Сравнение этих формул дает

$$(A_k - \varepsilon_s(\mathbf{k})) u_k + B_k^* v_k = 0,$$

$$B_k u_k + (A_k + \varepsilon_s(\mathbf{k})) v_k = 0,$$

откуда

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \sqrt{A_k^2 - |B_k|^2}. \quad (18.2.4)$$

Используя (18.2.3), найдем коэффициенты  $u_k$  и  $v_k$ :

$$u_k = \sqrt{\frac{A_k + \varepsilon_s(\mathbf{k})}{2\varepsilon_s(\mathbf{k})}}, \quad v_k = -\frac{B_k}{|B_k|} \sqrt{\frac{A_k - \varepsilon_s(\mathbf{k})}{2\varepsilon_s(\mathbf{k})}} \quad (18.2.5)$$

(произвольный фазовый множитель в  $u_k$  и  $v_k$  выбран равным единице).

Заметим, что в пренебрежении релятивистскими взаимодействиями  $B_k = 0$  и  $u_k = 1$ ,  $v_k = 0$ , т. е. унитарное преобразование (18.2.1) в этом случае вырождается в тождественное преобразование.

Энергия магнона в пренебрежении релятивистскими взаимодействиями определяется, согласно (18.2.4), (18.1.10), формулой

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = A_k = 2\mu_0 H_0^{(e)} + s(J(0) - J(\mathbf{k})).$$

Эта формула переходит при  $ak \ll 1$  в формулу (6.2.4).

Приведем, наконец, выражение для энергии нулевых колебаний:

$$E_0^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon_s(\mathbf{k}) - A_{\mathbf{k}}). \quad (18.2.6)$$

Сложив  $E_0^{(2)}$  и  $W_0$ , найдем энергию основного состояния ферромагнетика:

$$E_0 = E_0^{(2)} + W_0 = -s^2 N \sum_l J(R_{lm}) - 2\mu_0 N s H_0^{(e)} + \\ + (2\mu_0 s)^2 \sum_{l \neq m} \frac{R_{lm}^2 - 3z_{lm}^2}{R_{lm}^5} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon_s(\mathbf{k}) - A_{\mathbf{k}}). \quad (18.2.7)$$

Легко убедиться, что энергия нулевых колебаний мала по сравнению с классической энергией основного состояния, т. е.  $E_0^{(2)} \ll W_0$ .

**3. Энергия магнона.** Определим величины  $A_{\mathbf{k}}$  и  $B_{\mathbf{k}}$ . Найдем прежде всего суммы, определяющие  $A_0$  и  $B_0$ . Поступая так же, как в § 2, имеем

$$\sum_l \frac{R_{lm}^2 - 3z_{lm}^2}{R_{lm}^5} = - \sum_l \frac{\partial^2}{\partial z_{lm}^2} \frac{1}{R_{lm}} = -\beta_{zz} - \int dr \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot \frac{1}{r}, \\ 3 \sum_l \frac{(R_{lm}^-)^2}{R_{lm}^5} = \sum_l \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{lm}^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_{lm}^2} - 2l \frac{\partial^2}{\partial x_{lm} \partial y_{lm}} \right) \frac{1}{R_{lm}} = \\ = \beta_{xx} - \beta_{yy} - 2l\beta_{xy} - \int dr \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2l \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \frac{1}{r},$$

где интегрирование производится по объему тела (имеющему форму эллипсоида), из которого исключен объем сферы бесконечно малого радиуса с центром в начале координат, и величины  $\beta_{ij}$  определяются формулами

$$\beta_{ij} = v_0 \sum_{l \neq l'} \frac{\partial^2}{\partial R_{ll'}^i \partial R_{ll'}^j} \cdot \frac{1}{R_{ll'}} \\ (R_{ll'} < \rho)$$

(величины  $\beta_{ij}$  характеризуют энергию магнитной анизотропии, обусловленную магнитным дипольным взаимодействием, см. § 2).

Преобразовав объемные интегралы, входящие в выражения для сумм, в поверхностные,

$$\int dr \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi}{3} - \int_S \frac{z}{r^3} dS_z,$$

$$\int dr \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \frac{1}{r} =$$

$$= - \int_S \frac{1}{r^3} (x dS_x - y dS_y - 2ix dS_y),$$

где  $S$  — поверхность эллипсоида, и замечая, что, согласно (2.2.2), компоненты тензора размагничивающих коэффициентов можно представить в виде

$$N_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{x_i}{r^3} dS_j,$$

получим окончательно

$$v_0 \sum_l \frac{R_{lm}^2 - 3z_{lm}^2}{R_{lm}^5} = - \left( \beta_{zz} - 4\pi N_3 + \frac{4\pi}{3} \right),$$

$$3v_0 \sum_l \frac{(R_{lm}^-)^2}{R_{lm}^5} = (\beta_{xx} - \beta_{yy} - 2i\beta_{xy} + 4\pi(N_1 - N_2))$$

(оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  совпадают с главными осями эллипсоида).

В случае простой кубической решетки  $\beta_{ij} = 0$  и величины  $A_0$ ,  $B_0$  имеют вид

$$A_0 = 2\mu_0 H_0^{(i)} + 4\pi\mu_0 M_0 (N_1 + N_2) + 2\mu_0 \beta M_0, \quad (18.3.1)$$

$$B_0 = -4\pi\mu_0 M_0 (N_1 - N_2).$$

Величины  $A_0$  и  $B_0$  определяют энергию спиновой волны с волновым вектором  $\mathbf{k} = 0$ :

$$\epsilon_0 = 2\mu_0 \times$$

$$\times \sqrt{[H_0^{(e)} + \beta M_0 + 4\pi M_0 (N_1 - N_3)] [H_0^{(e)} + \beta M_0 + 4\pi M_0 (N_2 - N_3)]}.$$

Сравнивая эту формулу с (10.1.7), мы видим, что

$$\epsilon_0 = \hbar\omega^{(r)}, \quad (18.3.2)$$

где  $\omega^{(r)}$  — частота однородного ферромагнитного резонанса.

Найдем теперь величины  $A_k$  и  $B_k$  при  $\frac{1}{L} \ll k \ll a^{-1}$ . В этом случае можно заменить суммы, входящие в выражения

для  $A_{\mathbf{k}}$  и  $B_{\mathbf{k}}$  интегралами, которые вычисляются элементарно. В результате получим

$$v_0 \sum_l \frac{R_{lm}^2 - 3z_{lm}^2}{R_{lm}^5} (1 - e^{ikR_{lm}}) = 4\pi N_3 - 4\pi \frac{k_z^2}{k^2},$$

$$3v_0 \sum_l \frac{(R_{lm}^-)^2}{R_{lm}^5} (1 - e^{ikR_{lm}}) = 4\pi (N_1 - N_2) + 4\pi \frac{(k_x - ik_y)^2}{k^2}.$$

Считая для простоты, что решетка является простой кубической, можно пользоваться при  $ak \ll 1$  следующим выражением для  $J(\mathbf{k})$ :

$$J(\mathbf{k}) = J(0) - J_0 \cdot (ak)^2,$$

где  $J_0$  — обменный интеграл между ближайшими соседними атомами. В результате мы получим следующие формулы для  $A_{\mathbf{k}}$  и  $B_{\mathbf{k}}$ :

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{k}} &= 2sJ(ak)^2 + 2\mu_0 H_0^{(i)} + 2\mu_0 \beta M_0 + 4\pi\mu_0 M_0 \sin^2 \vartheta_{\mathbf{k}}, \\ B_{\mathbf{k}} &= 4\pi\mu_0 M_0 \sin^2 \vartheta_{\mathbf{k}} e^{-2i\varphi_{\mathbf{k}}}, \end{aligned} \quad (18.3.3)$$

где  $\vartheta_{\mathbf{k}}$  и  $\varphi_{\mathbf{k}}$  — полярный и азимутальный углы волнового вектора  $\mathbf{k}$ .

Сравнивая эти формулы с (6.1.3), (6.2.3), мы видим, что энергия спиновой волны  $\varepsilon_s(\mathbf{k})$  равна (как и должно быть)

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \hbar\omega_s(\mathbf{k}), \quad (18.3.4)$$

где  $\omega_s(\mathbf{k})$  — частота спиновой волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$ .

При квантовании спиновых волн мы исходили из микроскопического гамильтониана ферромагнетика, выраженного через операторы спинов атомов. Но квантование спиновых волн можно формально проводить несколько иным путем [4], исходя из макроскопической энергии ферромагнетика, если считать компоненты вектора  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  не классическими величинами, а операторами, подчиняющимися перестановочным соотношениям

$$[M_l(\mathbf{r}), M_k(\mathbf{r}')] = 2i\mu_0 \varepsilon_{ikl} M_l(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (18.3.5)$$

Такой подход, как и все макроскопическое рассмотрение, является законным только в случае длинных волн, когда  $ak \ll 1$ .

Переходя к компонентам Фурье отклонения магнитного момента от равновесного значения

$$M(r) - M_0 = m(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k m(k) e^{ikr}$$

и полагая

$$\begin{aligned} m_+(k) &= m_x(k) + im_y(k) = \\ &= \sqrt{2\mu_0 M_0} \left\{ a^+(-k) - \frac{\mu_0}{4M_0 V} \sum_{k' k'' k'''} a^+(k') a^+(k'') \times \right. \\ &\quad \left. \times a(k''') \Delta(k + k' + k'' - k''') + \dots \right\}, \quad (18.3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_-(k) &= m_x(k) - im_y(k) = \\ &= \sqrt{2\mu_0 M_0} \left\{ a(k) - \frac{\mu_0}{4M_0 V} \sum_{k' k'' k'''} a^+(k') a(k'') a(k''') \times \right. \\ &\quad \left. \times \Delta(k + k' - k'' - k''') + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$m_z(k) = -\frac{\mu_0}{\sqrt{V}} \sum_{k' k''} a^+(k') a(k'') \Delta(k + k' - k''),$$

легко убедиться, что перестановочные соотношения (18.3.5) удовлетворяются, если операторы  $a^+(k)$  и  $a(k)$  подчиняются перестановочным соотношениям (18.1.4).

## § 19. Связанные состояния двух магнонов

**1. Уравнение Шредингера для связанных состояний двух магнонов.** Так как магноны взаимодействуют между собой, то возникает вопрос, может ли это взаимодействие приводить к образованию связанных состояний магнонов. Мы покажем, что в системе двух магнонов возможно существование связанных состояний [5, 6].

Чтобы упростить исследование будем учитывать только обменное взаимодействие, т. е. будем считать, что гамильтониан ферромагнетика имеет вид

$$\mathcal{H} = 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l s_l^z - \frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) s_l s_m.$$

Так как оператор  $S_z = \sum_l s_l^z$  коммутирует с гамильтонианом  $\mathcal{H}$ , то собственные состояния  $\mathcal{H}$  можно характеризовать собственными значениями оператора  $S_z$ .



Мы будем обозначать общие собственные векторы операторов  $\mathcal{H}$  и  $S_z$  через  $|\mathfrak{N}\rangle$ :

$$S_z |\mathfrak{N}\rangle = (\mathfrak{N} - Ns) |\mathfrak{N}\rangle, \quad (19.1.1)$$

где  $\mathfrak{N} = 0, 1, \dots, 2Ns$ . Основному состоянию ферромагнетика соответствует, очевидно, значение  $\mathfrak{N}$ , равное нулю.

Вектор основного состояния  $|0\rangle$  удовлетворяет уравнениям

$$S_z |0\rangle = -Ns |0\rangle, \quad s_l^- |0\rangle = 0, \quad (19.1.2)$$

где  $s_l^\pm = s_l^x \pm is_l^y$ . Так как

$$[s_l^z, s_l^\pm] = \pm s_l^\pm \delta_{ll'},$$

то второе уравнение гарантирует отсутствие состояний с проекцией спина, меньшей чем  $-Ns$ .

Поддействував на вектор состояния  $|0\rangle$  каким-либо из операторов  $s_l^+$ , мы получим состояние с  $\mathfrak{N} = 1$ . Но состояние  $s_l^+ |0\rangle$  не будет собственным состоянием гамильтониана ферромагнетика  $\mathcal{H}$ . Легко убедиться, однако, что, образовав суперпозицию этих состояний:

$$|1_k\rangle = \sum_l e^{ikR_l} s_l^+ |0\rangle, \quad (19.1.3)$$

мы получим собственный вектор гамильтониана  $\mathcal{H}$  и оператора  $S_z$ :

$$\mathcal{H} |1_k\rangle = (E_0 + \varepsilon_s(\mathbf{k})) |1_k\rangle, \quad S_z |1_k\rangle = (1 - Ns) |1_k\rangle, \quad (19.1.4)$$

где  $E_0 = -2\mu_0 Ns H_0^{(e)} - s^2 N \sum_l J(R_{lm})$  — энергия основного состояния ферромагнетика и  $\varepsilon_s(\mathbf{k}) = 2\mu_0 H_0^{(e)} + s(J(0) - J(\mathbf{k}))$ . Так как, согласно (18.1.2),

$$s_l^+ |0\rangle = a_l^+ |0\rangle,$$

то состояние  $|1_k\rangle$  представляет собой состояние с одним магноном с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и энергией  $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ .

Если подействовать на вектор состояния  $|0\rangle$  произведением двух операторов типа  $s_l^+$ , то мы получим состояние с  $\mathfrak{N} = 2$ . В этом состоянии имеется два магнона, которые не обладают, однако, определенными импульсами.

Наиболее общая форма вектора состояния, содержащего два магнона, имеет, очевидно, вид

$$|2\rangle = \sum_{ij} \psi(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) s_i^+ s_j^+ |0\rangle, \quad (19.1.5)$$

где величины  $\psi(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \psi(\mathbf{R}_j, \mathbf{R}_i)$  можно интерпретировать как волновую функцию двух магнов в координатном представлении.

Нас интересуют состояния  $|2\rangle$ , обладающие определенной энергией. Эти состояния удовлетворяют уравнению Шредингера

$$\mathcal{H}|2\rangle = E_2|2\rangle. \quad (19.1.6)$$

Так как  $\mathcal{H}|0\rangle = E_0|0\rangle$ , то

$$\sum_{ij} \psi(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) [s_i^+ s_j^+, \mathcal{H}] |0\rangle = -\mathcal{E} \sum_{ij} \psi(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) s_i^+ s_j^+ |0\rangle, \quad (19.1.7)$$

где  $\mathcal{E} = E_2 - E_0$ .

Чтобы упростить исследование этого уравнения, мы будем учитывать обменное взаимодействие только между ближайшими атомами. В этом случае гамильтониан  $\mathcal{H}$  имеет вид

$$\mathcal{H} = 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l s_l^z - \frac{1}{2} J_0 \sum_{l, \lambda} s_l s_{l+\lambda},$$

где  $J_0$  — обменный интеграл между ближайшими соседними атомами и суммирование по  $\lambda$  обозначает суммирование по ближайшим к  $l$ -му атому соседним атомам.

Используя это выражение для гамильтониана и перестановочные соотношения

$$[s_i^z, s_i^\pm] = \pm s_i^\pm \delta_{ii}, \quad [s_i^+, s_i^-] = 2s_i^z \delta_{ii},$$

перепишем уравнение (19.1.7) в виде

$$\begin{aligned} (\mathcal{E} - 2\mu_0 H_0^{(e)} + 4s J_0 \gamma) \psi(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \\ = -s J_0 \sum_{\rho} \{ \psi(\mathbf{R}_j + \rho, \mathbf{R}_i) + \psi(\mathbf{R}_i + \rho, \mathbf{R}_j) \} + \\ + J_0 \left\{ \frac{1}{2} (\psi(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_i) + \psi(\mathbf{R}_j, \mathbf{R}_j)) - \psi(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) \right\} \sum_{\rho} \Delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j - \rho), \end{aligned} \quad (19.1.8)$$

где  $\rho$  — вектор, соединяющий ближайшие соседние атомы,  $\gamma$  — число ближайших соседей и

$$\Delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} = 0, \\ 0, & \mathbf{r} \neq 0. \end{cases}$$

Чтобы упростить это уравнение, перейдем к импульсному представлению:

$$\psi(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}), \quad (19.1.9)$$

где

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_j), \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j$$

(суммирование по  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{K}$  производится по первой зоне Бриллюэна).

Подставляя (19.1.9) в (19.1.8), получим

$$(\mathcal{E} - \varepsilon_{\mathbf{K}}(\mathbf{k})) \psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}'), \quad (19.1.10)$$

где

$$V_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 2J_0 \sum_{\rho} \cos \mathbf{k}\rho \left( \cos \frac{1}{2} \mathbf{K}\rho - \cos \mathbf{k}'\rho \right)$$

и  $\varepsilon_{\mathbf{K}}(\mathbf{k})$  — сумма энергий двух спиновых волн с волновыми векторами  $\mathbf{k}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{K} + \mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{K} - \mathbf{k}$ :

$$\varepsilon_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2) = 4\mu_0 H_0^{(e)} + 2sJ_0 \sum_{\rho} \left( 1 - \cos \frac{1}{2} \mathbf{K}\rho \cos \mathbf{k}\rho \right). \quad (19.1.11)$$

Покажем, что интегральное уравнение (19.1.10) может быть сведено к конечной системе алгебраических уравнений. Введем для этого величины

$$\varphi_{\mathbf{K}}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) \left( \cos \frac{1}{2} \mathbf{K}\rho - \cos \mathbf{k}\rho \right).$$

Тогда, согласно (19.1.10),

$$2s\varphi_{\mathbf{K}}(\rho) = \sum_{\rho'} \varphi_{\mathbf{K}}(\rho') B_{\mathbf{K}}(\rho, \rho'), \quad (19.1.12)$$

где

$$B_{\mathbf{K}}(\rho, \rho') = \frac{4sJ_0}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\cos \mathbf{k}\rho \left( \cos \frac{1}{2} \mathbf{K}\rho' - \cos \mathbf{k}\rho' \right)}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{K}}(\mathbf{k})}.$$

Легко видеть, что

$$\psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) = \frac{2J_0}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{K}}(\mathbf{k})} \sum_{\rho} \cos \mathbf{k}\rho \varphi_{\mathbf{K}}(\rho). \quad (19.1.13)$$

Приравняв нулю детерминант системы (19.1.12), получим уравнение для определения энергии  $\mathcal{E}$  состояний с двумя магнонами [6]

$$\det \{-2s\Delta(\rho - \rho') + B_K(\rho, \rho')\} = 0. \quad (19.1.14)$$

Легко видеть, что это уравнение при заданном  $K$  имеет  $N$  корней, равномерно заполняющих интервал энергий:

$$\min \epsilon_K(\mathbf{k}) < \mathcal{E} < \max \epsilon_K(\mathbf{k}) \quad (19.1.15)$$

(переходящих при  $N \rightarrow \infty$  в непрерывный спектр собственных значений гамильтониана  $\mathcal{H}$ ). Но, кроме того, уравнение (19.1.14) может также иметь (при  $N \rightarrow \infty$ ) изолированные корни. Состояния, соответствующие этим корням, и представляют собой связанные состояния двух магнонов.

Заметим, что из формул (19.1.10) и (19.1.12) следует, что величина  $K$  (будем называть ее квазиимпульсом связанного состояния двух магнонов) представляет собой константу движения. Однако эта величина не входит тривиальным образом ни в энергию  $\mathcal{E}$  связанного состояния двух магнонов (в виде слагаемого  $K^2/2M$ , где  $M$  — некоторая константа), ни в волновую функцию связанного состояния (в виде множителя  $e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}$  в волновой функции в координатном представлении). Это связано с тем обстоятельством, что гамильтониан  $\mathcal{H}$  не инвариантен относительно преобразований Галилея.

**2. Спектр связанных состояний.** Перейдем к исследованию спектра связанных состояний двух магнонов. Величины  $B_K(\rho, \rho')$ , входящие в уравнение (19.1.14), могут быть, очевидно, записаны в виде

$$B_K(\rho, \rho') = \frac{v_0}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{\cos \mathbf{k}\rho (\cos \mathbf{k}\rho' - \alpha_\rho)}{t - \frac{1}{2} \sum_{\rho''} \alpha_{\rho''} \cos \mathbf{k}\rho''}, \quad (19.2.1)$$

где  $t = 3 - \frac{1}{4sJ_0} (\mathcal{E} - 4\mu_0 H_0^{(e)})$ ,  $\alpha_\rho = \cos \frac{1}{2} \mathbf{K}\rho$  и интегрирование производится по первой зоне Бриллюэна. Так как  $-\pi \leq \mathbf{K}\rho \leq \pi$ , то  $0 \leq \alpha_\rho \leq 1$ .

Величины  $B_K(\rho, \rho')$ , как видно из (19.2.1), являются аналитическими функциями в плоскости комплексной переменной  $t$  с разрезом вдоль вещественной оси,  $-\sum_{\rho} \alpha_{\rho} \leq t \leq \sum_{\rho} \alpha_{\rho}$ . В этом интервале, согласно (19.1.15), лежит непрерывный спектр собственных значений гамильтониана.

Дискретный спектр гамильтониана (если он существует) лежит вне этого интервала, т. е. при

$$|t| \geq \sum_{\rho} \alpha_{\rho}.$$

Исходя из физических соображений, область существования связанных состояний можно еще более сузить. Действительно, по смыслу связанного состояния  $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(\mathbf{K}) < \varepsilon_{\mathbf{K}}(\mathbf{k})$  для всех значений  $\mathbf{k}$ . Поэтому  $\mathcal{E}(\mathbf{K}) < \varepsilon_{\mathbf{K}}(0) = 4\mu_0 H_0^{(e)} + 4sJ_0(3 - \sum_{\rho} \alpha_{\rho})$ . Отсюда следует, что  $t \geq \sum_{\rho} \alpha_{\rho}$ .

Чтобы установить верхний предел для переменной  $t$ , заметим, что уравнение (19.1.14) не содержит явно магнитного поля  $H_0^{(e)}$ . Поэтому для нахождения верхнего предела переменной  $t$  достаточно рассмотреть случай  $H_0^{(e)} = 0$ . Так как  $\mathcal{E} > 0$  (в силу устойчивости основного состояния ферромагнетика), то  $t < 3$ . Это неравенство определяет верхний предел переменной  $t$  и при наличии магнитного поля.

Таким образом, область существования связанных состояний определяется неравенствами

$$\sum_{\rho} \alpha_{\rho} \leq t \leq 3. \quad (19.2.2)$$

Дисперсионное уравнение (19.1.14) является очень сложным. Поэтому, чтобы упростить задачу, мы рассмотрим сначала случаи одномерной и двумерной решеток. Величины  $B_{\mathbf{K}}(\rho, \rho')$  сохраняют при этом формально свой вид (19.2.1), если под  $\mathbf{k}$  и  $\rho$  понимать одномерные и двумерные векторы, а под  $v_0/(2\pi)^3$  — величину  $(a/2\pi)^d$ , где  $d$  — размерность решетки. Параметр  $t$  связан при этом с  $\mathcal{E}$  соотношением  $t = d - \frac{1}{4sJ_0}(\mathcal{E} - 4\mu_0 H_0^{(e)})$ , и область связанных состояний определяется неравенствами

$$\sum_{\rho} \alpha_{\rho} \leq t \leq d. \quad (19.2.3)$$

Рассмотрим сначала одномерную решетку. Величина  $B_{\mathbf{K}}$  равна в этом случае

$$B_{\mathbf{K}} = \frac{t - \alpha^2}{\alpha^2} \cdot \frac{|t| - \sqrt{t^2 - \alpha^2}}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}},$$

и дисперсионное уравнение (19.1.14) принимает вид

$$2s\alpha^2(t^2 - \alpha^2)^{1/2} = (t - \alpha^2)(\pm t - \sqrt{t^2 - \alpha^2}), \quad (19.2.4)$$

где нижний знак соответствует случаю  $t < -\alpha$ , а верхний знак — случаю  $t > \alpha$ . Так как при  $t < -\alpha$  левая и правая части этого уравнения имеют противоположные знаки, то оно не имеет решений при  $t < -\alpha$ .

Если уравнение (19.2.4) при  $t > 0$  переписать в виде

$$p(t) = q(t),$$

где

$$p(t) = 4st^2[t + \alpha^2(s-1)], \quad q(t) = [t + (2s-1)\alpha^2]^2,$$

то очевидные неравенства  $p(\alpha) \leq q(\alpha)$  и  $p(1) \geq q(1)$  показывают, что  $\alpha \leq t \leq 1$ . Эти неравенства находятся в соответствии с (19.2.3) при  $d=1$ .

При  $s=1/2$  уравнение (19.2.4) имеет единственное решение  $t(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \alpha^2) < 1$ . Этому решению соответствует энергия связанного состояния\*):

$$\mathcal{E}(K) = 4\mu_\nu H_0^{(e)} + \frac{1}{2} J_0 (1 - \cos K\rho). \quad (19.2.5)$$

На рис. 6 показана структура спектра двухмагнетонных состояний в одномерном случае ( $d=1$ ). Непрерывной части спектра соответствует область  $-\alpha \leq t \leq \alpha$  (на рис. 6 она заштрихована). Любому значению  $\alpha$  в интервале  $0 \leq \alpha \leq 1$  соответствует единственное связанное состояние при  $\alpha \leq t(\alpha) \leq 1$ , причем, как легко видеть,  $t(0) = \frac{1}{4s}$ . Значение  $t(\alpha) = 1$  достигается при  $\alpha = 1$ .

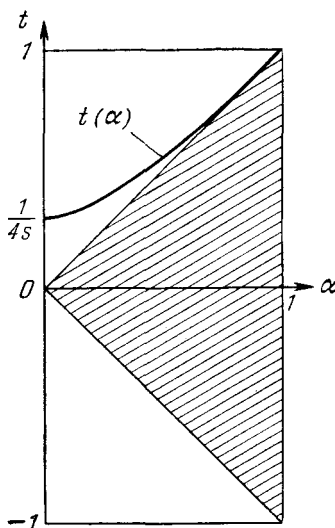


Рис. 6.

Перейдем теперь к рассмотрению связанных состояний в двумерном случае ( $d=2$ ). Величины  $B_K$  в этом случае могут быть выражены через полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода. Мы не будем этого здесь делать, а ограничимся рассмотрением только некоторых частных случаев.

\*) Этот случай был впервые исследован Бете [5].

Пусть сначала  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Можно показать, что в этом случае в интервале  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2s} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right)$  имеется два связанных состояния  $t_1(\alpha)$ ,  $t_2(\alpha)$ , причем  $t_1(0) = t_2(0) = \frac{1}{4s}$ .

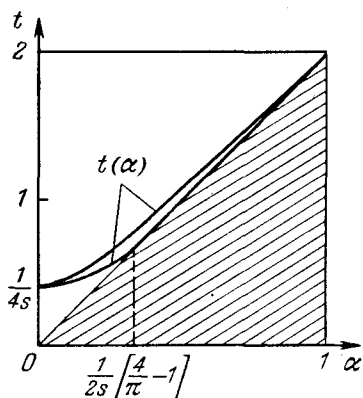


Рис. 7.

Состояние  $t_1(\alpha)$  при  $\alpha = \frac{1}{2s} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right)$  примыкает к непрерывному спектру. При  $\alpha > \frac{1}{2s} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right)$  имеется только одно связанное состояние  $t_2(\alpha)$ , причем  $t_2(1) = 2$ . Структура спектра двухмагнитных состояний при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  показана на рис. 7, из которого видно, что  $2\alpha \leq t_1, t_2 < 2$ . Это находится в соответствии с неравенствами (19.2.3).

Если  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha$ , то исследование корней уравнения (19.1.14) производится совершенно элементарно. В этом случае в интервале  $0 \leq \alpha \leq 1$  имеется два связанных состояния. Одно из этих состояний  $t_1(\alpha)$  в точности совпадает со связанным состоянием в одномерном случае, другое же определяется формулой

$$t_2(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1}{4s}\right)^2 + \alpha^2}. \quad (19.2.6)$$

Структура спектра в этом случае показана на рис. 8.

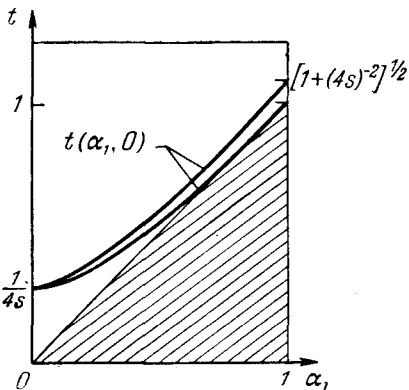


Рис. 8.

Наконец, рис. 9 служит для иллюстрации структуры спектра в общем виде. По осям отложены величины  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . В области изменения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответствующей заштрихованной части рисунка, существует одно связанное состояние. В остальной области изменения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  имеется два связанных состояния.

Перейдем теперь к рассмотрению связанных состояний в грехмерном случае ( $d = 3$ ).

Пусть сначала  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ . Тогда уравнение (19.1.14) распадается на два совпадающих уравнения:

$$\frac{2s\alpha}{3} = \frac{t}{3\alpha} D_1\left(\frac{t}{\alpha}\right) - D_2\left(\frac{t}{\alpha}\right) \quad (19.2.7)$$

и уравнение

$$\frac{2s\alpha}{3} = \left(\frac{t}{3\alpha} - \alpha\right) D_1\left(\frac{t}{\alpha}\right), \quad (19.2.8)$$

где

$$D_1(x) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos k_1 dk_1 dk_2 dk_3}{x - \cos k_1 - \cos k_2 - \cos k_3},$$

$$D_2(x) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos k_1 \cos k_2 dk_1 dk_2 dk_3}{x - \cos k_1 - \cos k_2 - \cos k_3}.$$

Уравнению (19.2.7) соответствует двукратно вырожденное связанное состояние, а уравнению (19.2.8) — невырожденное связанное состояние.

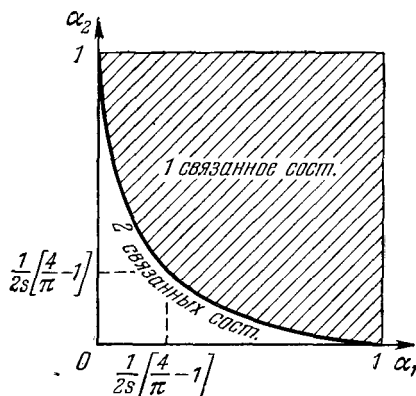


Рис. 9.

Структура спектра двухмагнонных состояний в этом случае показана на рис. 10. Из рисунка видно, что не существует связанных состояний при  $\alpha$ , близких к единице (малые  $K$ ). Так как граница непрерывного спектра определяется



уравнением  $t = 3\alpha$ , то двукратно вырожденное связанное состояние ответвляется от непрерывного спектра при

$$\alpha = \frac{3}{2s} (D_1(3) - D_2(3)) = \frac{0,18}{2s},$$

а невырожденное состояние при

$$\alpha = D_1(3) \left( \frac{2s}{3} + D_1(3) \right)^{-1}, \quad D_1(3) = 0,17.$$

При  $\alpha = 0$  величина  $t(\alpha)$  равна  $1/4s$  как для уравнения (19.2.7), так и для уравнения (19.2.8).

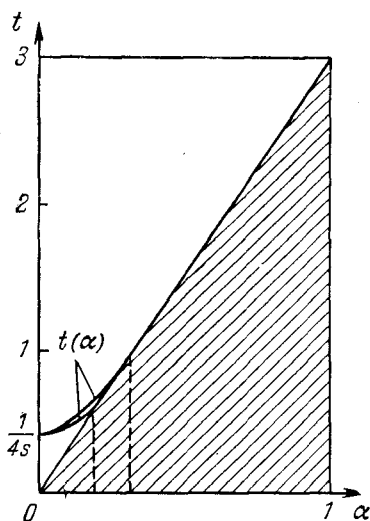


Рис. 10.

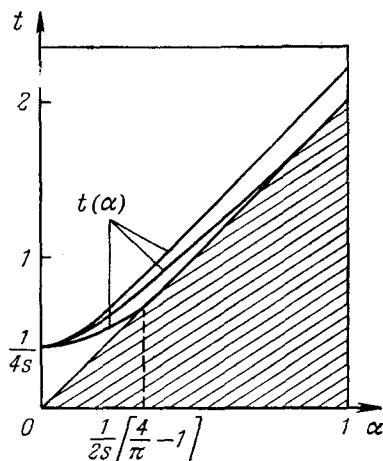


Рис. 11.

Исследование случая  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = \alpha$  сводится к решению уравнения (19.1.14) для одномерной и двумерной решеток. Структура спектра при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  изображена на рис. 11. Из этого рисунка видно, что в области  $0 < \alpha < \frac{1}{2s} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right)$  имеется три связанных состояния, а в области  $\frac{1}{2s} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) < \alpha < 1$  — два связанных состояния.

На рис. 12 качественно показано число связанных состояний в различных областях пространства  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в общем случае. Из рисунка видно, что в области 0

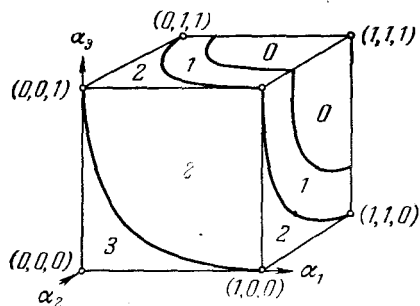


Рис. 12.

вблизи точки  $\alpha_i \approx 1$  (малые  $K$ ) вообще нет связанных состояний; в области 1 имеется одно связанное состояние; в области 2 — два связанных состояния; и, наконец, в области 3 — три связанных состояния. Этот рисунок, очевидно, качественно согласуется с рис. 10 и 11.

## ГЛАВА VI

### ТЕРМОДИНАМИКА ФЕРРОМАГНЕТИКОВ И АНТИФЕРРОМАГНЕТИКОВ

#### § 20. Термодинамика ферромагнетиков

**1. Термодинамический потенциал идеального газа магнонов.** Выяснив характер статистики, которой подчиняются спиновые волны — магноны и зная закон их дисперсии, мы можем перейти к исследованию термодинамических свойств ферромагнетиков и антиферромагнетиков.

Воспользуемся с этой целью известным соотношением [1]

$$\Omega = -T \ln \text{Sp } e^{-\frac{\mathcal{H}}{T}}, \quad (20.1.1)$$

связывающим термодинамический потенциал  $\Omega$  произвольной, системы с ее гамильтонианом  $\mathcal{H}$ . Гамильтониан магнитоупорядоченных кристаллов складывается из гамильтониана спиновой системы и гамильтониана решетки. Поэтому в термодинамический потенциал таких кристаллов вносят вклад как спиновая система, так и решетка. Мы рассмотрим здесь вклад спиновой системы и будем поэтому под  $\mathcal{H}$  понимать гамильтониан спиновой системы  $\mathcal{H}_s$ . Этот гамильтониан можно представить в виде

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{ss},$$

где  $\mathcal{H}_0$  — гамильтониан идеального газа магнонов и  $\mathcal{H}_{ss}$  — гамильтониан взаимодействия между магнонами.

В области достаточно низких температур можно считать что магноны образуют идеальный газ частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна. Для этого необходимо, чтобы температура удовлетворяла условию  $T \ll T_c$  для ферромагнетиков и  $T \ll T_N$  — для антиферромагнетиков. В этих

условиях можно сначала не учитывать гамильтониана взаимодействия  $\mathcal{H}_{ss}$  и исходить из следующего выражения для термодинамического потенциала:

$$\Omega_0 = -T \ln \text{Sp} e^{-\frac{\mathcal{H}_0}{T}}. \quad (20.1.2)$$

Подставляя сюда

$$\mathcal{H}_0 = E_0(H_0^{(e)}) + \sum_{\mathbf{k}j} \varepsilon_{sj}(\mathbf{k}) c_j^+(\mathbf{k}) c_j(\mathbf{k}),$$

где  $\varepsilon_{sj}(\mathbf{k})$  — энергия магнона сорта  $j$  с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и  $c_j^+(\mathbf{k})$ ,  $c_j(\mathbf{k})$  — операторы рождения и уничтожения соответствующего магнона, получим следующее выражение для термодинамического потенциала идеального газа магнонов:

$$\Omega_0 = E_0(H_0^{(e)}) + T \sum_{\mathbf{k}j} \ln \left( 1 - e^{-\frac{\varepsilon_{sj}(\mathbf{k})}{T}} \right). \quad (20.1.3)$$

Равновесная плотность магнитного момента  $M(T, H_0^{(e)})$  и спиновая теплоемкость  $c_s(T, H_0^{(e)})$  магнитоупорядоченного кристалла связаны с  $\Omega$  соотношениями

$$M = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial H_0^{(e)}}, \quad c_s = -\frac{T}{V} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2}, \quad (20.1.4)$$

где  $V$  — объем тела. Для идеального газа магнонов эти формулы приобретают, согласно (20.1.3), вид

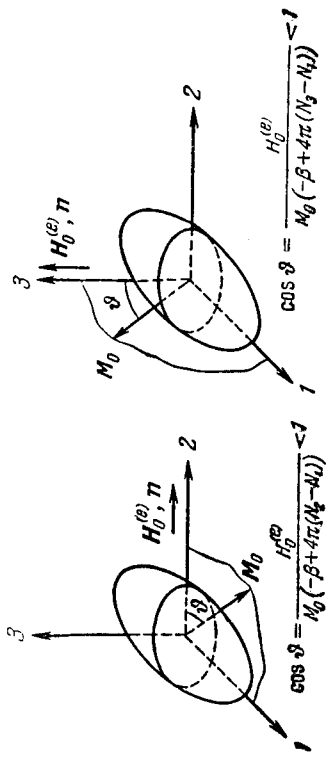
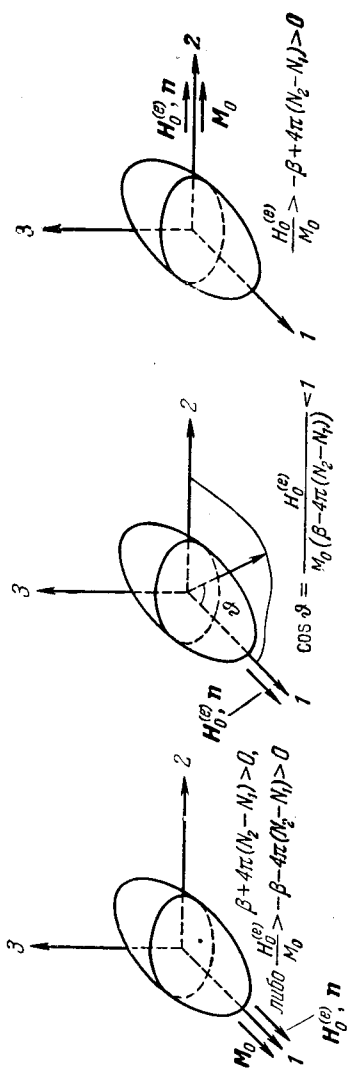
$$\begin{aligned} M(T, H_0^{(e)}) &= \\ &= -\frac{1}{V} \frac{\partial E_0}{\partial H_0^{(e)}} - \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_j \int d\mathbf{k} \frac{\partial \varepsilon_{sj}(\mathbf{k})}{\partial H_0^{(e)}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_{sj}(\mathbf{k})}{T}} - 1}, \quad (20.1.5) \\ c_s(T, H_0^{(e)}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \int d\mathbf{k} \frac{\varepsilon_{sj}(\mathbf{k})}{e^{\frac{\varepsilon_{sj}(\mathbf{k})}{T}} - 1}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в формуле для  $M$  представляет собой плотность магнитного момента при  $T = 0$ , а второе слагаемое — поправку к плотности магнитного момента, обусловленную конечной температурой спиновых волн.

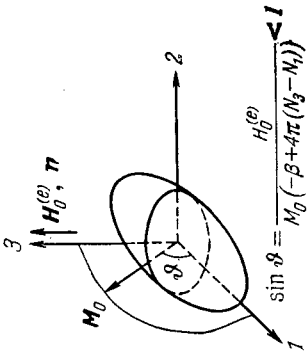
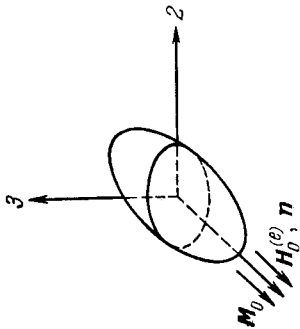
**2. Равновесный магнитный момент и спиновая теплоемкость ферромагнетиков.** Перейдем к определению равновесного магнитного момента и спиновой теплоемкости ферромагнетиков.

Равновесные состояния ферромагнетиков

$\beta < 0, N_3 > N_2 > N_1$



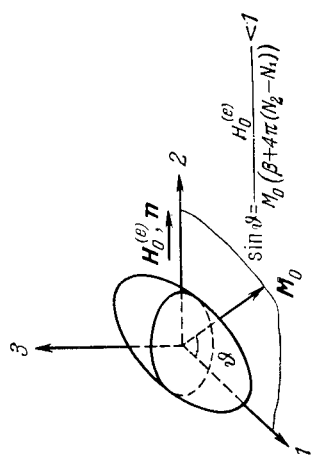
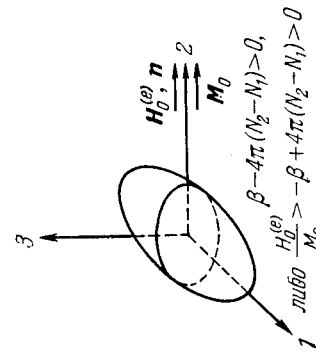
$\beta > 0, N_3 > N_2 > N_1$



$$\mu_1 \delta \omega \frac{H_0^{(e)}}{M_0} > \beta + 4\pi(N_3 - N_1) > 0,$$

$$\beta - 4\pi(N_3 - N_1) > 0,$$

$$\sin \delta = \frac{H_0^{(e)}}{M_0 (-\beta + 4\pi(N_3 - N_1))} < 1$$



$$\mu_1 \delta \omega \frac{H_0^{(e)}}{M_0} > \beta + 4\pi(N_2 - N_1) > 0,$$

$$\beta - 4\pi(N_2 - N_1) > 0,$$

$$\sin \delta = \frac{H_0^{(e)}}{M_0 (\beta + 4\pi(N_2 - N_1))} < 1$$

Рассмотрим прежде всего одноосные ферромагнетики с магнитной анизотропией типа «легкая ось», причем будем предполагать, что стороннее магнитное поле  $H_0^{(e)}$  и равновесный магнитный момент направлены вдоль оси анизотропии (условия, при которых  $M_0$  параллелен  $H_0^{(e)}$ , приведены на стр. 198—199 на схеме равновесных состояний ферромагнетика).

Используя выражение (18.2.7) для  $E_0$  и выражение (18.3.3) для  $A_k$  и  $B_k$ , можно найти намагниченность таких ферромагнетиков при  $T = 0$  [2]:

$$M(0, H_0^{(e)}) = -\frac{1}{V} \frac{\partial E_0}{\partial H_0^{(e)}} =$$

$$= \begin{cases} M_0 \left[ 1 - \frac{1}{6\pi s} \left( \frac{4\pi\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{1/2} \left( \frac{2\pi M_0}{H_0^{(i)} + \beta M_0} \right)^{1/2} \right], & \beta M_0 + H_0^{(i)} \gg 2\pi M_0, \\ M_0 \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{64\pi s} \left( \frac{4\pi\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{3/2} \right], & \beta M_0 + H_0^{(i)} \ll 2\pi M_0, \end{cases} \quad (20.2.1)$$

где

$$M_0 = \frac{2s\mu_0}{v_0}, \quad \theta_c = sJ_0 = \frac{2\mu_0 M_0 \alpha}{a^2}, \quad H_0^{(i)} = H_0^{(e)} - 4\pi N_3 M_0.$$

Второе слагаемое в этих формулах обусловлено «нулевыми» колебаниями спиновых волн и составляет по порядку величины  $\left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{3/2} \approx 10^{-6}$  от первого слагаемого. Таким образом, равновесное намагничение при  $T = 0$  практически не зависит от внешнего магнитного поля.

Определим зависимость магнитного момента и спиновой теплоемкости ферромагнетика от температуры. Энергия спиновой волны в рассматриваемом случае, согласно (18.34), равна

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = [\theta_c (ak)^2 + \mu_0 (H_0^{(i)} + \beta M_0)] [\theta_c (ak)^2 + \mu_0 (H_0^{(i)} + \beta M_0) + 4\pi\mu_0 M_0 \sin^2 \vartheta_k]^{1/2},$$

где  $\vartheta_k$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью анизотропии. Используя это выражение для  $\varepsilon_s(\mathbf{k})$  и переходя в (20.1.5) от интегрирования по  $\mathbf{k}$  к интегрированию по  $x = \frac{\varepsilon_s}{T}$ , можно представить величину  $\Delta M = M(T, H_0^{(e)})$  —

—  $M(0, H_0^{(e)})$  в виде

$$\Delta M = -\frac{M_0}{(2\pi)^2 s} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{3/2} \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta \times \\ \times \int_0^\infty \frac{[Vx^2 + \xi^2 \sin^4 \vartheta - (\eta + \xi \sin^2 \vartheta)]^{1/2}}{e^x - 1} dx, \\ \text{где} \\ \eta = \frac{2\mu_0}{T} (\beta M_0 + H_0^{(i)}), \quad \xi = \frac{4\pi\mu_0 M_0}{T}.$$

В этих же переменных спиновая теплоемкость ферромагнетика определяется формулой

$$c_s = \frac{1}{6\pi^2 a^3} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{3/2} \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta \times \\ \times \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x(Vx^2 + \xi^2 \sin^4 \vartheta - \eta - \xi \sin^2 \vartheta)^{3/2}]. \\ \text{где} \\ \eta = \frac{2\mu_0}{T} (\beta M_0 + H_0^{(i)}), \quad \xi = \frac{4\pi\mu_0 M_0}{T}.$$

Приведем выражение для  $\Delta M$ ,  $c_s$  в некоторых наиболее интересных предельных случаях\*):

$$\Delta M = \begin{cases} -\frac{\xi(3/2)}{8\pi^{3/2}s} M_0 \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{3/2}, & T \gg 2\pi\mu_0 M_0, \mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)}), \\ -\frac{\pi}{48\sqrt{2}s} M_0 \left(\frac{T}{4\pi\mu_0 M_0}\right)^{1/2} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{3/2}, & \mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)}) \ll T \ll 2\pi\mu_0 M_0 \text{ [4]} \text{ (20.2.2)} \\ -\frac{1}{8\pi^{3/2}s} M_0 \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{2\mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)})}{T}\right\}, & 2\pi\mu_0 M_0 \ll T \ll \mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)}), \end{cases}$$

\* Зависимость  $\Delta M$  и  $c_s$  от  $T$  при  $T \gg 2\pi\mu_0 M_0$  и  $T \gg \mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)})$  — так называемый закон трех вторых — была впервые получена Блохом [3].



$$\Delta M = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{32\pi^{3/2}s} M_0 \left( \frac{T}{2\pi\mu_0 M_0} \right) \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{3/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{2\mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)})}{T} \right\}, \\ T \ll 2\pi\mu_0 M_0 \ll \mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)}). \end{array} \right. \quad (20.2.2)$$

$$c_s = \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{32} \frac{\zeta(5/2)}{\pi^{3/2}} \frac{1}{a^3} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{3/2}, \quad T \gg 2\pi\mu_0 M_0, \quad \mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)}), \\ \frac{105}{64} \frac{\zeta\left(\frac{7}{2}\right)}{\pi^{3/2}} \frac{1}{a^3} \left( \frac{T}{4\pi\mu_0 M_0} \right) \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{3/2}, \\ \mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)}) \ll T \ll 2\pi\mu_0 M_0 \quad [4], \\ \frac{1}{2\pi^{3/2}a^3} \frac{(\mu_0 M_0)^2 \beta M_0 + H_0^{(i)}}{T\theta_c M_0} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{2\mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)})}{T} \right\}, \\ 2\pi\mu_0 M_0 \ll T \ll \mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)}), \\ \frac{1}{8\pi^{3/2}a^3} \left( \frac{\mu_0 M_0}{2\pi\theta_c} \right) \left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right)^2 \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{3/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{2\mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)})}{T} \right\}, \\ T \ll 2\pi\mu_0 M_0 \ll \mu_0(\beta M_0 + H_0^{(i)}). \end{array} \right. \quad (20.2.3)$$

Мы видим, что в случае сильных магнитных полей и очень низких температур отклонение равновесного магнитного момента от его значения при  $T = 0$  и спиновая теплоемкость ферромагнетика экспоненциально малы. Это обстоятельство связано с наличием энергии активации у спиновых волн.

Сравним спиновую теплоемкость ферромагнетика с теплоемкостью, обусловленной колебаниями решетки. Эта теплоемкость (она называется фононной) в области температур  $T \ll \theta_D$ , определяется формулой

$$c_l = \frac{2\pi^2}{5} \cdot \frac{1}{a^3} \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3, \quad (20.2.4)$$

где  $\theta_D$  — температура Дебая, равная для изотропного тела

$$\theta_D = \left( \frac{2}{3\theta_t^3} + \frac{1}{\theta_l^3} \right)^{-1/3}, \quad \theta_t = \frac{\hbar s_t}{a}, \quad \theta_l = \frac{\hbar s_l}{a}$$

( $s_t$  и  $s_l$  — скорости поперечного и продольного звука).

Легко убедиться, что спиновая теплоемкость превосходит фононную теплоемкость в интервале температур  $\beta\mu_0 M_0 < T < \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$ . Нижний предел здесь составляет несколько сотых градуса для веществ с малой энергией анизотропии ( $\beta \ll 1$ ) и равен примерно  $1^\circ\text{K}$  для одноосных кристаллов, у которых энергия магнитной анизотропии велика ( $\beta \approx 10$ ); верхний предел получает величину порядка  $10 \div 100^\circ\text{K}$ .

Формулы (20.2.2), (20.2.3) показывают, что при температурах  $\theta_c \gg T \gg \mu_0 (H_0^{(i)} + \beta M_0)$ ,  $2\mu_0 M_0$  магнитный момент ферромагнетика изменяется с температурой по такому же закону, как и спиновая теплоемкость. В других областях эти величины имеют различный температурный ход.

Температурная зависимость магнитного момента и теплоемкости ферромагнетиков изучалась экспериментально, причем в согласии с теорией наблюдается закон  $\Delta M \sim c_s \sim T^{3/2}$ .

Перейдем к рассмотрению ферромагнетиков с магнитной анизотропией типа «легкая плоскость», причем будем предполагать, что стороннее магнитное поле  $H_0^{(e)}$  направлено перпендикулярно оси анизотропии и равновесный магнитный момент параллелен  $H_0^{(e)}$  (см. схему на стр. 198). В этом случае энергия спиновой волны в пренебрежении влиянием магнитного дипольного взаимодействия определяется, согласно (6.2.3), (6.1.4), формулой

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \sqrt{[\theta_c (ak)^2 + 2\mu_0 (H_0^{(i)} + |\beta| M_0)] [\theta_c (ak)^2 + 2\mu_0 H_0^{(i)}]},$$

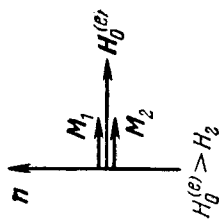
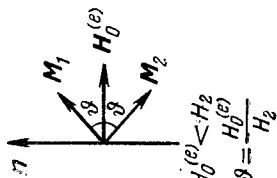
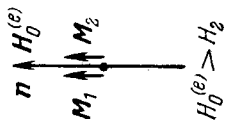
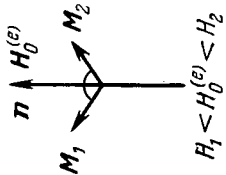
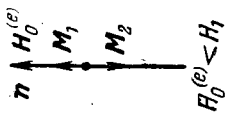
используя которую можно представить величины  $\Delta M(T, H_0^{(e)})$  и  $c_s$  в виде

$$\begin{aligned} \Delta M &= -\frac{1}{(2\pi)^2 s} M_0 \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{3/2} \times \\ &\quad \times \int_{\sqrt{\eta(\eta+\xi)}}^{\infty} \left( \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}\xi^2} - \eta - \frac{1}{2}\xi \right)^{1/2} \frac{dx}{e^x - 1}, \\ c_s &= \frac{1}{6\pi^2 a^3} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{3/2} \int_{\sqrt{\eta(\eta+\xi)}}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \\ &\quad \times \left\{ x \left( \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}\xi^2} - \eta - \frac{1}{2}\xi \right)^{3/2} \right\} \frac{x dx}{e^x - 1}, \end{aligned}$$

где  $\eta = 2\mu_0 H_0^{(i)}/T$ ,  $\xi = 2|\beta|\mu_0 M_0/T$ . Так как мы пренебрегли

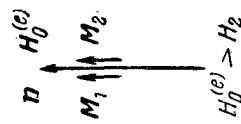
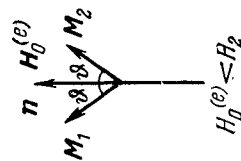
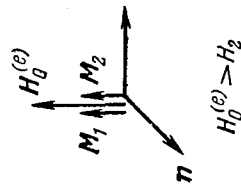
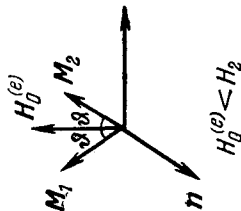
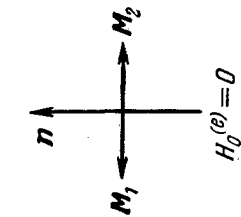
Равновесные состояния антиферромагнетиков

$$\beta - \beta' > 0$$



$$H_1 = M_0 \sqrt{2\delta(\beta - \beta')}, \quad H_2 = 2\delta M_0, \quad \cos \delta = \frac{H_0^{(e)}}{H_2}$$

$$\beta - \beta' < 0$$



$$H - 2\delta M_0 \cos \delta = \frac{H_0^{(e)}}{H_2}$$

влиянием магнитного дипольного взаимодействия, то этими формулами можно пользоваться при  $T \gg 2\mu_0 M_0$ .

Рассмотрим несколько предельных случаев.

Если  $T \gg \mu_0 H_0^{(i)}$ ,  $T \gg |\beta| \mu_0 M_0$ , то мы снова приходим к формулам Блоха для  $c_s$  и  $\Delta M$ .

Если \*)  $\mu_0 H_0^{(i)} \ll T \ll |\beta| \mu_0 M_0$ , то [5]

$$\Delta M = -\frac{1}{24s} M_0 \left( \frac{\theta_c}{2|\beta| \mu_0 M_0} \right)^{1/2} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^2,$$

$$c_s = \frac{2\pi^2}{15a^3} \left( \frac{\theta_c}{2|\beta| \mu_0 M_0} \right)^{3/2} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^3. \quad (20.2.5)$$

Наконец, если  $|\beta| M_0 \gg H_0^{(i)}$  и  $T \ll \mu_0 \sqrt{|\beta| M_0 H_0^{(i)}}$ , то

$$\Delta M = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} 2s} M_0 \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{3/2} \times$$

$$\times \left( \frac{H_0^{(i)}}{|\beta| M_0} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{2\mu_0 \sqrt{|\beta| M_0 H_0^{(i)}}}{T} \right\},$$

$$(20.2.6)$$

$$c_s = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} a^3} \left( \frac{2\mu_0 |\beta| M_0}{\theta_c} \right)^{3/2} \times$$

$$\times \left( \frac{H_0^{(i)}}{|\beta| M_0} \right)^{3/4} \left( \frac{2\mu_0 H_0^{(i)}}{T} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{2\mu_0 \sqrt{|\beta| M_0 H_0^{(i)}}}{T} \right\}.$$

**3. Магнитокалорический эффект.** Зная зависимость теплоемкости спиновых волн от стороннего магнитного поля  $H_0^{(e)}$ , можно исследовать магнитокалорический эффект, т. е. изменение температуры ферромагнетика при адиабатическом изменении стороннего магнитного поля. Чтобы найти это изменение температуры, нужно приравнять значение энтропии в начальном и конечном состояниях:

$$S_s(H_1^{(e)}, T_1) + S_l(T_1) = S_s(H_2^{(e)}, T_2) + S_l(T_2), \quad (20.3.1)$$

где  $S_s(H^{(e)}, T)$  — энтропия спиновых волн,  $S_l(T)$  — энтропия фононов и  $H_1^{(e)}$ ,  $T_1$  и  $H_2^{(e)}$ ,  $T_2$  — начальные и конечные значения магнитного поля и температуры. Энтропия спиновых волн определяется формулой

$$S_s(H^{(e)}, T) = -\frac{1}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial T},$$

\*) Для  $Du$  константа  $\beta$  может достигать значений  $\beta \sim 10^2$ .

используя которую легко показать, что

$$S_s(H^{(e)}, T) = \frac{1}{4\pi^{3/2}a^3} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{3/2} \frac{\mu_0 H_0^{(e)}}{T} \exp\left(-\frac{2\mu_0 H_0^{(e)}}{T}\right),$$

$$\mu_0 H_0^{(e)} \gg T \gg 2\pi\mu_0 M_0, \mu_0 |\beta| M_0,$$

$$S_s(0, T) = \frac{5\xi(5/2)}{16\pi^{3/2}} \cdot \frac{1}{a^3} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{3/2}, \quad T \gg 2\pi\mu_0 M_0, \mu_0 |\beta| M_0.$$

Энтропия фононного газа при  $T \ll \theta_D$  равна

$$S_l(T) = \frac{2\pi^2}{15a^3} \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3.$$

Подставляя эти выражения в (20.3.1), получим следующее уравнение для определения конечной температуры ферромагнетика при адиабатическом выключении стороннего магнитного поля  $H_0^{(e)}$  ( $\mu_0 H_0^{(e)} \gg T \gg 2\pi\mu_0 M_0, \mu_0 |\beta| M_0$ ).

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \left(\frac{T_1}{\theta_c}\right)^{3/2} \frac{\mu_0 H_0^{(e)}}{T_1} \exp\left(-\frac{2\mu_0 H_0^{(e)}}{T_1}\right) + \frac{2\pi^2}{15} \left(\frac{T_1}{\theta_D}\right)^3 = \\ = \frac{5\xi(5/2)}{16\pi^{3/2}} \left(\frac{T_2}{\theta_c}\right)^{3/2} + \frac{2\pi^2}{15} \left(\frac{T_2}{\theta_D}\right)^3. \end{aligned}$$

В левой части этого уравнения можно пренебречь энтропией спиновых волн по сравнению с энтропией фононов. Предполагая далее, что начальная температура  $T_1$  достаточно низка,  $T_1 \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$ , можно в правой части этого уравнения пренебречь энтропией фононов по сравнению с энтропией спиновых волн. В результате мы получим

$$T_2 = \left(\frac{32\pi^{7/2}}{75\xi(5/2)}\right)^{2/3} \theta_c \left(\frac{T_1}{\theta_D}\right)^2 \approx 7\theta_c \left(\frac{T_1}{\theta_D}\right)^2. \quad (20.3.2)$$

Мы видим, что конечная температура  $T_2$  при адиабатическом выключении достаточно сильного магнитного поля оказывается значительно меньше начальной температуры  $T_1$  (напомним, что формула (21.3.2) относится к случаю  $T_1 \ll \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$ ).

Уменьшение температуры ферромагнетика при адиабатическом выключении сильного стороннего магнитного поля связано с тем, что энтропия спиновой системы в этом случае уменьшается с ростом стороннего магнитного поля, так как

большим магнитным полям соответствует большая упорядоченность в спиновой системе. С другой стороны, большему упорядочению в спиновой системе в отсутствие стороннего магнитного поля соответствует более низкая температура. Поэтому при адиабатическом выключении стороннего магнитного поля возникающая неупорядоченность в спиновой системе соответствует более низким температурам, чем при наличии стороннего магнитного поля. Это и приводит к уменьшению температуры ферромагнетика.

Заметим, что если  $H_0^{(e)} \approx M_0$ , то зависимость спиновой энтропии от магнитного поля  $H_0^{(e)}$  может быть не монотонной, благодаря чему выключение магнитного поля не будет обязательно приводить к уменьшению температуры тела.

**4. Влияние взаимодействия между спиновыми волнами на термодинамический потенциал ферромагнетика.** При вычислении термодинамического потенциала ферромагнетика мы считали, что спиновые волны образуют идеальный газ, и не учитывали взаимодействия спиновых волн друг с другом. Покажем теперь, что при низких температурах,  $T \ll T_c$ , взаимодействие между спиновыми волнами оказывает малое влияние на термодинамический потенциал ферромагнетика.

Определим с этой целью поправку к термодинамическому потенциалу в первом борновском приближении по энергии взаимодействия спиновых волн  $\mathcal{H}_{ss}$ . Эта поправка определяется, согласно (20.1.1), формулой

$$\Omega_1 = \text{Sp } \mathcal{H}_{ss} e^{\frac{\Omega_0 - \mathcal{H}_0}{T}}. \quad (20.4.1)$$

Подставляя сюда  $\mathcal{H}_{ss} = \mathcal{H}_s^{(3)} + \mathcal{H}_s^{(4)} + \dots$  и используя выражения (18.1.11) для  $\mathcal{H}_s^{(3)}$  и  $\mathcal{H}_s^{(4)}$ , получим

$$\Omega_1 = \sum_{1234} \Phi_s(12,34) \langle a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \rangle \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4),$$

где

$$\langle a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \rangle = \text{Sp } a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 e^{\frac{\Omega_0 - \mathcal{H}_0}{T}}.$$

Замечая, что

$$\langle a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \rangle = \bar{n}_1 \bar{n}_2 \{ \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \Delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) + \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \Delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \},$$

где

$$\bar{n}_i = \left( e^{\frac{\varepsilon_s(\mathbf{k}_i)}{T}} - 1 \right)^{-1}.$$

перепишем  $\Omega_1$  в виде

$$\Omega_1 = 2 \sum_{12} \bar{n}_1 \bar{n}_2 \Phi_s(12,12). \quad (20.4.2)$$

Оценим сначала вклад, вносимый в  $\Omega_1$  обменным взаимодействием. В области волновых векторов  $ak \gg \sqrt{\frac{\mu_0 M_0}{J_0}}$  величина  $\Phi_s(12,12)$  определяется формулой (18.1.13), а так как  $T \ll \theta_c$ , то эту величину можно разложить в ряд по степеням  $ak$ , в котором должны быть сохранены члены порядка  $(ak)^4$  (так как член  $k_1 k_2$  при интегрировании по  $dk_1 dk_2$  обращается в нуль). Отсюда следует, что интересующий нас вклад в  $\Omega_1$  имеет вид [6]

$$\Omega_1^{(e)} \approx NT \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^4.$$

Это соотношение справедливо при  $T \ll \theta_c$ .

Таким образом, поправка к термодинамическому потенциалу в области температур  $\mu_0 M_0 \ll T \ll \theta_c$  пропорциональна пятой степени температуры.

В случае простой кубической решетки

$$\begin{aligned} \Phi_s(12,12) = & -\frac{1}{2N} J_0 a^2 k_1 k_2 + \frac{J_0}{4!N} \sum_p \left\{ (k_2 \rho)^3 (k_1 \rho) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} (k_2 \rho)^2 (k_1 \rho)^2 + (k_1 \rho)^3 (k_2 \rho) \right\} \end{aligned}$$

и

$$\Omega_1^{(e)} = -\frac{3\pi}{4s} NT \left( \frac{T}{4\pi\theta_c} \right)^4 Z_{3/2}^2 \left( \frac{\varepsilon_0}{T} \right), \quad (20.4.3)$$

где

$$Z_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mx}}{m^n}, \quad \varepsilon_0 \equiv \varepsilon_s(0).$$

Определим вклад  $\Omega_1^{(r)}$ , вносимый в термодинамический потенциал релятивистскими взаимодействиями. В этом случае, согласно (18.1.15),

$$\Phi_s^{(r)}(12,12) \sim \frac{\mu_0 M_0}{N},$$

и поэтому

$$\Omega_1^{(r)} \approx -\mu_0 M_0 \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^3.$$

Мы видим, что если  $T \gg \sqrt{\mu_0 M_0 \theta_c}$ , то основную роль играет обменное взаимодействие.

Рассматривая далее только эту область температур и используя формулу (20.4.3), легко найти поправки к плотности магнитного момента и спиновой теплоемкости ферромагнетика:

$$\begin{aligned}\Delta_e M &= -\frac{3\pi}{2s^2} M_0 \zeta(3/2) \zeta(5/2) \left(\frac{T}{4\pi\theta_c}\right)^4, \\ \Delta_e c_s &= \frac{15\pi}{sa^3} \zeta^2(5/2) \left(\frac{T}{4\pi\theta_c}\right)^4.\end{aligned}\quad (20.4.4)$$

Заметим, что при сравнении формул (20.4.4) с формулами (20.2.2), (20.2.3) необходимо иметь в виду, что при выводе последних мы считали, что  $\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \theta_c(ak)^2$ . В действительности же закон дисперсии магнонов имеет вид  $\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + s(J(0) - J(\mathbf{k}))$ . Другая зависимость энергии магнона от  $\mathbf{k}$  также приводит к поправке к термодинамическому потенциалу. Легко убедиться, что термодинамический потенциал нулевого приближения с учетом более сложной дисперсионной зависимости энергии спиновой волны в случае простой кубической решетки имеет вид

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= -NT \left\{ \left(\frac{T}{4\pi\theta_c}\right)^{3/2} Z_{3/2}\left(\frac{\varepsilon_0}{T}\right) + \frac{3\pi}{4} \left(\frac{T}{4\pi\theta_c}\right)^{5/2} Z_{7/2}\left(\frac{\varepsilon_0}{T}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{33}{32} \pi^2 \left(\frac{T}{4\pi\theta_c}\right)^{7/2} Z_{9/2}\left(\frac{\varepsilon_0}{T}\right) + O\left(\left(\frac{T}{4\pi\theta_c}\right)^{9/2}\right) \right\}\end{aligned}\quad (20.4.5)$$

(здесь выписаны слагаемые, содержащие температуру, степень которой не превосходит  $9/2$ ). Первое слагаемое в этом выражении соответствует закону дисперсии магнонов  $\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \theta_c(ak)^2$  и приводит при  $\varepsilon_0 = 0$  к выражениям (20.2.2), (20.2.3) для магнитного момента ферромагнетика и спиновой теплоемкости.

В заключение этого раздела остановимся на роли связанных состояний магнонов в термодинамике ферромагнетиков.

Связанные состояния двух магнонов, которые мы исследовали в § 19, можно рассматривать как совокупность новых квазичастиц с квазиимпульсом  $\mathbf{K}$  и энергией  $\mathcal{E}(\mathbf{K})$ . При низких температурах, очевидно, главную роль будут играть связанные состояния с наименьшей энергией и, следовательно, с малыми значениями квазиимпульса  $\mathbf{K}$ . Так как в трехмерном случае связанных состояний двух магнонов с малым значением  $K(Ka \ll 1)$  не существует, то в области низких температур связанные состояния вносят пренебрежимо малый



вклад в различные термодинамические величины. Однако в двумерном и одномерном случаях, когда возможны связанные состояния при любых значениях квазиимпульса  $K$ , они могут играть роль в термодинамике ферромагнетиков в области низких температур. Заметим, наконец, что связанные состояния могли бы проявиться в дифференциальных сечениях рассеяния электромагнитных волн, а также нейтронов в ферромагнетиках.

## § 21. Термодинамика антиферромагнетиков

**1. Спиновая теплоемкость антиферромагнетиков.** Перейдем к исследованию тепловых и магнитных свойств антиферромагнетиков в области низких температур,  $T \ll T_N$ .

Спиновая часть термодинамического потенциала антиферромагнетика с двумя магнитными подрешетками, которые мы только и будем рассматривать, определяется при  $T \ll T_N$  формулой (20.1.3), в которой суммирование производится по двум типам спиновых волн, существующих в таких антиферромагнетиках.

Начнем с определения спиновой теплоемкости антиферромагнетиков:

$$c_s = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \sum_j \int \frac{\varepsilon_{sj}(k)}{e^{\frac{\varepsilon_{sj}(k)}{T}} - 1} dk.$$

Рассмотрим сначала антиферромагнетики с магнитной анизотропией типа «легкая ось». Пусть  $H_0^{(e)}$  параллельно  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль оси анизотропии) и  $H_0^{(e)} < H_1$ . Тогда энергии магнонов будут определяться, согласно (8.2.1), формулами

$$\varepsilon_{s1,2} = \sqrt{\theta_N^2 (ak)^2 + (\mu H_1)^2} \pm \mu H_0^{(e)},$$

где  $\theta_N^2 a^2 = 2\delta(\alpha - \alpha') \mu M_0$ ,  $\mu = \hbar g$  (мы считаем для простоты, что  $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ ,  $\alpha'_{ij} = \alpha' \delta_{ij}$ ). Используя это выражение для  $\varepsilon_{sj}$ , получим

$$c_s = \frac{1}{6\pi^2 a^3} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^3 \left\{ \int_{\xi+\eta}^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x((x-\eta)^2 - \xi^2)^{3/2}] + \right. \\ \left. + \int_{\xi-\eta}^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x((x+\eta)^2 - \xi^2)^{3/2}] \right\}.$$

где

$$\xi = \frac{\mu H_1}{T}, \quad \eta = \frac{\mu H_0^{(e)}}{T}, \quad x = \frac{\varepsilon}{T}.$$

Приведем выражения для  $c_s$  в некоторых предельных случаях [7—9]:

$$c_s = \begin{cases} \frac{4\pi^2}{15a^3} \left(\frac{T}{\theta_N}\right)^3, & \mu H_1, \mu H_0^{(e)} \ll T, \\ \frac{2}{(2\pi)^{3/2} a^3} \left(\frac{\mu H_1}{\theta_N}\right)^3 \left(\frac{\mu H_1}{T}\right)^{1/2} e^{-\frac{\mu H_1}{T}}, & \mu H_0^{(e)} \ll T \ll \mu H_1, \\ \frac{15\zeta(5/2)}{4(2\pi)^{3/2} a^3} \left(\frac{T}{\theta_N}\right)^{3/2} \left(\frac{\mu H_1}{\theta_N}\right)^{3/2}, & \mu(H_1 - H_0^{(e)}) \ll T \ll \mu H_1, \\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2} a^3} \left(\frac{\mu H_1}{T}\right)^{1/2} \frac{\mu^3 H_1 (H_1 - H_0^{(e)})}{\theta_N^3} \exp\left\{-\frac{\mu(H_1 - H_0^{(e)})}{T}\right\}, & T \ll \mu(H_1 - H_0^{(e)}). \end{cases} \quad (21.1.1)$$

Пусть магнитное поле  $H_0^{(e)}$  направлено перпендикулярно оси анизотропии. Тогда, согласно (8.2.2), энергии магновов определяются формулами

$$\varepsilon_{s1}(\mathbf{k}) = \sqrt{\theta_N^2 (ak)^2 + (\mu H_1)^2 + (\mu H_0^{(e)})^2},$$

$$\varepsilon_{s2}(\mathbf{k}) = \sqrt{\theta_N^2 (ak)^2 + (\mu H_1)^2}$$

и спиновая теплоемкость имеет вид [9]

$$c_s = \frac{1}{6\pi^2 a^3} \left(\frac{T}{\theta_N}\right)^3 \left\{ \int_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}^{\infty} dx \frac{x \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x(x^2 - \xi^2 - \eta^2)^{3/2}]}{e^x - 1} + \int_{\xi}^{\infty} dx \frac{x \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x(x^2 - \xi^2)^{3/2}]}{e^x - 1} \right\}.$$

В предельных случаях  $\mu H_1, \mu H_0^{(e)} \ll T$  и  $\mu H_0^{(e)} \ll T \ll \mu H_1$  эта формула приводит к выражениям для  $c_s$ , совпадающим с первыми двумя выражениями (21.1.1).

Если  $T \ll \mu H_0^{(e)}, \mu H_1$  и  $H_0^{(e)} \sim H_1$ , то спиновая теплоемкость также определяется второй из формул (21.1.1), в которой только добавляется множитель  $1/2$ . При этом спиновая теплоемкость будет экспоненциально малой, независимо

от того, мала или велика разность  $|H_1 - H_0^{(e)}|$ . (Напомним, что если магнитное поле  $H_0^{(e)}$  параллельно оси анизотропии, то при  $\mu |H_1 - H_0^{(e)}| \ll T \ll \mu H_0^{(e)}$ ,  $\mu H_1$  спиновая теплоемкость пропорциональна  $T^{3/2}$ .)

В области температур  $Q_N \gg T \gg \mu H_0^{(e)}$ ,  $\mu H_1$  спиновая теплоемкость антиферромагнетиков пропорциональна третьей степени температуры, т. е. ведет себя так же, как и фононная теплоемкость, независимо от ориентации магнитного поля  $H_0^{(e)}$ . Следует отметить, однако, что условие  $\mu H_1 \ll \theta_N$  может выполняться только в случае антиферромагнетиков с достаточно высокой температурой Нееля. Для антиферромагнетиков с температурой Нееля в несколько десятков градусов  $\mu H_1 \sim \theta_N$ . Поэтому наблюдать закон  $T^3$  в спиновой теплоемкости в антиферромагнетиках с магнитной анизотропией типа «легкая ось» очень трудно.

Зная спиновую теплоемкость антиферромагнетиков, можно выяснить, как проявляется в них магнитокалорический эффект. Рассмотрим, например, тот случай, когда магнитное поле  $H_0^{(e)}$  параллельно оси анизотропии и  $H_0^{(e)} < H_1$ . Изменение температуры при адиабатическом выключении внешнего магнитного поля можно определить из условия равенства энтропий до и после выключения магнитного поля. Опуская простые выкладки, приведем выражение для конечной температуры  $T_2$ :

$$T_2 = \frac{\theta_D}{\theta_N} \left( \frac{\mu H_1}{T_1} \right)^{1/2} T_1, \quad (21.1.2)$$

где  $T_1$  — начальная температура антиферромагнетика. Эта формула справедлива, если  $T_1 \ll \mu H_1$ ,  $\mu H_1 \left( \frac{\theta_D}{\theta_N} \right)^2$ .

Выше мы видели, что спиновая теплоемкость зависит не только от величины, но и от направления магнитного поля  $H_0^{(e)}$  относительно оси анизотропии. Эта зависимость особенно сильно проявляется, если  $\mu |H_0^{(e)} - H_1| \ll T \ll \mu H_1$ ,  $\mu H_0^{(e)}$ . В этом случае спиновая теплоемкость  $C_s \sim \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^{3/2}$ , если магнитное поле параллельно оси анизотропии и экспоненциально мала, если магнитное поле перпендикулярно оси анизотропии. Благодаря этому должно происходить уменьшение температуры антиферромагнетика, если антиферромагнетик, первоначально находящийся в магнитном поле, перпендикулярном к оси анизотропии, повернуть таким образом,

чтобы магнитное поле стало параллельно оси анизотропии. Конечная температура тела определяется при этом формулой

$$T_2 = \xi T_1 \left( \frac{T_1}{\mu H_1} \right) \left( \frac{\theta_N}{\theta_D} \right)^2, \quad (21.1.3)$$

где  $\xi = 2\pi \left( \frac{\pi}{15\xi^{(3/2)}} \right)^{3/2} \approx 0,15$ . Эта формула справедлива, если  $T_1 \ll \mu H_1$ ,  $\mu H_1 \frac{\theta_D^2}{\theta_N^2}$ .

Рассмотрим теперь антиферромагнетики с магнитной анизотропией типа «легкая плоскость». Если поле  $H_0^{(e)}$  перпендикулярно  $n$ , то спиновая теплоемкость таких антиферромагнетиков определяется формулами [9, 10]

$$c_s = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{15a^3} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^3, & \mu H_0^{(e)} \ll T \ll \mu H_1, \\ \frac{2\pi^2}{15a^3} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^3, & \mu H_1 \ll T \ll \mu H_0^{(e)}, \\ \frac{4\pi^2}{15a^3} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^3, & \mu H_0^{(e)}, \mu H_1 \ll T \ll \theta_N. \end{cases} \quad (21.1.4)$$

Мы видим, что в широком интервале температур спиновая теплоемкость пропорциональна  $T^3$ , т. е. ведет себя с изменением температуры, как и фоновая теплоемкость. При этом, однако, коэффициент при  $T^3$  в области температур  $\mu H_0^{(e)}$ ,  $\mu H_1 \ll T \ll \theta_N$  вдвое больше соответствующего коэффициента в области температур  $\mu H_0^{(e)} \ll T \ll \mu H_1$  (или  $\mu H_1 \ll T \ll \mu H_0^{(e)}$ ). Это связано с тем, что при достаточно низких температурах возбуждается только безактивационная ветвь спиновых волн, в то время как в области более высоких температур возбуждаются обе ветви спиновых волн\*.)

Если стороннее магнитное поле параллельно оси анизотропии, то спиновая теплоемкость определяется первой из формул (21.1.4) при  $T \ll \sqrt{(\mu H)^2 + (\mu H_0^{(e)})^2}$  и третьей из формул (21.1.4) при  $T \gg \sqrt{(\mu H_1)^2 + (\mu H_0^{(e)})^2}$  [11].

**2. Тензор статической магнитной восприимчивости антиферромагнетиков.** Как мы знаем, магнитные моменты подрешеток антиферромагнетика, в отсутствие стороннего

\*) Отметим, что удвоение коэффициента при  $T^3$  в теплоемкости спиновых волн было экспериментально наблюдаемо в  $MnCO_3$  [10].

магнитного поля, компенсируют друг друга; в слабых же магнитных полях возникает результирующий магнитный момент, пропорциональный стороннему магнитному полю. Поэтому магнитные свойства антиферромагнетиков в случае слабых полей можно описывать тензором статической магнитной восприимчивости:

$$\chi_{ik} = \frac{\partial M_i}{\partial H_k^{(e)}} = -\frac{1}{V} \frac{\partial^2 E_0}{\partial H_i^{(e)} \partial H_k^{(e)}} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial^2}{\partial H_i^{(e)} \partial H_k^{(e)}} \sum_j \int dk \ln \left( 1 - e^{-\frac{\varepsilon_{sj}(k)}{T}} \right).$$

Подставляя сюда выражения (8.2.1) — (8.2.4) для энергий магнонов в антиферромагнетиках, легко вычислить компоненты тензора  $\chi_{ik}$ . Мы приведем здесь окончательные результаты для отличных от нуля компонент  $\chi_{ik}$  при  $H_0^{(e)} \rightarrow 0$ .

Для антиферромагнетика с магнитной анизотропией типа «легкая ось» [8—10]:

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \begin{cases} \chi_0 - \frac{\mu^2}{(2\pi)^{3/2} a^3 \theta_N} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^{3/2} \left( \frac{\mu H_1}{\theta_N} \right)^{1/2} e^{-\frac{\mu H_1}{T}}, & T \ll \mu H_1, \\ \chi_0 - \frac{\mu^2}{12 a^3 \theta_N} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^2, & T \gg \mu H_1, \end{cases} \quad (21.2.1)$$

$$\chi_{zz} = \begin{cases} \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{\mu^2}{a^3 \theta_N} \right) \left( \frac{\mu H_1}{\theta_N} \right)^{1/2} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^{1/2} e^{-\frac{\mu H_1}{T}}, & T \ll \mu H_1, \\ \frac{\mu^2}{3 a^3 \theta_N} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^2, & T \gg \mu H_1, \end{cases}$$

а для антиферромагнетика с магнитной анизотропией типа «легкая плоскость» [9, 11]:

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_0 - \frac{1}{12} \frac{\mu^2}{a^3 \theta_N} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^2, \quad \chi_{zz} = \begin{cases} \chi_0 + \frac{\pi^2}{60} \chi_0 \frac{T}{\mu H_2} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^2, & T \ll \mu H_1, \\ \chi_0 - \frac{1}{12} \frac{\mu^2}{a^3 \theta_N} \left( \frac{T}{\theta_N} \right)^2, & T \gg \mu H_1, \end{cases} \quad (21.2.2)$$

(здесь  $\chi_0 = \frac{1}{\theta}$  и ось  $z$  направлена вдоль оси анизотропии).

## § 22. Спиновые функции Грина и высокочастотная магнитная восприимчивость ферромагнетиков

**1. Корреляционные функции спинов и двухвременные функции Грина.** Как мы знаем, отличительной особенностью ферромагнетика является наличие сильной корреляции между направлениями спинов его отдельных атомов. Эту корреляцию характеризуют корреляционные функции спинов, которые определяются следующим образом. Если  $s_l(t)$  — оператор спина  $l$ -го атома в гейзенберговском представлении, то корреляционными функциями спинов  $l$ -го и  $m$ -го атомов называют усредненные значения операторов  $s_l^i(t) s_m^k(0)$  (индексы  $i, k$  обозначают проекции спина):

$$\langle s_l^i(t) s_m^k(0) \rangle = \text{Sp } \rho_0 s_l^i(t) s_m^k(0), \quad (22.1.1)$$

где  $\rho_0$  — равновесная матрица плотности ферромагнетика, связанная с его гамильтонианом  $\mathcal{H}$  соотношением

$$\rho_0 = e^{-\frac{\Omega - \mathcal{H}}{T}}. \quad (22.1.2)$$

Корреляционные функции можно выразить через матричные элементы операторов спина. Введем для этого собственные векторы  $|\nu\rangle$  гамильтониана ферромагнетика  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} |\nu\rangle = E_\nu |\nu\rangle,$$

где  $E_\nu$  — значение энергии ферромагнетика в состоянии  $|\nu\rangle$ . Тогда

$$\langle s_l^k(0) s_l^i(t) \rangle = \sum_{\nu\mu} e^{\beta(\Omega - E_\nu)} \langle \nu | s_l^k(0) | \mu \rangle \langle \mu | s_l^i(t) | \nu \rangle,$$

где  $\beta = \frac{1}{T}$ . Но

$$\langle \mu | s_l^i(t) | \nu \rangle = e^{i\frac{t}{\hbar}(E_\mu - E_\nu)} \langle \mu | s_l^i(0) | \nu \rangle.$$

Поэтому

$$\langle s_l^k(0) s_l^i(t) \rangle = \sum_{\nu\mu} e^{\beta(\Omega - E_\nu)} e^{i\frac{t}{\hbar}(E_\mu - E_\nu)} \langle \nu | s_l^k(0) | \mu \rangle \langle \mu | s_l^i(0) | \nu \rangle.$$

Из этой формулы следует, что компонента Фурье корреляционной функции  $\langle s_l^k(0) s_l^i(t) \rangle$

$$J_{lk}(l-l', \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle s_l^k(0) s_l^i(t) \rangle \quad (22.1.3)$$

может быть представлена в виде

$$J_{lk}(l-l', \omega) = \\ = 2\pi\hbar \sum_{\nu\mu} e^{\beta(E_\mu - E_\nu)} \langle \nu | s_{l'}^k(0) | \mu \rangle \langle \mu | s_l^l(0) | \nu \rangle \delta(\hbar\omega + E_\mu - E_\nu). \quad (22.1.4)$$

Ясно, что

$$\langle s_{l'}^k(0) s_l^l(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} J_{lk}(l-l', \omega). \quad (22.1.5)$$

Из формулы (22.1.4) в силу эрмитовости операторов  $s_l$  вытекает соотношение

$$J_{lk}^*(l-l', \omega) = J_{kl}(l'-l, \omega). \quad (22.1.6)$$

Аналогичным образом может быть определена компонента Фурье  $J'_{lk}(l-l', \omega)$  корреляционной функции  $\langle s_l^l(t) s_{l'}^k(0) \rangle$ :

$$\langle s_l^l(t) s_{l'}^k(0) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} J'_{lk}(l-l', \omega), \quad (22.1.7)$$

где

$$J'_{lk}(l-l', \omega) = \\ = 2\pi\hbar \sum_{\mu\nu} e^{\beta(E_\nu - E_\mu)} \langle \mu | s_l^l(0) | \nu \rangle \langle \nu | s_{l'}^k(0) | \mu \rangle \delta(\hbar\omega + E_\mu - E_\nu).$$

Легко убедиться, что

$$J'_{lk}(l-l', \omega) = e^{\beta\hbar\omega} J_{lk}(l-l', \omega). \quad (22.1.8)$$

Введем наряду с корреляционными функциями двухвременными запаздывающие функции Грина [12] \*)

$$G_{lk}^{(r)}(l-l', t) = -i\Theta(t) \langle [s_l^l(t), s_{l'}^k(0)] \rangle \quad (22.1.9)$$

и двухвременные опережающие функции Грина

$$G_{lk}^{(a)}(l-l', t) = i\Theta(-t) \langle [s_l^l(t), s_{l'}^k(0)] \rangle, \quad (22.1.10)$$

где

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

---

\*) Метод функций Грина к решению задач ферромагнетизма был впервые применен Боголюбовым и Тябликовым [14].

Используя формулы (22.1.3), (22.1.7) и (22.1.8), легко выразить компоненты Фурье запаздывающей и опережающей функций Грина через функцию  $J_{ik}(l-l', \omega)$  (эта функция называется спектральной функцией):

$$G_{ik}^{(r)}(l-l', \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{ik}(l-l', \omega') (e^{\beta \hbar \omega'} - 1)}{\omega - \omega' + i0} d\omega', \quad (22.1.11)$$

$$G_{ik}^{(a)}(l-l', \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{ik}(l-l', \omega') (e^{\beta \hbar \omega'} - 1)}{\omega - \omega' - i0} d\omega'.$$

Заметим, что функция  $G_{ik}^{(r)}(l-l', \omega)$  является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$ , а функция  $G_{ik}^{(a)}(l-l', \omega)$  — аналитической функцией в нижней полуплоскости  $\omega$ .

Формулы (22.1.11) показывают, что функции  $G_{ik}^{(r)}(l-l', \omega)$  и  $G_{ik}^{(a)}(l-l', \omega)$  можно рассматривать как предельные значения единой аналитической функции  $G_{ik}(l-l', z)$  комплексной переменной  $z$ :

$$G_{ik}(l-l', z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{ik}(l-l', \omega) (e^{\beta \hbar \omega} - 1)}{z - \omega'} d\omega'. \quad (22.1.12)$$

Именно:

$$\begin{aligned} G_{ik}^{(r)}(l-l', \omega) &= G_{ik}(l-l', \omega + i0), \\ G_{ik}^{(a)}(l-l', \omega) &= G_{ik}(l-l', \omega - i0). \end{aligned} \quad (22.1.13)$$

Из определения  $G_{ik}(l-l', z)$  следует:

$$\begin{aligned} G_{ik}(l-l', \omega - i0) - G_{ik}(l-l', \omega + i0) &= \\ = i(e^{\beta \hbar \omega} - 1) J_{ik}(l-l', \omega). \end{aligned} \quad (22.1.14)$$

Это соотношение вместе с формулами (22.1.5), (22.1.7) позволяет связать корреляционные функции спинов  $\langle s_i^k(0) s_i^j(t) \rangle$ ,  $\langle s_i^j(t) s_i^k(0) \rangle$  со скачком функции  $G_{ik}(l-l', z)$  на



вещественной оси:

$$\begin{aligned} \langle s_{l'}^k(0) s_l^i(t) \rangle &= \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (G_{lk}(l-l', \omega + i0) - G_{lk}(l-l', \omega - i0)) \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}. \end{aligned} \quad (22.1.15)$$

$$\begin{aligned} \langle s_l^i(t) s_{l'}^k(0) \rangle &= \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (G_{lk}(l-l', \omega + i0) - G_{lk}(l-l', \omega - i0)) \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}. \end{aligned}$$

Входящую сюда функцию  $G_{lk}(l-l', \omega + i0) - G_{lk}(l-l', \omega - i0)$  можно выразить через запаздывающую функцию Грина. Действительно, согласно (22.1.11) и (22.1.6),

$$G_{lk}^{(a)}(l-l', \omega) = G_{ki}^{(r)*}(l'-l, \omega)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} G_{lk}(l-l', \omega + i0) - G_{lk}(l-l', \omega - i0) &= \\ &= G_{lk}^{(r)}(l-l', \omega) - G_{ki}^{(r)*}(l'-l, \omega). \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} G_{lk}^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) &= \sum_l e^{-i\mathbf{k}R_{ll'}} G_{lk}^{(r)}(l-l', \omega), \\ J_{lk}(\mathbf{k}, \omega) &= \sum_l e^{-i\mathbf{k}R_{ll'}} J_{lk}(l-l', \omega), \\ J'_{lk}(\mathbf{k}, \omega) &= \sum_l e^{-i\mathbf{k}R_{ll'}} J'_{lk}(l-l', \omega), \end{aligned} \quad (22.1.16)$$

получим из (22.1.15)

$$\begin{aligned} J_{lk}(\mathbf{k}, \omega) &= iN_{\omega} \{G_{lk}^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) - G_{ki}^{(r)*}(\mathbf{k}, \omega)\}, \\ J'_{lk}(\mathbf{k}, \omega) &= i(N_{\omega} + 1) \{G_{lk}^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) - G_{ki}^{(r)*}(\mathbf{k}, \omega)\}, \end{aligned} \quad (22.1.17)$$

где

$$N_{\omega} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}.$$

**2. Связь тензора высокочастотной магнитной восприимчивости с двухвременной запаздывающей функцией Грина.** Покажем, что тензор высокочастотной магнитной восприимчивости может быть выражен через двухвременную запаздывающую функцию Грина [13]. Определим для этого

среднее значение оператора  $s_l$  в переменном стороннем магнитном поле:

$$\bar{s}_l(t) = \text{Sp } s_l \rho(t), \quad (22.2.1)$$

где  $\rho(t)$  — матрица плотности ферромагнетика в шредингеровском представлении при наличии стороннего переменного магнитного поля  $\mathbf{h}(r, t)$ . Она удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [\mathcal{H} + V, \rho], \quad (22.2.2)$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан ферромагнетика в отсутствие стороннего переменного магнитного поля и  $V$  — гамильтониан взаимодействия ферромагнетика с переменным магнитным полем:

$$V = 2\mu_0 \sum_l \mathbf{h}(R_l, t) s_l. \quad (22.2.3)$$

Для нахождения  $s_l(t)$  перейдем к гейзенберговскому представлению:

$$\begin{aligned} s_l(t) &= e^{i \frac{t}{\hbar} \mathcal{H}} s_l e^{-i \frac{t}{\hbar} \mathcal{H}}, \\ \hat{\rho}(t) &= e^{i \frac{t}{\hbar} \mathcal{H}} \rho(t) e^{-i \frac{t}{\hbar} \mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (22.2.4)$$

Матрица плотности в гейзенберговском представлении удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [V(t), \hat{\rho}], \quad (22.2.5)$$

где  $V(t)$  — оператор энергии взаимодействия ферромагнетика с переменным сторонним магнитным полем в гейзенберговском представлении:

$$V(t) = 2\mu_0 \sum_l \mathbf{h}(R_l, t) s_l(t).$$

В первом приближении по стороннему переменному магнитному полю решение уравнения (22.2.5) имеет вид [8]

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(-\infty) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t [V(t'), \hat{\rho}(-\infty)] dt', \quad (22.2.6)$$

где  $\hat{\rho}(-\infty)$  — матрица плотности системы при  $t = -\infty$ . Предполагая, что при  $t = -\infty$  переменное магнитное поле обращалось в нуль, а ферромагнетик находился в состоянии

термодинамического равновесия, мы должны выбрать в качестве матрицы плотности  $\hat{\rho}(-\infty)$  равновесную матрицу плотности  $\rho_0$ . Согласно (22.2.6) и (22.2.1) мы получим тогда следующее выражение для среднего значения спина  $l$ -го атома:

$$\bar{s}_l^i(t) = \langle s_l^i \rangle + \frac{2\mu_0}{\hbar} \sum_{l'} \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_{lk}^{(r)}(l-l', t-t') h_k(R_{l'}, t'), \quad (22.2.7)$$

где  $G_{lk}^{(r)}(l-l', t)$  — запаздывающая двухвременная функция Грина, определяемая формулой (22.1.9) и  $\langle s_l^i \rangle$  — равновесное (при данной температуре) значение спина  $l$ -го атома:

$$\langle s_l^i \rangle = \text{Sp } s_l^i \rho_0.$$

Зная среднее значение спина  $l$ -го атома  $\bar{s}_l^i(t)$  можно, согласно формуле (1.3.3), найти среднее значение оператора плотности магнитного момента:

$$\bar{M}(r, t) = -2\mu_0 \sum_l \delta(r - R_l) \bar{s}_l^i(t).$$

Подставляя в эту формулу вместо  $\bar{s}_l^i(t)$  выражение (22.2.7), получим

$$\begin{aligned} m(r, t) &\equiv \bar{M}(r, t) - M_0(r) = \\ &= -\frac{(2\mu_0)^2}{\hbar} \sum_{l'} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{G}^{(r)}(l-l', t-t') \cdot h(R_{l'}, t') \delta(r - R_{l'}), \end{aligned} \quad (22.2.8)$$

где

$$M_0(r) = -2\mu_0 \sum_l \delta(r - R_l) \langle s_l^i \rangle$$

есть равновесная плотность магнитного момента.

Найдем компоненту Фурье  $m(k, \omega)$ :

$$m(k, \omega) = \int dr dt e^{-i(kr - \omega t)} m(r, t).$$

Замечая, что

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_l e^{i(k' - k) R_l} = \frac{1}{v_0} \sum_r \delta(k' - k + 2\pi r), \quad (22.2.9)$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — вектор обратной решетки и  $v_0$  — объем элементарной ячейки, получим из (22.2.8)

$$m_i(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{(2\mu_0)^2}{v_0 \hbar} G_{ij}^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) \sum_{\boldsymbol{\tau}} h_j(\mathbf{k} - 2\pi\boldsymbol{\tau}, \omega),$$

где  $h(\mathbf{k}, \omega)$  — компонента Фурье стороннего магнитного поля  $h(\mathbf{r}, t)$ :

$$h(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{r} dt e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} h(\mathbf{r}, t). \quad (22.2.10)$$

Формулу для  $m(\mathbf{k}, \omega)$  можно представить также в интегральном виде

$$m(\mathbf{k}, \omega) = \int \widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega) h(\mathbf{k}', \omega) d\mathbf{k}', \quad (22.2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega) &= \widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega) \sum_{\boldsymbol{\tau}} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} + 2\pi\boldsymbol{\tau}), \\ \chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{(2\mu_0)^2}{\hbar v_0} G_{ij}^{(r)}(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (22.2.12)$$

Заметим, что интегральная связь между компонентами Фурье плотности магнитного момента и стороннего магнитного поля обусловлена тем, что ферромагнетик не является однородным телом, а представляет собой периодическую структуру.

Если стороннее магнитное поле мало меняется на расстояниях порядка  $a$  ( $ak \ll 1$ ) и мы интересуемся «длинноволновыми» компонентами Фурье магнитного момента ( $ak \ll 1$ ), то

$$m(\mathbf{k}, \omega) = \widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega) h(\mathbf{k}, \omega). \quad (22.2.13)$$

Так как стороннее переменное магнитное поле, вообще говоря, не совпадает с магнитным полем в ферромагнетике  $h^{(i)}$ , то тензор  $\widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega)$ , с которым мы уже встречались в § 10, отличается от тензора магнитной восприимчивости  $\widehat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$ .

Если  $kL \gg 1$  ( $L$  — размеры тела), то компоненты Фурье полей  $h(\mathbf{r}, t)$  и  $h^{(i)}(\mathbf{r}, t)$  связаны между собой соотношением

$$h^{(i)}(\mathbf{k}, \omega) = h(\mathbf{k}, \omega) - 4\pi\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}m(\mathbf{k}, \omega)}{k^2}.$$

Поэтому соотношение (22.2.13) в этом случае можно переписать в виде

$$\left( \delta_{ij} - \frac{4\pi}{k^2} k_j \chi'_{il}(\mathbf{k}, \omega) k_l \right) m_j(\mathbf{k}, \omega) = \chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) h_j^{(i)}(\mathbf{k}, \omega).$$

Сравнивая это уравнение с соотношением

$$m_j(\mathbf{k}, \omega) = \chi_{j\mu}(\mathbf{k}, \omega) h_{\mu}^{(j)}(\mathbf{k}, \omega),$$

получим

$$\widehat{\chi}(\mathbf{k}, \omega) = [1 - 4\pi\widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega)\widehat{n}]^{-1}\widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega), \quad (22.2.14)$$

где

$$n_{ij} = \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Из последней формулы следует:

$$\widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega) = \widehat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)[1 + 4\pi\widehat{n}\widehat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)]^{-1}. \quad (22.2.15)$$

Подставляя сюда вместо  $\widehat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$  выражение (6.3.3), получим

$$\widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega) = \frac{gM_0}{\omega_s^2(\mathbf{k}) - 2i\omega\gamma_s(\mathbf{k}) - \omega^2} \times \\ \times \begin{pmatrix} \Omega - i\omega/gM_0\tau, & i\omega, & 0 \\ -i\omega, & \Omega_1 - i\omega/gM_0\tau, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \quad (22.2.16)$$

(ось  $z$  выбрана вдоль оси анизотропии  $\mathbf{n}$ , а ось  $y$  — перпендикулярна плоскости  $(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ ; релаксационная постоянная  $1/\tau_2$  предполагается равной нулю). Мы видим, что полюсы тензора  $\widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega)$  определяют частоту  $\omega_s(\mathbf{k})$  и декремент затухания спиновой волны  $\gamma_s(\mathbf{k})$  с волновым вектором  $\mathbf{k}$ .

Если  $kL \ll 1$ , то поля  $\mathbf{h}^{(j)}(\omega)$ ,  $\mathbf{h}(\omega)$  связаны между собой соотношением

$$\mathbf{h}^{(j)}(\omega) = \mathbf{h}(\omega) - 4\pi\widehat{N}\mathbf{m},$$

и, следовательно,

$$\widehat{\chi}(0, \omega) = [1 - 4\pi\widehat{\chi}'(0, \omega)\widehat{N}]^{-1}\widehat{\chi}'(0, \omega),$$

где  $\widehat{N}$  — тензор размагничивающих коэффициентов (тело предполагается имеющим эллипсоидальную форму, см. § 10). Из последней формулы следует:

$$\widehat{\chi}'(0, \omega) = \widehat{\chi}(0, \omega)[1 + 4\pi\widehat{N}\widehat{\chi}(0, \omega)]^{-1}.$$

Эта формула совпадает с формулой (10.4.2). В случае одноосного ферромагнетика с магнитной анизотропией типа «легкая ось» и  $H_0^{(e)} \parallel \mathbf{n}$  тензор  $\widehat{\chi}'(0, \omega)$  определяется формулой (10.4.4).

Используя формулы (22.1.7), можно выразить спектральные функции  $J_{ik}(\mathbf{k}, \omega)$  и  $J'_{ik}(\mathbf{k}, \omega)$  через антиэрмитову часть тензора  $\chi'_{ik}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\begin{aligned} J_{ik}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{i\nu_0\hbar}{(2\mu_0)^2} N_\omega \{ \chi'_{ki}{}^*(\mathbf{k}, \omega) - \chi'_{ik}(\mathbf{k}, \omega) \}, \\ J'_{ik}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{i\nu_0\hbar}{(2\mu_0)^2} (N_\omega + 1) \{ \chi'_{ki}{}^*(\mathbf{k}, \omega) - \chi'_{ik}(\mathbf{k}, \omega) \}. \end{aligned} \quad (22.2.17)$$

С помощью этих соотношений можно получить выражения для компонент Фурье корреляционной функции операторов плотности магнитного момента  $\langle M_i(\mathbf{r}_1, t_1) M_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$ , где оператор  $M_i(\mathbf{r}, t)$  определяется формулой (1.3.3). Согласно формулам (22.1.7), (22.2.9) компонента Фурье этой функции имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' dt e^{i\omega(t-t') - i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \langle M_i(\mathbf{r}, t) M_j(\mathbf{r}', t') \rangle &\equiv \\ &\equiv (2\pi)^3 \langle M_i M_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} \sum_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (22.2.18)$$

где

$$\langle M_i M_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{(2\mu_0)^2}{\nu_0} J'_{ij}(\mathbf{k}, \omega),$$

или, согласно (22.1.7), (22.2.12),

$$\langle M_i M_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = i\hbar (N_\omega + 1) \{ \chi'_{ji}{}^*(\mathbf{k}, \omega) - \chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \}. \quad (22.2.19)$$

Это важное соотношение определяет спектральное распределение флуктуаций плотности магнитного момента в ферромагнетиках. В § 24 мы вернемся к этому соотношению и применим его для исследования процессов рассеяния нейтронов и фотонов в ферромагнетиках.

Определим в заключение этого раздела запаздывающую функцию Грина  $G_{ij}^{(r)}(\mathbf{k}, \omega)$  при  $\mathbf{k} = 0$  в пренебрежении релятивистскими взаимодействиями.

Заметим прежде всего, что

$$G_{ij}^{(r)}(0, \omega) = -\frac{i}{N} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle [S_i(t), S_j(0)] \rangle, \quad (22.2.20)$$

где  $\mathbf{S}(t) = \sum_{\mathbf{l}} \mathbf{s}_{\mathbf{l}}(t)$  и  $N$  — полное число атомов в ферромагнетике.

При учете одного только обменного взаимодействия гамильтониан ферромагнетика имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + 2\mu_0 S_z H_0^{(e)}, \quad \mu_0 = \frac{|e|\hbar}{2mc},$$

где  $\mathcal{H}_e$  — гамильтониан обменного взаимодействия. Так как  $[\mathbf{S}, \mathcal{H}_e] = 0$ , то

$$\dot{S}_i(t) = -\frac{i}{\hbar} [S_i(t), \mathcal{H}(t)] = \frac{2\mu_0}{\hbar} \varepsilon_{ikl} H_{0k}^{(e)} S_l(t).$$

Отсюда следует;

$$S_x(t) = S_x(0) \cos \omega_0 t - S_y(0) \sin \omega_0 t,$$

$$S_y(t) = S_x(0) \sin \omega_0 t + S_y(0) \cos \omega_0 t,$$

$$S_z(t) = S_z(0),$$

где  $\omega_0 = gH_0^{(e)}$  (ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{H}_0^{(e)}$ ). Подставляя эти соотношения в (22.2.20) и используя перестановочные соотношения для операторов полного спина:

$$[S_j, S_k] = i\varepsilon_{jkl} S_l,$$

найдем

$$G_{xy}^{(r)}(0, \omega) = -G_{yx}^{(r)}(0, \omega) = \frac{i}{2N} \langle S_z \rangle \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_0 + i0} + \frac{1}{\omega + \omega_0 + i0} \right\}, \quad (22.2.21)$$

$$G_{xx}^{(r)}(0, \omega) = G_{yy}^{(r)}(0, \omega) = \frac{1}{2N} \langle S_z \rangle \left\{ \frac{1}{\omega + \omega_0 + i0} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i0} \right\}$$

(остальные компоненты тензора  $G_{ij}^{(r)}(0, \omega)$  равны нулю).

Тензор  $\tilde{\chi}_{ij}^{\prime}(0, \omega)$  определяется формулой

$$\tilde{\chi}_{ij}^{\prime}(0, \omega) = -\frac{(2\mu_0)^2}{\hbar v_0} G_{ij}^{(r)}(0, \omega).$$

**3. Энергия, поглощаемая ферромагнетиком.** Покажем, что антиэрмитова часть тензора  $\tilde{\chi}_{(k, \omega)}^{\prime}$  определяет энергию переменного магнитного поля, поглощаемую ферромагнетиком.

Энергия переменного магнитного поля, поглощаемая ферромагнетиком в единицу времени, очевидно, равна

$$\dot{Q}(t) = \frac{d}{dt} \text{Sp } \rho(t)(H + V). \quad (22.3.1)$$

Используя уравнение (22.2.2) для матрицы плотности и выражение (22.2.3) для  $V$ , получим

$$\dot{Q}(t) = 2\mu_0 \sum_l \bar{s}_l(t) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h}(R_l, t),$$

или, согласно (1.3.3),

$$\dot{Q}(t) = - \int d\mathbf{r} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h}(\mathbf{r}, t).$$

Переходя к компонентам Фурье величин  $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & - \int d\mathbf{r} \mathbf{M}_0(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ & - \frac{i}{(2\pi)^5} \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' e^{i(\omega+\omega')t} \mathbf{m}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{h}(-\mathbf{k}, \omega'). \end{aligned}$$

Если переменное магнитное поле действует в течение конечного промежутка времени, то энергия, поглощенная ферромагнетиком, согласно (22.2.11) равна

$$\begin{aligned} Q = & \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \int_0^{\infty} d\omega \omega h_i^*(\mathbf{k}, \omega) \{ \chi'_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega) - \\ & - \chi''_{ji}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega) \} h_j(\mathbf{k}', \omega) \quad (22.3.2) \end{aligned}$$

(мы учли, что  $\chi_{ij}^{*}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega) = \chi_{ij}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}'; -\omega)$ ). Предполагая, что компоненты Фурье переменного магнитного поля отличны от нуля только при  $ak \ll 1$ , получим

$$Q = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int_0^{\infty} d\omega \omega h_i^*(\mathbf{k}, \omega) \{ \chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) - \chi''_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \} h_j(\mathbf{k}, \omega), \quad (22.3.3)$$

где  $\hat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega)$  определяется формулой (22.2.12). Записав эту формулу в виде

$$Q = \int_0^{\infty} Q_{\omega} d\omega, \quad (22.3.4)$$

где

$$Q_{\omega} = \frac{i\omega}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} h_i^*(\mathbf{k}, \omega) \{ \chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) - \chi''_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \} h_j(\mathbf{k}, \omega),$$



видим, что  $Q_\omega d\omega$  представляет собой энергию, поглощаемую ферромагнетиком в интервале частот  $\omega$ ,  $\omega + d\omega$ . Величина  $Q_\omega$  как функция  $\omega$  определяет форму линии поглощения.

Рассмотрим случай, когда к ферромагнетикому приложено периодическое во времени стороннее магнитное поле, изменяющееся с частотой  $\omega_0$ . Тогда

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int d\mathbf{k} \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega_n) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_n t)},$$

где  $\omega_n = n\omega_0$ . Компонента Фурье этого поля равна

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega_n) \delta(\omega - \omega_n).$$

Используя это выражение и формулу (22.3.1) легко найти среднюю энергию, поглощенную ферромагнетиком за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0};$$

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{Q}(t) dt = - \frac{i}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_n > 0} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \omega_n \mathbf{h}^*(\mathbf{k}, \omega_n) \times \\ &\times \{ \hat{\chi}'(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega_n) - \hat{\chi}'^+(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega_n) \} \mathbf{h}(\mathbf{k}', \omega_n). \end{aligned} \quad (22.3.5)$$

Если магнитное поле  $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$  мало меняется на расстояниях порядка  $a$  ( $ka \ll 1$ ), то

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= - \frac{i}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_n > 0} \int d\mathbf{k} \omega_n \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega_n) \times \\ &\times \{ \hat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega_n) - \hat{\chi}'^+(\mathbf{k}, \omega_n) \} \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega_n) \end{aligned} \quad (22.3.6)$$

(см. формулу (10.4.3)).

Выше мы определили тензор  $\hat{\chi}'(0, \omega)$  в пренебрежении релятивистскими взаимодействиями. Используя этот тензор, определим теперь энергию однородного переменного магнитного поля  $\mathbf{h}(t)$ , поглощаемую ферромагнетиком. Компонента Фурье этого поля имеет вид

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \mathbf{h}(\omega),$$

где

$$\mathbf{h}(\omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t) e^{i\omega t} dt,$$

Подставляя это выражение для  $\mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega)$  в (22.3.4), получим спектральную плотность поглощенной энергии  $Q_\omega$ :

$$Q_\omega = 2\omega_0 \frac{\mu_0^2}{\hbar} \langle S_z \rangle |h_x(\omega_0) + ih_y(\omega_0)|^2 \delta(\omega - \omega_0) \quad (22.3.7)$$

(при этом мы заменили  $(\delta(\mathbf{k}^2))^2$  на  $\frac{V}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k})$ ; см., например, [26]).

Эта формула показывает, что поглощение энергии происходит только на резонансной частоте  $\omega = \omega_0$ . Таким образом, как и указывалось выше, одно только обменное взаимодействие не может привести в случае однородного переменного магнитного поля к уширению линии ферромагнитного резонанса.

Полное поглощение энергии определяется формулой

$$Q = 2\omega_0 \frac{\mu_0^2}{\hbar} \langle S_z \rangle |h_x(\omega_0) + ih_y(\omega_0)|^2. \quad (22.3.8)$$

Покажем в заключение этого раздела, что тензор  $\hat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega)$  определяет релаксацию магнитного момента.

Пусть в начальный момент времени  $t=0$  в системе имеется некоторое распределение плотности магнитного момента  $m^{(0)}(\mathbf{r})$ , которое было бы равновесным при наличии постоянного магнитного поля  $\mathbf{h}^{(0)}(\mathbf{r})$ , связанного с начальным распределением магнитного момента соотношением

$$m^{(0)}(\mathbf{k}) = \int \hat{\chi}'(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0) \mathbf{h}^{(0)}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (22.3.9)$$

Величина магнитного момента при  $t > 0$  определяется выражением (22.2.11), в котором в качестве переменного магнитного поля следует взять

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \Theta(-t) e^{\varepsilon t} \mathbf{h}^{(0)}(\mathbf{r}), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Такой выбор  $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$  соответствует адиабатическому включению поля  $\mathbf{h}^{(0)}(\mathbf{r})$  при  $t = -\infty$  и мгновенному выключению его в момент  $t = 0$ . Компоненты Фурье этого магнитного поля имеют вид

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega) = \pi \delta_+(\omega) \mathbf{h}^{(0)}(\mathbf{k}), \quad (22.3.10)$$

где

$$\delta_+(\omega) = \frac{1}{\pi i (\omega - i\varepsilon)}$$

и  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Подставляя (22.3.10) в (22.2.11), найдем

$$m(\mathbf{k}, \omega) = \rho \delta_+(\omega) \int \widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega) h^{(0)}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}',$$

откуда

$$m(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho \delta_+(\omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \times \\ \times \widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega) h^{(0)}(\mathbf{k}'). \quad (22.3.11)$$

Так как компоненты тензора  $\widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega)$  являются аналитическими функциями в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\omega$ , то при  $t < 0$

$$m(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0) h^{(0)}(\mathbf{k}'),$$

что находится в соответствии с (22.3.9).

## § 23. Спиновые функции Грина и намагниченность ферромагнетика

### 1. Уравнение для запаздывающей функции Грина.

Для нахождения равновесного магнитного момента ферромагнетика мы определяли предварительно термодинамический потенциал  $\Omega$ . Но к этой задаче можно подойти и с несколько иной точки зрения, а именно можно связать намагниченность ферромагнетика с корреляционной функцией спинов его атомов.

Чтобы убедиться в этом, предположим для простоты, что спин атомов ферромагнетика равен  $s = 1/2$ . Тогда из известной формулы

$$s_+ s_- - s_z + (s_z)^2 = s(s+1)$$

(индекс  $l$  мы опускаем) следует, что

$$\langle s_z \rangle = -s(s+1) + \langle (s_z)^2 \rangle + \langle s_+ s_- \rangle, \quad (23.1.1)$$

откуда при  $s = 1/2$

$$\langle s_z \rangle = -\frac{1}{2} + \langle s_+ s_- \rangle. \quad (23.1.2)$$

Это соотношение связывает среднее значение спина на ось  $z$  с корреляционной функцией  $\langle s_l^+(t) s_l^-(0) \rangle$  при  $t = 0$  (ее можно назвать автокорреляционной функцией, так как для нее  $l = l'$ ).

Используя формулы (22.1.15), (22.2.12), можно представить это соотношение в виде

$$\langle s_z \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{\hbar v_0}{4\pi\mu_0^2} \frac{1}{N} \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\chi'_{-+}(\mathbf{k}, \omega)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \quad (23.1.3)$$

где  $\chi'_{-+}(\mathbf{k}, \omega)$  — циркулярная компонента тензора  $\widehat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega)$ , равная

$$\chi'_{-+}(\mathbf{k}, \omega) = \chi'_{xx}(\mathbf{k}, \omega) + \chi'_{yy}(\mathbf{k}, \omega) + i(\chi'_{xy}(\mathbf{k}, \omega) - \chi'_{yx}(\mathbf{k}, \omega)). \quad (23.1.4)$$

Подставляя сюда выражение (6.1.2), для компонент тензора  $\widehat{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$  получим, как легко видеть, формулу Блоха для намагниченности.

Введем в рассмотрение запаздывающую функцию Грина:

$$G^{(r)}(l - l', t) = -i\Theta(t) \langle [s_l^-(t), s_{l'}^+(0)] \rangle, \quad (23.1.5)$$

связанную с корреляционной функцией  $\langle s_l^-(t) s_{l'}^+(0) \rangle$ , и попытаемся установить уравнение, которому удовлетворяет эта функция Грина.

Дифференцируя  $G^{(r)}(l - l', t)$  по времени и замечая, что  $\frac{\partial \Theta(t)}{\partial t} = \delta(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G^{(r)}(l - l', t) = & -i\delta(t) \langle [s_l^-(0), s_{l'}^+(0)] \rangle + \\ & + \frac{1}{\hbar} \Theta(t) \langle [[\mathcal{H}, s_l^-(t)], s_{l'}^+(0)] \rangle. \end{aligned} \quad (23.1.6)$$

Будем предполагать для простоты, что гамильтониан ферромагнетика определяется только обменным взаимодействием:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) s_l s_m + 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l s_l^z.$$

В этом случае

$$[\mathcal{H}, s_l^-] = \sum_{\substack{m \\ (m \neq l)}} J(R_{lm}) (s_m^z s_l^- - s_l^z s_m^-) - 2\mu_0 H_0^{(e)} s_l^-$$

и уравнение (23.1.6) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G^{(r)}(l - l', t) = & 2i\delta(t) \delta_{ll'} \langle s_l^z \rangle - 2l\mu_0 H_0^{(e)} G^{(r)}(l - l', t) + \\ & + \frac{1}{\hbar} \sum_{\substack{m \\ (m \neq l)}} J(R_{lm}) \Theta(t) \langle [s_m^z(t) s_l^-(t) - s_l^z(t) s_m^-(t), s_{l'}^+(0)] \rangle. \end{aligned} \quad (23.1.7)$$

В правую часть этого уравнения, кроме искомой функции Грина  $G^{(r)}(l-l', t)$ , входит еще функция

$$\Theta(t) \langle [s_m^z(t) s_l^-(t) - s_l^z(t) s_m^-(t), s_l^+(0)] \rangle,$$

содержащая, в отличие от  $G^{(r)}(l-l', t)$ , не два, а три оператора спина (она также называется двухвременной запаздывающей функцией Грина).

Если бы мы захотели получить уравнение, которому удовлетворяет последняя функция, то, как легко видеть, пришли бы к функции Грина, содержащей четыре оператора спина. Продолжая этот процесс, мы получили бы бесконечную систему уравнений для функций Грина, содержащих произвольное число операторов спина.

Чтобы определить интересующую нас функцию Грина  $G^{(r)}(l-l', t)$ , необходимо каким-то образом связать функцию Грина, содержащую три спиновых оператора, с функцией  $G^{(r)}(l-l', t)$ . Мы сделаем простейшее предположение, а именно примем, что имеет место соотношение [14]

$$-i\Theta(t) \langle [s_m^z(t) s_l^-(t), s_l^+(0)] \rangle = \langle s_z \rangle G^{(r)}(l-l', t), \quad (23.1.8)$$

где  $\langle s_z \rangle \equiv \langle s_m^z \rangle$  не зависит от номера узла  $m$ . Использование этого соотношения в (23.1.7) приводит к следующему уравнению для функции Грина  $G^{(r)}(l-l', t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} G^{(r)}(l-l', t) = 2i\delta(t) \langle s_z \rangle \delta_{ll'} - 2i\mu_0 H_0^{(e)} G^{(r)}(l-l', t) + \\ + i \sum_{\substack{m \\ (m \neq l)}} J(R_{lm}) \{G^{(r)}(l-l', t) - G^{(r)}(m-l', t)\} \langle s_z \rangle. \quad (23.1.9)$$

Переходя к компонентам Фурье функции  $G^{(r)}(l-l', t)$  по времени и по пространственным переменным:

$$G^{(r)}(l-l', t) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{\mathbf{k}} \int d\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{k}R_{ll'})} G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega),$$

получим из (23.1.9)

$$\omega G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) = -2 \langle s_z \rangle + \tilde{\omega}_s(\mathbf{k}) G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega), \quad (23.1.10)$$

где

$$\tilde{\omega}_s(\mathbf{k}) = gH_0^{(e)} - \frac{\langle s_z \rangle}{\hbar} (J(0) - J(\mathbf{k})). \quad (23.1.11)$$

Учитывая, что функция  $G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega)$  аналитична в верхней полуплоскости  $\omega$ , найдем отсюда

$$G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) = - \frac{2 \langle s_z \rangle}{\omega - \tilde{\omega}_s(\mathbf{k}) + i0}. \quad (23.1.12)$$

Аналогичным образом может быть найдена компонента Фурье опережающей функции Грина  $G^{(a)}(l - l', t)$ :

$$G^{(a)}(\mathbf{k}, \omega) = - \frac{2 \langle s_z \rangle}{\omega - \tilde{\omega}_s(\mathbf{k}) - i0}. \quad (23.1.13)$$

Отсюда следует, что

$$G(\mathbf{k}, z) = - \frac{2 \langle s_z \rangle}{z - \tilde{\omega}_s(\mathbf{k})}. \quad (23.1.14)$$

Поэтому величина скачка функции  $G(\mathbf{k}, \omega)$  на вещественной оси равна

$$G(\mathbf{k}, \omega + i0) - G(\mathbf{k}, \omega - i0) = 4\pi i \langle s_z \rangle \delta(\omega - \tilde{\omega}_s(\mathbf{k})). \quad (23.1.15)$$

Найдем автокорреляционную функцию  $\langle s_l^-(0) s_l^+(0) \rangle$  в совпадающие моменты времени. Согласно (22.1.15) имеем

$$\langle s_l^+(0) s_l^-(0) \rangle = \frac{i}{2\pi N} \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G(\mathbf{k}, \omega + i0) - G(\mathbf{k}, \omega - i0)}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}.$$

Подставляя сюда (23.1.15), получим

$$\langle s_l^+(0) s_l^-(0) \rangle = - \frac{2 \langle s_z \rangle v_0}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{e^{\beta \hbar \tilde{\omega}_s(\mathbf{k})} - 1}, \quad (23.1.16)$$

где  $v_0 = V/N$  и интегрирование совершается по объему элементарной ячейки обратной решетки. Эта формула справедлива для любого значения спина  $s$ .

**2. Равновесный магнитный момент ферромагнетика в случае спина, равного половине.** Если  $s = 1/2$ , то с помощью (23.1.16) можно сразу получить уравнение, которому удовлетворяет среднее значение проекции спина  $s_z$ . Действительно подстановка (23.1.16) в (23.1.2) дает

$$- \langle s_z \rangle \frac{v_0}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \operatorname{cth} \frac{\tilde{\varepsilon}_s(\mathbf{k})}{2T} = \frac{1}{2}, \quad (23.2.1)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \hbar \tilde{\omega}_s(\mathbf{k}) = 2\mu_0 H_0^{(e)} - \langle s_z \rangle (J(0) - J(\mathbf{k})).$$

Это уравнение является трансцендентным уравнением относительно  $\langle s_z \rangle$  и, как явствует из его вывода, не ограничено областью низких температур [14].

Как мы сейчас убедимся, формула (23.2.1) приводит к правильным результатам в области низких температур,  $T \ll T_c$ , и разумным результатам в области температур, близких к температуре Кюри. Поэтому эту формулу можно рассматривать как хорошую интерполяционную формулу во всем интервале температур.

Покажем прежде всего, что из уравнения (23.2.1) вытекает формула Блоха для намагниченности ферромагнетика при низких температурах,  $T \ll sJ_0$ . В этом случае величина  $\langle s_z \rangle$  мало отличается от своего минимального значения  $s_z = -1/2$ . Поэтому в выражении для  $\tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})$  можно заменить  $\langle s_z \rangle$  на  $-1/2$ , в результате чего мы получим

$$\langle s_z \rangle = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2v_0}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{e^{\beta \tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})} - 1} \right)^{-1}.$$

Основной вклад в этот интеграл вносит область малых волновых векторов. Поэтому обменный интеграл, входящий в выражение для  $\tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})$ , можно разложить в ряд по степеням  $\mathbf{k}$ . Считая для простоты, что ферромагнетик обладает кубической симметрией, получим

$$\langle s_z \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{\zeta(3/2)}{8\pi^{3/2}} \left( \frac{2T}{J_0} \right)^{3/2}, \quad \mu_0 H_0^{(e)} \ll T \ll J_0$$

в соответствии с формулой Блоха (см. (20.2.2)).

Вычислим намагниченность ферромагнетика при  $H_0^{(e)} = 0$  и температурах  $T$ , которые ниже температуры Кюри  $T_c$ , но близки к ней. Если  $H_0^{(e)} = 0$  и  $T = T_c$ , то, очевидно,  $\langle s_z \rangle = 0$ . Поэтому, считая в (23.2.1), что  $\langle s_z \rangle \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{4v_0}{(2\pi)^3} T_c \int \frac{d\mathbf{k}}{J(0) - J(\mathbf{k})} = 1,$$

откуда вытекает следующее выражение для температуры Кюри:

$$T_c = \frac{2\pi^3}{v_0} \left( \int \frac{d\mathbf{k}}{J(0) - J(\mathbf{k})} \right)^{-1}. \quad (23.2.2)$$

Для простой кубической решетки, в приближении «ближайших» соседей получим отсюда

$$T_c = \frac{3}{2} \frac{J_0}{C},$$

где  $J_0$  — обменный интеграл между ближайшими соседями и

$$C = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\pi}^{\pi} dz \frac{3}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} \approx 1,51.$$

Чтобы найти зависимость  $\langle s_z \rangle$  от температуры при  $T \approx T_c$  ( $T < T_c$ ), заметим, что в этой области температур  $|\langle s_z \rangle| \ll 1$ , поэтому функцию  $\text{cth} \frac{\tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})}{2T}$  можно разложить в ряд и удерживать в нем первые два члена разложения:

$$\text{cth} \frac{\tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})}{2T} \approx \frac{2T}{\tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{\tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})}{2T} \right)^2 \right\}.$$

Подставляя это выражение в (23.2.1) и учитывая определение температуры Кюри (23.2.2), получим

$$\frac{T}{T_c} + \frac{2J_0}{T_c} \langle s_z \rangle^2 = 1,$$

откуда

$$\langle s_z \rangle = - \sqrt{\frac{T_c - T}{2J_0}}. \quad (23.2.3)$$

(Заметим, что такую же зависимость намагниченности от температуры в области температур  $T \sim T_c$  ( $T < T_c$ ) дает теория фазовых переходов второго рода Ландау [15].)

Если  $T > T_c$  и  $H_0^{(e)} = 0$ , то уравнение (23.2.1) решений не имеет.

**3. Равновесный магнитный момент ферромагнетика в случае произвольного спина.** Уравнение (23.2.1) справедливо при  $s = 1/2$ . Если  $s \neq 1/2$ , то также можно получить уравнение для  $\langle s_z \rangle$ , но оно будет иметь более сложную структуру, чем уравнение (23.2.1). Это объясняется тем, что в основное соотношение (23.1.1), связывающее  $\langle s_z \rangle$  с  $\langle s_+ s_- \rangle$ , входит, кроме  $\langle s_z \rangle$ , еще  $\langle s_z^2 \rangle$ . Чтобы исключить эту величину, мы введем обобщенную запаздывающую функцию Грина [16]

$$G^{(r)}(l - l', t; a) = -i\Theta(t) \left\langle \left[ s_l^-(t), e^{as_l^z(0)} s_{l'}^+(0) \right] \right\rangle. \quad (23.3.1)$$



Дифференцируя эту функцию по времени и используя приведенное выше выражение для гамильтониана  $\mathcal{H}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G^{(r)}(l-l', t; a) = & -i\delta(t)\delta_{ll'} \langle [s_l^-, e^{as_l^z} s_l^+] \rangle - \\ & - 2i\mu_0 H_0^{(e)} G^{(r)}(l-l', t; a) + \\ & + \frac{1}{\hbar} \sum_{\substack{m \\ (m \neq l)}} J(R_{lm}) \Theta(t) \langle [s_m^z(t) s_l^-(t) - s_l^z(t) s_m^-(t), e^{as_l^z} s_l^+] \rangle, \end{aligned}$$

где  $s_l \equiv s_l(0)$ . Полагая

$$-i\Theta(t) \langle [s_m^z(t) s_l^-(t), e^{as_l^z} s_l^+] \rangle = \langle s_z \rangle G^{(r)}(l-l', t; a)$$

и переходя к компонентам Фурье по времени и координатам, найдем

$$G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega; a) = \frac{\langle [s_l^-, e^{as_l^z} s_l^+] \rangle}{\omega - \tilde{\omega}_s(\mathbf{k}) + i0}, \quad (23.2.2)$$

где  $\tilde{\omega}_s(\mathbf{k})$  определяется формулой (23.1.11).

Аналогичное соотношение справедливо для обобщенной опережающей функции Грина:

$$G^{(a)}(\mathbf{k}, \omega; a) = \frac{\langle [s_l^-, e^{as_l^z} s_l^+] \rangle}{\omega - \tilde{\omega}_s(\mathbf{k}) - i0}. \quad (23.3.3)$$

Эти функции являются предельными значениями единой аналитической функции

$$G(\mathbf{k}, z; a) = \frac{\langle [s_l^-, e^{as_l^z} s_l^+] \rangle}{z - \tilde{\omega}_s(\mathbf{k})}, \quad (23.3.4)$$

скачок которой на вещественной оси равен

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}, \omega + i0; a) - G(\mathbf{k}, \omega - i0; a) = \\ = -2\pi i \langle [s_l^-, e^{as_l^z} s_l^+] \rangle \delta(\omega - \tilde{\omega}_s(\mathbf{k})). \end{aligned} \quad (23.3.5)$$

Через величину этого скачка может быть выражена обобщенная корреляционная функция

$$\langle e^{as_l^z(t)} s_l^+(t) s_l^-(t) \rangle.$$

Действительно, при выводе формулы (22.1.15) нигде не использовалось то обстоятельство, что  $s$  является спиновым

оператором, поэтому, заменяя в (22.1.15)  $s_l^k$  на  $e^{as_l^z} s_l^+$  и  $s_l^l$  на  $s_l^-$ , получим

$$\langle e^{as_l^z} s_l^+ s_l^- (t) \rangle = \\ = \frac{i}{2\pi N} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G(\mathbf{k}, \omega + i0; a) - G(\mathbf{k}, \omega - i0; a)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} e^{-i\omega t}.$$

Полагая здесь  $l' = l$  и  $t = 0$ , получим, используя (23.3.5),

$$\langle e^{as_l^z} s_l^+ s_l^- \rangle = \frac{1}{N} \langle [s_l^-, e^{as_l^z} s_l^+] \rangle \sum_k \frac{1}{e^{\beta\hbar\epsilon_s(\mathbf{k})} - 1}. \quad (23.3.6)$$

Входящие в это уравнение средние значения можно выразить через функцию

$$\Phi(a) = \langle e^{as_l^z} \rangle. \quad (23.3.7)$$

Действительно, замечая, что  $s_l^+ s_l^- = s(s+1) + s_l^z - (s_l^z)^2$ , найдем

$$\langle e^{as_l^z} s_l^+ s_l^- \rangle = s(s+1) \langle e^{as_l^z} \rangle + \langle e^{as_l^z} s_l^z \rangle - \langle e^{as_l^z} (s_l^z)^2 \rangle = \\ = s(s+1) \Phi(a) + \Phi'(a) - \Phi''(a). \quad (23.3.8)$$

Используя далее соотношения коммутации между  $s_l^z$  и  $s_l^-$ , можно показать, что

$$[s_l^-, e^{as_l^z}] = -(1 - e^a) e^{as_l^z} s_l^-.$$

Поэтому

$$\langle [s_l^-, e^{as_l^z} s_l^+] \rangle = -(1 - e^a) \langle e^{as_l^z} s_l^+ s_l^- \rangle - 2 \langle e^{as_l^z} s_l^z \rangle e^a,$$

и, следовательно,

$$\langle [s_l^-, e^{as_l^z} s_l^+] \rangle = -(1 - e^a) s(s+1) \Phi(a) - \\ - (1 + e^a) \Phi'(a) + (1 - e^a) \Phi''(a). \quad (23.3.9)$$

Подстановка (23.3.8), (23.3.9) в (23.3.6) приводит к следующему дифференциальному уравнению для определения функции  $\Phi(a)$ :

$$\Phi''(a) - \frac{(1 + \mathfrak{N}) e^{-a} + \mathfrak{N}}{(1 + \mathfrak{N}) e^{-a} - \mathfrak{N}} \Phi'(a) - s(s+1) \Phi(a) = 0, \quad (23.3.10)$$

где

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{N} \sum_k \frac{1}{e^{\beta \tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})} - 1}. \quad (23.3.11)$$

Чтобы найти  $\Phi(a)$ , необходимо еще знать начальные условия для  $\Phi(a)$ . Одно из них имеет вид

$$\Phi(0) = 1. \quad (23.3.12)$$

Второе условие следует из операторного тождества:

$$\prod_{p=-s}^s (s_z - p) = 0,$$

усредняя которое, получим

$$\left\{ \prod_{p=-s}^s \left( \frac{d}{da} - p \right) \right\} \Phi(a) \Big|_{a=0} = 0. \quad (23.3.13)$$

Решение уравнения (23.3.10) с начальными условиями (23.3.12), (23.3.13) имеет вид

$$\Phi(a) = \frac{\mathfrak{N}^{2s+1} e^{sa} - (1 + \mathfrak{N})^{2s+1} e^{(s+1)a}}{[\mathfrak{N}^{2s+1} - (1 + \mathfrak{N})^{2s+1}] [(1 + \mathfrak{N}) e^{-a} - \mathfrak{N}]}. \quad (23.3.14)$$

Дифференцируя это выражение по  $a$  и полагая затем  $a = 0$ , найдем

$$\langle s_z \rangle = - \frac{(s - \mathfrak{N})(1 + \mathfrak{N})^{2s+1} + (s + 1 + \mathfrak{N}) \mathfrak{N}^{2s+1}}{(1 + \mathfrak{N})^{2s+1} - \mathfrak{N}^{2s+1}}. \quad (23.3.15)$$

Эта формула вместе с определениями (23.3.11) и (23.1.11) величин  $\mathfrak{N}$  и  $\tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})$  позволяет определить зависимость намагниченности от температуры в широком интервале температур.

Рассмотрим прежде всего случай низких температур,  $T \ll T_c$ . При этом среднее значение проекции спина на направление магнитного поля  $\langle s_z \rangle$  мало отличается от своего минимального значения  $-s$  и при вычислении величины  $\mathfrak{N}$  в выражении для  $\tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})$  можно заменить  $\langle s_z \rangle$  на  $-s$ . В результате мы снова получим формулу Блоха

$$\langle s_z \rangle = -s + \zeta(3/2) \left( \frac{T}{4\pi s J_0} \right)^{3/2}. \quad (23.3.16)$$

Поступая так же, как и в случае  $s = 1/2$ , можно найти поведение намагниченности вблизи температуры Кюри ( $T < T_c$ ):

$$\langle s_z \rangle = -A \sqrt{T_c - T}, \quad (23.3.17)$$

где

$$T_c = \frac{2J_0}{C} s(s+1), \quad A = \sqrt{\frac{10Cs(s+1)}{3J_0[4s(s+1) - 3 + 5C]}}$$

(см. формулу (23.2.3)).

Мы показали, как могут быть получены уравнения, определяющие зависимость намагниченности ферромагнетика от температуры в широком интервале температур. Обобщение этих уравнений на случай антиферромагнетиков не представляет особых затруднений [17]. Результаты, получаемые при этом в области низких температур, так же как и в случае ферромагнетиков, совпадают с выводами теории спиновых волн; при температурах же, близких к температуре Нееля, намагниченность подрешеток меняется по закону  $M_i \sim \sqrt{T_N - T}$ .

## § 24. Флуктуации магнитных величин и рассеяние медленных нейтронов и света на спиновых волнах

**1. Корреляторы флуктуаций магнитных величин в ферромагнетиках.** В § 22 мы нашли корреляционную функцию плотности магнитного момента, характеризующую флуктуации магнитного момента в ферромагнетиках. Зная эту функцию и используя уравнения магнитостатики, можно найти корреляционные функции магнитного поля и магнитной индукции. Мы приведем здесь выражения для компонент Фурье этих функций, которые будем называть корреляторами флуктуаций, в том случае, когда  $ak \ll 1$ .

Корреляторы флуктуаций определяются согласно формуле

$$\langle A_i A_j \rangle_{k\omega} = \int \langle A_i(\mathbf{r}_1, t_1) A_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{r} dt, \quad (24.1.1)$$

где  $A_i(\mathbf{r}, t)$  служит для обозначения любой из магнитных величин и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $t = t_1 - t_2$  (такое определение возможно ввиду того, что корреляционные функции в непрерывной и однородной среде являются функциями разностей аргументов  $\mathbf{r}_1$ ,  $t_1$  и  $\mathbf{r}_2$ ,  $t_2$ ).

Заметим, что

$$\langle A_i(\mathbf{k}, \omega) A_j(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (2\pi)^4 \langle A_i A_j \rangle_{k\omega} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega'), \quad (24.1.2)$$

где

$$A_i(\mathbf{k}, \omega) = \int A_i(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{r} dt.$$

Рассмотрим прежде всего коррелятор флуктуаций отклонения плотности магнитного момента от равновесного значения  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ . При  $\mathbf{k} \neq 0$ ,  $\omega \neq 0$  этот коррелятор определяется формулой (22.2.19):

$$\langle m_i m_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = -i\hbar(N_\omega + 1) \{ \chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) - \chi'^{*}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \}, \quad (24.1.3)$$

где  $\chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  — тензор высокочастотной магнитной восприимчивости, определяемый формулами (22.2.16), и

$$N_\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1}$$

(заметим, что величина  $\omega$  может быть здесь как положительной, так и отрицательной).

Подчеркнем, что коррелятор плотности магнитного момента, характеризующий спектральное распределение флуктуаций плотности магнитного момента, полностью определяется тензором высокочастотной магнитной восприимчивости. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, аналогичной ситуации, имеющей место в электрических цепях, флуктуации в которых определяются их комплексными сопротивлениями. Более того, корреляторы в обоих случаях могут быть найдены одинаковым методом, исходя из выражения для изменения энергии системы в единицу времени под действием «случайной» силы и известной связи между интересующей нас флуктуирующей величиной и «случайной» силой\*). В случае флуктуаций плотности магнитного момента под «случайной» силой нужно понимать стороннее магнитное поле  $\mathbf{h}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)$ . При этом величины  $\mathbf{m}(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\mathbf{h}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)$  связаны между собой соотношением

$$\mathbf{m}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{h}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega),$$

а выражение для изменения энергии ферромагнетика имеет, согласно (22.3.5), вид

$$\dot{Q} = -\frac{i}{(2\pi)^3} \sum_{\omega > 0} \int d\mathbf{k} \omega \mathbf{h}^{*(e)}(\mathbf{k}, \omega) \{ \hat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega) - \hat{\chi}'^*(\mathbf{k}, \omega) \} \mathbf{h}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega).$$

---

\*) Этот метод был развит Найквистом, Леонтовичем и Рытовым и Келленом и Велтоном (см. [18]).

Как мы знаем, положение особенностей тензора  $\hat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega)$  определяет закон дисперсии слабозатухающих колебаний магнитного момента — спиновых волн. Поэтому спектральное распределение флуктуации плотности магнитного момента имеет резкие максимумы при частотах, совпадающих с частотой спиновой волны  $\omega_s(\mathbf{k})$ .

При частотах, близких к  $\omega_s(\mathbf{k})$ , коррелятор флуктуации плотности магнитного момента, определяется следующей формулой [19]:

$$\langle m_i m_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 4h\omega(N_\omega + 1)gM_0\Omega_{ij}\gamma_s(\mathbf{k})[(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k}))^2 + (2\omega_s(\mathbf{k})\gamma_s(\mathbf{k}))^2]^{-1}. \quad (24.1.4)$$

Здесь  $\gamma_s(\mathbf{k})$  — декремент затухания спиновой волны и тензор  $\Omega_{ij}$  имеет вид

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} \Omega & i\omega & 0 \\ -i\omega & \Omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\Omega = gM_0 \left( \alpha k^2 + \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right), \quad \Omega_1 = \Omega + 4\pi gM_0 \sin^2 \vartheta_k$$

(ось  $z$  выбрана вдоль оси анизотропии, ось  $y$  перпендикулярна к плоскости  $(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ ;  $\vartheta_k$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{k}$ ).

Если  $\gamma_s(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ , то

$$\frac{1}{\pi} \frac{2\gamma_s(\mathbf{k})\omega_s(\mathbf{k})}{(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k}))^2 + (2\gamma_s(\mathbf{k})\omega_s(\mathbf{k}))^2} \rightarrow \delta(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k})) \quad (24.1.5)$$

и формула (24.1.4) принимает вид

$$\langle m_i m_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 2\pi h |N_\omega + 1| gM_0 \Omega_{ij} \delta(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k})). \quad (24.1.6)$$

Найдем корреляторы флуктуаций магнитного поля  $\langle h_i h_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  и магнитной индукции  $\langle b_i b_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ , предполагая по-прежнему, что  $|\omega| \approx \omega_s(\mathbf{k})$ .

Используя соотношение

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}) = -4\pi \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}m(\mathbf{k}))}{k^2},$$

легко видеть, что

$$\langle h_i h_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{k_i k_j}{k^2} \langle h^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad (24.1.7)$$

где

$$\langle h^2 \rangle_{k\omega} = \frac{8}{\pi} (2\pi)^3 \hbar \omega |N_\omega + 1| g M_0 \Omega \sin^2 \vartheta_k \times \\ \times \frac{\gamma_s(\mathbf{k})}{(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k}))^2 + (2\gamma_s(\mathbf{k}) \omega_s(\mathbf{k}))^2}.$$

Если  $\gamma_s(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ , то

$$\langle h^2 \rangle_{k\omega} = 4 (2\pi)^3 \hbar |N_\omega + 1| g M_0 \Omega \sin^2 \vartheta_k \delta(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k})). \quad (24.1.8)$$

Наконец, используя соотношение  $\mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}$ , получим

$$\langle b_i b_j \rangle_{k\omega} = \frac{8}{\pi} (4\pi)^3 \hbar \omega |N_\omega + 1| g M_0 B_{ij} \times \\ \times \frac{\gamma_s(\mathbf{k})}{(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k}))^2 + (2\gamma_s(\mathbf{k}) \omega_s(\mathbf{k}))^2}, \quad (24.1.9)$$

где

$$B_{ij} = \left( \delta_{iq} - \frac{k_i k_q}{k^2} \right) \left( \delta_{jp} - \frac{k_j k_p}{k^2} \right) \Omega_{qp}.$$

Если  $\gamma_s(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ , то

$$\langle b_i b_j \rangle_{k\omega} = 4 (2\pi)^3 (N_\omega + 1) g M_0 B_{ij} \delta(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k})). \quad (24.1.10)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} \langle b^2 \rangle_{k\omega} &= 4 (2\pi)^3 \hbar |N_\omega + 1| g M_0 (\Omega \cos^2 \vartheta_k + \Omega_1) \delta(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k})), \\ \langle b_z^2 \rangle_{k\omega} &= 4 (2\pi)^3 \hbar |N_\omega + 1| g M_0 \Omega \sin^2 \vartheta_k \cos^2 \vartheta_k \delta(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k})). \end{aligned} \right\} \quad (24.1.11)$$

**2. Рассеяние медленных нейтронов на спиновых волнах.** Зная корреляторы флуктуаций магнитных величин в ферромагнетике, можно определить сечения рассеяния медленных нейтронов и света на спиновых волнах.

Рассмотрим прежде всего рассеяние медленных нейтронов на спиновых волнах в ферромагнетиках. Мы будем интересоваться рассеянием нейтронов с малым изменением их импульса  $\Delta p$ ,  $\Delta p \ll \frac{\hbar}{a}$ . В этом случае можно исходить из следующего выражения для гамильтониана взаимодействия нейтрона со спиновыми волнами;

$$\mathcal{H}_I = -\mu_n \boldsymbol{\sigma} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t); \quad (24.2.1)$$

здесь  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$  — переменная составляющая вектора магнитной индукции в ферромагнетике,  $\mu_n$  — магнитный момент нейтрона

и  $\sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  — матрицы Паули,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(ось 3 совпадает с направлением вектора постоянной составляющей магнитной индукции в ферромагнетике  $B_0$ ).

Нас интересует вероятность перехода нейтрона из начального состояния  $i$ , характеризуемого импульсом нейтрона  $p$ , проекцией его спина  $s_z$  на направление вектора магнитной индукции  $B_0$  и энергией нейтрона  $\varepsilon = \frac{p^2}{2m} - 2s_z\mu_n B_0$ , в конечное состояние  $f$ , характеризуемое импульсом нейтрона  $p'$ , проекцией его спина  $s'_z$  и энергией  $\varepsilon' = \frac{p'^2}{2m} - 2s'_z\mu_n B_0$ . Как известно, эта вероятность определяется формулой

$$dW_{i \rightarrow f} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f | \mathcal{H}_I | i) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \frac{V dp'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (24.2.2)$$

где  $\omega = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\hbar}$  и  $(f | \mathcal{H}_I | i)$  — матричный элемент перехода ( $V$  — объем ферромагнетика). Так как волновые функции нейтрона в начальном и конечном состоянии имеют вид

$$\Psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar}(pr - \varepsilon t)} \chi_i, \quad \Psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar}(p'r - \varepsilon' t)} \chi_{f'}$$

где  $\chi_i$  и  $\chi_{f'}$  — спиновые волновые функции нейтрона, то

$$(f | \mathcal{H}_I | i) = -\frac{\mu_n}{V} \sum_j (s'_z | \sigma_j | s_z) \int dr e^{iqr} b_j(r, t),$$

где  $q = \frac{1}{\hbar}(p - p')$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} dW_{i \rightarrow f} &= \frac{\mu_n^2}{\hbar^2 V^2} \sum_{jj'} (s'_z | \sigma_j | s_z)^* (s'_z | \sigma_{j'} | s_z) \times \\ &\quad \times \int e^{-iqr_1 + i\omega t_1} b_j(r_1, t_1) dr_1 dt_1 \times \\ &\quad \times \int e^{iqr_2 - i\omega t_2} b_{j'}(r_2, t_2) dr_2 dt_2 \frac{V dp'}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (24.2.3)$$

Это выражение должно быть усреднено по флуктуациям магнитной индукции. Вспомогая, что корреляционная



функция  $\langle b_j(\mathbf{r}_1, t_1) b_{j'}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$  зависит только от разностей координат  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и времен  $t_1 - t_2$  и переходя от  $\mathbf{r}_1, t_1$  и  $\mathbf{r}_2, t_2$  к новым переменным  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t = t_1 - t_2, \mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ , получим

$$\begin{aligned} \int e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + i\omega(t_1 - t_2)} \langle b_j(\mathbf{r}_1, t_1) b_{j'}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 dt_1 dt_2 = \\ = \int e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \langle b_j(\mathbf{r}_1, t_1) b_{j'}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle d\mathbf{r} dt d\mathbf{R} dT = \\ = V \Delta T \langle b_j b_{j'} \rangle_{q\omega}, \end{aligned}$$

где  $\Delta T$  — интервал изменения времен  $t_1$  и  $t_2$ .

Таким образом, мы можем ввести вероятность перехода, отнесенную к единице времени

$$d\omega_{i \rightarrow f} = \frac{\mu_n^2}{\hbar^2} \sum_{jj'} (s'_z | \sigma_j | s_z)^* (s'_z | \sigma_{j'} | s_z) \langle b_j b_{j'} \rangle_{q\omega} \frac{dp'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (24.2.4)$$

Разделив это выражение на плотность потока нейтронов, равную  $v/V$  ( $v$  — начальная скорость нейтронов) и число атомов в ферромагнетике, получим дифференциальное сечение рассеяния нейтронов, отнесенное к одному атому

$$d\sigma = \frac{\mu_n^2}{\hbar^2 v n_0} \sum_{jj'} U_{jj'}(s_z, s'_z) \langle b_j b_{j'} \rangle_{q\omega} \frac{dp'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (24.2.5)$$

где  $n_0$  — число атомов ферромагнетика в единице объема и

$$U_{jj'}(s_z, s'_z) = (s'_z | \sigma_j | s_z)^* (s'_z | \sigma_{j'} | s_z).$$

Эта формула справедлива, строго говоря, при малых передачах импульса нейтрона, когда  $aq \ll 1$ . Если  $aq \gg 1$ , то при рассеянии нейтронов будут проявляться неоднородности микроскопического магнитного поля на расстояниях порядка размеров атома. Это приводит к появлению в сечении рассеяния добавочного множителя  $|F(aq)|^2$ , где  $F$  — некоторая функция переданного импульса, называемая магнитным формфактором. Если  $aq \ll 1$ , то, очевидно,  $F = 1$ . Интересуясь далее случаем  $aq \ll 1$ , мы не будем выписывать множителя  $|F(aq)|^2$  в выражениях для сечения рассеяния.

Прежде чем анализировать зависимость дифференциального сечения рассеяния нейтронов от переданных импульса и

энергии, выясним спиновую структуру сечения рассеяния. Мы рассмотрим три случая: рассеяние неполяризованных нейтронов, рассеяние поляризованных нейтронов без изменения ориентации их спина и рассеяние поляризованных нейтронов с изменением ориентации их спина (нейтроны предполагаются поляризованными вдоль вектора  $\mathbf{B}_0$ ). Соответствующие сечения рассеяния мы будем обозначать через  $\overline{d\sigma}$ ,  $d\sigma_{\uparrow\uparrow}$  и  $d\sigma_{\uparrow\downarrow}$ .

Для получения первого из этих сечений выражение (24.2.5) должно быть просуммировано по ориентациям спина нейтрона в конечном состоянии и усреднено по ориентациям спина в начальном состоянии. Замечая, что

$$\frac{1}{2} \sum_{s_z, s'_z} U_{jj'}(s_z, s'_z) = \delta_{jj'},$$

получим

$$\overline{d\sigma} = \frac{\mu_n^2}{\hbar^2 v n_0} \langle \mathbf{b}^2 \rangle_{q\omega} \frac{dp'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (24.2.6)$$

Учитывая, что

$$U_{jj'}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = n_j n_{j'},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль  $\mathbf{B}_0$ , найдем сечение рассеяния  $d\sigma_{\uparrow\uparrow}$ :

$$d\sigma_{\uparrow\uparrow} = \frac{\mu_n^2}{\hbar^2 v n_0} \langle \mathbf{b}_z^2 \rangle_{q\omega} \frac{dp'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (24.2.7)$$

Наконец, так как

$$U_{jj'}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \delta_{jj'} - n_j n_{j'},$$

то

$$d\sigma_{\uparrow\downarrow} = \frac{\mu_n^2}{\hbar^2 v n_0} \{ \langle \mathbf{b}^2 \rangle_{q\omega} - \langle \mathbf{b}_z^2 \rangle_{q\omega} \} \frac{dp'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (24.2.8)$$

Заметим, что

$$\overline{d\sigma} = d\sigma_{\uparrow\uparrow} + d\sigma_{\uparrow\downarrow}.$$

Используя формулу (24.1.11) для коррелятора флуктуаций магнитной индукции, получим следующее выражение для сечения рассеяния неполяризованных нейтронов [20]:

$$\overline{d\sigma} = |N_\omega + 1| \left( \frac{2\mu_n}{\hbar^2} \right)^2 \frac{(gM_0)^2}{n_0 v} \left\{ \left( \alpha q^2 + \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} \right) \times \right. \\ \left. \times (1 + \cos^2 \vartheta_q) + 4\pi \sin^2 \vartheta_q \right\} \delta(\omega^2 - \omega_s(q)) dp', \quad (24.2.9)$$

где  $\vartheta_q$  — угол между векторами  $q = \frac{1}{\hbar}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$  и  $B_0$  и  $\hbar\omega = \frac{p^2 - p'^2}{2m}$  (в выражении для энергии нейтрона можно не учитывать слагаемого  $2\mu_n s_z B_0$ ).

Сечение рассеяния поляризованных нейтронов определяется, согласно (24.1.11), формулами [21]

$$d\sigma_{\uparrow\uparrow} = |N_\omega + 1| \left( \frac{2\mu_n}{\hbar^2} \right)^2 \frac{(gM_0)^2}{n_0 v} \left( \alpha q^2 + \beta + \frac{H_0^{(t)}}{M_0} \right) \times \\ \times \sin^2 \vartheta_q \cos^2 \vartheta_q \delta(\omega^2 - \omega_s^2(q)) d\mathbf{p}'. \quad (24.2.10)$$

$$d\sigma_{\uparrow\downarrow} = |N_\omega + 1| \left( \frac{2\mu_n}{\hbar^2} \right)^2 \frac{(gM_0)^2}{n_0 v} \left\{ \left( \alpha q^2 + \beta + \frac{H_0^{(t)}}{M_0} \right) \times \right. \\ \left. \times (1 + \cos^4 \vartheta_q) + 4\pi \sin^2 \vartheta_q \right\} \delta(\omega^2 - \omega_s^2(q)) d\mathbf{p}'.$$

Эти выражения, так же как выражение (24.2.9), справедливы при  $\alpha q \ll 1$  и  $\gamma_s(q) \rightarrow 0$ . Для учета затухания спиновых волн нужно в этих формулах произвести замену (24.1.5).

Полученные выражения для  $\overline{d\sigma}$ ,  $d\sigma_{\uparrow\uparrow}$ ,  $d\sigma_{\uparrow\downarrow}$  показывают, что сечения рассеяния нейтронов имеют резкие максимумы, если изменения энергии и импульса нейтрона связаны между собой соотношениями

$$\varepsilon - \varepsilon' \equiv \hbar\omega = \pm \hbar\omega_s(q), \quad \mathbf{p} - \mathbf{p}' = \hbar\mathbf{q}. \quad (24.2.11)$$

Эти соотношения имеют простой физический смысл. Если  $\hbar\omega = \hbar\omega_s(q)$ , то максимум соответствует излучению нейтроном магнона с импульсом  $\hbar\mathbf{q}$  и энергией  $\hbar\omega_s(q)$ . Если же  $\hbar\omega = -\hbar\omega_s(q)$ , то максимум в сечении рассеяния соответствует поглощению магнона с той же энергией.

Мы видим, что, изучая неупругое рассеяние медленных нейтронов в ферромагнетиках, можно экспериментально определять зависимость частоты спиновой волны от ее волнового вектора, а также декремент затухания спиновых волн.

Остановимся теперь на физическом смысле множителя  $N_\omega + 1$ , входящего в выражения для сечения рассеяния. Если  $\omega > 0$  и  $\gamma_s(q) \rightarrow 0$ , то этот множитель будет равен  $\bar{n}(q) + 1$ , где  $\bar{n}(q)$  — среднее число магнонов частоты  $\omega_s(q)$  при температуре  $T$ ,

$$\bar{n}(q) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_s(q)}{T}} - 1}.$$

Если же  $\omega < 0$  (и по-прежнему  $\gamma_s(q) \rightarrow 0$ ), то этот множитель будет равен  $\bar{n}(q)$ .

Таким образом, сечение рассеяния нейтрона с испусканием магнона пропорционально  $\bar{n}(q) + 1$ , а сечение поглощения магнона пропорционально  $\bar{n}(q)$ . Аналогичные закономерности, как известно, имеют место также при испускании и поглощении света, только в этом случае  $N_\omega$  обозначает среднее число фотонов частоты  $\omega$  при температуре  $T$ . Поэтому слагаемое в  $d\sigma$  при  $\omega > 0$ , не содержащее  $\bar{n}(q)$ , можно интерпретировать как сечение спонтанного излучения нейтроном магнона, а слагаемое, пропорциональное  $\bar{n}(q)$  — как сечение вынужденного излучения магнона. Так как  $\bar{n}(q)$  обращается при  $T \rightarrow 0$  в нуль, то сечение вынужденного излучения магнона, так же как и сечение поглощения магнона нейтроном, обращается при  $T \rightarrow 0$  в нуль. Отсюда следует, что при очень низких температурах, когда  $T \ll \Delta\varepsilon$ , где  $\Delta\varepsilon = |\varepsilon - \varepsilon'|$  — изменение энергии нейтрона, почти все рассеянные нейтроны имеют энергию  $\varepsilon' = \varepsilon - \Delta\varepsilon$ ; при  $T \gg \Delta\varepsilon$  число рассеянных нейтронов с энергиями  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$  и  $\varepsilon - \Delta\varepsilon$  одинаково по порядку величины.

Заметим в заключение этого раздела, что законы сохранения (24.2.11) позволяют определить энергию рассеянных нейтронов, движущихся в заданном направлении. В частности, если  $p \gg \hbar q$ , то

$$|\Delta\varepsilon| = \mu_0 M_0 \left\{ \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \alpha \left( \frac{2p}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \right\}^{1/2} \times \\ \times \left\{ \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \alpha \left( \frac{2p}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 + 4\pi - \pi \frac{(\cos \psi - \cos \psi')^2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right\},$$

где  $\theta$  — угол рассеяния и  $\psi$  и  $\psi'$  — углы между векторами  $p$  и  $p'$  и осью анизотропии \*).

**3. Комбинационное рассеяние света на спиновых волнах.** Перейдем к изучению рассеяния света на флуктуациях плотности магнитного момента в ферромагнетиках

\*) Наряду с рассмотренным нами неупругим рассеянием нейтронов на спиновых волнах в ферромагнетиках возможны и другие процессы рассеяния нейтронов: упругое ядерное рассеяние, упругое магнитное рассеяние и неупругое рассеяние нейтронов на колебаниях решетки. Вопросы, касающиеся рассеяния медленных нейтронов в кристаллах, изложены более подробно в монографиях [22].

[23—25]. Это рассеяние обуславливается взаимодействием световых и спиновых волн, описываемым нелинейным членом  $g(\mathbf{m} \times \tilde{\mathbf{H}})$  в уравнении движения плотности магнитного момента

$$\dot{\mathbf{m}} = g(\mathbf{M}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}) + g(\mathbf{m} \times \tilde{\mathbf{H}}), \quad (24.3.1)$$

где  $\tilde{\mathbf{H}}$  — эффективное магнитное поле:

$$\tilde{\mathbf{H}} \equiv \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{m}, \mathbf{h}) = \alpha \Delta \mathbf{m} + \left( \beta + \frac{H_0^{(t)}}{M_0} \right) \mathbf{m} + \mathbf{h}.$$

Так как  $|\mathbf{m}| \ll M_0$ , то нелинейный член в уравнении движения (24.3.1) мал. Поэтому можно приближенно выделить поля падающей световой волны  $\mathbf{e}^0$ ,  $\mathbf{h}^0$ , удовлетворяющие «свободным» уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{e}^0 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{h}^0 + 4\pi \mathbf{m}^0), & \operatorname{rot} \mathbf{h}^0 &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{e}^0}{\partial t}, \\ \operatorname{div} (\mathbf{h}^0 + 4\pi \mathbf{m}^0) &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{e}^0 &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{m}^0}{\partial t} &= g(\mathbf{M}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}^0), & \tilde{\mathbf{H}}^0 &= \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{m}^0, \mathbf{h}^0), \end{aligned} \quad (24.3.2)$$

и поля спиновой волны, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{e}^s &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{h}^s + 4\pi \mathbf{m}^s), & \operatorname{rot} \mathbf{h}^s &= 0, \\ \operatorname{div} (\mathbf{h}^s + 4\pi \mathbf{m}^s) &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{e}^s &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{m}^s}{\partial t} &= g(\mathbf{M}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}^s), & \tilde{\mathbf{H}}^s &= \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{m}^s, \mathbf{h}^s). \end{aligned} \quad (24.3.3)$$

Благодаря взаимодействию между волнами поле в ферромагнетике будет отличаться от суммы полей, связанных с падающей световой и спиновой волнами:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{h}^s + \mathbf{h}^0 + \mathbf{h}' + \mathbf{h}'' + \dots, \\ \mathbf{m} &= \mathbf{m}^s + \mathbf{m}^0 + \mathbf{m}' + \mathbf{m}'' + \dots, \\ \mathbf{e} &= \mathbf{e}^s + \mathbf{e}^0 + \mathbf{e}' + \mathbf{e}'' + \dots, \end{aligned} \quad (24.3.4)$$

где бесконечные ряды  $\mathbf{h}' + \mathbf{h}'' + \dots$ ,  $\mathbf{e}' + \mathbf{e}'' + \dots$  обозначают поля, связанные с рассеянными волнами, возникающими в результате взаимодействия падающей световой и спиновой волн. При этом  $\mathbf{h}'$ ,  $\mathbf{e}'$  обозначают поля рассеянных волн, билинейные относительно полей падающей световой и спиновой волн, т. е. имеющие структуру типа  $h^0 m^s$ . Если частота падающей волны равна  $\omega$ , и частота спиновой волны —  $\omega_s$ , то поле  $\mathbf{h}'$ ,  $\mathbf{e}'$  соответствует рассеянным вол-

нам с частотами  $\omega' = \omega \pm \omega_s$ . Аналогичным образом  $h'', e''$  обозначают поля рассеянных волн, линейные по  $h^0$  и билинейные по  $m^s$ , т. е. имеющие структуру типа  $h^0 m^s m^s$ . Этим волнам соответствуют частоты  $\omega'' = \omega \pm \omega_s(\mathbf{k}) \pm \omega_s(\mathbf{k}')$  и т. д.

Подставляя выражения (24.3.4) в нелинейное уравнение движения плотности магнитного момента (24.3.1), легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial m'}{\partial t} &= g(m^s \times \tilde{H}^0) + g(m^0 \times \tilde{H}^s), \\ \frac{\partial m''}{\partial t} &= g(m^s \times \tilde{H}') + g(m' \times \tilde{H}^s), \\ &\dots \end{aligned} \quad (24.3.5)$$

Мы ограничимся рассмотрением рассеянных волн, соответствующих полям  $h', e'$ . Эти поля удовлетворяют, очевидно, следующим уравнениям:

$$\text{rot } e' = -\frac{1}{c} \frac{\partial h'}{\partial t} + K, \quad \text{rot } h' = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e'}{\partial t},$$

$$\text{div}(h' + 4\pi m') = 0, \quad \text{div } e' = 0,$$

где

$$K = -\frac{4\pi g}{c} \{(m^s \times \tilde{H}^0) + (m^0 \times \tilde{H}^s)\}.$$

Мы будем предполагать, что падающая волна является плоской монохроматической волной, частота которой  $\omega$  значительно больше частот спиновых волн,  $\omega \gg \omega_s(\mathbf{k})$ . При этом, очевидно, тензор высокочастотной магнитной восприимчивости  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  будет очень мал и мы можем в выражении для  $K$  пренебречь вторым слагаемым, а в первом слагаемом заменить  $H^0$  на  $h^0$ :

$$K = -\frac{4\pi g}{c} (m^s \times h^0).$$

Таким образом, поля рассеянных волн удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \text{rot } h' &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e'}{\partial t}, \\ \text{rot } e' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial h'}{\partial t} - \frac{4\pi g}{c} (m^s \times h^0), \\ \text{div } h' &= 0, \quad \text{div } e' = 0, \end{aligned} \quad (24.3.6)$$

откуда

$$\Delta e' - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 e'}{\partial t^2} = \frac{4\pi g}{c} \text{rot}(m^s \times h^0). \quad (24.3.7)$$

Это уравнение имеет такую же структуру, как и уравнение для электрического поля в среде, создаваемого током  $j'$ :

$$\Delta e' - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 e'}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j'}{\partial t}.$$

Поэтому можно сказать, что при взаимодействии световой и спиновой волн поле рассеянной волны создается током  $j'$ , определяемым соотношением

$$\frac{\partial j'}{\partial t} = cg \text{rot}(m^s \times h^0). \quad (24.3.8)$$

Переходя в (24.3.7) к компонентам Фурье, получим

$$\left(k'^2 - \frac{\omega'^2}{c^2} \varepsilon\right) e'(k', \omega') = \frac{4\pi i}{c^2} \omega' j'(k', \omega'), \quad (24.3.9)$$

где

$$j'(k', \omega') = g \frac{c^2}{\omega^2} \{ (k' \times e^0)(km^s(q, \Delta\omega)) + (k' \times k)(e^0 m^s(q, \Delta\omega)) \} \quad (24.3.10)$$

и

$$q = k - k', \quad \Delta\omega = \omega - \omega'.$$

Определив электрическое поле рассеянной волны, можно найти интенсивность рассеянного излучения, т. е. увеличение (в единицу времени) энергии рассеянных волн  $U'$ :

$$\dot{U}' = \int e'(r, t) j'(r, t) dr. \quad (24.3.11)$$

Переходя здесь к компонентам Фурье и используя (24.3.9), получим

$$\dot{U}' = \frac{1}{(2\pi)^8} \text{Re} \int dr \int dk' d\omega' dk'' d\omega'' e^{i(k' - k'')r - i(\omega' - \omega'')t} \times \\ \times \frac{4\pi i \omega'}{c^2} \cdot \frac{j'(k', \omega') j'^*(k'', \omega'')}{k'^2 - \varepsilon \frac{\omega'^2}{c^2} + i0}.$$

Учтем теперь, что рассеяние света происходит на «случайных» спиновых волнах. Это значит, что последнее выражение должно быть усреднено по флуктуациям плотности магнитного момента  $m^s$ . Замечая, что

$$\langle j'(k', \omega') j'^*(k'', \omega'') \rangle = (2\pi)^4 \delta(k' - k'') \delta(\omega' - \omega'') \langle j'^2 \rangle_{k', \omega'},$$

получим в результате усреднения

$$\begin{aligned} \bar{U}' &= V \operatorname{Re} \int \frac{d\mathbf{k}' d\omega'}{(2\pi)^4} \frac{4\pi i \omega'}{c^2} \cdot \frac{\langle j'^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'}}{k'^2 - \varepsilon \frac{\omega'^2}{c^2} + i0} = \\ &= V \int \frac{d\mathbf{k}' d\omega'}{(2\pi)^4} \frac{4\pi \omega'}{c^2} \langle j'^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \pi \delta \left( k'^2 - \varepsilon \frac{\omega'^2}{c^2} \right), \end{aligned} \quad (24.3.12)$$

где, согласно (24.3.10),

$$\begin{aligned} \langle j'^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} &= g^2 \varepsilon^2 \left\{ \sin^2 \theta e_i^0 e_j^0 + \left( (e^0)^2 - \frac{(\mathbf{k}' e^0)^2}{k'^2} \right) \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{k^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\mathbf{k}' \times e^0)(\mathbf{k}' \times \mathbf{k})}{k^4} (k_i e_j^0 + k_j e_i^0) \right\} \langle m_i m_j \rangle_{\mathbf{q}, \Delta \omega} \end{aligned} \quad (24.3.13)$$

и  $\theta$  — угол рассеяния, т. е. угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ .

Устранив в (24.3.12)  $\delta$ -функцию интегрированием по модулю волнового вектора  $\mathbf{k}'$ , получим

$$\bar{U}' = \frac{V}{8\pi} \frac{V \bar{\varepsilon}}{c^3} \int \langle j'^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \omega'^2 d\omega' d\omega', \quad (24.3.14)$$

где  $k' = \frac{\omega'}{c} \sqrt{\varepsilon}$  и  $d\omega'$  — элемент телесного угла, в котором лежит вектор  $\mathbf{k}'$ .

Это соотношение показывает, что величина

$$d\bar{U}' = \frac{V}{8\pi} \frac{V \bar{\varepsilon}}{c^3} \omega'^2 \langle j'^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} d\omega' d\omega'$$

представляет собой интенсивность рассеянного излучения в интервале частот  $d\omega'$  и интервале телесных углов  $d\omega'$ .

Разделив  $d\bar{U}'$  на  $V\Pi^0$ , где  $\Pi^0 = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{e}^0 \times \mathbf{h}^0|$  — плотность потока энергии в падающей волне, получим дифференциальное сечение рассеяния, отнесенное к единице объема (или дифференциальный коэффициент экстинкции)  $d\Sigma$

$$d\Sigma = \frac{d\bar{U}'}{V\Pi^0} = \frac{V \bar{\varepsilon}}{2c} \frac{\omega'^2}{c^3} \frac{\langle j'^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'}}{|\mathbf{e}^0 \times \mathbf{h}^0|} d\omega' d\omega'. \quad (24.3.15)$$

Как было показано в разделе 1 этого параграфа, коррелятор флуктуаций плотности магнитного момента  $\langle m_i m_j \rangle_{\mathbf{q}\omega}$  имеет резкие максимумы при  $|\omega| \sim \omega_s(\mathbf{q})$ . Поэтому сечение рассеяния света на спиновых волнах также имеет резкие максимумы при выполнении условий

$$\omega - \omega' = \pm \omega_s(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'. \quad (24.3.16)$$



Эти условия можно, очевидно, интерпретировать как законы сохранения энергии и импульса при испускании и поглощении магнона фотоном.

Мы видим, что в спектре рассеянного излучения возникают два сателлита, отстоящих от основной линии на расстоянии  $\Delta\omega = \pm \omega_s(q)$ . Выполняющиеся при рассеянии законы сохранения (24.3.16) позволяют однозначно определить изменение частоты при рассеянии, если известны направления распространения падающей и рассеянной волн. Замечая, что при  $\omega \gg |\Delta\omega|$   $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ , получим

$$|\Delta\omega| = gM_0 \left( \beta + \frac{H_0^{(l)}}{M_0} + 4\alpha k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} \left\{ \beta + \frac{H_0^{(l)}}{M_0} + 4\pi - \pi \sin^{-2} \frac{\theta}{2} (\cos \psi - \cos \psi')^2 \right\}^{1/2},$$

где  $\psi$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\psi'$  — угол между векторами  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{n}$ .

Учитывая, что в выражение для коррелятора флуктуаций плотности магнитного момента входит множитель  $N_{\Delta\omega} + 1$ , легко убедиться, что при очень низких температурах ( $T \ll \hbar |\Delta\omega|$ ) происходит рассеяние только с уменьшением частоты; при  $T \geq \hbar |\Delta\omega|$  интенсивности обоих сателлитов в спектре рассеянного излучения одинаковы по порядку величины.

Если падающая волна является неполяризованной, то выражение (24.3.15) должно быть еще усреднено по двум возможным поляризациям падающей волны. Это усреднение означает, что величина  $e_i^0 e_j^0$  должна быть заменена величиной

$$\overline{e_i^0 e_j^0} = \frac{1}{2} (e^0)^2 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right).$$

В результате мы получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния неполяризованного света [25]:

$$d\Sigma = \left( \frac{gk}{c} \right)^2 \varepsilon \left\{ \sin^2 \theta \langle m^2 \rangle_{q, \Delta\omega} + 2 \cos \theta \frac{k_i k'_j}{kk'} \operatorname{Re} \langle m_i m_j \rangle_{q, \Delta\omega} \right\} \frac{d\omega' d\omega'}{4\pi}, \quad (24.3.17)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega'$  и  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ .

Подставляя в эту формулу выражение (24.1.4) для коррелятора флуктуаций плотности магнитного момента, получим

$$d\Sigma = |N_{\Delta\omega} + 1| \left( \frac{gk}{c} \right)^2 \varepsilon \hbar (gM_0)^2 v(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(\Delta\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{q})) do' d\omega', \quad (24.3.18)$$

где

$$v(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + 4\alpha k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) (1 - \cos \theta \cos \psi \cos \psi') + \\ + 2\pi \left\{ 1 - \left( 2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-2} (\cos \psi - \cos \psi')^2 \right\} \times \\ \times \left\{ \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-2} \left( \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \times \frac{\mathbf{k}'}{k'} \right) \right)^2 \right\}.$$

Если либо рассеянная, либо падающая волна распространяется вдоль оси анизотропии, то эта формула значительно упрощается

$$d\Sigma = |N_{\Delta\omega} + 1| \left( \frac{gk}{c} \right)^2 \varepsilon \hbar (gM_0)^2 \sin^2 \theta \left( \beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + 4\alpha k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + 2\pi \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta(\Delta\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{q})) do' d\omega'. \quad (24.3.19)$$

Заметим, что, согласно (24.1.5), для учета затухания спиновых волн в формулах (24.3.18), (24.3.19) достаточно произвести замену

$$\delta(\Delta\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{q})) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{2}{\pi} \gamma_s(\mathbf{q}) \Delta\omega \{ (\Delta\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{q}))^2 + (2\gamma_s(\mathbf{q}) \omega_s(\mathbf{q}))^2 \}^{-1}.$$

Наряду с рассеянием света на флуктуациях магнитного момента в ферромагнетике происходит также рассеяние света на упругих флуктуациях, в частности на флуктуациях плотности. Рассеяние на упругих флуктуациях приводит прежде всего к возникновению в спектре рассеянного излучения звуковых сателлитов ( $\Delta\omega = \pm sq$ ,  $s$  — скорость звука), ничем принципиально не отличающихся от звуковых сателлитов в случае обычных (не ферромагнитных) кристаллов. Кроме того, благодаря связи между упругими и спиновыми волнами рассеяние электромагнитных волн на упругих флуктуациях вносит вклад в интенсивность рассмотренных в этом разделе спиново-волновых сателлитов.

## ГЛАВА VII

### КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

#### § 25. Процессы взаимодействия между магнонами

1. Гамильтониан взаимодействия магнонов друг с другом. До сих пор мы изучали, главным образом свободные спиновые волны. В частности, при изучении термодинамических свойств ферромагнетиков мы исходили из предположения об идеальности газа спиновых волн — магнонов, так как неидеальность этого газа приводит при  $T \ll T_c$  лишь к малым поправкам к термодинамическому потенциалу ферромагнетика. Теперь мы перейдем к изучению процессов взаимодействий спиновых волн, которые являются определяющими в кинетических явлениях, протекающих в магнитоупорядоченных кристаллах \*).

При изучении этих процессов мы будем рассматривать магнитоупорядоченный кристалл как совокупность газов частиц — в случае магнитоупорядоченного диэлектрика как совокупность газов магнонов и фононов — и описывать процессы взаимодействия в терминах операторов рождения и уничтожения частиц. С этой целью необходимо выразить гамильтониан ферромагнетика, построенный с помощью операторов спинов атомов, через операторы рождения и уничтожения частиц. Эту проблему мы уже изучали в § 18 и видели, что она тесно связана с проблемой реализации операторов спина с помощью бозевских операторов. Как было показано в разделе 1 § 18, гамильтониан ферромагнетика (точнее говоря, его спиновую часть)  $\mathcal{H}_s$  можно представить

---

\*) Процессы взаимодействия спиновых волн друг с другом и с колебаниями решетки впервые были исследованы А. Ахизером [1].

в виде бесконечной суммы членов, содержащих произведения различного числа бозевских операторов  $a(\mathbf{k})$  и  $a^+(\mathbf{k})$ ,

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_s^{(2)} + \mathcal{H}_s^{(3)} + \mathcal{H}_s^{(4)} + \dots$$

где  $\mathcal{H}_s^{(n)}$  ( $n=2, 3, 4, \dots$ ) — форма, содержащая произведения  $n$  операторов  $a^+(\mathbf{k})$ ,  $a(\mathbf{k})$ . Производя унитарное преобразование (18.2.1), диагонализующее форму  $\mathcal{H}_s^{(2)}$ , т. е. приводящее ее к виду

$$\mathcal{H}_s^{(2)} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) c^+(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{H}_0,$$

мы выразим  $\mathcal{H}_s^{(3)}$ ,  $\mathcal{H}_s^{(4)}$  через операторы рождения и уничтожения магнонов  $c^+(\mathbf{k})$  и  $c(\mathbf{k})$ :

$$\mathcal{H}_s^{(3)} = \sum_{123} \Psi_s(12,3) c_1^+ c_2^+ c_3 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \text{э. с.}, \quad (25.1.1)$$

$$\mathcal{H}_s^{(4)} = \sum_{1234} \Psi_s(12,34) c_1^+ c_2^+ c_3 c_4 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) + \text{э. с.},$$

где  $\Psi_s(12,3)$ ,  $\Psi_s(12,34)$  — некоторые функции волновых векторов магнонов  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots$  (мы пользуемся обозначением  $1 \equiv \mathbf{k}_1, 2 \equiv \mathbf{k}_2$ ).

Так как собственные значения  $\mathcal{H}_0$  равны сумме энергий отдельных магнонов, то, как указывалось в § 18, оператор  $\mathcal{H}_0$  следует интерпретировать как гамильтониан газа свободных магнонов, а сумму операторов  $\mathcal{H}_s^{(3)}$ ,  $\mathcal{H}_s^{(4)}$ , ... — как общий гамильтониан их взаимодействия

$$\mathcal{H}_{ss} = \mathcal{H}_s^{(3)} + \mathcal{H}_s^{(4)} + \dots \quad (25.1.2)$$

Ясно, что оператор  $\mathcal{H}_s^{(n)}$  ( $n=3, 4, \dots$ ) описывает процессы, в которых участвуют  $n$  магнонов. В частности, оператор  $\mathcal{H}_s^{(3)}$  описывает процессы слияния двух магнонов и распада магнона на два магнона, а оператор  $\mathcal{H}_s^{(4)}$  — процессы рассеяния двух магнонов. По этой причине величина  $\Psi_s(12,3)$  называется амплитудой слияния (распада) магнонов, а величина  $\Psi_s(12,34)$  — амплитудой рассеяния магнона магноном.

Наличие в выражениях для  $\mathcal{H}_s^{(n)}$  функции  $\Delta\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i\right)$  означает, что в процессах взаимодействия с точностью до вектора обратной решетки (умноженного на  $2\pi$ ) сохраняется суммарный волновой вектор спиновых волн.

Заметим, что в гамильтониане  $\mathcal{H}_s^{(3)}$  мы не выписали членов типа  $c_1^+ c_2^+ c_3^+$ , а в гамильтониане  $\mathcal{H}_s^{(4)}$  — членов типов  $c_1^+ c_2^+ c_3^+ c_4^+$  и  $c_1^+ c_2^+ c_3^+ c_4$ , так как члены  $c_1^+ c_2^+ c_3^+$  и  $c_1^+ c_2^+ c_3^+ c_4^+$  благодаря закону сохранения энергии не вносят вклада в вероятности процессов в первом борновском приближении; член же  $c_1^+ c_2^+ c_3^+ c_4$  описывает процесс распада одного магнона на три, средняя вероятность которого значительно меньше средней вероятности распада одного магнона на два.

Мы не будем приводить здесь полностью выражений для амплитуд  $\Psi_s(12,3)$  и  $\Psi_s(12,34)$ , так как они имеют громоздкий вид, а укажем только порядок их величин.

Учитывая, что  $u_k \sim v_k \sim 1$ , имеем, согласно (18.1.12),

$$\Psi_s(12,3) = \frac{\mu_0 M_0}{\sqrt{N}} \varphi_r(12,3), \quad (25.1.3)$$

где  $\varphi_r(12,3) \sim 1$ .

Рассеяние магнона магном обусловливается как обменным, так и релятивистским взаимодействием; поэтому

$$\Psi_s(12,34) = \Psi_s^{(e)}(12,34) + \Psi_s^{(r)}(12,34),$$

где  $\Psi_s^{(e)}(12,34)$  и  $\Psi_s^{(r)}(12,34)$  — амплитуды обменного и релятивистского рассеяния:

$$\Psi_s^{(e)}(12,34) = \frac{\theta_c}{N} \varphi_e(12,34), \quad \Psi_s^{(r)}(12,34) = \frac{\mu_0 M_0}{N} \varphi_r(12,34), \quad (25.1.4)$$

где  $\varphi_r(12,34) \approx 1$ . Если  $\left(\frac{\mu_0 M_0}{\theta_c}\right)^{1/2} \ll ak \ll 1$ , то

$$\varphi_e(12,34) = \frac{a^2}{4} (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) \quad (25.1.5)$$

(отметим, что  $\varphi_e$  и  $\varphi_r$  — симметричные функции как по первым, так и по вторым двум аргументам).

Зная величины  $\Psi_s(1, 2, \dots, n)$ , можно определить вероятности соответствующих процессов взаимодействия спиновых волн. В области низких температур,  $T \ll T_c$ , средние вероятности этих процессов уменьшаются с увеличением числа участвующих в них магнонов и наиболее вероятными являются процессы распада магнона на два магнона и обменного рассеяния магнона магномом.

**2. Вероятности распада и слияния магнонов.** Вычислим сначала вероятность слияния двух магнонов. Матричный

элемент этого процесса имеет, очевидно, вид

$$(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 + 1 | \mathcal{H}_s^{(3)} | n_1, n_2, n_3) = \\ = \frac{2\mu_0 M_0}{\sqrt{N}} \varphi_r^*(12,3) \sqrt{n_1 n_2 (n_3 + 1)} \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3),$$

где  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  — числа магнов в начальном состоянии. (Мы не учитываем в этом параграфе процессов переброса, при которых суммарное изменение волнового вектора магнов равно вектору обратной решетки  $\tau$ , умноженному на  $2\pi$ ). Поэтому вероятность (отнесенная к единице времени) слияния двух магнов с волновыми векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  в магнон с волновым вектором  $\mathbf{k}_3$ , равна

$$\omega_{n_1-1, n_2-1, n_3+1}^{n_1, n_2, n_3} = \frac{8\pi}{\hbar} \frac{(\mu_0 M_0)^2}{N} |\varphi_r(12,3)|^2 n_1 n_2 (n_3 + 1) \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad (25.2.1)$$

где  $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_s(\mathbf{k}_i)$ .

Вероятность обратного процесса — распада магнона с волновым вектором  $\mathbf{k}_3$  на два магнона с волновыми векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  равна

$$\omega_{n_1+1, n_2+1, n_3-1}^{n_1, n_2, n_3} = \frac{8\pi}{\hbar} \frac{(\mu_0 M_0)^2}{N} |\varphi_r(12,3)|^2 (n_1 + 1)(n_2 + 1) \times \\ \times n_3 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3). \quad (25.2.2)$$

Мы видим, что в этих процессах выполняются законы сохранения

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \quad (25.2.3)$$

Изменение числа магнов с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$ , в единицу времени в результате процессов слияния и обратных им процессов распада можно представить в виде

$$(\dot{n}_1)_c = L_c \{n\}, \quad (25.2.4)$$

где

$$L_c \{n\} = \frac{8\pi}{\hbar} \frac{(\mu_0 M_0)^2}{N} \sum_{23} |\varphi_r(12,3)|^2 [(n_1 + 1)(n_2 + 1)n_3 - \\ - n_1 n_2 (n_3 + 1)] \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3).$$

Эта величина называется интегралом столкновений, описывающим процессы слияния и распада магнов.

Легко убедиться, что интеграл столкновений обращается в нуль для планковского распределения магнов

$$\bar{n}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\frac{\varepsilon_s(\mathbf{k})}{T} - 1}.$$

Действительно, в силу закона сохранения энергии  $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ,

$$(\bar{n}_1 + 1)(\bar{n}_2 + 1)\bar{n}_3 = \bar{n}_1\bar{n}_2(\bar{n}_3 + 1),$$

и поэтому

$$L_c \{\bar{n}\} = 0.$$

Если числа магнов  $n(\mathbf{k})$  мало отличаются от своих равновесных значений  $\bar{n}(\mathbf{k})$ ,

$$n(\mathbf{k}) = \bar{n}(\mathbf{k}) + \delta n(\mathbf{k}), \quad |\delta \bar{n}(\mathbf{k})| \ll \bar{n}(\mathbf{k}),$$

то интеграл столкновений  $L_c \{n\}$  можно разложить в ряд по степеням  $\delta n(\mathbf{k})$  и сохранить только линейные члены разложения. Коэффициент при  $-\delta n(\mathbf{k})$  в этом разложении представляет собой величину, обратную времени жизни магнона с волновым вектором  $\mathbf{k}$  по отношению к процессам слияния. Мы будем обозначать это время жизни через  $\tau_c(\mathbf{k})$ . Легко видеть, что

$$\frac{1}{\tau_c(\mathbf{k}_1)} = -\frac{\delta L_c \{n\}}{\delta n(\mathbf{k}_1)} = \frac{8\pi(\mu_0 M_0)^2}{N} \sum_{2,3} |\varphi_r(12,3)|^2 (\bar{n}(\mathbf{k}_2) - \bar{n}(\mathbf{k}_3)) \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3). \quad (25.2.5)$$

Предполагая для простоты, что энергия спиновой волны  $\varepsilon_s(\mathbf{k})$  не зависит от направления волнового вектора,  $\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \theta_c(ak)^2$ , и считая  $\varphi_r(12,3) \sim 1$ , получим [2]

$$\frac{1}{\tau_c(\mathbf{k})} \approx \begin{cases} \left(\frac{\mu_0 M_0}{2\pi\theta_c}\right)^2 \frac{T}{\hbar} \frac{\theta_c}{\varepsilon_0} ak, & |\varepsilon_s(\mathbf{k}) - \varepsilon_0| \ll \varepsilon_0 \ll T, \\ \left(\frac{\mu_0 M_0}{2\pi\theta_c}\right)^2 \frac{T}{\hbar} \frac{1}{ak} \ln \frac{\varepsilon_s(\mathbf{k})}{\varepsilon_0}, & \varepsilon_0 \ll |\varepsilon_s(\mathbf{k}) - \varepsilon_0| \ll T, \\ \left(\frac{\mu_0 M_0}{2\pi\theta_c}\right)^2 \frac{T}{\hbar} \frac{1}{ak} \exp\left\{-\frac{\varepsilon_0}{T} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_s(\mathbf{k}) - \varepsilon_0}\right)\right\}, & T \ll \varepsilon_0. \end{cases} \quad (25.2.6)$$

Определим теперь время жизни магнона по отношению к процессам его распада. Матричный элемент этого процесса

имеет вид

$$(n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 + 1 | \mathcal{H}_s^{(3)} | n_1 n_2 n_3) = \\ = \frac{2\mu_0 M_0}{\sqrt{N}} \Phi_r(23, 1) \sqrt{n_1(n_2 + 1)(n_3 + 1)} \Delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1).$$

Поэтому вероятность (отнесенная к единице времени) распада магнона с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  на два магнона с волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$  равна

$$\omega_{n_1-1, n_2+1, n_3+1}^{n_1 n_2 n_3} = \frac{8\pi}{\hbar} \frac{(\mu_0 M_0)^2}{N} |\Phi_r(23, 1)|^2 n_1(n_2 + 1)(n_3 + 1) \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \delta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1). \quad (25.2.7)$$

Вероятность обратного процесса равна

$$\omega_{n_1+1, n_2-1, n_3-1}^{n_1 n_2 n_3} = \frac{8\pi}{\hbar} \frac{(\mu_0 M_0)^2}{N} |\Phi_r(23, 1)|^2 (n_1 + 1) n_2 n_3 \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \delta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1). \quad (25.2.8)$$

Законы сохранения в этих процессах имеют вид

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1, \quad \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1. \quad (25.2.9)$$

Изменение числа магнов с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  в единицу времени в результате процессов распада и обратных им процессов слияния определяется, очевидно, формулой

$$(\dot{n}_1)_d = L_d \{n\},$$

где

$$L_d \{n\} = \frac{8\pi}{\hbar} \frac{(\mu_0 M_0)^2}{N} \sum_{23} |\Phi_r(23, 1)|^2 \times \\ \times [(n_1 + 1) n_2 n_3 - n_1(n_2 + 1)(n_3 + 1)] \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3).$$

Отсюда легко найти время жизни  $\tau_d(\mathbf{k})$  магнона с волновым вектором  $\mathbf{k}$  по отношению к процессам распада

$$\frac{1}{\tau_d(\mathbf{k}_1)} = -\frac{\delta L_d \{n\}}{\delta n(\mathbf{k}_1)} = \frac{8\pi}{\hbar} \frac{(\mu_0 M_0)^2}{N} \sum_{2,3} |\Phi_r(23, 1)|^2 \times \\ \times (\bar{n}_2 + \bar{n}_3 + 1) \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3). \quad (25.2.10)$$

Считая, что  $\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \theta_c(a\mathbf{k})^2$ , получим из законов сохранения энергии и импульса

$$2\theta_c(a\mathbf{k}_2)^2 - 2\theta_c a^2 k_1 k_2 \cos \vartheta + \varepsilon_0 = 0,$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ . Из этого равенства следует, что процесс распада магнона с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$



на два магнона возможен только в том случае, если  $\theta_c (ak_1)^2 > 2\varepsilon_0$ , т. е.  $\varepsilon_s(\mathbf{k}_1) > 3\varepsilon_0$ .

Приведем выражения для  $\frac{1}{\tau_d(\mathbf{k})}$  в некоторых предельных случаях [2]:

$$\frac{1}{\tau_d(\mathbf{k})} = \begin{cases} \frac{T}{6\pi\hbar} \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^2 \left( \frac{\theta_c}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\varepsilon_s(\mathbf{k})}{\varepsilon_0} - 3 \right)^{\frac{1}{2}}, & |\varepsilon_s(\mathbf{k}) - 3\varepsilon_0| \ll \varepsilon_0 \ll T, \\ \frac{T}{4\pi\hbar} \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^2 \left( \frac{\theta_c}{\varepsilon_s(\mathbf{k})} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\varepsilon_s(\mathbf{k})}{\varepsilon_0}, & \varepsilon_0 \ll \varepsilon_s(\mathbf{k}) \ll T, \\ \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^2 \frac{V(\varepsilon_s(\mathbf{k}) - \varepsilon_0)(\varepsilon_s(\mathbf{k}) - 3\varepsilon_0)}{8\pi\hbar ak}, & T \ll \sqrt{(\varepsilon_s(\mathbf{k}) - \varepsilon_0)(\varepsilon_s(\mathbf{k}) - 3\varepsilon_0)}. \end{cases} \quad (25.2.11)$$

Сложив интегралы столкновений  $L_c\{n\}$  и  $L_d\{n\}$ , найдем полное изменение числа магнонов с заданным волновым вектором  $k_1$  (в единицу времени), обусловленное процессами их распада и слияния:

$$(\dot{n}_1)^{(3)} = L_c\{n\} + L_d\{n\} \equiv L_s^{(3)}\{n\}. \quad (25.2.12)$$

Формулы (25.2.6) и (25.2.11) определяют обратные времена жизни спиновых волн с заданным волновым вектором по отношению к процессам слияния и распада. Для оценки роли различных процессов в установлении теплового равновесия в системе магнонов необходимо знать среднюю вероятность процессов слияния и распада магнонов, которую мы будем обозначать через  $w_s^{(3)}$ . Она, очевидно, определяется формулой

$$w_s^{(3)} = \frac{1}{\sum_k \bar{n}(\mathbf{k})} \sum_k \bar{n}(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{\tau_c(\mathbf{k})} + \frac{1}{\tau_d(\mathbf{k})} \right\}.$$

Подставляя сюда выражения (25.2.5), (25.2.10) и выполняя интегрирование по  $k$ , получим [1, 3]

$$w_s^{(3)} \approx \begin{cases} \frac{\mu_0 M_0}{\hbar} \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{1/2} \ln^2 \frac{2\mu_0 H_0^{(i)}}{T}, & \mu_0 H_0^{(i)} \ll T, \\ \frac{\mu_0 M_0}{\hbar} \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{2\mu_0 H_0^{(i)}}{T}\right), & \mu_0 H_0^{(i)} \gg T. \end{cases} \quad (25.2.13)$$

**3. Вероятность рассеяния магновов магнонами.** Вычислим вероятность рассеяния магнона магноном. Матричный элемент этого процесса можно представить, согласно (25.1.1), в виде

$$\begin{aligned} & (n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 + 1 | \mathcal{H}_s^{(4)} | n_1, n_2, n_3, n_4) = \\ & = \Psi_s(12,34) \sqrt{n_1 n_2 (n_3 + 1) (n_4 + 1)} \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4). \end{aligned}$$

Поэтому вероятность рассеяния магнона магноном в единицу времени равна

$$\begin{aligned} \omega_{n_1-1, n_2-1, n_3+1, n_4+1}^{n_1, n_2, n_3, n_4} &= \frac{16\pi}{\hbar} |\Psi_s(12,34)|^2 n_1 n_2 (n_3 + 1) (n_4 + 1) \times \\ & \times \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4); \quad (25.3.1) \end{aligned}$$

следовательно, изменение числа магновов с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  в единицу времени в результате процессов рассеяния определяется формулой

$$(\dot{n}_1)_s = L_s^{(4)}\{n\}, \quad (25.3.2)$$

где

$$\begin{aligned} L_s^{(4)}\{n\} &= \frac{16\pi}{\hbar} \sum_{234} |\Psi_s(12,34)|^2 \{(n_1 + 1)(n_2 + 1)n_3 n_4 - \\ & - n_1 n_2 (n_3 + 1)(n_4 + 1)\} \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \times \\ & \times \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4). \end{aligned}$$

Величина  $L_s^{(4)}\{n\}$ , так же как и величина  $L_s^{(3)}\{n\}$ , носит название интеграла столкновений по отношению к процессам рассеяния магнона магноном.

Легко видеть, что планковское распределение магновов обращает интеграл столкновений  $L_s^{(4)}\{n\}$  в нуль. Действительно, из закона сохранения энергии  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$  следует:

$$(\bar{n}_1 + 1)(\bar{n}_2 + 1)\bar{n}_3\bar{n}_4 = \bar{n}_1\bar{n}_2(\bar{n}_3 + 1)(\bar{n}_4 + 1),$$

и поэтому

$$L_s^{(4)}\{\bar{n}\} = 0.$$

Поступая так же, как и в предыдущем разделе, можно определить время жизни магнона с заданным волновым

вектором по отношению к процессам рассеяния  $\tau_s^{(4)}(\mathbf{k})$ :

$$\frac{1}{\tau_s^{(4)}(\mathbf{k}_1)} = -\frac{\delta I_s^{(4)}\{n\}}{\delta n(\mathbf{k}_1)} = \frac{16\pi}{h} \sum_{234} |\Psi_s(12,34)|^2 \{(\bar{n}_2 + 1) \times \\ \times \bar{n}_3 \bar{n}_4 - \bar{n}_2(\bar{n}_3 + 1)(\bar{n}_4 + 1)\} \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \times \\ \times \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4). \quad (25.3.3)$$

Опуская выкладки, приведем окончательно выражения для

$\frac{1}{\tau_s^{(4)}(\mathbf{k})}$  в некоторых предельных случаях [4,5]:

$$\frac{1}{\tau_s^{(4)}(\mathbf{k})} = \begin{cases} \frac{\theta_c}{h} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{3/2} (ak)^3, & T, \mu_0 M_0 \ll \varepsilon_s(\mathbf{k}), \\ \frac{(\mu_0 M_0)^2}{h\theta_c} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^2, & |\varepsilon_s(\mathbf{k}) - \varepsilon_0| \ll \varepsilon_0 \ll T. \end{cases} \quad (25.3.4)$$

Мы видим, что при  $T \rightarrow 0$  величина  $\tau_s^{(4)}(\mathbf{k})$  стремится к бесконечности. Это обстоятельство соответствует тому, что при  $T=0$  в ферромагнетике отсутствуют «тепловые» спиновые волны. Подчеркнем, что при больших волновых векторах, когда  $\varepsilon_s(\mathbf{k}) \gg \mu_0 M_0$ , рассеяние происходит главным образом благодаря обменно-взаимодействию. Если же  $|\varepsilon_s(\mathbf{k}) - \varepsilon_0| \ll \varepsilon_0$ , то основную роль играет релятивистское взаимодействие.

Формула (25.3.3) определяет время жизни спиновой волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  по отношению к процессам рассеяния. Усреднив величину  $\frac{1}{\tau_s^{(4)}(\mathbf{k})}$  с равновесной функцией распределения  $\bar{n}(\mathbf{k})$ , найдем среднюю вероятность рассеяния спиновых волн:

$$\omega_s^{(4)} = \frac{1}{\sum_{\mathbf{k}} \bar{n}(\mathbf{k})} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\tau_s^{(4)}(\mathbf{k})} \bar{n}(\mathbf{k}).$$

Величина, обратная  $\omega_s^{(4)}$ , представляет собой среднее время жизни  $\tau_s^{(4)}$  магнона по отношению к процессам рассеяния.

В области температур  $\mu_0 M_0 \ll T \ll \theta_c$  основную роль играют процессы обменного рассеяния и [3,5]

$$\omega_s^{(4)} \sim \frac{\theta_c}{h} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^4. \quad (25.3.5)$$

## § 26. Процессы взаимодействия магнов и фононов

1. Гамильтониан взаимодействия магнов с фононами. Перейдем к исследованию взаимодействия между спиновыми волнами и колебаниями решетки. Заметим, что атомы ферромагнетика не являются неподвижными, как мы предполагали при установлении вида гамильтониана ферромагнетика, а совершают малые колебания около положений равновесия— узлов кристаллической решетки. Поэтому в коэффициентах, стоящих перед произведениями операторов рождения и уничтожения магнов в выражении для гамильтониана ферромагнетика и являющихся функциями радиус-векторов его атомов, мы должны, строго говоря, под  $R_{ll'}$  понимать

$$R_{ll'} = R_{ll'}^0 + \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{l'},$$

где  $R_{ll'}^0$  — равновесное значение радиус-вектора, соединяющего  $l$ -й и  $l'$ -й атомы, и  $\mathbf{u}_l$  — смещение  $l$ -го атома из его положения равновесия. Это смещение можно, в свою очередь, разложить на плоские волны:

$$\mathbf{u}_l = \left(\frac{\hbar}{2\rho V}\right)^{1/2} \sum_{fj} \frac{\mathbf{e}_j(\mathbf{f})}{\sqrt{\omega_{pj}(\mathbf{f})}} \left\{ b_j(\mathbf{f}) e^{i\mathbf{f}R_l^{(0)}} + b_j^\dagger(\mathbf{f}) e^{-i\mathbf{f}R_l^{(0)}} \right\}, \quad (26.1.1)$$

где  $\mathbf{f}$  и  $\omega_{pj}(\mathbf{f})$  — волновой вектор и частота колебаний с поляризацией  $j$ ,  $\mathbf{e}_j(\mathbf{f})$  — единичный вектор поляризации,  $b_j^\dagger(\mathbf{f})$ ,  $b_j(\mathbf{f})$  — операторы рождения и уничтожения фонона с волновым вектором  $\mathbf{f}$  и поляризацией  $j$ ,  $\rho$  — плотность вещества.

Таким образом, коэффициенты перед произведениями операторов рождения и уничтожения магнов в гамильтониане ферромагнетика являются функциями операторов рождения и уничтожения фононов. Так как  $|\mathbf{u}_l| \ll a$ , то мы можем разложить эти коэффициенты в ряд по степеням компонент  $\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{l'}$ , в результате чего гамильтониан ферромагнетика примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s = & (\mathcal{H}_s)_0 + \sum_{ll'} (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{l'})_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial R_{ll'}^\alpha} \right)_0 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{ll', mm'} (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{l'})_\alpha (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_{m'})_\beta \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}_s}{\partial R_{ll'}^\alpha \partial R_{mm'}^\beta} \right)_0 + \dots \end{aligned}$$

где индекс нуль означает значение функции при  $R_{ll'} = R_{ll'}^0$  и  $\alpha, \beta$  служат для обозначения индексов координат. Первое слагаемое в этом выражении представляет собой гамильтониан собственно спиновой системы, а остальные слагаемые после подстановки в них выражений (26.1.1) — гамильтониан взаимодействия магнов с фононами. Мы сохраним в этом гамильтониане, который будем обозначать через  $\mathcal{H}_{sl}$ , только линейные по смещениям атомов члены:

$$\mathcal{H}_{sl} = \sum_{ll'} (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{l'})_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{H}_s}{\partial R_{ll'}^\alpha} \right)_0. \quad (26.1.2)$$

Заметим, что в это выражение смещения атомов входят не порознь, а в виде разностей  $\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{l'}$ . Поэтому  $\mathcal{H}_{sl}$  обращается в нуль, если к нулю стремятся волновые векторы фононов.

Мы не будем рассматривать здесь процессы превращения магнона в фонон, которые приводят к существованию связанных магнитоупругих волн и оказывают лишь малое влияние на спектры магнов и фононов (феноменологическая теория связанных магнитоупругих волн дана в главе IV), а ограничимся только рассмотрением процессов с участием двух магнов и одного фонона (процессы с участием большего числа частиц при низких температурах менее вероятны). Гамильтониан, описывающий процессы с участием двух магнов и одного фонона, имеет вид

$$\mathcal{H}_{sl} = \sum_{123} \{ \Psi_{sl}(1,2,3) c_1^+ c_2 b_3 \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \\ + \Psi'_{sl}(12,3) c_1^+ c_2^+ b_3 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \text{э. с.} \} \quad (26.1.3)$$

(здесь, как и ранее, используются обозначения  $c_i \equiv c(\mathbf{k}_i)$ ,  $b_i \equiv b_j(\mathbf{f}_i)$ ; в гамильтониане не выписаны слагаемые  $c^+ c^+ b^+$  и  $c b$ , так как в первом борновском приближении они не вносят вклада в вероятности переходов).

Входящие в  $\mathcal{H}_{sl}$  величины  $\Psi_{sl}(1,2,3)$  и  $\Psi'_{sl}(12,3)$  представляет собой амплитуды процессов испускания (поглощения) фонона магном и распада фонона на два магнона. Эти амплитуды можно, согласно (26.1.2), (26.1.1), представить в виде

$$\Psi_{sl}(1,2,3) = \frac{\theta_c}{\sqrt{N}} \left( \frac{\hbar}{m_F \omega_3} \right)^{1/2} a^2 k_1 k_2 f_3 \varphi_{sl}(1,2,3), \\ \Psi'_{sl}(12,3) = \frac{\mu_0 M_0}{\sqrt{N}} \left( \frac{\hbar}{m_F \omega_3} \right)^{1/2} f_3 \varphi'_{sl}(12,3), \quad (26.1.4)$$

где  $m_F \equiv \rho a^3$ ,  $\varphi_{sl}(1,2,3)$  и  $\varphi'_{sl}(12,3)$  — некоторые функции от волновых векторов магнона и фонона, равные по порядку величины единице, если  $ka \ll 1$  и  $fa \ll 1$ .

Отметим, что процессы испускания и поглощения фонона магномом обусловлены в основном обменным взаимодействием, а процессы слияния двух магнонов в фонон и распада фонона на два магнона — релятивистским взаимодействием.

Прибавив к сумме  $(\mathcal{H}_s)_0$  и  $\mathcal{H}_{sl}$  гамильтониан  $\mathcal{H}_l$ , описывающий колебания решетки, мы получим полный гамильтониан ферромагнетика  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{ss} + \mathcal{H}_l + \mathcal{H}_{sl}. \quad (26.1.5)$$

Здесь  $\mathcal{H}_0$  по-прежнему обозначает гамильтониан газа свободных магнонов, а  $\mathcal{H}_{ss}$  — гамильтониан взаимодействия между магнонами (этот гамильтониан определяется формулами (25.1.1), (25.1.2)).

**2. Вероятности испускания магномом фонона и превращения двух магнонов в фонон.** Рассмотрим прежде всего процессы испускания и поглощения фонона магномом. Эти процессы можно трактовать как черенковское излучение (поглощение) звуковых волн. Излучающей частицей при этом является магнон. Так как закон дисперсии спиновых волн совпадает (в пренебрежении релятивистскими эффектами) с законом дисперсии обычных нерелятивистских свободных частиц, то условие излучения фонона заключается в том, что скорость магнона  $v$  должна превосходить скорость звука  $s$ .

Замечая, что «масса» магнона равна  $m_m = \frac{\hbar^2}{2a^2\theta_c}$  и, следовательно,  $v = \frac{\hbar k}{m_m} = \frac{2a}{\hbar} \sqrt{\theta_c \varepsilon_s(\mathbf{k})}$ , можно представить условие излучения в виде

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) \geq \frac{\theta_D^2}{4\theta_c}, \quad (26.2.1)$$

где  $\theta_D = \frac{\hbar s}{a}$  — температура Дебая.

Запишем теперь матричный элемент, соответствующий процессу испускания фонона магномом:

$$\begin{aligned} & (n_1 + 1, n_2 - 1, N_3 + 1 | \mathcal{H}_{sl} | n_1, n_2, N_3) = \\ & = \Psi_{sl}(13,2) \sqrt{(n_1 + 1)n_2(N_3 + 1)} \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{f}_3 - \mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (26.2.2)$$

Отсюда следует, что вероятность черенковского излучения фонона равна

$$\omega_{n_1+1, n_2, N_3, n_2-1, N_3+1}^{n_1, n_2, N_3} = \frac{2\pi}{\hbar} |\Psi_{sl}(13,2)|^2 (n_1+1) n_2 (N_3+1) \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{f}_3 - \mathbf{k}_2) \delta(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2). \quad (26.2.3)$$

Изменение числа магнонов, обусловленное процессами испускания и поглощения магноном фонона, можно представить в виде

$$(\dot{n}_1)_l = L_{sl} \{n, N\}, \quad (26.2.4)$$

где

$$L_{sl} \{n, N\} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{23} \{ |\Psi_{sl}(23,1)|^2 \times \\ \times [(n_1+1) n_2 N_3 - n_1 (n_2+1) (N_3+1)] \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{f}_3) \times \\ \times \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega_3) + |\Psi_{sl}(13,2)|^2 [(n_1+1) (N_3+1) n_2 - \\ - n_1 N_3 (n_2+1)] \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{f}_3 - \mathbf{k}_2) \delta(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2) \}.$$

Легко видеть, что интеграл столкновений  $L_{sl}$  обращается в нуль для равновесных распределений магнонов и фононов

$$\bar{n}(\mathbf{k}) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_s(\mathbf{k})}{T}} - 1}, \quad \bar{N}_j(\mathbf{f}) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{pj}(\mathbf{f})}{T}} - 1}.$$

Действительно, в силу закона сохранения энергии

$$(\bar{n}_1+1) \bar{n}_2 \bar{N}_3 = \bar{n}_1 (\bar{n}_2+1) (\bar{N}_3+1),$$

$$(\bar{n}_1+1) (\bar{N}_3+1) \bar{n}_2 = \bar{n}_1 \bar{N}_3 (\bar{n}_2+1),$$

и поэтому

$$L_{sl} \{ \bar{n}, \bar{N} \} = 0.$$

Поступая так же, как в предыдущем параграфе, можно определить время жизни магнона с данным волновым вектором по отношению к процессам испускания и поглощения фонона, которое мы будем обозначать через  $\tau_{sl}(\mathbf{k})$ . Обратная величина этого времени жизни определяется формулой

$$\frac{1}{\tau_{sl}(\mathbf{k}_1)} = - \frac{\delta L_{sl}}{\delta n(\mathbf{k}_1)} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{23} \{ |\Psi_{sl}(23;1)|^2 (1 + \bar{n}_2 + \bar{N}_3) \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{f}_3) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega_3) + \\ + |\Psi_{sl}(13;2)|^2 (\bar{N}_3 - \bar{n}_2) \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{f}_3 - \mathbf{k}_2) \delta(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2) \}. \quad (26.2.5)$$

Усреднив  $\frac{1}{\tau_{sl}(\mathbf{k}_1)}$  по равновесному распределению магнов, найдем среднюю вероятность испускания и поглощения фонона магномом

$$w_{sl} = \frac{1}{\sum_{\mathbf{k}} \bar{n}(\mathbf{k})} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\tau_{sl}(\mathbf{k})} \bar{n}(\mathbf{k}).$$

В предельных случаях, когда  $T \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$  и  $T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$ , эта величина имеет вид [1]

$$w_{sl} \approx \begin{cases} \frac{\theta_c}{\hbar} \frac{T}{m_F \bar{s}^2} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\theta_D^2}{4\theta_c T}\right), & T \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_c}, \\ \frac{\theta_c}{\hbar} \frac{T}{m_F \bar{s}^2} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{5/2}, & T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_c}, \end{cases} \quad (26.2.6)$$

где  $\bar{s}$  — некоторая средняя скорость звука. Заметим, что экспоненциальная зависимость средней вероятности испускания фонона при  $T \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$  от температуры связана с тем, что в процессах излучения могут принимать участие только те магны, энергия которых больше  $\frac{\theta_D^2}{4\theta_c}$ .

Поступая аналогичным образом, можно определить среднюю вероятность превращения двух магнов в один фотон (и обратного процесса превращения фотона в два магна). Эта вероятность, которую мы будем обозначать через  $w'_{sl}$ , определяется формулами

$$w'_{sl} \approx \begin{cases} \frac{\mu_0 M_0}{\hbar} \frac{\mu_0 M_0}{m_F \bar{s}^2} \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^2, & T \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_c}, \\ \frac{\hbar}{m_F a^2} \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^2 \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{1/2}, & T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_c}. \end{cases} \quad (26.2.7)$$

Сравнение этих формул с формулами (26.2.6) показывает, что  $w_{sl} \gg w'_{sl}$  вплоть до температур порядка одного градуса.

**3. Вероятности процессов взаимодействия фононов с магнами.** Используя выражение (26.1.3) для гамильтониана взаимодействия магнов с фотонами, можно определить изменение числа фотонных с заданным волновым вектором



в единицу времени, вызываемое поглощением и испусканием фонона магноном:

$$(\dot{N}_1)_s = L_{1s} \{N, n\}, \quad (26.3.1)$$

где

$$L_{1s} \{N, n\} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{23} |\Psi_{s1}(21,3)|^2 \times \\ \times [(N_1 + 1)(n_2 + 1)n_3 - N_1 n_2 (n_3 + 1)] \delta(\hbar\omega_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \times \\ \times \Delta(\mathbf{f}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3).$$

Легко видеть, что

$$L_{1s} \{\bar{N}, \bar{n}\} = 0.$$

Поступая так же, как и в предыдущем разделе, можно определить время жизни фонона с заданным волновым вектором и поляризацией  $\tau_{1s}(f, j)$  по отношению к процессам поглощения и испускания фонона магноном:

$$\frac{1}{\tau_{1s}(f_1, j_1)} = - \frac{\delta L_{1s}}{\delta N_{j_1}(f_1)}.$$

Мы приведем здесь окончательное выражение только для средней вероятности процессов поглощения и испускания фонона магноном:

$$\omega_{1s} \equiv \frac{1}{\tau_{1s}} = \frac{\theta_D^2}{\hbar\theta_c} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^2, \quad T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_c}. \quad (26.3.2)$$

Фононы взаимодействуют не только с магнонами, но и между собой. Простейшими процессами взаимодействия фононов друг с другом являются распад фонона на два фонона и слияние двух фононов. Мы ограничимся здесь рассмотрением только этих процессов и не будем рассматривать случаев, когда трехфононные процессы невозможны [13].

Гамильтониан, описывающий трехфононные процессы, имеет вид

$$\mathcal{H}_{II} = \sum_{123} \Psi_l(12,3) b_1^+ b_2^+ b_3 \Delta(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) + \text{э. с.}, \quad (26.3.3)$$

где

$$\Psi_l(12,3) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_1 \hbar\omega_2 \hbar\omega_3}{m_F s^2 N}} \Phi_l(12,3)$$

и  $\Phi_l(12,3)$  — некоторая функция от направлений волновых векторов и поляризаций фононов, по порядку величины равная единице. Отсюда легко получить выражения для вероят-

ностей процессов распада фонона на два фонона и слияния двух фононов

$$\begin{aligned} \omega_{N_1+1, N_2+1, N_3-1}^{N_1, N_2, N_3} &= \frac{2\pi}{\hbar} |\Psi_I(12,3)|^2 (N_1+1) \times \\ &\times (N_2+1) N_3 \Delta(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) \delta(\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3), \\ \omega_{N_1+1, N_2-1, N_3-1}^{N_1, N_2, N_3} &= \frac{2\pi}{\hbar} |\Psi_I(32,1)|^2 (N_1+1) \times \\ &\times N_2 N_3 \Delta(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) \delta(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3) \end{aligned} \quad (26.3.4)$$

и найти изменение числа фононов с заданным волновым вектором и поляризацией (в единицу времени), обусловленное процессами распада и слияния фононов:

$$\begin{aligned} (\dot{N}_1)_l &= L_l^{(3)} \{N\} = \frac{4\pi}{\hbar} \sum_{23} \{2|\Psi_I(12,3)|^2 [(N_1+1)(N_2+1)N_3 - \\ &- N_1N_2(N_3+1)] \Delta(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) \delta(\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3) + \\ &+ |\Psi_I(23,1)|^2 [(N_1+1)N_2N_3 - N_1(N_2+1)(N_3+1)] \times \\ &\times \Delta(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) \delta(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3)\}. \end{aligned} \quad (26.3.5)$$

Легко видеть, что интеграл столкновений фононов друг с другом  $L_l^{(3)} \{\bar{N}\}$  обращается в нуль для планковского распределения фононов:

$$L_l^{(3)} \{\bar{N}\} = 0.$$

Поступая так же, как и в предыдущем разделе, можно определить времена жизни фонона с заданным волновым вектором и поляризацией по отношению к процессам распада и слияния фононов. Мы приведем здесь окончательное выражение только для средней вероятности этих процессов:

$$\omega_l^{(3)} \simeq \frac{\theta_D}{\hbar} \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^5, \quad T \ll \theta_D. \quad (26.3.6)$$

Сравнение этой формулы с формулой для  $\omega_{ls}$  показывает, что если  $\theta_D \gg T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$ , то

$$\omega_l^{(3)} \gg \omega_{ls},$$

т. е. изменение функции распределения фононов происходит главным образом благодаря столкновениям фононов друг с другом.

Сравним в заключение этого раздела вероятности  $\omega_s^{(3)}$  и  $\omega_s^{(4)}$ , характеризующие интенсивность взаимодействия магнонов друг с другом, с вероятностями  $\omega_{sl}$  и  $\omega'_{sl}$ , характеризующими интенсивность взаимодействия магнонов с фононами. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \omega_s^{(4)} &\gg \omega_s^{(3)}, \omega_{sl}, & \text{если } T &\gg \theta_c \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{1/7}, \\ \omega_s^{(3)} &\gg \omega_{sl}, \omega'_{sl}, & \text{если } \mu_0 M_0 &\ll T \ll \theta_c \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{1/7}. \end{aligned} \quad (26.3.7)$$

Таким образом, взаимодействие магнонов друг с другом, вплоть до температур порядка  $\mu_0 M_0$ , сильнее взаимодействия магнонов с фононами. Отсюда можно заключить, что равновесие в системе магнонов должно наступить быстрее, чем равновесие между магнонами и фононами [1]. Поэтому температуры спиновой системы и решетки могут, вообще говоря, отличаться друг от друга.

## § 27. Релаксация магнитного момента в ферромагнетиках

**1. Квазиравновесные бозевские распределения магнонов и фононов.** Изучая термодинамические свойства ферромагнетиков, мы определили равновесное значение магнитного момента ферромагнетика, но не выяснили, как происходит процесс релаксации его магнитного момента. Теперь мы перейдем к изучению этого процесса, тесно связанного с процессом установления термодинамического равновесия в ферромагнетиках. Этот процесс, как и все кинетические явления, протекающие в ферромагнетиках, существенно определяется различными процессами взаимодействия магнонов, фононов и электронов проводимости. Мы будем здесь рассматривать только ферродиелектрики и не будем поэтому учитывать процессов взаимодействия с участием электронов проводимости. Кроме того, мы будем считать кристалл достаточно чистым и лишенным дефектов, так что можно не учитывать процессов рассеяния магнонов и фононов примесными атомами и дефектами решетки\*).

---

\*) Учету влияния примесей на различные кинетические процессы в ферромагнетиках посвящены работы [6, 7]; роль электронов проводимости в кинетических процессах рассмотрена в работах [8].

В предыдущей главе мы оценили среднюю вероятность обменного рассеяния магнона магномом:

$$\omega_s^{(4)} \approx \frac{\theta_c}{\hbar} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^4$$

и среднюю вероятность распада магнона:

$$\omega_s^{(3)} \approx \frac{(\mu_0 M_0)^2}{\hbar \theta_c} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{1/2} \ln^2 \frac{T}{\mu_0 M_0}.$$

Вероятности остальных процессов в системе магнонов значительно меньше  $\omega_s^{(4)}$  и  $\omega_s^{(3)}$ .

Если  $\theta_c \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{1/2} \ll T \ll \theta_c$ , то  $\omega_s^{(4)} \gg \omega_s^{(3)}$ . Поэтому в этом интервале температур наиболее сильным является обменное рассеяние магнонов. Это рассеяние приводит, как будет показано далее, к установлению бозевского распределения магнонов, которое является, однако, не равновесным, а квазиравновесным, так как его температура, т. е. температура спинов, может отличаться от температуры фононов, т. е. температуры кристаллической решетки, и соответствующий этому распределению магнитный момент может отличаться от равновесного значения магнитного момента ферромагнетика. Так как гамильтониан обменного взаимодействия коммутирует с полным магнитным моментом тела  $\mathfrak{M}$  и его проекцией на ось легкого намагничивания  $\mathfrak{M}_z$ , то последние величины могут иметь произвольные значения.

Переход к равновесным значениям этих величин, а также выравнивание температур спинов и решетки, обусловливается взаимодействиями, могущими изменять магнитный момент системы, т. е. магнитным дипольным взаимодействием и спин-орбитальным взаимодействием. Эти взаимодействия в области температур  $T \gg \theta_c \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{1/2}$  являются слабыми по сравнению с обменным взаимодействием. Поэтому релаксация магнитного момента и выравнивание температур спинов и решетки происходят медленно по сравнению с процессом установления квазиравновесного бозевского распределения для магнонов с заданным значением магнитного момента.

Чтобы исследовать процесс релаксации магнитного момента в ферродиэлектриках и выравнивание температур спинов и решетки, будем исходить из кинетических уравнений для функций распределения магнонов и фононов:

$$\frac{\partial n(\mathbf{k})}{\partial t} = L_s \{n, N\}, \quad \frac{\partial N_j(f)}{\partial t} = L_l \{N, n\}, \quad (27.1.1)$$

где  $n(\mathbf{k})$  и  $N_j(\mathbf{f})$  — числа магнонов и фононов (сорта  $j$ ) с волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{f}$  и  $L_s\{n, N\}$  и  $L_l\{N, n\}$  — интегралы столкновений магнонов и фононов.

Интеграл столкновений магнонов  $L_s\{n, N\}$  представляет собой сумму интегралов столкновений магнонов друг с другом ( $L_s^{(4)}\{n\}$  и  $L_s^{(3)}\{n\}$ ) и интеграла столкновений магнонов с фононами ( $L_{sl}\{n, N\}$ ):

$$L_s\{n, N\} = L_s^{(4)}\{n\} + L_s^{(3)}\{n\} + L_{sl}\{n, N\} \quad (27.1.2)$$

(интегралы столкновений  $L_s^{(4)}$ ,  $L_s^{(3)}$ ,  $L_{sl}$  определяются формулами (25.3.2), (25.2.12), (26.2.4)).

Интеграл столкновений фононов  $L_l\{N, n\}$  представляет собой сумму интеграла столкновений фононов друг с другом ( $L_l^{(3)}\{N\}$ ) и интеграла столкновений фононов с магнонами ( $L_{ls}\{N, n\}$ ):

$$L_l\{N, n\} = L_l^{(3)}\{N\} + L_{ls}\{N, n\} \quad (27.1.3)$$

(интегралы столкновений  $L_l^{(3)}\{N\}$  и  $L_{ls}\{N, n\}$  определяются формулами (26.3.5), (26.3.1)).

Мы рассмотрим сначала температуры, удовлетворяющие условиям

$$\theta_c \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{1/2} \ll T \ll \theta_c, \quad \frac{\theta_D^2}{\theta_c} \ll T \ll \theta_D.$$

При этом наиболее вероятными будут следующие процессы: для магнонов — обменное рассеяние и для фононов — распад и слияние фононов. Соответственно этому мы выделим из интеграла столкновений магнонов слагаемое  $L_s^{(4e)}\{n\} \equiv \xi_s \bar{L}_s^{(e)}\{n\}$ , определяющее изменение функции распределения магнонов, обусловленное их обменным рассеянием, и запишем кинетическое уравнение для магнонов в виде

$$\frac{\partial n(\mathbf{k})}{\partial t} = \xi_s \bar{L}_s^{(e)}\{n\} + L'_s\{n, N\}, \quad (27.1.4)$$

где  $L'_s\{n, N\}$  включает в себя все остальные слагаемые в интеграле столкновений магнонов:

$$L'_s\{n, N\} = L_s^{(3)}\{n\} + L_s^{(4r)}\{n\} + L_{sl}\{n, N\} \quad (27.1.5)$$

$L_s^{(4r)}\{n\}$  описывает релятивистское рассеяние магнонов) и  $\xi_s$  — формально вводимый большой параметр, характеризующий интенсивность обменного рассеяния. В рассматриваемой

области температур интеграл столкновений  $L'_s \{n, N\}$  можно рассматривать как малое возмущение.

Аналогичным образом кинетическое уравнение для фоонов в рассматриваемой области температур мы запишем в виде

$$\frac{\partial N_j(f)}{\partial t} = \xi_l \bar{L}_l^{(p)} \{N\} + L'_l \{N, n\}, \quad (27.1.6)$$

где  $\xi_l \bar{L}_l^{(p)} \{N\} \equiv L_l^{(3)} \{N\}$ ,  $L'_l \{N, n\} = L_{ls} \{N, n\}$  и  $\xi_l$  — формально вводимый большой параметр, характеризующий интенсивность процессов взаимодействия фоонов друг с другом. В рассматриваемой области температур интеграл столкновений  $L'_l \{N, n\}$  можно рассматривать как малое возмущение.

Так как кинетические уравнения для функций распределения магнов и фоонов содержат большие параметры  $\xi_s$  и  $\xi_l$ , то мы будем искать решения этих уравнений в виде разложений по обратным степеням параметров  $\xi_s$  и  $\xi_l$ :

$$n(\mathbf{k}) = n^{(0)}(\mathbf{k}) + n^{(1)}(\mathbf{k}) + \dots$$

$$N_j(f) = N_j^{(0)}(f) + N_j^{(1)}(f) + \dots$$

Подставляя эти разложения в (27.1.4), (27.1.6), получим следующие уравнения для определения  $n^{(0)}$ ,  $N^{(0)}$ ,  $n^{(1)}$ ,  $N^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \bar{L}_s^{(e)} \{n^{(0)}\} &= 0, \quad L_l^{(p)} \{N^{(0)}\} = 0, \\ \xi_s \bar{L}_s^{(e)} \{n^{(1)}\} &= \frac{\partial n^{(0)}}{\partial t} - L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\}, \\ \xi_l \bar{L}_l^{(p)} \{N^{(1)}\} &= \frac{\partial N^{(0)}}{\partial t} - L'_l \{N^{(0)}, n^{(0)}\}. \end{aligned} \quad (27.1.7)$$

Рассмотрим сначала первые два уравнения для определения функций  $n^{(0)}$ ,  $N^{(0)}$ . Мы будем предполагать, что стороннее магнитное поле (или константа анизотропии) достаточно велико, так что энергию магнона можно считать равной

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \theta_c (ak)^2 + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = 2\mu_0 M_0 \left( \beta + \frac{H_0^{(l)}}{M_0} \right).$$

Легко показать, что при этом общее решение уравнения  $\bar{L}_s^{(e)} \{n^{(0)}\} = 0$  имеет вид [5]

$$n^{(0)}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_s(\mathbf{k}) - \xi}{T_s}} - 1}, & \mathbf{k} \neq 0, \\ n_0, & \mathbf{k} = 0, \end{cases} \quad (27.1.8)$$

где  $\xi$ ,  $T_s$ ,  $n_0$  — некоторые пока произвольные функции времени.

Обратим внимание на то, что  $n^{(0)}(0)$  является произвольной величиной. Это связано со структурой интеграла столкновений  $\bar{L}_s^{(e)}\{n\}$ , содержащего (под знаком интеграла), согласно (25.1.5), выражение  $(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_4)\Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \times \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$ , которое обращается в нуль, если один из импульсов магнонов равен нулю. Заметим, что отсюда вытекает также соотношение

$$\bar{L}_s^{(e)}\{n\} \Big|_{\mathbf{k}_i=0} = 0, \quad (27.1.9)$$

справедливое при произвольной функции распределения магнонов  $n(\mathbf{k})$ .

Общее решение уравнения  $\bar{L}_l^{(p)}\{N^{(0)}\} = 0$  имеет вид

$$N_j^{(0)}(\mathbf{f}) = \frac{1}{\frac{\hbar\omega_{pj}(\mathbf{f})}{T_l} - 1}, \quad (27.1.10)$$

где  $T_l$  — некоторая, пока произвольная функция времени.

Величины  $T_s$ ,  $\xi$  и  $T_l$  имеют простой физический смысл:  $T_s$  и  $T_l$  представляют собой температуры системы магнонов и системы фононов, а  $\xi$  — химический потенциал системы магнонов.

Мы видим, что если учитывать только наиболее сильные взаимодействия в системе магнонов и системе фононов, т. е. обменное рассеяние магнонов и распад и слияние фононов, то температуры магнонов и фононов могут различаться и химический потенциал магнонов может быть отличен от нуля. Мы будем поэтому называть распределения  $n^{(0)}(\mathbf{k})$ ,  $N_j^{(0)}(\mathbf{f})$  квазиравновесными.

Для того чтобы распределения магнонов и фононов стали равновесными (т. е. чтобы температуры  $T_s$  и  $T_l$  выравнялись, а химический потенциал  $\xi$  обратился в нуль), необходимо наряду с рассмотренными сильными взаимодействиями магнонов и фононов учитывать также их слабые взаимодействия, т. е. релятивистское рассеяние магнонов и процессы испускания и поглощения магноном фонона.

Таким образом, мы приходим к картине двухступенчатой релаксации в ферромагнетиках, первая ступень которой обусловлена сильными, а вторая — слабыми взаимодействиями в системе магнонов и фононов, причем первая ступень завер-

шается установлением квазиравновесных, а вторая — полностью равновесных распределений.

Ясно, что время установления квазиравновесного бозевского распределения магнонов определяется вероятностью обменного рассеяния магнонов и по порядку величины равно

$$\tau_s^{(4)} = \frac{1}{\omega_s^{(4)}} \approx \frac{\hbar}{\theta_c} \left( \frac{\theta_c}{T} \right)^4.$$

Время же установления квазиравновесной функции распределения фононов определяется вероятностью процессов слияния (распада) фононов и по порядку величины равно

$$\tau_l = \frac{1}{\omega_l^{(3)}} \approx \frac{\hbar}{\theta_D} \left( \frac{\theta_D}{T} \right)^5.$$

**2. Уравнения для определения параметров квазиравновесных распределений.** Установим теперь уравнения для определения параметров квазиравновесных распределений [5]. Заметим с этой целью, что интегралы столкновений  $\bar{L}_s^{(e)} \{n\}$ ,  $\bar{L}_l^{(p)} \{N\}$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{L}_s^{(e)} \{n\} \Big|_{k_1=0} &= 0, \quad \sum_{k_1} \bar{L}_s^{(e)} \{n\} = 0, \\ \sum_k \varepsilon_s(k) \bar{L}_s^{(e)} \{n\} &= 0, \quad \sum_{ff} \hbar \omega_{ff}(f) \bar{L}_l^{(p)} \{N\} = 0 \end{aligned} \quad (27.2.1)$$

при произвольных функциях распределения для фононов и магнонов. Первое из этих соотношений было доказано выше, второе является следствием сохранения числа магнонов при обменном рассеянии, а третье и четвертое — следствием закона сохранения энергии.

Из этих соотношений и уравнений (27.1.7) для функций  $n^{(1)}$  и  $N^{(1)}$  следует, что должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_0}{\partial t} &= L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\} \Big|_{k_1=0}, \\ \sum_{k_1} \frac{\partial n_1^{(0)}}{\partial t} &= \sum_{k_1} L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\}, \\ \sum_{k_1} \frac{\partial n_1^{(0)}}{\partial t} \varepsilon_1 &= \sum_{k_1} \varepsilon_1 L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\}, \\ \sum_{f_1 j_1} \frac{\partial N_1^{(0)}}{\partial t} \hbar \omega_1 &= \sum_{f_1 j_1} \hbar \omega_1 L_{ls} \{N^{(0)}, n^{(0)}\}. \end{aligned} \quad (27.2.2)$$



Эти условия, являющиеся условиями разрешимости уравнений (27.1.7) для функций  $n^{(1)}$ ,  $N^{(1)}$ , представляют собой одновременно уравнения для определения параметров квазиравновесного распределения.

Заметим, что вместо последнего уравнения можно пользоваться уравнением

$$\sum_{k_1} \varepsilon_1 \frac{\partial n_1^{(0)}}{\partial t} + \sum_{f, j_1} \hbar \omega_1 \frac{\partial N_1^{(0)}}{\partial t} = 0, \quad (27.2.3)$$

которое вытекает из того, что

$$\sum_{k_1} \varepsilon_1 L'_s \{n, N\} + \sum_{f, j_1} \hbar \omega_1 L_{ls} \{N, n\} = 0.$$

Мы будем считать величины  $\zeta$ ,  $\delta T = T_s - T_l$  и  $v = \varepsilon_0 \frac{n_0}{N}$ , где  $N$  — полное число атомов в теле, малыми (величина  $n_0/N$  считается малой, но конечной при  $N \rightarrow \infty$ ) и разложим поэтому величины, входящие в уравнения (27.2.2), по степеням  $\zeta$ ,  $\delta T$  и  $v$ . Сохраняя в разложении только линейные члены, получим

$$\begin{aligned} \delta \dot{T} + G_1 \dot{\zeta} - \frac{1}{c_l} \dot{v} &= B_{\zeta \zeta} \zeta + B_{\zeta v} v + B_{\zeta T} \delta T, \\ \delta \dot{T} + G_2 \dot{\zeta} + \frac{1}{c_s} \dot{v} &= B_{T \zeta} \zeta + B_{T v} v + B_{T T} \delta T, \\ \dot{v} &= B_{vv} v, \\ \frac{c_s}{c_l} \dot{T}_s + \dot{T}_l + \frac{1}{c_l} \dot{v} + G_2 \dot{\zeta} &= 0, \end{aligned} \quad (27.2.4)$$

где  $c_s$  и  $c_l$  — спиновая и фононная теплоемкости, отнесенные к одному атому, и

$$G_1 = -\frac{1}{c_l} \left\{ \frac{T}{N} \sum_k \frac{\partial \bar{n}}{\partial T} + (c_s + c_l) \frac{\sum_k \frac{\partial \bar{n}}{\partial \varepsilon}}{\sum_k \frac{\partial \bar{n}}{\partial T}} \right\},$$

$$G_2 = \frac{T}{N c_l} \sum_k \frac{\partial \bar{n}}{\partial T},$$

$$\begin{aligned}
B_{\zeta\zeta} &= \frac{c_s + c_l}{c_s c_l G_2} T \sum_{k_1} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\} \right)_0, \\
B_{T\zeta} &= \frac{c_l + c_s}{c_l c_s} \sum_{k_1} \varepsilon_1 \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\} \right)_0, \\
B_{\zeta\nu} &= \frac{c_s + c_l}{c_s c_l G_2} T \sum_{k_1} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\} \right)_0, \\
B_{T\nu} &= \frac{c_l + c_s}{c_l c_s} \sum_{k_1} \varepsilon_1 \left( \frac{\partial}{\partial \nu} L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\} \right)_0, \\
B_{\zeta T} &= \frac{c_s + c_l}{c_s c_l G_2} T \sum_{k_1} \left( \frac{\partial}{\partial \delta T} L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\} \right)_0, \\
B_{TT} &= \frac{c_l + c_s}{c_l c_s} \sum_{k_1} \varepsilon_1 \left( \frac{\partial}{\partial \delta T} L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\} \right)_0, \\
B_{\nu\nu} &= \frac{\varepsilon_0}{N} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} L'_s \{n^{(0)}, N^{(0)}\} \Big|_{k_1=0} \right)_0
\end{aligned} \tag{27.2.5}$$

(индекс 0 означает, что значения производных от интегралов столкновений берутся при  $\zeta = \nu = \delta T = 0$ ).

Обратим внимание на то, что

$$B_{\zeta T} = B_{T\zeta}.$$

Это соотношение выражает принцип симметрии кинетических коэффициентов Онзагера.

Первые три уравнения (27.2.4) определяют, очевидно, величины  $\delta T$ ,  $\zeta$ ,  $\nu$ , а четвертое — величины  $T_s$  и  $T_l$ .

Предполагая, что величины  $\delta T$ ,  $\zeta$ ,  $\nu$  изменяются по закону  $e^{-\lambda t}$ , мы получим три возможных значения  $\lambda$ . Одно из них равно

$$\begin{aligned}
\lambda_3 = -B_{\nu\nu} &= \frac{16\pi}{h} \left( e^{\frac{\varepsilon_0}{T}} - 1 \right) \sum_{12} |\Psi_r(0, 1+2; 1, 2)|^2 \times \\
&\times \bar{n}_1 \bar{n}_2 (1 + \bar{n}_{1+2}) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{1+2} - \varepsilon_0), \tag{27.2.6}
\end{aligned}$$

а два других  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются корнями квадратного уравнения

$$\begin{aligned}
\lambda^2 (G_2 - G_1) + \lambda (G_2 B_{\nu T} + B_{T\zeta} - G_1 B_{TT} - B_{\zeta\zeta}) + \\
+ B_{\nu T} B_{T\zeta} - B_{\zeta\zeta} B_{TT} = 0. \tag{27.2.7}
\end{aligned}$$

В области температур  $\theta_c \gg T \gg \theta_c \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{1/2}$  выражения для  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  сильно упрощаются:

$$\lambda_1 \approx \frac{\mu_0 M_0}{\hbar} \frac{\mu_0 M_0}{V \varepsilon_0 \theta_c} \frac{T}{\theta_c}, \quad \lambda_2 \approx \frac{\hbar}{m_F a^2} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{3/2},$$

$$\lambda_3 \approx \frac{\mu_0 M_0}{\hbar} \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^2. \quad (27.2.8)$$

**3. Релаксация магнитного момента и выравнивание температур спинов и решетки.** Покажем, что  $\zeta$  и  $\nu$  определяют величину магнитного момента ферромагнетика  $\mathfrak{M}$  и проекцию полного магнитного момента  $\mathfrak{M}$  на плоскость, перпендикулярную оси анизотропии  $\mathfrak{M}_\perp$ :

$$\mathfrak{M}^2 = \left( \int M dr \right)^2, \quad \mathfrak{M}_\perp^2 = \mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 = \left( \int M_x dr \right)^2 + \left( \int M_y dr \right)^2.$$

Действительно, используя формулы (18.3.6), имеем

$$\mathfrak{M}^2 = (M_0 V)^2 - 4\mu_0 V \sum_{k \neq 0} n(k),$$

$$\mathfrak{M}_\perp^2 = 4\mu_0 M_0 V n(0), \quad M_0 = \frac{2\mu_0 s}{v_0}. \quad (27.3.1)$$

Подставляя вместо  $n(k)$  выражение (27.1.8), получим в линейном по  $\zeta$  и  $\delta T$  приближении

$$M = \bar{M}(T) + \delta T_s \frac{\partial}{\partial T} \bar{M}(T) + 2\mu_0 \zeta \frac{1}{V} \sum_k \frac{\partial \bar{n}}{\partial \varepsilon}, \quad (27.3.2)$$

$$M_\perp^2 = \frac{2}{s} M_0^2 \frac{\nu}{\varepsilon_0},$$

где  $M = \frac{\mathfrak{M}}{V}$ ,  $M_\perp = \frac{\mathfrak{M}_\perp}{V}$ ,  $\bar{M} \equiv \bar{M}(T)$  — равновесное значение плотности магнитного момента при температуре  $T$ , которая установится в теле при полном равновесии и  $\delta T_s = T_s - T$ .

Мы видим, что проекция полного момента  $\mathfrak{M}_\perp$  полностью определяется величиной  $\nu$ , которая изменяется со временем по закону

$$\nu(t) = \nu(0) e^{B\nu t}.$$

Поэтому

$$M_\perp(t) = M_\perp(0) e^{-\frac{t}{\tau_\perp}}, \quad (27.3.3)$$

где

$$\frac{1}{\tau_{\perp}} = \frac{1}{2} \lambda_3 = -\frac{1}{2} B_{vv}.$$

Величина  $\tau_{\perp}$  представляет собой время релаксации поперечной составляющей магнитного момента. Подчеркнем, что релаксация поперечной составляющей магнитного момента происходит независимо от релаксации величины полного магнитного момента и от процесса выравнивания температур спинов и решетки.

Релаксация величины полного магнитного момента и процесс выравнивания температур спинов и решетки происходит по более сложным законам:

$$M(t) - \bar{M} = \sum_{i=1}^3 a_i e^{-\lambda_i t}, \quad \delta T(t) = \sum_{i=1}^3 b_i e^{-\lambda_i t},$$

где коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  определяются начальными значениями магнитного момента и разности температур спинов и решетки.

Мы не будем приводить здесь общих выражений для этих коэффициентов, а ограничимся только рассмотрением некоторых наиболее интересных случаев.

Если  $M_{\perp}(0) = \delta T(0) = 0$ , то

$$M(t) - \bar{M} = (M(0) - \bar{M}) e^{-\lambda_1 t},$$

$$\frac{\delta T(t)}{T} \approx \frac{M(0) - \bar{M}}{\bar{M}} \left( \frac{\varepsilon_0 \theta_c}{T^2} \right)^{1/2} \frac{\theta_c}{T} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (27.3.4)$$

Из этих формул видно, что величина  $\tau = \frac{1}{\lambda_1}$  представляет собой время релаксации величины магнитного момента.

Если  $M_{\perp}(0) = 0$  и  $M(0) - \bar{M} = 0$ , то

$$\delta T(t) = \delta T(0) \frac{e^{-\lambda_2 t} + q e^{-\lambda_1 t}}{1 + q}, \quad (27.3.5)$$

$$M(t) - \bar{M} = \frac{\delta T(0)}{T} \frac{\varepsilon_0}{\theta_c} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{1/2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}),$$

где

$$q = 2 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \left( \frac{\varepsilon_0}{T} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что величины  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  удовлетворяют неравенству  $\lambda_2 \gg \lambda_1 \gg \lambda_3$  (напомним, что  $T \gg \theta_c \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{1/2}, \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$ ).

Так как  $q \ll 1$  ( $\lambda_1 \ll \lambda_2$  и  $\varepsilon_0 \ll T$ ), то в начальной стадии выравнивания температур основную роль играет первая экспонента  $e^{-\lambda_2 t}$ , а на конечной стадии — вторая экспонента  $e^{-\lambda_1 t}$ .

Из формул (27.3.3), (27.3.4) и неравенств  $\lambda_2 \gg \lambda_1 \gg \lambda_3$  следует, что установление равновесного значения величины магнитного момента происходит быстрее, чем изменение перпендикулярной составляющей полного магнитного момента. Иными словами, вначале устанавливается равновесное значение величины магнитного момента, а затем уже происходит поворот магнитного момента к оси легкого намагничения [5]. Последний этап релаксации феноменологически может быть описан с помощью релаксационного члена типа

$$\frac{1}{\tau M^2} (\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \tilde{\mathbf{H}})).$$

При  $T = 100^\circ \text{K}$  для  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  имеем следующие оценки:  $\lambda_2 \approx 10^9 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\lambda_1 \approx 10^7 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\lambda_3 \approx 10^5 \text{ сек}^{-1}$ .

Сравнивая формулы (6.3.8) для релаксации магнитного момента, которые мы получили, исходя из феноменологического уравнения (6.3.1), с формулами (27.3.3), (27.3.4), видим,

$$\lambda_3 = 2\gamma_{\perp}, \quad \lambda_1 = \gamma_z,$$

где величины  $\gamma_{\perp}$  и  $\gamma_z$  определяются формулами (6.3.9)

$$\gamma_z = \frac{1}{\tau_2 \lambda_{zz}^0}, \quad \gamma_{\perp} = \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \left( \beta + \frac{H_0^{(l)}}{M_0} \right).$$

Отсюда легко выразить постоянные  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ , входящие в феноменологическое уравнение (6.3.1), через постоянные  $\lambda_1$ ,  $\lambda_3$ :

$$\frac{1}{\tau_2} = \chi_{zz}^0 \lambda_1, \quad \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} = \frac{\lambda_3}{2} \left( \beta + \frac{H_0^{(l)}}{M_0} \right)^{-1}. \quad (27.3.6)$$

**4. Релаксация магнитного момента в области очень низких температур.** Перейдем к исследованию релаксации магнитного момента в интервале температур  $\varepsilon_0 \ll T \ll \ll \theta_c \left( \frac{\mu_0 M_0}{\theta_c} \right)^{1/2}$ , предполагая по-прежнему, что стороннее магнитное поле (или константа анизотропии) достаточно велико. При этом, очевидно (в силу законов сохранения энергии и импульса), невозможны процессы слияния двух магненов

и распада магнона, если волновой вектор одного из магнонов, участвующих в процессе, равен нулю.

В этой области температур основную роль в установлении теплового равновесия играют процессы слияния и распада магнонов, а не их обменное рассеяние. Так как эти процессы не меняют числа магнонов с волновым вектором  $\mathbf{k} = 0$ , но изменяют общее число магнонов, то они приводят к установлению (за время  $\tau_s^{(3)} = \frac{1}{\omega_s^{(3)}}$ ) квазиравновесного распределения вида (27.1.8), но с химическим потенциалом, равным нулю:

$$n^{(0)}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_s(\mathbf{k})}{T}} - 1}, & \mathbf{k} \neq 0, \\ n_0, & \mathbf{k} = 0 \end{cases} \quad (27.4.1)$$

Время установления этого распределения составляет по порядку величины  $\tau_s^{(3)} \approx \frac{\hbar\theta_c}{(\mu_0 M_0)^2} \left(\frac{\theta_c}{T}\right)^{1/2}$ .

Область температур  $T \ll \theta_c \left(\frac{\mu_0 M_0}{\theta_c}\right)^{2/3}$  практически совпадает с областью температур  $T \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$ , в которой главную роль играют релятивистские взаимодействия магнонов друг с другом, взаимодействие же магнонов с фононами несущественно. Поэтому можно рассматривать систему магнонов саму по себе и исходить из следующего кинетического уравнения для определения функции распределения магнонов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \xi \bar{L}_s^{(3)}\{n\} + L_s^{(4)}\{n\}, \quad (27.4.2)$$

где формально введен большой параметр  $\xi$ , характеризующий интенсивность наиболее вероятных процессов слияния и распада магнонов,  $\xi \bar{L}_s^{(3)}\{n\} \equiv L_s^{(3)}\{n\}$  и  $L_s^{(4)}\{n\}$  — интеграл столкновений, описывающий менее вероятные процессы релятивистского и обменного рассеяния магнонов.

Разлагая функцию распределения магнонов в ряд по обратным степеням параметра  $\xi$ :

$$n(\mathbf{k}) = n^{(0)}(\mathbf{k}) + n^{(1)}(\mathbf{k}) + \dots$$

и подставляя это разложение в (27.4.2), получим следующую систему уравнений для определения  $n^{(0)}$ ,  $n^{(1)}$ , ...:

$$L_s^{(3)} \{n^{(0)}\} = 0, \quad \xi \bar{L}_s^{(3)} \{n^{(1)}\} = \frac{\partial n^{(0)}}{\partial t} - L_s^{(4)} \{n^{(0)}\}. \quad (27.4.3)$$

Решение первого из этих уравнений имеет вид (27.4.1).

Замечая, далее, что при произвольном  $n$  справедливы соотношения

$$L_s^{(3)} \{n^{(1)}\} |_{k=0} = 0, \\ \sum_k \varepsilon_s(\mathbf{k}) L_s^{(3)} \{n^{(1)}\} = 0,$$

получим следующие условия разрешимости второго из уравнений системы (27.4.3):

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = L_s^{(4)} \{n^{(0)}\} |_{k_1=0}, \quad \sum_k \varepsilon_s(\mathbf{k}) \frac{\partial n^{(0)}(\mathbf{k})}{\partial t} = 0 \quad (27.4.4)$$

(мы учли, что  $\sum_k \varepsilon_s(\mathbf{k}) L_s^{(4)} \{n\} = 0$ ). Подставляя в эти уравнения квазиравновесное распределение  $n_0(\mathbf{k})$ , получим уравнения для определения  $n_0$  и  $T_s$

$$\dot{v} = -\lambda_3 v, \quad \dot{v} + c_s \dot{T}_s = 0, \quad (27.4.5)$$

где  $v = \varepsilon_0 \frac{n_0}{N}$ ,  $c_s$  — теплоемкость спиновых волн, отнесенная к одному атому, и

$$\lambda_3 = -\frac{\varepsilon_0}{N} \left( \frac{\partial}{\partial v} L_s^{(4)} \{n^{(0)}\} |_{k_1=0} \right)_0. \quad (27.4.6)$$

Решение этих уравнений имеет вид:

$$v(t) = v(0) e^{-\lambda_3 t}, \quad T(t) - T(0) = -\frac{v(0)}{c_s} (e^{-\lambda_3 t} - 1).$$

Используя (27.3.2), можно переписать эти формулы в виде

$$M_{\perp}(t) = M_{\perp}(0) e^{-\frac{1}{2} \lambda_3 t}, \quad T(t) - T(0) = -\frac{\varepsilon_0 n_0}{N c_s} (e^{-\lambda_3 t} - 1). \quad (27.4.7)$$

Мы видим, что  $\frac{1}{2} \lambda_3$  определяет время релаксации поперечной составляющей магнитного момента. Согласно (27.4.6) оно равно по порядку величины

$$\tau_{\perp} = \frac{2}{\lambda_3} \approx \frac{\hbar}{\mu_0 M_0} \frac{\theta_c}{\mu_0 M_0} \left( \frac{\theta_c}{T} \right)^2. \quad (27.4.8)$$

Это выражение совпадает с выражением (27.2.8) для  $1/\lambda_3$ .

Обратим внимание на то, что равновесная температура  $T = T(\infty)$  связана с начальной температурой  $T(0)$  соотношением

$$T = T(0) + \frac{\varepsilon_0 n_0(0)}{Nc_s}, \quad (27.4.9)$$

т. е.  $T > T(0)$ . Увеличение температуры объясняется переходом в тепло энергии, связанной с отклонением магнитного момента от равновесного значения.

Полученные результаты относятся, строго говоря, к тому случаю, когда константа анизотропии или магнитное поле  $H_0^{(i)}$  достаточно велики. Как уже отмечалось выше, при этом невозможны процессы слияния и распада магнонов с волновым вектором  $\mathbf{k} = 0$ . В кристаллах с малой энергией анизотропии (такими кристаллами являются кристаллы кубической симметрии) и в случае достаточно слабых полей становится возможным распад магнона с волновым вектором  $\mathbf{k} = 0$  на два магнона. Это приводит к тому, что времена релаксации продольной и поперечной составляющих магнитного момента имеют одинаковый порядок величины [9]. В этом заключается отличие релаксации в случае малой анизотропии и слабых полей от релаксации в случае большой анизотропии или сильных полей, когда установление равновесного значения магнитного момента происходит значительно быстрее поворота момента к равновесному направлению.

## § 28. Теплопроводность ферромагнетиков

1. Поток энергии спиновых волн. В § 20 мы видели, что теплоемкость ферромагнетиков складывается из спиновой и фононной теплоемкостей, причем спиновая теплоемкость превосходит фононную теплоемкость в интервале температур

$$T < \frac{\theta_D^2}{\theta_c}.$$

Поэтому можно ожидать, что и теплопроводность

ферромагнетиков (точнее говоря, ферродиелектриков, о которых далее только и будет идти речь) в определенных условиях также будет обуславливаться главным образом магнонами, а не фононами [10].

Мы перейдем теперь к изучению теплопроводности ферромагнетиков и определению вкладов в тепловой поток, вносимых магнонами и фононами. Определим сначала плотность потока энергии магнонов.



Согласно (5.2.5) компоненты вектора плотности потока энергии в ферромагнетике имеют вид

$$\Pi_i^{(s)} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_i + \alpha_{ik} \frac{\partial m}{\partial x_k} \frac{\partial m}{\partial t},$$

где поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в приближении магнитостатики удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Используя эти уравнения, легко выразить вектор  $\Pi^{(s)}$  через компоненты Фурье отклонения плотности магнитного момента от равновесного значения  $\mathbf{m}(\mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} \Pi_i^{(s)} = \frac{4\pi i}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')r} \left\{ \frac{(\mathbf{k}'m(\mathbf{k}'))}{k^2 k'^2} [(\mathbf{k}\mathbf{k}')m_i(\mathbf{k}) - k_i(\mathbf{k}'m(\mathbf{k}))] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} \alpha_{ij} k_j (m(\mathbf{k}) m(\mathbf{k}')) \right\}. \quad (28.1.1) \end{aligned}$$

Это выражение для плотности потока энергии справедливо и в квантовом случае, если под  $\mathbf{m}(\mathbf{k})$  понимать операторы, определяемые формулами (18.3.6)

$$m_+(\mathbf{k}) = \sqrt{2\mu_0 M_0} a^+(-\mathbf{k}) + \dots$$

$$m_-(\mathbf{k}) = \sqrt{2\mu_0 M_0} a(\mathbf{k}) + \dots$$

$$m_z(\mathbf{k}) = -\frac{\mu_0}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}' \mathbf{k}''} a^+(\mathbf{k}') a(\mathbf{k}'') \Delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'').$$

Используя эти формулы и формулы (18.2.1), можно выразить оператор потока энергии через операторы рождения и уничтожения магнонов:

$$\begin{aligned} \Pi_i^{(s)} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left\{ \varphi_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}') c^+(\mathbf{k}') c(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')r} + \right. \\ \left. + \varphi'_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}') c(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')r} + \text{э. с.} \right\}, \end{aligned}$$

где  $\varphi_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  и  $\varphi'_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  — некоторые функции волновых векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . Производя статистическое усреднение этого оператора, найдем плотность потока энергии в ферромагнетике:

$$\Pi_i^{(s)}(r, t) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left\{ \varphi_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \langle c^+(\mathbf{k}') c(\mathbf{k}) \rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')r} + \text{к. с.} \right\},$$

где

$$\langle c^+ (\mathbf{k}') c (\mathbf{k}) \rangle = \text{Sp } \rho c^+ (\mathbf{k}') c (\mathbf{k})$$

и  $\rho$  — матрица плотности ферромагнетика (мы учли при этом, что для состояний, близких к равновесному,  $|\langle c (\mathbf{k}) c (\mathbf{k}') \rangle| \ll \ll |\langle c^+ (\mathbf{k}) c (\mathbf{k}') \rangle|$ ).

Вводя далее функцию

$$n (\mathbf{k}, \mathbf{r}; t) = \sum_{\mathbf{k}'} \langle c^+ (\mathbf{k}') c (\mathbf{k}) \rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} \quad (28.1.2)$$

и предполагая  $kL \gg 1$ , где  $L$  — характерные пространственные размеры, на которых заметно меняется функция  $n (\mathbf{k}, \mathbf{r}; t)$ , получим

$$\Pi_i^{(s)} (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \{ \varphi_i (\mathbf{k}, -\mathbf{k}) n (\mathbf{k}, \mathbf{r}; t) + \text{к. с.} \},$$

где, согласно (28.1.1), (18.3.6),

$$\begin{aligned} \varphi_i (\mathbf{k}, -\mathbf{k}) = & 2\mu_0 M_0 k_i A_k + 4\pi\mu_0 M_0 \frac{k_i k_3^2}{k^4} (A_k - |B_k|) - \\ & - 4\pi\mu_0 M_0 (A_k - |B_k|) \frac{k_3}{k^2} \delta_{i3}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_s (\mathbf{k}) \frac{\partial \varepsilon_s (\mathbf{k})}{\hbar \partial k_i} = & 2\mu_0 M_0 \alpha k_i A_k + \\ & + 4\pi\mu_0 M_0 \frac{k_i k_3^2}{k^4} (A_k - |B_k|) - 4\pi\mu_0 M_0 (A_k - |B_k|) \frac{k_3}{k^2} \delta_{i3}, \end{aligned}$$

представим величину  $\Pi^{(s)}$  в виде

$$\Pi^{(s)} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s (\mathbf{k}) \mathbf{v} (\mathbf{k}) n (\mathbf{k}, \mathbf{r}; t), \quad (28.1.3)$$

где  $\mathbf{v} (\mathbf{k})$  — групповая скорость спиновых волн:

$$\mathbf{v} (\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_s (\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}.$$

Величина  $n (\mathbf{k}, \mathbf{r}; t) \frac{d\mathbf{r}}{V}$  представляет собой число магнов с волновым вектором  $\mathbf{k}$  в элементе объема  $d\mathbf{r}$ . Поэтому полученная формула, как и следовало ожидать, допускает простую корпускулярную интерпретацию; поток энергии, связанный со спиновыми волнами, представляет собой поток энергий магнов. Аналогичной формулой, как известно,

определяется плотность потока энергии фононов  $\Pi^{(l)}$ :

$$\Pi^{(l)} = \frac{1}{V} \sum_{fj} \hbar \omega_{pj}(f) s_j(f) N_j(f, \mathbf{r}; t), \quad (28.1.4)$$

где  $N_j(f, \mathbf{r}; t) \frac{d\mathbf{r}}{V}$  — число фононов с волновым вектором  $f$ , поляризацией  $j$  и частотой  $\omega_{pj}(f)$ , в элементе объема  $d\mathbf{r}$  и  $s_j(f)$  — групповая скорость фонона,

$$s_j(f) = \frac{\partial \omega_{pj}(f)}{\partial f}.$$

Плотность полного потока энергии в ферромагнетике равна

$$\Pi = \Pi^{(s)} + \Pi^{(l)}. \quad (28.1.5)$$

В отсутствие градиента температуры магнеты и фононы находятся в равновесии:

$$\bar{n}(\mathbf{k}) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_s(\mathbf{k})}{T}} - 1}, \quad \bar{N}_j(f) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_{pj}(f)}{T}} - 1}.$$

Тепловой поток в этом случае обращается в нуль. Если же имеется градиент температуры, то числа магнетонов и фононов отличаются от равновесных значений и возникает тепловой поток.

Чтобы вычислить его, мы должны найти функции распределения магнетонов и фононов при наличии градиента температуры.

**2. Кинетические уравнения для определения функций распределения магнетонов и фононов.** Кинетические уравнения для определения функций распределения фононов и магнетонов в стационарном случае имеют вид

$$\mathbf{v} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} = L_s \{n, N\}, \quad s_j \frac{\partial N_j}{\partial \mathbf{r}} = L_l \{N, n\}, \quad (28.2.1)$$

где  $L_s \{n, N\}$  и  $L_l \{N, n\}$  — интегралы столкновений для магнетонов и фононов, определенные в предыдущих параграфах.

Функции распределения  $n(\mathbf{k})$  и  $N_j(f)$  должны, очевидно, приводить к таким же значениям энергии магнетонов и фононов, как и равновесные функции  $\bar{n}(\mathbf{k})$  и  $\bar{N}_j(f)$ . Поэтому они должны удовлетворять, помимо кинетических уравнений,

добавочным условиям:

$$\int \varepsilon_s(\mathbf{k}) n(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \int \varepsilon_s(\mathbf{k}) \bar{n}(\mathbf{k}) d\mathbf{k},$$

$$\sum_j \int \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) N_j(\mathbf{f}) d\mathbf{f} = \sum_j \int \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) \bar{N}_j(\mathbf{f}) d\mathbf{f}. \quad (28.2.2)$$

Если градиент температуры достаточно мал, то функции распределения  $n(\mathbf{k})$  и  $N_j(\mathbf{f})$  будут мало отличаться от равновесных функций  $\bar{n}(\mathbf{k})$  и  $\bar{N}_j(\mathbf{f})$ , т. е.

$$n(\mathbf{k}) = \bar{n}(\mathbf{k}) + \delta n(\mathbf{k}), \quad N_j(\mathbf{f}) = \bar{N}_j(\mathbf{f}) + \delta N_j(\mathbf{f}),$$

где  $|\delta n(\mathbf{k})| \ll \bar{n}(\mathbf{k})$  и  $|\delta N_j(\mathbf{f})| \ll \bar{N}_j(\mathbf{f})$ . Поэтому при вычислении  $\partial n / \partial r$  и  $\partial N_j / \partial r$  можно заменить  $n(\mathbf{k})$  на  $\bar{n}(\mathbf{k})$  и  $N_j(\mathbf{f})$  на  $\bar{N}_j(\mathbf{f})$ :

$$v \frac{\partial n}{\partial r} = \bar{n}(\mathbf{k}) (\bar{n}(\mathbf{k}) + 1) \frac{\varepsilon_s(\mathbf{k})}{T^2} (\mathbf{v} \nabla T),$$

$$s_j \frac{\partial N_j}{\partial r} = \bar{N}_j(\mathbf{f}) (\bar{N}_j(\mathbf{f}) + 1) \frac{\hbar\omega_{pj}(\mathbf{f})}{T^2} (s_j \nabla T).$$

Подстановка этих выражений в кинетические уравнения (28.2.1) приводит к двум неоднородным интегральным уравнениям для определения функций  $n(\mathbf{k})$  и  $N_j(\mathbf{f})$ . Эти уравнения являются нелинейными, но их можно линеаризовать, так как функции распределения  $n(\mathbf{k})$  и  $N_j(\mathbf{f})$  мало отличаются от равновесных функций  $\bar{n}(\mathbf{k})$  и  $\bar{N}_j(\mathbf{f})$ .

С этой целью удобно ввести вместо  $\delta n(\mathbf{k})$  и  $\delta N_j(\mathbf{f})$  функции  $\varphi(\mathbf{k})$ ,  $\Phi_j(\mathbf{f})$ , связанные с  $\delta n(\mathbf{k})$  и  $\delta N_j(\mathbf{f})$  соотношениями

$$\delta n(\mathbf{k}) = \bar{n}(\mathbf{k}) (\bar{n}(\mathbf{k}) + 1) \frac{\varphi(\mathbf{k})}{T},$$

$$\delta N_j(\mathbf{f}) = \bar{N}_j(\mathbf{f}) (\bar{N}_j(\mathbf{f}) + 1) \frac{\Phi_j(\mathbf{f})}{T}. \quad (28.2.3)$$

Учитывая, что равновесные функции  $\bar{n}(\mathbf{k})$ ,  $\bar{N}_j(\mathbf{f})$  обращают интегралы столкновений в нуль, получим следующую систему линейных интегральных уравнений для определения функций  $\varphi(\mathbf{k})$  и  $\Phi_j(\mathbf{f})$ :

$$L_s \{\varphi, \Phi\} = \bar{n}_1 (\bar{n}_1 + 1) \frac{\varepsilon_1}{T} (\mathbf{v}_1 \nabla T),$$

$$L_i \{\Phi, \varphi\} = \bar{N}_1 (\bar{N}_1 + 1) \frac{\hbar\omega_1}{T} (s_1 \nabla T), \quad (28.2.4)$$

где

$$\begin{aligned}
 L_s \{ \varphi, \Phi \} = & -\frac{16\pi}{\hbar} \sum_{234\tau} |\Psi_s(12,34)|^2 (\bar{n}_1 + 1) (\bar{n}_2 + 1) \bar{n}_3 \bar{n}_4 \times \\
 & \times (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \times \\
 & \times \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 - 2\pi\tau) - \frac{8\pi}{\hbar} \sum_{23\tau} \{ 2 |\Psi_s(12,3)|^2 \times \\
 & \times (\bar{n}_1 + 1) (\bar{n}_2 + 1) \bar{n}_3 (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \times \\
 & \times \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - 2\pi\tau) + |\Psi_s(23,1)|^2 (\bar{n}_1 + 1) \bar{n}_2 \bar{n}_3 \times \\
 & \times (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - 2\pi\tau) \} - \\
 & - \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{23\tau} \{ |\Psi_{sl}(1,23)|^2 (\bar{n}_1 + 1) \bar{n}_2 \bar{N}_3 (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \times \\
 & \times \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega_3) \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - 2\pi\tau) + |\Psi_{sl}(2,13)|^2 \times \\
 & \times (\bar{n}_1 + 1) (\bar{N}_3 + 1) \bar{n}_2 (\varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2) \delta(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2) \times \\
 & \times \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 - 2\pi\tau) \}, \quad (28.2.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_l \{ \Phi, \varphi \} = & -\frac{8\pi}{\hbar} \sum_{23\tau} \{ 2 |\Psi_l(12,3)|^2 (\bar{N}_1 + 1) (\bar{N}_2 + 1) \times \\
 & \times \bar{N}_3 (\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3) \delta(\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3) \times \\
 & \times \Delta(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 - 2\pi\tau) + |\Psi_l(23,1)|^2 (\bar{N}_1 + 1) \times \\
 & \times \bar{N}_2 \bar{N}_3 (\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3) \delta(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3) \times \\
 & \times \Delta(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 - 2\pi\tau) - \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{23\tau} |\Psi_{sl}(3,21)|^2 (\bar{N}_1 + 1) \times \\
 & \times (\bar{n}_2 + 1) \bar{n}_3 (\Phi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) \delta(\hbar\omega_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \times \\
 & \times \Delta(\mathbf{f}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - 2\pi\tau) \quad (28.2.6)
 \end{aligned}$$

(мы учитываем здесь процессы переброса и суммируем поэтому по векторам обратной решетки  $\tau$ ; цифры в аргументах и индексах служат для обозначения индивидуальных состояний магнонов и фононов).

Помимо интегральных уравнений (28.2.4), функции  $\varphi(\mathbf{k})$   $\Phi_j(f)$  должны, согласно (28.2.2), удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) \bar{n}(\mathbf{k}) (\bar{n}(\mathbf{k}) + 1) \varphi(\mathbf{k}) &= 0, \\
 \sum_{fj} \hbar\omega_{pj}(f) \bar{N}_j(f) (\bar{N}_j(f) + 1) \Phi_j(f) &= 0. \quad (28.2.7)
 \end{aligned}$$

**3. Теплопроводность ферромагнетиков при низких температурах.** Перепишем кинетические уравнения (28.2.1) в виде

$$\begin{aligned} \xi_s^0 L_s^{(0)}\{\varphi, \Phi\} + L_s^{(u)}\{\varphi, \Phi\} &= \bar{n}(\bar{n} + 1) \frac{\varepsilon}{T} (\mathbf{v}\nabla T), \\ \xi_l^0 L_l^{(0)}\{\Phi, \varphi\} + L_l^{(u)}\{\Phi, \varphi\} &= \bar{N}(\bar{N} + 1) \frac{\hbar\omega}{T} (\mathbf{s}\nabla T), \end{aligned} \quad (28.3.1)$$

где  $\xi_s^0 L_s^{(0)}\{\varphi, \Phi\}$ ,  $\xi_l^0 L_l^{(0)}\{\Phi, \varphi\}$  и  $L_s^{(u)}\{\varphi, \Phi\}$ ,  $L_l^{(u)}\{\Phi, \varphi\}$  — части интегралов столкновений, описывающие соответственно процессы взаимодействия магнонов и фононов с сохранением и без сохранения квазиимпульса. Так как при несохранении квазиимпульса не могут быть одновременно малыми все компоненты волновых векторов сталкивающихся фононов и магнонов, то при низких температурах ( $T \ll \theta_c, \theta_D$ ) интегралы столкновений  $L_s^{(u)}\{\varphi, \Phi\}$  и  $L_l^{(u)}\{\Phi, \varphi\}$  будут, очевидно, экспоненциально малы. Для удобства дальнейших рассуждений мы учитываем это обстоятельство введением больших параметров  $\xi_s^0$  и  $\xi_l^0$ , стоящих перед интегралами  $L_s^{(0)}\{\varphi, \Phi\}$  и  $L_l^{(0)}\{\Phi, \varphi\}$ .

Решение уравнений (28.3.1) будем искать в виде разложений по обратным степеням параметров  $\xi_s^0$ ,  $\xi_l^0$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \dots, \\ \Phi &= \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в (28.3.1), получим уравнения

$$L_s^{(0)}\{\varphi^{(0)}, \Phi^{(0)}\} = 0, \quad L_l^{(0)}\{\Phi^{(0)}, \varphi^{(0)}\} = 0, \quad (28.3.2)$$

содержащие только функции  $\varphi^{(0)}$ ,  $\Phi^{(0)}$  и уравнения

$$\begin{aligned} \xi_s^0 L_s^{(0)}\{\varphi^{(1)}, 0\} + \xi_s^0 L_s^{(0)}\{0, \Phi^{(1)}\} + L_s^{(u)}\{\varphi^{(0)}, \Phi^{(0)}\} &= \\ &= \bar{n}(\bar{n} + 1) \frac{\varepsilon_s}{T} (\mathbf{v}\nabla T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_l^0 L_l^{(0)}\{\Phi^{(1)}, 0\} + \xi_l^0 L_l^{(0)}\{0, \varphi^{(1)}\} + L_l^{(u)}\{\Phi^{(0)}, \varphi^{(0)}\} &= \\ &= \bar{N}(\bar{N} + 1) \frac{\hbar\omega}{T} (\mathbf{s}\nabla T), \end{aligned} \quad (28.3.3)$$

содержащие как функции  $\varphi^{(1)}$ ,  $\Phi^{(1)}$ , так и функции  $\varphi^{(0)}$ ,  $\Phi^{(0)}$ .

Рассмотрим сначала уравнения (28.3.2).

Общее решение этой системы уравнений имеет, очевидно, вид

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)}(\mathbf{k}) &= \mathbf{u}\mathbf{k} + B\varepsilon_s(\mathbf{k}), \\ \Phi_j^{(0)}(\mathbf{f}) &= \mathbf{u}\mathbf{f} + B\hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}),\end{aligned}\quad (28.3.4)$$

где  $u_i$  и  $B$  — произвольные постоянные. Учитывая, однако, добавочное условие (28.2.7), легко заключить, что константа  $B$  должна равняться нулю:  $B = 0$ .

Покажем теперь, как найти постоянные  $u_i$ . Рассмотрим для этого уравнения (28.3.3). Так как при произвольных значениях  $\varphi^{(1)}$  и  $\Phi^{(1)}$  имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (\xi_s^0 L_s^{(0)}\{\varphi^{(1)}, 0\} + \xi_s^0 L_s^{(0)}\{0, \Phi^{(1)}\}) + \sum_{\mathbf{f}j} \mathbf{f} (\xi_l^0 L_l^{(0)}\{\Phi^{(1)}, 0\} + \\ + \xi_l^0 L_l^{(0)}\{0, \varphi^{(1)}\}) = 0, \\ \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) (\xi_s^0 L_s^{(0)}\{\varphi^{(1)}, 0\} + \xi_s^0 L_s^{(0)}\{0, \Phi^{(1)}\}) + \\ + \sum_{\mathbf{f}j} \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) (\xi_l^0 L_l^{(0)}\{\Phi^{(1)}, 0\} + \xi_l^0 L_l^{(0)}\{0, \varphi^{(1)}\}) = 0,\end{aligned}$$

то уравнения (28.3.3) будут иметь решение только в том случае, если выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} L_s^{(u)}\{\varphi^{(0)}, \Phi^{(0)}\} + \sum_{\mathbf{f}j} \mathbf{f} L_l^{(u)}\{\Phi^{(0)}, \varphi^{(0)}\} = \\ = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \bar{n}(\mathbf{k}) (\bar{n}(\mathbf{k}) + 1) \frac{\varepsilon_s(\mathbf{k})}{T} (\mathbf{v}(\mathbf{k}) \nabla T) + \\ + \sum_{\mathbf{f}j} \mathbf{f} \bar{N}_j(\mathbf{f}) (\bar{N}_j(\mathbf{f}) + 1) \frac{\hbar\omega_{pj}(\mathbf{f})}{T} (\mathbf{s}_j \nabla T), \\ \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) L_s^{(u)}\{\varphi^{(0)}, \Phi^{(0)}\} + \sum_{\mathbf{f}j} \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) L_l^{(u)}\{\Phi^{(0)}, \varphi^{(0)}\} = 0.\end{aligned}$$

Второе из этих соотношений, в силу закона сохранения энергии удовлетворяется тождественно при любых  $u_i$ , первое же соотношение определяет неизвестный вектор  $\mathbf{u}$ .

Учитывая (28.3.4), перепишем это соотношение в виде

$$\begin{aligned}A_{ii'} u_{i'} = \sum_{\mathbf{k}} k_i \bar{n}(\bar{n} + 1) \frac{\varepsilon_s(\mathbf{k})}{T} (\mathbf{v} \nabla T) + \\ + \sum_{\mathbf{f}j} f_i \bar{N}_j (\bar{N}_j + 1) \frac{\hbar\omega_{pj}(\mathbf{f})}{T} (\mathbf{s}_j \nabla T),\end{aligned}$$

где

$$A_{ii} = \sum_{\mathbf{k}} k_i (L_s^{(u)} \{k_i', 0\} + L_s^{(u)} \{0, f_i'\}) + \sum_{fj} f_j (L_f^{(u)} \{f_i', 0\} + L_f^{(u)} \{0, k_i'\}). \quad (28.3.5)$$

Считая ферромагнетик для простоты изотропным, получим отсюда

$$\mathbf{u} = \frac{c_l + 2c_s}{3A} \cdot \frac{T}{\hbar} \nabla T, \quad (28.3.6)$$

где  $c_l$  и  $c_s$  — фононная и спиновая теплоемкости и

$$A = A_s + A_{sl} + A_l,$$

$$A_s = \frac{\pi\tau^2}{\hbar V} \sum_{1234} |\Psi_s(12,34)|^2 (\bar{n}_1 + 1)(\bar{n}_2 + 1) \times \\ \times \bar{n}_3 \bar{n}_4 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 - 2\pi\boldsymbol{\tau}) + \\ + \frac{8\pi\tau^2}{\hbar V} \sum_{123} |\Psi_s(12,3)|^2 (\bar{n}_1 + 1)(\bar{n}_2 + 1) \bar{n}_3 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - 2\pi\boldsymbol{\tau}),$$

$$A_{sl} = \frac{2\pi\tau^2}{\hbar V} \sum_{123} |\Psi_{sl}(1,23)|^2 (\bar{n}_1 + 1) \bar{n}_2 \bar{N}_3 \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega_3) \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{f}_3 - 2\pi\boldsymbol{\tau}), \quad (28.3.7)$$

$$A_l = \frac{8\pi\tau^2}{\hbar V} \sum_{123} |\Psi_l(12,3)|^2 (\bar{N}_1 + 1)(\bar{N}_2 + 1) \times \\ \times \bar{N}_3 \delta(\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3) \Delta(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 - 2\pi\boldsymbol{\tau})$$

(мы учитываем здесь только слагаемые с наименьшими  $\boldsymbol{\tau}$ , отличными от нуля).

Используя формулы (28.2.3), (28.3.4) для  $n(\mathbf{k})$  и  $N_j(\mathbf{f})$ , получим следующее выражение для теплового потока:

$$\mathbf{\Pi} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) n(\mathbf{k}) \mathbf{v} + \sum_{fj} \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) N_j(\mathbf{f}) \mathbf{s}_j = \\ = -\frac{V}{a^3} \left(\frac{T}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{2}{3} c_s + \frac{1}{3} c_l\right)^2 \frac{1}{A} \nabla T. \quad (28.3.8)$$

С другой стороны,

$$\mathbf{\Pi} = -\kappa \nabla T,$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Поэтому

$$\kappa = \left(\frac{T}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{2}{3} c_s + \frac{1}{3} c_l\right)^2 \frac{1}{a^3 A}. \quad (28.3.9)$$



Оценим величину  $A$ . Так как при несохранении квазиимпульса не могут быть одновременно малыми все компоненты квазиимпульсов сталкивающихся частиц, то величины  $A_s$ ,  $A_{sl}$ ,  $A_l$  должны содержать экспоненциально малые множители. Действительно, рассмотрим, например, первое слагаемое в выражении для  $A_s$ . Пусть для определенности не малы компоненты вектора  $\mathbf{k}_1$ . Тогда не малой будет энергия магнона  $\varepsilon_1$ . Но благодаря наличию  $\delta$ -функции  $\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$  отсюда можно заключить, что не малой будет и энергия магнона  $\varepsilon_3$  (или  $\varepsilon_4$ ). Поэтому в выражении  $(\bar{n}_1 + 1)(\bar{n}_2 + 1)\bar{n}_3\bar{n}_4$  экспоненциально малыми будут величины  $\bar{n}_1$  и  $\bar{n}_3$ . Показатели экспоненциально малых множителей определяются, очевидно, наименьшими значениями величин  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ,  $\hbar\omega_3 + \varepsilon_2$  и  $\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$  в соответствующих областях интегрирования. Найти в общем виде эти наименьшие значения нельзя, так как для этого необходимо знать точные законы дисперсии магнонов и фононов в области больших волновых векторов. Можно, однако, утверждать, что по порядку величины наименьшие значения  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$  и  $\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$  равны  $\theta_c$  и  $\theta_D$ . Поэтому  $A_s$  и  $A_l$  можно записать в виде

$$A_s = \alpha_s \frac{\theta_c}{\hbar a^5} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^{\eta_s} e^{-\gamma_s \frac{\theta_c}{T}},$$

$$A_l = \alpha_l \frac{\hbar}{m_F a^7} \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^{\eta_l} e^{-\gamma_l \frac{\theta_D}{T}}, \quad (28.3.10)$$

где  $\alpha_s$ ,  $\alpha_l$ ,  $\eta_s$ ,  $\eta_l$  и  $\gamma_s$ ,  $\gamma_l$  по порядку величины равны единице.

Если предполагать, что законы дисперсии

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \theta_c (ak)^2, \quad \omega_{pl}(\mathbf{f}) = s_l f$$

справедливы не только при малых  $ak$  и  $af$ , но и при  $ak \sim 1$ ,  $af \sim 1$ , то можно показать, что величины  $\eta_s$ ,  $\eta_l$  и  $\gamma_s$ ,  $\gamma_l$  будут равны

$$\eta_s = 4, \quad \eta_l = 2, \quad \gamma_s = \frac{\pi^2}{2}, \quad \gamma_l = \pi.$$

Величину  $A_{sl}$  легко оценить в двух предельных случаях: когда  $\theta_c \gg \theta_D$  и когда  $\theta_c \ll \theta_D$ .

В первом случае из законов сохранения

$$\varepsilon_2 + \hbar\omega_3 = \varepsilon_1, \quad \mathbf{k}_2 + \mathbf{f}_3 = \mathbf{k}_1 \quad (-\pi\tau \leq k_l, f_l \leq \pi\tau)$$

следует:  $k_1 \sim k_2 \sim \frac{1}{2} \tau$ . Поэтому  $\epsilon_2 + \hbar\omega_3 \sim \theta_c$  и показатель экспоненты в выражении для  $A_{sl}$  будет равен по порядку величины  $\theta_c/T$ . Таким образом, если  $\theta_c \gg \theta_D$ , то  $A_{sl}$  имеет вид

$$A_{sl} = \alpha_{sl} \frac{\hbar}{m_F a^3} \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^\eta \left( \frac{T}{\theta_c} \right)^{\eta'} e^{-\gamma \frac{\theta_c}{T}}, \quad (28.3.11)$$

где величины  $\alpha_{sl}$ ,  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\gamma$  — порядка единицы. Заметим, что если считать квадратичный закон дисперсии для магнонов и линейный закон дисперсии для фононов справедливыми вплоть до  $k$ ,  $f \sim \pi t$ , то величины  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\gamma$  будут равны

$$\eta = 2, \quad \eta' = 1, \quad \gamma = \frac{\pi^2}{4}.$$

Во втором предельном случае  $\theta_c \ll \theta_D$  излучение фонона магноном невозможно и поэтому величина  $A_{sl}$  равна нулю.

Сравнение полученных формул показывает, что в предельных случаях  $\theta_c \gg \theta_D$  и  $\theta_c \ll \theta_D$  основной вклад в величину  $A$  вносят соответственно  $A_l$  и  $A_s$ :

$$A = \begin{cases} A_l, & \theta_c \gg \theta_D, \\ A_s, & \theta_c \ll \theta_D. \end{cases}$$

Поэтому

$$\kappa = \begin{cases} (T/\hbar)^2 \left( \frac{2}{3} c_s + c_l \right)^2 \frac{1}{a^3 A_l}, & \theta_c \gg \theta_D, \\ (T/\hbar)^2 \left( \frac{2}{3} c_s + c_l \right)^2 \frac{1}{a^3 A_s}, & \theta_c \ll \theta_D. \end{cases} \quad (28.3.12)$$

Из этих формул следует, что при  $\theta_c \ll \theta_D$  основную роль в теплопроводности ферромагнетика будут играть магноны при произвольных температурах (удовлетворяющих, конечно, условиям  $T \ll \theta_c, \theta_D$ ). Если же  $\theta_c \gg \theta_D$ , то вклад магнонов будет главным в области температур  $T \ll \theta_D^2/\theta_c$ .

При квадратичном законе дисперсии для магнонов и линейном законе для фононов эти формулы приобретают вид\*)

$$\kappa = \begin{cases} T/\hbar a \exp\left(\frac{\pi^2 \theta_c}{2T}\right), & \theta_c \ll \theta_D, \\ m_F s^2/\hbar a (T/\theta_c)^3 \exp\left(\frac{\pi \theta_D}{T}\right), & \theta_c \gg \theta_D. \end{cases}$$

\*) При оценке роли магнонов в теплопроводности ферромагнетиков мы учитывали только рассеяние магнона магноном. Однако наряду с этим процессом могут также играть роль процессы с участием не четырех, а большего числа магнонов [11].

**4. Второй звук в ферромагнетиках.** В предыдущем разделе мы рассмотрели поведение ферромагнетика, т. е. газа магнов и фононов в постоянном температурном поле с малым градиентом. Рассмотрим теперь тот случай, когда температурное поле непостоянно и неоднородно:

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0(1 + \vartheta(\mathbf{r}, t)),$$

где  $\vartheta(\mathbf{r}, t)$  — относительная добавка к температуре, которую мы будем считать малой,  $|\vartheta| \ll 1$ .

В этом случае мы не можем при определении функций распределения магнов и фононов считать, что исходными функциями являются планковские равновесные функции. Действительно, обратимся к кинетическим уравнениям для определения функций распределения магнов и фононов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} &= \xi_s^0 L_s^{(0)} \{n, N\} + L_s^{(u)} \{n, N\}, \\ \frac{\partial N_j}{\partial t} + \mathbf{s}_j \frac{\partial N_j}{\partial \mathbf{r}} &= \xi_l^0 L_l^{(0)} \{N, n\} + L_l^{(u)} \{N, n\}, \end{aligned} \quad (28.4.1)$$

где  $\xi_s^{(0)} L_s^{(0)} \{n, N\}$  и  $\xi_l^0 L_l^{(0)} \{N, n\}$  — интегралы столкновений магнов и фононов без процессов переброса,  $L_s^{(u)} \{n, N\}$  и  $L_l^{(u)} \{N, n\}$  — интегралы столкновений с учетом этих процессов и  $\xi_s^0, \xi_l^0$  — формально вводимые большие параметры, определяющие отношение вероятностей столкновений магнов и фононов с сохранением и без сохранения квазиимпульса. Решение этих уравнений будем искать в виде разложения по обратным степеням больших параметров  $\xi_s^0$  и  $\xi_l^0$ :

$$\begin{aligned} n &= n^{(0)} + n^{(1)} + \dots, \\ N_j &= N_j^{(0)} + N_j^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в (28.4.1), получим уравнения

$$\begin{aligned} \xi_s^0 L_s^{(0)} \{n^{(0)}, N^{(0)}\} &= 0, \\ \xi_l^0 L_l^{(0)} \{N^{(0)}, n^{(0)}\} &= 0, \end{aligned} \quad (28.4.2)$$

определяющие функции  $n^{(0)}$  и  $N^{(0)}$ , и уравнения

$$\begin{aligned} \xi_s^0 L_s^{(0)} \{n^{(1)}, N^{(1)}\} + L_s^{(u)} \{n^{(0)}, N^{(0)}\} &= \frac{\partial n^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial n^{(0)}}{\partial \mathbf{r}}, \\ \xi_l^0 L_l^{(0)} \{N^{(1)}, n^{(1)}\} + L_l^{(u)} \{N^{(0)}, n^{(0)}\} &= \frac{\partial N_j^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{s}_j \frac{\partial N_j^{(0)}}{\partial \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (28.4.3)$$

определяющие функции  $n^{(1)}$  и  $N_j^{(1)}$ .

Легко видеть, что общее решение уравнений (28.4.2) имеет вид

$$n^{(0)} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_s(\mathbf{k}) - u\mathbf{k}}{e} \frac{1}{T} - 1}, \quad N_j^{(0)} = \frac{1}{\frac{\hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) - u\mathbf{f}}{e} \frac{1}{T} - 1}, \quad (28.4.4)$$

где  $u_i$  и  $T$  — некоторые, пока произвольные, функции координат и времени (в функцию распределения  $n^{(0)}$  не входит химический потенциал, так как интеграл столкновений  $L_s^{(0)} \{n^{(0)}, N^{(0)}\}$  описывает как процессы с сохранением, так и без сохранения числа магнов). Замечая, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \xi_s^0 \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} L_s^{(0)} \{n^{(1)}, N^{(1)}\} + \xi_l^0 \sum_{fj} \mathbf{f} L_l^{(0)} \{N^{(1)}, n^{(1)}\} &= 0, \\ \xi_s^0 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) L_s^{(0)} \{n^{(1)}, N^{(1)}\} + \xi_l^0 \sum_{fj} \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) L_l^{(0)} \{N^{(1)}, n^{(1)}\} &= 0 \end{aligned}$$

при произвольных  $n^{(1)}$  и  $N_j^{(1)}$ , легко показать, используя (28.4.3), что должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} n^{(0)}(\mathbf{k}) + \sum_{fj} \mathbf{f} N_j(\mathbf{f}) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} v_i(\mathbf{k}) n^{(0)}(\mathbf{k}) + \right. \\ \left. + \sum_{fj} \mathbf{f} (s_j)_i N_j(\mathbf{f}) \right\} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} L_s^{(u)} \{n^{(0)}, N^{(0)}\} + \\ + \sum_{fj} \mathbf{f} L_l^{(u)} \{N^{(0)}, n^{(0)}\} = 0, \end{aligned} \quad (28.4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) n^{(0)}(\mathbf{k}) + \sum_{fj} \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) N_j(\mathbf{f}) \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) v_i(\mathbf{k}) n^{(0)}(\mathbf{k}) + \right. \\ \left. + \sum_{fj} \hbar\omega_{pj}(\mathbf{f}) (s_j)_i N_j^{(0)}(\mathbf{f}) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Эти соотношения, являющиеся условиями разрешимости уравнений (28.4.3), являются одновременно уравнениями, определяющими изменение параметров  $\mathbf{u}$  и  $\vartheta$ . Замечая, что  $|\vartheta| \ll 1$  и  $\left| \frac{\mathbf{k}\mathbf{u}}{T} \right| \ll 1$ , можно представить эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} (c_s + c_l)\dot{\vartheta} + \frac{1}{3}(2c_s + c_l) \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ B\dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{3}(2c_s + c_l) \nabla \vartheta &= -A\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (28.4.6)$$

где  $c_s$  и  $c_l$  — спиновая и фононная теплоемкости, отнесенные к одному атому,

$$B = -\frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \frac{\partial \bar{n}}{\partial \varepsilon_s} + \frac{1}{V} \sum_{fj} f^2 \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \hbar \omega_{pj}} \right\}$$

и  $A$  определяется формулой (28.3.7) (при получении этих уравнений мы считали, что  $\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \theta_c (a\mathbf{k})^2$  и  $\omega_{pj}(\mathbf{f}) = s_j f$ ).

Полагая  $\mathbf{u}, \vartheta \sim e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)}$ , получим следующее дисперсионное уравнение, связывающее частоту  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{q}$ :

$$(B\omega + iA)^2 \left\{ \omega^2 + i\frac{A}{B}\omega - \frac{(2c_s + c_l)^2 q^2}{9B(c_s + c_l)} \right\} = 0. \quad (28.4.7)$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}(\mathbf{q}) &= -i\frac{A}{B}, \\ \omega_3(\mathbf{q}) &= qv - i\frac{A}{2B}, \end{aligned} \quad (28.4.8)$$

где

$$v = \frac{2c_s + c_l}{3\sqrt{B(c_s + c_l)}}.$$

Первые два из этих корней описывают процесс релаксации поперечных (относительно  $\mathbf{q}$ ) составляющих вектора  $\mathbf{u}$ , а третий корень определяет частоту и затухание волны, связанной с колебаниями температуры и продольной составляющей вектора  $\mathbf{u}$ . Эти волны называются вторым звуком. Заметим, что так как вектор  $\mathbf{u}$  определяет функцию распределения магновнов, то вместе с колебаниями температуры будут происходить колебания магнитного момента и магнитного поля.

Приведем выражение для скорости второго звука  $v$  в двух предельных случаях, когда  $T \ll \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$  и  $T \gg \frac{\theta_D^2}{\theta_c}$ .

В первом случае основной вклад в теплоемкость ферромагнетика и в величину  $B$  вносят магноны и [12]

$$v = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\xi(5/2)}{\xi(3/2)}} \cdot \frac{a}{h} \sqrt{T\theta_c}. \quad (28.4.9)$$

Во втором случае основной вклад в теплоемкость ферромагнетика и в величину  $B$  вносят фононы и

$$v = \frac{s_l}{3} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{s_l}{s_t}\right)^3}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{s_l}{s_t}\right)^5}}. \quad (28.4.10)$$

## ГЛАВА VIII

### КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ ИНДЕФИНИТНУЮ МЕТРИКУ

#### § 29. Квантование спиновых волн

1. **Операторы идеализированных спинов.** В § 18 при установлении связи между операторами спинов атомов и операторами испускания и поглощения магнонов мы существенно использовали разложение радикала  $\sqrt{1 - \frac{a_l^+ a_l}{2s}}$  в ряд по степеням  $a_l^+ a_l / 2s$ , которое, строго говоря, справедливо только в случае больших спинов,  $s \gg 1$ . Кроме того, мы видели, что радикалы  $\sqrt{1 - \frac{a_l^+ a_l}{2s}}$ , содержащие операторы  $a_l^+$ ,  $a_l$ , можно рассматривать как операторы проекций спинов атомов только в подпространстве собственных векторов оператора  $a_l^+ a_l / 2s$ , принадлежащих собственным значениям этого оператора, меньшим или равным единице. Используя известное соотношение

$$\sum_k a_k^+ a_k = \sum_l a_l^+ a_l,$$

отсюда можно заключить, что развитая теория квантования спиновых волн справедлива при выполнении неравенства

$$\sum_k n_k \leq 2sN,$$

где  $n_k$  — число магнонов с волновым вектором  $k$  и  $N$  — общее число атомов тела. Но при таком ограничении, накладываемом на числа заполнения магнонов, среднее значение

числа магновов с волновым вектором  $k$ , строго говоря, не определяется формулой Планка:

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_s(k)}{T}} - 1}.$$

Таким образом, вообще ставится под сомнение возможность применения теории к случаю  $s \sim 1$ . В этой связи важное значение приобретает выяснение вопроса о том, какова в действительности область применимости развитой в § 18 теории квантования спиновых волн.

Мы покажем, что единственным критерием ее применимости является условие малости температуры ферромагнетика  $T$  по сравнению с его температурой Кюри  $T_c$ , что же касается величины спина атомов ферромагнетика, то она может быть произвольной.

Чтобы убедиться в справедливости этих утверждений, мы попытаемся связать операторы рождения и уничтожения магновов с операторами проекций спина, не прибегая к формулам (18.1.2), содержащим радикалы \*).

Напомним прежде всего, что проекции операторов спинов удовлетворяют перестановочным соотношениям (1.3.2)

$$[s_z, s_{\pm}] = \pm s_{\pm}, \quad [s_+, s_-] = 2s_z \quad (29.1.1)$$

(индекс  $l$ , нумерующий узлы кристаллической решетки, здесь и в дальнейшем, где это возможно, мы опускаем).

Введем операторы  $a_l, a_l^+$ , удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[a_l, a_l^+] = \delta_{ll'}, \quad [a_l, a_{l'}] = 0. \quad (29.1.2)$$

Легко убедиться, что если с помощью операторов  $a_l \equiv a$ ,  $a_l^+ \equiv a^+$  (эти операторы мы будем для сокращения называть бозевскими операторами) построить операторы [2]

$$\begin{aligned} \tilde{s}_+ &= \sqrt{2s} a^+, \\ \tilde{s}_- &= \sqrt{2s} \left( a - \frac{1}{2s} a^+ a a \right), \\ \tilde{s}_z &= -s + a^+ a, \end{aligned} \quad (29.1.3)$$

\*) Излагаемый ниже формализм принадлежит Дайсону [1].



где  $s$  — значение спина атома, то они будут удовлетворять тем же перестановочным соотношениям, что и операторы проекций спина  $s_{\pm}$ ,  $s_z$ :

$$[\tilde{s}_z, \tilde{s}_+] = \sqrt{2s} [a^+ a, a^+] = \sqrt{2s} a^+ = \tilde{s}_+,$$

$$\begin{aligned} [\tilde{s}_z, \tilde{s}_-] &= \sqrt{2s} \left[ a^+ a, a - \frac{1}{2s} a^+ a a \right] = \\ &= -\sqrt{2s} \left( a - \frac{1}{2s} a^+ a a \right) = -\tilde{s}_-, \end{aligned}$$

$$[\tilde{s}_+, \tilde{s}_-] = 2s \left[ a^+, a - \frac{1}{2s} a^+ a a \right] = -2s + 2a^+ a = 2\tilde{s}_z.$$

Однако операторы  $\tilde{s}$  нельзя отождествить с операторами  $s$ . Действительно, собственные значения оператора  $a^+ a$  исчерпываются неотрицательными целыми числами. Поэтому собственные значения оператора  $\tilde{s}_z$ , равные  $-s, -s+1, \dots$ , не ограничены сверху, в то время как собственные значения оператора  $s_z$ , равные  $-s, -s+1, \dots, s-1, s$ , ограничены сверху.

Хотя отождествление операторов  $s$  и  $\tilde{s}$  невозможно, тем не менее матричные элементы операторов  $\tilde{s}$  (будем для сокращения называть операторы  $\tilde{s}$  операторами идеализированных спинов) могут быть связаны с матричными элементами операторов спина  $s$ . Чтобы установить эту связь, исследуем подробнее свойства операторов  $\tilde{s}$ .

Введем в рассмотрение собственные векторы  $\Phi_n$  оператора  $a^+ a$ :

$$a^+ a \Phi_n = n \Phi_n, \quad (29.1.4)$$

где  $n$  может принимать значение  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Мы будем говорить, что  $\Phi_n$  описывает состояние, в котором присутствует  $n$  возбуждений.

Состояние с  $n = 0$  будем называть состоянием вакуума. Вектор этого состояния  $\Phi_0$  определяется уравнением

$$a \Phi_0 = 0. \quad (29.1.5)$$

С помощью вектора состояния вакуума  $\Phi_0$  можно построить векторы состояний  $\Phi_n$  с произвольным числом возбуждений. Действительно, используя перестановочные соотношения (29.1.2), легко убедиться, что

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \Phi_0. \quad (29.1.6)$$

Состояния с  $n \leq 2s$  мы будем называть физическими, а с  $n > 2s$  — дополнительными.

**2. Индефинитная метрика.** До сих пор мы не делали никаких предположений о связи между операторами  $a$  и  $a^+$  и считали только, что они удовлетворяют перестановочным соотношениям (29.1.2), в остальном же являются независимыми. Предположим теперь, что операторы  $a$  и  $a^+$  являются эрмитовски сопряженными.

Определение эрмитовского сопряжения требует, как известно, введения метрики в пространстве векторов состояний, т. е. определения скалярного произведения этих векторов.

Легко убедиться, что если операторы  $a$  и  $a^+$  являются эрмитовски сопряженными, то скалярное произведение векторов состояний  $\Phi_n$  и  $\Phi_{n'}$ , обозначаемое далее через  $(\Phi_n, \Phi_{n'})$ , будет равно

$$(\Phi_n, \Phi_{n'}) = \delta_{nn'}. \quad (29.2.1)$$

Действительно, рассмотрим, например, скалярное произведение  $(\Phi_1, \Phi_1)$ . Согласно (29.1.6)

$$(\Phi_1, \Phi_1) = (a^+\Phi_0, a^+\Phi_0).$$

Но, по определению эрмитовского сопряжения операторов  $L$  и  $L^+$ ,

$$(\Phi, L\Psi) = (L^+\Phi, \Psi), \quad (29.2.2)$$

где  $\Phi$  и  $\Psi$  — произвольные векторы состояний. Поэтому

$$(\Phi_1, \Phi_1) = (\Phi_0, aa^+\Phi_0).$$

Учитывая, что

$$aa^+\Phi_0 = \Phi_0,$$

и предполагая

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1,$$

получим

$$(\Phi_1, \Phi_1) = 1.$$

Аналогичным образом можно убедиться, что равенство (29.2.1) имеет место и при  $n = n' > 1$ .

Чтобы убедиться в ортогональности векторов состояний  $\Phi_n$  и  $\Phi_{n'}$  при  $n \neq n'$ , умножим уравнение (29.1.4) скалярно на  $\Phi_{n'}$ :

$$(\Phi_{n'}, a^+a\Phi_n) = n(\Phi_{n'}, \Phi_n).$$

Так как

$$(\Phi_{n'}, a^+a\Phi_n) = ((a^+a)^+\Phi_{n'}, \Phi_n)$$

и  $(a^+a)^+ = a^+a$ , то мы приходим к соотношению

$$n'(\Phi_{n'}, \Phi_n) = n(\Phi_{n'}, \Phi_n),$$

откуда и следует ортогональность векторов состояний при  $n \neq n'$ .

Мы видим, таким образом, что, если потребовать, чтобы операторы  $a$  и  $a^+$  были эрмитовски сопряженными в пространстве векторов состояний  $\Phi_n$ , то мы придем к метрике (29.2.1).

Легко видеть, что в этой метрике операторы  $\tilde{s}_+$  и  $\tilde{s}_-$ , определяемые соотношениями (29.1.3), не будут эрмитовски сопряженными. Покажем, однако, что можно определить метрику в пространстве векторов состояний  $\Phi_n$  таким образом, чтобы операторы  $\tilde{s}_\pm$  и  $\tilde{s}_z$  были в ней эрмитовски сопряженными, а оператор  $s_z$  — самосопряженным. Это значит, что может быть определено скалярное произведение векторов состояний  $\Phi_n$ , которое мы будем теперь обозначать через  $\langle \Phi_n, \Phi_{n'} \rangle$  таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{n'}, \tilde{s}_\pm \Phi_n \rangle &= \langle \tilde{s}_\mp \Phi_{n'}, \Phi_n \rangle, \\ \langle \Phi_{n'}, \tilde{s}_z \Phi_n \rangle &= \langle \tilde{s}_z \Phi_{n'}, \Phi_n \rangle. \end{aligned} \quad (29.2.3)$$

Мы будем предполагать, что скалярные произведения  $\langle \Phi_{n'}, \Phi_n \rangle$  и  $\langle \Phi_n, \Phi_{n'} \rangle$  связаны между собой соотношением

$$\langle \Phi_{n'}, \Phi_n \rangle = \langle \Phi_{n'}, F\Phi_n \rangle, \quad (29.2.4)$$

где  $F$  — некоторый оператор, который называется метрическим оператором. Так как скалярное произведение  $\langle \Psi, \Phi \rangle$  должно обладать свойством

$$\langle \Psi, \Phi \rangle^* = \langle \Phi, \Psi \rangle,$$

то оператор  $F$  должен быть эрмитовым в метрике (29.2.1):

$$F^+ = F. \quad (29.2.5)$$

Найдем вид метрического оператора  $F$ . Из равенств (29.2.3) следуют, согласно (29.2.4), соотношения

$$\begin{aligned} \langle \Psi, F\tilde{s}_\pm \Phi \rangle &= \langle \Psi, \tilde{s}_\mp^+ F\Phi \rangle, \\ \langle \Psi, F\tilde{s}_z \Phi \rangle &= \langle \Psi, \tilde{s}_z^+ F\Phi \rangle, \end{aligned}$$

откуда

$$F\tilde{s}_\pm = \tilde{s}_\mp^+ F, \quad F\tilde{s}_z = \tilde{s}_z^+ F. \quad (29.2.6)$$

Подставляя в эти соотношения выражения (29.1.3) для  $\tilde{s}_\pm$ ,  $\tilde{s}_z$ , найдем

$$a^+ \left(1 - \frac{\hat{n}}{2s}\right) F = Fa^+, \quad \hat{n}F = F\hat{n}, \quad (29.2.7)$$

где  $\hat{n} = a^+a$ . Мы видим, что  $F$  приводится к диагональному виду вместе с  $\hat{n}$ . Поэтому первая формула (29.2.7) дает

$$\left(1 - \frac{n}{2s}\right) F_n a^+ \Phi_n = F_{n+1} a^+ \Phi_n,$$

где

$$F_n = (\Phi_n, F\Phi_n).$$

Таким образом,

$$F_{n+1} = \left(1 - \frac{n}{2s}\right) F_n,$$

откуда

$$F_n = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2s}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{2s}\right). \quad (29.2.8)$$

Это выражение показывает, что  $F_n = 0$  при  $n \geq 2s + 1$ .

Возвращаясь к выражению (29.2.4), получим

$$\langle \Phi_n, \Phi_{n'} \rangle = F_n \delta_{nn'}. \quad (29.2.9)$$

Эта формула показывает, что метрика, задаваемая скалярным произведением  $\langle \Psi, \Phi \rangle$ , является индефинитной, так как скалярное произведение  $\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle$  при  $n > 2s$ , т. е. для дополнительных состояний обращается в нуль, хотя  $\Phi_n \neq 0$ .

**3. Связь матричных элементов спинов и идеализированных спинов.** Наша задача заключается в установлении связи матричных элементов операторов  $s_z$ ,  $s_\pm$  с матричными элементами операторов  $\tilde{s}_z$ ,  $\tilde{s}_\pm$ .

Введем с этой целью собственные векторы оператора  $s_z$ , которые мы будем обозначать через  $|n\rangle$ :

$$s_z |n\rangle = (n - s) |n\rangle, \quad (29.3.1)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots, 2s$  (величина  $m = n - s$  представляет собой проекцию спина атома на ось  $z$ ).

Вектор состояния  $|n\rangle$  может быть построен с помощью вектора состояния  $|0\rangle$ , определяемого уравнениями

$$s_z |0\rangle = -s |0\rangle, \quad s_- |0\rangle = 0 \quad (29.3.2)$$

(второе из этих уравнений учитывает тот факт, что нет векторов состояний с проекцией спина, меньшей чем  $-s$ ). Для

этого необходимо подействовать на  $|0\rangle$  оператором  $(s_+)^n$ :

$$|n\rangle = (2s)^{-n/2} (n!)^{-1/2} (s_+)^n |0\rangle. \quad (29.3.3)$$

Действительно, согласно (29.3.4),

$$s_z (s_+)^n = (s_+)^n (n + s_z), \quad (29.3.4)$$

откуда и из формул (29.3.3), (29.3.2) непосредственно следует (29.3.1).

Покажем, что состояния  $|n\rangle$  удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$\langle n | n' \rangle = F_n \delta_{nn'}, \quad (29.3.5)$$

где  $F_n$  определяется формулой (29.2.8). Заметим с этой целью, что векторы состояний (29.3.3), как собственные векторы эрмитовского оператора  $s_z$ , являются ортогональными, т. е.

$$\langle n' | n \rangle = A_n (2s)^{-n} \frac{1}{n!} \delta_{nn'}, \quad (29.3.6)$$

где

$$A_n = \langle 0 | s_-^n s_+^n | 0 \rangle.$$

Найдем величину  $A_n$ . Замечая, что  $s(s+1) = s_z^2 + \frac{1}{2}(s_+ s_- + s_- s_+)$ , и используя соотношение  $[s_+, s_-] = 2s_z$ , получим

$$s_- s_+ = (s - s_z)(s + s_z + 1). \quad (29.3.7)$$

Эта формула и формула (29.3.4) позволяют представить оператор  $s_-^n s_+^n$  в виде

$$s_-^n s_+^n = s_-^{n-1} s_- s_+ s_+^{n-1} = s_-^{n-1} s_+^{n-1} (s - s_z - n + 1)(s + s_z + n).$$

Усредняя это равенство по состоянию  $|0\rangle$  и используя (29.3.2), найдем

$$A_n = A_{n-1} \left(1 - \frac{n-1}{2s}\right) 2sn,$$

а так как  $A_0 = 1$ , то

$$A_n = n! (2s)^n F_n,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, векторы состояний  $\frac{1}{\sqrt{F_n}} |n\rangle$  являются ортонормированными.

Установим теперь связь между матричными элементами операторов  $s$  и  $\tilde{s}$ .

Докажем, что если  $G(s)$  представляет собой произвольную функцию операторов проекций спина  $s_i$ , то имеет место следующее общее соотношение:

$$\langle n | G(s) | n' \rangle = \langle \Phi_n, G(P\tilde{s}P) \Phi_{n'} \rangle = \langle \Phi_n, FG(P\tilde{s}P) \Phi_{n'} \rangle, \quad (29.3.8)$$

где  $P$  — оператор проектирования на подпространство физических векторов состояния:

$$P\Phi_n = \begin{cases} \Phi_n, & n \leq 2s, \\ 0, & n > 2s. \end{cases} \quad (29.3.9)$$

Формула (29.3.8), если отвлечься от операторов проектирования сводит задачу о нахождении матричных элементов оператора  $G(s)$  к задаче о нахождении матричных элементов произведения бозе-операторов  $a, a^+$  между состояниями  $\Phi_n, \Phi_{n'}$ , являющимися собственными состояниями оператора числа возбуждений  $\hat{n} = a^+a$ .

Для доказательства формулы (29.3.8) предположим сначала, что эта формула справедлива для  $G(s) = s_i$ , и покажем, что она будет справедлива для  $G(s) = s_i s_k$ .

Замечая, что состояния  $F_n^{-1/2} |n\rangle$  являются ортонормированными, имеем

$$\langle n | s_i s_k | n' \rangle = \sum_{n''} \langle n | s_i | n'' \rangle F_n^{-1} \langle n'' | s_k | n' \rangle. \quad (29.3.10)$$

Согласно нашему предположению формула (29.3.8) справедлива для  $G(s) = s_i$ , т. е.

$$\langle n | s_i | n'' \rangle = \langle \Phi_n, F\tilde{s}_i\Phi_{n''} \rangle \quad (29.3.11)$$

(в этой формуле мы опустили оператор проектирования, так как состояния  $\Phi_n, \Phi_{n''}$  являются физическими). Подставляя (29.3.11) в (29.3.10) и замечая, что

$$\langle \Phi_{n''}, F\tilde{s}_k\Phi_{n'} \rangle = F_{n''} \langle \Phi_{n''}, \tilde{s}_k\Phi_{n'} \rangle,$$

получим

$$\langle n | s_i s_k | n' \rangle = \sum_{n''} \langle \Phi_n, F\tilde{s}_i\Phi_{n''} \rangle \langle \Phi_{n''}, \tilde{s}_k\Phi_{n'} \rangle, \quad (29.3.12)$$

где суммирование производится только по системе физических векторов состояний.

Заменяя в последней формуле  $\Phi_{n'}$  на  $P\Phi_{n'}$ , можно распространить суммирование по  $n''$  в (29.3.12) на полную систему векторов состояний  $\Phi_{n'}$ . В результате мы получим

$$\langle n | s_i s_k | n' \rangle = (\Phi_n, F \tilde{s}_i P \tilde{s}_k \Phi_{n'}).$$

Эта формула совпадает с формулой (29.3.8) при  $G(s) = s_i s_k$ .

Поступая аналогичным образом, легко доказать, что формула (29.3.8) будет справедлива для функций  $G(s)$ , имеющих вид произведений любого числа операторов  $s_i$ , если только она справедлива для  $G(s) = s_i$ .

Остается убедиться в справедливости формулы (29.3.8) для  $G(s) = s_i$ , что может быть сделано непосредственным вычислением. Действительно, из формулы (29.1.3) следует:

$$(\Phi_n, F \tilde{s}_z \Phi_{n'}) = F_n (n - s) \delta_{nn'}. \quad (29.3.13)$$

К тому же результату приводит и левая часть равенства (29.3.8):

$$\langle n | s_z | n' \rangle = (n - s) \langle n | n' \rangle = (n - s) F_n \delta_{nn'},$$

так как, согласно (29.3.4),  $\langle n | n' \rangle = F_n \delta_{nn'}$ .

Если  $G(s) = s_+$ , то из (29.1.3) имеем

$$(\Phi_n, F \tilde{s}_+ \Phi_{n'}) = \sqrt{2s} F_n (\Phi_n, a^+ \Phi_{n'}) = \sqrt{2s} F_n \sqrt{n} \delta_{n, n'+1}.$$

С другой стороны, из квантовомеханического определения матричных элементов оператора момента следует:

$$F_n^{-1/2} F_{n'}^{-1/2} \langle n | s_+ | n' \rangle = \sqrt{(s+m)(s-m+1)} \delta_{m, m'+1},$$

где  $m = n - s$ ,  $m' = n' - s$ . Поэтому, используя (29.2.8), получим

$$\begin{aligned} \langle n | s_+ | n' \rangle &= \sqrt{n} \sqrt{F_n F_{n-1} (2s+1-n)} \delta_{n, n'+1} = \\ &= \sqrt{2s} F_n \sqrt{n} \delta_{n, n'+1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle n | s_+ | n' \rangle = (\Phi_n, F \tilde{s}_+ \Phi_{n'}). \quad (29.3.14)$$

Согласно (29.2.4) отсюда следует:

$$\langle n | s_+ | n' \rangle = \langle \Phi_n, \tilde{s}_+ \Phi_{n'} \rangle.$$

Переходя к комплексно сопряженным величинам и замечая, что

$$\langle \Phi_n, \tilde{s}_+ \Phi_{n'} \rangle^* = \langle \tilde{s}_+ \Phi_{n'}, \Phi_n \rangle = \langle \Phi_{n'}, \tilde{s}_- \Phi_n \rangle.$$

получим

$$\langle n | s_- | n' \rangle = (\Phi_n, F \tilde{s}_- \Phi_{n'}). \quad (29.3.15)$$

Равенства (29.3.13), (29.3.14), (29.3.11) доказывают справедливость формулы (29.3.8) для  $G(s) = s_i$ . Таким образом, формула (29.3.8) доказана в общем случае.

**4. Теорема о следах.** При вычислении статистической суммы, а также различных кинетических коэффициентов приходится находить следы оператора  $G(s)$ . Мы покажем, что вычисление  $\text{Sp } G(s)$  сводится к вычислению следа некоторого оператора, построенного с помощью бозе-операторов  $a, a^+$ .

Согласно формуле (29.3.8)

$$\text{Sp } G(s) = \sum_n \frac{1}{F_n} \langle n | G(s) | n \rangle = \sum_n' (\Phi_n, G(P \tilde{s} P) \Phi_n),$$

где штрих у суммы означает, что суммирование производится только по физической системе векторов состояний  $\Phi_n$  ( $n \leq 2s$ ). Замечая, что  $P \Phi_n = 0$  при  $n > 2s$ , имеем

$$\sum_n' (\Phi_n, G(P \tilde{s} P) \Phi_n) = \sum_n (\Phi_n, P G(P \tilde{s} P) \Phi_n) = \text{Sp } P G(P \tilde{s} P).$$

Таким образом,

$$\text{Sp } G(s) = \text{Sp } P G(P \tilde{s} P), \quad (29.4.1)$$

где  $\tilde{s}_i$  связаны с бозе-операторами  $a, a^+$  формулами (29.1.3).

**5. Связь между различными реализациями операторов спина.** В § 18 (раздел 1) мы построили с помощью бозевских операторов  $a^+, a$  операторы

$$\begin{aligned} s'_+ &= \sqrt{2s} a^+ \sqrt{1 - \frac{a^+ a}{2s}}, \\ s'_- &= \sqrt{2s} \sqrt{1 - \frac{a^+ a}{2s}} a, \\ s'_z &= -s + a^+ a, \end{aligned} \quad (29.5.1)$$

которые формально удовлетворяют перестановочным соотношениям для операторов спинов. С другой стороны, мы ввели операторы

$$\begin{aligned} \tilde{s}_+ &= \sqrt{2s} a^+, \\ \tilde{s}_- &= \sqrt{2s} \left(1 - \frac{a^+ a}{2s}\right) a, \\ \tilde{s}_z &= -s + a^+ a, \end{aligned}$$



которые также удовлетворяют перестановочным соотношениям для операторов спина. Возникает поэтому вопрос, как связаны между собой обе эти системы операторов, о которых можно говорить как о различных реализациях операторов спина с помощью бозевских операторов  $a^+$ ,  $a$ .

Воспользуемся для этого формулами (29.2.8), (29.1.4), (29.1.6). Считая, что  $n, n' \leq 2s$ , получим

$$\begin{aligned} (\Phi_n, F^{1/2} a^+ F^{-1/2} \Phi_{n'}) &= \sqrt{\frac{F_n}{F_{n-1}}} (\Phi_n, a^+ \Phi_{n'}) = \\ &= \sqrt{1 - \frac{n-1}{2s}} (\Phi_n, a^+ \Phi_{n'}), \\ (\Phi_n, F^{1/2} \left( a - \frac{a^+ a a}{2s} \right) F^{-1/2} \Phi_{n'}) &= \\ &= \left( 1 - \frac{n}{2s} \right) \sqrt{\frac{F_n}{F_{n+1}}} (\Phi_n, a \Phi_{n'}) = \sqrt{1 - \frac{n}{2s}} (\Phi_n, a \Phi_{n'}). \end{aligned} \quad (29.5.2)$$

Замечая далее, что

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2s}} (\Phi_n, a^+ \Phi_{n'}) &= (\Phi_n, a^+ \sqrt{1 - \frac{a^+ a}{2s}} \Phi_{n'}), \\ \sqrt{1 - \frac{n}{2s}} (\Phi_n, a \Phi_{n'}) &= (\Phi_n, \sqrt{1 - \frac{a^+ a}{2s}} a \Phi_{n'}), \end{aligned}$$

перепишем (29.5.2) в виде

$$\begin{aligned} (\Phi_n, F^{1/2} a^+ F^{-1/2} \Phi_{n'}) &= (\Phi_n, a^+ \sqrt{1 - \frac{a^+ a}{2s}} \Phi_{n'}), \\ (\Phi_n, F^{1/2} \left( a - \frac{a^+ a a}{2s} \right) F^{-1/2} \Phi_{n'}) &= (\Phi_n, \sqrt{1 - \frac{a^+ a}{2s}} a \Phi_{n'}). \end{aligned}$$

Мы видим, что операторы  $\tilde{s}_+$ ,  $\tilde{s}_-$ ,  $\tilde{s}_z$  связаны с операторами  $s'_+$ ,  $s'_-$ ,  $s'_z$  соотношениями

$$s'_{\pm} = F^{1/2} \tilde{s}_{\pm} F^{-1/2}, \quad s'_z = \tilde{s}_z = F^{1/2} \tilde{s}_z F^{-1/2}. \quad (29.5.3)$$

Эти формулы справедливы в подпространстве физических векторов состояний, т. е. при  $n \leq 2s$ .

Выше мы получили формулу

$$\langle n | G(\mathbf{s}) | n' \rangle = (\Phi_n, FG(P\tilde{s}P)\Phi_{n'}),$$

где  $G(\mathbf{s})$  — произвольная функция операторов  $\mathbf{s}$ . Используя соотношения (29.5.3), мы выразим теперь  $\langle n | G(\mathbf{s}) | n' \rangle$  через операторы  $s'$ .

Заметим для этого, что при  $n, n' \leq 2s$

$$(\Phi_n, FG(P\tilde{s}P)\Phi_{n'}) = \sqrt{F_n F_{n'}} (\Phi_n, F^{1/2}G(P\tilde{s}P)F^{-1/2}\Phi_{n'}).$$

Так как оператор  $G(P\tilde{s}P)$  действует в физическом подпространстве векторов состояния, то, согласно (29.5.3),

$$F^{1/2}G(P\tilde{s}P)F^{-1/2} = G(PF^{1/2}\tilde{s}F^{-1/2}P) = G(Ps'P).$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{F_n F_{n'}}} \langle n | G(s) | n' \rangle = (\Phi_n, G(Ps'P)\Phi_{n'}). \quad (29.5.4)$$

Так как состояния  $F_n^{-1/2} | n \rangle$  являются ортонормированными, то из последней формулы следует соотношение

$$\text{Sp } G(s) = \text{Sp } PG(Ps'P). \quad (29.5.5)$$

Формула (29.5.4) показывает, что матричный элемент оператора  $G(s)$  между нормированными состояниями  $F_n^{-1/2} | n \rangle$ , вообще говоря, не равен матричному элементу  $(\Phi_n, G(s')\Phi_{n'})$  и только в пренебрежении промежуточными дополнительными состояниями указанные матричные элементы будут совпадать.

**6. Представление статистической суммы ферромагнетика с помощью бозевских операторов.** Теорема о следах может быть применена к вычислению статистической суммы ферромагнетика

$$Z = \text{Sp } e^{-\beta \mathcal{H}(s_l)}, \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad (29.6.1)$$

где  $\mathcal{H}(s_l)$  — гамильтониан ферромагнетика (здесь выписаны явно аргументы  $s_l$ , чтобы подчеркнуть, что гамильтониан выражен через операторы проекций спинов отдельных атомов).

Согласно этой теореме

$$\text{Sp } e^{-\beta \mathcal{H}(s_l)} = \text{Sp } P e^{-\beta \mathcal{H}(P\tilde{s}_l P)}, \quad (29.6.2)$$

где  $\tilde{s}_l$  — операторы идеализированного спина  $l$ -го атома, определяемые формулами (29.1.3), и  $P$  — оператор проектирования на подпространство векторов физических состояний. При этом под физическими состояниями мы понимаем такие состояния, для которых собственные значения операторов  $a_l^+ a_l$  меньше или равны  $2s$  для каждого узла решетки. Вводя оператор проектирования  $P_l$  для  $l$ -го узла решетки:

$$P_l = \theta \left( 1 - \frac{a_l^+ a_l}{2s} \right),$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

можно представить оператор  $P$  в виде произведения операторов  $P_l$ :

$$P = \prod_l P_l.$$

Мы покажем, что правая часть равенства (29.6.2) может быть с экспоненциальной точностью порядка  $e^{-\frac{\theta_c}{T}}$  преобразована к такой форме, которая не будет содержать оператора проектирования  $P$ . Таким образом, мы сведем задачу о вычислении следов матриц, содержащих операторы  $s_l$ , к вычислению следов матриц, содержащих операторы  $a_l^+$ ,  $a_l$ , алгебра которых значительно проще алгебры операторов  $s_l$ .

Выразим прежде всего оператор  $\mathcal{H}(P\tilde{s}_l P)$  через бозевские операторы  $a_l^+$ ,  $a_l$ , предполагая, что гамильтониан ферромагнетика  $\mathcal{H}(s_l)$  имеет простейшую форму:

$$\mathcal{H}(s_l) = -\frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) s_l s_m + 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l s_l^z, \quad (29.6.3)$$

учитывающую только обменное взаимодействие спинов и их взаимодействие со сторонним магнитным полем. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P\tilde{s}_l P) = & -\frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) \left\{ P\tilde{s}_l^z P\tilde{s}_m^z P + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} P[\tilde{s}_l^+ P\tilde{s}_m^- + \tilde{s}_l^- P\tilde{s}_m^+] P \right\} + 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l P\tilde{s}_l^z P, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{s}_l^z = -s + a_l^+ a_l, \quad \tilde{s}_l^- = \sqrt{2s} \left( 1 - \frac{a_l^+ a_l}{2s} \right) a_l, \quad \tilde{s}_l^+ = \sqrt{2s} a_l^+$$

и операторы  $a_l^+$ ,  $a_l$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a_l, a_{l'}^+] = \delta_{ll'}, \quad [a_l, a_{l'}] = [a_l^+, a_{l'}^+] = 0.$$

Так как оператор  $\tilde{s}_l^-$  является оператором уничтожения, а  $\tilde{s}_l^+$  — оператором рождения элементарного возбуждения, то,

Очевидно,

$$\begin{aligned} P\tilde{s}_m^z P &= \tilde{s}_m^z P, \\ P\tilde{s}_m^- P &= \tilde{s}_m^- P, \\ P\tilde{s}_l^- P\tilde{s}_m^+ P &= P\tilde{s}_l^- \tilde{s}_m^+ P, \quad l \neq m. \end{aligned}$$

Поэтому выражение для  $\mathcal{H}(P\tilde{s}_l P)$  может быть представлено в виде

$$\mathcal{H}(P\tilde{s}_l P) = P \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) \left[ \tilde{s}_l^z \tilde{s}_m^z + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (\tilde{s}_l^+ \tilde{s}_m^- + \tilde{s}_l^- \tilde{s}_m^+) \right] + 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l \tilde{s}_l^z \right\} P.$$

Используя явный вид операторов  $\tilde{s}_l^z$ ,  $\tilde{s}_l^+$ ,  $\tilde{s}_l^-$ , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P\tilde{s}_l P) &= P \left\{ E_0 + 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l a_l^+ a_l - \right. \\ &\left. - s \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) a_l^+ \left( 1 - \frac{a_m^+ a_m}{2s} \right) (a_m - a_l) \right\} P, \quad (29.6.4) \end{aligned}$$

где

$$E_0 = -2\mu_0 s H_0^{(e)} N - \frac{1}{2} s^2 \sum_{l \neq m} J(R_{lm}).$$

Легко убедиться, что последнюю формулу можно представить также в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P\tilde{s}_l P) &= P \left\{ E_0 + 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l a_l^+ a_l - \right. \\ &\left. - s \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) a_l^+ \left( 1 - \frac{a_m^+ a_m}{2s} \right) P_m (a_m - a_l) \right\} P. \quad (29.6.5) \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение операторы:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= E_0 + 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l a_l^+ a_l - \\ &\quad - s \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) a_l^+ \left( 1 - \frac{a_m^+ a_m}{2s} \right) (a_m - a_l), \\ \overline{\mathcal{H}}_D &= E_0 + 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l a_l^+ a_l - \\ &\quad - s \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) a_l^+ \left( 1 - \frac{a_m^+ a_m}{2s} \right) P_m (a_m - a_l). \end{aligned} \quad (29.6.6)$$

Тогда

$$\mathcal{H}(P\tilde{s}_l P) = P\mathcal{H}_D P = P\overline{\mathcal{H}}_D P. \quad (29.6.7)$$

Легко видеть, что оператор  $\mathcal{H}_D$  (а также оператор  $\overline{\mathcal{H}}_D$ ), действуя на дополнительное состояние, переводит его в дополнительное же состояние. Поэтому

$$P\mathcal{H}_D P = P\mathcal{H}_D,$$

$$P\overline{\mathcal{H}}_D P = P\overline{\mathcal{H}}_D,$$

и, следовательно, для произвольной функции  $f(\mathcal{H})$  имеют место формулы

$$f(P\mathcal{H}_D P) = Pf(\mathcal{H}_D),$$

$$f(P\overline{\mathcal{H}}_D P) = Pf(\overline{\mathcal{H}}_D).$$

В частности, согласно этим формулам и формуле (29.6.7), статистическую сумму можно представить в следующих двух эквивалентных видах:

$$Z = \text{Sp } P e^{-\beta \mathcal{H}_D},$$

$$Z = \text{Sp } P e^{-\beta \overline{\mathcal{H}}_D}. \quad (29.6.8)$$

Эти формулы являются абсолютно точными, но ими неудобно пользоваться при конкретных вычислениях, так как они содержат оператор проектирования  $P$ , исключающий дополнительные состояния.

Покажем, что с точностью до членов порядка  $e^{-\frac{\theta_c}{T}}$  во второй из формул (29.6.8) может быть опущен оператор проектирования  $P$ .

Рассмотрим, например, дополнительное состояние:

$$\Phi \dots n_j \dots = \frac{1}{\sqrt{n_j!}} (a_j^\dagger)^{n_j} \Phi_0, \quad n_j > 2s.$$

Легко видеть, что это состояние является собственным состоянием оператора  $\overline{\mathcal{H}}_D$ :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_D \Phi \dots n_j \dots &= \\ &= \left\{ E_0 + 2\mu_0 H_0^{(e)} n_j + s n_j \sum_{l \neq m} J(R_{e_m}) \right\} \Phi \dots n_j \dots \end{aligned}$$

Поэтому вклад состояния  $\Phi \dots n_j \dots$  ( $n_j > 2s$ ) в  $\text{Sp } e^{-\beta \overline{\mathcal{H}}_D}$  равен по порядку величины  $e^{-\beta J_0}$ . При низких температурах этот вклад экспоненциально мал.

Аналогично можно показать, что вклад любых дополнительных состояний при низких температурах экспоненциально мал и составляет по порядку величины  $e^{-\beta\Delta}$ , где  $\Delta > \frac{1}{4} J_0 s \gamma$  ( $\gamma$  — число ближайших соседей).

Таким образом, с точностью до членов порядка  $e^{-\beta\Delta}$ ,

$$Z = \text{Sp } e^{-\beta \overline{\mathcal{H}}_D}. \quad (29.6.9)$$

Что касается первой из формул (29.6.8), то в ней нельзя опускать оператор проектирования  $P$ . Действительно, для дополнительных состояний

$$\Phi \dots n_j \dots n_{j'} \dots = \frac{1}{\sqrt{n_j! n_{j'}!}} (a_j^+)^{n_j} (a_{j'}^+)^{n_{j'}} \Phi_0,$$

$$n_j > 2s, \quad n_{j'} > 2s$$

имеем

$$\begin{aligned} (\Phi \dots n_j \dots n_{j'} \dots, \overline{\mathcal{H}}_D \Phi \dots n_j \dots n_{j'} \dots) = \\ = E_0 - 2\mu_0 H_0^{(e)} (n_j + n_{j'}) + sJ(R_{jj'}) \times \\ \times \left\{ n_j \left(1 - \frac{n_j}{2s}\right) + n_{j'} \left(1 - \frac{n_{j'}}{2s}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Это выражение, а следовательно, и спектр оператора  $\overline{\mathcal{H}}_D$  неограничен снизу, так как при  $n_j, n_{j'} \rightarrow \infty$

$$(\Phi \dots n_j \dots n_{j'} \dots, \overline{\mathcal{H}}_D \Phi \dots n_j \dots n_{j'} \dots) \rightarrow \infty.$$

Поэтому, опуская оператор проектирования в первой формуле (29.6.8), мы получим расходящееся выражение

$$\text{Sp } e^{-\beta \overline{\mathcal{H}}_D} = \infty.$$

Вернемся к формуле (29.6.9). Входящий в нее оператор  $\overline{\mathcal{H}}_D$  (в отличие от оператора  $\mathcal{H}_D$ ) содержит оператор проектирования  $P_m$ , что затрудняет непосредственное использование этой формулы. Мы покажем, однако, что этот оператор может быть заменен эквивалентным ему оператором, не содержащим операторов проектирования  $P_m$ . Представим с этой целью оператор  $\overline{\mathcal{H}}_D$  в виде

$$\overline{\mathcal{H}}_D = \mathcal{H}_D + \mathcal{H}'_D,$$

где

$$\mathcal{H}'_D = -s \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) a_l^+ \left(1 - \frac{a_m^+ a_m}{2s}\right) (1 - P_m) (a_l - a_m).$$

Оператор  $\mathcal{H}'_D$  обладает очевидным свойством: если подействовать им на вектор физического состояния  $\Phi_{n_1, n_2, \dots}$  ( $n_i \leq 2s$ ), то мы получим нуль:

$$\mathcal{H}'_D \Phi_{n_1, n_2} = 0, \quad n_i \leq 2s.$$

Легко убедиться, что если одно из чисел  $n_i$  равно  $2s + 1$ , а остальные равны нулю, то в результате действия оператора  $\mathcal{H}'_D$  на вектор такого состояния мы также получим нуль

$$\mathcal{H}'_D \Phi_0 \dots n_i \dots 0 \dots = 0, \quad n_i = 2s + 1.$$

Поэтому справедливо соотношение

$$\overline{\mathcal{H}}_D \Phi_{n_1, n_2, \dots} = \mathcal{H}_D \Phi_{n_1, n_2, \dots}, \quad \sum_i n_i \leq 2s + 1.$$

Наконец, если общее число возбуждений равно  $2s + 2$ , то только при действии на векторы состояний вида

$$\Phi \dots 0 \dots n_p \dots 0 \dots = \frac{1}{V(2s+2)!} (a_p^+)^{2s+2} \Phi_0, \quad n_p = 2s + 2,$$

$$\Phi \dots 0 \dots n_p \dots n_r \dots 0 \dots = \frac{1}{V(2s+1)!} (a_p^+)^{2s+1} a_r^+ \Phi_0, \\ n_p = 2s + 1, \quad n_r = 1$$

оператор  $\mathcal{H}'_D$  дает отличный от нуля результат.

Легко видеть, что действие оператора  $\mathcal{H}'_D$  на эти векторы состояний эквивалентно действию оператора

$$\mathcal{H}_D^{(2s+2)} = \frac{1}{2(2s+1)!} \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) a_l^+ (a_m^+)^{2s+1} (a_m)^{2s+1} (a_l - a_m).$$

В самом деле,

$$\mathcal{H}'_D \Phi \dots 0 \dots n_p \dots 0 \dots = \\ = -\frac{1}{2} \sqrt{2s+2} \sum_{l \neq p} J(R_{lp}) \Phi \dots 0 \dots n_p \dots n_r \dots 0 \dots \\ n_p = 2s + 2, \quad n_r = 1,$$

и

$$\mathcal{H}_D^{(2s+2)} \Phi \dots 0 \dots n_p \dots 0 \dots = \\ = -\frac{1}{2} \sqrt{2s+2} \sum_{l \neq p} J(R_{lp}) \Phi \dots 0 \dots n_p \dots n_r \dots 0 \dots \\ n_p = 2s + 2, \quad n_r = 1.$$

т. е.

$$\mathcal{H}'_D \Phi \dots 0 \dots n_p \dots 0 \dots = \mathcal{H}_D^{(2s+2)} \Phi \dots 0 \dots n_p \dots 0 \dots$$

Аналогичное равенство справедливо для вектора состояния  $\Phi \dots 0 \dots n_p \dots n_r \dots 0 \dots$  ( $n_p = 2s + 1$ ,  $n_r = 1$ ):

$$\mathcal{H}'_D \Phi \dots 0 \dots n_p \dots n_r \dots 0 \dots = \mathcal{H}_D^{(2s+2)} \Phi \dots 0 \dots n_p \dots n_r \dots 0 \dots$$

Ясно, что если  $\sum_l n_l < 2s + 2$ , то

$$\mathcal{H}_D^{(2s+2)} \Phi \dots n_l \dots = 0.$$

Таким образом, действие оператора  $\overline{\mathcal{H}}_D$  на векторы состояний, описывающих не более чем  $2s + 2$  возбуждения, эквивалентно действию на них оператора  $\mathcal{H}_D + \mathcal{H}_D^{(2s+2)}$ :

$$\overline{\mathcal{H}}_D \Phi \dots n_l \dots = (\mathcal{H}_D + \mathcal{H}_D^{(2s+2)}) \Phi \dots n_l \dots, \quad \sum_l n_l \leq 2s + 2.$$

Мы рассмотрели состояния с общим числом возбуждений, не превосходящим  $2s + 2$ . Но аналогичным образом можно рассмотреть состояния с произвольным числом возбуждений. При этом нужно последовательно вводить операторы  $\mathcal{H}_D^{(2s+3)}$ ,  $\mathcal{H}_D^{(2s+4)}$ , ..., аналогичные оператору  $\mathcal{H}_D^{(2s+2)}$  и содержащие соответственно  $(2s + 3)$ ,  $(2s + 4)$ , ... операторов типа  $a_l^+$  и такое же число операторов типа  $a_l$ .

Бесконечная сумма этих операторов и оператора  $\mathcal{H}_D$  будет эквивалентна оператору  $\overline{\mathcal{H}}_D$ :

$$\overline{\mathcal{H}}_D \Phi \dots n_l \dots = \left( \mathcal{H}_D + \sum_{r=2}^{\infty} \mathcal{H}_D^{(2s+r)} \right) \Phi \dots n_l \dots$$

т. е.

$$\overline{\mathcal{H}}_D = \mathcal{H}_D + \sum_{r=2}^{\infty} \mathcal{H}_D^{(2s+r)}. \quad (29.6.10)$$

Это соотношение показывает, что формулу (29.6.9) можно представить в виде

$$Z = \text{Sp } e^{-\beta \left( \mathcal{H}_D + \sum_{r=2}^{\infty} \mathcal{H}_D^{(2s+r)} \right)}. \quad (29.6.11)$$



Оператор  $\overline{\mathcal{H}}_D$  мы будем называть эффективным гамильтонианом ферромагнетика. Заметим, что входящая в него бесконечная сумма операторов  $\sum_{r=2}^{\infty} \mathcal{H}_D^{(2s+r)}$  имеет отличные от нуля матричные элементы только между дополнительными состояниями.

Формула (29.6.11) принципиально решает поставленную в начале этого раздела задачу, а именно, она сводит вычисление следа матриц, содержащих операторы спинов атомов  $S_j$ , к вычислению следа матриц, содержащих более простые бозевские операторы  $a_l^+$ ,  $a_l$ .

Для дальнейшего применения формул (29.6.6) удобно ввести операторы испускания и поглощения магнонов  $a^+(\mathbf{k})$  и  $a(\mathbf{k})$ , которые мы определим как преобразования Фурье операторов  $a_l^+$  и  $a_l$ :

$$\begin{aligned} a_l^+ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}R_l} a^+(\mathbf{k}), \\ a_l &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}R_l} a(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (29.6.12)$$

Из перестановочных соотношений (29.1.2) для операторов  $a_l^+$ ,  $a_l$  вытекают перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= [a^+(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = 0 \end{aligned} \quad (29.6.13)$$

для операторов  $a(\mathbf{k})$ ,  $a^+(\mathbf{k}')$ .

Используя разложение (29.6.12), можно выразить эффективный гамильтониан  $\overline{\mathcal{H}}_D$  через операторы испускания и поглощения магнонов:

$$\overline{\mathcal{H}}_D = E_0 + \mathcal{H}_0 + \overline{\mathcal{H}}_1, \quad \overline{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}_1 + \sum_{r=2}^{\infty} \mathcal{H}_D^{(2s+r)}, \quad (29.6.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \\ \mathcal{H}_1 &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \times \\ &\times \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) a^+(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_3) a(\mathbf{k}_4) \end{aligned} \quad (29.6.15)$$

и величины  $\varepsilon_s(\mathbf{k})$  и  $\Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$  определяются формулами

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = 2\mu_0 H_0^{(e)} + s(J(0) - J(\mathbf{k})),$$

$$\Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) =$$

$$= \frac{1}{4} \{J(\mathbf{k}_1) + J(\mathbf{k}_2) - J(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) - J(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\}, \quad (29.6.16)$$

$$J(\mathbf{k}) = \sum_m J(R_{lm}) e^{i\mathbf{k}R_{lm}}.$$

Эти выражения вместе с перестановочными соотношениями (29.6.13) показывают, что оператор  $\mathcal{H}_0$  представляет собой гамильтониан свободных магнов, а  $a(\mathbf{k})$  и  $a^+(\mathbf{k})$  — операторы поглощения и испускания магнона с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и энергией  $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ .

Оператор  $\mathcal{H}_1$ , содержащий произведения четырех операторов  $a(\mathbf{k})$ ,  $a^+(\mathbf{k})$ , представляет собой гамильтониан обменного взаимодействия магнов.

Явных выражений для оператора  $\mathcal{H}_D^{(2s+r)}$  мы приводить здесь не будем, а заметим лишь, что  $\mathcal{H}_D^{(2s+r)}$  содержит произведения  $2s+r$  операторов типа  $a(\mathbf{k})$  и столько же операторов типа  $a^+(\mathbf{k})$ . Поэтому оператор  $\mathcal{H}_D^{(2s+r)}$  описывает процессы взаимодействия, в которых участвует  $2(2s+r)$  магнов.

Заметим, что выражение для  $\varepsilon_s(\mathbf{k})$  переходит в известное уже нам выражение для энергии магнона (в пренебрежении энергией магнитной анизотропии и энергией магнитного дипольного взаимодействия). При  $ak \ll 1$  энергия магнона равна

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = 2\mu_0 H_0^{(e)} + sJ_0(ak)^2, \quad (29.6.17)$$

где  $J_0$  — значение обменного интеграла между ближайшими соседями.

Легко видеть, что величина  $\Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$  (она называется амплитудой обменного рассеяния магнов) обращается в нуль, если  $\mathbf{k}_3 = 0$  либо  $\mathbf{k}_4 = 0$ . Это значит, что взаимодействие между длинноволновыми возбуждениями является слабым. Отметим, однако, что при  $ka \sim 1$  взаимодействие между магнонами отнюдь не является слабым. Только в предельном случае больших спинов  $s \gg 1$ , как видно из формул (30.6.16), это взаимодействие будет слабым при всех значениях  $\mathbf{k}$ .

Отметим, что  $\Phi(k_1, k_2; k_3, k_4) \neq \Phi(k_3, k_4; k_1, k_2)$ . Благодаря этому оператор  $\mathcal{H}_I$  (так же как и оператор  $\mathcal{H}_D$ ) не является эрмитовым. Неэрмитовость  $\mathcal{H}_I$  однако не проявляется, если не учитывать дополнительных состояний, вклад которых в статистическую сумму экспоненциально мал при  $T \ll T_c$ .

### § 30. Термодинамический потенциал ферромагнетика

1. Разложение термодинамического потенциала по степеням температуры. Полученная в § 20 формула для поправки к термодинамическому потенциалу  $\Omega_1$  справедлива, строго говоря, при  $s \gg 1$ , так как только в этом случае оператор  $\mathcal{H}_{ss}$  можно рассматривать как малое возмущение. Покажем теперь, что если отбросить предположение о величине  $s$ , но считать по-прежнему, что  $T \ll T_c$ , то мы получим для поправки к термодинамическому потенциалу выражение, отличающееся от выражения (20.4.3) только численным множителем порядка единицы (зависящим от величины спина) [1].

С этой целью мы обратимся к формуле (29.6.9), выражающей статистическую сумму ферромагнетика через операторы испускания и поглощения магнонов и, интересуясь областью низких температур, поставим вопрос о разложении термодинамического потенциала  $\Omega$ ,

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad (30.1.1)$$

в ряд по степеням  $T/\theta_c$ .

Замечая, что  $\overline{\mathcal{H}}_D = \mathcal{H}_0 + \overline{\mathcal{H}}_I$ , где  $\mathcal{H}_0$  и  $\overline{\mathcal{H}}_I$  определяются формулами (29.6.14), (29.6.15), перепишем оператор  $e^{-\beta \overline{\mathcal{H}}_D}$  в виде

$$\begin{aligned} e^{-\beta \overline{\mathcal{H}}_D} &= e^{-\beta \mathcal{H}_0} - \int_0^\beta d\beta' e^{(\beta' - \beta) \mathcal{H}_0} \overline{\mathcal{H}}_I e^{\beta' \overline{\mathcal{H}}_D} = \\ &= e^{-\beta \mathcal{H}_0} - \int_0^\beta d\beta' e^{-\beta' \overline{\mathcal{H}}_D} \overline{\mathcal{H}}_I e^{(\beta' - \beta) \mathcal{H}_0}. \end{aligned}$$

Под знаком следа можно циклически переставлять операторы; поэтому

$$\begin{aligned} \text{Sp}(e^{-\beta \overline{\mathcal{H}}_D} - e^{-\beta \mathcal{H}_0}) &= \\ &= -\beta \text{Sp} e^{-\beta \mathcal{H}_0} \overline{\mathcal{H}}_I + \text{Sp} \int_0^\beta d\beta' \int_0^{\beta'} d\beta'' e^{(\beta'' - \beta) \mathcal{H}_0} \overline{\mathcal{H}}_I e^{-\beta'' \overline{\mathcal{H}}_D} \overline{\mathcal{H}}_I. \end{aligned}$$

Производя в последнем члене интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \text{Sp} (e^{-\beta \bar{\mathcal{H}}_D} - e^{-\beta \mathcal{H}_0}) &= \\ &= -\beta \text{Sp} \left\{ \bar{\mathcal{H}}_1 e^{-\beta \mathcal{H}_0} - \int_0^\beta d\beta' \left(1 - \frac{\beta'}{\beta}\right) \bar{\mathcal{H}}_1 e^{-\beta' \bar{\mathcal{H}}_D} \bar{\mathcal{H}}_1 e^{(\beta' - \beta) \mathcal{H}_0} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, термодинамический потенциал  $\Omega$  может быть представлен в виде

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{1}{\beta} \ln (1 - \beta \eta), \quad (30.1.2)$$

где

$$\Omega_0 = -\frac{1}{\beta} \ln \text{Sp} e^{-\beta \mathcal{H}_0}$$

и

$$\eta = \left\langle \bar{\mathcal{H}}_1 \left\{ 1 - \int_0^\beta d\beta' \left(1 - \frac{\beta'}{\beta}\right) e^{-\beta' \bar{\mathcal{H}}_D} \bar{\mathcal{H}}_1 e^{\beta' \mathcal{H}_0} \right\} \right\rangle_0 \quad (30.1.3)$$

(скобки  $\langle \dots \rangle_0$  означают усреднение с равновесной матрицей плотности невзаимодействующих частиц,  $\langle A \rangle_0 = \text{Sp} A e^{\beta(\Omega_0 - \mathcal{H}_0)}$ ).

Первое слагаемое в (30.1.2) определяет термодинамический потенциал идеального газа магнов, а второе — поправки к термодинамическому потенциалу, обусловленные обменным взаимодействием. Интересуясь в дальнейшем только поправками, пропорциональными  $T^5$ , можно заменить  $\ln(1 - \beta \eta)$  на  $-\beta \eta$ .

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega, \quad \Delta \Omega = \eta. \quad (30.1.4)$$

Покажем, что в области низких температур,  $T \ll T_c$ , справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathcal{H}}_1 A_1 \bar{\mathcal{H}}_1 \dots \bar{\mathcal{H}}_1 A_m \bar{\mathcal{H}}_1 \rangle_0 &\approx \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{12} (\Phi_{12}, \bar{\mathcal{H}}_1 A_1 \bar{\mathcal{H}}_1 \dots \bar{\mathcal{H}}_1 A_m \bar{\mathcal{H}}_1 \Phi_{12}) \bar{n}_1 \bar{n}_2, \end{aligned} \quad (30.1.5)$$

где  $A_1, A_2, \dots$  — некоторые операторы, приводящиеся к диагональному виду вместе с числами заполнения  $n_k$  и  $\Phi_{12}$  — вектор состояния, содержащего только два магнона с волновыми векторами  $k_1$  и  $k_2$ :

$$\Phi_{12} = a_1^+ a_2^+ \Phi_0, \quad a_i \equiv a(k_i).$$

Чтобы доказать это соотношение, заметим, что для вычисления выражения, стоящего в левой части равенства (30.1.5), необходимо найти диагональные матричные элементы:

$$\langle \{n_i\} | \overline{\mathcal{H}}_1 A_1 \overline{\mathcal{H}}_1 \dots \overline{\mathcal{H}}_1 A_m \overline{\mathcal{H}}_1 | \{n_i\} \rangle \equiv \mathfrak{M}_{\{n_i\}},$$

где  $|\{n_i\}\rangle$  служит для обозначения вектора состояния  $\Phi_{n_1 n_2 \dots}$ .

Матричный элемент  $\mathfrak{M}_{\{n_i\}}$  в свою очередь сводится к сумме произведений матричных элементов типа

$$\langle \{n_i\} | \overline{\mathcal{H}}_1 | \{n'_i\} \rangle,$$

где  $n'_i$  — числа заполнения в промежуточных состояниях.

Предположим сначала, что  $\overline{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}_1$ . Тогда в силу структуры оператора  $\mathcal{H}_1$  матричные элементы  $\mathcal{H}_1$  пропорциональны  $\sqrt{n_1 n_2 (n_3 + 1) (n_4 + 1)}$  (мы считаем, что  $n'_1 = n_1 - 1$ ,  $n'_2 = n_2 - 1$ ,  $n'_3 = n_3 + 1$ ,  $n'_4 = n_4 + 1$ ). Если, например,  $\mathfrak{M}_{\{n_i\}}$  содержит оператор  $\mathcal{H}_1$  два раза, то он будет содержать числа заполнения в виде

$$\langle \{n_i\} | \mathcal{H}_1 A \mathcal{H}_1 | \{n_i\} \rangle \sim n_1 n_2 (n_3 + 1) (n_4 + 1).$$

При усреднении матричных элементов числа заполнения  $n_i$  заменяются их средними значениями  $\bar{n}_i$ , определенными распределением Планка

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_i} - 1}, \quad \varepsilon_i \equiv \varepsilon_s(\mathbf{k}_i).$$

Так как по переменным  $\mathbf{k}_i$  происходит интегрирование, то в области низких температур все множители типа  $(\bar{n}_i + 1)$  в матричных элементах могут быть заменены единицей (это значит, что в промежуточных состояниях основную роль играют магны, волновой вектор которых равен по порядку величины  $1/a$ , а энергия  $\varepsilon \sim J_0$ ). Отсюда следует, что в области низких температур необходимо выбирать такие промежуточные состояния, которые приводят к множителям типа  $n + 1$ , а не  $n$ . Иными словами, схема виртуальных переходов, существенных при  $T \ll \theta_c$  должна иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, \dots\} \rightarrow \\ & \rightarrow \{n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 + 1, n_5, n_6, \dots\} \rightarrow \\ & \rightarrow \{n_1 - 1, n_2 - 1, n_3, n_4, n_5 + 1, n_6 + 1, \dots\} \rightarrow \dots \\ & \dots \rightarrow \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, \dots\}. \end{aligned}$$

Таким образом, при вычислении матричного элемента  $\mathcal{M}_{\{n_i\}}$  можно считать, что начальное и конечное состояния имеют вид

$$\Phi_{\dots 0 \dots n_1 \dots n_2 \dots 0 \dots} = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} \Phi_0.$$

откуда и следует формула (30.1.5) (множитель  $1/2$  возникает в этой формуле потому, что в сумме учитываются оба тождественных состояния  $\Phi_{12}$  и  $\Phi_{21}$ ).

Формула (30.1.5) выведена в предположении, что  $\mathcal{H}_I = \overline{\mathcal{H}}_I$ . Поэтому нам нужно выяснить, какой вклад вносит бесконечная сумма  $\sum_{r=2}^{\infty} \mathcal{H}_D^{(2s+r)}$  в левую часть равенства (30.1.5). Покажем, что этим вкладом можно пренебречь в области низких температур. Действительно,  $2(2s+2)$  — магنونным процессам, описываемым гамильтонианом  $\mathcal{H}_D^{(2s+2)}$ , соответствует статистический вес  $k^{3[2(2s+2)-1]}$ . Отсюда следует, что при  $T \ll \theta_c$  эти процессы не могут приводить к поправкам более низкого порядка, чем  $T^{\frac{3}{2}(4s+3)}$  (напомним, что  $k \sim T^{1/2}$ ). Поэтому даже для спина  $s = \frac{1}{2}$  эти поправки не могут быть более низкого порядка чем  $T^{15/2}$ , в то время как поправки, связанные с  $\mathcal{H}_I$ , пропорциональны  $T^5$ .

Таким образом, согласно (30.1.5), (30.1.3), выражение для  $\Delta\Omega$  может быть представлено в виде

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2} \sum_{12} \overline{n_1 n_2} \left( \Phi_{12}, \mathcal{H}_I \left\{ 1 - \int_0^{\beta} d\beta' \left( 1 - \frac{\beta'}{\beta} \right) e^{-\beta' \mathcal{H}_I} \mathcal{H}_I e^{\beta' \mathcal{H}_I} \right\} \Phi_{12} \right). \quad (30.1.6)$$

Как уже указывалось, основной вклад в промежуточные состояния вносят магныны с энергией порядка  $J_0$ . Поэтому в интеграл по  $\beta'$  в последней формуле главный вклад вносят такие значения  $\beta'$ , для которых  $\beta' \leq \frac{1}{J_0}$ . Так как  $\beta \gg \frac{1}{J_0}$ , то в формуле (30.1.6) можно пренебречь величиной  $\beta'/\beta$  по сравнению с 1 и заменить верхний предел интегрирования  $\beta$

на  $\infty$ . В результате мы получим

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2} \sum_{12} \bar{n}_1 \bar{n}_2 (\Phi_{12}, \mathcal{H}_I \{1 - (\mathcal{H}_D - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + i\xi)^{-1} \mathcal{H}_I\} \Phi_{12}), \quad (30.1.7)$$

где  $\xi \rightarrow +0$ . (Правило обхода в операторе  $\mathcal{H}_D - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$  в формуле (30.1.7) является несущественным, так как  $J_0 \gg \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sim T$ ).

Вводя вектор состояния

$$\Psi_{12} = \{1 - (\mathcal{H}_D - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + i\xi)^{-1} \mathcal{H}_I\} \Phi_{12}, \quad (30.1.8)$$

перепишем формулу (30.1.7) в виде

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2} \sum_{12} \bar{n}_1 \bar{n}_2 a_{12}, \quad (30.1.9)$$

где величина

$$a_{12} = (\Phi_{12}, \mathcal{H}_I \Psi_{12}) \quad (30.1.10)$$

представляет собой амплитуду рассеяния двух магнов на нулевой угол.

Таким образом, вычисление поправки к термодинамическому потенциалу, обусловленной обменным взаимодействием магнов, сводится к чисто динамической задаче определения амплитуды рассеяния магнов.

**2. Уравнения, определяющие амплитуду рассеяния двух магнов.** Переходя к решению этой задачи, заметим предварительно, что вектор состояния  $\Psi_{12}$ , определяющий амплитуду  $a_{12}$  рассеяния двух магнов, удовлетворяет, согласно (30.1.8), уравнению

$$(\mathcal{H}_D - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + i\xi) \Psi_{12} = i\xi \Phi_{12}. \quad (30.2.1)$$

Таким образом, при  $\xi \rightarrow 0$   $\Psi_{12}$  удовлетворяет уравнению Шредингера с учетом обменного взаимодействия между магнами.

Гамильтониан  $\mathcal{H}_D$  имеет, согласно (29.6.15), следующий вид:

$$\mathcal{H}_D = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_s(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \\ \mathcal{H}_I &= \frac{1}{N} \sum_{1234} \Phi(12; 34) a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4), \\ \varepsilon_s(\mathbf{k}) &= 2\mu_0 H_0^{(e)} + s(J(0) - J(\mathbf{k})), \\ \Phi(12, 34) &= \frac{1}{4} \{J(\mathbf{k}_1) + J(\mathbf{k}_2) - J(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2) - J(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1)\}. \end{aligned} \quad (30.2.2)$$

Так как  $\Phi_{12} = a_1^\dagger a_2^\dagger \Phi_0$  и гамильтониан  $\mathcal{H}_D$  сохраняет число частиц, то

$$\Psi_{12} = \sum_{1'2'} \Psi_{12}(1', 2') a_1^\dagger a_2^\dagger \Phi_0, \quad (30.2.3)$$

где  $\Psi_{12}(1', 2') = \Psi_{12}(2', 1')$  — искомая волновая функция двух магнов. Пользуясь перестановочными соотношениями для операторов  $a^\dagger, a$ , легко убедиться, что

$$\mathcal{H}_D \Psi_{12} = \sum_{1'2'} a_1^\dagger a_2^\dagger \Phi_0 \left\{ (\varepsilon_{1'} + \varepsilon_{2'}) \Psi_{12}(1', 2') + \right. \\ \left. + \frac{2}{N} \sum_{3'4'} \Phi(1'2'; 3'4') \Delta(1' + 2' - 3' - 4') \Psi_{12}(3', 4') \right\}$$

(напомним, что мы пользуемся обозначениями  $1 \equiv k_1, 2 \equiv k_2, 1 + 2 \equiv k_1 + k_2$  и т. д.).

Подставляя это выражение в (30.2.1), найдем

$$(\varepsilon_{1'} + \varepsilon_{2'} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + i\xi) \Psi_{12}(1', 2') + \frac{2}{N} \sum_{3'4'} \Phi(1'2'; 3'4') \times \\ \times \Delta(1' + 2' - 3' - 4') \Psi_{12}(3', 4') = i\xi \Psi_{12}^0(1', 2'), \quad (30.2.4)$$

где

$$\Psi_{12}^0(1', 2') = \frac{1}{2} \{ \Delta(k_1 - k_1') \Delta(k_2 - k_2') + \Delta(k_1 - k_2') \Delta(k_2 - k_1') \}.$$

Будем в дальнейшем учитывать обменное взаимодействие только между ближайшими соседями. В этом случае

$$J(k) = J_0 \sum_{\rho} e^{ik\rho}$$

(суммирование здесь производится по векторам ближайших соседей) и функция  $\Phi(12, 34)$  приобретает вид

$$\Phi(12; 34) = \frac{J_0}{4} \sum_{\rho} (e^{ik_1\rho} + e^{ik_2\rho}) (1 - e^{-ik_3\rho}). \quad (30.2.5)$$

Вводя обозначение

$$F_{\rho}(12; 1' + 2') = -\frac{1}{2s} \sum_{3'} \left( 1 - e^{-ik_3'\rho} \right) \Psi_{12}(k_3', k_1' + k_2' - k_3'), \quad (30.2.6)$$



представим уравнение (30.2.4) в виде

$$(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + i\xi) \Psi_{12}(1', 2') - \\ - \frac{sJ_0}{N} \sum_{\rho} \left( e^{ik_1'\rho} + e^{ik_2'\rho} \right) F_{\rho}(12; 1' + 2') = i\xi \Psi_{12}^0(1', 2'). \quad (30.2.7)$$

Разделив это уравнение на  $\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + i\xi$ , легко показать, что

$$2sF_{\rho}(12; 1' + 2') - \sum_{\rho'} A_{\rho\rho'} F_{\rho'}(12; 1' + 2') = \\ = \frac{1}{2} (e^{-ik_1\rho} + e^{-ik_2\rho} - 2), \quad (30.2.8)$$

где

$$A_{\rho\rho'}(12; 1'' + 2'') = \frac{sJ_0}{N} \sum_{1'} \frac{(1 - e^{ik_1'\rho}) (e^{ik_1\rho'} + e^{i(k_1+k_2-k_1')\rho})}{\varepsilon_1' + \varepsilon_{1''+2''-1'} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + i\xi}.$$

Выразим через величины  $F_{\rho}$  амплитуду рассеяния  $a_{12}$ .

Из уравнения (30.2.1) следует:

$$(\Phi_{12}, \mathcal{H}_I \Psi_{12}) = i\xi - i\xi (\Phi_{12}, \Psi_{12}). \quad (30.2.9)$$

Но, согласно (30.2.3),

$$(\Phi_{12}, \Psi_{12}) = 2\Psi_{12}(1, 2).$$

Замечая, что  $\Psi_{12}^0(1, 2) = 1/2$ , найдем из (30.2.7)

$$\Psi_{12}(1, 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2sJ_0}{i\xi N} \sum_{\rho} (e^{ik_1\rho} + e^{ik_2\rho}) F_{\rho}(12; 1 + 2).$$

Наконец, подставляя это выражение в (30.2.9), получим

$$a_{12} = (\Phi_{12}, \mathcal{H}_I \Psi_{12}) = - \frac{2sJ_0}{N} \sum_{\rho} (e^{ik_1\rho} + e^{ik_2\rho}) F_{\rho}(12; 1 + 2). \quad (30.2.10)$$

Таким образом, для нахождения амплитуды рассеяния необходимо знать только величину  $F_{\rho} = F_{\rho}(12; 1 + 2)$ , которая удовлетворяет, согласно (30.2.8), уравнению

$$2sF_{\rho} - \sum_{\rho'} A_{\rho\rho'} F_{\rho'} = \frac{1}{2} (e^{-ik_1\rho} + e^{-ik_2\rho} - 2), \quad (30.2.11)$$

где

$$A_{\rho\rho'} = e^{i\frac{1}{2}q\rho'} - e^{-i\frac{1}{2}q(\rho-\rho')} \frac{1}{2}(B_{\rho+\rho'} + B_{\rho-\rho'}), \quad (30.2.12)$$

$$\begin{aligned} B_{\rho} &= B_{-\rho} = \\ &= \frac{2sJ_0}{N} \sum_k \frac{e^{ik\rho}}{\varepsilon_s\left(k + \frac{1}{2}q\right) + \varepsilon_s\left(k - \frac{1}{2}q\right) - \varepsilon_s(k_1) - \varepsilon_s(k_2) + i\xi}, \\ &\quad q = k_1 + k_2. \end{aligned}$$

Система алгебраических уравнений (30.2.11) может быть упрощена, если ввести вместо  $F_{\rho}$  величины

$$G_{\rho} = \frac{1}{2} \left\{ e^{\frac{1}{2}iq\rho} F_{\rho} + e^{-\frac{1}{2}iq\rho} F_{-\rho} \right\}, \quad (30.2.13)$$

удовлетворяющие, как следует из (30.2.11), (30.2.12), уравнениям

$$\begin{aligned} 2sG_{\rho} - \frac{1}{2} \sum_{\rho'} (B_{\rho-\rho'} + B_{\rho+\rho'}) G_{\rho'} + \cos \frac{1}{2}q\rho \sum_{\rho'} B_{\rho'} G_{\rho'} = \\ = \cos \frac{1}{2}(k_1 - k_2)\rho - \cos \frac{1}{2}q\rho. \end{aligned} \quad (30.2.14)$$

Определив  $G_{\rho}$ , легко, согласно (30.2.10), (30.2.13), найти амплитуду  $a_{12}$ :

$$a_{12} = -\frac{4sJ_0}{N} \sum_{\rho} G_{\rho} \cos \frac{1}{2}(k_1 - k_2)\rho. \quad (30.2.15)$$

**3. Амплитуда рассеяния магнонов в области малых импульсов.** Для нахождения величины  $\Delta\Omega$  при  $T \ll \theta_c$ , как видно из формулы (30.1.9), нужно знать поведение  $a_{12}$  при  $k_1 a \ll 1$ ,  $k_2 a \ll 1$ . В этом случае система уравнений (30.2.14) упрощается:

$$2sG_{\rho} + \sum_{\rho'} (B_{\rho'}^0 - B_{\rho-\rho'}^0) G_{\rho'} = \frac{1}{2}(k_1\rho)(k_2\rho), \quad (30.3.1)$$

где

$$B_{\rho}^0 = \frac{sJ_0}{N} \sum_k \frac{e^{ik\rho}}{\varepsilon_s(k) - \varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_s(0). \quad (30.3.2)$$

Замечая, что  $\varepsilon_s(k) - \varepsilon_0 = -J_0 \sum_{\rho} (e^{ik\rho} - 1)$ , имеем, очевидно,

$$\sum_{\rho'} (B_{\rho'}^0 - B_{\rho-\rho'}^0) = 0, \quad \rho \neq 0. \quad (30.3.3)$$

Дальнейшие вычисления мы произведем для простой кубической решетки. Из величин  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\rho$  в этом случае можно построить только два инварианта:

$$(k_1 k_2) a^2, z(\rho) = (k_1 \rho)(k_2 \rho) - \frac{1}{3} a^2 (k_1 k_2) \quad (30.3.4)$$

(мы учли, что  $\rho^2 = a^2$ ). Поэтому решение уравнения (30.3.1) должны иметь вид

$$G_\rho = Az(\rho) + A'a^2(k_1 k_2), \quad (30.3.5)$$

где  $A$ ,  $A'$  — некоторые постоянные.

Замечая, что  $\sum_{\rho} z(\rho) = 0$  и используя (30.3.5), получим после суммирования уравнения (30.3.1) по  $\rho$

$$A' = \frac{1}{12s} \quad (30.3.6)$$

(мы учли, что в простой кубической решетке у каждого атома имеется шесть ближайших соседей).

Найдем теперь величину  $A$ . Согласно (30.3.3) для простой кубической решетки

$$\sum_{\rho'} (B_{\rho'}^0 - B_{\rho-\rho'}^0) = \sum_{\rho'} (B_{\rho'}^0 - B_{\rho}^0) = 0, \quad (30.3.7)$$

так как для всех ближайших соседей величины  $B_{\rho}^0$  одинаковы.

Подставляя (30.3.5) в (30.3.1) и учитывая (30.3.7), получим

$$\sum_{\rho'} B_{\rho+\rho'}^0 z(\rho') = \Gamma z(\rho), \quad (30.3.8)$$

где

$$\Gamma = 2s - \frac{1}{2A}. \quad (30.3.9)$$

Так как  $z(\rho)$  — известная величина, то уравнение (30.3.8) определяет  $\Gamma$  и тем самым искомую величину  $A$ .

Для простой кубической решетки

$$B_{\rho}^0 \equiv B_{j_1 j_2 j_3}^0 = - \int_{-\pi}^{\pi} dx_1 \int_{-\pi}^{\pi} dx_2 \int_{-\pi}^{\pi} dx_3 Q^{-1} e^{i(j_1 x_1 + j_2 x_2 + j_3 x_3)}, \quad (30.3.10)$$

где

$$Q = 16\pi^3 (3 - \cos x_1 - \cos x_2 - \cos x_3), \quad j_l = \frac{\rho_l}{a}.$$

Полагая в формуле (30.3.8)  $\rho = (a, 0, 0)$ , получим

$$\Gamma z(1, 0, 0) = B_{200}^0 z(1, 0, 0) + B_{000}^0 z(1, 0, 0) + \\ + 2B_{110}^0 [z(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)], \quad z(j_1, j_2, j_3) \equiv z(\rho).$$

Замечая, что  $z(1, 0, 0) + z(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = 0$ , найдем

$$\Gamma = B_{200}^0 + B_{000}^0 - 2B_{110}^0. \quad (30.3.11)$$

Согласно определению  $B_p^0$  величины  $B_{200}^0$  и  $B_{000}^0$  можно выразить через  $B_{100}^0$  и  $B_{110}^0$ :

$$B_{200}^0 = 5B_{100}^0 - 4B_{110}^0 - \frac{1}{6},$$

$$B_{000}^0 = B_{100}^0 + \frac{1}{6}.$$

Подставляя эти выражения в (30.3.11), получим

$$\Gamma = 6(B_{100}^0 - B_{110}^0), \quad (30.3.12)$$

или

$$\Gamma = 6 \int_{-\pi}^{\pi} dx_1 \int_{-\pi}^{\pi} dx_2 \int_{-\pi}^{\pi} dx_3 \cos x_1 (1 - \cos x_2) Q^{-1}.$$

Приведем значения величин  $\Gamma$  и  $B_{100}^0$ :

$$\Gamma \approx 0,2, \quad B_{100}^0 \approx 0,086. \quad (30.3.13)$$

Таким образом, в области малых значений  $k_1$  и  $k_2$ , решенные системы уравнений (30.3.1) имеет вид

$$G_p = \frac{1}{12s} a^2 (k_1 k_2) + \frac{1}{2} (2s - \Gamma)^{-1} \left\{ (k_1 \rho)(k_2 \rho) - \frac{1}{3} a^2 (k_1 k_2) \right\}. \quad (30.3.14)$$

Перейдем теперь к нахождению асимптотического поведения амплитуды рассеяния  $a_{12}$  при  $k_1 a \ll 1$ ,  $k_2 a \ll 1$ .

Последняя связана с величиной  $G_p$  соотношением

$$a_{12} = -\frac{4sJ_0}{N} \sum_p G_p \cos \frac{1}{2} (k_1 - k_2) \rho.$$

Подставляя сюда (30.3.14), найдем

$$a_{12} = -\frac{2J_0}{N} a^2 (k_1 k_2). \quad (30.3.15)$$

Как мы видели выше, знание  $a_{12}$  позволяет определить поправку к термодинамическому потенциалу  $\Delta\Omega$ , обусловленную

обменным взаимодействием магнонов. Однако формула (30.3.15) для  $a_{12}$ , справедливая с точностью до членов порядка  $k^2$ , обращает  $\Delta\Omega$  в нуль. Поэтому для нахождения  $\Delta\Omega$  необходимо знать  $a_{12}$  с точностью до  $k^4$ . С этой целью представим амплитуду рассеяния  $a_{12}$  в виде

$$a_{12} = -\frac{4sJ_0}{N} \sum_{\rho} G_{\rho} \left\{ \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \rho - \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho \right\} - \frac{4sJ_0}{N} \sum_{\rho} G_{\rho} \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho. \quad (30.3.16)$$

При вычислении первого члена в этом выражении можно, очевидно, воспользоваться асимптотическим выражением (30.3.14) для  $G_{\rho}$ . Используя (30.3.14), легко получить

$$-\frac{4sJ_0}{N} \sum_{\rho} G_{\rho} \left\{ \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \rho - \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho \right\} = \frac{2sJ_0}{N} \left\{ \frac{1}{6s} a^4 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2 + A \sum_{\rho} z(\rho) (\mathbf{k}_1 \rho) (\mathbf{k}_2 \rho) \right\}$$

с точностью до членов, пропорциональных  $k^4$  включительно. Учитывая, что эта величина будет в дальнейшем, согласно (30.1.9), интегрироваться по направлениям векторов  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ , мы можем заменить ее следующим выражением:

$$-\frac{4sJ_0}{N} \sum_{\rho} G_{\rho} \left\{ \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \rho - \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho \right\} \rightarrow -\frac{4sJ_0}{9N} a^4 k_1^2 k_2^2 \left( 2A + \frac{1}{4s} \right). \quad (30.3.17)$$

Для нахождения второго члена в формуле (30.3.16) необходимо воспользоваться точными уравнениями для величин  $G_{\rho}$ . Умножая уравнения (30.2.14) на  $\cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho$  и суммируя по  $\rho$ , получим

$$2s \sum_{\rho} G_{\rho} \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho = \sum_{\rho} \left\{ \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \rho - \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho \right\} \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho + \sum_{\rho} \cos \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho \sum_{\rho'} B_{\rho+\rho'} G_{\rho'}.$$

Легко проверить, используя определения (30.2.12), (30.2.2) величин  $B_\rho$ ,  $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ , что

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} B_{\rho+\rho'} \cos \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho &= \\ &= B_{\rho'} \sum_{\rho} \cos \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \rho \cos \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2s \sum_{\rho} G_{\rho} \cos \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho &= \\ = \left\{ \sum_{\rho} \left[ \cos \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \rho - \cos \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho \right] \cos \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + \sum_{\rho} B_{\rho} G_{\rho} \right\}. \end{aligned}$$

Так как первая фигурная скобка в этом выражении пропорциональна  $k^2$ , то для вычисления  $2s \sum_{\rho} G_{\rho} \cos \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho$  с точностью до членов, пропорциональных  $k^4$ , достаточно воспользоваться формулой (30.3.14) для  $G_{\rho}$ . Учитывая, что величина  $a_{12}$  при вычислении  $\Delta\Omega$  интегрируется по углам, определяющим направление векторов  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ , можно произвести замену

$$2s \sum_{\rho} G_{\rho} \cos \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rho \rightarrow \frac{1}{4} a^4 k_1^2 k_2^2 \left( -\frac{1}{4} + \frac{B_{100}}{2s} \right). \quad (30.3.18)$$

Подставляя, наконец, (30.3.17), (30.3.18) в (30.3.16), получим окончательно

$$a_{12} \rightarrow -\frac{J_0}{6N} a^4 k_1^2 k_2^2 Q(s), \quad (30.3.19)$$

где

$$Q(s) = \frac{8}{3} \cdot \frac{s}{2s - \Gamma} - \frac{1}{3} + \frac{2B_{100}}{s}. \quad (30.3.20)$$

Заметим, что

$$Q(\infty) = 1.$$

Подстановка (30.3.19) в (30.1.9) приводит к следующему выражению для поправки к термодинамическому потенциалу, обусловленной обменным взаимодействием магнов:

$$\Delta\Omega = Q(s) \Omega_1, \quad (30.3.21)$$

где  $\Omega_1$  определяется формулой (21.4.3),

$$\Omega_1 = -\frac{3\pi}{4s} NT \left( \frac{T}{4\pi s J_0} \right)^4 Z_{s/2}^2 \left( \frac{\epsilon_0}{T} \right).$$

Эта формула определяет поправку к термодинамическому потенциалу, обусловленную обменным взаимодействием магнов в предположении, что  $T \ll T_c$ . Что касается величины спина атома  $s$ , то, как уже указывалось, он может быть произвольным.

Мы видим, что температурная зависимость величин  $\Omega_1$  и  $\Delta\Omega$  одинакова: в отсутствие стороннего магнитного поля обе величины пропорциональны  $T^5$ . Различие между  $\Omega_1$  и  $\Delta\Omega$  определяется только численным множителем  $Q(s)$ , зависящим от спина  $s$ . Величина  $Q(s)$  достигает максимального значения, приблизительно равного 1,6 при  $s = 1/2$ .

В отсутствие стороннего магнитного поля величина  $\Delta\Omega$  приводит к следующим поправкам к спиновой теплоемкости и плотности магнитного момента:

$$\begin{aligned} \Delta c_s &= 15\pi \frac{Q(s)}{s} \zeta^2(5/2) \left( \frac{T}{4\pi s J_0} \right)^4, \\ \Delta M &= -\frac{3\pi}{2} \frac{Q(s)}{s} \frac{\mu_0}{v_0} \zeta(5/2) \zeta(3/2) \left( \frac{T}{4\pi s J_0} \right)^4. \end{aligned} \quad (30.3.22)$$

Эти величины только множителем  $Q(s)$  отличаются от соответствующих величин, найденных в § 20.

## § 31. Теория высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетиков

1. Связь тензора высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетика с функциями Грина магнов. В § 22 мы связали тензор высокочастотной магнитной восприимчивости  $\chi'_{ij}$  с двухвременной запаздывающей функцией Грина спинов:

$$\chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\mu_0^2}{v_0 \hbar} G_{ij}^{(r)}(\mathbf{k}, \omega),$$

где  $G_{ij}^{(r)}(\mathbf{k}, \omega)$  определяется формулами (22.1.9)

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \sum_l e^{-i\mathbf{k}R_{ll'}} G_{ij}^{(r)}(l-l', t) \\ G_{ij}^{(r)}(l-l', t) &= -i\theta(t) \langle [s_l^i(t), s_{l'}^k(0)] \rangle. \end{aligned}$$

Как было показано в разделе 2 § 22, учет одного только обменного взаимодействия не приводит к уширению линии однородного ферромагнитного резонанса. Поэтому в этом параграфе мы будем учитывать наряду с обменным также релятивистские взаимодействия. Чтобы не усложнять задачи мы будем пользоваться следующим простейшим выражением для гамильтониана этих взаимодействий:

$$\mathcal{H}_a = -\frac{\beta}{s} \mu_0 M_0 \sum_l (s_l^z)^2,$$

где  $\beta$  — константа магнитной анизотропии. Гамильтониан ферромагнетика в этом случае имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(R_{lm}) s_l s_m + 2\mu_0 H_0^{(e)} \sum_l s_l^z - \frac{\beta}{s} \mu_0 M_0 \sum_l (s_l^z)^2. \quad (32.1.1)$$

Для такого гамильтониана, как легко видеть, отличными от нуля будут только компоненты  $\chi'_{zz}$ ,  $\chi'_{xx}$ ,  $\chi'_{yy}$ ,  $\chi'_{xy}$ ,  $\chi'_{yx}$  тензора  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ , причем

$$\left. \begin{aligned} \chi'_{xx}(\mathbf{k}, \omega) &= \chi'_{yy}(\mathbf{k}, \omega) = \\ &= -\frac{\mu_0^2}{v_0 \hbar} (G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) + G^{(r)*}(-\mathbf{k}, -\omega)), \\ \chi'_{xy}(\mathbf{k}, \omega) &= -\chi'_{yx}(\mathbf{k}, \omega) = \\ &= -\frac{i\mu_0^2}{v_0 \hbar} (G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) - G^{(r)*}(-\mathbf{k}, -\omega)), \end{aligned} \right\} \quad (31.1.2)$$

где  $G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega)$  определяется формулой (23.1.5):

$$\begin{aligned} G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{l'} e^{i(\omega t - \mathbf{k}R_{ll'})} G^{(r)}(l - l', t), \\ G^{(r)}(l - l', t) &= -i\theta(t) \langle [s_l^-(t), s_{l'}^+(0)] \rangle. \end{aligned} \quad (31.1.3)$$

Для определения тензора  $\chi'_{ij}$  с помощью этих формул необходимо воспользоваться определенной реализацией операторов спина с помощью операторов рождения и уничтожения магнонов. При этом в принципе можно исходить либо из метода квантования спиновых волн, развитого в § 18,



либо из метода квантования спиновых волн, развитого в этой главе. В первом методе квантования операторы спинов выражаются, как мы видели в § 18, в виде бесконечных рядов по степеням  $\frac{a_l^+ a_l}{2s}$ . Использование этих бесконечных рядов сильно затрудняет исследование интересующей нас проблемы, тем более, что стандартная теория возмущений не позволяет, как известно, определить форму линии поглощения; поэтому заранее неизвестно, можно ли ограничиваться в разложениях операторов спинов по степеням  $a_l^+ a_l / 2s$  несколькими первыми членами. Учитывая это обстоятельство, мы будем пользоваться вторым методом квантования, в котором операторы спинов заменяются операторами идеализированных спинов, связанными с бозевскими операторами  $a_l^+$ ,  $a_l$  соотношениями (29.1.3):

$$\begin{aligned} \tilde{s}_l^+ &= \sqrt{2s} a_l^+, & \tilde{s}_l^- &= \sqrt{2s} \left( a_l - \frac{1}{2s} a_l^+ a_l a_l \right), \\ \tilde{s}_l^z &= -s + a_l^+ a_l. \end{aligned}$$

Заменяя в гамильтониане  $\mathcal{H}$  операторы спина операторами идеализированных спинов и переходя к компонентам Фурье бозевских операторов  $a_l^+$ ,  $a_l$ , мы получим оператор

$$\mathcal{H}_D = \sum_k \varepsilon_s(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + \frac{1}{N} \sum_{1234} \Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) a^+(\mathbf{k}_1) \times \\ \times a^+(\mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_3) a(\mathbf{k}_4) \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4), \quad (31.1.4)$$

где

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = 2\mu_0 (H_0^{(e)} + \beta M_0) + s(J(0) - J(\mathbf{k})),$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \frac{1}{4} \{ J(\mathbf{k}_1) + J(\mathbf{k}_2) - \\ &- J(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2) - J(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \} - \mu_0 M_0 \beta. \quad (31.1.5) \end{aligned}$$

Этот оператор отличается от гамильтониана ферромагнетика, но, как мы видели в предыдущих параграфах при вычислении термодинамического потенциала и других величин типа  $\text{Sp} e^{-\beta \mathcal{H}} f(s_l)$ , где  $f(s_l)$  — произвольная функция спинов, различие между операторами  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}_D$  (а также между  $s_l$  и  $\tilde{s}_l$ ) несущественно, если только  $T \ll \theta_c$ . Поэтому при вычислении компонента тензора высокочастотной магнитной восприимчивости мы будем считать оператор  $\mathcal{H}_D$  гамильтонианом ферромагнетика, и заменим в выражении для функции Грина

$G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega)$  операторы спинов  $s_i$  операторами идеализированных спинов  $\tilde{s}_i$ . В результате мы приходим к следующему выражению для функции  $G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega)$  [3]:

$$G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) = 2sG_1(\mathbf{k}, \omega) - G_2(\mathbf{k}, \omega), \quad (31.1.6)$$

где  $G_1(\mathbf{k}, \omega)$  — компонента Фурье одночастичной запаздывающей функции Грина,

$$G_1(l-m, t) = -i\Theta(t) \langle [a_l(t), a_m^+(0)] \rangle \quad (31.1.7)$$

и  $G_2(\mathbf{k}, \omega)$  — компонента Фурье двухчастичной запаздывающей функции Грина:

$$G_2(l-m, t) = -i\Theta(t) \langle [a_l^+(t) a_l(t) a_l(t), a_m^+(0)] \rangle \quad (31.1.8)$$

(компоненты Фурье определяются согласно формуле (31.1.3)).

**2. Нахождение функций Грина магнонов.** Для нахождения функций  $G_1(\mathbf{k}, \omega)$  и  $G_2(\mathbf{k}, \omega)$  удобно пользоваться методом графического представления функций Грина [4]. Введем с этой целью одночастичную температурную функцию Грина магнонов

$$G_{(1)}(\mathbf{k}, \tau) = \langle T_\tau a(\mathbf{k}, \tau) a^+(\mathbf{k}, 0) \rangle, \quad (31.2.1)$$

где

$$a(\mathbf{k}, \tau) = e^{\mathcal{H}\tau} a(\mathbf{k}) e^{-\mathcal{H}\tau}$$

и  $T_\tau$  — символ упорядочения операторов по переменной  $\tau$ :

$$T_\tau \{A_1(\tau_1) \dots A_n(\tau_n)\} = A_{j_1}(\tau_{j_1}) \dots A_{j_n}(\tau_{j_n}),$$

$$\tau_{j_1} > \dots > \tau_{j_n}.$$

Если ввести компоненту Фурье функции  $G_{(1)}(\mathbf{k}, \tau)$  по переменной  $\tau$ ,

$$G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n) = \hbar \int_0^\beta d\tau e^{i\nu_n \tau} G_{(1)}(\mathbf{k}, \tau), \quad (31.2.2)$$

$$G_{(1)}(\mathbf{k}, \tau) = \sum_n e^{-i\nu_n \tau} G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n),$$

где  $\nu_n = \frac{2\pi}{\hbar} nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то можно показать, что

$$G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n) = G_1(\mathbf{k}, i\nu_n). \quad (31.2.3)$$

Справедлива и обратная теорема: по функции  $G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n)$  можно восстановить функцию  $G_1(\mathbf{k}, \omega)$ , аналитически продолжив соотношение (31.2.3) в комплексную плоскость

переменной  $\nu_n$  так, чтобы  $G_1(\mathbf{k}, \omega)$  не имела особенностей в верхней полуплоскости  $\omega$ .

Если гамильтониан определяется формулой (31.1.4), то функция Грина  $G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n)$  может быть представлена совокупностью диаграмм, изображенных на рис. 13. При этом каждой линии диаграммы сопоставляется функция

$$G^0(\mathbf{k}, \nu_n) = (\omega_s(\mathbf{k}) - i\nu_n)^{-1},$$

а каждой вершине диаграммы — амплитуда рассеяния  $\Phi$  (12, 34)

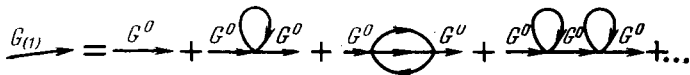


Рис. 13.

(функция  $G^0(\mathbf{k}, \nu_n)$  совпадает с функцией  $G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n)$  в пренебрежении взаимодействием между спиновыми волнами).

Функцию Грина  $G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n)$  можно, очевидно, представить в виде

$$G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n) = \frac{1}{\omega_s(\mathbf{k}) - i\nu_n - \Sigma(\mathbf{k}, \nu_n)}, \quad (31.2.4)$$

где  $\Sigma(\mathbf{k}, \nu_n)$  — так называемый массовый оператор, который

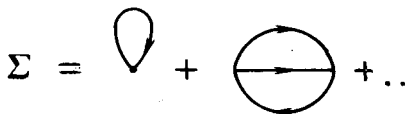


Рис. 14.

определяется совокупностью компактных диаграмм, изображенных на рис. 14. Этим диаграммам соответствует следующее выражение для массового оператора:

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{k}, \nu_n) = & -\frac{4v_0}{(2\pi)^3 \hbar} \int d\mathbf{k}' G^0(\mathbf{k}', -0) \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \mathbf{k}, \mathbf{k}') + \\ & + \frac{8T^2 v_0^2}{(2\pi)^6 \hbar^4} \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' \sum_{n' n''} \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \mathbf{k}'', \mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \times \\ & \times \Phi(\mathbf{k}'', \mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}''; \mathbf{k}, \mathbf{k}') G^0(\mathbf{k}', \nu_{n'}) G^0(\mathbf{k}'', \nu_{n''}) \times \\ & \times G^0(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'', \nu_n + \nu_{n'} - \nu_{n''}) + \dots, \quad (31.2.5) \end{aligned}$$

где  $G^0(\mathbf{k}, -0) = G^0(\mathbf{k}, \tau) |_{\tau \rightarrow -0}$  (мы сохранили в этом ряду по степеням  $\Phi$  только первые два слагаемых).

Замечая, что

$$G^0(\mathbf{k}, -0) = \bar{n}(\mathbf{k}) = (e^{\beta \epsilon_s(\mathbf{k})} - 1)^{-1}$$

и

$$\frac{T}{\hbar} \sum_n G^0(\mathbf{k}, \nu_n) = \bar{n}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2},$$

легко выполнить в (31.2.5) суммирование по  $n'$  и  $n''$ :

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{k}, \nu_n) = & -\frac{4v_0}{(2\pi)^3 \hbar} \int d\mathbf{k}_1 \bar{n}_1 \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) + \\ & + \frac{8v_0^2}{(2\pi)^6 \hbar^2} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \Phi(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \times \\ & \times \frac{\bar{n}_1(1+\bar{n}_2)(1+\bar{n}_3) - \bar{n}_2\bar{n}_3(1+\bar{n}_1)}{\omega_2 + \omega_3 - \omega_1 - i\nu_n}, \end{aligned} \quad (31.2.6)$$

где

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \quad \omega_i \equiv \omega_s(\mathbf{k}_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя формулу (31.2.3) и аналитичность функции  $G_1(\mathbf{k}, \omega)$  в верхней полуплоскости переменной  $\omega$ , получим, согласно (31.2.4),

$$G_1(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\omega_s(\mathbf{k}) - \omega - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (31.2.7)$$

где с точностью до второго борновского приближения (включительно) по  $\Phi$  величина  $\Sigma(\mathbf{k}, \omega)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{k}, \omega) = & -\frac{4v_0}{(2\pi)^3 \hbar} \int d\mathbf{k}_1 \bar{n}_1 \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) + \\ & + \frac{8v_0^2}{(2\pi)^6 \hbar^3} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \Phi(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \times \\ & \times \frac{\bar{n}_1(1+\bar{n}_2)(1+\bar{n}_3) - \bar{n}_2\bar{n}_3(1+\bar{n}_1)}{\omega_2 + \omega_3 - \omega_1 - \omega - i0}. \end{aligned} \quad (31.2.8)$$

Перейдем теперь к нахождению двухчастичной функции Грина  $G_2(\mathbf{k}, \omega)$ . Введем для этого двухчастичную температурную функцию Грина

$$\begin{aligned} G_{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \\ = \langle T_{\tau} a^+(\mathbf{k}_1, \tau_1) a(\mathbf{k}_2, \tau_2) a(\mathbf{k}_3, \tau_3) a^+(\mathbf{k}, 0) \rangle \end{aligned} \quad (31.2.9)$$

и ее компоненту Фурье переменным  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$

$$G_{(2)}(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3; \nu_1 \nu_2 \nu_3) = \\ = \hbar^3 \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \int_0^\beta d\tau_3 e^{i(\nu_2 \tau_2 + \nu_3 \tau_3 - \nu_1 \tau_1)} G_2(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3; \tau_1 \tau_2 \tau_3),$$

где  $\nu_i = \frac{2\pi}{\hbar} n_i T$ . Ясно, что

$$G_{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \tau, \tau, \tau) = \\ = \left(\frac{T}{\hbar}\right)^3 \sum_{n_1 n_2 n_3} e^{-i\tau(\nu_2 + \nu_3 - \nu_1)} G_{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \nu_1, \nu_2, \nu_3).$$

Компонента Фурье функции  $G_{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \tau, \tau, \tau)$  по переменной  $\tau$  равна

$$G_{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \nu_n) = \left(\frac{T}{\hbar}\right)^2 \sum_{n_1 n_2} G_{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \nu_n + \nu_1 - \nu_2). \quad (31.2.10)$$

Введем функцию

$$G_{(2)}(\mathbf{k}, \nu_n) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2} G_{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2; \nu_n).$$

Согласно (31.2.10) имеем

$$G_{(2)}(\mathbf{k}, \nu_n) = \\ = \left(\frac{T}{\hbar}\right)^2 \sum_{n_1 n_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} G_{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2; \nu_1, \nu_2, \nu_n + \nu_1 - \nu_2). \quad (31.2.11)$$

Так как соотношение (31.2.3) справедливо для произвольных двухвременных функций Грина, то

$$G_{(2)}(\mathbf{k}, \nu_n) = G_2(\mathbf{k}, i\nu_n). \quad (31.2.12)$$

Восстановление функции  $G_2(\mathbf{k}, \omega)$  по функции  $G_{(2)}(\mathbf{k}, \nu_n)$  производится таким же образом, как и восстановление функции  $G_1(\mathbf{k}, \omega)$  по функции  $G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n)$ .

Функция  $G_{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \nu_1, \nu_2, \nu_3)$  может быть представлена совокупностью диаграмм, изображенных на рис. 15. Так как амплитуда рассеяния  $\Phi(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4)$  мала, то из всей совокупности диаграмм рис. 15 достаточно сохранить только те диаграммы, которые приводят к диаграммам, изображенным на рис. 16 (жирной линии соответствует совокупность диаграмм рис. 13).

Из этих диаграмм и формулы (31.2.11) следует, что функцию  $G_{(2)}(\mathbf{k}, \nu_n)$  можно представить в виде

$$G_{(2)}(\mathbf{k}, \nu_n) = \Lambda(\mathbf{k}, \nu_n) G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n), \quad (31.2.13)$$

где  $G_{(1)}(\mathbf{k}, \nu_n)$  — температурная функция Грина, определяемая равенством (31.2.4) и

$$\Lambda(\mathbf{k}, \nu_n) = \frac{2v_0}{(2\pi)^3} \int G^0(\mathbf{k}, -0) d\mathbf{k} - \frac{4v_0^2 T^2}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{n_1, n_2} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \times \\ \times \Phi(\mathbf{k}_2, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2; k_1, k) G^0(\mathbf{k}_1, \nu_1) G^0(\mathbf{k}_2, \nu_2) \times \\ \times G^0(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \nu_n + \nu_1 - \nu_2). \quad (31.2.14)$$

Заметим, что учет диаграмм, изображенных на рис. 17, которые не учитывались при выводе формулы (31.2.13), приводит лишь к поправкам порядка  $\Phi^2$  в выражении для  $\Lambda(\mathbf{k}, \nu_n)$ .

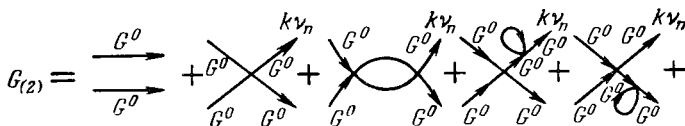


Рис. 15.

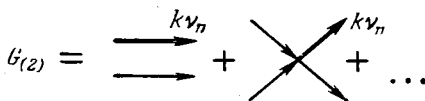


Рис. 16.

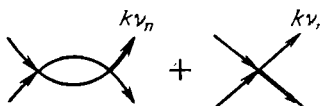


Рис. 17.

Выполнив в (31.2.14) суммирование по  $n_1, n_2$ , получим  $\Lambda(\mathbf{k}, \nu_n) =$

$$= \frac{2v_0}{(2\pi)^3} \int \bar{n}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} - \frac{4v_0^2}{(2\pi)^6 \hbar} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Phi(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \times \\ \times \frac{\bar{n}_1(1 + \bar{n}_2)(1 + \bar{n}_3) - \bar{n}_2 \bar{n}_3(1 + \bar{n}_1)}{\omega_2 + \omega_3 - \omega_1 - i\nu_n}, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2. \quad (31.2.15)$$

Функция  $G_2(\mathbf{k}, \omega)$ , согласно (31.2.12), (31.2.13), имеет вид

$$G_2(\mathbf{k}, \omega) = \Lambda(\mathbf{k}, \omega) G_1(\mathbf{k}_1, \omega), \quad (31.2.16)$$

где

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2v_0}{(2\pi)^3} \int \bar{n}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} - \\ - \frac{4v_0^2}{(2\pi)^6 \hbar} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Phi(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \times \\ \times \frac{\bar{n}_1(1+\bar{n}_2)(1+\bar{n}_3) - \bar{n}_2\bar{n}_3(1+\bar{n}_1)}{\omega_2 + \omega_3 - \omega_1 - \omega - i0}.$$

Эта формула справедлива с точностью до членов порядка  $\Phi^2$ .

Используя последнее соотношение, а также формулу (31.1.6), получим окончательно следующее выражение для функции Грина  $G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2s\Pi(\mathbf{k}, \omega)}{\omega_s(\mathbf{k}) - \omega - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)} = \frac{2sR(\mathbf{k}, \omega)}{|\omega_s(\mathbf{k}) - \omega - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)|^2}, \quad (31.2.17)$$

где

$$\Pi(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{1}{2s} \Lambda(\mathbf{k}, \omega), \quad (31.2.18)$$

$$R(\mathbf{k}, \omega) = (\omega_s(\mathbf{k}) - \omega) \Pi(\mathbf{k}, \omega) - \Sigma^*(\mathbf{k}, \omega).$$

Учитывая (31.1.2), получим отсюда следующие выражения для компонент тензора  $\chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\chi'_{xx}(\mathbf{k}, \omega) = \chi'_{yy}(\mathbf{k}, \omega) = \\ = -\frac{2s\mu_0^2}{v_0\hbar} \left\{ \frac{R(\mathbf{k}, \omega)}{|\omega_s(\mathbf{k}) - \omega - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)|^2} + \right. \\ \left. + \frac{R^*(-\mathbf{k}, -\omega)}{|\omega_s(\mathbf{k}) + \omega - \Sigma(-\mathbf{k}, -\omega)|^2} \right\}, \quad (31.2.19)$$

$$\chi'_{xy}(\mathbf{k}, \omega) = -\chi'_{yx}(\mathbf{k}, \omega) = \\ = -i\frac{2s\mu_0^2}{v_0\hbar} \left\{ \frac{R(\mathbf{k}, \omega)}{|\omega_s(\mathbf{k}) - \omega - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)|^2} - \right. \\ \left. - \frac{R^*(-\mathbf{k}, -\omega)}{|\omega_s(\mathbf{k}) + \omega - \Sigma(-\mathbf{k}, -\omega)|^2} \right\}.$$

Таким образом, нахождение тензора  $\chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  сводится к вычислению величин  $\Sigma(\mathbf{k}, \omega)$  и  $R(\mathbf{k}, \omega)$ , определяемых формулами (31.2.8), (31.2.16).

Прежде чем получать конкретные выражения для компонент тензора  $\chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ , покажем, что величина  $R(\mathbf{k}, \omega)$  удовлетворяет неравенству

$$\omega \operatorname{Im} R(\mathbf{k}, \omega) > 0. \quad (31.2.20)$$

Действительно, из (31.2.16), (31.2.8) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} R(\mathbf{k}, \omega) = & \frac{4v_0^2}{(2\pi)^5 \hbar^2} \left( e^{\frac{\omega}{T}} - 1 \right) \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left( \frac{\hbar}{4s} (\omega_s(\mathbf{k}) - \omega) + \right. \\ & \left. + \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) \right) \Phi(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}, \mathbf{k}_3) \times \\ & \times \bar{n}_1 \bar{n}_2 (1 + \bar{n}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega), \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Используя далее выражение (31.1.5) для  $\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)$ , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} R(\mathbf{k}, \omega) = & \frac{4v_0^2}{(2\pi)^5 \hbar^2} \left( e^{\frac{\omega}{T}} - 1 \right) \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 |\Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}, \mathbf{k}_3)|^2 \times \\ & \times \bar{n}_1 \bar{n}_2 (1 + \bar{n}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega), \quad (31.2.21) \end{aligned}$$

откуда и следует (31.2.20).

Учитывая (31.2.17), мы видим, что

$$\omega \operatorname{Im} G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) > 0.$$

Это неравенство является общим свойством функции  $G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega)$ , определяемой равенством (31.1.3), и следует из формулы (22.1.11) и положительности спектральной функции  $J(\mathbf{k}, \omega)$ .

Неравенство (31.2.20) обеспечивает положительность энергии, поглощаемой ферромагнетиком. Действительно, спектральная плотность последней  $Q_\omega$  определяется, согласно (22.3.4), формулой

$$Q_\omega = \frac{\omega}{2(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \left\{ |h_-(\mathbf{k}, \omega)|^2 \operatorname{Im} \chi'_{-+}(-\mathbf{k}, -\omega) - |h_+(\mathbf{k}, \omega)|^2 \operatorname{Im} \chi'_{-+}(\mathbf{k}, \omega) \right\}, \quad (31.2.22)$$

где

$$\chi'_{-+}(\mathbf{k}, \omega) = \chi'_{xx}(\mathbf{k}, \omega) + \chi'_{yy}(\mathbf{k}, \omega) - i \{ \chi'_{yx}(\mathbf{k}, \omega) - \chi'_{xy}(\mathbf{k}, \omega) \}.$$

Но, согласно (31.1.2),

$$\begin{aligned} \chi'_{-+}(\mathbf{k}, \omega) = & - \frac{(2\mu_0)^2}{v_0 \hbar} G^{(r)}(\mathbf{k}, \omega) = \\ = & - \frac{(2\mu_0)^2}{v_0 \hbar} \frac{2sR(\mathbf{k}, \omega)}{|\omega_s(\mathbf{k}) - \omega - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)|^2}. \quad (31.2.23) \end{aligned}$$



Поэтому

$$\omega \operatorname{Im} \chi'_{-+}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{(2\mu_0)^2}{v_0 \hbar} \frac{2s\omega \operatorname{Im} R(\mathbf{k}, \omega)}{|\omega_s(\mathbf{k}) - \omega - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)|^2} < 0.$$

**3. Компоненты тензора высокочастотной магнитной восприимчивости.** Перейдем теперь к выяснению характера функций  $\chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ . Рассмотрим прежде всего область резонанса, когда  $|\omega - \omega_s(\mathbf{k})| \ll \omega_s(\mathbf{k})$ . Используя формулы (31.2.19), (31.2.18), легко убедиться, что в этой области

$$\begin{aligned} \chi'_{xx}(\mathbf{k}, \omega) &= \chi'_{yy}(\mathbf{k}, \omega) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{gM_0}{\omega - \omega_s(\mathbf{k}) - \Delta\omega_s(\mathbf{k}) + i\gamma_s(\mathbf{k})}, \\ \chi'_{xy}(\mathbf{k}, \omega) &= -\chi'_{yx}(\mathbf{k}, \omega) = \\ &= \frac{i}{2} \frac{gM_0}{\omega - \omega_s(\mathbf{k}) - \Delta\omega_s(\mathbf{k}) + i\gamma_s(\mathbf{k})}, \end{aligned} \quad (31.3.1)$$

где

$$M_0 = \frac{2\mu_0 s}{v_0}, \quad \gamma_s(\mathbf{k}) = \operatorname{Im} \Sigma(\mathbf{k}, \omega_s(\mathbf{k})),$$

$$\Delta\omega_s(\mathbf{k}) = -\operatorname{Re} \Sigma(\mathbf{k}, \omega_s(\mathbf{k}))$$

(если  $\omega < 0$  и  $|\omega + \omega_s(\mathbf{k})| \ll \omega_s(\mathbf{k})$ , то компоненты тензора  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  определяются этими же формулами, в которых нужно лишь заменить  $\omega$  на  $-\omega$  и перейти к комплексно сопряженным величинам).

В разделе 2 § 22 мы видели, что полюсы тензора  $\hat{\chi}'(\mathbf{k}, \omega)$  определяют частоты и декременты затухания спиновых волн, поэтому  $\gamma_s(\mathbf{k})$  есть декремент затухания спиновой волны, а  $\omega_s(\mathbf{k}) + \Delta\omega_s(\mathbf{k})$  — ее частота. Мы видим, что эти величины тесно связаны с массовым оператором  $\Sigma(\mathbf{k}, \omega)$ , а именно: декремент затухания  $\gamma_s(\mathbf{k})$  представляет собой мнимую часть массового оператора в резонансе, а величина  $\Delta\omega_s(\mathbf{k})$  — его вещественную часть. Обратим внимание на то обстоятельство, что частота спиновой волны отличается на  $\Delta\omega_s(\mathbf{k})$  от величины  $\omega_s(\mathbf{k})$ , которую мы до сих пор считали частотой спиновой волны. Это отличие можно интерпретировать в корпускулярной картине как изменение энергии магнона  $\Delta\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \hbar \Delta\omega_s(\mathbf{k})$ , вызванное взаимодействием магнонов друг с другом.

Используя формулу (31.2.8), можно представить  $\gamma_s(\mathbf{k})$  и  $\Delta\omega_s(\mathbf{k})$  в виде

$$\begin{aligned} \gamma_s(\mathbf{k}) &= \text{Im} \Sigma(\mathbf{k}, \omega_s(\mathbf{k})) = \\ &= \frac{4v_0^2}{(2\pi)^5 \hbar^2} \left( e^{\frac{\omega_s(\mathbf{k})}{T}} - 1 \right) \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 |\Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}, \mathbf{k}_3)|^2 \times \\ &\quad \times \bar{n}_1 \bar{n}_2 (1 + \bar{n}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_s(\mathbf{k})), \quad (31.3.2) \\ &\quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}, \\ \Delta\omega_s(\mathbf{k}) &\approx \frac{4v_0}{(2\pi)^3 \hbar} \int d\mathbf{k} \bar{n}(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; \mathbf{k}, \mathbf{k}_1). \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\text{Im} \Sigma(\mathbf{k}, \omega_s(\mathbf{k})) = \text{Im} R(\mathbf{k}, \omega_s(\mathbf{k})).$$

Приведем выражения для  $\gamma_s(\mathbf{k})$  и  $\Delta\omega_s(\mathbf{k})$  в некоторых предельных случаях [5, 6]:

$$\gamma_s(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{\beta^2}{24\pi} g M_0 \frac{\mu_0 M_0}{sJ_0} \left( \frac{T}{sJ_0} \right)^2, \\ \quad |\omega_s(\mathbf{k}) - \omega_s(0)| \ll \omega_s(0) \ll \frac{T}{\hbar}, \\ \frac{sJ_0}{\hbar} (ak)^3 \left( \frac{T}{sJ_0} \right)^{5/2}, \quad \omega_s(\mathbf{k}) \gg \omega_s(0), \frac{T}{\hbar}, \end{cases} \quad (31.3.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta\omega_s(\mathbf{k}) &\approx \frac{3}{32} \frac{\zeta(5/2)}{\pi^{3/2}} (\omega_s(\mathbf{k}) - \omega_s(0)) \left( \frac{T}{sJ_0} \right)^{5/2} + \\ &\quad + 4\beta s g M_0 \frac{\zeta(3/2)}{4\pi^{3/2}} \left( \frac{T}{sT_0} \right)^{3/2}, \quad T \gg \hbar\omega_s(0). \end{aligned}$$

Мы видим, что в однородном случае, когда  $\mathbf{k} = 0$ , величины  $\gamma_s(\mathbf{k})$  и  $\Delta\omega_s(\mathbf{k})$  определяются только энергией магнитной анизотропии, иными словами, в однородном случае обменное взаимодействие между магнонами не приводит к уширению линии ферромагнитного резонанса и не влияет на частоту ферромагнитного резонанса.

Если  $\mathbf{k} = 0$  и  $\beta = 0$ , то из формул (31.2.8), (31.2.16), (31.2.18) следует, что массовый оператор обращается в нуль и

$$R(0, \omega) = (\omega_0 - \omega) \left\{ 1 - \frac{v_0}{3(2\pi)^3} \int \bar{n}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right\}, \quad \omega_0 = \omega_s(0).$$

Поэтому величины  $\chi_{ij}(0, \omega)$  при  $\beta = 0$  могут быть представлены в виде

$$\chi'_{xx}(0, \omega) = \chi'_{yy}(0, \omega) = -\frac{2\mu_0^2}{v_0\hbar} \left( s - \frac{v_0}{(2\pi)^3} \int \bar{n}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right) \left\{ \frac{1}{\omega_0 + \omega + i0} + \frac{1}{\omega_0 - \omega - i0} \right\},$$

$$\chi'_{xy}(0, \omega) = -\chi'_{yx}(0, \omega) = -i \frac{2\mu_0^2}{v_0\hbar} \left( s - \frac{v_0}{(2\pi)^3} \int \bar{n}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right) \left\{ \frac{1}{\omega_0 + \omega + i0} - \frac{1}{\omega_0 - \omega - i0} \right\}.$$

Замечая, что  $\frac{2\mu_0}{v_0} \left( s - \frac{v_0}{(2\pi)^3} \int \bar{n}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right) = \bar{M}(T)$ , мы видим, что эти формулы совпадают с формулами (22.2.21).

Рассмотрим поведение компонент тензора  $\chi'_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  в однородном случае вдали от резонанса, когда  $|\omega - \omega_0| \gg \gamma_s(0)$ ,  $\Delta\omega_s(0)$ . В этом случае, согласно (31.2.19).

$$\begin{aligned} \chi'_{xx}(0, \omega) &= \chi'_{yy}(0, \omega) = \\ &= \frac{1}{2} g M_0 \left[ \frac{2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} - i \frac{\text{Im} R(0, \omega)}{(\omega - \omega_0)^2} + i \frac{\text{Im} R(0, -\omega)}{(\omega + \omega_0)^2} \right], \\ \chi'_{xy}(0, \omega) &= -\chi'_{yx}(0, \omega) = \\ &= -\frac{i}{2} g M_0 \left[ \frac{2\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} - i \frac{\text{Im} R(0, \omega)}{(\omega - \omega_0)^2} - i \frac{\text{Im} R(0, -\omega)}{(\omega + \omega_0)^2} \right], \end{aligned} \quad (31.3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Im} R(0, \omega) &= \frac{4\beta^2 (\mu_0 M_0)^2}{(2\pi)^5 \hbar^2} \left( e^{\frac{\omega}{T}} - 1 \right) v_0 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \bar{n}_1 \bar{n}_2 (1 + \bar{n}_3) \times \\ &\times \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega), \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \end{aligned} \quad (31.3.5)$$

Выполнив интегрирование по угловым переменным и устранив  $\delta$ -функцию, легко привести  $\text{Im} R(0, \omega)$  к виду

$$\begin{aligned} \text{Im} R(0, \omega) &= \frac{\beta^2 (\mu_0 M_0)^2}{(2\pi)^3 \hbar s J_0} \left( e^{\frac{\omega}{T}} - 1 \right) \left( \frac{T}{s J_0} \right)^2 \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{dx}{(e^{x+\xi} - 1)(1 - e^{-\eta-x-\xi})} \ln \frac{1 - \exp \left\{ -\xi - \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{2} (\xi - \eta) + x \right]^2 \right\}}{1 - \exp \left\{ -\xi - \frac{1}{4x} (\xi - \eta)^2 \right\}}, \end{aligned}$$

где  $\xi = \frac{\hbar\omega_0}{T}$ ,  $\eta = \frac{\hbar\omega}{T}$ . Используя эту формулу, можно показать, что если  $\hbar\omega_0 \ll T$  и  $\omega > 0$ , то [3]

$$\operatorname{Im} R(0, \omega) = \begin{cases} \lambda \frac{\beta^2 (\mu_0 M_0)^2}{(2\pi)^3 \hbar s J_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \left( \frac{T}{s J_0} \right)^2, & \omega \ll \omega_0 \ll \frac{T}{\hbar}, \\ \frac{3}{16\pi} \frac{\beta^2 (\mu_0 M_0)^2}{\hbar s J_0} \left( \frac{T}{s J_0} \right)^2, & \omega_0 \ll \omega \ll \frac{T}{\hbar}, \\ \frac{\sqrt{\pi} \zeta(3/2)}{(2\pi)^3} \frac{\beta^2 (\mu_0 M_0)^2}{\hbar s J_0} \left( \frac{T}{s J_0} \right)^{3/2} \left( \frac{\hbar\omega}{s J_0} \right)^{1/2}, \\ \omega_0 \ll \frac{T}{\hbar} \ll \omega, \end{cases} \quad (31.3.6)$$

где

$$\lambda = 2 \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{3} \ln 2 \right\} \approx 0.4;$$

если же  $\omega < 0$  и  $\hbar\omega_0 \ll T$ , то

$$\operatorname{Im} R(0, \omega) = \begin{cases} \lambda \frac{\beta^2 (\mu_0 M_0)^2}{(2\pi)^3 \hbar s J_0} \frac{\omega}{\omega_0} \left( \frac{T}{s J_0} \right)^2, & |\omega| \ll \omega_0 \ll \frac{T}{\hbar}, \\ -\frac{\beta^2 (\mu_0 M_0)^2}{16\pi \hbar s J_0} \left( \frac{T}{s J_0} \right)^2, & \omega_0 \ll |\omega| \ll \frac{T}{\hbar}, \\ -\frac{\beta^2 (\mu_0 M_0)^2}{\hbar s J_0} \exp\left(-\frac{\hbar|\omega|}{T}\right), \\ \omega_0 \ll \frac{T}{\hbar} \ll |\omega|. \end{cases} \quad (31.3.7)$$

Определим спектральную плотность энергии, поглощаемой ферромагнетиком в однородном переменном магнитном поле. В этом случае

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \mathbf{h}(\omega),$$

где

$$\mathbf{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t) e^{i\omega t} dt.$$

Заменяя в формуле (31.2.22) для  $Q_\omega$  квадрат  $\delta$ -функции,

$\delta^2(\mathbf{k})$ , на  $\frac{V}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k})$ , получим

$$\frac{Q_\omega}{V} = \frac{\omega}{2} \left\{ -|h_+(\omega)|^2 \operatorname{Im} \chi'_{-+}(0, \omega) + |h_-(\omega)|^2 \operatorname{Im} \chi'_{-+}(0, -\omega) \right\}, \quad (31.3.8)$$

где

$$\operatorname{Im} \chi'_{-+}(0, \omega) = -\frac{4\mu_0 M_0}{\hbar} \frac{\operatorname{Im} R(0, \omega)}{|\omega - \omega_0 - \Sigma(0, \omega)|^2}.$$

Из этих формул видно, что резонансное поглощение энергии имеет место только для поля с «правой» круговой поляризацией ( $h_-(\omega) = 0$ ). В этом случае

$$\frac{Q_\omega}{V |h_+(\omega)|^2} = \begin{cases} \frac{\lambda \beta^2}{(2\pi)^3} g M_0 \frac{(\mu_0 M_0)^2}{\hbar \omega_0 s J_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{T}{s J_0}\right)^2, \\ \quad |\omega| \ll \omega_0 \ll \frac{T}{\hbar}, \\ \\ g M_0 \frac{\omega_0 \gamma_s(0)}{|\omega_0 + \Delta\omega(0) - \omega - i\gamma_s(0)|^2}, \quad |\omega - \omega_0| \ll \omega_0, \\ \\ \frac{\sqrt{\pi} \zeta(3/2)}{(2\pi)^3} \beta^2 g M_0 \left(\frac{\mu_0 M_0}{s J_0}\right)^{3/2} \left(\frac{T}{s J_0}\right)^{3/2} \left(\frac{\mu_0 M_0}{\hbar \omega}\right)^{1/2}, \\ \quad \omega_0 \ll \frac{T}{\hbar} \ll \omega. \end{cases} \quad (31.3.9)$$

В случае поля с «левой» круговой поляризацией

$$\frac{Q_\omega}{V |h_-(\omega)|^2} = \begin{cases} \frac{\lambda \beta^2}{(2\pi)^3} g M_0 \frac{(\mu_0 M_0)^2}{\hbar \omega_0 s J_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{T}{s J_0}\right)^2, \\ \quad |\omega| \ll \omega_0 \ll \frac{T}{\hbar}, \\ \\ \frac{\beta^2}{16\pi} g M_0 \frac{(\mu_0 M_0)^2}{\hbar \omega s J_0} \left(\frac{T}{s J_0}\right)^2, \quad \omega_0 \ll \omega \ll \frac{T}{\hbar}, \\ \\ \beta^2 g M_0 \frac{(\mu_0 M_0)^2}{\hbar \omega s J_0} \exp\left(-\frac{\hbar \omega}{T}\right), \quad \omega_0 \ll \frac{T}{\hbar} \ll \omega. \end{cases} \quad (31.3.10)$$

Сравним теперь найденные выражения для компонент тензора  $\chi'_{ij}(0, \omega)$  с выражениями (6.3.3) для  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ , которые были получены, исходя из феноменологического уравнения движения плотности магнитного момента.

Легко убедиться, что формулы (6.3.3) правильно определяют компоненты тензора  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  в области малых частот и малых волновых векторов, когда  $\omega \ll \omega_0$  и  $\alpha k^2 \ll 1$ . В этом случае для описания поведения ферромагнетика в стороннем переменном магнитном поле можно пользоваться уравнением движения для плотности магнитного момента с релаксационным членом типа (5.2.8), если выбрать  $\tau$  в виде

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} = \lambda \frac{\beta^2 (\mu_0 M_0)^2}{(2\pi)^3 \hbar s J_0}.$$

Подчеркнем, однако, что эта величина, как видно из формул (27.2.6), (27.2.8), отличается от величины  $B_{\text{vv}} \left( \beta + \frac{H_0^{(l)}}{M_0} \right)$ , которую нужно ввести в уравнение движения для плотности магнитного момента вместо  $\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$  для описания процесса релаксации магнитного момента.

Если  $\omega \gg \omega_0$  и  $\alpha k^2 \leq 1$ , то описание поведения ферромагнетика в стороннем переменном магнитном поле с помощью простейшего релаксационного слагаемого (5.2.8) становится невозможным, и необходимо пользоваться формулами (31.2.19) для  $\chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ .

Заметим в заключение этого раздела, что декремент затухания спиновой волны с  $\mathbf{k} = 0$  представляет собой, очевидно, обратное время релаксации поперечной составляющей магнитного момента:

$$\gamma_s(0) = \frac{1}{\tau_{\perp}}.$$

С другой стороны, эта величина равна, согласно (27.3.3),  $-\frac{1}{2} B_{\text{vv}}$ . Поэтому должно иметь место равенство

$$B_{\text{vv}} = -2\gamma_s(0),$$

в справедливости которого можно непосредственно убедиться, сравнивая формулы (31.3.2) и (27.2.6).

## ДОПОЛНЕНИЕ

# СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ МЕТАЛЛАХ

**В. П. Силин**

Спиновые волны в ферромагнетиках изучаются уже многие годы, о них написано большое число работ, связанные с ними представления широко известны, а имеющийся на сегодняшний день теоретический и экспериментальный материал необычайно богат. В частности, в этом можно убедиться, читая настоящую монографию А. И. Ахиезера, В. Г. Барьяхгара и С. В. Пелетминского. Напротив, о спиновых волнах в неферромагнитных металлах знает очень узкий круг людей. Дело здесь, прежде всего, в том, что спиновые волны в неферромагнитных металлах, находящихся в магнитном поле, были обнаружены на опыте совсем недавно [1, 2], хотя соответствующее теоретическое предсказание возможности существования таких волн было сделано около десяти лет тому назад в работе автора [3].

Чрезвычайная важность обнаружения спиновых волн в неферромагнитном металле, находящемся в магнитном поле, обусловлена тем, что они представляют собой первое (и пока единственное) явление, в котором отчетливо проявляется качественное отличие электронов проводимости от газа. Следует надеяться, что изучение таких спиновых волн приведет к внедрению в сознание широких масс физиков значительно более адекватных представлений о металлах, чем имеющие (и не без оснований) популярность в настоящее время. Очевидно, что в ближайшее время будет проведено большое число экспериментальных работ по изучению спиновых волн в неферромагнитных металлах. Автор надеется, что настоящая статья поможет обдумыванию постановки таких экспериментов и обсуждению их результатов.

1. Электроны проводимости можно изучать на основе теории ферми-жидкости Ландау [4], распространенной на электронную жидкость металла [5]. Поэтому настоящее изложение мы начнем с краткого обзора теории вырожденной

ферми-жидкости, которая позволяет провести учет взаимодействия электронов (и в том числе обменного взаимодействия), приводящего, в частности, к появлению спиновых волн.

Хотя энергия взаимодействия электронов проводимости металла друг с другом отнюдь не мала, однако, как известно, электронная теория металлов успешно использует представление об электронах как о независимых частицах. Прежде всего, это связано с тем, что междуэлектронные столкновения, представляющие собой одно из проявлений корреляции движения электронов, в случае вырожденной жидкости оказываются малым эффектом, поскольку вероятность столкновения электрона пропорциональна квадрату температуры, что обусловлено малым числом электронов в зоне размытия Ферми. С другой стороны, корреляционные эффекты существенны для целого ряда не зависящих от температуры недиссипативных свойств электронных возбуждений металла. Это, в частности, показали различные попытки учета корреляции электронов (см., например, [6, 7]). Однако в большинстве случаев учет влияния междуэлектронной корреляции приводит лишь к количественным эффектам. Одним из исключений, как это следует из теории ферми-жидкости, являются спиновые волны.

В теории ферми-жидкости Ландау учет влияния междуэлектронного взаимодействия на динамические характеристики возбуждений достигается с помощью представления о том, что энергия является некоторым общим функционалом функции распределения частиц. В отличие от идеального ферми-газа невзаимодействующих частиц, в случае ферми-жидкости, благодаря значительному самосогласованному взаимодействию, энергия отдельных частиц зависит от состояния окружающих частиц. Поэтому энергия системы частиц, образующих ферми-жидкость, становится не равной сумме энергий отдельных частиц, а оказывается некоторым (вообще говоря, весьма сложным) функционалом функции распределения.

Изменение плотности энергии системы при бесконечно малом изменении функции распределения  $\hat{n}$  можно записать в виде [4]

$$\delta E = \text{Sp}_s \int d\mathbf{p} \hat{\epsilon}(\mathbf{p}, r) \delta \hat{n}(\mathbf{p}, r), \quad (1.1)$$

где  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{n}$  являются матрицами в пространстве спиновых переменных электрона и  $\text{Sp}_s$  — шпур по спиновым состояниям. Формула (1.1) представляет собой определение



энергии (функции Гамильтона) квазичастицы (электрона металла), отличающейся от энергии свободного электрона благодаря самосогласованному взаимодействию с окружающими частицами. В теории ферми-жидкости важную роль играет соотношение, определяющее изменение энергии квазичастицы  $\hat{\epsilon}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ , вызываемое изменением распределения  $\hat{n}$ . Если отсутствует магнитное поле, то в общем случае можно записать:

$$\delta\hat{\epsilon}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \text{Sp}_{s'} \int d\mathbf{p}' d\mathbf{r}' \hat{F}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta\hat{n}(\mathbf{p}', \mathbf{r}'). \quad (1.2)$$

Иными словами, вторая вариационная производная плотности энергии жидкости по функции распределения зависит от спинов  $s, s'$ , импульсов  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  и координат  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ .

В системе заряженных частиц эффекты, обуславливаемые кулоновским взаимодействием  $U = \frac{e^2}{r}$ , часто описываются в приближении самосогласованного поля Хартри. В таком приближении функция  $\hat{F}$  имеет следующий вид:

$$\hat{F}_X(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_{ss'} U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (1.3)$$

Поскольку в приближении Хартри функция распределения системы многих частиц принимается в виде произведения функций распределения отдельных частиц, то тем самым пренебрегается влиянием корреляции электронов на вид функции  $\hat{F}$ . Поэтому разность  $\hat{F} - \hat{F}_X$  целиком обусловлена эффектом корреляции электронов.

Практический интерес представляют многие задачи, в которых радиус корреляции частиц можно считать пренебрежимо малым по сравнению с характерным расстоянием изменения функции распределения. Тогда

$$\hat{F}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \hat{F}_X \approx \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (1.4)$$

Соответственно этому формулу (1.2) можно записать в виде [3]

$$\begin{aligned} \delta\hat{\epsilon}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = & \int d\mathbf{p}' d\mathbf{r}' U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta\hat{n}(\mathbf{p}', \mathbf{r}') + \\ & + \text{Sp}_{s'} \int d\mathbf{p}' \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta\hat{n}(\mathbf{p}', \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы учитывает дальнедействующий характер кулоновских сил. Заметим, что если это слагаемое понимать буквально, то оно приводит для однородных распределений к расходящемуся интегралу.

Фактически такая расходимость компенсируется электростатической энергией ионов. Поэтому в первом слагаемом правой части формулы (1.5) под  $\widehat{dn}$  следует понимать отклонение распределения от пространственно однородного.

Заметим, что для реальных металлов эффективный радиус междуэлектронной корреляции по порядку величины близок к межуатомным расстояниям. Поэтому формула (1.4) может быть использована для широкого класса явлений в металлах. Отметим также, что функция  $\widehat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ , возникшая в формуле (1.4), для реальных металлов неизвестна. Одной из нерешенных пока задач физики металлов является экспериментальное определение этой функции\*).

Для интересующей нас проблемы спиновых волн существенна кинетическая теория ферми-жидкости. Волны в заряженной жидкости частиц со спином могут сопровождаться электромагнитными полями. Поэтому для их теоретического изучения следует пользоваться уравнениями электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e \operatorname{Sp}_s \int d\mathbf{p} \widehat{dn}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi e}{c} \operatorname{Sp}_s \int d\mathbf{p} \frac{\partial \widehat{\epsilon}_0}{\partial \mathbf{p}} \widehat{n} + \\ &+ 8\pi \mu_0 \operatorname{rot} \operatorname{Sp}_s \int d\mathbf{p} \widehat{\mathbf{s}} \widehat{n}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

\*) Приведем здесь выражение, получающееся с помощью вычислений, трактующих взаимодействие электронов как малое возмущение. Соответствующий результат имеет вид [5]

$$\widehat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\Phi \left( \left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) \frac{1}{2} (1 + 4\widehat{\mathbf{s}} \widehat{\mathbf{s}}'), \quad (1.6)$$

где  $\widehat{\mathbf{s}}$  — оператор спина:

$$s_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а  $\Phi(k)$  — фурье-образ потенциала энергии взаимодействия двух электронов. Если для последнего принять экранированный кулоновский потенциал, то

$$\Phi(k) = \frac{4\pi e^2 \hbar^2}{\hbar^2 k^2 + p^2 (4e^2 / \pi \hbar v)},$$

где  $p$  и  $v$  — импульс и скорость электрона на поверхности Ферми.

Поскольку для большинства металлов  $e^2 / \hbar v \sim 2$ , то использование теории возмущений не является обоснованным. Однако нельзя также отрицать эвристическую ценность подобных результатов, позволяющих качественно понять целый ряд явлений.

Здесь  $2\mu_0\hat{s}$  — оператор магнитного момента электрона, а

$$\delta\hat{\epsilon}_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = -2\mu_0(\hat{s}\mathbf{B}) + \text{Sp}_{s'} \int d\mathbf{p}' \{ \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \\ + 4(\hat{s}\hat{s}')\psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \} \delta\hat{n}(\mathbf{p}', \mathbf{r}). \quad (1.8)$$

В последней формуле, в отличие от формулы (1.5), мы опустили дальнедействующее слагаемое, учли влияние магнитного поля, а также конкретизировали спиновую зависимость функции (при этом пренебрежено малыми спин-орбитальными взаимодействиями).

Для матрицы плотности можно записать следующее уравнение движения [3]:

$$\frac{\partial\hat{n}}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} [\hat{\epsilon}_0, \hat{n}]_- + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\hat{\epsilon}_0}{\partial\mathbf{p}} \frac{\partial\hat{n}}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial\hat{n}}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial\hat{\epsilon}_0}{\partial\mathbf{p}} \right) - \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\hat{\epsilon}_0}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial\hat{n}}{\partial\mathbf{p}} + \frac{\partial\hat{n}}{\partial\mathbf{p}} \frac{\partial\hat{\epsilon}_0}{\partial\mathbf{r}} \right) + e\mathbf{E} \frac{\partial\hat{n}}{\partial\mathbf{p}} + \\ + \frac{1}{2} \frac{e}{c} \left( \left[ \frac{\partial\hat{\epsilon}_0}{\partial\mathbf{p}} \times \mathbf{B} \right] \frac{\partial\hat{n}}{\partial\mathbf{p}} + \frac{\partial\hat{n}}{\partial\mathbf{p}} \left[ \frac{\partial\hat{\epsilon}_0}{\partial\mathbf{p}} \times \mathbf{B} \right] \right) = \hat{I}. \quad (1.9)$$

Здесь  $[\hat{\epsilon}_0, \hat{n}]_-$  — коммутатор матриц в пространстве спина, а  $\hat{I}$  — оператор столкновений.

Удобно вместо  $\hat{n}$  воспользоваться функцией распределения  $f = \text{Sp}_s \hat{n}$  частиц в фазовом пространстве координат и импульсов и векторной функцией  $\sigma = 2 \text{Sp}_s \hat{s} \hat{n}$  спиновой плотности в фазовом пространстве. Тогда, учтя, что

$$(\hat{\epsilon}_0)_{mn} = \delta_{mn} \epsilon_1 + 2(\hat{s})_{mn} \epsilon_2, \quad (1.10)$$

$$(\hat{I})_{mn} = \delta_{mn} I_1 + 2(\hat{s})_{mn} I_2, \quad (1.11)$$

из (1.9) получим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial\epsilon_1}{\partial\mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial\epsilon_1}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}} + \frac{\partial\epsilon_2}{\partial p_j} \frac{\partial\sigma}{\partial r_j} - \frac{\partial\epsilon_2}{\partial r_j} \frac{\partial\sigma}{\partial p_j} + \\ + e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \left[ \frac{\partial\epsilon_1}{\partial\mathbf{p}} \times \mathbf{B} \right] \frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \left[ \frac{\partial\epsilon_2}{\partial\mathbf{p}} \times \mathbf{B} \right] \frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{p}} = I_1, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \left( \frac{\partial\epsilon_1}{\partial\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \right) \sigma - \left( \frac{\partial\epsilon_1}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \right) \sigma + \frac{2}{\hbar} [\epsilon_2 \times \sigma] + \left( \frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \right) \epsilon_2 - \\ - \left( \frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \right) \epsilon_2 + e \left( \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \right) \sigma + \frac{e}{c} \left( \left[ \frac{\partial\epsilon_1}{\partial\mathbf{p}} \times \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \sigma - \\ - \frac{e}{c} \left( \left[ \frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}} \times \mathbf{B} \right] \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \right) \epsilon_2 = I_2. \quad (1.13)$$

Аналогично уравнения поля запишутся в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e \int d\mathbf{p} \delta f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad (1.14)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mu_0 \operatorname{rot} \int d\mathbf{p} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + \frac{4\pi e}{c} \int d\mathbf{p} \times \\ \times \left\{ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \mathbf{p}} \sigma_j(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \right\}. \quad (1.15)$$

Уравнения (1.12) — (1.15) составляют основу кинетической теории волн в вырожденной электронной ферми-жидкости.

Укажем, наконец, что согласно (1.8) и (1.10)

$$\delta \varepsilon_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{p}' \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta f(\mathbf{p}', \mathbf{r}), \quad (1.16)$$

$$\delta \varepsilon_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{B} + \int d\mathbf{p}' \psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta \sigma(\mathbf{p}', \mathbf{r}). \quad (1.17)$$

2. Спиновые волны представляют собой возбуждения над основным состоянием электронной жидкости, находящейся в постоянном и однородном магнитном поле. Поэтому сначала нам следует рассмотреть равновесное состояние, для которого нужно знать матрицу плотности  $\hat{n}$ , учитывающую парамагнетизм электронной жидкости.

Поскольку изменение химического потенциала является величиной второго порядка по  $B$ , а энергия электрона претерпевает линейное изменение, то, ограничиваясь линейными по  $B$  членами, можно написать [4]:

$$\Delta \hat{n} = \frac{1}{2} \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon_0, \quad (2.1)$$

где  $f_0(\varepsilon)$  — функция распределения Ферми. Соответственно этому можно считать, что функция распределения частиц в фазовом пространстве не отличается от  $f_0$ , а векторная функция спиновой плотности в фазовом пространстве имеет вид

$$\sigma(\mathbf{p}) = \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon_2(\mathbf{p}). \quad (2.2)$$

Подставив это выражение в формулу (1.17), найдем уравнение, определяющее  $\Delta \varepsilon_2$ :

$$\Delta \varepsilon_2(\mathbf{p}) = -\mu_0 \mathbf{B} + \int d\mathbf{p}' \psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon(\mathbf{p}')} \Delta \varepsilon_2(\mathbf{p}'). \quad (2.3)$$

Поскольку

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (2.4)$$

где  $\epsilon_0$  — энергия Ферми, то уравнение (2.3) можно записать в виде

$$\Delta \epsilon_2(\mathbf{p}) = -\mu_0 B - \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{dS'}{|\nabla \epsilon(\mathbf{p}')|} \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Delta \epsilon_2(\mathbf{p}'), \quad (2.5)$$

где  $dS'$  — элемент поверхности Ферми.

Очевидно, что можно представить решение уравнения (2.5) в виде

$$\Delta \epsilon_{2,i}(\mathbf{p}) = -\gamma_{ij}(\mathbf{p}) B_j. \quad (2.6)$$

При этом  $\gamma_{ij}$  уже не зависит от магнитного поля и определяется уравнением

$$\gamma_{ij}(\mathbf{p}) + \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{dS'}{|\nabla \epsilon(\mathbf{p}')|} \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \gamma_{ij}(\mathbf{p}') = \mu_0 \delta_{ij}. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) легко может быть решено в том случае, когда поверхность Ферми является сферой. Отсутствие выделенных направлений позволяет тогда считать функцию  $\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  лишь функцией угла  $\Theta$  между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , лежащими на сфере Ферми. Поэтому оказывается удобным использовать разложение функции  $\Psi$  по полиномам Лежандра:

$$\frac{p^2}{\pi^2 \hbar^3 v} \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \beta_l P_l(\cos \Theta), \quad (2.8)$$

где  $v$  — скорость на поверхности Ферми,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\beta_l$  — постоянные коэффициенты и

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l.$$

При этом решение уравнения (2.7) можно записать следующим образом:

$$\gamma_{ij}(\mathbf{p}) = \gamma \delta_{ij}, \quad (2.9)$$

где [4]

$$\gamma = \frac{\mu_0}{1 + \beta_0}. \quad (2.10)$$

Можно найти решение уравнения (2.7) и для произвольной поверхности Ферми, если  $\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \psi_0 = \text{const}$ . Тогда  $\gamma_{ij}$  снова имеет вид (2.9), где

$$\gamma = \frac{\mu_0}{1 + \frac{2\psi_0}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{dS}{|\nabla \epsilon(\mathbf{p})|}}. \quad (2.11)$$

Формулы (2.9), (2.2) и (2.6) позволяют записать для равновесного состояния:

$$\Delta \varepsilon_2 = -\gamma B, \quad \sigma = -\gamma \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} B. \quad (2.12)$$

Эти выражения мы используем ниже в теории спиновых волн.

Заметим, что формулы (2.12) могут быть использованы для определения статической парамагнитной восприимчивости  $\chi$  электронной жидкости, которая определяется соотношением \*)

$$\chi B = 2\mu_0 \text{Sp} \int dp \hat{n} \hat{s} = \mu_0 \int dp \sigma(p). \quad (2.13)$$

Очевидно,

$$\chi = \mu_0 \gamma \int \frac{dS}{|\nabla \varepsilon|} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (2.14)$$

В частности, для случая сферической поверхности Ферми [4]

$$\chi = \frac{\chi_0}{1 + \beta_0}, \quad (2.15)$$

где  $\chi_0$  — парамагнитная восприимчивость электронного газа.

3. Для рассмотрения возмущений над основным состоянием электронной жидкости, находящейся в постоянном и однородном магнитном поле, изучим малые колебания распределений. Будем считать, что функция распределения мало отличается от фермиевской  $f_0(\varepsilon)$ , а векторная функция спиновой плотности в фазовом пространстве имеет вид (ср. формулу (2.12))

$$\sigma = -\gamma \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} H_0 + \delta\sigma, \quad (3.1)$$

где  $\delta\sigma$  — малая неравновесная добавка, а  $H_0$  — постоянное и однородное магнитное поле \*\*).

Ограничим себя рассмотрением малых колебаний, для которых  $\delta\sigma$  перпендикулярно  $H_0$ . В этом случае кинетическое уравнение (1.13) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial \delta\sigma}{\partial t} + \left( \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left( \delta\sigma - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon_2 \right) + \frac{e}{c} \left( [\mathbf{v} \times H_0] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \times \left( \delta\sigma - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon_2 \right) - \frac{2\gamma}{\hbar} \left[ H_0 \times \left( \delta\sigma - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon_2 \right) \right] = \delta I_2, \quad (3.2)$$

\*) Статическая парамагнитная восприимчивость мала по сравнению с единицей.

\*\*) Малость статической магнитной восприимчивости неферромагнитного металла позволяет вместо магнитной индукции  $B_0$  писать  $H_0$ .

где

$$\delta \varepsilon_2 = -\mu_0 \mathbf{b} + \int d\mathbf{p}' \psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta \sigma(\mathbf{p}', \mathbf{r})$$

и  $\mathbf{b}$  — переменная магнитная индукция.

Для функции  $\psi$  ниже мы будем использовать выражение (2.8), считая соответственно поверхность Ферми сферой. В качестве интеграла столкновений мы используем следующее модельное выражение \*):

$$\delta I_2 = -\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_2}\right) \left(\delta \sigma - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon_2\right) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \times \\ \times \left[ \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right]^{-1} \int d\mathbf{p} \left(\delta \sigma - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon_2\right). \quad (3.3)$$

Здесь  $\tau$  — характерное время релаксации импульса электрона, а  $\tau_2$  — время переброса спина. Поскольку переброс спина обусловлен спин-орбитальными или магнитными взаимодействиями, то в реальной ситуации  $\tau_2 \gg \tau$ . Ниже главным образом нас будет интересовать случай, когда столкновения, приводящие к релаксации импульса, сравнительно редки. При этом использование модельного интеграла столкновений (3.3) не может дать значительного отличия от истины.

Длинноволновые спиновые волны в окрестности частоты обычного парамагнитного резонанса электронов проводимости можно описывать с помощью макроскопического уравнения для неравновесной плотности намагниченности:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int d\mathbf{p} \delta \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \quad (3.4)$$

Нетрудно видеть, что после умножения уравнения (3.2) на  $\mu_0$  и интегрирования по импульсам получается

$$\left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \frac{2\mu_0}{\hbar} [(\mathbf{m} - \chi \mathbf{b}) \times \mathbf{H}_0]\right)_j + (1 + \beta_1) \frac{\partial}{\partial r_i} \Sigma_{ij} = \\ = -\frac{1 + \beta_0}{\tau_2} (\mathbf{m} - \chi \mathbf{b})_j, \quad (3.5)$$

где

$$\Sigma_{ij} = \mu_0 \int d\mathbf{p} v_i \delta \sigma_j. \quad (3.6)$$

В условиях, когда пространственная неоднородность несущественна (можно пренебречь последним слагаемым левой части уравнения (3.5), содержащим производную по координатам),

\*) Относительно интеграла столкновений в теории вырожденной ферми-жидкости см. [8].

нате), уравнение (3.5) соответствует уравнению Блоха, составляющему основу теории электронного парамагнитного резонанса [9]. Для описания спиновых волн необходимо учесть роль пространственной неоднородности намагничивания. Если длина волны  $\lambda$  спиновых волн велика по сравнению с ларморовским радиусом электрона  $R$  в магнитном поле  $H_0$ , то для получения явного выражения слагаемого уравнения (3.5), содержащего пространственный градиент, удобно воспользоваться методом моментов [10]. Ограничиваясь первым приближением по степеням  $R/\lambda$ , можно принять

$$\mu_0 \delta \sigma_j = \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \left[ \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right]^{-1} \left( m_j + \frac{1}{3} \frac{v_j}{v^2} \Sigma_{ij} \right). \quad (3.7)$$

Тогда с помощью уравнения (3.2) получаем следующее уравнение для  $\Sigma_{ij}$ :

$$\frac{1}{1 + \beta_1} \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial t} - \Omega e_{iil} n_l \Sigma_{ij} + \Omega_0 e_{jil} n_l \Sigma_{ii} + \frac{1 + \beta_0}{1 + \beta_1} \frac{v^2}{3} \frac{\partial}{\partial r_i} (m_j - \chi b_j) = - \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \Sigma_{ij} \approx - \frac{1}{\tau} \Sigma_{ij}, \quad (3.8)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{H}_0/H_0$ ,  $\Omega_0 = 2\gamma H_0/\hbar = [2\mu_0 H_0/\hbar (1 + \beta_0)] \equiv \omega_s/(1 + \beta_0)$ ,  $\Omega = eH_0 v/c\hbar$ .

Считая  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{m}$  и  $\Sigma_{ij}$  зависящими от времени  $\sim e^{-i\omega t}$ , можно записать решение уравнения (3.8) в следующем виде:

$$\Sigma_{zj} = - \frac{v^2}{3} \frac{1 + \beta_0}{(-i\omega + v)^2 + \omega_0^2} \left\{ (-i\omega + v) \frac{\partial}{\partial z} (m_j - \chi b_j) - \omega_{0,1} \frac{\partial}{\partial z} [(\mathbf{m} - \chi \mathbf{b}) \times \mathbf{n}]_j \right\}, \quad (3.9)$$

$$\Sigma_{xx} \pm i \Sigma_{yx} = - (1 + \beta_0) \frac{v^2}{6} \left( \frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \frac{m^- - \chi b^-}{v - i(\omega + \omega_{\pm 1,1})} + \frac{m^+ - \chi b^+}{v - i(\omega - \omega_{\pm 1,1})} \right], \quad (3.10)$$

$$\Sigma_{xy} \pm i \Sigma_{yy} = - i(1 + \beta_0) \frac{v^2}{6} \left( \frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \frac{m^- - \chi b^-}{v - i(\omega + \omega_{\pm 1,1})} - \frac{m^+ - \chi b^+}{v - i(\omega - \omega_{\pm 1,1})} \right]. \quad (3.11)$$

Здесь принято, что ось ориентирована вдоль  $\mathbf{H}_0$ , и учтено, что неравновесная плотность намагничивания  $\mathbf{m}$  перпендикулярна постоянному магнитному полю. Кроме того,  $v = (1 + \beta_1)/\tau$ ,  $m^\pm = m_x \pm i m_y$ ,  $b^\pm = b_x \pm i b_y$  и

$$\omega_{l,n} = (\Omega_0 + l\Omega)(1 + \beta_n). \quad (3.12)$$



Формулы (3.9) — (3.11) позволяют записать следующее уравнение для неравновесного намагничивания:

$$-i\omega\mathbf{m} + \frac{2\mu_0}{\hbar} [(\mathbf{m} - \chi\mathbf{b}) \times \mathbf{H}_{01}] - \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \{D_{\parallel}^{(1)}(\mathbf{m} - \chi\mathbf{b}) + D_{\parallel}^{(2)}[\mathbf{n} \times (\mathbf{m} - \chi\mathbf{b})]\} - \left\{\Delta - \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial r}\right)^2\right\} \{D_{\perp}^{(1)}(\mathbf{m} - \chi\mathbf{b}) + D_{\perp}^{(2)}[\mathbf{n} \times (\mathbf{m} - \chi\mathbf{b})]\} = -\frac{1 + \beta_0}{\tau_2}(\mathbf{m} - \chi\mathbf{b}), \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} D_{\parallel}^{(1)} &= (1 + \beta_0)(1 + \beta_1) \frac{v^2}{6} \left[ \frac{1}{v - i(\omega + \omega_{0,1})} + \frac{1}{v - i(\omega - \omega_{0,1})} \right], \\ D_{\parallel}^{(2)} &= i(1 + \beta_0)(1 + \beta_1) \frac{v^2}{6} \left[ \frac{1}{v - i(\omega - \omega_{0,1})} - \frac{1}{v - i(\omega + \omega_{0,1})} \right], \\ D_{\perp}^{(1)} &= (1 + \beta_0)(1 + \beta_1) \frac{v^2}{12} \left[ \frac{1}{v - i(\omega + \omega_{-1,1})} + \frac{1}{v - i(\omega + \omega_{1,1})} + \frac{1}{v - i(\omega - \omega_{1,1})} + \frac{1}{v - i(\omega - \omega_{-1,1})} \right], \\ D_{\perp}^{(2)} &= i(1 + \beta_0)(1 + \beta_1) \frac{v^2}{12} \left[ \frac{1}{v - i(\omega - \omega_{1,1})} + \frac{1}{v - i(\omega - \omega_{-1,1})} - \frac{1}{v - i(\omega + \omega_{1,1})} - \frac{1}{v - i(\omega + \omega_{-1,1})} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В пределе  $v \gg \omega$  и  $\omega_{m,n}$  уравнение (3.13) представляет собой уравнение диффузии намагничивания, кладущееся в основу теории парамагнитного резонанса электронов проводимости [11, 10]. Формулы (3.14) описывают частотную дисперсию анизотропного коэффициента диффузии намагничивания, которая становится особенно важной в условиях, когда  $v < \omega \sim \omega_{m,n}$ . Последнее неравенство выполняется при достаточно низких температурах и для чистых образцов металла.

С помощью уравнения (3.13) нетрудно записать выражение для компонент высокочастотной магнитной восприимчивости  $\chi_{\pm}$ , учитывающей частотную и пространственную дисперсию ( $\mathbf{m} \sim e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ )\*:

$$m^{\pm} = \frac{\chi_{\pm}(\omega, \mathbf{k})}{1 + 4\pi\chi_{\pm}(\omega, \mathbf{k})} b^{\pm} \equiv \chi_{\pm}(\omega, \mathbf{k}) h^{\pm}, \quad (3.15)$$

\*) Внимательный читатель может заметить, что определение (3.15) отличается от использованного ранее (2.13). Это обусловлено тем, что, в отличие от статической восприимчивости  $\chi$ , малой по сравнению с единицей, высокочастотная восприимчивость в окрестности резонанса может быть отнюдь не малой.

где  $h^{\pm} = h_x \pm ih_y$  и  $h$  — переменное магнитное поле внутри металла. При этом

$$\chi_{\pm}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\chi \left[ \frac{1 + \beta_0}{\tau_2} \mp i\omega_s + k^2 D_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) \right]}{-i(\omega \pm \omega_s) + \frac{1 + \beta_0}{\tau_2} + k^2 D_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) - C}, \quad (3.16)$$

$$C = 4\pi\chi \left[ \frac{1 + \beta_0}{\tau_2} \mp i\omega_s + k^2 D_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) \right],$$

$\omega_s = 2\mu_0 H_0 / \hbar$  — частота спинового резонанса электрона проводимости,  $\vartheta_{\mathbf{k}}$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{n}$ , а

$$D_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) = i \frac{v^2}{3} (1 + \beta_0)(1 + \beta_1) (\omega \pm \omega_{0,1} + iv) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\cos^2 \vartheta_{\mathbf{k}}}{(\omega \pm \omega_{0,1} + iv)^2} + \frac{\sin^2 \vartheta_{\mathbf{k}}}{(\omega \pm \omega_{1,1} + iv)(\omega \pm \omega_{-1,1} + iv)} \right\}. \quad (3.17)$$

Последнее выражение для  $D_{\pm}(\mathbf{k}, \omega)$  было получено Платцманом и Волфом [2].

Комплексная магнитная восприимчивость (3.16) может быть использована для определения спектра тех спиновых волн, которые могут возбуждаться магнитным полем. Ограничимся случаем не слишком высоких частот, когда  $\omega \ll ck$ . Тогда для интересующего нас случая уравнения поля сводятся к

$$\text{rot}(\mathbf{b} - 4\pi\mathbf{m}) = 0, \quad \text{div} \mathbf{b} = 0. \quad (3.18)$$

Имея в виду соотношение (3.15), получаем следующее уравнение, определяющее спектр спиновых волн:

$$1 + 4\pi\chi_{\pm}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (3.19)$$

Подставив сюда выражение (3.16), получим дисперсионное уравнение длинноволновых колебаний ( $kv \ll \omega$ ) в окрестности  $|\omega| = \omega_s$ :

$$\omega = \mp \omega_s - i \frac{1 + \beta_0}{\tau_2} - ik^2 D_{\pm}(\mathbf{k}, \omega). \quad (3.20)$$

В условиях, когда  $\omega \ll v$ , можно пренебречь зависимостью  $D_{\pm}$  от частоты. При этом  $D_{\pm}$  оказывается величиной действительной, а поэтому согласно формуле (3.20) групповая скорость волн будет мнимой. Это означает, что в таких условиях спиновые волны не существуют и возмущения намагниченности расплываются по законам диффузии. Напротив, в пределе  $v \ll \omega$  коэффициент диффузии  $D_{\pm}$  становится мнимым, а групповая скорость волн — действительной. Это означает, что вместо диффузного расплывания возмущений ста-

новится возможным распространение волн намагниченния — спиновых волн.

Обнаруженные на опыте [1, 2] спиновые волны соответствуют частотам, близким частоте спинового резонанса электронов проводимости. При этом, в соответствии с только что сказанным, спиновые волны проявляются лишь в условиях, когда  $\omega \gg v$ . В этом случае из формулы (3.20) имеем:

$$\omega = \omega_s [1 - k^2 \alpha(\mathbf{k})], \quad (3.21)$$

где

$$\alpha(\mathbf{k}) = \frac{v^2}{3\omega_s^2} \frac{(1 + \beta_0)(1 + \beta_1)}{\beta_0 - \beta_1} \frac{1 - A \cos^2 \vartheta_{\mathbf{k}}}{A - 1}, \quad (3.22)$$

$$A = \frac{(1 + \beta_0)^2 (1 + \beta_1)^2}{(\beta_0 - \beta_1)^2} \frac{\Omega^2}{\omega_s^2}. \quad (3.23)$$

Как мы увидим ниже, зависимость  $\alpha$  от угла  $\vartheta_{\mathbf{k}}$  между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}_0$  позволяет экспериментально определить величину  $A$ . Однако, прежде чем переходить к изложению экспериментальных результатов, рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из теории для коротких спиновых волн.

4. Для произвольных длин волн колебаний теория существенно усложняется, в особенности благодаря сложному виду функции  $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  (см. формулу (2.8)). Ставя перед собой задачу продемонстрировать те возможности, которые открывает теория вырожденной электронной жидкости для изучения коротковолновых спиновых волн, для простоты примем, что функция  $\psi$  не зависит от угла между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , т. е. примем

$$\psi = \frac{\pi^2 \hbar^3 v}{p^2} \beta_0 = \text{const}. \quad (4.1)$$

Представим неравновесную спиновую плотность в фазовом пространстве в виде

$$\delta\sigma = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} g e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (4.2)$$

и будем считать, что неравновесное магнитное поле таким же образом зависит от времени и координат. Тогда можно записать кинетическое уравнение (3.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} -i\omega g_{\pm} - \frac{1 + \beta_0}{\tau} \langle g_{\pm} \rangle + \left( ik_{\parallel} v \cos \theta + ik_{\perp} v \sin \theta \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_2} - \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \mp i\Omega_0 \right) (g_{\pm} + \beta_0 \langle g_{\pm} \rangle) = \\ = -i \left( k_{\parallel} v \cos \theta + ik_{\perp} v \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{\tau_2} \mp i\Omega_0 \right) \mu_0 b_{\pm}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь  $b^\pm = b_x \pm ib_y$ ,  $g_\pm = g_x \pm ig_y$ ,  $\langle g_\pm \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \times$   
 $\times \sin \theta d\theta g_\pm$ , полярная ось для сферических координат в про-  
 странстве импульса ориентирована вдоль  $H_0$ . Имея в виду  
 естественное условие периодичности по  $\varphi$ , получаем из ки-  
 нетического уравнения (4.3):

$$g_\pm + \beta_0 \langle g_\pm \rangle + \mu_0 b^\pm = -\frac{1}{\Omega} \left[ \left( -i\omega\beta_0 + \frac{1+\beta_0}{\tau} \right) \langle g_\pm \rangle - \right. \\
 \left. - \left( i\omega - \frac{1}{\tau} \right) \mu_0 b^\pm \right] \int_0^\varphi d\varphi' \exp \left\{ i \frac{\varphi - \varphi'}{\Omega} \left[ k_{\parallel} v \cos \theta - \right. \right. \\
 \left. \left. - \omega \mp \Omega_0 - \frac{i}{\tau} - \frac{i}{\tau_2} \right] + i \frac{k_{\perp} v}{\Omega} \sin \theta [\sin \varphi - \sin \varphi'] \right\}. \quad (4.4)$$

Поскольку согласно (4.2) и (2.15) неравновесная плотность  
 намагничения связана с  $g$  соотношением  $m = -(\chi/\gamma) \langle g \rangle$ ,  
 то с помощью (4.4) получаем для высокочастотной магнитной  
 восприимчивости, определенной соотношением (3.15), сле-  
 дующее выражение:

$$\chi_\pm(\omega, k) = \chi \frac{1 - \left( \omega + \frac{i}{\tau} \right) \langle \int \rangle}{1 - \left( \frac{\omega\beta_0}{1+\beta_0} + \frac{i}{\tau} \right) \langle \int \rangle - 4\pi\chi \left[ 1 - \left( \omega + \frac{i}{\tau} \right) \langle \int \rangle \right]}. \quad (4.5)$$

Здесь  $\chi$  — статическая восприимчивость и

$$\langle \int \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2 \left( \frac{kv}{\Omega} \sin \theta \right) \times \\
 \times \frac{1}{\omega \pm \Omega_0 - n\Omega - k_{\parallel} v \cos \theta + \frac{i}{\tau} + \frac{i}{\tau_2}}. \quad (4.6)$$

Подставляя (4.5) в уравнение (3.19), можем определить спектр  
 спиновых волн для произвольных  $kR$ . При этом получаем  
 следующее уравнение, определяющее спектр спиновых волн:

$$1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v}{\Omega} \sin \theta \right) \times \\
 \times \frac{[\beta_0 \omega / (1 + \beta_0)] + i/\tau}{\omega \pm \Omega_0 - n\Omega - k_{\parallel} v \cos \theta + \frac{i}{\tau} + \frac{i}{\tau_2}}. \quad (4.7)$$

Рассмотрим частный случай продольного распространения спиновой волны, когда  $k_{\perp} = 0$ . Тогда формула (4.7) принимает вид

$$1 = \frac{\omega}{2kv} \left( \frac{\beta_0}{1 + \beta_0} + \frac{i}{\tau\omega} \right) \ln \frac{\omega \pm \Omega_0 + kv + i/\tau + i/\tau_2}{\omega \pm \Omega_0 - kv + i/\tau + i/\tau_2}. \quad (4.8)$$

Простые следствия, вытекающие из этого уравнения, нетрудно получить в пределе длин волн, меньших длины свободного пробега [3], когда можно пренебречь  $\frac{1}{\tau}$  и  $\frac{1}{\tau_2}$ . Тогда в области сравнительно длинных волн, когда  $kv \ll \Omega_0$ , формула (4.8) дает

$$\omega = \mp \Omega_0 (1 + \beta_0) \{1 + k^2 v^2 / 3\beta_0 \Omega_0^2\}. \quad (4.9)$$

При отрицательных  $\beta_0$  с уменьшением длины волны частота уменьшается. При этом в случае  $1 + 1/\beta_0 < 0$  частота спиновой волны обращается в нуль при  $k = \Omega_0/v$  согласно следующей формуле:

$$\omega = \mp \left\{ \Omega_0 - kv \left[ 1 + 2 \exp \left( \frac{1 + \beta_0}{\beta_0} \frac{2kv}{\Omega_0 - kv} \right) \right] \right\}, \quad (4.10)$$

пригодной в окрестности  $\omega = 0$ .

При положительных  $\beta_0$  с уменьшением длины волны частота возрастает, и в области коротких длин волн, когда  $kv \gg \Omega_0$ , дисперсионное уравнение (4.8) принимает вид

$$\frac{1}{\beta_0} = \frac{\omega}{2kv} \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} - 1 \equiv \eta \left( \frac{\omega}{kv} \right). \quad (4.11)$$

Это уравнение описывает спиновые волны в ферми-жидкости в отсутствие магнитного поля, которые, как показал Л. Д. Ландау [12], могут существовать лишь при положительном  $\beta_0$ .

Простое следствие вытекает из дисперсионного уравнения (4.7) для коротких волн  $kR \gg 1$  и в предположении поперечного распространения. При этом спиновые волны оказываются возможными вблизи резонансных частот, когда

$$\omega = \omega_n + \delta\omega \quad (\delta\omega \ll \omega_n), \quad (4.12)$$

где

$$\omega_n = \mp \Omega_0 + n\Omega - \frac{i}{\tau} - \frac{i}{\tau_2}, \quad (4.13)$$

$$\delta\omega = \frac{\Omega}{2kv(1 + \beta_0)} \left\{ \beta_0 [\mp \Omega_0 + n\Omega] + \frac{i}{\tau} \right\}. \quad (4.14)$$

Следует заметить, что резонансная частота  $\omega_n$  не зависит от сделанного в начале этого раздела предположения о виде функции  $\psi$  и остается такой же в общем случае (2.8).

Если  $\beta_0$  мало по сравнению с единицей, то и для не очень коротких волн можно получить компактную формулу, описывающую спектр спиновых волн вблизи резонанса:

$$\omega = \left\{ \mp \Omega_0 + n\Omega - \frac{i}{\tau_2} - \frac{i}{\tau} \left[ 1 - \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \times \right. \right. \\ \left. \left. \times J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v}{\Omega} \sin \theta \right) \right] \right\} \left\{ 1 + \frac{\beta_0}{1 + \beta_0} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta J_n^2 \right\}. \quad (4.15)$$

Наконец, снова вернемся к случаю длин волн, больших ларморовского радиуса электронов. Дисперсионное уравнение (4.7) в этом случае принимает вид (3.20), в котором вместо  $D_{\pm}(\mathbf{k}, \omega)$  стоит выражение (3.17), умноженное на

$$\left( \frac{\omega \beta_0}{1 + \beta_0} + \frac{i}{\tau} \right) \frac{1}{\omega \pm \Omega_0 + i/\tau}. \quad (4.16)$$

Последний результат получается и в случае  $\psi$ , представленной рядом (2.8). Заметим, что при  $\omega \rightarrow \mp \omega_s$  выражение (4.16) обращается в единицу, что подтверждает пригодность результатов раздела 3 для изучения окрестности спинового резонанса электронов проводимости.

Используя выражение (4.16), мы можем записать следующие соотношения для собственных частот спиновых волн, близких к предельным значениям (3.12) ( $\omega \gg v$ ):

$$\omega = \mp \omega_{0,1} \left\{ 1 - \frac{k^2 v^2}{3\omega_s^2} \frac{\beta_0}{\beta_1} \frac{(1 + \beta_0)^2 (1 + \beta_1)}{\beta_0 - \beta_1} \cos^2 \vartheta_{\mathbf{k}} \right\}, \quad (4.17)$$

$$\omega = \mp \omega_{1,1} \left\{ 1 + \frac{k^2 v^2}{6\omega_s^2} \frac{\beta_0 (1 + \beta_0)^2 (1 + \beta_1) \sin^2 \vartheta_{\mathbf{k}}}{[\beta_1 + (1 + \beta_0)(1 + \beta_1) \Omega/\omega_s][\beta_1 - \beta_0 + (1 + \beta_0)(1 + \beta_1) \Omega/\omega_s]} \right\}, \quad (4.18)$$

$$\omega = \mp \omega_{-1,1} \left\{ 1 + \frac{k^2 v^2}{6\omega_s^2} \frac{\beta_0 (1 + \beta_0)^2 (1 + \beta_1) \sin^2 \vartheta_{\mathbf{k}}}{[\beta_1 - (1 + \beta_0)(1 + \beta_1) \Omega/\omega_s][\beta_1 - \beta_0 - (1 + \beta_0)(1 + \beta_1) \Omega/\omega_s]} \right\}. \quad (4.19)$$

Для получения выражений в окрестности предельных частот (3.12) с большими  $n$  следует в разложении по  $k$  удерживать более высокие степени.

Заметим, что для результатов этого раздела, посвященных конкретным спектрам спиновых волн, существенно предположение о большой величине времени релаксации импульса. Можно думать, что это предположение даже более существенно, чем для результатов второго раздела, где время релаксации импульса возникало в относительно малых членах  $\sim k^2$ .

5. Эксперимент, приведший к обнаружению спиновых волн в ферромагнитном металле, выполненный Шульцем и Данифером [1], по постановке своей подобен многим работам, посвященным измерению магнитного момента электрона с помощью наблюдения предсказываемого в работе [13] явления селективной прозрачности металлических пленок при спиновом резонансе электронов проводимости. Обычно в экспериментах, связанных с изучением спинового резонанса электронов проводимости, возникает следующее положение [11]. Электромагнитное поле резко убывает в малой области скин-слоя (нормального или аномального). Именно в скин-слое спиновый момент электронов оказывается ориентированным под действием высокочастотного поля. Электроны с ориентированным таким образом спиновым моментом диффундируют из скин-слоя в толщу металла. Поскольку время переброса спина  $\tau_2$  весьма велико (в эксперименте [1] оно составляет  $\approx 10^{-6}$  сек), то намагничение, обусловленное ориентированными спиновыми моментами электронов, диффундирует в глубь металла на расстояния, много большие глубины скин-слоя. Для газа электронов коэффициент диффузии равен  $\frac{1}{3} v^2 \tau$ . Поэтому при толщинах металлической пленки, меньших  $\delta_{эфф} \sim v \sqrt{\tau \tau_2 / 3}$  (где  $\delta_{эфф}$  — расстояние, пройденное электроном при диффузии за время переброса спина), поле прошедшей волны не зависит от толщины. Подобная селективная прозрачность металлической пленки возникает в малой окрестности  $\omega = \omega_s$ . Ширина такой окрестности определяется временем переброса спина [11, 13].

Такая обычная картина селективной прозрачности металлических пленок имеет место при сравнительно высоких температурах, когда время релаксации импульса  $\tau$  мало и спиновые волны не существуют. С уменьшением температуры и уменьшением  $v \sim 1/\tau$  возникает возможность распространения

ния спиновых волн. При этом из области скин-слоя намагниченность распространяется в толщу металла в виде спиновых волн. Поэтому возникает увеличение прозрачности металлических пленок на частотах спиновых волн. Действительно, для поля, проходящего через пленку, согласно работе [2] имеем

$$H_t \sim [\tau_2 \Gamma^2 W \sin 2W]^{-1}. \quad (5.1)$$

Здесь

$$4W^2 = -\frac{a+i}{\tau_2 \Gamma^2}, \quad (5.2)$$

$$a = (\omega - \omega_s) \tau_2, \quad (5.3)$$

$$L^2 \Gamma^2 = \alpha(\mathbf{k}), \quad (5.4)$$

где  $L$  — толщина металлической пленки, а  $\alpha(\mathbf{k})$  определено формулой (3.22). Формула (5.1) получена в предположении, что частота внешнего поля близка к частоте спинового резонанса электронов проводимости. Согласно этой формуле в дополнение к обычной линии селективной прозрачности при спиновом резонансе, соответствующей  $W = 0$ , имеет место серия линий для  $W = n\pi$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), отвечающих спиновым волнам с частотой (3.21). Рисунок 1Д (взятый из работы [1]) отражает факт возникновения таких дополнительных линий прозрачности.

Кратко опишем эксперимент, выполненный Шульцем и Данифером [1]. Пленка металлического натрия помещалась между двумя резонаторами, настроенными на одну и ту же частоту и находящимися в постоянном и однородном магнитном поле. Оба резонатора заполнены диэлектриком, что, в частности, обеспечивает параллелизм поверхностей мягкого натриевого образца и предохраняет поверхность натрия от изменений под действием воздуха. В типичных условиях опыта уровень утечки от одного резонатора к другому составляет 165 децибел. В то же время мощность излучения, проходящая на главной линии спинового резонанса, составляет согласно рис. 1Д,  $a$  примерно 20 децибел над уровнем утечки. Приведенные на рис. 1Д результаты являются типичными для случая магнитного поля, параллельного поверхности образца ( $\theta_k = 90^\circ$ ), равного  $\approx 3250$  гаусс. При этом спин-волновые линии прозрачности проявляются слева от линии основного спинового резонанса, т. е. со стороны меньших значений постоянного магнитного поля. При повороте постоянного магнитного поля в направлении к нормали к поверхности образца спин-волновые линии прозрачности сближаются с ли-



нией основного спигового резонанса, а при некотором угле  $\vartheta_c$  все моды сходятся вместе. При дальнейшем уменьшении угла  $\vartheta_c$  между направлением постоянного магнитного поля и нормалью к поверхности металла в соответствии с теоретическим законом (3.21) дополнительные линии спин-волновой

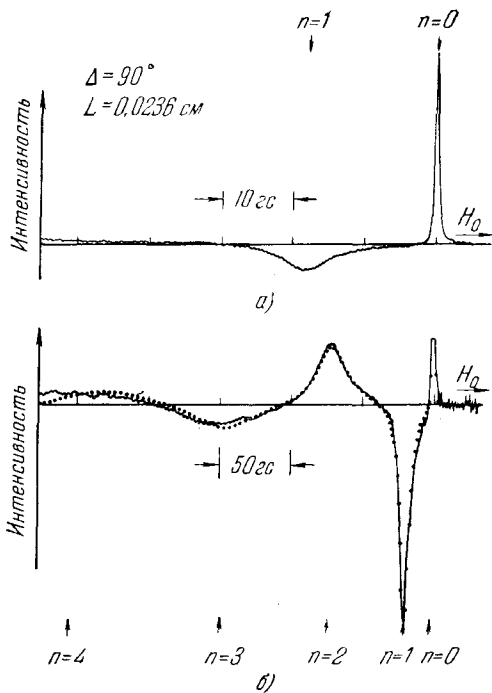


Рис. 1Д.

прозрачности появляются со стороны больших полей от основной линии. Экспериментально определенная величина разделения спиновых волн от линии основного резонанса близка к предсказываемому теорией закону  $n^2/L^2$ , где  $L$  — толщина пленки, а  $n$  — номер гармоники.

В работе [1] утверждается, что при данной толщине образца интенсивность спин-волновой линии и ее ширина главным образом определяются временем свободного пробега электрона  $\tau$ . При увеличении температуры (для натрия вплоть до  $11^\circ \text{K}$ ) и уменьшении времени свободного пробега линии спиновых волн уширяются, а их интенсивность падает. На

рис. 1Д, б наряду с экспериментальными точками приведена теоретическая кривая, построенная по формуле (5.1) при подобранных значениях  $\tau$  и  $\beta_0$ .

Согласно оценкам, приведенным в работе [1], величина  $\omega\tau$  составляет примерно 20. В этих условиях при количественном анализе эксперимента можно использовать формулу (5.1), в которой  $\tau_2\Gamma^2$  является действительной величиной. При этом положение линии спиновой волны при данном угле  $\vartheta_k$  определяется соотношением

$$a(\vartheta_k) = -\tau_2(\pi\Gamma)^2. \quad (5.5)$$

В частности,

$$a(\vartheta_k)/a(90^\circ) = 1 - A \cos^2 \vartheta_k, \quad (5.6)$$

где  $A$  определено формулой (3.23). Величина  $A$ , таким образом, определяется по угловой зависимости (5.6) или по углу  $\vartheta_c$ , при котором линии спин-волновой прозрачности совмещаются с основной линией электронного спинового резонанса ( $A = \sec^2 \vartheta_c$ ). В работе [1] найдено, что  $\vartheta_c = 69,5^\circ$ .

Поскольку отношение ларморовской частоты электрона  $\Omega$  к частоте спинового резонанса  $\omega_s$  равно отношению массы свободного электрона  $m$  к эффективной массе  $m^*$  электрона проводимости, то, используя известное из других измерений значение  $m^*/m$  (которое для натрия, согласно [1], можно считать равным 1,24), имеем соотношение, связывающее константы  $\beta_0$  и  $\beta_1$ . Второе необходимое соотношение может быть получено точным определением положения линии спиновых волн. В эксперименте [2] последнее измерение еще недостаточно точно. Поэтому об определении констант  $\beta_0$  и  $\beta_1$  пока еще говорить нельзя. Можно думать, что в ближайшем будущем результаты работы [1] будут значительно уточнены и постоянные, характеризующие обменное взаимодействие электронов, будут определены. Следует также надеяться, что будут приложены определенные усилия по изучению возможности наблюдения коротковолновых спиновых волн, для которых теория предсказывает ряд специфических особенностей. Хотя в экспериментальном отношении работы Шульца и Данифера [1] и Платцмана и Волфа [2] сделали лишь первый шаг, нельзя сомневаться в том, что за ними последуют другие, которые в конечном итоге не только сделают необходимыми представления об электронах проводимости металлов как о вырожденной ферми-жидкости, но и определят область их применимости.

## ЛИТЕРАТУРА

### К главе I

1. W. Heitler and F. London, Z. Phys. **44**, 455 (1927).
2. W. Heisenberg, Zs. f. Phys. **49**, 619 (1928).
3. Я. Френкель, Zs. f. Phys. **49**, 31 (1928).
4. Я. Дорфман, Nature **119**, 353 (1928).
5. P. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A123**, 714 (1929).
6. Н. Боголюбов, Лекції з квантової статистики. Рад. школа, Київ, 1949; Н. Боголюбов, С. Тябликов, Вестник МГУ № 3, 35 (1949).
7. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Sow Phys. **8**, 157 (1935).
8. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
9. Н. Акулов, Ферромагнетизм, ОНТИ, М., 1939.
10. С. Вонсовский, Я. Шур, Ферромагнетизм, Гостехиздат, М. — Л., 1948.
11. L. Neel, Ann. de Phys. **17**, 61 (1932); **5**, 232 (1936); **3**, 137 (1948), Изв. АН СССР, сер. физ., **21**, 890 (1957).
12. Л. Ландау, Sow Phys **4**, 675 (1933).
13. J. Van Vleck, J Chem. Phys. **9**, 85 (1941).
14. М. Каганов, В. Цукерник, ЖЭТФ **34**, 106 (1958).
15. Е. Туров, Ю. Ирхин, Изв. АН СССР, сер. физ., **22**, 1168 (1958).
16. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **32**, 807 (1957).
17. Е. Туров, Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. Изд. АН СССР, М., 1963.

### К главе II

1. F. Bloch, Zs. f. Phys. **61**, 206 (1930).
2. С. Herring, S. Kittel, Phys. Rev. **81**, 869 (1951).
3. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Sow Phys. **9**, 157 (1935).
4. А. Ахиезер, В. Барьяхтар, С. Пелетминский, ЖЭТФ **35**, 474 (1958).
5. G. Rado, I Weertman, Phys. Rev. **94**, 1386 (1954); W. Ament, G Rado, Phys. Rev **97**, 1558 (1955).
6. С. Kittel, Phys Rev. **110**, 1295 (1958); L Neel, J Phys. **15**, 225 (1954).
7. P. Pincus, Phys. Rev. **118**, 658 (1960).

8. Е. Лифшиц, ЖЭТФ 15, 1 (1945).
9. М. Каганов, В. Цукерник, ЖЭТФ 34, 106 (1958).
10. L. Neel, Ann de Phys. 5, 232 (1936).
11. И. Дзялошинский, ЖЭТФ 32, 1547 (1957).
12. А. Боровик-Романов, «Итоги науки» ФМН, 4, Изд-во АН СССР, М., 1962.
13. Е. Туров, Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов, Изд-во АН СССР, М., 1963.
14. Н. Боголюбов, С. Тябликов, ЖЭТФ 19, 251, 256 (1949).
15. С. Тябликов, А. Аматауни ДАН СССР, 108, 69 (1956).
16. Е. Туров, Ю. Ирхин, Изв. АН СССР, сер. физ., 22, 1168 (1958).
17. В. Попов, УФЖ 6, 25 (1961).
18. М. Гиндбург, ЖЭТФ 35, 1047 (1958); J. Phys. Chem. Solids 11, 336 (1959).
19. В. Auld, J. Appl. Phys. 31, 1642 (1960).
20. Г. Генкин, Ю. Отмахов, Е. Розенблюм, ФТТ 5, 2968 (1958).
21. E. Stern, E. Callen, Phys. Rev. 131, 512 (1963); А. Бланк, М. Каганов, Юй-Лу, ЖЭТФ 47, 1268 (1964); В. Барьяхтар, М. Савченко, К. Степанов, ЖЭТФ 50, 576 (1966).

### К главе III

1. С. Kittel, Phys. Rev. 71, 270 (1947).
2. J. Griffiths, Nature 158, 670 (1946).
3. J. Artman, Proc. IRE 44, 1284 (1956); Phys. Rev. 105, 62 (1957).
4. Г. Скрацкий, Л. Курбатов, Феноменологическая теория ферромагнитного резонанса. Статья в сб. «Ферромагнитный резонанс». Физматгиз, М., 1961.
5. С. Kittel, Phys. Rev. 82, 565 (1952); F. Keffer, С. Kittel, Phys. Rev. 85, 329 (1952).
6. Е. Боровик-Романов, И. Калинкина, Н. Крейнс, Л. Прозорова, Е. Рудашевский, Physics and Techniques of Low Temperature Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Regional Conference held in Prague, 1963.
7. Е. Туров, Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов, Изд-во АН СССР, М., 1963.
8. J. Mercereau, R. Feynman, Phys. Rev. 104, 63 (1956); R. White, I. Solt, J. Mercereau Bull. Am. Phys. Soc. 2, 1, 12 (1956); R. White, I. Solt, Phys. Rev. 104, 56 (1956); J. Dillon, Bull. Am. Phys. Soc. 2, 1, 125 (1956).
9. L. Walker, Phys. Rev. 105, 310 (1957); Magnetism, vol. 1, A. P., N. Y. and L., (1963), стр. 299.
10. J. Eshbach, R. Damon, Phys. Rev. 118, 1208 (1960); R. Damon, J. Eshbach, J. Phys. Chem. Solids 19, 308 (1961); В. Барьяхтар, М. Каганов, Неоднородный резонанс и спиновые волны. Статья в сб. «Ферромагнитный резонанс». Физматгиз, 1961.
11. С. Kittel, Phys. Rev. 110, 1295 (1958).
12. Z. Frait, Phys. st. sol. 2, 1417 (1962).
13. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.

14. W. Ament, G. Rado, Phys. Rev. **97**, 1558 (1955).
15. В. Гуревич, ЖЭТФ **33**, 1497 (1957); **28**, 2352 (1958).
16. М. Каганов, Юй-Лу, Изв. АН СССР, сер. физ., **25**, 1375 (1961).
17. H. Suhl, J. Phys. Chem. Solids **1**, 209 (1957).
18. R. Damon, Magnetism, AP, N. Y. and L., vol. **1** (1963); стр. 551.
19. E. Schlömann, J. Green, U. Milans, J. Appl. Phys. **31**, 386 (1960).
20. А. Гуревич, ФТТ **6**, 2376 (1964).
21. А. Ахиезер, В. Барьяхтар, С. Пелетминский, ЖЭТФ **45**, 337 (1963).
22. В. Барьяхтар, З. Махмудов, ЖЭТФ **47**, 593 (1964).
23. И. Ахиезер, ЖЭТФ **49**, 298 (1965).
24. Г. Смоленский, А. Гуревич, Ферромагнитные полупроводники, статья в сб. «Полупроводники в науке и технике», т. 2. Изд-во АН СССР, 1958, стр. 349.

#### К главе IV

1. А. Ахиезер, В. Барьяхтар, С. Пелетминский, ЖЭТФ **35**, 228 (1958).
2. С. Kittel, Phys. Rev. **110**, 836 (1958).
3. H. Tiersten, J. Math. Phys. **5**, 1298 (1964).
4. К. Власов, ФММ **20**, 3 (1965).
5. Е. Туров, Ю. Ирхин, ФММ **3**, 15 (1956).
6. С. Пелетминский, ЖЭТФ **37**, 452 (1959); В. Барьяхтар, М. Савченко, В. Ганн, П. Рябко, ЖЭТФ **47**, 1989 (1964); М. Савченко, ФТТ **6**, 864 (1964); В. Барьяхтар, С. Савченко, В. Тарасенко, ЖЭТФ **49**, 944 (1965).
7. И. Ахиезер, Ю. Болотин, ЖЭТФ **52**, 482 (1966).
8. M. Romerantz, Phys. Rev. Letters **7**, 312 (1961).
9. К. Власов, Б. Ишмухаметов, ЖЭТФ, **36**, 1301 (1959), **37**, 1745 (1959); **46**, 201 (1964).
10. H. Matthews, R. Le Craw, Phys. Rev. Letters **8**, 397 (1962).
11. E. Schlömann, J. of Appl. Phys. **35**, 159 (1964).

#### К главе V

1. T. Holstein, H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, 1098 (1940).
2. А. Ахиезер, J. Phys. USSR **10**, 217 (1946).
3. Н. Боголюбов, С. Тябликов, ЖЭТФ **19**, 257 (1948); С. Тябликов, Методы квантовой теории магнетизма. Изд-во «Наука», М., 1965.
4. С. Kittel, E. Abrahams, Rev. Mod. Phys. **25**, 233 (1953)
5. H. Bethe, Zs. f. Phys. **71**, 205 (1931).
6. M. Wortis, Phys. Rev. **132**, 85 (1963).

#### К главе VI

1. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Статистическая физика, Изд-во «Наука», М., 1964.
2. T. Holstein, H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, 1098 (1940).
3. F. Bloch Zs. f. Phys. **61**, 206 (1930).

4. М. Каганов, В. Цукерник, ФММ 5, 561 (1957).
5. Е. Туров, Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов, Изд-во АН СССР, М., 1963.
6. Т. Oguchi, Phys. Rev. 117, 117 (1960).
7. R. Kubo, Phys. Rev. 87, 568 (1952); С. Тябликов, ФММ 2, 193 (1956).
8. М. Каганов, В. Цукерник, ЖЭТФ 34, 106 (1958).
9. Е. Туров, Ю. Ирхин, Изв. АН СССР, сер. физ. 22, 1168 (1958).
10. А. Боровик-Романов, Итоги науки, 4 Изд-во АН СССР (1962).
11. В. Барьяхтар, В. Попов, УФЖ 6, 340 (1961).
12. А. Абрикосов, Л. Горьков, И. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, М., 1962; Б. Бонч-Бруевич, С. Тябликов, Методы функций Грина в статистической механике, Физматгиз, М., 1961.
13. R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan 12, 570 (1957).
14. Н. Боголюбов, С. Тябликов, ДАН СССР 126, 53 (1959); С. Тябликов, Укр. матем. ж. 11, 287 (1959).
15. С. Вонсовский, Изв. АН СССР, сер. физ., 11, 485 (1947); В. Гинзбург, ЖЭТФ 17, 833 (1947).
16. R. Tahir-Kheli, D. Ter Haar, Phys. Rev. 127, 38 (1962); 127, 95 (1962); Н. Callen, Phys. Rev. 130, 890 (1963).
17. В. Барьяхтар, Л. Шишкин, ФММ 17, 664 (1964).
18. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
19. И. Ахиезер, Ю. Болотин, ЖЭТФ 52, 451 (1966).
20. O. Halpern, M. Johnson, Phys. Rev. 55, 898 (1939); С. Малеев, ЖЭТФ 33, 1010 (1957); 34, 1518 (1958).
21. С. Малеев, ЖЭТФ 40, 1224 (1961).
22. А. Ахиезер, И. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат М., 1950; Ю. Изюмов, Р. Озеров, Магнитная нейтронография, Изд-во «Наука», М., 1966.
23. Ф. Басс, М. Каганов, ЖЭТФ 37, 1390 (1959).
24. Y. Shen, N. Bloembergen, Phys. Rev. 143, 372 (1965).
25. И. Ахиезер, Ю. Болотин, ЖЭТФ 52, 1084 (1966).
26. А. Ахиезер, В. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Физматгиз, 1959.

## К главе VII

1. А. Ахиезер, J. Phys. USSR 10, 217 (1940).
2. E. Schlömann, Phys. Rev. 121, 1312 (1961).
3. М. Каганов, В. Цукерник, ЖЭТФ 35, 474 (1958); 36, 224 (1959).
4. М. Кривоглаз, В. Кашеев, ФТТ 3, 1541 (1961).
5. А. Ахиезер, В. Барьяхтар, С. Пелетминский, ЖЭТФ 36, 216 (1959).
6. A. Clogston, H. Shul, L. Walker, P. Anderson, Phys. Rev. 101, 903 (1956); Phys. Chem. Solids 1, 129 (1956); M. Sparks, R. London, C. Kittel, Phys. Rev. 122, 791 (1961); С. Хаас, Н. Callen, Magnetism, vol. I, 450 AP (1963).

7. Л. Гуревич, Г. Роман, ФТТ 8, 525 (1966); В. Барьяхтар, Г. Урушадзе, ЖЭТФ 39, 335 (1960).
8. С. Вонсовский, ЖЭТФ 16, 981 (1946); С. Вонсовский, Е. Туров, ЖЭТФ 24, 419 (1953).
9. В. Барьяхтар, Г. Урушадзе, ЖЭТФ 38, 1253 (1960).
10. А. Ахиезер, Л. Шишкин, ЖЭТФ 34, 1267 (1958); А. Ахиезер, В. Барьяхтар, ФТТ 2, 2442 (1960).
11. Р. Гуржи, ЖЭТФ 45, 750 (1963).
12. Р. Гуржи, ФТТ 7, 3515 (1965).
13. Н. Померанчук, J. Phys. USSR 6, 247 (1942).

#### К главе VIII

1. F. Dyson, Phys. Rev. 102, 1217, 1230 (1956).
2. С. Малеев, ЖЭТФ 33, 1010 (1957).
3. С. Пелетминский, В. Барьяхтар, ФТТ 6, 219 (1964).
4. А. Абрикосов, Л. Горьков, И. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, 1962.
5. И. Ахиезер, В. Барьяхтар, С. Пелетминский, ЖЭТФ 40, 365 (1961).
6. М. Кривоглаз, В. Кашеев, ФТТ 3, 1541 (1961).

#### К дополнению

1. S. Schultz, G. Dunifer, Observation of spin waves in sodium and potassium. Phys. Rev. Letters 18, № 8, 283 (1967).
2. P. M. Platzman, P. A. Wolff, Spin-wave excitation in non-ferromagnetic metals. Phys. Rev. Letters 18, № 8, 280 (1967).
3. В. П. Силин, Колебания вырожденной электронной жидкости. ЖЭТФ 35, 1243 (1958).
4. Л. Д. Ландау, Теория ферми-жидкости. ЖЭТФ 30, 1058 (1956).
5. В. П. Силин, К теории вырожденной электронной жидкости. ЖЭТФ 33, 495 (1957).
6. D. Pines, Electron interaction in metals. Solid state physics 1, 367 (1955).
7. В. П. Силин, К теории коллективного описания взаимодействия электронов в твердом теле. ФММ 3, 193 (1956).
8. В. П. Силин, Об оптических свойствах металлов в инфракрасной области. ЖЭТФ 34, 707 (1958).
9. F. Bloch, Nuclear induction. Phys. Rev. 70, 460 (1946).
10. В. П. Силин, К кинетике парамагнитных явлений. ЖЭТФ 30, 421 (1956).
11. F. J. Dyson, Electron spin resonance absorption in metals. Phys. Rev. 98, 349 (1955).
12. Л. Д. Ландау, Колебания ферми-жидкости. ЖЭТФ 32, 59 (1957).
13. М. Я. Азбель, В. И. Герасименко, И. М. Лифшиц, Парамагнитный резонанс и поляризация ядер в металлах. ЖЭТФ 32, 1212 (1957).

