

А. АХИЕЗЕР и И. ПОМЕРАНЧУК

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЯДРА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

АННОТАЦИЯ

Обзорная монография, посвящённая ряду вопросов ядерной физики, для решения которых несущественна точная теория ядерных сил.

Второе издание книги существенно переработано. Учтены дальнейшие успехи как в теоретической, так и в экспериментальной области физики атомного ядра. Рассмотрен ряд новых вопросов и добавлена глава о замедлении нейтронов.

Редактор *В. А. Лешковцев.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*

Подписано к печати 31/VIII 1950 г. Бумага 84×108^{1/2}. 6,5 бум. л. 21,32 печ. л.
22,07 уч.-изд. л. 41 428 тип. зн. в печ. л. Т-05135. Тираж 5 000 экз.
Цена книги 13 руб. 25 коп. Переплёт 2 р. Заказ 1800.

4-я тип. им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	5
Предисловие к первому изданию	6
Глава I. Взаимодействие нейтронов с протонами	7
§ 1. Введение	7
§§ 2. Основное состояние дейтрона	11
§ 3. Рассеяние медленных нейтронов протонами	20
§ 4. Нецентральный характер ядерных сил и классификация состояний системы нейтрон + протон	33
§ 5. Квадрупольный и магнитный моменты дейтрона	38
§§ 6. Рассеяние нейтронов в пара- и ортоводороде	51
§§ 7. Рассеяние нейтронов связанными протонами	67
§ 8. Рассеяние быстрых нейтронов протонами и обменный характер ядерных сил	74
§ 9. Излучение под действием обменных сил	79
§ 10. Рассеяние протонов протонами	84
§ 11. Захват нейтронов протонами	96
§ 12. Фоторасщепление дейтрона	110
§ 13. Расщепление дейтрона в кулоновском поле ядра	121
§ 14. Расщепление быстрого дейтрона при столкновении с ядром	134
Глава II. Статистические свойства тяжёлых ядер	146
§ 15. Составное ядро	146
§ 16. Термодинамика тяжёлых ядер	154
§ 17. Вероятности упругих и неупругих столкновений	162
§ 18. Вероятность образования составного ядра	170
§ 19. Распад составного ядра	177
§ 20. Дифракционное рассеяние быстрых нейтронов поглощающими ядрами	186
§ 21. Дифракционное рассеяние быстрых нейтронов полупрозрачными ядрами	198
§ 22. Дифракционное рассеяние быстрых заряженных частиц	204

Глава III. Резонансные явления	219
§ 23. Дисперсионная формула	219
§ 24. Теория резонансного рассеяния	227
§ 25. Захват медленных нейтронов свободными ядрами	241
§ 26. Нейтронная и радиационная ширина	252
§ 27. Усреднённые эффективные сечения	258
§ 28. Ядерные реакции с заряженными частицами	264
§ 29. Столкновения дейтронов с тяжёлыми ядрами	272
Глава IV. Замедление нейтронов	280
§ 30. Кинетическое уравнение	280
§ 31. Функция распределения нейтронов по энергиям	285
§ 32. Средний квадрат длины замедления	293
§ 33. Диффузионное приближение	300
Глава V. Деление тяжёлых ядер	311
§ 34. Механизм деления	311
§ 35. Вероятность деления	321
§ 36. Цепная реакция	327
§ 37. Пример определения критических размеров при реакции на быстрых нейтронах	341
Глава VI. Взаимодействие медленных нейтронов с веществом	352
§ 38. Захват медленных нейтронов в кристаллах	352
§ 39. Упругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах	365
§ 40. Неупругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах	383
§ 41. Переход к рассеянию свободными ядрами	395
§ 42. Функция распределения нейтронов в кристалле	400
§ 43. Рефракция нейтронов	405
Литература	411
Предметный указатель	415

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание этой книги сильно переработано по сравнению с первым изданием, вышедшим в 1948 г. В особенности значительны изменения и дополнения в первых двух главах, посвящённых взаимодействию нейтронов с протонами и статистическим свойствам тяжёлых ядер.

Помимо материала, содержащегося в первом издании, в новое издание включена теория замедления нейтронов (глава IV), а также рассмотрен ряд новых вопросов, например, рассеяние быстрых нейтронов протонами и обменный характер ядерных сил, излучение при обменных столкновениях, расщепление дейтронов в кулоновском поле, особенности подбарьерных реакций, вызываемых дейтронами, диффракционное рассеяние частиц поглощающими и полупрозрачными ядрами, рефракция нейтронов в намагниченных кристаллах и т. д.

По сравнению с первым изданием изменено изложение вопросов о нецентральной характере ядерных сил, об эффективном радиусе действия ядерных сил и др.

Авторы выражают благодарность проф. Е. М. Лифшицу за его ценные советы и помощь. Авторы благодарны также редактору книги В. А. Лешковцеву за чрезвычайно внимательное отношение к книге.

А. Ахиезер, И. Померанчук

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Теоретическое изучение свойств атомных ядер находится в настоящее время в самой начальной стадии ввиду отсутствия точной теории ядерных сил.

Имеются, однако, такие ядерные процессы, многие свойства которых не зависят от детальной картины взаимодействия между ядерными частицами. Рассмотрению таких процессов посвящена настоящая книга. При этом главное внимание уделено процессам, в которых участвуют нейтроны.

Первые четыре главы представляют собой изложение ряда работ, опубликованных в различных журналах. Последняя (пятая) глава основана на уже опубликованных ранее работах авторов.

Авторы, не претендуя ни на полноту, ни на оригинальность изложения, тем не менее решились на издание этой книги ввиду отсутствия монографии, содержащей сколько-нибудь полное и современное изложение рассматриваемых ниже вопросов.

Мы хотели бы здесь поблагодарить Л. Д. Ландау, И. Е. Тамма и Я. А. Смородинского за их ценные критические замечания.

А. Ахиезер, И. Померанчук

ГЛАВА I

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЙТРОНОВ С ПРОТОНАМИ

§ 1. Введение

Между элементарными частицами, образующими атомные ядра, — нейтронами и протонами — действуют специфические ядерные силы, которые не сводятся ни к электромагнитным, ни к гравитационным силам. Эти силы действуют между ядерными частицами независимо от того, обладают ли они электрическим зарядом (протоны) или являются нейтральными (нейтроны). О природе ядерных сил мы знаем в настоящее время очень мало. Хорошо известно лишь, что эти силы характеризуются очень малым радиусом действия и чрезвычайно большой интенсивностью.

Если характеризовать взаимодействие между нейтроном и протоном некоторой потенциальной ямой, то её эффективная глубина будет равна приблизительно 30—40 MeV, а ширина порядка $2 \cdot 10^{-13}$ см. Для оценки величины можно сравнить глубину этой ямы с энергией электростатического взаимодействия между двумя протонами, находящимися на расстоянии 10^{-13} см, которая по порядку величины равняется всего 0,5 MeV.

По всей вероятности ядерные силы в значительной степени носят обменный характер; это значит, что взаимодействие между двумя ядерными частицами сводится к испусканию одной из них некоторых новых частиц и поглощению их второй ядерной частицей. Этот вывод вытекает из анализа данных по рассеянию быстрых нейтронов протонами (см. § 8).

Так как ядерные силы не сводятся к электромагнитным силам (их величина в случае пары протонов гораздо больше, чем сила электрического взаимодействия между протонами,

см. § 10), то, повидимому, наличие заряда у ядерной частицы не является существенным для порядка величины ядерного взаимодействия. Можно думать, что ядерные силы, действующие между любой парой ядерных частиц, по порядку величины одинаковы. К такому выводу приводит анализ опытов по рассеянию нейтронов протонами и протонов протонами.

Ядерные силы обуславливают рассеяние нейтронов протонами и приводят к образованию связанного состояния в системе нейтрон + протон — дейтрона. Они приводят также к специфическому рассеянию протонов протонами, которое не сводится к рёзерфордскому рассеянию, обусловленному электрическим взаимодействием между протонами.

Отсутствие детальной теории ядерных сил делает в настоящее время невозможным систематическое теоретическое изучение различных ядерных процессов. В этих условиях особое значение приобретает изучение перечисленных выше ядерных процессов, происходящих в простейшей системе, состоящей из двух частиц.

Чрезвычайно существенным является то обстоятельство, что в области малых энергий взаимодействующих частиц для описания различных ядерных процессов не требуется последовательной теории ядерных сил [1]. Это утверждение справедливо в том случае, если энергия частиц мала по сравнению с эффективной величиной энергии ядерного взаимодействия V_0 и если, кроме того, длина волны λ , отвечающая относительному движению частиц, велика по сравнению с радиусом действия ядерных сил r_0 . В случае взаимодействия нейтрона с протоном равенство $\lambda = r_0$ имеет место при энергии нейтрона ~ 20 MeV. Так как эффективная величина энергии ядерного взаимодействия V_0 составляет в области действия ядерных сил несколько десятков MeV, то при выполнении условия $\lambda \gg r_0$ будет выполнено также условие $E \ll V_0$. Поэтому высказанное выше утверждение о возможности описания ядерных процессов в области малых энергий без детальной теории ядерных сил оказывается справедливым, если длина волны частиц значительно больше, чем радиус действия ядерных сил.

В последующих параграфах мы подробно рассмотрим этот случай малых относительных энергий ядерных частиц (нейтрона и протона, а также двух протонов) и убедимся в том, что

вероятности различных процессов, происходящих в системе нейтрон—протон (захват нейтрона протоном, фоторасщепление дейтрона), а также энергия связи и другие величины, характеризующие дейтрон. выражаются через небольшое число параметров совершенно независимо от природы ядерных сил. Существенным является лишь то, что ядерные силы характеризуются очень малым радиусом действия.

Как мы увидим далее, ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов взаимодействующих частиц, причём в связанном состоянии спины нейтрона и протона имеют одинаковую ориентацию.

Мы будем сначала предполагать, что силы, действующие между нейтроном и протоном, центральны, но могут, однако, зависеть от взаимной ориентации спинов обеих частиц. Из этого предположения следует, что рассеяние медленных нейтронов протонами, когда длина волны, отвечающая относительному движению частиц, значительно больше радиуса действия ядерных сил, должно быть сферически симметричным (в системе отсчёта, где покоится центр инерции частиц, см. § 3).

Очень малая величина радиуса действия ядерных сил даёт возможность при рассмотрении различных процессов, в которых участвуют медленные ядерные частицы, исходить из задачи о свободных частицах, взаимодействие же между ними учитывать в виде некоторого граничного условия, которому должна удовлетворять волновая функция частиц (§ 3). Это граничное условие состоит в том, что логарифмическая производная радиальной волновой функции системы нейтрон—протон должна иметь определённое значение, когда расстояние между частицами по порядку величины равно радиусу действия ядерных сил (в первом приближении можно просто считать, что радиус действия ядерных сил равен нулю). Величина этой логарифмической производной определяется ядерными силами и является основным параметром, определяющим различные процессы в системе нейтрон—протон. Важно отметить, что этот параметр определяет и сечение рассеяния медленных нейтронов протонами и различные величины, относящиеся к связанному состоянию системы нейтрон—протон.

Так как ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов частиц, то введённый выше параметр имеет разные значения для двух возможных ориентаций спинов нейтрона и

протона. При этом оказывается, что только отрицательным значениям введённого параметра может отвечать связанное состояние системы нейтрон + протон. Поэтому весьма важно выяснить, какой знак имеет этот параметр при параллельной и антипараллельной ориентации спинов нейтрона и протона. Теоретически на этот вопрос при современном состоянии теории ядерных сил ответить нельзя.

Опыты по рассеянию медленных нейтронов свободными протонами также не дают возможности ответить на этот вопрос, так как в формулу для сечения рассеяния медленных нейтронов протонами входит квадрат этого параметра. Ниже мы увидим (см. § 6), что, изучая рассеяние медленных нейтронов в молекулярном пара- и ортоводороде, можно путём сравнения теоретических выводов с экспериментальными результатами показать, что связанное состояние системы нейтрон + протон возможно только при параллельной ориентации спинов. Иными словами, в дейтроне спины частиц имеют одинаковую ориентацию.

Оказывается, что дейтрон не может находиться в возбуждённых состояниях и что энергия его единственного уровня, т. е. энергия связи дейтрона, очень просто выражается через значение указанного выше параметра, относящегося к случаю параллельной ориентации спинов частиц. Таким образом, рассеяние медленных нейтронов протонами с одинаковой ориентацией спинов определяется в конечном счёте энергией связи дейтрона.

Если исходить из центрального характера ядерных сил, то волновую функцию дейтрона следует считать сферически симметричной. Иначе говоря, основное состояние дейтрона должно быть S -состоянием.

Опыты показывают, что дейтрон обладает квадрупольным электрическим моментом. Это обстоятельство противоречит сделанному выше предположению о том, что основным состоянием дейтрона является S -состояние, так как в последнем распределение зарядов обладает сферической симметрией, и поэтому квадрупольный момент должен равняться нулю. Чтобы объяснить существование квадрупольного момента дейтрона, необходимо предположить, что основное состояние дейтрона не описывается чистой S -волной, а является суперпозицией S -волны и одной или нескольких волн, отвечающих значениям

углового момента, отличным от нуля. Ниже мы увидим (см. § 5), что основным состоянием дейтрона следует считать суперпозицию S - и D -волн, причём «примесь» D -волны к S -волне составляет всего лишь несколько процентов.

Наличие D -волны в основном состоянии дейтрона показывает, что предположение о центральном характере ядерных сил является неверным. В действительности силы, действующие между нейтроном и протоном, не являются строго центральными. Это значит, что они, помимо расстояния между частицами, зависят ещё от ориентации общего спина по отношению к радиусу-вектору, соединяющему обе частицы. Отклонением от центрального характера сил и объясняется существование квадрупольного момента дейтрона.

Однако это отклонение в области малых энергий (которой мы будем главным образом заниматься в этой главе) в общем несущественно (если не считать квадрупольного момента дейтрона); поэтому при рассмотрении целого ряда вопросов вполне законно пользоваться предположением о центральном характере ядерных сил и считать основным состоянием дейтрона S -состояние.

Приступая сейчас к подробному рассмотрению различных процессов, связанных с существованием взаимодействия между нейтроном и протоном, мы будем вначале исходить из предположения о центральном характере сил, действующих между нейтроном и протоном.

Начнём с вопроса о связанном состоянии системы нейтрон + протон.

§ 2. Основное состояние дейтрона

Если отвлечься от спина и считать, что между нейтроном и протоном действуют центральные силы, то можно утверждать, что основному состоянию дейтрона отвечает момент относительного количества движения нейтрона и протона, равный нулю *). Иными словами, основным состоянием дейтрона будет S -состояние.

*) См. любой курс квантовой механики.

Волновая функция этого состояния может быть представлена в виде

$$\psi = \frac{u(r)}{r},$$

где $u(r)$ — некоторая функция от расстояния между нейтроном и протоном. Подставляя это выражение в уравнение Шредингера для относительного движения частиц

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)]\psi = 0,$$

где E — энергия системы, равная $-\varepsilon$, ε — энергия связи дейтрона, и m — приведённая масса частиц, приближённо равная $\frac{M}{2}$ (M — масса нейтрона), мы придём к следующему уравнению для u :

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{M}{\hbar^2} [\varepsilon + V(r)] u = 0. \quad (2.1)$$

Величина энергии связи дейтрона может быть определена экспериментально из опытов по фоторасщеплению дейтронов и оказывается равной [3]

$$\varepsilon \approx 2,19 \text{ MeV.}$$

В области действия ядерных сил ($r \leq r_0$) потенциальная энергия $V(r)$ гораздо больше ε (см. ниже), поэтому при $r \leq r_0$ в уравнении (2.1) можно пренебречь ε по сравнению с $V(r)$:

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{M}{\hbar^2} V(r) u = 0, \quad r \leq r_0. \quad (2.1')$$

Вне области действия ядерных сил ($r > r_0$) можно, напротив, в уравнении (2.1) пренебречь $V(r)$ по сравнению с ε . Поэтому в этой области мы получаем уравнение для «свободных» частиц, которые, однако, не удаляются на бесконечность

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{M\varepsilon}{\hbar^2} u = 0, \quad r \geq r_0. \quad (2.1'')$$

Решение уравнения (2.1'') имеет вид

$$u = \text{const.} \cdot e^{-\frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar} r}. \quad (2.2)$$

Это решение должно быть «сшито» с неизвестным нам решением уравнения (2.1'). Такое «сшивание» означает, что решения уравнений (2.1') и (2.1''), а также их первые производные по r должны непрерывно переходить друг в друга при $r = r_0$. Иными словами, должно выполняться условие

$$\alpha \equiv - \left(\frac{u'}{u} \right)_{\substack{\text{внутри} \\ r=r_0}} = \frac{\sqrt{M\epsilon}}{\hbar}, \quad (2.3)$$

где α — сокращённое обозначение для логарифмической производной решения уравнения (2.1') при $r = r_0$. Эта величина определяется потенциальной энергией $V(r)$, но при современном состоянии теории ядра не может быть найдена теоретически *).

Величина $\frac{1}{\alpha} = \frac{\hbar}{\sqrt{M\epsilon}}$ характеризует размеры дейтрона и может быть названа «радиусом» дейтрона. Эта величина в несколько раз больше, чем радиус действия ядерных сил, так что можно сказать, что частицы в дейтроне проводят значительную (может быть даже большую) часть времени вне области действия ядерных сил.

Таким образом, вне области действия ядерных сил волновая функция дейтрона экспоненциально убывает с расстоянием. Внутри области действия ядерных сил функция (2.2) не передаёт истинного характера решения уравнения (2.1'). Действительно, при малых r точная функция должна быть пропорциональной r (радиальная функция, отвечающая моменту количества движения $\hbar l$, ведёт себя при $r \rightarrow 0$ как r^{l+1} **), тогда как (2.2) при $r \rightarrow 0$ перестаёт зависеть от r . Тем не менее, функция (2.2) при надлежащем выборе постоянной может быть использована в качестве приближённого представления истинной волновой функции дейтрона при всех r . Это связано с тем, что «радиус» дейтрона превосходит радиус действия ядерных сил. Рис. 1 служит для иллюстрации этого обстоятельства. Как видно из этого рисунка, большая часть площади, ограниченной кривой $u(r)$, относится к области $r > r_0$.

*) Изложенный подход к рассмотрению проблемы дейтрона принадлежит Бете и Пайерлсу [1-3].

**) См. любой курс квантовой механики.

Покажем сейчас, как следует пронормировать функцию (2.2). При решении этой задачи мы не будем пользоваться конкретным видом потенциальной функции $V(r)$.

Рассмотрим уравнение *)

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{M}{\hbar^2} [V(r) - \eta] f = 0, \quad (2.4)$$

где $V(r)$ — энергия взаимодействия нейтрона и протона, η — параметр, принимающий произвольные значения. На функцию $f(r)$ мы не накладываем никаких ограничений на бесконечности, поэтому написанное уравнение имеет решение

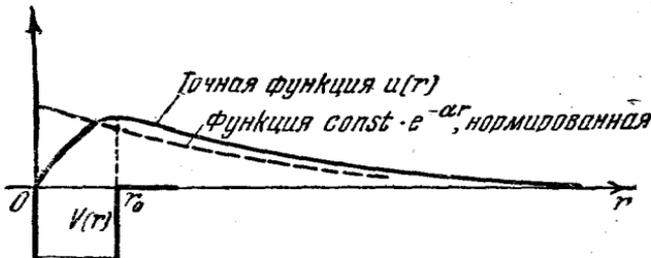


Рис. 1.

при любом η . Считая f функцией r и η и дифференцируя уравнение (2.4) по η , получим после умножения на f

$$f \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{M}{\hbar^2} f V(r) \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{M}{\hbar^2} (f^2 + \eta f \frac{\partial f}{\partial \eta}) = 0. \quad (2.4')$$

Используя (2.4), приведём (2.4') к следующему виду:

$$f^2 = \frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - f \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \equiv - \frac{\hbar^2}{M} \frac{\partial}{\partial r} f^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} \right),$$

откуда следует, что

$$\int_0^R f^2 dr = - \frac{\hbar^2}{M} f^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \Big|_{r=0}^{r=R}. \quad (2.4'')$$

*) Ниже мы следуем Я. Смородинскому [4].

Применим это соотношение к точному решению уравнения (2.1). Так как это решение обращается в нуль при $r = 0$, то

$$\int_0^R u^2 dr = -\frac{\hbar^2}{M} \left(u^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{\eta=-\varepsilon, r=R}. \quad (2.4''')$$

Рассмотрим теперь решение уравнения

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} \eta v = 0, \quad (2.5)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$-\left(\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=0} = \gamma, \quad (2.5')$$

где γ — некоторая константа.

Этим решением при надлежащем выборе величины γ мы будем пользоваться в качестве приближённого представления точного решения уравнения (2.4). Такое приближение основано на малости радиуса действия ядерных сил, благодаря чему задача о движении в силовом поле сводится к задаче о свободном движении с некоторым граничным условием. Так как мы хотим пользоваться решением $v(r)$ вплоть до $r = 0$, то граничное условие мы предполагаем имеющим вид (2.5'). Входящая сюда константа γ определяется не учитываемой в уравнении для v энергией взаимодействия $V(r)$. Выражаясь точнее, следует сказать, что γ должна зависеть также и от η , так как в области действия ядерных сил в точное уравнение (2.4) потенциальная энергия входит в виде суммы с величиной η . Мы будем, далее, предполагать, что в интересующем нас случае малых энергий (соответственно — малых значений η) величина γ имеет следующий вид:

$$\gamma = A + B\eta, \quad (2.5'')$$

где A , B не зависят от η . В следующем параграфе мы убедимся в законности выражения (2.5''), представляющего собой разложение γ в ряд по степеням η . Там будет показано, что величина γ определяет в конечном счёте сечение рассеяния медленных нейтронов протонами, поэтому из сравнения экспериментальных и теоретических данных по рассеянию нейтронов протонами могут быть найдены величины A и B . Эти

величины зависят от относительной ориентации спинов нейтрона и протона. Для параллельной ориентации, осуществляющейся в дейтроне, A и B имеют следующие значения [4]:

$$A = 1,58 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-1}, \quad B = -0,15 \text{ см}^{-1} \cdot (\text{MeV})^{-1}.$$

Заметим, что эти величины связаны с энергией связи дейтрона ε соотношением

$$\alpha = \frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar} = \gamma(-\varepsilon) = A - B\varepsilon.$$

Возвратимся к уравнению (2.4'') и подставим в него функцию $v(r)$, отвечающую значению η , равному $-\varepsilon$.

Используя (2.5') и (2.5''), получим:

$$\int_0^R v^2 dr = -\frac{\hbar^2}{M} v^2(0) B_{\eta=-\varepsilon} - \frac{\hbar^2}{M} v^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=R, \eta=-\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Мы предположим теперь, что нормировочный множитель C

в функции $v(r)_{\eta=-\varepsilon} = C e^{-\frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar} r}$ выбран таким образом, чтобы на достаточно больших расстояниях функции $u(r)$ и $v(r)$ совпадали. Считая R достаточно большим, мы получим из (2.4''') и (2.6):

$$\int_0^\infty u^2 dr - \int_0^\infty v^2 dr = \frac{\hbar^2}{M} C^2 B. \quad (2.6')$$

Предполагая функцию $u(r)$ нормированной согласно условию

$$\int_0^\infty u^2 dr = \frac{1}{4\pi},$$

что соответствует нормировке функции $\psi = \frac{u}{r}$ во всём объёме на единицу, и замечая, что

$$\int_0^\infty v^2 dr = C^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha r} dr = \frac{1}{2\alpha} C^2, \quad \alpha = \frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar},$$

найдем из (2.6')

$$C^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\frac{1}{2\alpha} + \frac{\hbar^2}{M} B}.$$

Подставляя сюда указанное выше значение B , получим окончательно:

$$C = \frac{\sqrt{3\alpha}}{\sqrt{4\pi}}.$$

Поэтому правильно нормированная приближенная функция дейтрона имеет вид [4]

$$u(r) = \sqrt{\frac{3\alpha}{4\pi}} e^{-\alpha r}. \quad (2.7)$$

Выше мы неоднократно говорили, что потенциальная энергия взаимодействия между нейтроном и протоном $V(r)$ достигает очень больших значений в области действия ядерных сил. Покажем сейчас, как оценить величину энергии этого взаимодействия. С этой целью рассмотрим волновое уравнение (2.1) для основного состояния дейтрона и проинтегрируем его по r от $r=0$ до $r=r_0$ (мы предполагаем, что ядерные силы являются короткодействующими и что при $r \approx r_0$ функция $V(r)$ практически становится равной нулю). В результате интегрирования получим:

$$(u')_{r=r_0} - (u')_{r=0} = \frac{M}{\hbar^2} \int_0^{r_0} V(r) u \, dr + \frac{M\epsilon}{\hbar^2} \int_0^{r_0} u \, dr. \quad (2.8)$$

Значение производной u' в точке $r=r_0$ меньше значения u' в точке $r=0$, так как при $r \approx r_0$ функция u начинает убывать (и обращается в нуль при $r \rightarrow \infty$). Поскольку при малых r функция u ведёт себя как $\text{const.} \cdot r$, значение модуля левой части не превосходит $2 \cdot |\text{const.}|$. В правой части уравнения (2.8) можно пренебречь вторым интегралом по сравнению с первым, так как в области действия ядерных сил $|V(r)|_{r < r_0} \gg \epsilon$ (это неравенство будет подтверждено в дальнейшем). Поэтому из (2.8) следует, что

$$\int_0^{r_0} V(r) r \, dr = -\frac{\hbar^2}{M} N, \quad (2.8')$$

где N по порядку величины равно единице. Входящий в (2.8') интеграл мы заменим на $-V_0 r_0^3$, где V_0 — некоторая средняя эффективная величина энергии ядерного взаимодействия. Таким образом, мы придём к весьма важному соотношению

$$V_0 r_0^3 \approx \frac{\hbar^2}{M}, \quad (2.9)$$

связывающему по порядку величины эффективные глубину и ширину потенциальной «ямы», характеризующей взаимодействие между нейтроном и протоном в дейтроне. Обратим внимание на то обстоятельство, что это соотношение получено из самого факта существования дейтрона и никак не связано с конкретным видом функции $V(r)$, т. е. не зависит от формы потенциальной ямы*).

Если считать по порядку величины $r_0 \sim 2 \cdot 10^{-13}$ см, то мы получим для V_0 величину порядка 40 MeV, которая значительно превосходит энергию связи дейтрона $\epsilon \approx 2,19$ MeV.

В заключение этого параграфа остановимся на вопросе о возбуждённых состояниях дейтрона.

Легко показать, что в предположении центрального характера ядерных сил у дейтрона не может быть возбуждённых состояний, отвечающих значениям относительного момента количества движения нейтрона и протона, отличным от нуля; иначе говоря, невозможны P , D , ... -состояния дейтрона. Это обстоятельство связано с тем, что уровни с $l \neq 0$ лежат гораздо выше, чем уровень с $l = 0$ (S -состояние), так как в состояниях с отличным от нуля орбитальным моментом добавляется центробежная энергия. Среднее значение этой энергии, равной, как известно, $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{Mr^2}$, может быть оценено, если вместо r подставить «радиус» дейтрона, т. е. $\frac{\hbar}{\sqrt{M\epsilon}}$.

При $l = 1$ мы получим величину, равную 2ϵ , иначе говоря, уже P -состояние должно лежать в области непрерывного спектра.

*) В случае ямы прямоугольной формы справа в (2.9) стоит ещё численный множитель $\frac{\pi^2}{4}$ [2].

Таким образом, можно сказать, что отсутствие возбуждённых состояний у дейтрона, отвечающих значениям $l \neq 0$, связано с аномально малой величиной энергии связи дейтрона в масштабах ядерных энергий.

Сделанный нами вывод об отсутствии возбуждённых состояний с $l \neq 0$ у дейтрона основан на предположении о центральном характере ядерных сил. В действительности, как мы увидим далее, ядерные силы не являются строго центральными; энергия взаимодействия между нейтроном и протоном, помимо расстояния между ними, зависит ещё от ориентации спинов нейтрона и протона по отношению к радиус-вектору, соединяющему эти частицы. Иначе говоря, имеет место взаимодействие между орбитальным движением частиц и их спином. Только в том случае, если бы это взаимодействие приводило к почти полной компенсации действия центробежной энергии, можно было бы ожидать существования возбуждённых состояний дейтрона с отличным от нуля орбитальным моментом. Эксперименты не указывают на существование возбуждённых состояний, откуда следует, что такая маловероятная компенсация действия центробежной энергии не имеет места.

Однако надо иметь в виду следующее обстоятельство. Даже при центральном характере сил последние могут зависеть от взаимной ориентации спинов нейтрона и протона. Поэтому в принципе возможно существование двух S -состояний дейтрона с параллельной и антипараллельной ориентацией спинов частиц. Эти состояния могут быть названы триплетным (суммарный спин частиц равен единице) и синглетным (суммарный спин частиц равен нулю). Экспериментальные исследования рассеяния медленных нейтронов в пара- и ортоводороде, а также данные по захвату нейтронов протонами приводят к однозначному заключению о том, что синглетное состояние в дейтроне не реализуется, т. е. не существует состояний дейтрона с противоположно ориентированными спинами частиц.

Таким образом, дейтрон может находиться только в одном состоянии, характеризуемом параллельной ориентацией спинов и значением орбитального момента, равным нулю. Это состояние обозначается как 3S , в отличие от синглетного состояния, обозначаемого 1S (об усложнении, вносимом нецентральностью ядерных сил, см. § 4).

Мы покажем сейчас, что, собственно говоря, нужно доказать, чтобы убедиться в невозможности реализации в дейтроне уровня 1S . Выше мы говорили, что задача о двух взаимодействующих частицах при условии короткодействующих сил сводится к задаче о свободном движении с определённым граничным условием, которое можно представить в виде

$$-\left(\frac{u'}{u}\right)_{r=r_0} = \alpha.$$

При финитном движении частиц, соответствующем связанному состоянию, волновая функция в случае $r > r_0$ имеет вид

$$u = \text{const.} \cdot e^{-\frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar} r},$$

где ε — энергия связи дейтрона. Граничное условие, написанное выше, приводит к известному уже нам соотношению

$\alpha = \frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar}$, из которого следует, что $\alpha > 0$. Таким образом, для связанных состояний величина α должна быть положительной. Эта величина определяется, как указывалось выше, потенциальной энергией взаимодействия частиц. Поэтому она может быть, вообще говоря, различной для параллельной и антипараллельной ориентаций спинов. Мы будем обозначать значения α в этих двух случаях соответственно через α_1 и α_0 . Следовательно, чтобы убедиться в справедливости утверждения о нереализуемости состояния 1S , нужно доказать, что

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_0 < 0. \quad (2.10)$$

В § 6 будет развита теория рассеяния нейтронов в молекулярном водороде, которая даст возможность путём сопоставления экспериментальных и теоретических данных убедиться в справедливости неравенств (2.10).

§ 3. Рассеяние медленных нейтронов протонами

Перейдём к рассмотрению рассеяния медленных нейтронов протонами.

Напомним сначала, как решается общая задача о рассеянии частиц некоторым силовым центром.

Предположим, что на частицу действуют центральные силы. В этом случае дифференциальное сечение рассеяния определяется следующей формулой [6]:

$$d\sigma = \frac{2\pi}{4k^2} \left| \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta) (e^{2i\delta_l} - 1) \right|^2 \sin\theta d\theta, \quad (3.1)$$

где k — волновой вектор частицы, θ — угол рассеяния, $P_l(\cos\theta)$ — полином Лежандра l -го порядка, а δ_l — так называемые фазы на бесконечности, определяющие асимптотическое поведение волновой функции вдали от силового центра.

Волновая функция частицы может быть представлена в виде

$$\psi = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos\theta),$$

где u_l удовлетворяет уравнению

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l \right) + (E - V) u_l = 0 \quad (3.2)$$

(E — энергия частицы, V — её потенциальная энергия и m — масса частицы).

Вдали от силового центра, при больших r , функция $u_l(r)$ определяется следующей асимптотической формулой:

$$u_l(r) = \text{const.} \cdot \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) \quad (3.2')$$

(в аргумент \sin входит $-\frac{l\pi}{2}$, благодаря чему фаза δ_l обращается в нуль для свободного движения).

Приведённые выше формулы могут быть использованы при рассмотрении рассеяния нейтронов протонами, если предполагать, что силы, действующие между ними, являются центральными.

Дифференциальное сечение рассеяния нейтронов протонами в системе координат, где покоится центр инерции сталкивающихся частиц, определяется общей формулой (3.1). Волновой вектор k равен при этом

$$k = \frac{\sqrt{ME}}{\hbar} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} ME_0}}{\hbar}, \quad (3.3)$$

где E — энергия относительного движения нейтрона и протона в системе центра инерции, E_0 — энергия нейтрона в лабораторной системе, где до столкновения протон покоился, и M — масса нейтрона.

Мы рассмотрим тот случай, когда длина волны нейтрона λ (в системе центра инерции) значительно больше радиуса действия ядерных сил ($\sim 10^{-13}$ см). Этому условию удовлетворяют нейтроны с энергией, не превосходящей 20 MeV. Легко видеть, что для таких нейтронов, которые мы будем называть медленными, в сумме (3.1) все члены, кроме первого, практически равны нулю. Чтобы убедиться в этом, оценим так называемый параметр соударения частиц. В классической механике он равен $b = \frac{L}{mv_\infty}$, где L — относительный момент количества движения частиц и v_∞ — их относительная скорость на бесконечном расстоянии между частицами. В квазиклассическом приближении вместо L следует подставить $l\hbar$. Так как $\frac{\hbar}{mv_\infty}$ равняется разделённой на 2π длине волны де Бройля, то окончательно мы имеем $b = l\lambda$. Ясно, что взаимодействие между частицами может иметь место только в том случае, если параметр столкновения b не будет превосходить радиуса действия ядерных сил. Это значит, что эффективными в смысле взаимодействия будут только те значения относительного момента количества движения l , которые не превосходят $\frac{r_0}{\lambda}$. Если $\lambda \gg r_0$, то таким значением будет одно единственное значение $l = 0$. Иными словами, при $\lambda \gg r_0$ все фазы δ_l , за исключением δ_0 , практически можно считать равными нулю. Дифференциальное сечение рассеяния приобретает при этом вид

$$d\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \sin \theta d\theta. \quad (3.4)$$

Как видно из формулы (3.4) при выполнении условия $\lambda \gg r_0$, в системе центра инерции рассеяние является сферически симметричным.

Эта формула относится к определённой ориентации спинов нейтрона и протона. Поэтому можно сказать, что общая задача о рассеянии медленных нейтронов протонами сводится

к нахождению двух величин — $\delta_{\uparrow\uparrow}$ и $\delta_{\uparrow\downarrow}$, представляющих собой фазу δ_0 при параллельной и антипараллельной ориентации спинов частиц. Эти величины являются функциями энергии относительного движения нейтрона и протона. Мы покажем теперь, как определить вид этих функций в случае медленных частиц.

Будем исходить из уравнения (3.2) для $l=0$, понимая под $V(r)$ энергию взаимодействия между нейтроном и протоном, и под E — энергию их относительного движения. Нас интересуют те значения энергии, которые гораздо меньше эффективной величины потенциальной энергии частиц в области действия ядерных сил. В этом случае, так же как и при рассмотрении задачи об основном состоянии дейтрона, в области действия ядерных сил уравнение для u_0 принимает вид

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} - \frac{M}{\hbar^2} V(r) u_0 = 0, \quad r < r_0. \quad (3.5)$$

Вне области действия ядерных сил мы получаем уравнение для свободного движения

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{ME}{\hbar^2} u_0 = 0, \quad r > r_0. \quad (3.5')$$

Решения этих уравнений должны быть «сшиты» при $r=r_0$. Иными словами, решение уравнения (3.5') должно удовлетворять граничному условию

$$-\left(\frac{u_0'}{u_0}\right)_{r=r_0} = \alpha, \quad (3.6)$$

где α определяется свойствами функции $V(r)$ (в частности, зависит от относительной ориентации спинов нейтрона и протона) и в первом приближении может считаться не зависящей от энергии E .

Наша задача формулируется теперь следующим образом: необходимо найти решение уравнения (3.5'), отвечающее рассеянию частиц, т. е. имеющее асимптотическую форму (3.2') и удовлетворяющее граничному условию (3.6).

Заметим, что эта задача аналогична задаче об основном состоянии дейтрона; более того, если спины нейтрона и протона параллельны, то величина α имеет одно и то же значение в обеих задачах.

Различие между этими задачами заключается лишь в том, что при рассмотрении рассеяния нейтронов протонами система нейтрон + протон имеет положительную энергию, в то время как при рассмотрении задачи об основном состоянии дейтрона мы имеем дело с отрицательной энергией. С этим связано различное асимптотическое поведение волновых функций обеих задач. В задаче о рассеянии волновая функция на бесконечности осциллирует и отлична от нуля, в задаче же об основном состоянии дейтрона она обращается в нуль.

Подчеркнём, что использование одного и того же граничного условия с одной и той же константой α является следствием малости энергии связи дейтрона и энергии относительного движения нейтрона и протона по сравнению с эффективной потенциальной энергией взаимодействия нейтрона и протона. В силу этого α выступает как некоторая константа, характеризующая взаимодействие нейтрона и протона [1].

Возвратимся к решению уравнения (3.5'). Интересующее нас решение имеет вид

$$u_0 = C \sin(kr + \delta).$$

Условие (3.6) даёт

$$\left(\frac{u_0'}{u_0}\right)_{r=r_0} = k \operatorname{ctg}(kr_0 + \delta) = -\alpha, \quad (3.6')$$

откуда

$$\delta = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{k} - kr_0.$$

Так как предполагается, что длина волны нейтрона значительно больше, чем радиус действия ядерных сил, то в первом приближении в формуле (3.6') можно пренебречь членом kr_0 по сравнению с δ . Мы получим при этом:

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\alpha, \quad \sin \delta = -\frac{k}{(k^2 + \alpha^2)^{1/2}}, \quad r_0 \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Этими соотношениями определяется δ как функция энергии $\left(k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{ME}\right)$ в предельном случае бесконечно малого радиуса действия ядерных сил.

Рассмотрим более подробно этот предельный случай. Как мы говорили выше, следует различать значения δ для парал-

тельной и антипараллельной ориентации спинов. Эти значения, $\delta_{\uparrow\uparrow}$ и $\delta_{\uparrow\downarrow}$, определяются согласно (3.7) формулами

$$k \operatorname{ctg} \delta_{\uparrow\uparrow} = -\alpha_1, \quad k \operatorname{ctg} \delta_{\uparrow\downarrow} = -\alpha_0, \quad r_0 \rightarrow 0, \quad (3.7')$$

где α_1 и α_0 — величины, входящие в граничное условие

$$-\left(\frac{u'}{u}\right)_{r=0} = \alpha$$

и относящиеся к двум ориентациям спинов.

Дифференциальное сечение рассеяния медленных нейтронов протонами для обеих ориентаций спинов определяется согласно (3.4) и (3.7) формулами

$$d\sigma_{\uparrow\uparrow} = \frac{2\pi}{k^2 + \alpha_1^2} \sin \theta d\theta, \quad d\sigma_{\uparrow\downarrow} = \frac{2\pi}{k^2 + \alpha_0^2} \sin \theta d\theta, \quad r_0 \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Интегральные сечения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\uparrow\uparrow} &= \frac{4\pi}{k^2 + \alpha_1^2} = \frac{4\pi\hbar^2}{M \left(\frac{E_0}{2} + \varepsilon\right)}, \\ \sigma_{\uparrow\downarrow} &= \frac{4\pi}{k^2 + \alpha_0^2} = \frac{4\pi\hbar^2}{M \left(\frac{E_0}{2} + \varepsilon'\right)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.8')$$

где $\varepsilon = \frac{(\alpha_1\hbar)^2}{M}$, $\varepsilon' = \frac{(\alpha_0\hbar)^2}{M}$ и E_0 — энергия нейтрона в лабораторной системе координат (в этой системе до столкновения протон покоился).

Заметим, что ε представляет собой энергию связи дейтрона; отсюда следует, что в предположении бесконечно малого радиуса действия ядерных сил, рассеяние медленных нейтронов протонами при параллельной ориентации спинов определяется только одним параметром — энергией связи дейтрона.

Величина ε' , имеющая размерность энергии, не представляет собой энергии какого-либо реально существующего уровня; можно лишь сказать что если бы дейтрон мог находиться в возбуждённом состоянии с противоположной ориентацией спинов частиц, то величина ε' представляла бы энергию этого возбуждённого состояния. Напомним, что вопрос о возможности существования такого состояния (1S) в дейтроне сводится к определению знака величины α_0 . Как видно из формулы (3.8'), знак величины α не может быть определён,

если известно сечение $\sigma_{\uparrow\downarrow}$. Поэтому опыты по рассеянию нейтронов свободными протонами не могут привести к выводу о невозможности реализации состояния 1S в дейтроне.

Формулы (3.8') определяют сечения рассеяния для обеих ориентаций спинов нейтрона и протона.

Чтобы получить сечение рассеяния неполяризованных нейтронов протонами, нужно иметь в виду, что статистический вес состояния с общим спином, равным единице, в три раза больше веса состояния со спином, равным нулю. Поэтому среднее эффективное сечение рассеяния нейтронов протонами (усреднённое по обоим направлениям спинов) может быть представлено в виде

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{4}\sigma_{\uparrow\uparrow} + \frac{1}{4}\sigma_{\uparrow\downarrow} = \frac{\pi\hbar^2}{M} \left(\frac{3}{\frac{1}{2}E_0 + \varepsilon} + \frac{1}{\frac{1}{2}E_0 + \varepsilon'} \right), \quad r_0 \rightarrow 0. \quad (3.8'')$$

Формулы (3.8') и (3.8'') относятся к предельному случаю $r_0 \rightarrow 0$. Покажем теперь, как учесть конечность радиуса действия ядерных сил. Заметим предварительно, что формула (3.6'), куда входит величина r_0 , не может быть непосредственно применена для решения интересующего нас вопроса. Это связано с тем, что, используя граничное условие (3.6), мы считали, что α определяется только $V(r)$ и не зависит от энергии E . В действительности в волновое уравнение (3.2) входит разность $V(r) - E$, и поэтому, строго говоря, при «сшивании» решений нужно учитывать зависимость внутреннего решения, а следовательно, и величины α , от энергии. Существенным является то обстоятельство, что учёт этой зависимости приводит к поправкам того же порядка величины, что и учёт конечности радиуса действия ядерных сил [если производить этот учёт, пользуясь соотношением (3.6) и считать при этом α не зависящим от энергии]. Поэтому учёт конечности радиуса действия ядерных сил следует производить вместе с учётом зависимости константы α , входящей в граничное условие, от энергии.

Докажем, что в самом общем случае, независимо от специального вида функции $V(r)$, имеет место следующее соотношение:

$$k \operatorname{ctg} \delta = -\alpha + \frac{1}{2}(\alpha^2 + k^2)r_0 + O(k^4 r_0^3), \quad (3.9)$$

где α и r_0 — константы, не зависящие от k и определяющиеся видом $V(r)$.

Величина r_0 имеет размерность длины и может быть названа эффективным радиусом действия ядерных сил. [Множитель $\frac{1}{2}$ введён в правую часть (3.9) для того, чтобы это соотношение формально имело такой же вид, как и в случае «ямы» прямоугольной формы.]

Постоянные α и r_0 , естественно, зависят от взаимной ориентации спинов нейтрона и протона. Поэтому не только α , но и эффективный радиус действия ядерных сил r_0 различен для состояний 3S_1 и 1S_0 . В случае состояния 3S величина α ($\equiv \alpha_1$) связана с энергией связи дейтрона в прежним соотношением

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\epsilon M}}{\hbar}.$$

Член порядка $k^4 r_0^3$, входящий в (3.9), очень мал в области энергий, не превосходящих 10—20 MeV. Поэтому, если откладывать экспериментально определяемую величину $k \operatorname{ctg} \delta$ как функцию энергии нейтрона, то мы должны получить прямую, наклон которой характеризует эффективный радиус действия ядерных сил. Отрезок, отсекаемый прямой на оси $k \operatorname{ctg} \delta$, определяет так называемую амплитуду рассеяния при $E=0$, равную

$$a = - \frac{1}{\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \alpha r_0\right)}.$$

Эта величина связана с сечением рассеяния при $E=0$ соотношением

$$\sigma = 4\pi a^2.$$

Перейдём к доказательству соотношения (3.9)*. Выпишем для этого уравнения (3.2) при $l=0$ для двух значений энергии $E = \frac{\hbar^2 k^2}{M}$, которые мы обозначим через E_I и E_{II} .

*) При доказательстве мы следуем Бете [7].

Соответствующие им функции обозначим через u_I и u_{II} . Эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u_I'' + k_I^2 u_I - V(r) u_I &= 0, \\ u_{II}'' + k_{II}^2 u_{II} - V(r) u_{II} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Умножая первое из этих уравнений на u_{II} , второе — на u_I и интегрируя разность полученных выражений по r от $r=0$ до $r=R$, найдём:

$$(u_I' u_{II} - u_{II}' u_I) \Big|_0^R = (k_{II}^2 - k_I^2) \int_0^R u_I u_{II} dr. \quad (3.11)$$

Введём теперь в рассмотрение функции v_I и v_{II} , удовлетворяющие уравнениям

$$\left. \begin{aligned} v_I'' + k_I^2 v_I &= 0, \\ v_{II}'' + k_{II}^2 v_{II} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.10')$$

и совпадающие при больших r соответственно с функциями u_I и u_{II} . Пронормируем эти функции таким образом, чтобы при $r=0$ они обращались в единицу, т. е.

$$v_I = \frac{1}{\sin \delta_I} \sin(k_I r + \delta_I), \quad v_{II} = \frac{1}{\sin \delta_{II}} \sin(k_{II} r + \delta_{II}), \quad (3.10'')$$

где δ_I и δ_{II} — фазы рассеяния для энергий E_I и E_{II} . Формулы (3.10'') определяют одновременно нормировку функций u_I и u_{II} , ибо, по условию, при больших r функции u и v совпадают.

Функции v_I и v_{II} удовлетворяют соотношению вида (3.11)

$$(v_I' v_{II} - v_{II}' v_I) \Big|_0^R = (k_{II}^2 - k_I^2) \int_0^R v_I v_{II} dr. \quad (3.11')$$

Вычитая (3.11') из (3.11) и замечая, что $u(0) = 0$, мы получим при достаточно большом R [когда $u(R) \approx v(R)$]

$$(v_I v_{II}' - v_{II} v_I')_{r=0} = (k_{II}^2 - k_I^2) \int_0^R (v_I v_{II} - u_I u_{II}) dr.$$

Левая часть этого равенства может быть вычислена согласно (3.10''). Мы получим таким образом следующее общее соотношение:

$$k_{II} \operatorname{ctg} \delta_{II} - k_I \operatorname{ctg} \delta_I = (k_{II}^2 - k_I^2) \int_0^{\infty} (v_I v_{II} - u_I u_{II}) dr. \quad (3.12)$$

Положим в (3.12) $k_I = 0$. В этом случае $-k_I \operatorname{ctg} \delta_I$ должно быть заменено на $-a^{-1}$, где a — введённая выше длина рассеяния при нулевой энергии. Таким образом, мы получим из (3.12):

$$k \operatorname{ctg} \delta = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 \rho(E), \quad (3.12')$$

где

$$\frac{1}{2} \rho(E) = \int_0^{\infty} (v_0 v - u_0 u) dr.$$

Заметим теперь, что функции v и u отличаются друг от друга только в области действия ядерных сил. Поэтому подынтегральная функция в выражении для ρ отлична от нуля только в области действия ядерных сил. В этой области функции u и v слабо зависят от энергии, так как $kr \ll 1$ и $E \ll |V(r)|$. Поэтому в выражении для ρ под знаком интеграла можно приближённо заменить u на u_0 и v на v_0 . Таким образом, мы получим:

$$\frac{1}{2} \rho(E) \approx \frac{1}{2} \rho(0) \equiv \frac{1}{2} r_0 = \int_0^{\infty} (v_0^2 - u_0^2) dr. \quad (3.13)$$

Эту величину r_0 , не зависящую от энергии, мы называем эффективным радиусом действия ядерных сил.

Подставляя (3.13) в (3.12'), получим:

$$k \operatorname{ctg} \delta = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} k^2 r_0. \quad (3.12'')$$

Это соотношение можно рассматривать как разложение функции $k \operatorname{ctg} \delta$ в ряд по степеням энергии или, иначе говоря, по k^2 (разложение происходит именно по степеням k^2 , а не k). Невыписанные члены разложения имеют порядок $k^4 r_0^3$ и в

области энергий, не превосходящих 10—20 MeV, могут быть отброшены.

Для того чтобы привести (3.12'') к виду (3.9), нам осталось доказать, что для триплетных состояний (спины нейтрона и протона параллельны) имеет место соотношение

$$\frac{1}{a} = -\alpha_1 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_1 r_0 \right), \quad (3.13')$$

где $\alpha_1 = \frac{\sqrt{\epsilon M}}{\hbar}$ (ϵ — энергия связи нейтрона).

Чтобы доказать это утверждение, следует лишь заметить, что все рассуждения, предшествующие выводу формулы (3.12''), останутся в силе, если вместо функции u_{II} подставить волновую функцию основного состояния дейтрона, а вместо v_{II} — функцию $e^{-\alpha_1 r}$, которая асимптотически при больших r совпадает с u_{II} (нормировочный множитель выбран таким образом, чтобы $v_{II}(0) = 1$). При этом в (3.12'') нужно вместо $k_{II} \operatorname{ctg} \delta_{II}$ подставить $-\alpha_1$, а входящую в правую часть равенства величину k_{II}^2 заменить на $-\alpha_1^2$. Таким образом, мы получим соотношение

$$-\alpha_1 = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{2} \alpha_1^2 r_0,$$

откуда и вытекает выражение (3.13') для длины рассеяния нейтронов с нулевой энергией (индекс 1 при a указывает на триплетное состояние; строго говоря, индекс 1 должен быть приписан также и к r_0).

Заметим, что соотношение (3.9) допускает ещё следующую трактовку. При рассмотрении задачи о рассеянии нейтронов протонами, а также задачи об основном состоянии дейтрона, можно не учитывать конечности радиуса действия ядерных сил, если исходить из обобщённого граничного условия [5]

$$-\left(\frac{u'}{u} \right)_{r=0} = \gamma(E), \quad (3.14)$$

где γ — некоторая функция энергии; в интервале энергий от нуля до 10—20 MeV $\gamma(E)$ может рассматриваться как линейная функция энергии

$$\gamma(E) = A + BE = \alpha - \frac{1}{2} (\alpha^2 + k^2) r_0 \quad (3.14')$$

(линейностью γ мы уже пользовались в предыдущем параграфе при изучении нормировки дейтронной функции). Величины A и B , так же как и α и r_0 , различны для 1S и 3S -состояний.

Сделаем ещё следующее замечание по поводу разложения (3.9). В этом разложении мы сохраняем второй член, так как первый член, равный $\frac{1}{a} = -\alpha + \frac{\alpha^2 r_0}{2}$, аномально мал.

В триплетном состоянии α пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$ (ε — энергия связи дейтрона). В ядерном энергетическом масштабе эта энергия является относительно малой величиной; поэтому $\frac{1}{a}$ также относительно мала. Отсюда следует, что даже в том случае, когда второй член в (3.9) составляет заметную часть первого «малого» члена, вклад отброшенных членов, пропорциональных k^4 , будет ещё незаметным. Те же соображения в ещё большей степени применимы к синглетному состоянию, так как данные по рассеянию нейтронов протонами показывают, что $\frac{1}{a}$ в этом случае меньше, чем в триплетном состоянии.

Используя формулу (3.9), определяющую фазу δ , мы получим на основании (3.4) следующее выражение для сечения рассеяния нейтронов протонами (при определённой ориентации спинов) с учётом конечности радиуса действия ядерных сил:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta = \frac{4\pi}{k^2 + k^2 \operatorname{ctg}^2 \delta} = \\ &= \frac{4\pi}{k^2 + \alpha^2} \left[1 - \alpha r_0 + \frac{1}{4} (\alpha^2 + k^2) r_0^2 + O(\alpha k^2 r_0^3) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Обычно для σ приводится выражение [2, 3]

$$\sigma = \frac{4\pi (1 + \alpha r_0)}{k^2 + \alpha^2},$$

которое, как мы видим, является справедливым при выполнении условий $|\alpha r_0| \ll 1$, $kr_0 \ll 1$. В квадратной скобке выражения (3.15) можно пренебречь членами порядка $\alpha k^2 r_0^3$, однако член $\frac{1}{4} (\alpha^2 + k^2) r_0^2$, вообще говоря, необходимо сохранить.

Чтобы найти сечение рассеяния неполяризованных нейтронов протонами, нужно сложить выражения (3.15), относящиеся к триплетному и синглетному состояниям, умноженные предварительно соответственно на $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$. Такое усреднённое сечение рассеяния неполяризованных нейтронов протонами определяется следующей формулой [5]:

$$\sigma = 1,3 \cdot 10^{-24} \left[\frac{3}{(1,22 - 0,06E_0)^2 + \frac{E_0}{2}} + \frac{1}{(0,27 + 0,06E_0)^2 + \frac{E_0}{2}} \right] \text{см}^2, \quad (3.15'')$$

где E_0 — энергия нейтрона в лабораторной системе, выраженная в MeV.

В заключение этого параграфа приведём значения констант, входящих в формулу (3,9) [7]. Эффективный радиус действия ядерных сил в триплетном состоянии равняется

$$r_{\uparrow\uparrow} \approx 1,6 \cdot 10^{-13} - 1,8 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

в синглетном состоянии радиус действия сил равняется

$$r_{\uparrow\downarrow} \approx 2,7 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

(это значение принимается таким же, как радиус действия ядерных сил между двумя протонами в синглетном состоянии). Радиус дейтрона, если считать энергию связи дейтрона $\epsilon = 2,19$ MeV, равняется

$$\frac{1}{\alpha_1} = 4,33 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Среднее значение сечения рассеяния неполяризованных нейтронов протонами при $E_0 \rightarrow 0$ равняется

$$\sigma_0 = 20,36 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Величина ϵ' равна 69 keV [5].

Рассмотрение рассеяния медленных нейтронов протонами с точки зрения общей теории рассеяния медленных частиц будет сделано в § 24, где будет дан другой вывод формулы (3.9).

§ 4. Нецентральный характер ядерных сил и классификация состояний системы нейтрон + протон

В предыдущих параграфах мы исходили из предположения о центральном характере ядерных сил. Из этого предположения вытекает, что основным состоянием дейтрона должно быть S -состояние.

Известно, что волновая функция S -состояния зависит только от расстояния между частицами. Поэтому, если верно сделанное предположение, то распределение заряда в дейтроне должно быть сферически симметричным, и дейтрон не должен обладать квадрупольным моментом, существование которого всегда свидетельствует об отклонении распределения заряда от сферически симметричного.

Между тем, опыт показывает, что дейтрон обладает квадрупольным моментом [8]. Отсюда следует, что основное состояние дейтрона не может описываться чистой S -волной. Оно должно представлять собой суперпозицию S -волны и волн, отвечающих отличным от нуля моментам количества движения, которые и создают отклонение в распределении заряда от сферически симметричного.

Такое сложное состояние может возникнуть только в том случае, если ядерные силы не являются чисто центральными. Это означает, что ядерные силы должны зависеть не только от расстояния между частицами, но также и от ориентации спинов нейтрона и протона по отношению к радиус-вектору, соединяющему обе частицы. Учёт таких сил, которые носят название тензорных, даёт возможность объяснить существование квадрупольного момента дейтрона, а также тот факт, что магнитный момент дейтрона несколько отличается от суммы магнитных моментов протона и нейтрона [9, 10].

Мы начнём изучение эффектов, связанных с существованием нецентральных сил, с рассмотрения общего вопроса о классификации состояний системы нейтрон + протон.

Наличие сил, зависящих от ориентации спинов нейтрона и протона, приводит к существенному изменению свойств симметрии гамильтониана системы. В случае действия обычных центральных сил гамильтониан системы, состоящей из двух частиц, инвариантен по отношению к пространственным

вращениям. С этим связаны сохранение орбитального момента количества движения частиц и возможность классификации состояний системы по значениям момента I . В общем случае, когда силы зависят от спина частиц, гамильтониан не инвариантен по отношению к вращениям одних только пространственных координат.

Инвариантность гамильтониана сохраняется по отношению к вращениям как обычных, так и спиновых координат. С этой инвариантностью связано сохранение общего момента количества движения J , складывающегося из орбитального и спинового моментов. Последние порознь, вообще говоря, не сохраняются, и поэтому возможность классификации состояний по значениям орбитального момента при этом отпадает.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что гамильтониан системы нейтрон + протон симметричен относительно спинов обеих частиц. Это значит, что мы исключаем из рассмотрения такие эффекты, как, например, магнитное взаимодействие обоих спинов с орбитальным моментом протона. Это взаимодействие очень невелико, и поэтому пренебрежение им представляется вполне законным.

Хотя в общем случае любого числа частиц орбитальный и спиновый моменты порознь не сохраняются, в системе, состоящей из двух частиц, обладающих спином, равным $\frac{1}{2}$, и описываемой гамильтонианом, симметричным относительно спинов, величина общего спина S представляет собой константу движения.

Это утверждение непосредственно вытекает из симметрии функции Гамильтона относительно спинов обеих частиц. В силу этой симметрии стационарные состояния могут быть либо симметричными, либо антисимметричными относительно спиновых координат.

Симметричные состояния являются триплетными и соответствуют значению спина S , равному единице, антисимметричные состояния являются синглетными с $S = 0$.

В справедливости высказанного выше утверждения о постоянстве S мы убедимся также, установив наиболее общее выражение для гамильтониана системы, с которым, как будет показано далее, коммутирует оператор S^2 .

Покажем, что гамильтониан системы двух частиц, обладающих спином, равным $\frac{1}{2}$, может содержать спины частиц только в двух комбинациях:

$$\sigma_1 \sigma_2, S_{12} = 3 \frac{(\sigma_1 \mathbf{r}) \cdot (\sigma_2 \mathbf{r})}{r^2} - \sigma_1 \sigma_2, \quad (4.1)$$

где σ_1, σ_2 — матрицы Паули для обеих частиц и \mathbf{r} — вектор расстояния между ними.

Это утверждение связано с тем, что операторы (4.1) инвариантны по отношению к вращениям пространственных и спиновых координат, причём любой оператор, характеризующийся такой инвариантностью, может быть представлен в виде линейной комбинации единичной матрицы и операторов (4.1). Так как гамильтониан системы двух частиц инвариантен по отношению к вращениям пространственных и спиновых координат, то он также может быть представлен в виде линейной комбинации единичной матрицы и операторов $\sigma_1 \sigma_2$ и S_{12} .

Докажем, что операторы (4.1) отличаются следующим замечательным свойством: любая целая положительная степень каждого из операторов, так же как и произведение таких степеней, могут быть представлены в виде линейной комбинации самих операторов и единичной матрицы.

Чтобы убедиться в этом, отметим прежде всего соотношение [11]

$$(\sigma_1 \sigma_2)^2 = 3 - 2\sigma_1 \sigma_2,$$

которое легко выводится, если воспользоваться свойствами матриц Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Из этого соотношения следует, что любая целая положительная степень оператора $\sigma_1 \sigma_2$ выражается в виде линейной комбинации, содержащей оператор $\sigma_1 \sigma_2$ и единичную матрицу.

Далее легко показать, что имеют место соотношения

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdot S_{12} = S_{12}, \quad S_{12} \cdot \sigma_1 \sigma_2 = S_{12}.$$

Действительно, направим ось x вдоль вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Оператор $\sigma_1 \sigma_2 \cdot S_{12}$ приобретает при этом вид

$$\begin{aligned}\sigma_1 \sigma_2 \cdot S_{12} &= \sigma_1 \sigma_2 \{3\sigma_{1x}\sigma_{2x} - \sigma_1 \sigma_2\} = \\ &= 3\{1 - \sigma_{1z}\sigma_{2z} - \sigma_{1y}\sigma_{2y}\} - 3 + 2\sigma_1 \sigma_2 = \\ &= 3\sigma_{1x}\sigma_{2x} - \sigma_1 \sigma_2 = S_{12},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Покажем, наконец, что степени S_{12} выражаются через S_1 и $\sigma_1 \sigma_2$. Рассмотрим, например, оператор S_{12}^2 :

$$S_{12}^2 = 9(\sigma_1 \mathbf{n})(\sigma_2 \mathbf{n})^2 - 6(\sigma_1 \mathbf{n})(\sigma_2 \mathbf{n})\sigma_1 \sigma_2 + (\sigma_1 \sigma_2)^2.$$

Так как

$$3(\sigma_1 \mathbf{n})(\sigma_2 \mathbf{n})\sigma_1 \sigma_2 = S_{12} + (\sigma_1 \sigma_2)^2,$$

то

$$S_{12}^2 = 9 - 2S_{12} - (\sigma_1 \sigma_2)^2 = 6 - 2S_{12} + 2\sigma_1 \sigma_2.$$

Отсюда следует, что любая целая положительная степень S_{12} выражается через S_{12} , $\sigma_1 \sigma_2$ и единичную матрицу.

Итак, мы показали, что имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned}(\sigma_1 \sigma_2)^2 &= 3 - 2\sigma_1 \sigma_2, \\ S_{12}^2 &= 6 - 2S_{12} + 2\sigma_1 \sigma_2, \\ S_{12}\sigma_1 \sigma_2 &= S_{12},\end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

которые и доказывают отмеченное выше свойство операторов S_{12} и $\sigma_1 \sigma_2$.

Эти соотношения показывают, что наиболее общее выражение оператора потенциальной энергии системы нейтрон + протон, симметричного в спинах частиц и инвариантного по отношению к вращениям пространственных и спиновых координат, имеет вид [9]

$$V = V_1(r) + V_2(r)\sigma_1 \sigma_2 + V_3(r)S_{12}, \quad (4.3)$$

где V_1 , V_2 , V_3 — некоторые функции от расстояния между частицами, могущие также зависеть от орбитального момента частиц.

Вводя в рассмотрение вектор общего спина системы

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

можно представить операторы $\sigma_1\sigma_2$ и S_{12} в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= 2S^2 - 3, \\ S_{12} &= 6 \frac{(\text{Sr})^2}{r^2} - 2S^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.2')$$

Пользуясь представлением (4.2'), мы непосредственно убеждаемся в том, что оператор S^2 коммутирует с операторами $\sigma_1\sigma_2$ и S_{12} , а следовательно, и с гамильтонианом системы. Это значит, что S^2 представляет собой константу движения, что и утверждалось выше.

Соотношения (4.2') показывают, что в синглетном состоянии ($S=0$) S_{12} равно нулю. В триплетном состоянии ($S=1$) оператор S_{12} можно записать в виде

$$S_{12} = 6 \frac{(\text{Sr})^2}{r^2} - 4. \quad (4.2'')$$

Отметим, что собственное значение $\sigma_1\sigma_2$ в триплетном состоянии равно единице ($S^2=2$), а в синглетном — 3 [см. первую из формул (4.2')].

Собственные значения оператора S_{12} суть 2, 2, — 4 [в этом можно убедиться из рассмотрения второго соотношения (4.2)]. Сумма этих значений равна нулю.

Итак, мы видим, что систему, состоящую из нейтрона и протона, можно характеризовать заданием квантовых чисел J и S .

Сюда следует добавить магнитное квантовое число m , т. е. проекцию полного момента количества движения \mathbf{J} на некоторую ось, а также чётность состояния ω , представляющую собой собственное значение оператора отражения (замены \mathbf{r} на $-\mathbf{r}$). Эти четыре квантовых числа J , S , m , ω могут служить для классификации состояний системы нейтрон + протон.

В синглетном состоянии ($S=0$), $S_{12}=0$ и V зависит только от расстояния между частицами; поэтому в этом состоянии сохраняется орбитальный момент количества движения l . Отсюда видно, что состояния с $S=0$ можно классифицировать по величине l .

Триплетное состояние, характеризующееся определённым значением полного момента J , можно трактовать как суперпозицию ряда состояний с различными значениями l , совме-

стимыми с общими правилами сложения моментов. Так, например, триплетное состояние с $J=1$ представляет собой суперпозицию состояний 3S_1 , 3P_1 , 3D_1 . Чётность состояния определяется, как известно, соотношением $w = (-1)^L$. Поэтому для состояний 3S_1 и 3D_1 чётность $w = 1$, для состояния 3P_1 чётность $w = -1$.

Ниже приведена классификация нескольких первых триплетных состояний [9].

Классификация триплетных состояний

J	Чётность	
	$w = 1$	$w = -1$
0		3P_0
1	${}^3S_1 + {}^3D_1$	3P_1
2	3D_2	${}^3P_2 + {}^3F_2$
3	${}^3D_3 + {}^3G_3$	3F_3

§ 5. Квадрупольный и магнитный моменты дейтрона

Перейдём теперь к рассмотрению эффектов, связанных с нецентральной ядерных сил.

Из самых различных экспериментальных данных следует, что основное состояние дейтрона является триплетным, в котором суммарный спин частиц равняется единице. (Это следует, в частности, из почти точно выполняющейся аддитивности магнитных моментов нейтрона и протона в дейтроне и, кроме того, из самого факта существования квадрупольного момента дейтрона, который равнялся бы нулю в синглетном состоянии, см. ниже.)

В основном состоянии безусловно должна присутствовать S -волна, так как из сравнительно малой величины квадрупольного момента дейтрона можно заключить, что асимметрия в распределении зарядов очень невелика (она составляет около 4%, см. ниже). Мы должны поэтому считать, что общий момент количества движения дейтрона равняется единице, $J=1$.

Далее, мы должны считать основное состояние дейтрона чётным ($w = 1$), ибо, как видно из приведённой в предыдущем параграфе таблицы, при $w = -1$ основное состояние не содержало бы S -волны.

Итак, основное состояние дейтрона характеризуется следующими квантовыми числами:

$$S = 1, \quad J = 1, \quad w = 1.$$

Из приведённой таблицы в таком случае следует, что основным состоянием является суперпозиция состояний 3S_1 и 3D_1 . Наличие 3D_1 -волны приводит к отклонению распределения заряда в дейтроне от сферически симметричного, иными словами, благодаря присутствию D -волны дейтрон обладает квадрупольным электрическим моментом.

Зная величину квадрупольного момента дейтрона, можно оценить веса состояний 3D_1 и 3S_1 . Чтобы произвести эту оценку, рассмотрим волновую функцию состояния ${}^3S_1 + {}^3D_1$.

Покажем, что нормированная часть волновой функции 3D_1 -состояния, содержащая спиновые и угловые переменные, может быть представлена в виде

$$Y = \frac{1}{4} (2\pi)^{-1/2} S_{12} \chi_1^m, \quad (5.1)$$

где χ_1^m — нормированная спиновая функция, относящаяся к триплетному состоянию с магнитным квантовым числом m (m — проекция общего момента на ось квантования, принимающая значения $m = -1, 0, +1$).

Заметим для этого, что по определению три функции χ_1^m преобразуются при вращениях спиновых координат по представлению, характеризующему момент, равный единице. Так как оператор S_{12} инвариантен по отношению к вращениям обычных и спиновых координат, то три функции $S_{12} \chi_1^m$ также преобразуются по представлению, характеризующему $J = 1$. Иными словами, $S_{12} \chi_1^m$ описывает триплетное состояние с общим моментом $J = 1$.

Остаётся показать, что функция $S_{12} \chi_1^m$ описывает именно D -волну. Известно, что если некоторая функция от углов $Y(\theta, \varphi)$, умноженная на r^l (l — целое число), удовлетворяет уравнению Лапласа, то она описывает волну с орбитальным

моментом, равным l . Поэтому нам достаточно показать, что $S_{12}\chi_1^m$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta (r^2 S_{12} \chi_1^m) = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа. Подставляя сюда выражение для S_{12} , получим:

$$\Delta (3\sigma_1 \hat{r} \cdot \sigma_2 \hat{r} - r^2 \sigma_1 \sigma_2) \chi_1^m = (6\sigma_1 \sigma_2 - 6\sigma_1 \sigma_2) \chi_1^m = 0,$$

что и требовалось доказать.

Итак, функция $S_{12}\chi_1^m$ описывает именно 3D_1 -состояние с моментом $J = 1$.

Докажем, наконец, что функция (5.1) удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\sum_{m_S} \int |Y|^2 d\omega = 1, \quad (5.1')$$

где интегрирование производится по угловым переменным в обычном пространстве, а суммирование — по спиновым переменным, т. е. по трём состояниям, относящимся к результирующему спину $S = 1$. Заметим для этого, что интеграл по углам от S_{12} равен нулю. Действительно, согласно (4.2'') имеем:

$$\int S_{12} d\omega = \int \{6(\sin)^2 - 4\} d\omega = 4\pi \left(6S^2 \cdot \frac{1}{3} - 4\right) = 0$$

($S^2 = 2$); поэтому из второго соотношения (4.2) следует, что в триплетном состоянии

$$\int S_{12}^2 d\omega = 8 \cdot 4\pi$$

и, следовательно,

$$\sum_{m_S} \int |Y|^2 d\omega = \sum_{m_S} |\chi_1^m|^2 = 1,$$

что и требовалось доказать.

Используя выражение (5.1) для Y и формулу (4.2''), можно представить волновую функцию системы нейтрон +

+ протон в триплетном состоянии с $J=1$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\psi &= (4\pi)^{-1/2} \frac{1}{r} \left\{ u + \frac{2^{1/2}}{4} S_{12} w \right\} \chi_1^m = \\ &= (4\pi)^{-1/2} \frac{1}{r} \left\{ u + 2^{1/2} \left[\frac{3}{2} \frac{(\text{Sr})^2}{r^2} - 1 \right] w \right\} \chi_1^m, \quad (5.2)\end{aligned}$$

где u и w — радиальные функции S - и D -волн, зависящие только от r .

Мы подчиним ψ обычному условию нормировки

$$\sum \int |\psi|^2 r^2 dr d\omega = 1$$

(суммирование производится по трём состояниям, относящимся к общему спину $S=1$). Из этого условия вместе с условием (5.1') вытекает, что

$$\int_0^\infty |u|^2 dr + \int_0^\infty |w|^2 dr = 1. \quad (5.3)$$

Входящие сюда интегралы можно, очевидно, трактовать как вероятности нахождения системы в состояниях 3S_1 и 3D_1 .

Покажем теперь, каким уравнениям удовлетворяют радиальные функции u и w . Будем исходить из уравнения Шредингера:

$$\Delta\psi - \frac{M}{\hbar^2} (V - E)\psi = 0, \quad (5.4)$$

и подставим сюда вместо V выражение (4.3). В триплетном состоянии $\sigma_1\sigma_2 = 1$, поэтому

$$V = V_1(r) + V_2(r) + S_{12}V_3(r).$$

Таким образом, в триплетном состоянии V определяется двумя функциями от расстояния $U_1 \equiv V_1 + V_2$ и $U_2 \equiv V_3$

$$V = U_1(r) + S_{12}U_2(r). \quad (5.4')$$

Так как в синглетном состоянии $S_{12} = 0$, то потенциальная энергия в этом состоянии определяется только одной функцией от r : $V = V_1 + \sigma_1\sigma_2 V_2 = V_1 - 3V_2 \equiv U_3(r)$. В этом случае волновая функция не содержит оператора S_{12} и является

чисто сферически симметричной. В синглетном состоянии нет примеси D -волны, поэтому в этом состоянии система нейтрон + протон не может обладать квадрупольным моментом. Поскольку дейтрон заведомо обладает квадрупольным моментом, это обстоятельство лишний раз подтверждает отсутствие связанного состояния $1S$ у дейтрона.

Возвращаясь к уравнению (5.4) и используя (5.2) и (5.4'), получим:

$$\begin{aligned} & \left(\Delta \frac{u}{r} + \frac{2^{1/2}}{4} \Delta S_{12} \frac{w}{r} \right) \chi_1^m = \\ & = \frac{M}{\hbar^2} (U_1 + S_{12} U_2 - E) \left(\frac{u}{r} + \frac{2^{1/2}}{4} S_{12} \frac{w}{r} \right) \chi_1^m. \end{aligned} \quad (5.4'')$$

Замечая, что

$$\Delta R(r) Y_{lm} = \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R \right] Y_{lm}$$

(Y_{lm} — сферическая функция), и вспоминая, что $S_{12} \chi_1^m$ ведёт себя как Y_{2m} , перепишем левую часть (5.4'') в виде

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2^{1/2}}{4} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{6}{r^2} w \right) S_{12} \right] \chi_1^m.$$

Правая часть (5.4'') согласно (4.2) равняется

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{M}{\hbar^2} \left\{ (U_1 - E) u + 2 \cdot 2^{1/2} U_2 w + \right. \\ & \left. + \left[\frac{2^{1/2}}{4} (U_1 - E) w - \frac{2^{1/2}}{2} U_2 w + U_2 u \right] S_{12} \right\} \chi_1^m. \end{aligned}$$

Приравнявая в этих выражениях члены, не содержащие оператора S_{12} , а также коэффициенты при S_{12} , получим следующую систему уравнений для определения функций u и w :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{M}{\hbar^2} \{ [U_1(r) - E] u + 2 \sqrt{2} U_2(r) w \} = 0, \\ & \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{6w}{r^2} - \frac{M}{\hbar^2} \{ [U_1(r) - E - 2U_2(r)] w - \\ & \quad - 2 \sqrt{2} U_2(r) u \} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Мы видим, таким образом, что благодаря нецентральности ядерных сил в триплетном состоянии устанавливается связь

между 3S_1 - и 3D_1 -волнами; в синглетном же состоянии волны 1S и 1D могут существовать независимо.

Так как точный вид функций U_1 и U_2 нам неизвестен, то точное решение системы уравнений (5.5) возможно лишь для определённых моделей ядерных сил (в частности для прямоугольной ямы, см. [9]).

Представляется, однако, более разумным использовать тот же метод, которым мы пользовались при рассмотрении задач об основном состоянии дейтрона и рассеянии медленных нейтронов протонами в предположении центрального характера ядерных сил.

В этом методе, основанном на том, что ядерные силы являются короткодействующими, в волновом уравнении не учитывается энергия взаимодействия, но зато на искомую функцию накладывается некоторое граничное условие. В интересующем нас случае мы будем вместо системы (5.5) рассматривать уравнения, описывающие свободное движение

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} Eu = 0, \\ \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{6w}{r^2} + \frac{ME}{\hbar^2} w = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.5')$$

решение которых удовлетворяет следующим граничным условиям [10]:

$$\left. \begin{aligned} -u' &= \alpha_{11}u + \alpha_{12}w, \\ -w' &= \alpha_{21}u + \alpha_{22}w. \end{aligned} \right\} \quad (5.5'')$$

Здесь функции u , w и их первые производные берутся в точке $r=r_0$. Введение в граничные условия величин α_{12} и α_{21} обеспечивает необходимую связь между S - и D -состояниями.

Заметим, что использование эффективных граничных условий, в которых r_0 принимается равным нулю, но зато учитывается зависимость α_{ij} от энергии, в данном случае невозможно, так как решение второго уравнения (5.5') обладает особенностью в точке $r=0$ (особенность типа r^{-8}).

Четыре величины α_{ij} не являются независимыми. Чтобы убедиться в этом, заметим, что можно рассматривать комплексные функции u и w , для которых из уравнения

непрерывности должно вытекать равенство нулю потока через сферу произвольного радиуса. Это приводит к соотношению [10]

$$\left(u^* \frac{du}{dr} - u \frac{du^*}{dr} + w^* \frac{dw}{dr} - w \frac{dw^*}{dr} \right)_{r=r_0} = 0.$$

Подставляя сюда u' и w' из (5.5''), мы придём к заключению, что α_{11} и α_{22} должны быть вещественными, и, кроме того, должно выполняться условие $\alpha_{12} = \alpha_{21}^*$. Можно, однако, считать все коэффициенты вещественными [так как вещественными являются функции U_1 и U_2 , входящие в (5.5')], поэтому $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.

Величины α_{ij} мы будем считать не зависящими от энергии. Условия (5.5'') будут тогда одинаковыми как для задачи об основном состоянии дейтрона, так и для задачи о рассеянии медленных нейтронов протонами.

Покажем теперь, как решается задача об основном состоянии дейтрона с этими граничными условиями. В уравнение (5.5') вместо E нужно в этом случае подставить $-\varepsilon$ (ε — энергия связи дейтрона). Решения (5.5') должны обращаться в нуль на бесконечности; поэтому

$$u = se^{-ar}, \quad w = de^{-ar} \left[\frac{1}{(ar)^2} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{3} \right], \quad (5.6)$$

где $\alpha = \frac{(Me)^{1/2}}{\hbar}$, а s и d — некоторые константы. Подставляя (5.6) в (5.5'') и исключая s и d , получим:

$$\alpha = \alpha_{11} - \frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{22} - \frac{2}{r_0} \varphi}, \quad (5.7)$$

где

$$\varphi = 1 + \frac{\frac{1}{2}(ar_0)^2(1+ar_0)}{3+3ar_0+(ar_0)^2}.$$

(Для короткодействующих сил $ar_0 \ll 1$ и φ практически равно единице.)

Нас интересует отношение $\frac{d}{s} = q$, характеризующее вес D -волны. Так как величины α_{ij} неизвестны, то определить q

теоретически невозможно. Мы поступим поэтому следующим образом: свяжем величину q с квадрупольным моментом дейтрона Q , который известен экспериментально, и оценим таким образом вес D -волны в основном состоянии дейтрона.

Предварительно рассмотрим условие нормировки (5.3). При использовании этого условия возникает уже встречающаяся нам трудность: функции u и w неизвестны в области действия ядерных сил. Можно лишь утверждать, что u и w стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$. Поэтому следует предполагать, что область $(0, r_0)$, в которой действуют ядерные силы, не играет исключительной роли в интегралах (5.3). Область эффективных значений r в интегралах (5.3) порядка «радиуса дейтрона» $\frac{1}{\alpha}$, который по крайней мере в два раза превышает r_0 (см. § 3). Для оценки величины обоих интегралов мы не будем в (5.3) учитывать внутренней области $(0, r_0)$ и подставим в (5.3) вместо u и w выражения (5.6). Таким образом, мы получим следующее соотношение:

$$s^2 e^{-2\alpha r_0} \frac{1 + a q^2}{2\alpha} = 1, \quad (5.8)$$

где $a = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \frac{(1 + \alpha r_0)^2}{(\alpha r_0)^3}$. Следует подчеркнуть, что (5.8) может служить только для оценки величины, так как вклад внутренней области $(0, r_0)$ может быть сравним с вкладом области (r_0, ∞) , где не действуют ядерные силы.

Покажем теперь, как связан квадрупольный момент дейтрона с функциями u и w .

Квадрупольный момент дейтрона Q представляет собой усреднённое по асимметричному распределению заряда значение величины $\frac{1}{4}(r^2 - 3z^2)$ (ось z определяется таким образом, что проекция полного момента на эту ось равна единице; множитель $\frac{1}{4}$ возникает по той причине, что радиус-вектор заряженной частицы — протона равен $\frac{r_0}{2}$). Иными словами, Q равняется

$$Q = g \sum \int \psi^* \frac{1}{4} (r^2 - 3z^2) \psi \, d\tau, \quad (5.9)$$

где суммирование производится по спиновым переменным (т. е. по трём спиновым состояниям, относящимся к $S = 1$); g представляет собой вес состояний с $|m| = 1$, в которых определяется Q ; он равен отношению числа тех взаимных ориентаций векторов L и S , которые приводят к $|m| = 1$, к общему числу возможных ориентаций, равному $(2l+1)(2S+1) = 15$. Число первых равно 6, поэтому g равно $\frac{2}{5}$.

Вместо z^2 мы подставим в (5.9) $\frac{(Sr)^2}{S^2}$; это выражение может быть согласно (4.2'') представлено в виде $z^2 = \frac{4+S_{12}}{6S^2} r^2 = \frac{4+S_{12}}{12} r^2$. Используя ещё выражение (5.2) для волновой функции ψ , перепишем (5.9) в виде

$$Q = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4\pi} \times \\ \times \sum \int \left(u + \frac{\sqrt{2}}{4} S_{12} \omega\right) \chi_1^m S_{12} \left(u + \frac{\sqrt{2}}{4} S_{12} \omega\right) \chi_1^m r^2 dr d\omega.$$

Замечая, что

$$\int S_{12} d\omega = 0, \quad \int S_{12}^2 d\omega = 8 \cdot 4\pi, \quad \int S_{12}^3 d\omega = -16 \cdot 4\pi,$$

получим:

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{10} \int_0^{\infty} r^2 (u\omega - 2^{-3/2} \omega^2) dr. \quad (5.9')$$

Для оценки величины Q мы снова будем пользоваться выражениями (5.6), определяющими функции u и ω вне области действия ядерных сил. То обстоятельство, что внутри области действия ядерных сил формулы (5.6) неприменимы, не может оказать сильного влияния на результат, так как область $(0, r_0)$ не играет исключительной роли, напротив, благодаря множителю r^2 роль малых r в (5.9') сильно уменьшается.

Подставляя (5.6) в (5.9'), получим:

$$Q = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{bq - cq^2}{1 + aq^2}, \quad (5.10)$$

где

$$b = \frac{\sqrt{2}}{30} [5 + 4ar_0 + (ar_0)^2],$$

$$c = \frac{1}{30} \left[\frac{3}{ar_0} + \frac{37}{12} + \frac{7}{6} ar_0 + \frac{1}{6} (ar_0)^2 \right].$$

Зная Q , можно из этого выражения найти величину q , характеризующую вес состояния D :

$$q = \frac{1}{2} \frac{b}{a\xi + c} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{(a\xi + c)^2} - \frac{4\xi}{a\xi + c}}, \quad \xi = \alpha^2 Q. \quad (5.10')$$

По экспериментальным данным [8] квадрупольный момент дейтрона равен

$$Q = (2,73 \pm 0,05) 10^{-27} \text{ см}^2$$

(положительный знак Q означает, что распределение заряда «вытянуто» вдоль направления спина дейтрона), поэтому $\xi \approx 0,0146$. Считая $ar_0 \approx 0,4$ ($r_0 \approx 1,8 \cdot 10^{-13}$ см), мы получим два значения q , $q_1 = 0,462$ и $q_2 = 0,05$, из которых следует выбрать меньшее, т. е.

$$q = 0,05.$$

Значение q_1 приводит к слишком большой асимметрии волновой функции при $r > r_0$, что противоречит наблюдаемой величине магнитного момента дейтрона (если бы q равнялось 0,462, то магнитный момент дейтрона очень сильно отличался бы от суммы моментов нейтрона и протона, см. ниже).

Зная q , легко найти «вес» D -состояния, который мы

определим как $\int_0^{\infty} w^2 dr = x$. Согласно (5.3)

$$x = \frac{aq^2}{1 + aq^2} \approx 0,04.$$

Итак, вес D -состояния в дейтроне составляет всего несколько процентов. Этот результат представляется довольно естественным по следующим причинам. При заметной нецентральной ядерных сил внутри области их действия функции u и w могут быть одного порядка величины, в частности, они могут быть одного порядка величины при $r \approx r_0$. Так как w убывает с расстоянием при $r > r_0$ быстрее, чем u , и радиус

действия ядерных сил меньше радиуса дейтрона, то величина $\int_0^{\infty} \omega^2 dr$ должна быть малой даже в том случае, если отношение $\frac{\omega}{u}$ порядка единицы при $r \approx r_0$. Если бы интеграл $\int_0^{\infty} \omega^2 dr$ был порядка единицы, то это означало бы, что отношение $\frac{\omega}{u}$ при $r \leq r_0$ значительно больше единицы, что является неестественным.

Присутствие D -волны в основном состоянии дейтрона проявляется не только в существовании квадрупольного момента дейтрона. Вследствие наличия D -волны магнитный момент дейтрона не равен точно сумме магнитных моментов нейтрона и протона; действительно, магнитный момент дейтрона можно рассматривать как сумму собственных магнитных моментов нейтрона и протона и добавочного магнитного момента, связанного с орбитальным моментом количества движения протона.

Экспериментально установлено [12 13], что магнитные моменты протона, нейтрона и дейтрона равны соответственно (в единицах $\frac{e\hbar}{2Mc}$)

$$\begin{aligned}\mu_p &= 2,7896, \\ \mu_n &= -1,9103, \\ \mu_d &= 0,8565;\end{aligned}$$

отсюда видно, что $\mu_p + \mu_n - \mu_d$ отлично от нуля:

$$\mu_p + \mu_n - \mu_d = 0,0228$$

(эта величина находится вне пределов ошибок, так как последние составляют около 0,001).

Рассмотрим более подробно вопрос об этой неаддитивности магнитных моментов.

Оператор магнитного момента дейтрона M , выраженный в ядерных магнетонах $\left(\frac{e\hbar}{2Mc}\right)$, имеет вид

$$M = \mu_n \sigma_n + \mu_p \sigma_p + \frac{1}{2} L, \quad (5.11)$$

где σ_n и σ_p — спиновые матрицы Паули для нейтрона и протона и L — оператор орбитального момента (множитель $\frac{1}{2}$ при орбитальном моменте учитывает тот факт, что только одна из двух частиц, образующих дейтрон, обладает зарядом).

Вводя спиновый и полный моменты количества движения S и J , перепишем M в виде

$$M = \frac{1}{2} J + \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) S + \frac{1}{2} (\mu_n - \mu_p) (\sigma_n + \sigma_p), \quad (5.11')$$

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_n + \sigma_p).$$

В триплетном состоянии диагональные матричные элементы $\sigma_n - \sigma_p$ равны, очевидно, нулю (оператор $\sigma_n - \sigma_p$ антисимметричен относительно спиновых координат, в то время как спиновые волновые функции — симметричны), поэтому последнее слагаемое можно вовсе не учитывать.

Покажем, что вектор S может быть заменён своей проекцией на J , т. е.

$$S \rightarrow J \frac{SJ}{J^2} = J \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2J^2} = J \frac{4 - L^2}{4} \quad (5.11'')$$

(мы заменили операторы J^2 и S^2 их собственными значениями, равными 2). Смысл замены оператора S оператором $J \frac{SJ}{J^2}$ заключается в том, что матричные элементы обоих операторов, отвечающие переходам, при которых $J^2 = J(J+1)$ не изменяется, равны между собой.

Доказательство этого утверждения вытекает из соотношения [14]

$$J^4 T - 2J^2 T J^2 + T J^4 = 2\hbar^2 (J^2 T + T J^2) - 4\hbar^2 J (J T),$$

где T — произвольный оператор со свойствами момента, коммутирующий с оператором $J - T$.

В частности, в качестве T можно взять оператор S .

Рассматривая матричные элементы T , диагональные по отношению к J , получим из этого соотношения

$$(T)_{\alpha, J, m; \alpha', J, m'} = \frac{1}{J(J+1)} (J(JT))_{\alpha, J, m; \alpha', J, m'},$$

где α — совокупность собственных значений операторов, коммутирующих с J^2 и J_z .

Заменяя здесь T на S , мы получим формулу (5.11''). Пользуясь (5.11''), перепишем (5.11') в виде

$$M = J \left[\mu_n + \mu_p - \frac{1}{4} (\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2}) L^2 \right]. \quad (5.12)$$

Так как среднее значение L^2 равно $2 \cdot 3 \cdot \int_0^\infty \omega^2 dr$, то выражение для магнитного момента дейтрона приобретает окончательно следующий вид:

$$\mu_D = \mu_n + \mu_p - \frac{3}{2} (\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2}) \int_0^\infty \omega^2 dr. \quad (5.13)$$

Мы видим, что вклад орбитального движения протона в выражение для момента дейтрона пропорционален $\int_0^\infty \omega^2 dr$, т. е. очень мал.

Формула (5.13) показывает, что вес D -состояния ($\int_0^\infty \omega^2 dr$) может быть определён также из найденных экспериментально значений магнитных моментов дейтрона, протона и нейтрона. Используя приведённые ранее значения этих величин, получим:

$$x \equiv \int_0^\infty \omega^2 dr = \frac{2}{3} \frac{\mu_n + \mu_p - \mu_D}{\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{0,0228}{0,8793 - \frac{1}{2}} \approx 0,04.$$

Мы видим, таким образом, что данные о квадрупольном и магнитном моменте дейтрона качественно согласуются с теорией.

Итак, «примесь» D -волны в основном состоянии дейтрона очень невелика. Поэтому при рассмотрении многих вопросов можно считать основным состоянием дейтрона состояние 3S_1 . В частности, без особой погрешности можно исходить из этого предположения при рассмотрении рассеяния медленных нейтронов протонами, что мы и делали выше.

§ 6.. Рассеяние нейтронов в пара- и ортоводороде

Мы вернёмся теперь к рассмотрению вопроса о возможности существования состояний дейтрона с антипараллельными спинами нейтрона и протона. Этот вопрос сводится к определению знака величины α_0 . В § 2 [см. (2,10)] мы показали, что только положительный знак величины α отвечает связанному состоянию нейтрона и протона.

Изучая рассеяние медленных нейтронов свободными протонами, нельзя определить знак α , так как сечение рассеяния определяется квадратом α .

Оказывается, что можно определить знак α_0 , изучая рассеяние нейтронов в молекулярном водороде, т. е. в пара- и ортоводороде [15].

Известно, что протоны, образующие молекулу ортоводорода, имеют параллельно направленные спины, в то время как спины протонов в молекуле параводорода антипараллельны.

Рассмотрим рассеяние медленных нейтронов в молекулярном водороде, предполагая, что длина волны нейтронов сравнима с расстоянием между протонами, образующими молекулу водорода.

В этом случае могут иметь место интерференционные явления, связанные с рассеянием нейтронов обоими протонами молекулы.

Предположим, что энергия нейтронов недостаточна для возбуждения ротационных уровней молекулы. Происходящее в этих условиях упругое (без изменения энергии) рассеяние нейтронов будет отличаться для пара- и ортоводорода, если взаимодействие нейтрона и протона зависит от относительной ориентации их спинов и будет одинаковым при не зависящих от спинов ядерных силах *).

*) Если нейтрон обладает энергией, достаточной для возбуждения ротационных уровней молекулы водорода, то рассеяние нейтронов в параводороде будет отличаться от рассеяния в ортоводороде даже при не зависящих от относительной ориентации спинов ядерных силах. Это связано с тем, что ротационные уровни молекул пара- и ортоводорода отличаются друг от друга: ротационное квантовое число J для параводорода может быть только чётным, для ортоводорода — нечётным.

Отсюда следует, что, изучая рассеяние очень медленных нейтронов в пара- и ортоводороде, можно получить важные сведения о величинах α_1 и α_0 .

Переходя к определению сечений рассеяния медленных нейтронов в пара- и ортоводороде, покажем предварительно, что при рассмотрении различных процессов рассеяния нейтронов можно пользоваться своеобразной теорией возмущений, если только надлежащим образом выбрать потенциал возмущения [16]. Достаточно показать, что это утверждение справедливо в случае рассеяния нейтронов свободными протонами.

Предполагая, что можно пользоваться теорией возмущений, будем исходить из следующей формулы для амплитуды рассеяния частиц в некотором центрально-симметричном силовом поле $U(r)$

$$f(\theta) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int U(r) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{r}} dr, \quad (6.1)$$

где \mathbf{p}_0 и \mathbf{p} — импульсы частицы до и после рассеяния, m — её масса, \mathbf{r} — радиус-вектор, определяющий положение частицы (по отношению к силовому центру).

Мы хотим показать, что формулой подобного вида можно пользоваться также при рассмотрении рассеяния медленных нейтронов свободными протонами, если ввести надлежащим образом выбранную функцию $U(r)$, играющую роль фиктивной потенциальной энергии взаимодействия между частицами.

Нас интересует рассеяние в системе координат, где покоится центр инерции нейтрона и протона; поэтому в (6.1) нужно вместо m подставить приведённую массу частиц, равную $\frac{M}{2}$ (M — масса нейтрона). Итак, мы исходим из следующей формулы для амплитуды рассеяния нейтронов:

$$f_n(\theta) = -\frac{M}{4\pi\hbar^2} \int U e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{r}} dr \quad (6.1')$$

(\mathbf{p}_0 и \mathbf{p} — импульсы нейтрона до и после столкновения с протоном; по абсолютной величине они равны).

Эта формула должна давать такой же результат, как и точная теория; но, согласно последней, рассеяние медленных нейтронов должно быть изотропным, т. е. $f_n(\theta)$ не должно

зависеть от угла рассеяния θ . Для того чтобы формула (6.1') давала такой же результат, нужно считать, что U отлично от нуля только в небольшой области, линейные размеры которой r_0 малы по сравнению с длиной волны нейтронов λ . Действительно, в этом случае экспонента $\frac{(p_0 - p) r}{\hbar}$ не будет превосходить $2 \frac{r_0}{\lambda}$ и, следовательно, весь множитель $e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 - p) r}$ можно будет заменить единицей. Итак,

$$r_0 \ll \lambda. \quad (6.2)$$

При выполнении этого условия (6.1') приводит к результату

$$|f_n(\theta)| = \frac{M}{3\hbar^2} r_0^3 |\bar{U}| \quad (6.3)$$

(\bar{U} представляет собой среднее значение U в области, где эта функция отлична от нуля).

Остаётся записать условие, при выполнении которого можно вообще пользоваться теорией возмущения. Это условие гласит [6]

$$|\bar{U}| \ll E \equiv \frac{\hbar^2}{M\lambda^2}. \quad (6.4)$$

Мы должны теперь проверить, могут ли одновременно выполняться соотношения (6.2), (6.3), (6.4). При этом следует иметь в виду, что $f_n(\theta) \equiv a$ задано, так как эта величина определяется сечением рассеяния медленных нейтронов свободными протонами σ_0 :

$$\sigma_0 = 4\pi a^2.$$

Из (6.3) и (6.2) следует, что

$$|\bar{U}| \approx \frac{\hbar^2}{M} \frac{|a|}{r_0^3} \gg \frac{\hbar^2}{M} \frac{a}{\lambda^3}.$$

Это неравенство вместе с неравенством (6.4) приводит к условию

$$|a| \ll \lambda, \quad (6.5)$$

т. е.

$$\sigma_0 \ll \lambda^2. \quad (6.5')$$

Так как $|a| \approx 10^{-12}$ см, то условие (6.5') выполняется, если энергия нейтрона меньше нескольких MeV. Вплоть до таких энергий можно, следовательно, пользоваться теорией возмущений.

Мы будем в дальнейшем, пользуясь теорией возмущений, брать U в виде

$$\text{const} \cdot \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p), \quad (6.6)$$

где \mathbf{r}_n и \mathbf{r}_p — радиус-векторы, определяющие положение нейтрона и протона (const. не зависит от координат обеих частиц), а δ — дельта-функция Дирака.

Написанное выражение означает, что координаты нейтрона и протона должны совпадать для того, чтобы эти частицы взаимодействовали; иными словами, радиус действия ядерных сил считается при этом равным нулю (это законно для медленных нейтронов, длина волны которых велика по сравнению с радиусом действия ядерных сил).

Определим величину const. в формуле (6.6). Подставляя (6.6) вместо U в формулу (6'.1), получим:

$$\text{const.} = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} a. \quad (6.6')$$

Амплитуда рассеяния a связана с фазой S -волны на бесконечности δ соотношением

$$a = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta} - 1). \quad (6.7)$$

Если считать радиус действия ядерных сил бесконечно малым, то δ равняется

$$\delta = -\text{arc ctg} \frac{a}{k}.$$

В случае очень медленных нейтронов $\delta = -\frac{k}{\alpha}$ и

$$a = -\frac{1}{\alpha}, \quad k \rightarrow 0.$$

Учитывая конечность радиуса действия ядерных сил, мы получим согласно (3.13'):

$$a = -\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha r_0\right)^{-1}, \quad k \rightarrow 0. \quad (6.7')$$

Итак, мы видим, что при рассмотрении различных процессов рассеяния медленных нейтронов протонами можно пользоваться теорией возмущений, считая энергию взаимодействия нейтрона и протона равной

$$U = - \frac{4\pi\hbar^2}{M} a\delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p). \quad (6.8)$$

Амплитуда рассеяния a различна для триплетного и синглетного состояний. Мы будем обозначать её в этих состояниях соответственно через a_1 и a_0 . Легко написать фиктивную энергию взаимодействия в таком виде, чтобы она давала автоматически правильные результаты как для триплетного, так и для синглетного состояний.

Для этого введём оператор

$$R = \frac{1}{2}(1 + \sigma_n \sigma_p),$$

где σ_n и σ_p — матрицы Паули, определяющие спин нейтрона и протона. Так как собственные значения $\sigma_n \sigma_p$ в триплетном и синглетном состояниях равны соответственно 1 и -3 [см. (4.2')], то собственные значения R в этих состояниях равны 1 и -1 . Поэтому (6.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} U &= - \frac{4\pi\hbar^2}{M} \left[a_1 \frac{1+R}{2} + a_0 \frac{1-R}{2} \right] \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p) = \\ &= - \frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n \sigma_p] \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Применим теперь эту общую формулу к рассмотрению рассеяния медленных нейтронов в молекулярном водороде.

В этом случае оператор энергии взаимодействия нейтрона с молекулой водорода может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} U &= - \frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n \sigma_{11}] \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1) - \\ &\quad - \frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n \sigma_{21}] \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (6.9')$$

где индексы 1 и 2 относятся к обоим протонам.

Удобно выделить в этом выражении симметричную и антисимметричную части по отношению к спинам протонов; именно, мы представим U в виде

$$\begin{aligned}
 U = & -\frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S] [\delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1) + \\
 & + \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_2)] - \frac{\pi\hbar^2}{2M} (a_1 - a_0) \sigma_n (\sigma_1 - \sigma_2) \times \\
 & \times [\delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1) - \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_2)], \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

где матрица

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

представляет собой полный спин молекулы.

Ясно, что симметричная часть оператора U ответственна за такие переходы, при которых спиновая симметрия молекулы не изменяется, иными словами, эта часть оператора обуславливает переходы ортоводорода в ортоводород и параводорода в параводород.

Антисимметричная часть вызывает переходы ортоводорода в параводород и обратно.

Будем в дальнейшем пользоваться системой координат, в которой покоятся центр инерции нейтрона и молекулы водорода. Рассмотрим столкновение нейтрона, импульс которого равен \mathbf{p}_0 , с молекулой водорода, обладающей импульсом $-\mathbf{p}_0$ и характеризующейся квантовыми числами ν (вибрационное число), J (ротационное число) и S (результатирующий спин).

Определим вероятность того, что нейтрон в результате столкновения приобретёт импульс \mathbf{p} , а молекула перейдёт в состояние, характеризующееся квантовыми числами $-\mathbf{p}$, ν' , J' , S' .

Волновая функция начального состояния нейтрона и молекулы имеет вид

$$\begin{aligned}
 \psi_i = & \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \mathbf{r}_n} \chi_m \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}} \times \\
 & \times \Phi_{\nu, J, m_J}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \chi_{S, m_S}, \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

где $\Omega^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \mathbf{r}_n}$ — волновая функция нейтрона с импульсом \mathbf{p}_0 , нормированная на объём Ω ; χ_m — спиновая функция нейтрона (m — проекция спина нейтрона на ось z); $\Omega^{-1/2} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}}$ — волновая функция, описывающая движение центра тяжести молекулы, импульс которой равен $-\mathbf{p}_0$; $\Phi_{v, J, m_J}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ — волновая функция, описывающая относительное движение протонов в состоянии с вибрационным квантовым числом v , ротационным числом J и магнитным квантовым числом m_J ; наконец, χ_{S, m_S} — спиновая функция протонов в состоянии с результирующим спином S (проекция спина на ось z равна m_S).

Аналогичным образом волновая функция конечного состояния ψ_f может быть записана в виде

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r}_n} \chi_{m'} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}} \times \\ \times \Phi_{v', J', m'_J}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \chi_{S', m'_S}.$$

Вероятность перехода, отнесённая к единице времени, определяется по известной формуле

$$\frac{2\pi}{\hbar} |(\psi_f, U\psi_i)|^2 \rho_E, \quad (6.12)$$

где ρ_E — число конечных состояний в единичном интервале энергии, а $(\psi_f, U\psi_i)$ — сокращённое обозначение матричного элемента энергии взаимодействия.

Определим прежде всего плотность конечных состояний. Заметим для этого, что энергия в конечном состоянии равняется

$$E = \frac{3}{4M} p^2 + E_{J', v'},$$

где $E_{J, v}$ — внутренняя энергия молекулы в состоянии с квантовыми числами J, v . Согласно закону сохранения энергии

$$E = \frac{3}{4M} p^2 + E_{J', v'} = \frac{3}{4M} p_0^2 + E_{J, v}. \quad (6.13)$$

Плотность конечных состояний равна

$$\rho_E = \frac{\Omega p^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp}{dE} d\Omega = \Omega \frac{Mp}{12\pi^3\hbar^3} d\Omega$$

($d\Omega$ — элемент телесного угла в котором заключён вектор \mathbf{p}).

Нас не интересуют какие-либо определённые значения квантовых чисел m' , m'_J , m'_S , характеризующие конечное состояние. Поэтому мы просуммируем (6.12) по всем допустимым значениям чисел m' , m'_J , m'_S и усредним результат по значениям чисел m , m_J , m_S , относящимся к начальному состоянию.

Чтобы найти дифференциальное сечение нейтронов, нужно полученное таким образом выражение для вероятности рассеяния разделить на поток нейтронов относительно молекулы водорода, равный $\frac{3}{2} \frac{p_0}{M\Omega}$.

Дифференциальное сечение рассеяния, сопровождающегося переходом молекулы из состояния J, v, S в состояние J', v', S' , имеет следующий вид:

$$d\sigma_{J', v', S'; J, v, S} = \frac{4}{9} \frac{p}{p_0} \frac{1}{2(2S+1)(2J+1)} \times \\ \times \sum_{m', m'_J, m'_S} \sum_{m, m_J, m_S} \left| \left(\psi_{J', v', S'} \left| \frac{M\Omega}{2\pi\hbar^2} U \psi_{J, v, S} \right. \right) \right|^2 d\Omega. \quad (6.14)$$

Рассмотрим сначала переходы, при которых спин молекулы не изменяется. Используя симметричную часть энергии взаимодействия, будем иметь в этом случае:

$$\left(\psi_{J', v', S'} \left| \frac{M\Omega}{2\pi\hbar^2} U \psi_{J, v, S} \right. \right) = \\ = -\frac{1}{2\Omega} (m' S m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S) \times \\ \times \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p_0 - p) \left[\mathbf{r}_n - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \right] \right\} \times \\ \times \Phi_{v', J', m'_J}^*(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \Phi_{v, J, m_J}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \\ \times [\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d\mathbf{r}_n d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \\ = - (m' S m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S) \times \\ \times \int \cos \frac{(p_0 - p) \mathbf{r}}{2\hbar} \Phi_{v', J', m'_J}(\mathbf{r}) \Phi_{v, J, m_J}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{m', m'_S} \sum_{m, m_S} \left| \left(\psi_{i'}^*, \frac{M\Omega}{2\pi\hbar^2} U \psi_i \right) \right|^2 = \\ & = \left| \int \cos \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}}{2\hbar} \Phi_{v', J', m'_J}^*(\mathbf{r}) \Phi_{v, J, m_J}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 \times \\ & \times \sum_{m', m'_S} \sum_{m, m_S} |(m' S m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S)|^2. \end{aligned}$$

Так как мы рассматриваем переходы без изменения спина молекулы, то оператор $3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S$ является диагональным по отношению к полному спину молекулы; поэтому второй сомножитель в последней формуле можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{m, m_S} \sum_{m', S', m'_S} |(m' S' m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S)|^2 = \\ & = \sum_{m, m_S} (m S m_S | [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S]^2 | m S m_S) \end{aligned}$$

(мы использовали матричный закон умножения).

Легко видеть, что

$$(\sigma_n S)^2 = S^2 - \sigma_n S.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\sigma_n S)^2 &= (\sigma_x S_x + \sigma_y S_y + \sigma_z S_z)^2 = \\ &= S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + \sigma_x \sigma_y S_x S_y + \sigma_y \sigma_x S_y S_x + \dots \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$$

и

$$S_x S_y - S_y S_x = iS_z,$$

мы и получим указанное соотношение.

Поэтому

$$\begin{aligned} & [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S]^2 = \\ & = (3a_1 + a_0)^2 + (a_1 - a_0)^2 S^2 + \\ & + 2(3a_1 + a_0)(a_1 - a_0) \sigma_n S - (a_1 - a_0)^2 \sigma_n S. \end{aligned}$$

Так как сумма диагональных элементов матрицы момента равна нулю, то

$$\sum_{m, m_S} (mm_S | (3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S)^2 | mm_S) = \\ = 2(2S + 1) [(3a_1 + a_0)^2 + S(S + 1)(a_1 - a_0)^2].$$

Собирая наши формулы, мы получим окончательно:

$$d\sigma_{J', v', S'; J, v, S} = \frac{4}{9} \frac{p}{p_0} [(3a_1 + a_0)^2 + S(S + 1)(a_1 - a_0)^2] \times \\ \times \frac{1}{2J+1} \sum_{m_J, m_J'} \left| \int \cos \frac{(p_0 - p) r}{2\hbar} \Phi_{v', J', m_J'}^*(r) \Phi_{v, J, m_J}(r) dr \right|^2 d\omega. (6.15)$$

Заметим, что в этом выражении J и J' должны быть числами одинаковой чётности. Действительно, функция Φ удовлетворяет условию

$$\Phi_{v, J, m_J}(-r) = (-1)^J \Phi(r)_{v, J, m_J}.$$

Изменение знака r соответствует обмену пространственных координат обоих протонов. Пространственная волновая функция должна при этом, согласно принципу Паули, оставаться неизменной в случае противоположно ориентированных спинов протонов, т. е. при $S = 0$, и должна менять знак в случае одинаково ориентированных спинов, т. е. при $S = 1$. Иными словами, при $S = 0$, (параводород) возможны только чётные значения J , а при $S = 1$ (ортоводород) — только нечётные значения J . Эти соотношения могут быть записаны в виде условия

$$(-1)^J = (-1)^S. (6.16)$$

Итак, орто-ортопереходы происходят между состояниями с нечётными значениями ротационного числа J ; пара-парапереходы происходят между состояниями с чётными значениями J .

Рассмотрим теперь переходы, при которых общий спин молекул изменяется, т. е. орто-пара- и пара-ортопереходы. Эти переходы вызываются антисимметричной частью энергии возмущения (6.10).

Вычисления, аналогичные проделанным выше, приводят к следующему выражению для сечения рассеяния с изменением общего спина молекулы:

$$d\sigma_{J', v', 1-S; J, v, S} = \frac{4}{9} \frac{p}{p_0} (3 - 2S) (a_1 - a_0)^2 \frac{1}{2J+1} \times \\ \times \sum_{m_J, m_{J'}} \left| \int \sin \frac{(p_0 - p) r}{2\hbar} \Phi_{v', J', m_{J'}}^*(r) \Phi_{v, J, m_J}(r) dr \right|^2 d\omega. \quad (6.17)$$

Заметим, что орто-пара- и пара-ортопереходы связаны с изменением чётности ротационного числа J .

Минимальная энергия, которой должен обладать нейтрон (в системе центра инерции) для того, чтобы перевести молекулу из состояния J, v в состояние J', v' , равняется согласно (6.13)

$$\frac{p_0^2 - p^2}{2M} = \frac{2}{3} (E_{J', v'} - E_{J, v}). \quad (6.13')$$

В лабораторной системе начальный импульс нейтрона равен $\frac{3}{2} p_0$; поэтому минимальная энергия равна:

$$\frac{3}{2} (E_{J', v'} - E_{J, v}).$$

Для малых значений чисел J, v энергия молекулы (выраженная в eV) может быть приближённо найдена по формуле [17]

$$E_{J, v} = 0,015 \frac{1}{2} J(J+1) + 0,533v.$$

Нейтрон должен обладать энергией в 0,045 eV для того, чтобы перевести молекулу из состояния с квантовыми числами $v=0, J=1$ в состояние $v'=0, J'=2$. Для перехода из состояния $v=0, J=0$ в состояние $v=0, J=1$ требуется энергия 0,023 eV.

Рассмотрим тот случай, когда энергия нейтрона меньше 0,045 eV. При этом вибрационное число v не может изменяться; что же касается J , то возможны следующие переходы: $0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1$.

Для определения вероятности различных переходов будем рассматривать молекулу H_2 как твёрдый ротатор. В этом

приближении волновая функция молекулы может быть представлена в виде [17]

$$\Phi_{0, J, m_J}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi} \frac{(J-|m_J|)!}{(J+|m_J|)!}} \sin^{|m_J|} \vartheta \left(\frac{d}{d \cos \vartheta}\right)^{J+|m_J|} \times \\ \times \frac{(\cos^2 \vartheta - 1)^J}{2^J J!} e^{im_J \varphi} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)]^{1/2} \frac{1}{r_e}, \quad (6.18)$$

где ϑ и φ — полярный и азимутальный углы, определяющие положение \mathbf{r} и r_e — расстояние между обоими протонами молекулы в состоянии равновесия ($r_e \approx 0,75 \cdot 10^{-8}$ см).

Матричный элемент, определяющий упругое рассеяние ($0 \rightarrow 0$), равен:

$$\int \cos \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}| r \cos \vartheta}{2\hbar} |\Phi_{0,0,0}(\mathbf{r})|^2 2\pi r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta = \\ = \frac{\sin \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}| r_e}{2\hbar}}{\frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}| r_e}{2\hbar}} = \frac{\sin \left\{ \frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \right\}}{\frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}}$$

(θ — угол рассеяния в системе центра инерции).

Дифференциальное сечение упругого рассеяния согласно (6.15) равно

$$d\sigma_{0,0,0;0,0,0} = \frac{4}{9} (3a_1 + a_0)^2 \left[\frac{\sin \left\{ \frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \right\}}{\frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}} \right]^2 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Интегральное сечение имеет вид

$$\sigma_{0,0,0;0,0,0} = \frac{32\pi}{9} (3a_1 + a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e}\right)^2 \int_0^{\frac{p_0 r_e}{\hbar}} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \\ = \frac{16\pi}{9} (3a_1 + a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e}\right)^2 \left\{ \ln \frac{2p_0 r_e}{\hbar} - Ci \frac{2p_0 r_e}{\hbar} + 0,5772 \right\}, \quad (6.19)$$

где

$$Cix = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt.$$

Аналогичным образом могут быть определены сечения для переходов $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$, ($\nu = 0$) [15] :

$$\begin{aligned} \sigma_{1,0,1;0,0,0} &= 32\pi (a_1 - a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e}\right)^2 \times \\ &\times \left[\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} Cix \right] \left| \begin{matrix} (p_0 + p) r_e / \hbar \\ (p_0 - p) r_e / \hbar \end{matrix} \right. \quad (6.20) \\ &\left(p = \sqrt{p_0^2 - \frac{4M}{3} E_{1,0}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{0,0,0;1,0,1} &= \frac{32\pi}{3} (a_1 - a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e}\right)^2 \left[\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x^2} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} Cix \right] \left| \begin{matrix} (p + p_0) r_e / \hbar \\ (p - p_0) r_e / \hbar \end{matrix} \right. \quad (6.21) \\ &\left(p = \sqrt{p_0^2 + \frac{4M}{3} E_{1,0}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,0,1;1,0,1} &= \frac{16\pi}{3} \left\{ (3a_1 + a_0)^2 + \right. \\ &+ 2 (a_1 - a_0)^2 \frac{1}{\xi^2} \left[-\frac{3}{\xi^2} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi \right)^2 + \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} + \right. \\ &\left. \left. + \ln 2\xi - Ci 2\xi - 0,4228 \right] \right\}, \quad (6.22) \end{aligned}$$

где

$$\xi = \frac{p_0 r_e}{\hbar}.$$

Вычисления приводят к следующим результатам. Если энергия нейтрона равна 20°K , то [18]

$$\begin{aligned} \sigma_{0,0,0;0,0,0} &= 6,444 (3a_1 + a_0)^2, \\ \sigma_{1,0,1;1,0,1} &= 6,450 [(3a_1 + a_0)^2 + 2 (a_1 - a_0)^2], \\ \sigma_{0,0,0;1,0,1} &= 1,753 (a_1 - a_0)^3. \end{aligned}$$

Экспериментально могут быть найдены величины

$$\sigma_{\text{пара}} = \sigma_{0,0,0;0,0,0};$$

$$\sigma_{\text{орто}} = \sigma_{1,0,1;1,0,1} + \sigma_{0,0,0;1,0,1}.$$

При энергии нейтронов $0,000867 \text{ eV}$ они оказываются равными [19]

$$\sigma_{\text{пара}} \approx 5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2, \quad \sigma_{\text{орто}} = 145 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

При энергии нейтронов $\sim 0,0024 \text{ eV}$

$$\sigma_{\text{пара}} \approx 3,58 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2,$$

$$\sigma_{\text{орто}} \approx 116 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Сечение упругого рассеяния в параводороде $\sigma_{\text{пара}}$ содержит комбинацию $(3a_1 + a_0)^2$, в $\sigma_{\text{орто}}$ помимо этой величины входит ещё $(a_1 - a_0)^2$. Из опытов по рассеянию медленных нейтронов в пара- и ортоводороде можно, следовательно, определить величины $|3a_1 + a_0|$ и $|a_1 - a_0|$, т. е. определить абсолютные значения a_0 и a_1 и знак отношения $\frac{a_1}{a_0}$.

Величины a_1 и a_0 оказываются противоположных знаков. Так как $a_1 > 0$, то согласно (6.7') $a_1 < 0$. Поэтому $a_0 > 0$, т. е. $\alpha_0 < 0$ *). Амплитуды рассеяния равны [19]

$$a_1 \approx -0,52 \cdot 10^{-12} \text{ см},$$

$$a_0 \approx 2,34 \cdot 10^{-12} \text{ см}.$$

Итак,

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_0 < 0.$$

*) Приведём некоторые данные [15], показывающие, как влияет выбор знака α_0 на величину сечений различных процессов рассеяния и возбуждения молекулы H_2 . Считая $r_0 \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, можно показать, что значение сечения упругого рассеяния нейтронов в параводороде при отрицательном α_0 примерно в 244 раза меньше значения при $\alpha_0 > 0$. Различие между обоими случаями столь велико, что изучение одного только упругого рассеяния в параводороде приводит к заключению, что $\alpha_0 < 0$.

Если $\alpha_0 < 0$, то сечение рассеяния тепловых нейтронов с энергией $E \approx 0,037 \text{ eV}$ в параводороде будет примерно в 100 раз больше сечения рассеяния нейтронов, находящихся при температуре жидкого воздуха ($E \approx 0,012 \text{ eV}$). При $\alpha_0 > 0$ это отношение составляет только $\frac{3}{4}$.

Если $\alpha_0 < 0$, то сечение рассеяния нейтронов в ортоводороде при температуре жидкого воздуха будет в 300 раз больше сечения рассеяния тех же нейтронов в параводороде. При $\alpha_0 > 0$ это отношение составляет только $\frac{7}{5}$.

Так как $\alpha_0 < 0$, то это означает, что только триплетное состояние является связанным. Мы видим, что не существует состояний дейтрона с антипараллельными спинами нейтрона и протона.

Заметим, что сечение рассеяния нейтронов свободными протонами можно представить в виде

$$\sigma_0 = \pi (3a_1^2 + a_0^2) = \frac{\pi}{4} [(3a_1 + a_0)^2 + 3(a_1 - a_0)^2]. \quad (6.23)$$

Это соотношение показывает, что σ_0 , так же как и $\sigma_{\text{пара}}$ и $\sigma_{\text{орто}}$, выражается через величины $3a_1 + a_0$ и $a_1 - a_0$; иными словами, σ_0 можно выразить через $\sigma_{\text{орто}}$ и $\sigma_{\text{пара}}$.

Согласно имеющимся данным [7]

$$\sigma_0 \approx 20,4 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Приведённые выше данные для $\sigma_{\text{орто}}$ и $\sigma_{\text{пара}}$ находятся в соответствии с этим значением σ_0 [19].

Заметим, что это соответствие является косвенным доказательством того, что спин нейтрона равен $\frac{1}{2}$. Если бы спин нейтрона отличался от этого значения и был бы равен, например, $\frac{3}{2}$, то σ_0 определялось бы формулой

$$\sigma_0 = \frac{5}{8} \sigma_{\uparrow\uparrow} + \frac{3}{8} \sigma_{\uparrow\downarrow} = \frac{\pi}{2} (5a_1^2 + 3a_0^2),$$

где $\sigma_{\uparrow\uparrow}$ и $\sigma_{\uparrow\downarrow}$ — сечения для параллельной и антипараллельной ориентации спинов нейтрона и протона (веса обоих состояний равны соответственно 5 и 3).

Используя значения a_1 и a_0 , полученные из опытов по рассеянию медленных нейтронов в орто- и параводороде, мы получили бы для σ_0 значение $\sim 7 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, которое гораздо меньше наблюдаемого.

Опыты по рассеянию медленных нейтронов в пара- и ортоводороде могут быть использованы для определения порядка величины радиуса действия ядерных сил r_0 . Последний входит в выражения, связывающие a_1 и a_0 с α_1 и α_0 [см. (6.7')]. Следует иметь в виду, что радиус действия сил в триплетном состоянии отличается от радиуса действия в синглетном состоянии.

Считая энергию связи дейтрона равной $\varepsilon \approx 2,19 \cdot 10^6 \text{eV}$, мы найдем согласно (2.3):

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{M\varepsilon}{\hbar^2}} \approx 2,29 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}, \quad \frac{1}{\alpha_1} = 4,36 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Зная из опытных данных величину α_1 , можно по формуле (6.7') вычислить радиус действия ядерных сил в триплетном состоянии.

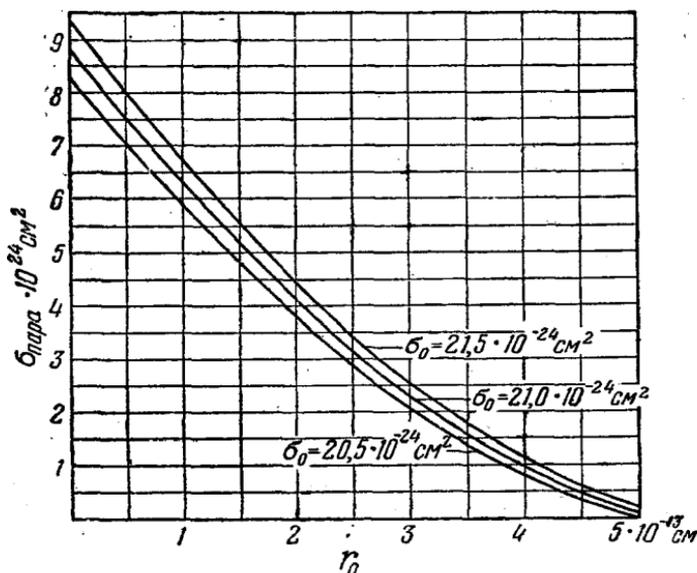


Рис. 2.

Заметим, что сечение рассеяния нейтронов в параводороде очень чувствительно к выбору величины r_0 . На рис. 2 и 3 [18] приведена зависимость сечений $\sigma_{\text{пара}}$ и $\sigma_{\text{орто}}$ от r_0 для трёх значений $\sigma_0 = 20,5; 21; 21,5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. Энергия нейтронов равна 20°K .

Сопоставление данных по рассеянию медленных нейтронов свободными протонами и в орто- и параводороде приводит к заключению, что в триплетном состоянии

$$r_0 \approx 1,6 \cdot 10^{-13} - 1,8 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

причём более вероятным является большее значение, так как, считая $r_0 = 1,6$ см, мы получим из данных по квадрупольному моменту дейтрона слишком большое значение для веса D -волны в основном состоянии дейтрона (порядка 70%), не соответствующее данным о магнитных моментах дейтрона, протона и нейтрона.

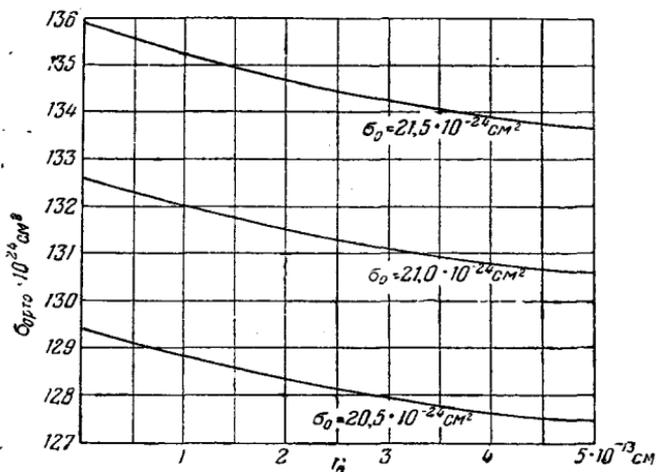


Рис. 3.

Приведённое значение r_0 меньше обычно принимаемого значения $2,8 \cdot 10^{-13}$ см, которое получается из опытов по рассеянию протонов протонами и относится к антипараллельной ориентации спинов протонов.

Заметим, что дальнейшие данные о зависимости ядерных сил от спинов частиц могут дать опыты по рассеянию медленных нейтронов в орто- и парадегерии [20]. Мы не будем, однако, подробно рассматривать здесь этот вопрос.

§ 7. Рассеяние нейтронов связанными протонами

Формулы (3.8') и (3.15), определяющие рассеяние нейтронов протонами, выведены в предположении, что протоны являются свободными. При рассмотрении рассеяния нейтронов в веществах, содержащих водород, например в парафине, этими формулами можно пользоваться только в тех

случаях, когда энергия нейтрона значительно больше энергии связи протонов, т. е. больше некоторой предельной энергии $\hbar\omega_0$, где ω_0 по порядку величины определяет частоту колебаний протона в молекуле вещества. Для парафина эта энергия составляет около 0,4 eV. При меньших энергиях нейтронов и энергиях такого же порядка величины протоны нельзя уже считать свободными.

Легко получить общую формулу для сечения рассеяния нейтронов, учитывающую связь протона в молекуле [16].

Мы будем, так же как и в § 6, пользоваться теорией возмущений, считая энергию взаимодействия нейтрона и протона равной

$$U = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} a\delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p),$$

где \mathbf{r}_n и \mathbf{r}_p — радиус-векторы, определяющие положения нейтрона и протона, M — масса нейтрона и a — амплитуда рассеяния нейтронов свободными протонами, связанная с соответствующим сечением рассеяния соотношением

$$\sigma_0 = 4\pi a^2.$$

Пусть нейтрон с импульсом \mathbf{p}_0 рассеивается протоном, находящимся в состоянии, которое характеризуется волновой функцией $\psi_i(\mathbf{r}_p)$. Обозначим через \mathbf{p} импульс нейтрона после столкновения, в результате которого протон переходит в состояние, характеризующееся волновой функцией $\psi_f(\mathbf{r}_p)$.

Определим вероятность перехода нейтрона и протона из начального в конечное состояние. Эта вероятность определяется по известной формуле

$$\frac{2\pi}{\hbar} |U_{p_0i, pf}|^2 \rho,$$

где ρ — число конечных состояний, отнесенное к единичному интервалу энергии, $U_{p_0i, pf}$ — матричный элемент энергии взаимодействия, равный

$$U_{p_0i, pf} = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} a \int \Omega^{-1/2} e^{i\mathbf{p}_0\mathbf{r}_n} \psi_i(\mathbf{r}_p) \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p) \Omega^{-1/2} \times \\ \times e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}_n} \psi_f^*(\mathbf{r}_p) d\mathbf{r}_n d\mathbf{r}_p$$

($\Omega^{-1/2} e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_n}$ — волновая функция нейтрона с импульсом \mathbf{p} , нормированная на объём Ω). Выполнив интегрирование по координатам протона, перепишем это выражение в виде

$$U_{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}'} = - \frac{4\pi\hbar^2}{M\Omega} a \int e^{i(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{r}_n} \psi_i(\mathbf{r}_n) \psi_f^*(\mathbf{r}_n) d\mathbf{r}_n. \quad (7.1)$$

Определим теперь плотность состояний ρ . При этом следует различать два случая — случай связанных и случай свободных протонов. В случае связанных протонов в лабораторной системе координат, в которой протоны покоятся, ρ равно

$$\rho_{\text{связ}} = \frac{\Omega p^2 \frac{dp}{dE} d\sigma}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\Omega M p d\sigma}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $E = \frac{p^2}{2M}$ — энергия нейтрона после столкновения и $d\sigma$ — элемент телесного угла, в котором находится импульс нейтрона \mathbf{p} .

В случае свободных протонов удобнее всего пользоваться системой координат, в которой покоится центр инерции нейтрона и протона. В этой системе ρ равно

$$\rho_{\text{своб}} = \frac{\Omega p^2 \frac{dp}{dE} d\sigma}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{1}{2} \frac{\Omega M p d\sigma}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $E = \frac{p^2}{M}$ — энергия относительного движения нейтрона и протона. Это выражение получается из выражения для $\rho_{\text{связ}}$, если заменить в последнем массу нейтрона на приведённую массу $\frac{M}{2}$.

Разделив вероятность перехода на $\frac{v_{\text{отн}}}{\Omega}$, где $v_{\text{отн}}$ — относительная скорость нейтрона и протона в начальном состоянии, получим дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$. В случае связанных протонов $v_{\text{отн}} = v_0$, где v_0 — начальная скорость нейтронов в лабораторной системе. В случае свободных протонов $v_{\text{отн}} = 2v_0$, где v_0 — начальная скорость нейтронов в системе центра инерции.

Используя эти соотношения, получим следующие выражения для дифференциального сечения рассеяния нейтронов свободными и связанными протонами:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{\text{своб}} &= a^2 d\sigma, \\ d\sigma_{\text{связ}} &= 4 \frac{v}{v_0} a^2 \left| \int e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 - p) r} \psi_i(\mathbf{r}) \psi_f^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 d\sigma. \end{aligned} \right\} (7.2)$$

В предельном случае очень малых энергий нейтрона возможно только упругое рассеяние, при котором состояние протона не изменяется, т. е. $\psi_i \equiv \psi_f$. Заменяя в этом случае экспоненциальный множитель единицей и замечая, что $v = v_0$, мы получим из (7.2):

$$d\sigma_{\text{связ}} = 4a^2 d\sigma, \quad d\sigma_{\text{своб}} = a^2 d\sigma.$$

Полное сечение упругого рассеяния равно

$$\sigma_{\text{связ}} = 16\pi a^2 = 4\sigma_0, \quad (7.3)$$

где $\sigma_0 \equiv \sigma_{\text{своб}}$ — полное сечение рассеяния нейтронов свободными протонами. Используя это обозначение, перепишем общую формулу (7.2) для дифференциального сечения рассеяния нейтронов связанными протонами в следующем виде:

$$d\sigma = \frac{1}{\pi} \frac{v}{v_0} \sigma_0 \left| \int e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 - p) r} \psi_i(\mathbf{r}) \psi_f^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 d\sigma. \quad (7.4)$$

Рассмотрим теперь неупругое рассеяние нейтронов в веществах, содержащих водород. Мы будем рассматривать протон в молекуле такого вещества, как гармонический осциллятор.

В общем случае волновая функция протона представляет собой произведение трёх волновых функций линейного осциллятора

$$\psi(r) = \psi_{n_x}(\xi) \psi_{n_y}(\eta) \psi_{n_z}(\zeta),$$

где

$$\psi_m(\xi) = (2\pi)^{-1/4} (m!)^{-1/2} e^{-1/4 \xi^2} H_m(\xi),$$

$$\xi = x \left(\frac{\hbar}{2M\omega_x} \right)^{-1/2}, \quad \eta = y \left(\frac{\hbar}{2M\omega_y} \right)^{-1/2}, \quad \zeta = z \left(\frac{\hbar}{2M\omega_z} \right)^{-1/2}.$$

Здесь x, y, z — координаты протона; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — частоты, отвечающие колебаниям вдоль осей x, y, z ; $H_m(\xi)$ — функции Эрмита.

$$H_m(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^2} \left[\frac{d^m}{d\xi^m} e^{-\frac{1}{2}(\xi-\alpha)^2} \right]_{\alpha=0},$$

n_x, n_y, n_z — вибрационные квантовые числа осциллятора.

Матричный элемент, входящий в (7.4), можно представить в виде произведения трёх интегралов типа

$$\begin{aligned} A_x &= (2\pi)^{-1/2} (n_x!)^{-1/2} \left(\frac{d^{n_x}}{d\alpha^{n_x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\xi-\alpha)^2 + iq_x \xi} d\xi \right)_{\alpha=0} = \\ &= (iq_x)^{n_x} (n_x!)^{-1/2} e^{-1/2 q_x^2} \\ &\quad \left(q_x = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)_x}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_x}} \right), \end{aligned} \quad (7.5)$$

относящихся к координатам x, y, z .

Сечение рассеяния (7.4) на основании (7.5) приобретает вид

$$d\sigma = \frac{1}{\pi} \frac{v}{v_0} \sigma_0 \frac{q_x^{2n_x} q_y^{2n_y} q_z^{2n_z}}{n_x! n_y! n_z!} e^{-q^2} d\mathbf{q}, \quad (7.6)$$

где

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2.$$

Если частоты колебаний вдоль трёх направлений одинаковы и равны ω , то

$$q^2 = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2}{2M\hbar\omega} = \frac{E + E_0 - 2\sqrt{EE_0} \cos \vartheta}{\hbar\omega}$$

(E_0 — начальная энергия нейтрона, ϑ — угол рассеяния).

В этом случае энергия осциллятора равна $n\hbar\omega$, где $n = n_x + n_y + n_z$. Суммируя (7.6) по всем значениям чисел n_x, n_y, n_z , сумма которых равна n , мы найдём сечение рассеяния нейтрона, сопровождающегося возбуждением n -го вибрационного состояния протона. Это сечение равно

$$d\sigma_n = \frac{2\sigma_0}{n!} \sqrt{\frac{E}{E_0}} q^{2n} e^{-q^2} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \frac{q^{2n}}{n!} e^{-q^2} dq^2, \quad (7.7)$$

где

$$\varepsilon = \frac{E_0}{\hbar\omega}, \quad \varepsilon - n = \frac{E}{\hbar\omega}.$$

Полное сечение возбуждения n -го состояния находится путём интегрирования (7.7) по q в пределах

$$q_{\min} = \varepsilon^{1/2} - (\varepsilon - n)^{1/2}, \quad q_{\max} = \varepsilon^{1/2} + (\varepsilon - n)^{1/2}. \quad (7.7')$$

Оно равно

$$\sigma_n = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} [f_n(q_{\min}^2) - f_n(q_{\max}^2)], \quad (7.8)$$

где

$$f_n(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

Сечение упругого рассеяния согласно (7.8) выражается формулой

$$\sigma_{n=0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} (1 - e^{-4\varepsilon}); \quad (7.9)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ оно равно $4\sigma_0$, что совпадает с полученным выше результатом; при $\varepsilon = 1$ оно равно $0,98\sigma_0$.

Для больших значений ε при любом n , не слишком близком к ε , второе слагаемое в (7.8) очень мало, а первое мало отличается от единицы. Поэтому

$$\sigma_n = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \quad (\varepsilon \gg 1). \quad (7.10)$$

Так как максимальное значение n согласно (7.7') равно ε , то полное сечение при больших ε равно σ_0 , причём одинаково вероятно любое значение потери энергии между нулём и начальной энергией нейтрона $\varepsilon\hbar\omega$. Этот результат вполне очевиден, так как при больших ε связь протона несущественна.

На рис. 4^[16,3] изображена зависимость сечений $\sigma_{n=0}$, $\sigma_{n=1}$, $\sigma_{n=2}$, а также полного сечения $\sigma_l = \sum_n \sigma_n$ от энергии нейтрона. Здесь же приведён ход сечения для потери энергии. Это сечение определяется согласно формуле

$$\sigma_l = \frac{2}{\varepsilon} \sum_n n \sigma_n \quad (7.11)$$

(множитель $\frac{2}{\varepsilon}$ введён для того, чтобы при больших энергиях ε сечение σ_l равнялось σ_0).

Мы видим, что при значениях энергии нейтрона, равных $E_0 = n\hbar\omega$, происходит возрастание сечения рассеяния. Это

связано с возможностью передачи энергии колебательному движению протонов. Нейтроны с энергией, меньшей энергии колебательного кванта $\hbar\omega$, не могут возбуждать колебаний

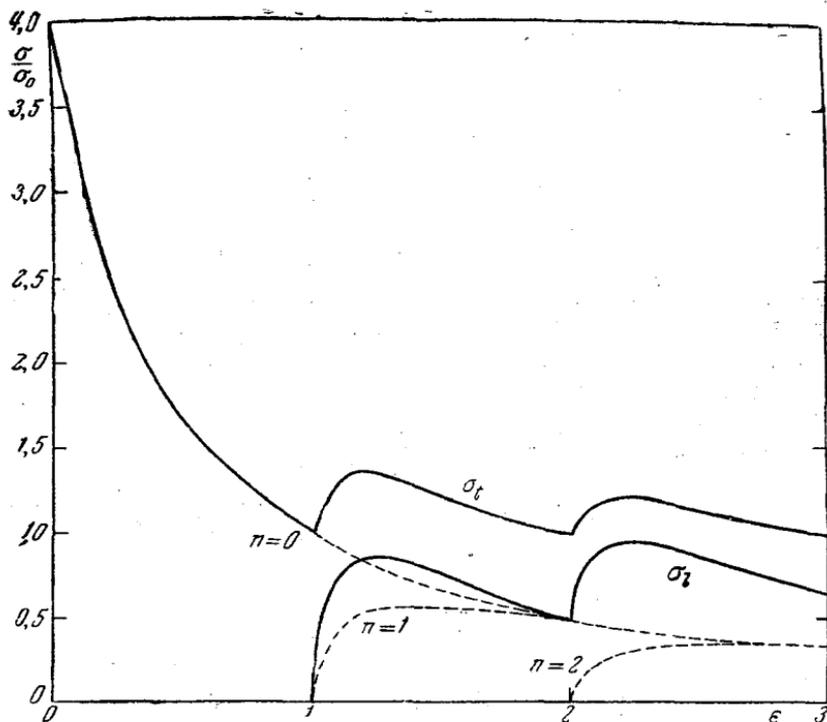


Рис. 4.

в молекуле; поэтому такие нейтроны труднее замедлить, чем нейтроны с большей энергией.

Если частоты колебаний протона вдоль разных направлений не одинаковы, то формулы для сечений сильно усложняются. Мы определим здесь только сечение упругого рассеяния нейтронов с учётом анизотропии связи протона в молекуле парафина. В этой молекуле частоты колебаний протона вдоль линии, соединяющей атомы Н и С, и перпендикулярно к этой линии равны соответственно $\nu_1 = 3000 \text{ см}^{-1}$ и $\nu_2 = 800 - 900 \text{ см}^{-1}$ [16], что отвечает энергиям $\sim 0,4 \text{ eV}$ и $\sim 0,12 \text{ eV}$.

Дифференциальное сечение упругого рассеяния можно согласно (7.6) представить в виде

$$\begin{aligned} d\sigma &= 4a^2 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \frac{1}{2} \sin \chi d\chi e^{-a_x^2 - a_y^2 - a_z^2} = \\ &= \sigma_0 e^{-2(1 - \cos(\varepsilon_1 \cos^2 \chi + \varepsilon_2 \sin^2 \chi))} \sin \vartheta d\vartheta \sin \chi d\chi, \quad (7.12) \end{aligned}$$

где ϑ — угол между \mathbf{p}_0 и \mathbf{p} , χ — угол между $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ и направлением сильной связи и

$$\varepsilon_1 = \frac{E_0}{\hbar \omega_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{E_0}{\hbar \omega_2}.$$

Рассмотрим тот случай, когда энергия нейтрона мала по сравнению с $\hbar \omega_1$ и $\hbar \omega_2$. В этом случае можно разложить в ряд экспоненциальный множитель, входящий в (7.12). В результате простых вычислений получим следующее выражение для сечения упругого рассеяния [16]:

$$\begin{aligned} \sigma &= 4\sigma_0 \left[1 - 2\varepsilon' + \frac{32}{15} \left(\varepsilon' \varepsilon_2 + \frac{1}{4} \varepsilon_1^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{64}{35} \left(\varepsilon' \varepsilon_2^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + \frac{5}{24} \varepsilon_1^3 \right) + \dots \right], \quad (7.13) \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon' = \frac{1}{3} \varepsilon_1 + \frac{2}{3} \varepsilon_2.$$

В случае тепловых нейтронов, энергия которых равна $kT = 180^\circ \text{K}$, формула (7.13) приводит к результату

$$\sigma = 2,8\sigma_0.$$

Заметим, что если энергия нейтронов по порядку величины равна тепловой энергии, то необходимо учитывать тепловое движение протонов.

§ 8. Рассеяние быстрых нейтронов протонами и обменный характер ядерных сил

Рассматривая различные процессы рассеяния медленных нейтронов, мы не делали никаких специальных предположений о характере ядерных сил.

Рассеяние быстрых нейтронов протонами, когда длина волны нейтрона мала по сравнению с радиусом действия

ядерных сил, в этом отношении сильно отличается от рассеяния медленных частиц. Для определения сечения рассеяния быстрых нейтронов протонами необходима детальная теория взаимодействия нейтрона и протона.

Рассеяние быстрых частиц не является сферически симметричным, причём характер асимметрии существенно зависит от характера ядерных сил.

Заметная асимметрия в рассеянии нейтронов начинает сказываться при энергиях нейтронов порядка нескольких десятков MeV.

Если бы между нейтроном и протоном действовали обычные силы, то в системе центра инерции большая часть нейтронов рассеивалась бы на малые углы (это значит, что в лабораторной системе протоны двигались бы главным образом под прямым углом к падающему пучку нейтронов).

Иные соотношения должны иметь место в случае действия так называемых «обменных» сил. Под «обменными» силами понимают силы взаимодействия между нейтроном и протоном, обусловленные переходом некоторой третьей частицы (обычно предполагается, что эта частица является заряженной) от нейтрона к протону и обратно. С таким переходом связано превращение нейтрона в протон и протона в нейтрон. Нейтрон и протон рассматриваются при этом как два состояния единой ядерной частицы — нуклона.

Для формального описания обменных сил мы должны считать оператор энергии взаимодействия между нейтроном и протоном отличающимся следующим свойством: действуя на волновую функцию нейтрона и протона, этот оператор приводит к замене координат нейтрона координатами протона и обратно.

Покажем, что если между нейтронами и протонами действуют обменные силы, то быстрые нейтроны должны рассеиваться протонами главным образом назад. Такая картина будет иметь место в системе координат, связанной с центром инерции сталкивающихся частиц. В лабораторной системе протоны будут двигаться главным образом в направлении первоначального пучка нейтронов.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что при очень больших энергиях нейтрона (больших по сравнению с эффективной

величиной потенциальной энергии взаимодействия нейтрона с протоном) для определения эффективного сечения можно пользоваться приближением Борна [21], которое даёт следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma_s = \frac{M^2}{8\pi\hbar^4} \left| \int \psi_p^*(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \psi_i(-\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 \sin\theta d\theta.$$

Здесь θ — угол рассеяния, ψ_i и ψ_p — волновые функции нейтрона в начальном и конечном состояниях, $U(\mathbf{r})$ — пространственная часть оператора энергии взаимодействия частиц, M — масса нейтрона. Под знаком интеграла, ввиду обменного характера сил, стоит $\psi_i(-\mathbf{r})$, а не $\psi_i(\mathbf{r})$.

В качестве волновых функций сюда следует подставить плоские волны

$$\psi_i = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \psi_p = e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'},$$

где \mathbf{k} и \mathbf{k}' — волновые векторы падающего и рассеянного нейтрона. Итак,

$$d\sigma_s = \frac{M^2}{8\pi\hbar^4} \left| \int U(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2 \sin\theta d\theta. \quad (8.1)$$

При больших энергиях множитель $e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}}$ сильно осциллирует, и поэтому интеграл, входящий в (8.1), очень мал, если только $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$ не близко к нулю.

Таким образом, главную роль играют такие углы рассеяния, для которых $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$ близко к нулю, т. е. углы порядка π . Иными словами, рассеянные нейтроны движутся главным образом назад, как и утверждалось выше.

Мы могли бы описать это рассеяние, сказав, что падающая частица отклоняется на небольшой угол, но в процессе рассеяния меняется природа частиц, так что нейтрон становится протоном, а протон — нейтроном.

В случае обычных сил эффективное сечение рассеяния равно

$$d\sigma_s = \frac{M^2}{8\pi\hbar^4} \left| \int \psi_p^*(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 \sin\theta d\theta.$$

Вместо (8.1) мы получаем:

$$d\sigma_s = \frac{M^2}{8\pi\hbar^4} \left| \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 \sin\theta d\theta. \quad (8.2)$$

Интеграл, входящий в это выражение, заметно отличен от нуля, когда $|k - k'|$ мало, т. е. при малых углах рассеяния.

Таким образом, наблюдая асимметрию в рассеянии быстрых нейтронов, можно выяснить характер ядерных сил, т. е. определить, являются ли они обычными или обменными.

Имеющиеся в настоящее время данные по рассеянию нейтронов с энергией ~ 100 MeV приводят к заключению, что ядерные силы, по крайней мере частично, имеют обменный характер [22].

На рис. 5 приведена зависимость эффективного сечения рассеяния нейтронов протонами от угла рассеяния в системе центра инерции при энергии относительного движения, равной 45 MeV [22].

На этом рисунке отчётливо видно увеличение сечения рассеяния, когда угол рассеяния приближается к π . Такое возрастание рассеяния возможно, как мы видели выше, только под действием

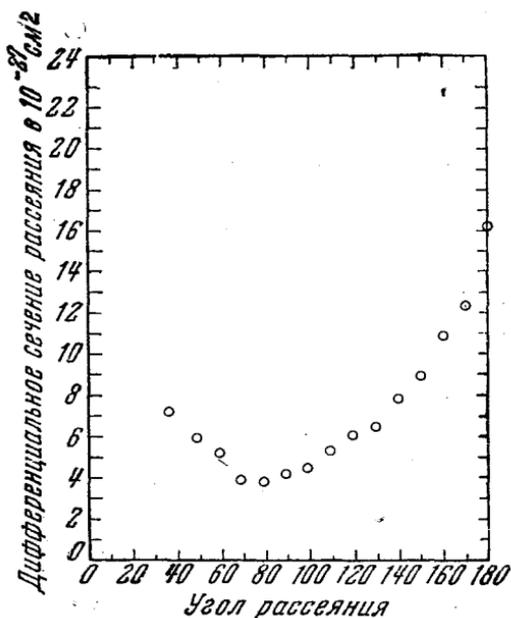


Рис. 5.

обменных сил. В области малых углов также имеется максимум рассеяния. Это указывает на существование наряду с обменными также и обычных, необменных сил (точнее говоря, сил, не связанных с обменом зарядами). Из приблизительного равенства сечений рассеяния в области малых и больших углов можно заключить, что обменные и обычные силы имеют одинаковый порядок величины.

Интегрируя (8.1) по углу рассеяния, найдём полное сечение рассеяния. При этом главную роль играют такие углы рассеяния, для которых $e^{-(k+k')r}$ мало меняется при изменении r на величину порядка радиуса действия ядерных сил r_0

(это условие связано с тем, что $U(r)$ заметно отлично от нуля только при $r \lesssim r_0$). Таким образом, для наиболее вероятных углов рассеяния θ $|\mathbf{k} + \mathbf{k}'| \lesssim \frac{1}{r_0}$. Замечая, что $|\mathbf{k} + \mathbf{k}'| = 2k \cos \frac{\theta}{2}$, и вводя вместо θ угол $\chi = \pi - \theta$, найдём, что эффективные углы χ удовлетворяют условию

$$\chi \lesssim \frac{1}{kr_0} \ll 1.$$

При интегрировании (8.1) по θ область интегрирования по порядку величины равна $\frac{1}{(kr_0)^2}$. Поэтому интегральное сечение упругого рассеяния по порядку величины равно

$$\sigma_s \sim \frac{M^2}{8\pi\hbar^4} \left| \int U dr \right|^2 \frac{1}{(kr_0)^2} = \frac{\text{const.}}{E}. \quad (8.3)$$

Мы видим, что интегральное сечение упругого рассеяния в области больших энергий обратно пропорционально энергии нейтрона.

Такой же результат получается также и в том случае, когда между частицами действуют не обменные, а обычные силы. В этом случае рассеяние происходит главным образом на малые углы, удовлетворяющие условию

$$\theta \lesssim \frac{1}{kr_0}.$$

Эффективный телесный угол рассеяния, равный по порядку величины $\frac{1}{(kr_0)^2}$, так же как и в случае обменных сил, обратно пропорционален энергии. Таким образом, при больших энергиях полное сечение рассеяния нейтронов протонами обратно пропорционально энергии независимо от природы ядерных сил. Этот вывод относится также и к специфическому рассеянию протонов протонами или нейтронов нейтронами.

Несмотря на экспериментальное подтверждение существования обменных сил, действующих между ядерными частицами — нуклонами, пока ещё совершенно неясна природа заряженных частиц, которыми обмениваются нуклоны. Опыты, проведённые на ускорителях, показали, что нуклоны с большой вероятностью излучают при столкновениях друг с другом так

называемые π -мезоны — заряженные частицы, масса которых в 280 раз превосходит массу электрона. Это, возможно, указывает на заметную роль, которую играют в ядерных взаимодействиях π -мезоны. В ядерных взаимодействиях, по всей вероятности, играют также важную роль недавно открытые нейтральные мезоны [117—119] и заряженные частицы разных масс — варитроны, обнаруженные А. Алихановым, А. Алиханяном и А. Вайсенбергом [23] в космических лучах.

§ 9. Излучение под действием обменных сил

В предыдущем параграфе мы видели, что характер рассеяния быстрых нейтронов протонами существенно зависит от того, являются ли действующие между нуклонами силы обменными или обычными. В случае обычных сил рассеяние происходит главным образом на малые углы; в случае обменных сил, связанных с обменом заряженной частицей, в системе центра инерции рассеяние происходит на большие углы, близкие к π . В последнем случае при каждом столкновении скорость протона меняет своё направление на обратное, т. е. меняется очень сильно. Но большое изменение скорости протона означает большое изменение производной дипольного момента за время столкновения, и, следовательно, большую, чем в случае столкновений под действием обычных сил, вероятность излучения γ -квантов. Поперечное сечение рассеяния с излучением при обменном взаимодействии будет значительно больше, чем в случае обычного взаимодействия, так как изменение скорости частицы, несущей заряд — протона при «обычных» столкновениях, меньше, чем при «обменных» столкновениях [24, 25].

Для оценки влияния обменных сил на вероятность излучения будем для простоты считать, что потенциальная энергия обменного взаимодействия имеет вид

$$V = U(r)J, \quad (9.1)$$

где r — расстояние между частицами и J — оператор перестановки местами протона и нейтрона, т. е. замены \mathbf{r} на $-\mathbf{r}$. Заметим, что для дальнейшего несущественен детальный вид функции V , в частности, её возможная зависимость от спина частиц.

Мы будем предполагать, что энергия относительного движения частиц значительно больше V . В этом случае можно пользоваться теорией возмущений. Матричный элемент, определяющий вероятность рассеяния с излучением, имеет следующий вид:

$$A_{01} = \frac{H_{0I} V_{I1}}{E_0 - E_I} + \frac{V_{0II} H_{II1}}{E_0 - E_{II}}. \quad (9.1')$$

Здесь H_{0I} — матричный элемент энергии взаимодействия протона с полем излучения, соответствующий переходу из начального состояния 0 в промежуточное состояние I, в котором имеется γ -квант частоты ω , но ещё не произошло ядерное рассеяние; V_{I1} — матричный элемент V , соответствующий переходу из состояния I в конечное состояние 1; в матричных элементах V_{0II} и H_{II1} индекс II обозначает промежуточное состояние, в котором произошло ядерное рассеяние, но ещё не возник γ -квант; E_0 , E_I и E_{II} — соответственно энергии начального и промежуточных состояний I, II.

В системе, связанной с центром инерции сталкивающихся частиц, матричные элементы V_{I1} и V_{0II} равны

$$V_{I1} = \int e^{i\mathbf{k}_I \mathbf{r}} V e^{-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int U(r) e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_I) \mathbf{r}} d\mathbf{r},$$

$$V_{0II} = \int e^{i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} V e^{-i\mathbf{k}_{II} \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int U(r) e^{i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_{II}) \mathbf{r}} d\mathbf{r},$$

где \mathbf{k}_i — волновой вектор частицы в i -м состоянии. Пренебрегая импульсом кванта $\hbar \mathbf{k}_\gamma$ по сравнению с импульсом частицы, мы можем, очевидно, заменить \mathbf{k}_I на \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_{II} на \mathbf{k}_1 . В этом приближении V_{I1} и V_{0II} одинаковы и равны

$$V_{0II} = V_{I1} \approx \int U(r) e^{i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1) \mathbf{r}} d\mathbf{r} = U_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1}. \quad (9.2)$$

Матричные элементы энергии взаимодействия протона с полем излучения H_{0I} и H_{II1} определяются, как известно, следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} H_{0I} &= -\frac{e}{M} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \mathbf{e}_{p_0}, \\ H_{II1} &= -\frac{e}{M} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \mathbf{e}_{p_1}, \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

где \mathbf{p}_0 и \mathbf{p}_1 — импульсы частицы в начальном и конечном состоянии, \mathbf{e} — вектор поляризации γ -кванта. Подставляя (9.2) и (9.3) в (9.1'), получим следующее выражение для матричного элемента перехода:

$$A_{01} = \frac{e}{M} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \frac{e(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)}{\hbar\omega} U_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1}, \quad (9.4)$$

причём мы пренебрегли энергией отдачи протона и считали поэтому, что $E_0 - E_1 = -\hbar\omega$, $E_0 - E_{II} = \hbar\omega$.

Дифференциальное сечение рассеяния с излучением определяется формулой

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v} |A_{01}|^2 \frac{k_1^3 d\alpha_k k_\gamma^2 dk_\gamma d\alpha_\gamma}{(2\pi)^6 \frac{dE_1}{dk_1}}, \quad (9.5)$$

где $d\alpha_\gamma$ и $d\alpha_k$ — элементы телесных углов, в которых движутся соответственно γ -квант и частица, v — начальная относительная скорость нейтрона и протона.

Подставляя сюда вместо A_{01} (9.4) и производя суммирование по поляризациям и интегрирование по углу вылета γ -кванта, получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния с излучением:

$$d\sigma = \frac{1}{24\pi^3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{d\omega}{\omega} \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)^2}{\hbar^4 c^2} |U_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1}|^2 d\alpha_k. \quad (9.6)$$

Входящий сюда матричный элемент $U_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1}$ входит также в сечение упругого рассеяния $d\sigma_s$, которое определяется формулой (8.1). Сравнение формул (9.6) и (8.1) приводит к соотношению

$$d\sigma = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{d\omega}{\omega} \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)^2}{M^2 c^2} d\sigma_s. \quad (9.7)$$

Точно такое же соотношение между $d\sigma$ и $d\sigma_s$ справедливо и в том случае, когда между частицами действуют не обменные, а обычные силы.

В предыдущем параграфе мы видели, что в случае действия обменных сил $|\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1| \sim \frac{\hbar}{r_0}$. Мы предполагаем, что

$p_0 \gg \frac{\hbar}{r_0}$; поэтому

$$|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1|_{\text{обмен}} \sim 2p_0.$$

В случае действия обычных сил $|p_0 - p_1|_{\text{обычн}} \sim \frac{\hbar}{r_0}$. Используя эти соотношения и формулу (9.7), получим:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\sigma_s}\right)_{\text{обмен}} : \left(\frac{d\sigma}{d\sigma_s}\right)_{\text{обычн}} = \frac{|p_0 - p_1|_{\text{обмен}}^2}{|p_0 - p_1|_{\text{обычн}}^2} \sim \frac{4p_0^2}{\frac{\hbar^2}{r_0^2}} = 4 \frac{E_0}{V_0}, \quad (9.8)$$

где $E_0 = \frac{p_0^2}{M}$ — начальная энергия частиц и $V_0 = \frac{\hbar^2}{Mr_0^2}$ — эффективная величина энергии ядерного взаимодействия между нейтроном и протоном ($V_0 \sim 20$ MeV). При больших энергиях отношение (9.8) значительно больше единицы. Если $E_0 = 200 - 400$ MeV, то интенсивность излучения под действием обменных сил в несколько сот раз превосходит интенсивность излучения под действием обычных сил.

Заметим, что энергия излучаемых при столкновениях γ -квантов не превосходит величины

$$\hbar\omega_{\text{max}} \sim \frac{p_0 \Delta p_0}{M} \sim \frac{p_0}{M} \frac{\hbar}{r_0} \sim \sqrt{V_0 E_0},$$

где Δp_0 — импульс, передаваемый одной частицей другой благодаря ядерному взаимодействию, равный по порядку величины $\frac{\hbar}{r_0}$. Поэтому полное сечение рассеяния с излучением γ -квантов, энергия которых превосходит $\hbar\omega$, равна согласно (9.7) по порядку величины

$$\sigma \approx \frac{4}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \ln \frac{\sqrt{V_0 E_0}}{\hbar\omega} \frac{E_0}{Mc^2} \sigma_s, \quad (9.9)$$

где σ_s — полное сечение упругого рассеяния нейтронов протонами при энергии E_0 . Согласно экспериментальным данным [22] при энергии нейтронов $E_0 = 90$ MeV σ_s по порядку величины равно $8 \cdot 10^{-26}$ см². Считая $\hbar\omega$ равным 1 MeV, получим из (9.9) $\sigma \sim 10^{-28}$ см².

Формулой (9.9) можно пользоваться также для оценки сечения рассеяния с излучением при столкновениях быстрых нейтронов со сложными ядрами. При этом следует иметь в виду, что связь между σ и σ_s , даваемая (9.9), справедлива в случае сложных ядер только для γ -квантов, длина волны которых в несколько раз превосходит радиус ядра; для более

коротких длин волн формула (9.9) справедлива только по порядку величины.

Сечение рассеяния быстрых нейтронов ядрами примерно в Z раз больше сечения рассеяния быстрых нейтронов протонами. Поэтому для свинца σ будет порядка 10^{-26} см², для азота или кислорода — $\sigma \sim 10^{-27}$ см².

В заключение отметим некоторые свойства излучения, возникающего под действием обменных сил. Так как при каждом обменном столкновении скорость носителя заряда меняет своё направление на обратное (в лабораторной системе), то изменение вектора дипольного момента имеет направление скорости быстрой частицы. Это означает, что возникающее излучение поляризовано так же, как излучение линейного осциллятора, колеблющегося в направлении движения быстрого нуклона. Иначе говоря, излучаемые γ -кванты линейно поляризованы в направлении скорости быстрой частицы. Как известно, у линейно поляризованного осциллятора интенсивность излучения пропорциональна $\sin^2 \theta$, где θ — угол между направлением движения γ -кванта и направлением поляризации. Поэтому в рассматриваемом случае излучения под действием обменных сил число γ -квантов, испускаемых под углом θ к скорости быстрого нуклона, пропорционально $\sin^2 \theta$.

Заметим, что в случае излучения под действием обычных сил вектор изменения дипольного момента перпендикулярен скорости быстрого нуклона, так как при рассеянии на малые углы изменение импульса практически перпендикулярно скорости. Поэтому интенсивность излучения под действием обычных сил пропорциональна $\cos^2 \theta$ [25a].

Мы предполагали, что энергия обменного взаимодействия определяется формулой (9.1). Если рассматривать обменные силы более сложного характера, а именно силы, зависящие от спина, то благодаря их действию возникает магнитное дипольное излучение, интенсивность которого в нерелятивистской области энергий значительно меньше, чем интенсивность электрического дипольного излучения.

В области малых энергий ($E_0 \ll V_0$) вероятность излучения γ -квантов при столкновениях нуклонов нельзя определять с помощью теории возмущений. Как показывают точные расчёты [24, 25], излучение в этих условиях оказывается незначительным.

§ 10. Рассеяние протонов протонами

Эффективный поперечник рассеяния, обусловленного кулоновскими силами отталкивания, определяется, как известно, формулой Рёзерфорда.

В случае рассеяния протонов протонами эта формула с учётом эффекта обмена протонов имеет следующий вид [26]:

$$2\pi\sigma_0(\theta) \sin\theta d\theta = \frac{e^4}{M^2v^4} \left[\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta} - \frac{\cos\left(\frac{e^2}{\hbar v} \ln \operatorname{tg}^2\theta\right)}{\sin^2\theta \cos^2\theta} \right] \times \\ \times 2\pi \sin 2\theta d(2\theta), \quad (10.1)$$

где θ — угол рассеяния в лабораторной системе координат (2θ — угол рассеяния в системе координат, связанной с центром инерции сталкивающихся протонов), v — скорость протонов в лабораторной системе.

В формуле (10.1) первый член даёт число протонов, рассеянных на угол θ (в лабораторной системе) в соответствии с обычной формулой Рёзерфорда.

Второй член даёт число протонов отдачи, движущихся под углом θ к первоначальному пучку, также в соответствии с обычной формулой Рёзерфорда. Число этих протонов равняется, очевидно, числу падающих протонов, рассеянных на угол $\frac{\pi}{2} - \theta$, так как при столкновении двух частиц одинаковой массы они разлетаются под углом, равным $\frac{\pi}{2}$.

Наконец, последний член учитывает квантовомеханический эффект обмена сталкивающихся протонов.

Опыты по рассеянию быстрых протонов протонами [27—30] показали, что формула Рёзерфорда неправильно описывает рассеяние быстрых протонов протонами.

Расхождение между экспериментальными данными и формулой (10.1) весьма велико. Наблюдаемое на опыте число протонов, рассеянных под углом в 45° при энергии порядка 1 MeV, в несколько раз превосходит число, даваемое формулой (10.1).

Отсюда следует, что между протонами, кроме кулоновских, действуют ещё дополнительные, специфически ядерные

силы, причём их величина значительно превосходит силы электрического взаимодействия.

Считая, что эти силы, так же как и в случае взаимодействия нейтрона и протона, характеризуются очень малым радиусом действия, мы можем заключить, что в случае протонов не очень больших энергий особенно сильно возмущена действием ядерных сил S -волна в разложении волновой функции сталкивающихся протонов в ряд по функциям, соответствующим различным значениям орбитального момента l .

Это разложение волновой функции имеет, как известно, следующий вид:

$$\psi = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos \theta), \quad (10.2)$$

где $u_l(r)$ — умноженная на r радиальная функция, отвечающая относительному моменту количества движения протонов, равному l ; $P_l(\cos \theta)$ — полином Лежандра.

Так как протоны подчиняются статистике Ферми-Дирака, то пространственная ψ -функция (10.2) должна быть антисимметричной или симметричной в зависимости от того, параллельны или антипараллельны спины протонов. В первом случае в сумму (10.2) входят только нечётные, а во втором — только чётные значения момента.

Отсюда следует, что ядерные силы, возмущающие S -волну, будут сказываться на рассеянии протонов протонами только при антипараллельной ориентации спинов протонов, т. е. в $1/4$ всех случаев столкновений.

Определим асимптотический вид S -волны с учётом действия ядерных сил [81].

Напомним предварительно, что асимптотическое поведение волновой функции частицы в кулоновском поле имеет вид

$$\psi = e^{ikr + i\alpha \ln k(r-a)} + \frac{e^2}{rMv^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{ikr - i\alpha \ln 2kr - i\alpha \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + i\pi + 2i\eta_0}, \quad (10.3)$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar v}, \quad k = \frac{Mv}{2\hbar}, \quad e^{i\eta_0} = \frac{\Gamma(1+i\alpha)}{|\Gamma(1+i\alpha)|}.$$

r — расстояние между протонами, z — разность их z -координат (ось z совпадает с направлением скорости падающих протонов), ϑ — угол рассеяния в системе, связанной с центром инерции [он равен 2θ , см. (10.1)].

Первое слагаемое в (10.3) представляет собой падающую волну, возмущённую кулоновским полем, второе — рассеянную волну.

Согласно сказанному выше нас интересует симметричная волновая функция

$$\Psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) + \psi(-x, -y, -z). \quad (10.4)$$

Для получения асимптотического вида последней следует добавить к выражению (10.3) функцию, получающуюся в результате замены в (10.3) z на $-z$ и $\cos\vartheta$ на $-\cos\vartheta$ (при этом $\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ заменяется на $\cos^2\frac{\vartheta}{2}$).

S -волна, т. е. член с $l=0$ в разложении (10.2) симметричной волновой функции двух протонов, взаимодействующих по закону Кулона, имеет следующий вид [31]:

$$u_0 = \frac{2e^{i\eta_0}}{k} \sin(kr + \eta_0 - \alpha \ln 2kr). \quad (10.5)$$

[множитель 2 возникает из-за двух слагаемых в (10.4)].

Если, кроме кулоновских, действуют ещё специфические ядерные силы, то вместо (10.5) мы будем иметь функцию

$$u = \frac{2Ce^{i\eta_0}}{k} \sin(kr + \eta_0 + \delta - \alpha \ln 2kr), \quad (10.6)$$

где δ — дополнительное смещение фазы, вызываемое ядерными силами, а C — константа, которая может быть определена следующим образом.

Наша задача состоит в нахождении рассеянной волны с учётом действия ядерных сил. Для этого достаточно, очевидно, вычесть из выражения (10.3), предварительно симметризованного, функцию u_0 и прибавить функцию u . Таким путём мы заменим в формуле (10.3) S -волну в чисто кулоновском поле S -волной, возмущённой действием ядерных сил; волны же, отвечающие значениям момента l , отличным от нуля, при этом, как и должно быть, остаются неизменными. Разность $u - u_0$ не может, очевидно, содержать сходя-

щейся волны, т. е. члена e^{-ikr} . Чтобы удовлетворить этому требованию, мы должны выбрать константу C равной $e^{i\delta}$.

Итак,

$$u = \frac{i}{k} \left[e^{-i(kr - a \ln 2kr)} + e^{i(kr + \pi + 2\eta_0 + 2\delta - a \ln 2kr)} \right].$$

Возмущённая действием ядерных сил симметричная волновая функция протонов имеет следующий асимптотический вид:

$$\begin{aligned} \Psi' = & e^{ikz + i\alpha \ln k(r-z)} + e^{-ikz + i\alpha \ln k(r+z)} + \\ & + \frac{1}{r} e^{ikr - i\alpha \ln 2kr + 2i\eta_0 + i\pi} \left\{ \frac{e^2}{Mv^2} \left(\frac{e^{-i\alpha \ln \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{e^{-i\alpha \ln \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \right) + \frac{i}{k} (e^{2i\delta} - 1) \right\}. \quad (10.7) \end{aligned}$$

Квадрат модуля фигурной скобки представляет собой, как известно, эффективный поперечник рассеяния, отнесённый к единице телесного угла в системе, связанной с центром инерции протонов. Он равен, следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta) = & \left(\frac{e^2}{Mv^2} \right)^2 \left| e^{-i\alpha \ln \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{e^{-i\alpha \ln \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} + \right. \\ & \left. + i \frac{2\hbar v}{e^2} (e^{2i\delta} - 1) \right|^2. \quad (10.8) \end{aligned}$$

Полагая здесь $\delta = 0$, мы получим поперечник рассеяния в том случае, если действуют только кулоновские силы, причём протоны имеют антипараллельные спины (если спины протонов параллельны, то второе слагаемое будет входить со знаком минус; выражение (10.1) представляет собой среднее взвешенное сечение, когда параллельной ориентации спинов приписывается вес $3/4$, а антипараллельной — вес $1/4$).

Пренебрегая членом $\alpha \ln \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$, так как $\alpha \ll 1$, мы получим из (10.8):

$$\sigma(\vartheta) - \sigma(\vartheta)_{\delta=0} = \left(\frac{e^2}{Mv^2}\right)^2 \left[\left(\frac{4\hbar v}{e^2}\right)^2 \sin^2 \delta - \frac{8\hbar v}{e^2} \sin \delta \cos \delta \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) \right]^2, \quad (10.8')$$

где θ — угол рассеяния в лабораторной системе, равный $\frac{1}{2}\vartheta$.

Для получения дифференциального сечения рассеяния с учётом действия ядерных сил нужно выражение (10.8'), умноженное на $\frac{1}{4} 2\pi \sin 2\theta d(2\theta)$ (множитель $\frac{1}{4}$ представляет собой вес состояния с антипараллельными спинами), прибавить к (10.1).

Мы получим, таким образом, следующую формулу для эффективного сечения рассеяния протонов в интервале углов $\theta, \theta + d\theta$ с учётом действия ядерных сил:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta &= \\ &= \frac{e^4}{E^2} \cos \theta \left[\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \right. \\ &\left. - \frac{2\hbar v}{e^2} \frac{\sin \delta \cos \delta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} + \left(\frac{2\hbar v}{e^2}\right)^2 \sin^2 \delta \right] 2\pi \sin \theta d\theta \quad (10.9) \end{aligned}$$

(E — энергия протонов в лабораторной системе). Здесь предполагается, что $\left(\frac{e^2}{\hbar v}\right) \ln \sin^2 \theta \ll 1$.

Приведём выражение для отношения сечений $\sigma(45^\circ)$ и $\sigma_0(45^\circ)$:

$$\frac{\sigma(45^\circ)}{\sigma_0(45^\circ)} = \left(\frac{2\hbar v}{e^2} \sin \delta\right)^2 - \frac{2\hbar v}{e^2} \sin \delta \cos \delta + 1. \quad (10.9')$$

Заметим, что даже при малой величине угла δ это отношение может быть большим из-за фактора $\left(\frac{2\hbar v}{e^2}\right)^2$, который равен 160 для протонов с энергией 1 MeV.

Сдвиг фазы δ , обусловленный действием ядерных сил, зависит от энергии протонов. Мы покажем сейчас, как определить эту зависимость.

Заметим, что эта задача аналогична задаче определения фазы δ в случае взаимодействия между нейтроном и протоном; различие между обеими задачами заключается в том, что в случае протонов необходимо помимо ядерных учитывать также кулоновские силы.

Будем так же, как и в § 3, исходить из точного уравнения для $u_0 \equiv u$ с учётом ядерного и кулоновского взаимодействия между протонами:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + k^2u = \frac{M}{\hbar^2} Vu + \frac{2}{ar}u, \quad (10.10)$$

где V — энергия ядерного взаимодействия между протонами, которую можно считать функцией только от r (синглетное состояние протонов); $\frac{2}{ar} \frac{\hbar^2}{M}$ — кулоновский потенциал,

$$a = \frac{2\hbar^2}{Me^2} = 5,76 \cdot 10^{-12} \text{ см}, \quad k = \frac{Mv}{2\hbar}.$$

Наряду с функцией u , представляющей собой точное решение уравнения (10.10), введём в рассмотрение функцию v , асимптотически при больших r совпадающую с u и являющуюся решением уравнения

$$\frac{d^2v}{dr^2} + k^2v = \frac{2v}{ar}. \quad (10.11)$$

Уравнению (10.11) удовлетворяют функции Уиттекера $W_{i\alpha, \frac{1}{2}}(2ikr)$ и $W_{-i\alpha, \frac{1}{2}}(-2ikr)$, путём линейной комбинации которых можно получить два решения (10.11) — одно регулярное и другое нерегулярное в точке $r=0$. Эти решения обозначаются обычно через F и G ; на больших расстояниях они имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} F &\sim \sin(kr - \alpha \ln 2kr + \eta_0), \\ G &\sim \cos(kr - \alpha \ln 2kr + \eta_0), \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

где $\alpha = \frac{e^2}{\hbar v}$, $\eta_0 = \arg \Gamma(1 + i\alpha)$. При малых r справедливы разложения

$$\left. \begin{aligned} F &= C_0 kr + O(r^2), \\ G &= \frac{1}{C_0} \left\{ 1 + \frac{2r}{a} \left[\ln \frac{2r}{a} - \ln \alpha + \operatorname{Re} \Psi(i\alpha) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2C - 1 \right] \right\} + O(r^2), \end{aligned} \right\} \quad (10.12')$$

где

$$C_0 = \left(\frac{2\pi\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} \right)^{1/2}, \quad \Psi(z) = \frac{\Gamma'(1+z)}{\Gamma(1+z)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{z+\nu} \right) - C,$$

$C = 0,577$ — постоянная Эйлера.

Нас интересует решение уравнения (10.11), имеющее при больших r вид

$$v = \text{const} \cdot \sin(kr - \alpha \ln 2kr + \eta_0 + \delta),$$

где δ — смещение фазы, обусловленное действием ядерных сил. Функцию v мы предполагаем нормированной таким образом, что

$$v(0) = 1.$$

Легко видеть, что это решение может быть следующим образом выражено через функции F и G :

$$v = C_0(G + F \operatorname{ctg} \delta). \quad (10.11')$$

Поступая так же, как и в § 3 при выводе (3.11), мы получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} v_{II} v'_I - v_I v'_{II} - u_{II} u'_I + u_I u'_{II} \Big|_r^R &= \\ &= (k_{II}^2 - k_I^2) \int_r^R (v_I v_{II} - u_I u_{II}) dr, \end{aligned} \quad (10.13)$$

где индексы I и II означают, что соответствующие функции относятся к значениям k , равным k_I и k_{II} . Мы положим здесь

$r=0$ и $R=\infty$. Используя (10.11') и 10.12'), получим:

$$\begin{aligned} [v_{II}'(r) - v_{I}'(r)]_{r=0} &= \\ &= \frac{1}{a} \left[g(\alpha_{II}) - g(\alpha_I) + \frac{2\pi \operatorname{ctg} \delta_{II}}{e^{2\pi\alpha_{II}} - 1} - \frac{2\pi \operatorname{ctg} \delta_I}{e^{2\pi\alpha_I} - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (k_{II}^2 - k_I^2) \rho_{I, II}, \end{aligned} \quad (10.14)$$

где

$$\frac{1}{2} \rho_{I, II} = \int_0^{\infty} (v_I v_{II} - u_I u_{II}) dr$$

и

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 2C + \operatorname{Re} \Psi(i\alpha) - \\ &- 2 \ln \alpha \equiv -2 \ln \alpha + 2\alpha^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu^2 + \alpha^2)}. \end{aligned}$$

Полагая в (10.14) $k_I = 0$ и $k_{II} \equiv k$, получим:

$$g(\alpha) + \frac{2\pi \operatorname{ctg} \delta}{e^{2\pi\alpha} - 1} = a \left[-\alpha' + \frac{1}{2} k^2 \rho \right], \quad (10.14')$$

где α' — константа, не зависящая от энергии и аналогичная величине α , характеризующей взаимодействие нейтрона и протона; величина ρ учитывает конечность радиуса действия ядерных сил между двумя протонами; она вводится здесь точно таким же образом, как и в случае взаимодействия нейтрона и протона. В случае малых энергий ρ не зависит от энергии. Можно предполагать, что кулоновский потенциал оказывает очень небольшое влияние на вид волновой функции внутри области действия ядерных сил. Поэтому введённое ρ должно приближённо равняться эффективному радиусу действия ядерных сил для синглетного состояния нейтрона и протона.

Заменяя в случае малых энергий в (10.14') ρ на r_0 , получим окончательное соотношение *)

$$f(E) \equiv g(\alpha) + \frac{2\pi \operatorname{ctg} \delta}{e^{2\pi\alpha} - 1} = a \left[-\alpha' + \frac{1}{2} k^2 r_0 \right], \quad (10.15)$$

определяющее δ как функцию энергии протонов. Входящие сюда

*) Это соотношение впервые получено Л. Ландау и Я. Смородинским [32]. Приведённый в тексте вывод принадлежит Бете [7].

две константы α' и r_0 могут быть найдены из экспериментальных данных о фазе δ как функции энергии. Из рис. 6 видно удовлетворительное согласие между данными (кружки, крестики и треугольники), полученными разными экспериментаторами и теоретическими предсказаниями (прямая линия).

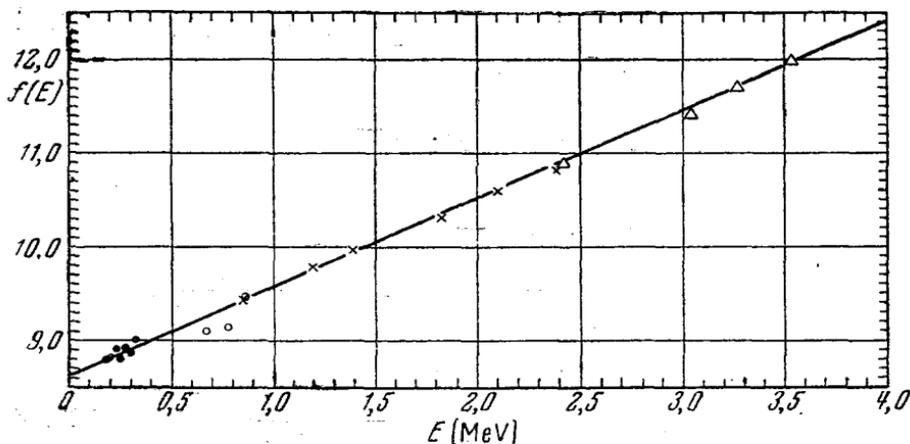


Рис. 6.

Приведём некоторые результаты экспериментального исследования рассеяния протонов протонами. Отношение $\frac{\sigma(45^\circ)}{\sigma_0(45^\circ)} \equiv R$, равное примерно 0,5 при энергии протонов ~ 176 keV, достигает значения 77,5 при энергии 3,5 MeV [из формулы (10.9') следует, что при достаточно малых скоростях R может быть меньше единицы].

Соответствующие этим энергиям значения фазы δ равны $\sim 6^\circ$ и $\sim 52^\circ$. В приводимой ниже таблице даны значения R и δ для различных энергий протонов [7].

E keV	176,5	249,5	298,3	321,4	$2,42 \cdot 10^3$	$3,04 \cdot 10^3$	$3,27 \cdot 10^3$	$3,53 \cdot 10^3$
R	0,544	0,256	0,118	0,070	44,1	63	69	77,5
δ°	5,77	9,03	10,97	11,83	48,17	51,17	51,5	52,08

Обработка экспериментальных данных на основании формулы (10.15) приводит к заключению, что при антипараллельной ориентации спинов протонов радиус действия ядерных сил равен примерно $r_0 \approx 2,8 \cdot 10^{-13}$ см. Мы считаем, что такого же порядка должен быть радиус действия ядерных сил для нейтрона и протона при антипараллельной ориентации их спинов. Эта величина больше радиуса действия ядерных сил в триплетном состоянии (для нейтрона и протона), который следует считать примерно равным $1,8 \cdot 10^{-13}$ см.

Заметим, что из опытов по рассеянию медленных протонов протонами нельзя сделать непосредственных количественных заключений о величине энергии взаимодействия $V(r)$, а тем более о виде этой функции. Это заключение, в равной мере относящееся также к взаимодействию между нейтроном и протоном, связано с тем, что в области малых энергий δ , как функция энергии, определяется только двумя константами, по которым нельзя однозначно найти V .

Чтобы иметь возможность по данным о рассеянии частиц определить вид энергии взаимодействия, необходимо знать не только $\delta_{l=0}(E)$, но также и фазы $\delta_l(E)$, относящиеся к значениям момента l , отличным от нуля. В этом отношении важное значение имеют опыты по рассеянию быстрых частиц (нейтронов протонами и протонов протонами), так как с ростом энергии увеличивается число волн с $l \neq 0$, подвергающихся воздействию ядерных сил (эффективными в смысле такого воздействия будут те значения l , которые удовлетворяют условию $l \leq \frac{r_0}{\lambda}$). В случае рассеяния протонов протонами уже при энергии протонов порядка 10 MeV необходимо учитывать влияние ядерных сил не только на S -волну (точнее 1S -волну), но и на P -волну (точнее 3P -волну). Экспериментальные данные по рассеянию таких протонов приводят к выводу, что в этом случае $\delta_{l=0} \approx 52,5^\circ$, $\delta_{l=1} = -0,8^\circ$; остальные волны можно считать невозмущенными действием ядерных сил [83].

Зная знак фазы δ , можно сделать выводы о характере действующих сил. Именно, положительный знак фазы соответствует притяжению, а отрицательный — отталкиванию.

В этом можно убедиться из формулы [84].

$$\delta_n \approx -\frac{\pi M}{\hbar^2} \int_0^{\infty} V(r) [J_{n+\frac{1}{2}}(kr)]^2 r dr,$$

справедливой при малых δ_n (здесь $V(r)$ — потенциальная энергия, $J_{n+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя).

Заметим, что чередование характера сил (притяжение и отталкивание) при переходе от чётных к нечётным значениям момента l является характерной особенностью обменных сил [36]. Поэтому опыты по рассеянию протонов с энергией в 10 MeV, из которых следует, что $\delta_{l=0} > 0$ и $\delta_{l=1} < 0$, следует рассматривать как указание на то, что ядерные силы по крайней мере частично имеют обменный характер [38].

Таким образом, опыты по рассеянию протонов протонами доказывают, что между протонами, кроме обычных сил электростатического отталкивания, на малых расстояниях действуют ещё специфические ядерные силы. В состоянии 1S (спины протонов антипараллельны) протоны притягиваются, в состоянии 3P (спины протонов параллельны), по всей вероятности, отталкиваются.

Так как в лёгких ядрах, когда роль кулоновских сил отталкивания незначительна, число протонов равняется примерно числу нейтронов, то следует считать, что между парой нейтронов также действуют ядерные силы, причём по порядку величины они не отличаются от ядерных сил, действующих между парой протонов.

Остановимся в заключение этого параграфа на вопросе о связанных состояниях системы, состоящей из двух протонов (бипротон).

В предыдущих параграфах мы видели, что в случае системы нейтрон + протон существование связанного состояния определяется знаком α . Аналогичная ситуация имеет место также и в случае системы протон + протон. В области малых энергий задача о рассеянии двух ядерных частиц и задача о связанном состоянии этих частиц сводится к общей задаче о свободном движении (нейтрон + протон),

либо о движении в кулоновском поле (протон + протон), наличие специфического короткодействующего ядерного взаимодействия может быть учтено введением некоторого граничного условия, одинакового для задач о рассеянии и о связанном состоянии.

Можно показать [32], что отрицательным значениям α' не могут отвечать связанные состояния системы протон + протон. С другой стороны, анализ данных о рассеянии протонов протонами показывает, что $\alpha' < 0$; поэтому существование бипротона невозможно.

Замегаем, что в отличие от случая системы нейтрон + протон, где данных о рассеянии нейтронов свободными протонами недостаточно для определения знака α , в случае системы протон + протон одних лишь данных о рассеянии протонов протонами достаточно, чтобы определить знак α' . Это связано с интерференцией кулоновского и чисто ядерного рассеяния, благодаря чему по сечению рассеяния может быть однозначно определён знак фазы δ .

Если определить энергию

$$\varepsilon'' = \frac{\hbar^2 \alpha'^2}{M},$$

аналогичную ε' (см. § 3), то она оказывается порядка 100 keV, т. е. того же порядка, что и величина ε' . Отсюда можно заключить, что силы между нейтроном и протоном и между двумя протонами в синглетном состоянии имеют одинаковый порядок величины.

Малость ε'' в ядерном масштабе энергий означает, что система протон + протон в синглетном состоянии близка к резонансу (аналогично системе нейтрон + протон в синглетном состоянии). При этом под близостью к резонансу мы понимаем следующее. Если бы существовало связанное состояние у двух протонов, то величина α' была бы положительной. На самом деле α' отрицательна, но очень мала. В ядерном масштабе α' , так же как и α_0 , почти равна нулю, т. е. примыкает к области тех значений α' , которым соответствовал бы связанный уровень. Поэтому уже малое изменение параметров системы привело бы к появлению связанного уровня, близкого к нулю.

§ 11. Захват нейтронов протонами

Нейтрон может быть захвачен протоном с испусканием γ -кванта, уносящего избыток энергии.

В системе координат, связанной с центром инерции нейтрона и протона, энергия γ -кванта равняется

$$\hbar\omega = E + \varepsilon, \quad (11.1)$$

где E — кинетическая энергия частиц, ε — энергия связи дейтрона (энергия нейтрона в лабораторной системе, где до столкновения протон покоился, равна $E_0 = 2E$).

Радиационный захват нейтрона можно рассматривать как переход системы нейтрон + протон из состояния, относящегося к непрерывному спектру, в состояние с дискретной энергией. Определим вероятность такого перехода.

Заметим предварительно, что длина волны γ -излучения, испускаемого при захвате нейтрона, всегда (точнее говоря, вплоть до энергии нейтрона ~ 100 MeV) значительно больше, чем радиус действия ядерных сил; иными словами, эффективные размеры излучающей системы значительно меньше длины волны γ -кванта. Обычно в таких условиях излучение имеет характер электрического дипольного излучения.

При захвате медленных нейтронов, который мы далее будем рассматривать, электрическое дипольное излучение не играет, однако, главной роли, и поэтому оказывается необходимым учитывать магнитное дипольное и электрическое квадрупольное излучение.

В справедливости этого утверждения можно убедиться из следующих соображений. Основным состоянием дейтрона, т. е. конечным состоянием системы нейтрон + протон, является состояние ${}^3S_1 + {}^3D_1$ («примесь» состояния 3D_1 очень невелика, порядка $4^0/0$, см. § 5). Чтобы перейти в состояние 3S_1 с излучением электрического дипольного γ -кванта, нейтрон должен находиться в состоянии 3P_1 , иными словами, момент количества движения нейтрона относительно протона должен равняться $l = 1$. С другой стороны, известно, что эффективный параметр столкновения равен $l\lambda$, где λ — длина волны нейтрона. Поэтому при $l = 1$ нейтрон проходит на расстоянии порядка λ от протона. Для медленных нейтронов $\lambda \gg r_0$ (r_0 — радиус действия ядерных сил). Это зна-

чит, что нейтрон с моментом $l=1$ проходит настолько далеко от протона, что вероятность его захвата будет крайне малой.

Изложенные соображения не относятся к переходу системы нейтрон + протон из синглетного состояния 1S_0 в триплетное состояние 3S_1 , сопровождающемуся излучением магнитного дипольного γ -кванта. Нейтроны с моментом $l=0$ (S -нейтроны), которые испытывают лобовое столкновение с протонами, могут поглощаться последними, причём излишек энергии будет излучаться в виде магнитного дипольного γ -кванта.

Если считать основным состоянием дейтрона 3S_1 -состояние, то сталкивающиеся нейтрон и протон должны обладать противоположно направленными спинами, т. е. должны относиться к синглетному состоянию 1S_0 .

Благодаря тому, что в действительности к 3S_1 -состоянию «примешано» в небольшом количестве 3D_1 -состояние, возможны также переходы между триплетными состояниями, однако вероятность перехода из триплетного состояния гораздо меньше вероятности перехода ${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1$ ввиду малого веса D -состояния.

Переход из триплетного состояния, относящегося к непрерывному спектру, в основное состояние дейтрона может происходить также с излучением квадрупольного кванта, так как при квадрупольном излучении допускаются переходы:

$${}^3S_1 \rightarrow {}^3D_1, \quad {}^3D_1 \rightarrow {}^3S_1, \quad {}^3D_1 \rightarrow {}^3D_1.$$

Вероятность этих переходов, однако, мала по сравнению с вероятностью перехода ${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1$ по тем же соображениям, так что основную роль при захвате медленных нейтронов играют переходы из синглетного состояния 1S_0 в триплетное состояние 3S_1 , сопровождающиеся магнитным дипольным излучением [87].

Переходя к определению вероятности радиационного захвата нейтрона протоном, приведём сначала общие формулы для определения вероятностей излучения различных типов.

Вероятность радиационного перехода системы из состояния i в состояние f , при котором в телесном угле $d\Omega$

излучается квант $\hbar\omega$, определяется следующей формулой [85]:

$$\omega d\sigma = \frac{e^2}{(Mc)^2} \frac{\omega d\sigma}{2\pi\hbar c} \left| \sum_n \int \psi_i^* p_e^{(n)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_n} \psi_f d\tau \right|^2, \quad (11.2)$$

где M — масса и e — заряд частицы (в интересующем нас случае M — масса протона), ψ_i и ψ_f — волновые функции начального и конечного состояний, $p_e^{(n)}$ — проекция оператора импульса n -й частицы на направление поляризации волны, \mathbf{k} — волновой вектор кванта, \mathbf{r}_n — радиус-вектор n -й частицы.

Предполагая, что длина волны излучения значительно превосходит размеры излучающей системы, мы разложим $e^{i\mathbf{r}\mathbf{k}_n}$ в ряд, сохранив в нём два первых члена.

Используя операторное соотношение

$$\frac{\mathbf{p}}{M} = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}},$$

где \mathbf{v} — оператор скорости частицы, представим матричный элемент, входящий в (11.2), в виде

$$\begin{aligned} & \left(\sum_n (\mathbf{v}_n \mathbf{e}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_n} \right)_{if} = \\ & = \left(\sum_n (\mathbf{v}_n \mathbf{e}) \right)_{if} + \frac{i}{2} \left(\frac{d}{dt} \sum_n (\mathbf{e} \mathbf{r}_n) (\mathbf{k} \mathbf{r}_n) \right)_{if} + \\ & + \frac{i}{2} \left(\sum_n [[\mathbf{r}_n \mathbf{v}_n] \mathbf{k}] \mathbf{e} \right)_{if}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

(\mathbf{e} — единичный вектор поляризации).

Так как матричный элемент, отвечающий переходу $i \rightarrow f$, пропорционален

$$e^{\frac{i}{\hbar}(E_i - E_f)t} = e^{i\omega t}$$

(E_n — энергия n -го состояния), то матричные элементы какого-либо оператора \mathcal{L} и его производной по времени $\dot{\mathcal{L}}$ связаны соотношением

$$(\dot{\mathcal{L}})_{if} = i\omega (\mathcal{L})_{if}.$$

Используя это соотношение, перепишем (11.3) в виде

$$\begin{aligned} \left(\sum_n (\mathbf{v}_n \mathbf{e}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_n} \right)_{if} &= \\ &= i\omega \left(\sum_n (\mathbf{e}\mathbf{r}_n) \right)_{if} - \frac{\omega}{2} \left(\sum_n (\mathbf{e}\mathbf{r}_n) (\mathbf{k}\mathbf{r}_n) \right)_{if} + \\ &+ ci [\mathbf{k}\mathbf{e}] \cdot \left(\sum_n \frac{1}{2c} [\mathbf{r}_n \mathbf{v}_n] \right)_{if}. \end{aligned} \quad (11.3')$$

Матричные элементы, входящие в (11.3'), представляют собой соответственно матричные элементы дипольного, квадрупольного и магнитного моментов системы. Этим трём слагаемым отвечает дипольное, квадрупольное и магнитное излучение.

Можно показать, что полная вероятность излучения (проинтегрированная по элементу телесного угла вылетающего γ -кванта) складывается из вероятностей дипольного, квадрупольного и магнитного излучений; иными словами, интерференционные члены между различными типами излучения в полной вероятности отсутствуют.

Приведём формулы для вероятностей различных типов излучения.

Вероятность дипольного излучения, при котором γ -квант испускается в телесном угле $d\omega$, определяется по формуле

$$w_d d\omega = \frac{e^2 \omega^3}{2\pi \hbar c^3} \left| \left(\sum_n (\mathbf{e}\mathbf{r}_n) \right)_{if} \right|^2 d\omega. \quad (11.4)$$

Вероятность магнитного дипольного излучения имеет вид

$$w_m d\omega = \frac{e^2 \omega^3}{2\pi \hbar c^3} \left| \left([\mathbf{x}\mathbf{e}] \sum_n \frac{1}{2c} [\mathbf{r}_n \mathbf{v}_n] \right)_{if} \right|^2 d\omega, \quad (11.5)$$

где \mathbf{x} — единичный вектор в направлении волнового вектора.

Наконец, вероятность квадрупольного излучения выражается формулой

$$w_q d\omega = \frac{e^2 \omega^5}{8\pi \hbar c^5} \left| \left(\sum_n (\mathbf{e}\mathbf{r}_n) (\mathbf{x}\mathbf{r}_n) \right)_{if} \right|^2 d\omega. \quad (11.6)$$

В формулу (11.5) входит матричный элемент магнитного момента системы, обусловленного орбитальным движением.

Если частицы обладают ещё спиновым магнитным моментом, то последний следует прибавить к сумме

$$\sum_n \frac{e}{2c} [\mathbf{r}_n \mathbf{v}_n]. \quad (11.5')$$

Таким образом, в общем случае выражение (11.5') должно быть заменено суммарным магнитным моментом системы.

Перейдём к определению вероятностей (11.4), (11.5), (11.6)*. Рассмотрим сначала захват, сопровождающийся излучением магнитного дипольного γ -кванта. Обозначая через M оператор магнитного момента системы нейтрон + протон, выраженный в ядерных магнетонах, перепишем формулу (11.5) для вероятности захвата в виде

$$\omega_m d\omega = \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar \omega}{Mc^2} \right)^2 \omega |([\boldsymbol{\alpha} \mathbf{e}] M)_{if}|^2 \frac{d\omega}{8\pi}. \quad (11.7)$$

Оператор M может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} M &= \mu_n \boldsymbol{\sigma}_n + \mu_p \boldsymbol{\sigma}_p + \frac{1}{2} L = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{J} + \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) \mathbf{S} + \frac{1}{2} (\mu_n - \mu_p) (\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_p), \end{aligned} \quad (11.8)$$

где μ_n и μ_p — магнитные моменты нейтрона и протона, выраженные в единицах $\frac{e\hbar}{2Mc}$, $\boldsymbol{\sigma}_n$, $\boldsymbol{\sigma}_p$ — спиновые матрицы нейтрона и протона, L , S , J — соответственно орбитальный, спиновый и полный моменты системы нейтрон + протон.

Наиболее существенную роль при захвате медленных нейтронов играют, как мы указывали выше, переходы из синглетного 1S_0 -состояния, относящегося к непрерывному спектру системы нейтрон + протон, в триплетное состояние $^3S_1 + ^3D_1$, представляющее собой основное состояние дейтрона.

Волновая функция исходного 1S_0 состояния имеет вид

$$\psi_i = \frac{u_0(r)}{r} \chi_0^0, \quad (11.9)$$

где u_0/r — радиальная функция 1S_0 -состояния, а χ_0^0 — спиновая волновая функция.

*) При вычислении вероятностей мы следуем [9].

Волновую функцию ψ_i мы предполагаем нормированной таким образом, что плотность падающих частиц равна единице. Чтобы найти u_0 , нужно решить соответствующее уравнение Шредингера. Вне области действия ядерных сил u_0 имеет следующую асимптотическую форму:

$$u_0 = \frac{1}{k} \sin(kr + \delta_0), \quad r > r_0, \quad (11.9')$$

где δ_0 связано с введённой ранее величиной α_0 соотношением

$$\text{ctg } \delta_0 = -\frac{\alpha_0}{k}.$$

Волновая функция конечного состояния, т. е. основного состояния дейтрона, может быть записана в виде

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left\{ \frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right\} \chi_1^{m'}, \quad (11.10)$$

где u/r и w/r — радиальные функции, описывающие S - и D -волны, S_{12} — оператор, определяемый формулой (4.2'), и $\chi_1^{m'}$ — спиновая волновая функция триплетного состояния.

Чтобы вычислить матричный элемент, входящий в формулу для вероятности захвата (11.7), заметим, что спиновая волновая функция начального состояния χ_0^m антисимметрична, а спиновая функция конечного состояния χ_1^m симметрична относительно спиновых координат. Поэтому только третье слагаемое в выражении для оператора магнитного момента, будучи антисимметричным относительно спиновых переменных обеих частиц, имеет отличные от нуля матричные элементы, отвечающие переходам между состояниями с различными значениями полного спина (член, содержащий $[\mathbf{x}\mathbf{e}] \mathbf{J} = J_z$, можно не учитывать, так как, выбрав в качестве оси квантования ось z , направленную по $[\mathbf{x}\mathbf{e}]$, мы приведём оператор J_z к диагональной форме).

Итак,

$$([\mathbf{x}\mathbf{e}] M)_{if} =$$

$$= (\mu_n - \mu_p) (4\pi)^{1/2} \int_0^\infty uu_0 dr [\mathbf{x}\mathbf{e}] \left(\chi_1^{m'}, \frac{1}{2} (\sigma_n - \sigma_p) \chi_0^0 \right) \quad (11.11)$$

[выражения вида $(\varphi_1, L\varphi_2)$ обозначают матричные элементы оператора L].

Для определения ω_m нужно квадрат модуля матричного элемента (11.11) просуммировать по всем трём состояниям триплетного основного уровня, т. е. по числу m' . Учитывая, что диагональные матричные элементы оператора $\frac{1}{2}(\sigma_n - \sigma_p)$ в синглетном состоянии равны нулю, мы представим эту сумму в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m'} \left| [\mathbf{x}e] \left(\chi_1^{m'}, \frac{1}{2}(\sigma_n - \sigma_p) \chi_0^0 \right) \right|^2 &= \\ &= \sum_{m'_j, j} \left| [\mathbf{x}e] \left(\chi_j^{m'_j}, \frac{1}{2}(\sigma_n - \sigma_p) \chi_0^0 \right) \right|^2 = \\ &= \left(\chi_0^0, \left(\frac{1}{2} [\mathbf{x}e] (\sigma_n - \sigma_p) \right)^2 \chi_0^0 \right)^2 \quad (11.12) \\ &\quad (j = 0, 1; m'_1 \equiv m', m'_0 \equiv 0) \end{aligned}$$

(последняя часть равенства написана на основании правила перемножения матриц). Легко видеть, что

$$\left(\chi_0^0, \left(\frac{1}{2} [\mathbf{x}e] (\sigma_n - \sigma_p) \right)^2 \chi_0^0 \right) = 1.$$

Действительно, направляя единичный вектор $[\mathbf{x}e]$ вдоль оси z , получим:

$$\begin{aligned} \left(\chi_0^0, \left(\frac{1}{2} [\mathbf{x}e] (\sigma_n - \sigma_p) \right)^2 \chi_0^0 \right) &= \\ &= \frac{1}{4} [(\sigma_n^z)^2 + (\sigma_p^z)^2 - 2\sigma_n^z \sigma_p^z]_{00} = 1. \end{aligned}$$

Итак,

$$|([\mathbf{x}e] M)_{if}|^2 = 4\pi (\mu_n - \mu_p)^2 \left(\int_0^\infty u_0 u dr \right)^2 \quad (11.12')$$

и

$$\omega_m d\omega = \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar \omega}{Mc^2} \right)^2 \omega (\mu_n - \mu_p)^2 \left(\int_0^\infty u_0 u dr \right)^2 \frac{d\omega}{2}. \quad (11.13)$$

Суммируя это выражение по двум направлениям поляризации γ -кванта и интегрируя по телесному углу $d\omega$, получим следующее выражение для полной вероятности захвата нейтрона из синглетного в триплетное состояние:

$$\begin{aligned} \omega_m^{(0 \rightarrow 1)} &= \\ &= 4\pi \frac{e^2}{\hbar c} (\nu_n - \nu_p)^2 \left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{Mc^2} \right)^2 \frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{\hbar} \left(\int_0^\infty u_0 u dr \right)^2, \quad (11.14) \end{aligned}$$

где ε — энергия связи нейтрона, E_0 — энергия нейтрона в лабораторной системе координат (мы использовали закон сохранения энергии, согласно которому $\hbar\omega = \varepsilon + \frac{E_0}{2}$).

Определим теперь эффективное сечение захвата из синглетного в триплетное состояние. Для этого нужно разделить ω_m на поток нейтронов, равный $\sqrt{\frac{2E_0}{M}}$. Учитывая ещё, что только один из каждых четырёх нейтронов обладает спином, противоположным спину протона, получим следующее выражение для сечения:

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} &= \pi \frac{e^2}{\hbar c} (\nu_n - \nu_p)^2 \left(\frac{\varepsilon}{2E_0} \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{Mc^2} \right)^2 \frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{\varepsilon} \alpha_1 \left(\int_0^\infty u_0 u dr \right)^2, \quad (11.15) \end{aligned}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar}.$$

Мы видим, что сечение захвата растёт обратно пропорционально скорости нейтрона (см. по этому поводу также § 18). В области малых энергий, когда $E_0 \ll \varepsilon$, выражение (11.15) приобретает вид

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} = \pi \frac{e^2}{\hbar c} (\nu_n - \nu_p)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2E_0}} \left(\frac{\varepsilon}{Mc^2} \right)^2 \alpha_1 \left(\int_0^\infty u_0 u dr \right)^2. \quad (11.15')$$

Заметим, что угловое распределение вылетающих γ -квантов является сферически симметричным, так как исходное состояние системы 1S_0 не содержит какого-либо выделенного направления, которое могло бы дать анизотропию в угловом распределении.

Вычислим интеграл, входящий в (11.15). Не учитывая присутствия в основном состоянии дейтрона D -волны, мы будем исходить из следующей приближённой формулы для волновой функции основного состояния дейтрона [см. (2.7)].

$$u = \sqrt{2\alpha_1} N e^{-\alpha_1 r}, \quad N \approx \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (11.16)$$

Напомним, что волновая функция определяется выражением (11.16) только вне области действия ядерных сил; мы будем, однако, для оценки величины сечения захвата предполагать, что выражение (11.16) справедливо повсюду.

Так как в интеграле, определяющем матричный элемент, область пространства $r < r_0$, в которой действуют ядерные силы, не играет исключительной роли, то можно ожидать, что наш расчёт даст правильный порядок величины $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$.

Так как мы можем определить лишь порядок величины сечения захвата, то в дальнейшем в этом параграфе будем считать, что $N \approx 1$. В качестве волновой функции исходного состояния мы возьмём функцию

$$u_0 = C \frac{\sin(kr + \delta_0)}{k}. \quad (11.17)$$

В действительности, выражение (11.17) справедливо только вне области действия ядерных сил. Для оценки величины сечения захвата нейтронов мы будем по соображениям, высказанным выше, предполагать, что выражение (11.17) справедливо повсюду.

Полагая

$$C = \sqrt{\frac{M}{k}} \frac{1}{2\pi\hbar},$$

мы пронормируем u_0/r на энергию. Нужная нам нормировка (плотность частиц равна единице) получится, если положить

$$C = 1.$$

В этом легко убедиться, если вспомнить, что функция, нормированная на энергию, ψ_E , связана с функцией, нормированной на единичный объём $\psi_{\Omega=1}$, соотношением

$$\psi_E = \sqrt{\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3 dE}} \psi_{\Omega=1}.$$

В данном случае $E = \frac{\hbar^2 k^2}{M}$.

Подставив выражения (11.16), (11.17) в интеграл, входящий в (11.15), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} uu_0 dr &= \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{k} N \int_0^{\infty} \sin(kr + \delta_0) e^{-\alpha_1 r} dr = \\ &= \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{k} N \frac{(k \cos \delta_0 + \alpha_1 \sin \delta_0)}{(k^2 + \alpha_1^2)} = \\ &= \sqrt{2\alpha_1} N \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{(\alpha_1^2 + k^2) \sqrt{\alpha_0^2 + k^2}} \end{aligned} \quad (11.18)$$

(напомним, что $\operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{\alpha_0}{k}$).

Согласно (11.15) сечение захвата $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$ равно:

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} &= \pi \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_p - \mu_n)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2E_0}} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} E_0 \right)^2 \frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{\varepsilon} \times \\ &\times \frac{2N^2 \alpha_1^2 (\alpha_1 - \alpha_0)^2}{(\alpha_1^2 + k^2)^2 (\alpha_0^2 + k^2)} \end{aligned} \quad (11.19)$$

(E_0 — энергия нейтрона в лабораторной системе отсчёта).

Формула (11.19) показывает, что сечение захвата существенно зависит от знака величины α_0 . Поэтому экспериментальными данными по захвату медленных нейтронов протонами можно воспользоваться наряду с данными по рассеянию медленных нейтронов в орто- и параводороде для определения знака величины α_0 .

Вводя энергию связи дейтрона $\varepsilon = \frac{(\alpha_1 \hbar)^2}{M}$ и учитывая, что $\alpha_0 < 0$, перепишем (11.19) в следующем виде:

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} = \pi \frac{e^2}{Mc^2} \frac{\hbar}{Mc} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{E_0} \frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{\varepsilon' + \frac{1}{2} E_0}} \times \\ \times (\nu_p - \nu_n)^2 \frac{(V\varepsilon + V\varepsilon')^2}{Mc^2}, \quad (11.20)$$

где $\varepsilon' = \frac{(\alpha_0 \hbar)^2}{M}$. [В (11.20) мы не выписали множителя N^2 .]

При очень малых энергиях нейтрона сечение захвата пропорционально $E_0^{-1/2}$, т. е. обратно пропорционально скорости нейтрона. Поэтому вероятность захвата (в единицу времени) медленных нейтронов протонами не зависит от скорости нейтронов (а также и от скорости протонов). Для тепловых нейтронов с энергией $E_0 \approx 0,025 \text{ eV}$ мы получим согласно (11.20):

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} \approx 0,312 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Эта величина удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

Формула (11.20) выведена в предположении, что основным состоянием дейтрона является состояние 3S_1 . Наличие D -волны в основном состоянии дейтрона приводит к некоторому (весьма малому) уменьшению веса состояния 3S_1 , благодаря чему сечение $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$ несколько уменьшается по сравнению со значением, даваемым (11.20). Это уменьшение, однако, очень незначительно (оно составляет около $0,01 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ при $E_0 = 0,025 \text{ eV}$ [9]) и мы не будем поэтому его учитывать.

Выведем теперь формулы для вероятности захвата нейтрона из триплетного состояния. Мы будем снова пользоваться общей формулой (11.7), но в качестве волновой функции исходного состояния возьмём теперь вместо (11.9) функцию

$$\psi_i = \left(\frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r} \right) \chi_1^m. \quad (11.21)$$

Для нахождения радиальных функций u/r и w_1/r , описывающих S - и D -волны, необходимо решить уравнение Шредингера для непрерывного спектра системы нейтрон + протон. Мы предполагаем, что

существует связь между S - и D -волнами, которая строго учитывается членом $S_{12}U(r)$ в гамильтониане системы, и приближенно-граничными условиями (5.5''). Если положить в основу дальнейших рассуждений уравнения (5.5'), то мы получим следующие выражения для функций u_1 и w_1 :

$$u_1 = \frac{N_1}{k} g_0(kr + \delta_0), \quad w_1 = \frac{N_2}{k} g_2(kr + \delta_2), \quad (11.22)$$

где $N_1, N_2, \delta_0, \delta_2$ — константы и g_0 и g_2 — радиальные функции, входящие в разложение плоской волны в ряд по функциям Лежандра:

$$e^{ikr} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \frac{g_l(kr)}{kr}. \quad (11.23)$$

Функция g_l связана следующим образом с функцией Бесселя $J_{l+\frac{1}{2}}(z)$:

$$g_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr). \quad (11.23')$$

При $l=0$ и $l=2$ имеем:

$$g_0 = \sin kr, \quad g_2 = -\sin kr - \frac{3}{kr} \cos kr + \frac{3}{(kr)^2} \sin kr.$$

Чтобы определить константы, входящие в (11.22), необходимо-помимо условий (5.5''), учитывать условие ортогональности начального и конечного состояний, а также условие нормировки ψ_i : в общей формуле (11.9) предполагается, что плотность падающих частиц равна единице. Условие ортогональности является необходимым по той причине, что только при выполнении этого условия имеет смысл понятие перехода из начального в конечное состояние. В рассмотренном выше случае перехода из синглетного в триплетное состояние ортогональность автоматически обеспечивается благодаря тому, что функции χ_0^m и χ_1^m относятся к разным значениям спина и поэтому ортогональны.

Легко показать, что условие ортогональности в рассматриваемом теперь случае имеет вид

$$\int_0^{\infty} (uu_1 + ww_1) dr = 0. \quad (11.21')$$

Перейдем к определению матричного элемента магнитного момента. Заметим предварительно, что в триплетном состоянии

оператор $S = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_p)$ может быть заменён его проекцией в направлении J , т. е.

$$S \rightarrow J \frac{SJ}{J^2} = \frac{J}{2} \frac{S^2 + J^2 - L^2}{J^2} = \frac{J}{4}(4 - L^2) \quad (11.24)$$

(мы воспользовались тем, что $J^2 = 2$, $S^2 = 2$). Далее, в триплетном состоянии все диагональные матричные элементы оператора $\sigma_n - \sigma_p$ обращаются в нуль, поэтому вопрос сводится к определению матричного элемента оператора:

$$M_z = J_z \left[\mu_n + \mu_p - \frac{1}{4} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) L^2 \right] \quad (11.25)$$

(ось z предполагаем направленной вдоль $[je]$).

Вычислим матричный элемент $(M_z)_{if}$. Воспользовавшись формулами (11.21) и (11.10), определяющими ψ_i и ψ_f , получим:

$$\begin{aligned} (M_z)_{if} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (\mu_n + \mu_p) \times \\ &\times \left(\left[\frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r} \right] \chi_1^m, J_z \left[\frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right] \chi_1^{m'} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) \times \\ &\times \left(\left[\frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r} \right] \chi_1^m, J_z L^2 \left[\frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right] \chi_1^{m'} \right). \quad (11.25') \end{aligned}$$

Так как в триплетном состоянии

$$S_{12}^2 = 8 - 2S_{12}$$

и среднее значение S_{12} , т. е. интеграл по углам от S_{12} , равно нулю то $(M_z)_{if}$ приобретает вид

$$\begin{aligned} (M_z)_{if} &= \sqrt{4\pi} (\mu_n + \mu_p) (\chi_1^m, J_z \chi_1^{m'}) \int_0^\infty (uu_1 + ww_1) dr - \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{4\pi}} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) \times \\ &\times \left(\left[\frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r} \right] \chi_1^m, J_z^2 L^2 \left[\frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right] \chi_1^{m'} \right). \end{aligned}$$

Первый интеграл согласно (11.21') равен нулю.

Замечая ещё, что

$$L^2 \left(\frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right) \chi_1^m = 6 \cdot 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \chi_1^m,$$

перепишем $(M_z)_{if}$ в виде

$$(M_z)_{if} = -\frac{3}{2} \sqrt{4\pi} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) (\chi_1^m, J_z \chi_1^{m'}) \int_0^\infty \omega \omega_1 dr.$$

Квадрат модуля этого выражения следует просуммировать по трём конечным состояниям и усреднить по начальным состояниям.

Используя равенство

$$\frac{1}{3} \sum_m \sum_{m'} |(\chi_1^m, J_z \chi_1^{m'})|^2 = \frac{1}{3} \sum_m (\chi_1^m, J_z^2 \chi_1^m) = \frac{2}{3},$$

получим следующее выражение для усреднённого по начальным состояниям и просуммированного по конечным состояниям квадрата модуля $(M_z)_{if}$:

$$\overline{|(M_z)_{if}|^2} = 6\pi \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right)^2 \left(\int_0^\infty \omega \omega_1 dr \right)^2. \quad (11.26)$$

Подставив это выражение в формулу (11.7), найдём вероятность магнитного дипольного излучения, связанного с переходом из триплетного состояния в основное состояние дейтрона.

Проинтегрировав (11.7) по направлениям излучённого γ -кванта и просуммировав результат по двум направлениям поляризации γ -кванта, найдём полную вероятность захвата нейтрона.

В том случае, когда энергия нейтрона значительно меньше энергии связи дейтрона, полная вероятность магнитного дипольного излучения, связанного с переходом между триплетными состояниями, равна

$$\omega_m^{(1 \rightarrow 1)} = 6\pi \frac{e^2}{\hbar c} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{e}{Mc^2} \right)^2 \frac{e}{\hbar} \left(\int_0^\infty \omega \omega_1 dr \right)^2. \quad (11.27)$$

Для получения сечения захвата нужно разделить это выражение на поток, равный в триплетном состоянии $\frac{4}{3} \left(\frac{2E_0}{M} \right)^{1/2}$. Мы получим, таким образом, следующее выражение для сечения захвата [9]:

$$\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)} = \frac{9\pi}{2} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right)^2 \times \\ \times \sqrt{\frac{e}{2E_0}} \left(\frac{e}{Mc^2} \right)^2 a_1 \left(\int_0^\infty \omega \omega_1 dr \right)^2. \quad (11.28)$$

Определим ещё вероятность захвата нейтрона из триплетного состояния, сопровождающегося излучением электрического квадр-

польного γ -кванта. Вероятность захвата определяется следующей формулой:

$$\frac{e^2}{\hbar c} \frac{\omega^5}{c^4} \left| \left(\psi_f, \frac{1}{4} \text{er} \cdot \mathbf{r} \psi_i \right) \right|^2 \frac{d\omega}{8\pi}, \quad (11.29)$$

где ψ_i и ψ_f определяются соответственно формулами (11.21) и (11.10) (Множитель $\frac{1}{4}$ в матричном элементе появляется из-за того, что только протон имеет заряд; радиус-вектор протона равен $\frac{1}{2} r$.)

Проделав выкладки, аналогичные приведённым выше, получим следующее выражение для сечения захвата нейтрона из триплетного состояния, сопровождающегося излучением квадрупольного γ -кванта:

$$\begin{aligned} \sigma_q^{(1 \rightarrow 1)} &= \frac{\pi}{400} \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{e}{2E_0}} \left(\frac{e}{Mc^2} \right)^2 \alpha_1^5 \times \\ &\times \left| \int_0^\infty r^2 (u w_1 + w u_1 - 2^{-1/2} w w_1) dr \right|^2. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Сравнение выражений для $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$ и $\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)}$ показывает, что

$$\frac{\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)}}{\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}} \approx \left(\frac{\int_0^\infty w w_1 dr}{\int_0^\infty u u_0 dr} \right)^2 \ll 1.$$

Сечение захвата $\sigma_q^{(1 \rightarrow 1)}$ также значительно меньше $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$.

Таким образом, основную роль играют переходы из синглетного состояния в основное состояние дейтрона, сопровождающиеся магнитным дипольным излучением.

§ 12. Фоторасщепление дейтрона

При облучении дейтрона γ -квантами, энергия которых превосходит энергию связи дейтрона, может произойти распад дейтрона. Это явление фоторасщепления дейтрона аналогично фотоэффекту в атомах.

Следует различать четыре типа переходов из основного состояния дейтрона в состояние непрерывного спектра: электрический дипольный, магнитный дипольный и электрический

квадрупольный переходы в триплетное состояние, а также магнитный дипольный переход в синглетное состояние системы нейтрон + протон.

Основную роль, как будет показано далее, играют электрическое и магнитное дипольное поглощение γ -квантов.

Прежде чем определять вероятность фоторасщепления дейтрона, выведем общие формулы для вероятностей поглощения γ -квантов.

Вероятность поглощения γ -кванта связана простым соотношением с вероятностью испускания γ -кванта. Рассмотрим вероятность захвата нейтрона протоном, сопровождающегося испусканием γ -кванта. Эта вероятность, отнесённая к единице времени, может быть представлена в виде

$$w_c = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{12}|^2 \rho_\gamma,$$

где M_{12} — матричный элемент перехода и ρ_γ — отнесённое к единичному интервалу энергии число конечных состояний. Индекс 1 в матричном элементе обозначает исходное состояние, принадлежащее к непрерывному спектру; индекс 2 означает основное состояние дейтрона. Известно, что

$$\rho_\gamma = 2 \frac{(\hbar\omega)^2}{(2\pi\hbar c)^3} \Omega d\omega,$$

где ω — частота γ -кванта, $d\omega$ — элемент телесного угла, в котором происходит излучение, Ω — объём, в котором предполагаются находящимися частицы; множитель 2 учитывает две возможных независимых поляризации γ -кванта.

Определим теперь сечение захвата $d\sigma_c$. Будем в дальнейшем пользоваться системой координат, в которой покоится центр инерции сталкивающихся частиц. Для получения сечения захвата нужно вероятность w_c разделить на плотность потока частиц, равную $\frac{v}{\Omega}$, где v — относительная скорость частиц. Поэтому

$$d\sigma_c = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{12}|^2 \frac{2(\hbar\omega)^2 \Omega^2}{v(2\pi\hbar c)^3} d\omega. \quad (12.1)$$

Рассмотрим теперь вероятность поглощения γ -кванта, приводящего к вылету частицы; в рассматриваемом ниже

случае речь идёт о расщеплении дейтрона. Эта вероятность может быть представлена в виде

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{21}|^2 \rho_n,$$

где M_{21} — матричный элемент перехода, ρ_n — отнесённое к единичному интервалу энергии число конечных состояний, которое в интересующем нас случае расщепления дейтрона равняется

$$\rho_n = \frac{p^2 dp d\omega_p}{(2\pi\hbar)^3 dE} \Omega,$$

где p — импульс каждой из частиц (мы пренебрегаем импульсом кванта), $d\omega_p$ — элемент телесного угла, в котором вылетает частица, E — энергия (кинетическая) частиц, равная $\frac{p^2}{M}$ (M — масса нейтрона).

Сечение фоторасщепления $d\sigma_p$ равно частному от деления ω_p на $\frac{c}{\Omega}$:

$$d\sigma_p = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{21}|^2 \frac{Mp\Omega^2 d\omega_p}{2 \cdot (2\pi\hbar)^3 c}. \quad (12.2)$$

Так как $|M_{12}|^2 = |M_{21}|^2$, то отношение сечений равняется

$$d\sigma_p : d\sigma_c = \frac{Mpv^2 d\omega_p}{4(\hbar\omega)^2 d\omega_\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{pc}{\hbar\omega}\right)^2 \frac{d\omega_p}{d\omega_\gamma} \quad (12.3)$$

(мы воспользовались тем, что $v = \frac{2p}{M}$).

В § 11 мы имели [см. (11.4)] следующую формулу для сечения испускания электрического дипольного γ -кванта при захвате частицы со скоростью v :

$$d\sigma_d = \frac{e^2\omega^3}{2\pi\hbar c^3 v} \left| \left(\sum_n (\mathbf{e}\mathbf{r}_n) \right)_{if} \right|^2 d\omega_\gamma. \quad (12.4)$$

Согласно (12.3) сечение поглощения электрического дипольного γ -кванта равняется

$$d\sigma_p^{(d)} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Mp\omega}{\hbar^2} \left| \left(\sum_n (\mathbf{e}\mathbf{r}_n) \right)_{if} \right|^2 \frac{d\omega_p}{4\pi}. \quad (12.4')$$

Пользуясь этой формулой, запишем сечение фоторасщепления дейтрона в виде

$$d\sigma_p^{(d)} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Mp}{\hbar^2} \omega \frac{1}{3} \sum_{m m'} \left| \left(\psi_f, \frac{1}{2} \mathbf{e} \mathbf{r} \psi_i \right) \right|^2 \frac{d\omega_p}{4\pi}, \quad (12.5)$$

где $e \frac{\mathbf{e} \mathbf{r}}{2}$ — проекция дипольного момента дейтрона на направление поляризации γ -кванта; ψ_i и ψ_f — волновые функции начального и конечного состояний системы нейтрон + протон. [В формуле (12.5) производится суммирование по конечным состояниям и усреднение по начальным состояниям триплетных уровней, между которыми происходит переход.]

Чтобы получить формулу для сечения поглощения магнитного дипольного γ -кванта, при котором система переходит из триплетного в синглетное состояние (переходы: ${}^3S_1 \rightarrow {}^1S_0$, ${}^3D_1 \rightarrow {}^1D_2$), достаточно в формуле (12.5) заменить проекцию электрического дипольного момента в направлении поляризации γ -кванта на проекцию магнитного момента в направлении магнитного поля γ -кванта, т. е. заменить $\frac{e}{2} \cdot \mathbf{e} \mathbf{r}$ на $\frac{e\hbar}{2Mc} [\mathbf{x} \mathbf{e}] M$ (обозначения смотри в § 11).

Таким образом, мы получим следующую формулу для сечения поглощения магнитного дипольного γ -кванта:

$$d\sigma_p^{(m)} = \frac{1}{4} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{p\omega}{Mc^2} \frac{1}{3} \sum_{m'} \left| \left(\psi_f, [\mathbf{x} \mathbf{e}] M \psi_i \right) \right|^2 \frac{d\omega_p}{4\pi} \quad (12.6)$$

(множитель $\frac{1}{4}$ появляется из-за того, что конечное состояние является здесь синглетным).

Сечение для квадрупольного электрического поглощения может быть легко получено на основании формул (11.6), (12.3).

Определим вероятность фоторасщепления дейтрона, вызываемого поглощением электрического дипольного γ -кванта*). Найдём матричный элемент

$$\left(\psi_f, \frac{1}{2} \mathbf{e} \mathbf{r} \psi_i \right).$$

*) При вычислении вероятностей фоторасщепления мы следуем [9].

В качестве волновой функции исходного состояния возьмём функцию

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right) \chi_1^m, \quad (12.7)$$

представляющую собой волновую функцию основного состояния дейтрона.

Конечным состоянием системы нейтрон + протон является, очевидно, состояние 3P , так как при электрическом дипольном переходе мультиплетность не меняется, а квантовое число l изменяется на единицу.

Мы будем предполагать, что длина волны нейтрона и протона, образующихся в результате расщепления дейтрона, значительно больше радиуса действия ядерных сил. Если выполнено это условие, то в P -состоянии между нейтроном и протоном практически силы не действуют. Поэтому волновая функция конечного состояния совпадает с волновой функцией свободного движения.

Мы могли бы в качестве волновой функции конечного состояния ψ_f взять плоскую волну $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \chi_1^m$, где \mathbf{k} — волновой вектор нейтрона, величина которого определяется из закона сохранения энергии

$$\frac{\hbar^2 k^2}{M} = \hbar\omega - \varepsilon \quad (12.8)$$

(функция $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ удовлетворяет нужному условию нормировки, а именно — единичной плотности частиц).

Легко видеть, что только одно слагаемое в разложении $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ в ряд по полиномам Лежандра [см. формулу (11.23)], отвечающее $l=1$ (P -волна), даёт отличный от нуля результат при подстановке в интеграл $\left(\psi_f, \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{r} \psi_i \right)$.

Поэтому в качестве волновой функции конечного состояния мы возьмём это слагаемое, описывающее P -состояние в случае свободного движения.

Итак,

$$\psi_f = 3i \frac{\mathbf{k}\mathbf{r}}{kr} \frac{g_1(kr)}{kr} \chi_1^m, \quad (12.9)$$

где

$$g_1(kr) = \frac{\sin kr}{kr} + \cos kr \quad (12.9')$$

(вместо $P_1(\cos \varphi)$ мы написали здесь $\frac{k\mathbf{r}}{kr}$, φ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{r}).

Подставим (12.9) и (12.7) в выражение для матричного элемента $(\psi_f, \frac{1}{2} \mathbf{e}\mathbf{r}\psi_i)$ и выполним сперва интегрирование по углам в пространстве \mathbf{r} . Замечая, что среднее значение (при интегрировании по углам) от $(\mathbf{na})(\mathbf{nb})$, где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, а \mathbf{a} и \mathbf{b} — постоянные векторы, равно

$$\overline{(\mathbf{na})(\mathbf{nb})} = \frac{1}{3} \mathbf{ab},$$

а среднее значение $(\mathbf{na})(\mathbf{nb})(\mathbf{nc})(\mathbf{nd})$, где \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} — постоянные векторы, равно

$$\overline{(\mathbf{na})(\mathbf{nb})(\mathbf{nc})(\mathbf{nd})} = \frac{1}{15} (\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} + \mathbf{ac} \cdot \mathbf{bd} + \mathbf{ad} \cdot \mathbf{bc}),$$

получим:

$$\begin{aligned} (\psi_f, \frac{1}{2} \mathbf{e}\mathbf{r}\psi_i) = & -i \frac{\sqrt{\pi}}{k^2} (\chi_1^{m'} \left\{ \mathbf{ek} \int_0^\infty r g_1 u dr + \right. \\ & \left. + \frac{2\sqrt{2}}{5} \left(\frac{3}{4} \mathbf{kS} \cdot \mathbf{eS} + \frac{3}{4} \mathbf{eS} \cdot \mathbf{kS} - \mathbf{ek} \right) \int_0^\infty r g_1 \omega dr \right\} \chi_1^m), \end{aligned} \quad (12.10)$$

где

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2).$$

[Мы воспользовались тем, что $S_{12} = 6(S\mathbf{n})^2 - 4$.]

Легко видеть, что эта величина может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{mm'} |(\psi_f, \frac{1}{2} \mathbf{e}\mathbf{r}\psi_i)|^2 = & \frac{1}{3} \frac{\pi}{k^4} \text{Spur} \left\{ (\mathbf{ek})^2 \left(\int_0^\infty r g_1 u dr \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{8}{25} \left(\frac{3}{4} \mathbf{kS} \cdot \mathbf{eS} + \frac{3}{4} \mathbf{eS} \cdot \mathbf{kS} - \mathbf{ek} \right)^2 \left(\int_0^\infty r g_1 \omega dr \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\text{Spur } \mathbf{kS} \cdot \mathbf{eS} = 2ek,$$

$$\frac{1}{4} \text{Spur } (\mathbf{kS} \cdot \mathbf{eS} + \mathbf{eS} \cdot \mathbf{kS})^2 = \frac{3}{2} (ek)^2 + \frac{1}{2} k^2,$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{mm'} \left| \left(\psi_{f'} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{e} \mathbf{r} \psi_i \right) \right|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left\{ \cos^2 \theta \left(\int_0^{\infty} r g_1 u dr \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} (3 + \cos^2 \theta) \left(\int_0^{\infty} r g_1 w dr \right)^2 \right\}, \quad (12.11) \end{aligned}$$

где θ — угол между \mathbf{e} и \mathbf{k} .

Если мы имеем дело с неполяризованными γ -лучами, то $\cos^2 \theta$ следует усреднить по направлению вектора поляризации \mathbf{e} , перпендикулярного к волновому вектору γ -кванта. В результате такого усреднения мы получим:

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta,$$

где ϑ — угол между направлением распространения γ -луча и направлением вылета продуктов распада дейтрона.

Окончательное выражение для дифференциального сечения фоторасщепления дейтрона, вызванного поглощением электрического дипольного γ -кванта, имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma_p^{(d)} = \frac{\pi}{2} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{M\omega}{\hbar k} \left\{ \sin^2 \vartheta \left(\int_0^{\infty} r g_1 u dr \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} (6 + \sin^2 \vartheta) \left(\int_0^{\infty} r g_1 w dr \right)^2 \right\} \frac{d\sigma_p}{4\pi}. \quad (12.12) \end{aligned}$$

Интегральное сечение фотоэлектрического расщепления дейтрона равняется

$$\sigma_p^{(d)} = \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{M\omega}{\hbar k} \left\{ \left(\int_0^{\infty} r g_1 u dr \right)^2 + \frac{2}{5} \left(\int_0^{\infty} r g_1 w dr \right)^2 \right\}. \quad (12.13)$$

Если не учитывать в основном состоянии дейтрона D -волны, то дифференциальное и интегральное сечения фотоэлектри-

ческого расщепления дейтрона выразятся следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_p^{(d)} &\approx \frac{\pi}{2} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{M\omega}{\hbar k} \left(\int_0^\infty r g_1 u dr \right)^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\omega}{4\pi}, \\ \sigma_p^{(d)} &\approx \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{M\omega}{\hbar k} \left(\int_0^\infty r g_1 u dr \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (12.13')$$

Мы видим, что вероятность разлёта продуктов распада под углом ϑ к направлению распространения γ -кванта пропорциональна $\sin^2 \vartheta$.

Заметим, что благодаря присутствию в основном состоянии дейтрона D -волны угловое распределение вылетающих частиц наряду с членом, пропорциональным $\sin^2 \vartheta$, содержит малый сферически симметричный член.

Для оценки величины $\sigma_p^{(d)}$ мы не будем учитывать приреси D -волны в основном состоянии дейтрона и воспользуемся для u выражением

$$u = \sqrt{2\alpha_1} N e^{-\alpha_1 r}, \quad N = \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (12.13'')$$

Можно утверждать, что благодаря наличию множителя r под знаком интеграла в (12.13') роль области $(0, r_0)$ будет сильно уменьшена, так что интеграл будет в основном определяться областью, находящейся вне действия ядерных сил. Поэтому при вычислении $\sigma_p^{(d)}$ для волновой функции дейтрона вне области действия ядерных сил имеет смысл пользоваться уточнённым значением множителя N . В этом отношении расчёт сечения расщепления дейтрона отличается от расчёта сечения захвата нейтрона протоном. В последнем случае роль внутренней области $(0, r_0)$ более значительна; пользуясь формулой (12.13'') для волновой функции, мы можем получить лишь оценку сечения захвата, поэтому мы считали в § 11 множитель N равным единице.

Подставив (12.13'') в (12.13'), получим следующий результат:

$$\sigma_p^{(d)} = \frac{8\pi}{3} N^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar^2}{M} \frac{\sqrt{\varepsilon} E^{3/2}}{(E + \varepsilon)^3}, \quad N^2 \approx \frac{3}{2}. \quad (12.14)$$

Мы видим, таким образом, что при малых энергиях вылетающих частиц сечение фотоэлектрического расщепления дейтрона пропорционально $E^{3/2}$.

Вводя отношение энергии γ -кванта к энергии связи дейтрона ε

$$\gamma = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon} = \frac{E + \varepsilon}{\varepsilon},$$

перепишем (12.14) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(d)} &= 4\pi \cdot \frac{1}{137} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{(\gamma - 1)^{3/2}}{\gamma^3} \approx \\ &\approx 1,78 \cdot 10^{-26} (\gamma - 1)^{3/2} \gamma^{-3} \text{ см}^2. \end{aligned} \quad (12.14')$$

Сечение обращается в нуль при $\gamma = 1$ и достигает максимума при $\gamma = 2$, т. е. в том случае, когда кинетическая энергия продуктов расщепления E равна энергии связи дейтрона. Этот максимум равен

$$(\sigma_p^{(d)})_{\max} \approx 21,6 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2. \quad (12.14'')$$

Выражения (12.14), (12.14') определяют эффективное сечение фоторасщепления дейтрона, связанного с переходом в триплетное P -состояние непрерывного спектра.

Мы рассмотрим теперь фоторасщепление дейтрона, вызываемое магнитным дипольным поглощением γ -квантов (фотомагнитное расщепление). При этом происходят переходы из основного (триплетного) состояния дейтрона в синглетное состояние непрерывного спектра: ${}^3S_1 \rightarrow {}^1S_0$, ${}^3D_1 \rightarrow {}^1D_2$.

Волновая функция конечного состояния может быть представлена в виде

$$\psi_f = \left\{ e^{-i\delta_0} \frac{u_0(r)}{r} - \frac{5}{2} \left[3 \left(\frac{kr}{kr} \right)^2 - 1 \right] \frac{g_2(kr)}{r} \right\} \chi_0^0. \quad (12.15)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой возмущённую взаимодействием нейтрона и протона 1S_0 -волну непрерывного спектра; второе слагаемое представляет собой D -волну в разложении e^{ikr} в ряд по полиномам Лежандра. Эту волну мы считаем невозмущённой действием ядерных сил. Функция u_0 вне области действия ядерных сил имеет вид

$$u_0 \approx \frac{1}{k} \sin(kr + \delta_0). \quad (12.15')$$

Множитель $e^{-i\delta_0}$ перед $\frac{u_0}{r}$ введён для того, чтобы функция ψ_f вела себя на бесконечности как сумма плоской волны и сходящейся шаровой волны (такая асимптотика должна иметь место всегда при возникновении новой частицы; см. в связи с этим [40]).

Мы не будем вначале учитывать примеси D -волны. Входящий в (12.6) матричный элемент магнитного момента, относящийся к переходу ${}^3S_1 \rightarrow {}^1S_0$, уже был вычислен в § 11. Согласно (11.12) квадрат модуля этого матричного элемента равен

$$|([\mathbf{x}\epsilon] M)_{if}|^2 = 4\pi(\mu_n - \mu_p)^2 \left(\int_0^\infty uu_0 dr \right)^2.$$

Дифференциальное сечение фотоманнитного расщепления, определяемое (12.6) представится поэтому в следующем виде:

$$d\sigma_p^{(m)} = \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar\omega}{Mc^2} k (\mu_n - \mu_p)^2 \left(\int_0^\infty uu_0 dr \right)^2 \frac{d\Omega_p}{4\pi}. \quad (12.16)$$

Мы видим, что угловое распределение продуктов фотоманнитного расщепления является сферически симметричным в отличие от распределения при фотоэлектрическом расщеплении, которое пропорционально $\sin^2\theta$.

Чтобы оценить величину $\sigma_p^{(m)}$, воспользуемся выражениями (12.15') и (12.13''), определяющими функции u_0 и u . Так как речь может идти только об оценке величины, то мы будем считать $N \approx 1$; иначе говоря, наш расчёт относится к случаю бесконечно малого радиуса действия ядерных сил.

Выполнив элементарное интегрирование, получим следующий результат:

$$\sigma_p^{(m)} \approx \frac{2\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 (\mu_n - \mu_p)^2 \frac{\sqrt{E} \sqrt{\epsilon} (\sqrt{E} + \sqrt{\epsilon'})^2}{(E + \epsilon)(E + \epsilon')} \quad (12.17)$$

(мы воспользовались тем, что $\operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{\alpha_0}{k}$, $\alpha_0 = -\frac{\sqrt{M\epsilon'}}{\hbar}$).

Отметим, что при малых энергиях $\sigma_p^{(m)}$ пропорционально \sqrt{E} , в то время как $\sigma_p^{(d)}$ пропорционально $E^{3/2}$; таким образом, при

малых E магнитное дипольное поглощение является более существенным, чем электрическое дипольное поглощение. Оба типа расщепления играют одинаковую роль при энергии $E_0 \approx 3 \cdot 10^5$ eV. Если энергия продуктов расщепления меньше E_0 , то преобладает магнитное дипольное поглощение, так же как это имеет место в случае захвата медленных нейтронов протонами (§ 11).

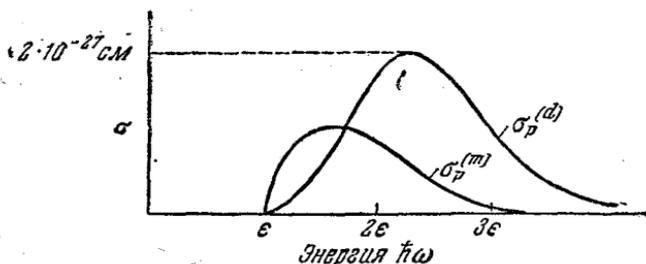


Рис. 7.

На рис. 7 показан ход сечений фотоэлектрического и фотомагнитного расщепления дейтрона в зависимости от энергии кванта $\hbar\omega$.

Остановимся ещё на учёте D -волны. Если исходить из волновой функции (12.15) для конечного состояния и функции (12.7) для начального состояния (основного состояния дейтрона), то, используя (12.6), мы получим следующее выражение для дифференциального сечения фотомагнитного расщепления дейтрона

$$\begin{aligned}
 d\sigma_p^{(m)} = & \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \frac{\hbar\omega}{Mc^2} k \left\{ \left(\int_0^\infty uu_0 dr \right)^2 - \right. \\
 & - \frac{\cos \delta_0}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty uu_0 dr \right) \left(\int_0^\infty g_2 w dr \right) (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \\
 & \left. + \frac{1}{4} (5 - 3 \cos^2 \vartheta) \left(\int_0^\infty g_2 w dr \right)^2 \right\} \frac{d\omega_p}{4\pi} \quad (12.18)
 \end{aligned}$$

(в этом выражении уже произведено усреднение по направлениям поляризации γ -кванта).

Интегральное сечение имеет вид ^[9]

$$\sigma_p^{(m)} = \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \frac{\hbar \omega}{Mc^2} k \left\{ \left(\int_0^\infty u u_0 dr \right)^2 + \left(\int_0^\infty g_2 w dr \right)^2 \right\}. \quad (12.18')$$

Мы видим, что благодаря присутствию *D*-волны в основном состоянии дейтрона возникает небольшая асимметрия в угловом распределении продуктов расщепления. Этот эффект, однако, очень невелик.

§ 13. Расщепление дейтрона в кулоновском поле ядра

Дейтрон, проходящий на некотором расстоянии от ядра, может под действием кулоновского поля последнего расщепиться на нейтрон и протон. При этом возможны различные реакции: освобождение нейтрона и протона, захват нейтрона и освобождение протона, захват протона и освобождение нейтрона, захват обеих частиц. Мы в дальнейшем подробно рассмотрим первую из этих реакций, при которой освобождаются и нейтрон и протон.

При определении вероятности расщепления дейтрона в кулоновском поле ядра мы будем различать два случая: случай медленных дейтронов, скорость которых v_g удовлетворяет неравенству $\frac{Ze^2}{\hbar v_g} \gg 1$ (Ze — заряд ядра), и случай быстрых дейтронов, скорость которых удовлетворяет неравенству $\frac{Ze^2}{\hbar v_g} \ll 1$. Начнём с рассмотрения первого случая*).

Выясним прежде всего, каким образом следует описывать движение системы нейтрон + протон в кулоновском поле ядра. Покажем, что в отсутствии кулоновского поля уравнение Шредингера, описывающее систему нейтрон + протон, может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_p + \Delta_n) \Psi + (E - \varepsilon) \Psi = \\ = - \frac{\hbar^2}{M} 4\pi N \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} \psi_g^0 \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p), \quad (13.1) \end{aligned}$$

*) Ниже мы излагаем основные результаты работы ^[39].

где E — кинетическая энергия дейтрона, ε — его энергия связи, M — масса нейтрона, $\alpha = \frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar}$, $N \approx \sqrt{\frac{3}{2}}$, Δ_p и Δ_n — операторы Лапласа соответственно по координатам \mathbf{r}_p и \mathbf{r}_n протона и нейтрона, наконец ψ_g^0 — волновая функция, описывающая движение дейтрона как целого, т. е. плоская волна

$$\psi_g^0 = e^{i\mathbf{p}_g \mathbf{r}_g / \hbar},$$

где $p_g = (4ME)^{1/2}$ — импульс дейтрона, а $\mathbf{r}_g = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_n + \mathbf{r}_p)$ — радиус-вектор его центра инерции.

Чтобы убедиться в справедливости (13.1), заметим, что при $\mathbf{r}_n \neq \mathbf{r}_p$ уравнение (13.1) соответствует свободному движению нейтрона и протона с общей энергией, равной $E - \varepsilon$, как и должно быть, учитывая короткодействующий характер ядерных сил. Поэтому остаётся показать, что при $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p) \rightarrow 0$ уравнение (13.1) даёт правильную волновую функцию дейтрона

$$\Psi = \psi_g^0 \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} N \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (13.2)$$

представляющую собой произведение волновой функции дейтрона как целого ψ_g^0 на волновую функцию основного состояния дейтрона, которая согласно (2.7) имеет вид

$$\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{4\pi}} N \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

(множитель N учитывает то обстоятельство, что это выражение является, строго говоря, справедливым только вне области действия ядерных сил, см. § 2).

Вводя в (13.1) вместо \mathbf{r}_p и \mathbf{r}_n координаты $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n$ и $\mathbf{r}_g = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_n + \mathbf{r}_p)$, перепишем (13.1) в виде

$$\frac{\hbar^2}{4M} \Delta_g \Psi + \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Psi + (E - \varepsilon) \Psi = -4\pi \frac{\hbar^2}{M} N \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \psi_g^0 \delta(\mathbf{r}).$$

Подставляя сюда вместо Ψ выражение (13.2), получим:

$$(\Delta - \alpha^2) \frac{e^{-\alpha r}}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r});$$

но это соотношение удовлетворяется тождественно, что и доказывает наше утверждение.

Перейдём теперь к рассмотрению случая движения системы нейтрон + протон в кулоновском поле ядра.

Уравнение Шредингера в этом случае может быть получено, очевидно, из (13.1), если вычесть из энергии дейтрона E потенциальную энергию $\frac{Ze^2}{r_p}$ протона в кулоновском поле ядра и заменить ψ_g^0 на волновую функцию дейтрона как целого

в поле ядра; эту последнюю мы обозначим через ψ_g . Функция ψ_g на бесконечности имеет вид суммы падающей плоской волны, модифицированной кулоновским полем ядра, и рассеянной расходящейся сферической волны. Плоская волна предполагается нормированной на единицу плотности потока.

Итак, уравнение Шредингера, описывающее движение системы нейтрон + протон в кулоновском поле ядра, имеет следующий вид:

$$(\Delta_n + \Delta_p) \Psi + \frac{2M}{\hbar^2} \left(E - \frac{Ze^2}{r_p} - \varepsilon \right) \Psi = \\ = -8\pi N \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} \psi_g \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p). \quad (13.3)$$

Для решения этого уравнения разложим искомую функцию Ψ по волновым функциям протона, освобождающегося в результате расщепления дейтрона. Эти волновые функции, которые мы обозначим через ψ_p , удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_p \psi_p + \frac{2M}{\hbar^2} \left(E_p - \frac{Ze^2}{r_p} \right) \psi_p = 0, \quad (13.4)$$

где E_p — энергия протона, и, кроме того, подчиняются определённому условию на бесконечности. Это условие, имеющее место во всех тех случаях, когда из центра в некотором направлении вылетает новая частица, состоит в следующем: волновая функция этой частицы в своём асимптотическом выражении на бесконечности не должна содержать расходящейся шаровой волны. Вылету новой частицы соответствует плоская волна; расходящаяся сферическая волна отвечает всегда процессу рассеяния, не имеющему места в интересующем нас случае. Поэтому в асимптотическом выражении

расходящейся шаровой волны не должно быть и волновая функция на бесконечности должна складываться из плоской волны и сходящейся шаровой волны *). Мы будем предполагать, что плоская волна нормирована на δ -функцию в импульсном пространстве.

Итак, мы представляем решение (13.3) в виде

$$\Psi = \int a_p(\mathbf{r}_n) \psi_p(\mathbf{r}_p) d\tau_p, \quad (13.5)$$

где $d\tau_p$ — элемент объёма импульсного пространства протона, $a_p(\mathbf{r}_n)$ — некоторые функции координат нейтрона и импульса вылетающего протона \mathbf{p} .

Подставив (13.5) в (13.3) и воспользовавшись условием ортогональности функций ψ_p , получим следующее уравнение для функций a_p :

$$\Delta_n a_p + \frac{2M}{\hbar^2} E_n a_p = -8\pi N \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \psi_g(\mathbf{r}_n) \psi_p^*(\mathbf{r}_n), \quad (13.6)$$

где $E_n = E - \epsilon - E_p$ — энергия вылетающего нейтрона.

Физический смысл разложения Ψ по функциям ψ_p состоит в том, что $a_p(\mathbf{r}_n)$ представляет собой волновую функцию нейтрона, образовавшегося при распаде дейтрона, причём состояние протона описывается функцией ψ_p .

Уравнение (13.6) имеет такой же вид, как и уравнение для запаздывающих потенциалов. Решение его на больших расстояниях $r_n \equiv R = nR$ (n — единичный вектор в направлении \mathbf{R}) имеет следующий вид:

$$a_p = 2N \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{ik_n R}}{R} \int \psi_g(\mathbf{r}) \psi_p^*(\mathbf{r}) e^{-ik_n \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (13.7)$$

где $\mathbf{k}_n = n\mathbf{k}_n$, $k_n = \frac{1}{\hbar} (2ME_n)^{1/2}$.

Если умножить квадрат модуля a_p на скорость нейтрона $v_n = \left(\frac{2E_n}{M}\right)^{1/2}$ и элемент сферической поверхности $R^2 d\omega_n$, где $d\omega_n$ — элемент телесного угла около направления n , то мы получим поток нейтронов в этом элементе телесного угла. Так как падающая плоская волна в выражении для ψ_g нор-

*) См. в связи с этим [40],

мирована на единицу плотности потока, а плоская волна в асимптотическом выражении для ψ_p нормирована на δ -функцию в импульсном пространстве протона, то выражение

$$d\sigma = v_n R^2 |a_p|^2 p_p^2 dp_p d\omega_p d\omega_n$$

представляет собой эффективное сечение расщепления дейтрона на нейтрон и протон, вылетающие соответственно в элементах телесных углов $d\omega_n$ и $d\omega_p$, причём импульс протона лежит в интервале dp_p . Подставляя в это выражение значение a_p из (13.7), получим следующую окончательную формулу для сечения:

$$d\sigma = N^2 \frac{\hbar}{2\pi} (Me)^{1/2} \times \\ \times \mathbf{k}_n \mathbf{k}_p \left| \int \psi_g(\mathbf{r}) \psi_p^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_n \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2 dE_n d\omega_n d\omega_p, \quad (13.8)$$

где \mathbf{k}_n и \mathbf{k}_p — волновые векторы нейтрона и протона; сечение отнесено к интервалу энергии нейтрона dE_n .

Входящая в интеграл (13.8) волновая функция дейтрона, складывающаяся на бесконечности из плоской волны и сходящейся шаровой волны, имеет следующий вид [40]:

$$\psi_g = v_g^{-1/2} e^{-\pi n_g/2} \times \\ \times \Gamma(1 + in_g) e^{i\mathbf{k}_g \mathbf{r}_g} F(-in_g, 1, i(k_g r_g - \mathbf{k}_g \mathbf{r}_g)),$$

где $v_g = \left(\frac{E}{M}\right)^{1/2}$ — скорость дейтрона, а n_g обозначает величину

$$n_g = \beta \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{1/2} = \frac{2MZe^2}{\hbar^2 k_g} = \frac{Ze^2}{\hbar v_g}, \quad \beta = \frac{Ze^2}{\hbar} \left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{1/2};$$

$\Gamma(z)$ — Γ -функция и $F(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная (конфлюэнтная) гипергеометрическая функция.

Волновая функция протона, нормированная указанным выше образом, и складывающаяся на бесконечности из плоской волны и сходящейся шаровой волны, определяется следующей формулой [40]:

$$\psi_p = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{-\pi n_p/2} \times \\ \times \Gamma(1 - in_p) e^{i\mathbf{k}_p \mathbf{r}_p} F(in_p, 1, -i(k_p r_p + \mathbf{k}_p \mathbf{r}_p)),$$

где

$$n_p = \beta \left(\frac{\varepsilon}{2E_p} \right)^{1/2} = \frac{MZe^2}{\hbar^2 k_p} = \frac{Ze^2}{\hbar v_p}.$$

Подставляя приведённые выше выражения для ψ_g и ψ_p в (13.8), получим следующее выражение для сечения:

$$d\sigma = \frac{N^2 \beta^2 M^2 \varepsilon^2 I_2}{\pi^2 \hbar^5 \operatorname{sh} \pi n_p \operatorname{sh} \pi n_g} \frac{\hbar n}{k_g^2} |J|^2 \times \\ \times e^{-2\pi(n_p + n_g)} dE_n d\alpha_n d\alpha_p, \quad (13.9)$$

где

$$J = \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} F(-in_g, 1, \rho_g) F(-in_p, 1, \rho_p) d\mathbf{r},$$

$$\rho_g = i(k_g \mathbf{r} - \mathbf{k}_g \mathbf{r}), \quad \rho_p = i(k_p \mathbf{r} + \mathbf{k}_p \mathbf{r}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}_g - \mathbf{k}_n - \mathbf{k}_p.$$

Формула (13.9) не содержит ещё никаких предположений об энергиях дейтрона и протона. Мы предположим теперь, что энергия дейтрона (а потому и протона) достаточно мала, так что выполняются условия

$$n_g \equiv \frac{Ze^2}{\hbar v_g} \gg 1, \quad n_p \equiv \frac{Ze^2}{\hbar v_p} \gg 1.$$

При выполнении этих условий (квазиклассическое приближение) интеграл J может быть вычислен [40]; мы получим следующий результат:

$$|J|^2 = \frac{\beta^2 M \varepsilon}{\hbar^2} \frac{64\pi^2}{(k_g + k_p)^6 (k_g - k_p)^2} |F(-in_g, -in_g \eta, 1, \xi)|^2,$$

где параметры гипергеометрической функции равны

$$\eta = \frac{n_p}{n_g}, \quad \xi = -4k_g k_p (k_g - k_p)^{-2} (1 + \xi_1),$$

$$\xi_1 = -\frac{\theta_p^2}{4} + \frac{3(k_p^2 - k_g^2)}{2k_p^2 (k_g - k_p)^2} k_n^2 - \frac{k_n^2 \sin^2 \theta_n}{(k_g - k_p)^2} + \frac{k_n \theta_p \sin \theta_p \cos \varphi}{k_g - k_p}.$$

Здесь $k_g = \frac{2(ME)^{1/2}}{\hbar}$, $k_p = \frac{[2M(E - \varepsilon)]^{1/2}}{\hbar}$; θ_n — угол между векторами \mathbf{k}_n и $-\mathbf{k}_g$, т. е. угол между направлением скорости вылетающего нейтрона и направлением, обратным направлением скорости падающего дейтрона; φ — разность ази-

мутов векторов \mathbf{k}_n и \mathbf{k}_p относительно вектора $-\mathbf{k}_g$ как полярной оси.

При больших n_g справедливо следующее выражение для $|F|^2$:

$$|F(-in, -in\eta, 1, \xi)|^2 = \frac{1}{2\pi |u|^2 |f''(u)| n} \exp\{-2\pi\eta n + nf(u) + nf^*(u^*)\},$$

где $f(u) = i \ln [u^\eta (1-u)^{-\eta} (1-u\xi)^{-1}]$, причём в качестве u должен быть взят корень уравнения $f'(u) = 0$, лежащий в верхней полуплоскости.

Используя приведённые формулы, получим следующее выражение для сечения:

$$d\sigma = \beta^3 \frac{\hbar^2 N^2}{M\varepsilon} \frac{\varepsilon^3 (\varepsilon E_n)^{1/2} dE_n d\theta_n d\theta_p}{2^{1/2} \pi E (E + \varepsilon)^2 [(2E)^{1/2} + (E - \varepsilon)^{1/2}]^2} e^{-\beta\Phi}, \quad (13.10)$$

где

$$\Phi = \Phi_0 + E_n \Phi_1 + E_n \sin^2 \theta_n \cdot \Phi_2 + \theta_p^2 \Phi_3 + \theta_p E_n^{1/2} \sin \theta_n \cos \varphi \cdot \Phi_4,$$

причём

$$\Phi_0(E) = \left(\frac{8\varepsilon}{E - \varepsilon}\right)^{1/2} \arccos\left(\frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon}\right)^{1/2} - 4\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{1/2} \arccos\left(\frac{E}{E + \varepsilon}\right)^{1/2},$$

$$\Phi_1(E) = \frac{(2\varepsilon)^{1/2}}{(E - \varepsilon)^{3/2}} \arccos\left(\frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon}\right)^{1/2} - \frac{2\varepsilon(E - 3\varepsilon)}{(E + \varepsilon)^2 (E - \varepsilon)},$$

$$\Phi_2(E) = 4\varepsilon (E + \varepsilon)^{-2},$$

$$\Phi_3(E) = \varepsilon [(2E)^{1/2} + (E - \varepsilon)^{1/2}]^{-2},$$

$$\Phi_4(E) = 4\varepsilon (E + \varepsilon)^{-1} [(2E)^{1/2} + (E - \varepsilon)^{1/2}]^{-1}.$$

Интегрирование (13.10) по углам приводит к следующей формуле, определяющей распределение нейтронов по энергиям:

$$d\sigma(E_n) = 2\pi^{-1/2} \sigma_p (\beta\Phi_1)^{3/2} E_n^{1/2} e^{-\beta E_n \Phi_1} dE_n, \quad (13.11)$$

где σ_p — полное сечение расщепления дейтрона, получающееся из (13.10) интегрированием по $dE_n, d\theta_n, d\theta_p$:

$$\sigma_p = 4N^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{\hbar^2}{M\varepsilon} \cdot \beta^{1/2} \varepsilon^{3/2} E^{-1} (E + \varepsilon)^{-2} \Phi_1^{-3/2} e^{-\beta\Phi_0}(E). \quad (13.12)$$

Угловое распределение протонов получается путём интегрирования (13.10) по $dE_n d\phi_n$, в результате которого получается

$$d\sigma(\theta_p) = \sigma_p \frac{\beta\Phi_1\Phi_3}{\pi(\Phi_1 + \Phi_2)} \exp\left\{-\beta\theta_p^2 \frac{\Phi_1\Phi_3}{\Phi_1 + \Phi_2}\right\} d\phi_p. \quad (13.13)$$

Мы видим, таким образом, что распределение по углам θ_p оказывается гауссовым с максимумом в направлении, обратном направлению движения дейтрона.

Для численных вычислений величины полного сечения удобно формулу (13.12) представить в виде

$$\sigma_p = Z^{1/2} A(E) 10^{-Zf(E)} \cdot 10^{-26} \text{ см}^2. \quad (13.14)$$

Функции $A(E)$ и $f(E)$ протабулированы в работе [39]. Они имеют следующие значения:

E (MeV)	3,0	3,6	4	5	6	8	10
$A(E)$	0,11	0,29	0,45	0,92	1,5	2,8	4,4
$10f(E)$	1,97	1,08	0,804	0,451	0,292	0,152	0,093

Распределение нейтронов по энергиям содержит экспоненциальный множитель e^{-ZE_n/δ_n} , где $\frac{\delta_n}{Z} = \frac{1}{\beta\Phi_1}$ определяет ширину распределения вылетающих нейтронов по энергиям. Согласно [39] при $E = 3$ MeV $\delta_n = 1,6$ MeV; при $E = 5$ MeV $\delta_n = 15$ MeV; при $E = 10$ MeV $\delta_n = 140$ MeV.

Полученные соотношения справедливы в случае достаточно медленных дейтронов, когда выполняется неравенство $\frac{Ze^2}{\hbar v_g} \gg 1$.

Перейдём теперь к рассмотрению другого предельного случая — расщепления быстрых дейтронов [41]. Предположим, что выполняется условие $\frac{Ze^2}{\hbar v_g} \ll 1$. При выполнении этого условия можно пользоваться теорией возмущений (борновское приближение).

Мы будем рассматривать электростатическую энергию дейтрона в поле ядра как энергию возмущения. В дальнейшем будет удобно пользоваться системой координат, в которой дейтрон как целое покоится, а движется ядро. В этой системе энергия возмущения имеет следующий вид:

$$V = \frac{Ze^2}{[b^2 + (z - vt)^2]^{1/2}},$$

где v — скорость ядра, движущегося вдоль оси z , Ze — его заряд и z и b — проекции радиус-вектора протона на ось z и перпендикуляр к ней.

Мы должны вычислить матричный элемент V , соответствующий переходу из начального состояния, описываемого волновой функцией

$$\psi_0 e^{iE_0 t/\hbar} = L^{-3/2} e^{i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_g / \hbar} u_0(r) e^{iE_0 t/\hbar},$$

в конечное состояние, описываемое функцией

$$\psi_1 e^{iE_1 t/\hbar} = L^{-3/2} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_g / \hbar} u_1(r) e^{iE_1 t/\hbar}.$$

Здесь $L^{-3/2} e^{i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_g / \hbar}$ и $L^{-3/2} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_g / \hbar}$ — волновые функции, описывающие движение центра инерции системы нейтрон + протон до и после расщепления дейтрона ($\mathbf{p}_0 \equiv 0$ и \mathbf{p}_1 — импульсы центра инерции в этих состояниях, \mathbf{r}_g — радиус-вектор центра инерции, L — ребро куба, в котором предполагается находящимся дейтрон), u_0 — волновая функция основного состояния дейтрона, нормированная на объём, u_1 — волновая функция относительного движения нейтрона и протона после расщепления дейтрона, в качестве которой мы возьмём плоскую волну, нормированную на энергию

$$u_1 = \left[\frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3 d\varepsilon_1} \right]^{1/2} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \left[\frac{pM}{2(2\pi\hbar)^3} \right]^{1/2} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \quad (13.15)$$

(\mathbf{p} и ε_1 — импульс и энергия относительного движения, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p$), наконец, E_0 и E_1 — энергии начального и конечного состояний, равные соответственно $-\varepsilon$ и $\varepsilon_1 + \frac{p_1^2}{4M}$.

Дифференциальное сечение расщепления, при котором величины ε_1 и \mathbf{p}_1 находятся в интервалах $d\varepsilon_1$ и $d\mathbf{p}_1$ и вектор \mathbf{p}

лежит в элементе телесного угла $d\Omega_p$, равняется

$$d\sigma = |A|^2 L^2 d\varepsilon_1 d\Omega_p \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 d\mathbf{p}_1, \quad (13.16)$$

где

$$A = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{01} e^{i\omega t} dt,$$

$$V_{01} = \int \psi_0 V \psi_1^* d\mathbf{r} d\mathbf{r}_g, \quad \hbar\omega = E_1 - E_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon + \frac{p_1^2}{4M}.$$

Используя известное представление бесселевой функции $K_0(x)$

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixu}}{(1+u^2)^{1/2}} du,$$

перепишем A в виде

$$A = \frac{2}{L^3} \frac{Ze^2}{\hbar v} I_p I_r,$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_p &= \int d\mathbf{r}_p \exp\left[\frac{i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_p}{\hbar} - \frac{\omega z}{v}\right] K_0\left(\frac{\omega b}{v}\right), \\ I_r &= \int d\mathbf{r} \exp\left[-\frac{i}{2\hbar} \mathbf{p}_1 \mathbf{r}\right] u_0(r) u_1^*(r) \end{aligned} \right\} \quad (13.16')$$

(мы воспользовались тем, что $d\mathbf{r} d\mathbf{r}_g \equiv d\mathbf{r} d\mathbf{r}_p$).

Заметим, что вплоть до энергий дейтрона порядка 200 MeV величина $\frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}{\hbar}$ остаётся малой по сравнению с единицей. Действительно, как будет видно из дальнейшего, величина $p_1 = \hbar q$ меньше $\frac{\hbar}{R}$, где R — радиус ядра; с другой стороны, в (13.16') эффективные значения r не превышают радиуса дейтрона R_g . Поэтому $\frac{p_1 r}{2\hbar}$ меньше $\frac{R_g}{2R}$, что значительно меньше единицы.

Заменяя $e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}/2\hbar}$ на $1 - \frac{i}{2\hbar} \mathbf{p}_1 \mathbf{r}$, легко заключить, что I_r отлично от нуля только в том случае, если конечным состоянием является 3P -состояние. Мы имеем дело с такой же ситуацией, как и при фотоэлектрическом расщеплении дей-

трона. С другой стороны, ясно, что вместо функции, описывающей свободное движение частиц с моментом $l = 1$, можно пользоваться плоской волной, что мы и будем делать.

Подставляя в интеграл, определяющий I_p , выражение (13.15)

и замечая, что $u_0 = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{-\alpha r}}{r}$, получим:

$$I_r = -ip_1 \frac{2^{-1/2}}{\pi} M^{-1/2} \frac{(\epsilon_0 \epsilon_1^3)^{1/4}}{(\epsilon_0 + \epsilon_1)^2} \cos \gamma,$$

где γ — угол между векторами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p} .

Чтобы вычислить I_p , заметим, что

$$\int \int K_0\left(\frac{\omega b}{v}\right) e^{iqb \cos \chi} b db d\chi = \frac{2\pi}{q^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2}. \quad (13.16'')$$

Поэтому

$$I_p = \frac{2\pi}{q_{\perp}^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dz e^{iz\left(q_z - \frac{\omega}{v}\right)} = \frac{4\pi}{q_{\perp}^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2} \frac{\sin\left(q_z - \frac{\omega}{v}\right) \frac{L}{2}}{q_z - \frac{\omega}{v}},$$

где q_z и q_{\perp} — составляющие вектора $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{p}_1}{\hbar}$ вдоль оси z и перпендикулярна к ней. При $L \rightarrow \infty$ I_p отлично от нуля, если выполняется условие $q_z = \frac{\omega}{v}$. Поэтому $q_{\perp}^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = q^2$ и

$$I_p = \frac{4\pi}{q^2} \frac{\sin\left(q_z - \frac{\omega}{v}\right) \frac{L}{2}}{q_z - \frac{\omega}{v}}.$$

Итак,

$$d\sigma = 32 \left(\frac{Ze^2}{\hbar v}\right)^2 \frac{\hbar^4}{Mp_1^2} (\epsilon_0 \epsilon_1^3)^{1/4} \frac{\cos^2 \gamma}{(\epsilon_0 + \epsilon_1)^4} \times \\ \times \frac{\sin^2\left(q_z - \frac{\omega}{v}\right) \frac{L}{2}}{L\left(q_z - \frac{\omega}{v}\right)^2} dq d\epsilon_1 d\phi_p. \quad (13.17)$$

Проинтегрируем это выражение по dq . Вводя полярные углы векторов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p} (относительно оси z) θ и θ_p и интегрируя сперва по q , получим:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \gamma \frac{\sin^2 \left(q_z - \frac{\omega}{v} \right) \frac{L}{2}}{q^2 \left(q_z - \frac{\omega}{v} \right)^2} dq &= \\ &= L\pi^2 \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \left[\cos^2 \theta_p \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_p \sin^2 \theta \right] d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 L \left\{ \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta_p - 1) \cos^2 \theta + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta_p \ln \cos \theta \right\} \Big|_{(\cos \theta)_{\min}}^1 \quad (13.17') \end{aligned}$$

Чтобы выяснить смысл величины $(\cos \theta)_{\min}$, заметим, что при $L \rightarrow \infty$ область интегрирования в (13.17') по q сводится к точке

$$q = \frac{\omega}{v \cos \theta}.$$

С другой стороны, мы должны считать величину q ограниченной, так как очень большим q отвечают, согласно (13.16''), малые значения параметра столкновения b , который по самому смыслу задачи не может быть меньше некоторой величины порядка радиуса ядра R ; действительно, при меньших значениях параметра b мы имеем дело уже не с «электрическими», а с чисто «ядерными» соударениями дейтрона и ядра, не связанными с действующими на далёкие расстояния электрическими силами. Такие тесные ядерные столкновения мы рассмотрим в следующем параграфе, в настоящем же параграфе, рассматривая электрическое расщепление дейтрона, мы должны считать, что q ограничено, причём максимальное значение q по порядку величины равно $q_{\max} \sim R^{-1}$. Так как

$$\hbar \omega = \varepsilon + \varepsilon_1 + \frac{p_1^2}{4M} \approx \varepsilon + \varepsilon_1, \text{ то отсюда следует, что}$$

$$(\cos \theta)_{\min} \equiv \frac{1}{\eta} \approx \frac{\omega R}{v} \approx \frac{(\varepsilon + \varepsilon_1) R}{\hbar v}.$$

Используя это соотношение вместе с формулой (13.17'), получим следующее выражение для дифференциального сечения расщепления дейтрона

$$d\sigma = \frac{2}{\pi} \frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{Ze^2}{\hbar v} \right)^2 \frac{(\varepsilon \varepsilon_1^3)^{1/2}}{(\varepsilon + \varepsilon_1)^4} d\varepsilon_1 d\theta_p \times \\ \times \left[\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta_p - 1) (1 - \eta^{-2}) + \sin^2 \theta_p \ln \eta \right]. \quad (13.18)$$

Интегрируя (13.18) по углам, найдём распределение продуктов расщепления по энергиям ε_1 :

$$d\sigma = \frac{16}{3} \left(\frac{Ze^2}{\hbar v} \right)^2 \frac{\hbar^2}{M} \frac{(\varepsilon \varepsilon_1^3)^{1/2}}{(\varepsilon + \varepsilon_1)^4} \ln \frac{\hbar v}{(\varepsilon + \varepsilon_1) R_1} d\varepsilon_1. \quad (13.19)$$

Так как верхний предел для q определён только по порядку величины, то (13.19) имеет смысл в том случае, если под знаком логарифма стоит большое число. Это условие выполняется при больших энергиях дейтрона.

Формулы (13.18) и (13.19) относятся к системе координат, в которой движется ядро и покоится дейтрон; если перейти к лабораторной системе координат, в которой движется дейтрон, то мы получим следующий результат^[41]:

$$d\sigma = 16 \left(\frac{Ze^2}{\hbar v} \right)^2 \frac{\hbar^2}{M} \frac{(\varepsilon \varepsilon_1^3)^{1/2}}{(\varepsilon + \varepsilon_1)^4} \frac{\mu T}{v (M\varepsilon)^{1/2}} (1 + \xi) \times \\ \times \left[\frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) (1 - \eta^{-2}) + \sin^2 \vartheta \ln \eta \right] d\mu dT, \quad (13.20)$$

где μ — косинус угла, образуемого импульсом вылетающей частицы с импульсом дейтрона, T — кинетическая энергия этой частицы, равная $E - Mc^2$ (E — полная энергия частицы),

$$\xi = \frac{T_0}{2Mc^2}, \quad T_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{2Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 2Mc^2 \right),$$

$$\varepsilon_1 = 2T(1 - \mu^2)(1 + \xi) + \frac{1 + 3\xi}{2T_0} \left(T_0 - T - \frac{1}{2} \varepsilon \right)^2,$$

$$\cos \vartheta = \frac{T_0 - T - \frac{\varepsilon}{2}}{(2\varepsilon_1 T_0)^{1/2}} \left(1 + \frac{3}{2} \xi \right)$$

(заметим, что сумма энергий протона и нейтрона после расщепления дейтрона равна $E_n + E_p = \frac{2Mc^2 - \varepsilon}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$).

Численное интегрирование дифференциального сечения (13.20) приводит к выводу, что нейтроны вылетают в узком интервале углов, составляющем примерно 4° при энергии дейтронов, равной 185 MeV; распределение по энергиям вылетающих частиц имеет два максимума, соответствующих энергиям 75 MeV и 125 MeV.

Интегральное сечение расщепления дейтронов с энергией в 185 MeV равно $\sigma \approx 1,35 \cdot 10^{-29} Z^2 \text{ см}^2$; при энергии в 200 MeV оно равно $\sigma \approx 2 \cdot 10^{-29} Z^2 \text{ см}^2$.

В следующем параграфе будет показано, что расщепление дейтронов, обусловленное кулоновским полем ядра, представляет собой менее существенный эффект, чем расщепление, вызываемое непосредственным столкновением дейтрона с ядром.

§ 14. Расщепление быстрого дейтрона при столкновении с ядром

Наряду с расщеплением дейтрона, вызываемым кулоновским полем ядра, расщепление дейтрона может произойти также благодаря столкновению его с ядром. Это явление происходит следующим образом. Быстрый дейтрон, проходя мимо ядра, может «задеть» за ядро протоном, нейтрон же может при этом пройти вне ядра. Это приведёт к тому, что протон будет «содран» ядром, а нейтрон будет продолжать свой путь вне ядра. Таким образом, могут быть получены быстрые нейтроны, энергия которых составляет примерно половину первоначальной энергии дейтрона. Если ядра коснётся нейтрон, а протон пройдёт вне ядра, то «содранным» окажется нейтрон. Мы получим при этом быстрый протон с энергией, также примерно равной половине первоначальной энергии дейтрона [42].

Сечение для такого процесса «сдирания» для лёгких и средних ядер оказывается значительно большим сечения расщепления быстрого дейтрона в кулоновском поле ядра. Только

в случае самых тяжёлых ядер оба эффекта играют примерно одинаковую роль.

Особенности реакции «сдириания» связаны с тем фактом, что дейтрон является слабо связанной системой, в которой нейтрон и протон проводят значительное время вне области действия ядерных сил. Если энергия дейтрона значительно больше его энергии связи, то время соударения протона с ядерной частицей будет малым по сравнению с периодом относительного движения нейтрона и протона в дейтроне. В этих условиях импульс, переданный протону, будет значительно больше импульса относительного движения; поэтому протон будет «содран» мгновенно, нейтрон же, не испытав реакции, будет продолжать двигаться с импульсом, который он имел в начале столкновения. Этот импульс равен, очевидно, сумме импульса центра инерции дейтрона и импульса, связанного с движением нейтрона внутри дейтрона. Первый из этих импульсов равен $p_0 = (ME_g)^{1/2}$, где E_g — кинетическая энергия дейтрона, второй импульс по порядку величины равен $p_1 = (Me)^{1/2}$. Можно утверждать, что энергия освобождённого благодаря «сдирианию» нейтрона будет находиться в интервале

$$E_n = \frac{(p_0 \pm p_1)^2}{2M} \sim \frac{1}{2} E_g \left[1 \pm 2 \left(\frac{\varepsilon}{E_g} \right)^{1/2} \right];$$

при $E_g = 190$ MeV ширина этого интервала составляет 40 MeV. Нейтроны будут двигаться в основном в направлении первоначального пучка дейтронов; угол разлёта составляет примерно $\theta \sim \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\varepsilon}{E_g} \right)^{1/2}$, что даёт при $E_g = 190$ MeV $\theta \sim 6^\circ$.

Таким образом, в результате реакции расщепления дейтрона получается узкий, хорошо коллимированный пучок нейтронов, энергия которых равна примерно половине энергии дейтрона.

Аналогичные соотношения имеют место также для освобождающихся протонов.

Оценим величину вероятности процесса «сдириания» [42]. Прежде всего заметим, что в случае достаточно быстрого дейтрона можно пренебречь отклонением нейтрона от направления первоначального движения дейтрона. Действительно, если предполагать, что протон, попадая в область ядра, на-

ходится от края ядра на расстоянии порядка «радиуса дейтрона» R_g $\left[R_g = \frac{1}{2} \hbar (M\varepsilon)^{-1/2} = 2,1 \cdot 10^{-13} \text{ см} \right]$, и считать, что радиус ядра R значительно больше R_g , то расстояние, которое проходит в ядре протон, будет по порядку величины равно $l \sim \sqrt{2RR_g}$. Такое расстояние нейтрон проходит за время l/v (v — скорость дейтрона). Скорость нейтрона в направлении, перпендикулярном к первоначальному направлению дейтрона, по порядку величины равна $\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/2} \frac{l}{v}$, поэтому смещение нейтрона в перпендикулярном направлении по порядку величины равно $\xi \approx \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/2} \frac{l}{v}$. Это смещение можно не учитывать, если оно значительно меньше R_g . Легко видеть, что $\xi \ll R_g$, если $E_g \gg 2 \frac{R}{R_g} \varepsilon$.

Если это неравенство выполняется (E_g должно быть больше 20 MeV для самых тяжёлых ядер), то при определении сечения достаточно рассматривать только проекции положений нейтрона и протона на плоскость, перпендикулярную направлению движения дейтрона. Мы должны при этом найти вероятность того, что при столкновении дейтрона с ядром протон (его проекция) попадёт в площадь круга радиуса R , а нейтрон (его проекция) будет находиться вне этого круга.

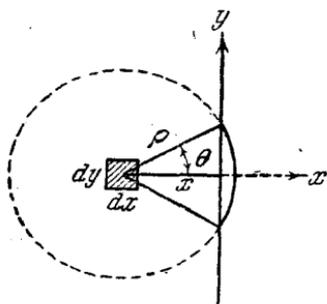


Рис. 8.

Рассмотрим столкновение, при котором расстояние между нейтроном и протоном равно ρ . Будем считать, что радиус ядра R значительно больше радиуса дейтрона; при этом можно пренебречь кривизной края ядра и считать границу ядра плоской (рис. 8). Пусть ось y направлена вдоль края ядра, а ось x — перпендикулярна к краю (ось z имеет направление движения дейтрона). Тогда вероятность того, что протон по-

падёт в заштрихованную площадку, вернее говоря, сечение этого процесса будет равно $dx dy$. Вероятность того, что нейтрон будет при этом находиться вне ядра, равна от-

ношению дуги окружности радиуса ρ , лежащей вне ядра, ко всей окружности, т. е. равна θ/π . Итак, интересующее нас сечение равно

$$\sigma(\rho) = \int \int \frac{\theta}{\pi} dx dy.$$

Замечая, что $x = \rho \cos \theta$, $dx = -\rho \sin \theta d\theta$ и выполнив интегрирование по dy , которое даёт просто $2\pi R$, найдём:

$$\sigma(\rho) = 2R\rho \int_0^{\pi/2} \theta \sin \theta d\theta = 2\rho R. \quad (14.1)$$

Мы получили сечение для интересующего нас процесса при заданном ρ . Это сечение следует ещё усреднить по всем ρ . Если $\psi_g(\mathbf{r})$ — дейтронная волновая функция, то вероятность того, что расстояние между проекциями частиц лежит в интервале $d\rho$, равна

$$2\pi\rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_g(\mathbf{r})|^2 dz.$$

Поэтому полное усреднённое сечение процесса расщепления равно

$$\sigma = 4\pi R \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\infty} \rho^2 |\psi_g(\mathbf{r})|^2 d\rho.$$

Переходя от переменной z к переменной r ($r^2 = \rho^2 + z^2$), получим:

$$\sigma = 8\pi R \int_0^{\infty} |\psi_g(\mathbf{r})|^2 r dr \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}.$$

Интеграл по ρ равен $\frac{\pi}{4} r^2$, поэтому

$$\sigma = 2\pi^2 R \int_0^{\infty} |\psi_g(\mathbf{r})|^2 r^3 dr = \frac{\pi}{2} R \int r |\psi_g(\mathbf{r})|^2 d\bar{r}$$

($d\bar{r} = 4\pi r^2 dr$).

Последний интеграл имеет простой физический смысл: это среднее расстояние между нейтроном и протоном в дейтроне. Обозначая его через R_g , представим σ в виде

$$\sigma = \frac{\pi}{2} R R_g. \quad (14.2)$$

Если считать, что ψ_g имеет вид

$$\psi_g = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{-\alpha r}}{r},$$

где

$$\alpha = \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{\hbar},$$

то величина R_g будет равна

$$R_g = \frac{1}{2\alpha} = 2,1 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Полагая R равным $1,5A^{1/3} 10^{-13}$ см, мы получим:

$$\sigma = 5A^{1/3} 10^{-26} \text{ см}^2. \quad (14.3)$$

Эта величина для всех ядер, кроме самых тяжёлых, гораздо больше сечения расщепления дейтронов в кулоновском поле ядра.

Заметим, что такой же формулой определяется сечение процесса, при котором нейтрон застревает в ядре, а протон проходит мимо ядра.

Остановимся теперь на вопросе об угловом и энергетическом распределении нейтронов, возникающих в результате реакции расщепления дейтрона. Мы будем рассматривать два предельных случая, считая в одном случае ядро «прозрачным» для частиц, а в другом «непрозрачным». Оба эти случая не реализуются, конечно, в действительности, но рассмотрение их представляет интерес в том отношении, что угловые распределения, получающиеся в обоих случаях, мало отличаются друг от друга, поэтому можно считать, что получающееся распределение близко к истинному.

В случае «прозрачного» ядра мы считаем его радиус R малым по сравнению с радиусом дейтрона R_g ; в случае «непрозрачного» ядра $R \gg R_g$. Ясно, что первый случай не соответствует предположениям, которые мы делали выше при определении сечения расщепления. Тем не менее для выясне-

ния характера углового распределения представляет интерес рассмотреть и этот случай.

Выясним вопрос о распределении возникающих нейтронов по импульсам. В случае «прозрачного» ядра это распределение будет таким же, как и в самом дейтроне; наличие ядра, в котором застревает протон, никак не будет сказываться на распределении.

Вероятность того, что импульс нейтрона в дейтроне равен \mathbf{p} (точнее лежит в интервале $d\mathbf{p}$), определяется формулой

$$P(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = |\psi(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p}, \quad (14.4)$$

где

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\hbar^{3/2}} \int \psi_g(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}.$$

Подставляя сюда вместо ψ_g волновую функцию основного состояния дейтрона, получим:

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \frac{(M\varepsilon)^{1/4}}{M\varepsilon + p^2}, \quad P(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi^2} \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{(M\varepsilon + p^2)^2}. \quad (14.5)$$

Чтобы найти импульс освобождающегося нейтрона, нужно к вектору \mathbf{p} прибавить импульс, связанный с движением центра инерции дейтрона. Это значит, что, не изменяя p_x и p_y , нужно к p_z прибавить величину

$$p_0 = \sqrt{ME_g} \left(1 + \frac{E_g}{8Mc^2} \right)$$

(второй член в скобках — малая релятивистская поправка).

Если p_{\perp} — проекция \mathbf{p} в направлении, перпендикулярном к оси z , то угол вылета нейтрона (по отношению к пучку дейтронов) равен, очевидно,

$$\theta = \frac{p_{\perp}}{p_0}$$

(в знаменателе мы пренебрегли величиной p_z , которая мала по сравнению с p_0).

Вероятность того, что p_{\perp} лежит между p_{\perp} и $p_{\perp} + dp_{\perp}$, равна, очевидно,

$$P(p_{\perp}) 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} = 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(M\varepsilon)^{1/2} dp_z}{\pi^2 (M\varepsilon + p_{\perp}^2 + p_z^2)^2} = \\ = \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{2\pi (M\varepsilon + p_{\perp}^2)^{3/2}} 2\pi p_{\perp} dp_{\perp}. \quad (14.6)$$

Выразив p_{\perp} через θ , мы получим угловое распределение освобождающихся нейтронов:

$$P(\theta) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta_0}{(\theta_0^2 + \theta^2)^{3/2}} d\Omega, \quad (14.7)$$

где

$$\theta_0 = \left(\frac{\varepsilon}{E_g}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{E_g}{8Mc^2}\right] \approx \left(\frac{\varepsilon}{E_g}\right)^{1/2} \quad (14.7')$$

и

$$d\Omega = 2\pi\theta d\theta.$$

Мы видим, что нейтроны в основном движутся в конусе, ось которого совпадает с направлением первоначального пучка дейтронов и угол раствора которого по порядку величины равен $\theta_0 \sim \left(\frac{\varepsilon}{E_g}\right)^{1/2}$, что составляет около 6° для дейтронов с энергией в 190 MeV (точнее говоря, ширина углового распределения составляет $1,54\theta_0$).

Энергия освобождающегося нейтрона равна

$$E = \frac{1}{2M} [(p_0 + p_z)^2 + p_{\perp}^2] = \frac{1}{2M} [p_0^2 + 2p_0 p_z + p^2].$$

Так как $p_0 \gg p$, то

$$E \approx \frac{1}{2} E_g + \sqrt{\frac{E_g}{M}} p_z. \quad (14.7'')$$

Отсюда видно, что распределение по энергиям определяется распределением по проекциям импульса на ось z . Распределение по p_z согласно (14.4) и (14.5) имеет вид

$$P(p_z) dp_z = \frac{2}{\pi} dp_z \int_0^{\infty} \frac{(M\varepsilon)^{1/2} p_{\perp} dp_{\perp}}{(M\varepsilon + p_{\perp}^2 + p_z^2)^2} = \frac{(M\varepsilon)^{1/2} dp_z}{\pi (M\varepsilon + p_z^2)} \quad (14.8)$$

Выразив здесь p_z через E , найдём распределение нейтронов по энергиям:

$$P(E) dE = \frac{\sqrt{\varepsilon E_g} dE}{\pi \left[\left(E - \frac{1}{2} E_g \right)^2 + \varepsilon E_g \right]}. \quad (14.9)$$

Мы видим, что центром распределения является значение энергии $E_0 = \frac{1}{2} E_g$; ширина распределения равна $2\sqrt{\varepsilon E_g}$, что составляет 41 MeV при энергии дейтронов в 190 MeV.

Определим теперь угловое распределение нейтронов в случае «непрозрачного» ядра, когда $R \gg R_g$. В этом случае границу ядра можно считать плоской (см. рис. 8). Нас интересуют такие столкновения дейтрона с ядром, при которых проекция положения протона попадает в область ядра, а проекция нейтрона лежит вне ядра, т. е. $x_p < 0$ и $x_n > 0$ (индексы p и n относятся соответственно к протону и нейтрону).

Возникает своеобразная диффракционная задача, в которой для учёта наличия ядра мы будем считать, что волновая функция ψ отлична от нуля только в тех случаях, когда $x_n > 0$, $x_p < 0$, и имеет при этом следующий вид:

$$\psi = \psi_g(r) \frac{1}{L}, \quad (14.10)$$

где $\psi_g(r)$ — нормированная волновая функция, описывающая внутреннее движение дейтрона, а L — ребро куба, в котором предполагается находящимся дейтрон.

Мы не выписали в (14.10) множителя $L^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} p_z Z}$, описывающего движение центра инерции дейтрона, так как нас интересуют только проекции положений нейтрона и протона на плоскость, перпендикулярную к оси z , вдоль которой движется дейтрон.

Величина $|\psi|^2 dr dX dY$ представляет собой нормированную вероятность того, что r , X , Y находятся в интервалах dr , dX , dY (X , Y , Z — координаты центра инерции дейтрона).

Будем считать независимыми переменными функции ψ величины x_n , x_p , y , z , Y ($y = y_n - y_p$, $z = z_n - z_p$). Так же, как и в случае «прозрачного» ядра, мы перейдём от волновой функции (14.10) в обычном пространстве к волновой функции

в пространстве импульсов. Этот переход совершается с помощью преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \psi(p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y) &= \\ &= L^{-1} h^{-2} \int_0^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^0 dx_p \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \times \\ &\times \psi(x_n - x_p, y, z) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_{nx}x_n + p_{px}x_p + p_y y + p_z z)} \end{aligned} \quad (14.11)$$

(p_{nx} и p_{px} — проекции на ось x импульсов нейтрона и протона).

Интегрирование по y и z не отличается здесь от соответствующего интегрирования при выводе формулы (14.5) для $\psi(\mathbf{p})$. Если ввести функцию

$$\begin{aligned} \psi(p_y, p_z, x_n - x_p) &= \\ &= h^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(p'_x, p_y, p_z) e^{\frac{i}{\hbar} p'_x (x_n - x_p)} dp'_x, \end{aligned} \quad (14.11')$$

то (14.11) представится в виде

$$\begin{aligned} \psi(p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y) &= \\ &= L^{-1} h^{-1} \int_0^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^0 dx_p \psi(p_y, p_z, x_n - x_p) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_{nx}x_n + p_{px}x_p)} = \\ &= -\hbar^{1/2} (2\pi)^{-3/2} L^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(p'_x, p_y, p_z)}{(p'_x - p_{px})(p'_x + p_{px})} dp'_x. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Чтобы устранить полюсы в знаменателе подынтегральной функции, мы деформируем контур интегрирования в верхнюю полуплоскость. Замечая, что в верхней полуплоскости есть только один полюс функции $\psi(p'_x, p_y, p_z)$, определяемой (14.5), получим по теореме о вычетах:

$$\psi(p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y) = \frac{1}{L} \frac{\hbar^{1/2} (M\varepsilon)^{1/4}}{(2\pi)^{3/2} P(p_x - iP)(p_x + iP)_p}, \quad (14.13)$$

где

$$P = (M\varepsilon + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}.$$

Заметим, что $|\psi(p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y)|^2 dp_{nx} dp_{px} dp_y dp_z dY$ представляет собой пронормированную вероятность нахождения величин $p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y$ в соответствующих интервалах.

Вероятность того, что импульс нейтрона лежит в интервале $d\mathbf{p}$, а величина Y — в интервале dY , равна

$$\begin{aligned} P(\mathbf{p}) d\mathbf{p} dY &= d\mathbf{p} dY \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y)|^2 dp_{px} = \\ &= \frac{\hbar}{8\pi^2 L^2} \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{P^3 (p_x^2 + p_z^2)} dY d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (14.14)$$

Если разделить эту величину на число дейтронов, падающих на единицу площади, т. е. на $\frac{1}{L^2}$, то мы получим дифференциальное сечение процесса, отнесённое к элементу длины периферии ядра dY . Вводя угол φ , определяющий положение точки на периферии ядра, и замечая, что $dY = R d\varphi$, $p_x = p_{\perp} \cos \varphi$, $p_y = p_{\perp} \sin \varphi$, найдём, интегрируя (14.14) по $d\varphi$, следующее выражение для дифференциального сечения процесса, при котором импульс нейтрона лежит в интервале $d\mathbf{p}$:

$$d\sigma = \frac{\hbar (M\varepsilon)^{1/2} R d\mathbf{p}}{8\pi^2 (M\varepsilon + p^2)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(M\varepsilon + p_x^2 + p_z^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (14.15)$$

Для получения углового распределения нейтронов нужно это выражение проинтегрировать по dp_z . Выполнив интегрирование, получим:

$$d\sigma = \frac{RR_g}{\pi(1 + \zeta^2)^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2\zeta^2} [(1 + \zeta^2) \arctg \zeta - \zeta] \right\} d\Omega_{\zeta}, \quad (14.16)$$

где

$$\zeta = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{p_{\perp}}{p_0}, \quad d\Omega_{\zeta} = 2\pi \zeta d\zeta.$$

Если проинтегрировать это выражение по $d\Omega_{\zeta}$, то мы получим $\frac{\pi}{2} RR_g$, т. е. величину полного сечения.

Формула (14.16), относящаяся к случаю «непрозрачного» ядра, отличается от формулы (14.7) для случая «прозрачного» ядра множителем в фигурных скобках. Вычисления,

проведённые по обеим формулам, приводят к очень близким результатам, что уже отмечалось выше.

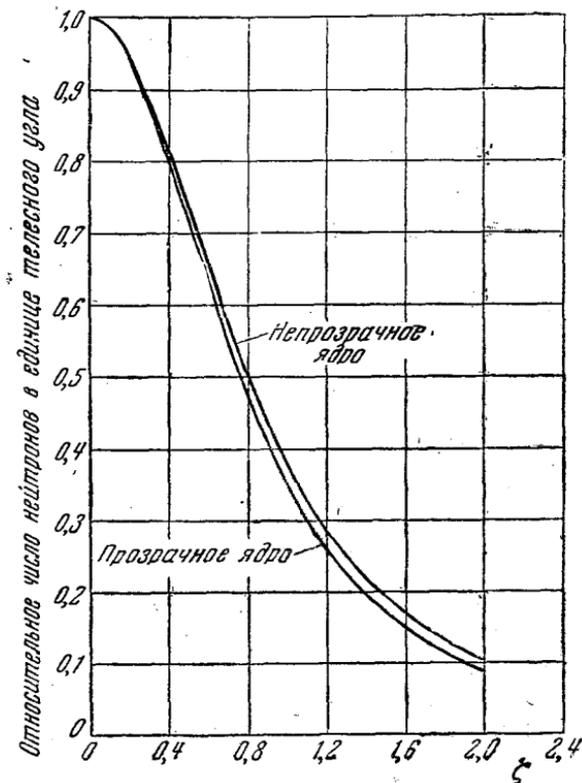


Рис. 9.

Чтобы найти распределение нейтронов по энергиям, нужно проинтегрировать (14.15) по $p_{\perp} dp_{\perp}$ и воспользоваться (14.7"). В результате получим:

$$d\sigma = \frac{1}{4} \pi R R_g \frac{\varepsilon E_g dE}{\left[\left(E - \frac{1}{2} E_g \right)^2 + \varepsilon E_g \right]^{3/2}} \quad (14.17)$$

Это распределение несколько отличается от распределения (14.9), относящегося к «прозрачному» ядру [ширина рас-

предела (14.17) уже, чем ширина (14.9); для $E_g = 190 \text{ MeV}$ ширина (14.17) составляет 31 MeV].

На рис. 9 и 10 [42] изображено распределение нейтронов по углам и энергиям для обоих предельных случаев «прозрачного» и «непрозрачного» ядер, когда энергия дейтронов равна 190 MeV; мы видим, что кривые, относящиеся к обоим случаям, расположены довольно близко друг от друга (особенно это относится к кривым, характеризующим угловое распределение).

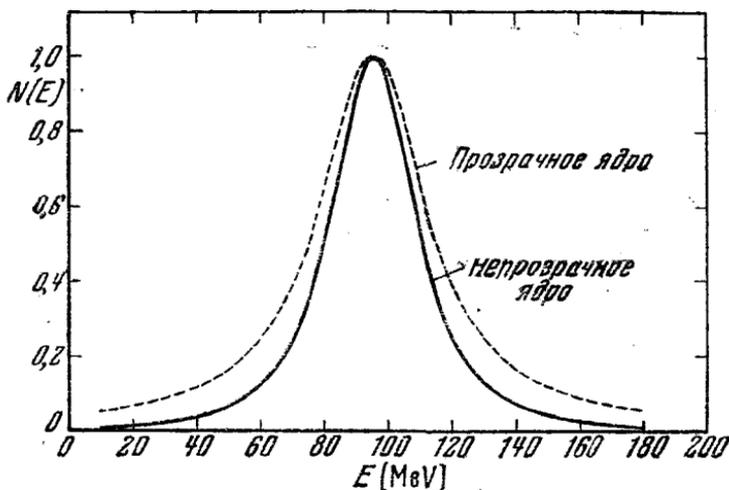


Рис. 10.

Следует, однако, подчеркнуть, что рассмотренные предельные случаи могут служить главным образом для качественной характеристики явления; так как оба случая приводят к близким результатам, то можно полагать, что полученные результаты близки к истинным.

ГЛАВА II

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЯЖЁЛЫХ ЯДЕР

§ 15. Составное ядро

В предыдущей главе мы рассмотрели свойства дейтрона— простейшей ядерной системы, состоящей из двух частиц. Мы видели, что для описания многих процессов, происходящих в системе нейтрон + протон в области малых энергий, не требуется детальной теории ядерных сил.

Оказывается, что ряд свойств ядерных реакций, происходящих с тяжёлыми ядрами при сравнительно небольших энергиях, можно описать также без детальной теории ядерных сил. Это связано с возможностью применения при изучении свойств тяжёлых ядер, содержащих большое число сильно взаимодействующих частиц, методов статистической физики *).

Для того чтобы выяснить особенности протекания ядерных реакций, в которых участвуют тяжёлые ядра, сравним между собой атомные и ядерные столкновения.

В том хорошо изученном случае, когда энергия взаимодействия падающей частицы (скажем, электрона) с отдельными электронами атома мала по сравнению с энергией самой частицы, передача энергии от частицы атомному электрону представляет собой довольно редкое явление. Наиболее вероятным будет прохождение частиц через атом без потери энергии, или, иначе говоря, упругое рассеяние частиц.

*) Рассматриваемым ниже вопросам посвящены работы Н. Бора [43, 44], Л. Ландау [45], Я. Френкеля [46], а также ряд работ других авторов [47—49]. Мы излагаем далее основные результаты этих работ.

С малой величиной взаимодействия связана малая величина ускорения падающей частицы. Поэтому время, в течение которого частица находится в области атома, будет по порядку величины равно частному от деления радиуса атома на скорость частицы. Так как и ускорение и это время невелики, то процессы излучения при атомных столкновениях в общем мало вероятны.

Благодаря наличию в атоме тяжёлого ядра мы можем считать, что при атомных столкновениях падающая частица движется в некотором поле атома, т. е. рассматривать столкновение как задачу одного тела.

Иные соотношения имеют место при ядерных столкновениях, происходящих с участием частиц, энергия которых значительно меньше энергии связи атомных ядер.

Наиболее существенным является то обстоятельство, что взаимодействие между сталкивающейся частицей и ядром очень велико. Энергия этого взаимодействия того же порядка величины, что и энергия взаимодействия между отдельными частицами, образующими ядро. По этой причине ядерное столкновение, в отличие от атомного столкновения, является существенно задачей многих тел (это утверждение не относится к случаю очень быстрых падающих частиц, энергия которых превосходит энергию ядерного взаимодействия).

Сильное взаимодействие между сталкивающейся частицей и ядром приводит к тому, что очень скоро после соприкосновения с ядром падающая частица теряет значительную часть своей энергии, которая передаётся другим частицам, составляющим исходное ядро.

Это распределение энергии, сосредоточенной вначале на падающей частице, между всеми имеющимися частицами ядра таково, что ни одна из них, вообще говоря, не будет обладать достаточной энергией, чтобы преодолеть ядерные силы притяжения и сразу покинуть образовавшуюся систему — исходное ядро + падающая частица. Только по прошествии длительного времени, когда благодаря флуктуации какая-либо частица приобретает достаточную энергию, чтобы преодолеть силы притяжения, действующие на неё со стороны остальных частиц, она сможет покинуть ядро.

Мы приходим, следовательно, к весьма важному выводу: сталкивающуюся частицу и ядро можно рассматривать как

единую квантовомеханическую систему, которая существует, не распадаясь, в течение длительного времени, если измерять последнее в характерной ядерной шкале. Это значит, что время жизни системы значительно больше того времени, в течение которого сталкивающаяся с ядром частица может пройти расстояние порядка размеров ядра, не задерживаясь в последнем. Если считать скорость частицы порядка $4 \cdot 10^9$ см/сек. и размеры ядра порядка 10^{-13} см, то «характерное ядерное время» будет порядка 10^{-22} сек.

В течение времени существования рассматриваемой системы свойства её не отличаются от свойств обычных ядер, находящихся в сильно возбуждённых состояниях. Поэтому принято называть систему ядро + падающая частица составным или промежуточным ядром.

Следует подчеркнуть, что составное ядро находится в состоянии с положительной энергией; иными словами, энергия этой системы превосходит энергию, необходимую для отрыва от составленного ядра, по крайней мере некоторых из частиц, входящих в его состав.

Выше мы говорили, что только по прошествии длительного времени энергия возбуждения составного ядра может случайно сосредоточиться на какой-либо частице, которая сможет поэтому покинуть составное ядро. При этом совсем не обязательно, чтобы вылетевшая из составного ядра частица была того же сорта, что и первоначальная частица, приведшая к образованию этого ядра. Напротив, вообще говоря, мало вероятно, чтобы природа обеих частиц была одинаковой, так как имеется много возможностей распада составного ядра. Ещё менее вероятно, чтобы при одинаковой природе налетающей и вылетающей частиц внутреннее состояние ядра не менялось; более вероятно, что оставшееся после вылета частицы ядро будет находиться в возбуждённом состоянии.

Если вылетающая частица того же сорта, что и падающая, и внутренние состояния начального ядра и ядра, остающегося после распада составного ядра, совпадают, то мы имеем дело с упругим рассеянием частиц. Можно сказать, что упругое рассеяние представляет собой сравнительно редкое событие при ядерных столкновениях, так как распад составного ядра может происходить, вообще говоря, различными способами, при которых вылетающая частица отли-

чается по своей природе от падающей частицы, а остающееся (остаточное) ядро находится в возбужденном состоянии. Следует, однако, отметить, что в некоторых случаях упругое рассеяние будет наиболее вероятным (см. § 27).

Если падающая и вылетающая частицы одной природы, но исходное и образующееся ядра обладают различной энергией, то говорят о неупругом рассеянии частиц. Если частицы отличаются по своей природе, то говорят о ядерном превращении. При ядерных столкновениях оба типа процессов играют существенную роль.

Процессы излучения в ряде случаев играют существенную роль при ядерных столкновениях. Это связано с тем, что для вылета γ -кванта требуется меньшая концентрация энергии, чем для вылета других частиц; γ -квант может унести с собой меньше энергии, чем вылетающая из ядра частица. Поэтому при малых энергиях возбуждения время жизни составного ядра определяется главным образом взаимодействием ядерных частиц с излучением, хотя это взаимодействие и невелико (в силу малости постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c$ и малости отношения v/c , где v — скорость ядерных частиц, а c — скорость света). Отсюда следует, что время жизни составного ядра с небольшой энергией возбуждения (которая лишь немного превышает энергию связи нейтрона или протона в ядре) очень велико по сравнению с характерным ядерным временем. Например, время жизни возбужденных ядер Cr^{52} , излучающих γ -кванты с энергией $\sim 1 \text{ MeV}$, составляет около $0,65 \times 10^{-13} \text{ сек.}$, что примерно в 10^7 — 10^8 раз превосходит характерное ядерное время.

Усилению роли процессов излучения при ядерных столкновениях по сравнению с атомными столкновениями содействует также «запутывание» частицы в ядре, благодаря чему время, которое проводит падающая частица в ядре, оказывается относительно большим по сравнению с характерным ядерным временем.

Итак, ядерные столкновения характеризуются сравнительно малым упругим рассеянием; существенную роль играют процессы ядерных превращений и неупругого рассеяния, а также процессы излучения.

Изложенные выше особенности ядерных столкновений были впервые разъяснены Бором [43, 44], который показал, что в ядерном столкновении следует различать две стадии:

образование квазистационарного, долго живущего составного ядра и распад последнего. Иными словами, ядерное столкновение происходит согласно схеме:

начальное ядро + падающая частица → составное ядро → остаточное ядро + вылетающая частица.

Поскольку взаимодействие между частицами в составном ядре чрезвычайно велико, вторая стадия (распад составного ядра) должна рассматриваться как отдельное событие, не зависящее от первой стадии — образования составного ядра, т. е. «запутывания» падающей частицы в ядерном веществе. Конечный результат ядерного столкновения определяется соревнованием между различными возможными процессами распада составного ядра, совместимыми с общими законами сохранения.

Для того чтобы понятие составного ядра как квазистационарной системы имело смысл, необходимо, очевидно, предполагать достаточно большим общее число частиц, между которыми распределяется энергия, вначале связанная с падающей частицей.

Что касается энергии падающей частицы, то она не должна быть слишком большой, так как в области больших энергий ядро становится «прозрачным» для частиц. Понятием составного ядра можно пользоваться, если длина свободного пробега падающей частицы в ядерном веществе мала по сравнению с размерами ядра.

Остановимся на этом вопросе несколько подробнее. Если энергия падающей частицы (нейтрона или протона) достаточно велика, то время соударения такой частицы с частицами, образующими ядро, будет малым по сравнению со временем соударения между отдельными ядерными частицами. Поэтому в первом приближении ядерные частицы можно рассматривать как свободные. В § 8 было показано, что сечение рассеяния быстрых нуклонов нуклонами обратно пропорционально их энергии. Отсюда следует, что средняя длина свободного пробега l быстрого нуклона в ядерном веществе пропорциональна его энергии. Величина l может быть оценена по формуле

$$l \sim \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{A} \frac{1}{\sigma},$$

где R — радиус ядра, A — массовое число и σ — сечение рас-

сеяния нуклона на нуклоне, равное в области больших энергий $\sigma \approx \sigma_0 \frac{E_0}{E}$ (σ_0 — сечение при энергии E_0). Для $E_0 = 20 \text{ MeV}$ $\sigma_0 \sim 2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$ [22]; полагая $A = 240$ и $R \approx 10^{-12} \text{ см}$, найдём, что длина свободного пробега нуклона с энергией в 100 MeV будет [60]

$$l \sim \frac{4\pi}{3} \frac{10^{-36}}{240} \frac{5}{2 \cdot 10^{-25}} \sim 4 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

При $E \sim 200 \text{ MeV}$ длина свободного пробега становится сравнимой с радиусом тяжёлых ядер, при $E \sim 50 \text{ MeV}$ — с радиусом лёгких ядер.

В этих условиях составное ядро может не образовываться. Если, например, частица с энергией в 100 MeV попадает на тяжёлое ядро вблизи его края, то, испытав одно столкновение и потеряв некоторую часть своей энергии, она может выйти из ядра, не образовав составного ядра и изменив, возможно, лишь свою природу (т. е. нейтрон может превратиться в протон и протон — в нейтрон). Если же частица проходит вблизи центра ядра, т. е. проходит значительное расстояние в ядре, то она может испытать много столкновений и потерять большую часть своей энергии. В результате она может застрять в ядре, образовав составное ядро.

Импульс, теряемый при одном столкновении быстрой падающей частицей, равен по порядку величины $\frac{\hbar}{r_0}$, где r_0 — радиус действия ядерных сил. Энергия, передаваемая при одном столкновении, по порядку величины равна $\frac{\hbar^2}{Mr_0^2} \sim 20 \text{ MeV}$

(M — масса нуклона) и не зависит от энергии падающей частицы. Если падающая быстрая частица сталкивается с ядерной частицей вблизи поверхности ядра, то последняя может вылететь из ядра с энергией порядка 20 MeV без дальнейших столкновений. В других случаях (при столкновении не у поверхности ядра) будут происходить столкновения ядерной частицы с другими частицами, образующими ядро, в результате чего энергия, приобретённая частицей, распределится между всеми частицами ядра. Мы получим возбуждённое ядро, которое далее сможет распасться, как обычное состав-

ное ядро. При этом, однако, число различных возможностей распада составного ядра, благодаря очень большой энергии возбуждения, значительно больше, чем у составного ядра с малой энергией возбуждения (порядка 10 MeV); в частности, возможен вылет большого числа самых разнообразных частиц.

Эффективное сечение какой-либо ядерной реакции, например вылета заданного числа нейтронов, достигает в области не очень высоких энергий, когда ещё образуется составное ядро, максимума при определённой энергии возбуждения ядра, т. е. определённой энергии падающей частицы. Эта энергия является наиболее благоприятной (в смысле температуры ядра) для вылета («испарения») заданного числа частиц. С ростом энергии возбуждения, т. е. энергии падающей частицы, это сечение падает, так как при большей энергии более вероятны реакции с вылетом большего числа частиц; при этом, однако, полное сечение для всех процессов (для не очень больших энергий) остаётся постоянным и равным πR^2 (см. § 20).

В области очень больших энергий, когда начинает сказываться прозрачность ядра и понятие составного ядра теряет смысл, зависимость сечения определённой реакции от энергии падающей частицы становится иной. Выход реакции определяется вероятностью того, что быстрая падающая частица создаст возбуждение ядра, наиболее благоприятное для протекания данной реакции. Эта вероятность определяется теперь только длиной свободного пробега, которая медленно и монотонно растёт с энергией падающей частицы (приблизительно пропорционально энергии). Поэтому сечение какой-либо определённой ядерной реакции в области больших энергий, в отличие от области малых энергий, медленно меняется с энергией падающей частицы.

Ниже мы будем рассматривать случай достаточно малых энергий падающей частицы (меньших ~ 50 MeV для лёгких и ~ 200 MeV для тяжёлых ядер), когда законно пользоваться понятием составного ядра.

Подобно обычным стабильным ядрам, составное ядро характеризуется спектром своих энергетических уровней. Так как составное ядро представляет собой только квазистационарную, а не стабильную систему, то эти уровни обла-

дают некоторой шириной. Ширина уровня γ связана со временем жизни уровня τ известным соотношением

$$\gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar\omega,$$

где ω — отнесённая к единице времени вероятность перехода системы из состояния, соответствующего рассматриваемому уровню, во все другие состояния.

Если распад составного ядра может происходить различными способами, то $\omega = \sum_i \omega_i$, где ω_i — вероятность распада i -го рода. Соответственно этому полная ширина уровня γ равна сумме его частичных ширин

$$\gamma = \sum_i \gamma_i,$$

где γ_i — частичная ширина уровня, отвечающая распаду i -го рода, равная произведению ω_i на \hbar .

Можно, например, говорить о нейтронной ширине γ_n , радиационной ширине γ_r , ширинах γ_α , γ_p по отношению к вылету α -частицы и протона и т. д., понимая под этими величинами вероятности вылета из составного ядра нейтрона, γ -кванта, α -частицы, протона и т. д., измеренные в энергетической шкале.

Так как время жизни составного ядра велико, если измерять его в характерных ядерных единицах, то ширины уровней составного ядра оказываются малыми по сравнению с ядерными энергиями связи. Отсюда, однако, не следует, что ширины уровней малы по сравнению с расстоянием между соседними уровнями. Возможны два случая: когда ширины уровней малы по сравнению с расстояниями между соседними уровнями и когда ширины того же порядка, что и расстояния между уровнями или даже больше их.

Первый случай имеет место в области малых, а второй — в области больших энергий возбуждения составных ядер. Если составное ядро образуется в результате слияния исходного ядра с медленной частицей (например, с медленным нейтроном) то состояние этого составного ядра характеризуется небольшой шириной; напротив, при облучении ядер быстрыми частицами образуются составные ядра, уровни которых обычно перекрываются.

Только в первом случае можно говорить об отдельных дискретных уровнях; во втором случае мы имеем дело по существу с непрерывным спектром. Очень важной особенностью первого случая является резко выраженная зависимость вероятности или эффективного сечения образования составного ядра от энергии падающей частицы. Эта зависимость имеет резонансный характер: при некоторых значениях энергии падающей частицы вероятность образования составного ядра, а следовательно, и сечение для какого-либо процесса ядерного расщепления становятся особенно большими. Резонансные явления такого вида наблюдаются, например, при взаимодействии медленных нейтронов с ядрами.

Во втором случае (перекрывающиеся уровни) не существует резко выраженной зависимости сечения расщепления от энергии. Величина сечения в этом случае обусловлена действием большого количества уровней. Наблюдаемое сечение представляет собой результат усреднения сечения, связанного с каждым уровнем, по большому числу уровней. Возможность такого усреднения сильно упрощает рассмотрение случая перекрывающихся уровней. В этой главе мы будем преимущественно заниматься изучением именно этого случая.

§ 16. Термодинамика тяжёлых ядер

В предыдущем параграфе было показано, что существенной чертой ядерных столкновений является образование квазистационарного составного ядра. Рассмотрим теперь, каковы особенности распределения энергии возбуждения между частицами, образующими составное ядро.

Мы говорили уже, что ядерные частицы очень сильно взаимодействуют друг с другом. По этой причине весьма мало вероятно, чтобы энергия возбуждения была сосредоточена на одной частице. Тесная связь между частицами не позволяет рассматривать движение одной частицы как движение, происходящее в некотором консервативном поле, создаваемом другими частицами. Состояния ядра нельзя классифицировать по числу возбуждённых частиц. Если бы возбуждение ядра сводилось к возбуждению одной частицы, то система ядерных уровней была бы подобна системе атомных уровней, которая характеризуется небольшим числом далеко

отстоящих друг от друга уровней. В ядре имеет место квантованное коллективное движение всех частиц. Если число частиц, входящих в состав ядра достаточно велико, то энергия возбуждения такого ядра может быть распределена между частицами большим числом способов. Соответственно большому числу способов распределения энергии между частицами мы имеем большое число энергетических уровней, расстояния между которыми тем меньше, чем больше энергия возбуждения ядра.

Для тяжёлых ядер, находящихся в сильно возбуждённых состояниях, распределение энергетических уровней является практически непрерывным. Следует, однако, подчеркнуть, что даже в этом случае время жизни составного ядра в сотни тысяч раз превосходит характерное ядерное время, равное по порядку величины 10^{-22} сек.

Мы будем предполагать, что энергия возбуждения ядра значительно меньше энергии, необходимой для разделения всех его частиц *). В этих условиях можно проводить аналогию между тяжёлым ядром и обычным макроскопическим телом. Тепловое движение в макроскопических телах имеет много общего с движением частиц в возбуждённом ядре. При этом следует, очевидно, сравнивать внутреннее состояние ядра с состоянием материи при очень низких температурах, так как предполагается, что энергия возбуждения ядра значительно меньше его энергии связи.

Однако, хотя обычные тела при очень низких температурах находятся в кристаллическом состоянии, ядерному веществу нельзя приписывать кристаллическую, т. е. некоторую упорядоченную структуру [44]. В самом деле, рассмотрим отклонения атомов от их положений равновесия, вызванные так называемыми нулевыми колебаниями. Амплитуда этих колебаний равна по порядку величины $\left(\frac{\hbar}{2M\omega}\right)^{1/2}$, где M — масса атома, ω — частота колебаний. В твёрдых телах величина этого отклонения значительно меньше расстояния между соседними атомами. Для ядер можно пользоваться этой же формулой,

*) Это условие не выполняется только в случае лёгких ядер, облучаемых частицами, получаемыми на самых мощных ускорителях (с энергиями $> 10^8$ eV), а также в случае ядерных расщеплений, вызываемых космическими лучами.

понимая под M массу ядерной частицы. В этом случае частота значительно больше, чем частота колебаний атома в кристалле, однако плотность ядерного вещества столь велика, что расстояния между ядерными частицами оказываются по порядку величины равными амплитуде нулевых колебаний. В силу этого ядерное вещество не становится кристаллическим.

Мы можем сравнивать внутреннее состояние ядра скорее с жидким, чем с твёрдым состоянием. Имея в виду эту аналогию, рассмотрим, главным образом с иллюстративной целью, объёмные и поверхностные колебания макроскопических тел, которые происходят под действием упругих сил и сил поверхностного натяжения.

Частота объёмных колебаний равна $\omega_V = sk$, где s — скорость распространения колебаний, равная по порядку величины $\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^{1/2}$ (ε — модуль упругости, ρ — плотность вещества). По порядку величины $k \approx V^{-1/3}$, где V — объём тела, поэтому

$$\omega_V \approx \varepsilon^{1/2} \rho^{-1/2} V^{-1/3}.$$

Частота поверхностных колебаний равна $\omega_s = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} k^{3/2}$ [51], где α — коэффициент поверхностного натяжения; полагая $k \approx V^{-1/3}$, получим:

$$\omega_s \approx \alpha^{1/2} \rho^{-1/2} V^{-1/2}.$$

Применяя эти формулы к ядру, мы положим:

$$\rho = M\delta^{-3}, \quad V = N\delta^3, \quad \varepsilon = C_s K\delta^{-3}, \quad \alpha = C_\alpha K\delta^{-2},$$

где M — масса ядерной частицы, δ^3 — объём, приходящийся на одну частицу, N — общее число частиц в ядре, K — средняя кинетическая энергия частицы в ядре, равная по порядку величины

$$K \sim \frac{\hbar^2}{2M\delta^2} \approx 10 - 15 \text{ MeV},$$

и C_α и C_s — безразмерные множители порядка единицы (можно думать, что они приблизительно постоянны для всех ядер, кроме самых лёгких [44]).

Умножив ω_{ν} и ω_s на \hbar , получим разности энергий двух последовательных уравнений ядра. Эти разности для объёмных и поверхностных колебаний равны соответственно

$$(\Delta E)_{\nu} \sim KN^{-1/3}, \quad (\Delta E)_s \sim KN^{-1/2}. \quad (16.1)$$

Мы видим, что с ростом N разности энергий убывают, как это и утверждалось выше.

Достаточно тяжёлое ядро можно рассматривать как систему с большим числом степеней свободы, могущих возбуждаться множеством различных способов. В этих условиях целесообразно пользоваться при изучении свойств ядер методом статистической физики, что было сделано впервые Л. Ландау [45] и Я. Френкелем [46]. К рассмотрению этого метода мы теперь и перейдём [48].

Введём в рассмотрение температуру ядра T (мы будем измерять её в энергетических единицах), а также термодинамические функции ядра: энтропию S , энергию возбуждения U и свободную энергию F .

Энергетический спектр ядра будем считать непрерывным. Обозначим через $\rho(U) dU$ число уровней ядра с энергией возбуждения между U и $U + dU$ (каждый уровень считается столько раз, какова кратность его вырождения).

Свободная энергия F определяется, как известно, следующим соотношением:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \sum_k e^{-\frac{E_k}{T}}, \quad (16.2)$$

где суммирование производится по всем уровням ядра.

Переходя к непрерывному спектру, будем иметь:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \int \rho(E) e^{-\frac{E}{T}} dE. \quad (16.2')$$

Свяжем температуру ядра T с энергией его возбуждения U . Последняя определяется формулой

$$U = \frac{\sum_k E_k e^{-\frac{E_k}{T}}}{\sum_k e^{-\frac{E_k}{T}}} = \frac{\int E \rho(E) e^{-\frac{E}{T}} dE}{\int \rho(E) e^{-\frac{E}{T}} dE}. \quad (16.3)$$

Это соотношение даёт возможность найти U как функцию T , если известен энергетический спектр ядра.

Сравнивая (16.2') и (16.3), получим хорошо известное из статистики соотношение

$$U = \frac{d \frac{F}{T}}{d \frac{1}{T}} = F - T \frac{dF}{dT} = F + TS,$$

где $S = -\frac{dF}{dT}$ — энтропия ядра.

В интегралах (16.2') и (16.3) главную роль играют значения энергии E_k , близкие к U . Мы положим поэтому:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \rho(U) e^{-\frac{U}{T}} \lambda(U), \quad (16.4)$$

где $\lambda(U)$ — некоторая функция U , которую можно считать медленно меняющейся по сравнению с функциями $e^{-F/T}$, $\rho(U)$, $e^{-U/T}$. Из (16.4) следует, что

$$\rho(U) = e^{\frac{U-F}{T}} \frac{1}{\lambda(U)} = e^S \frac{1}{\lambda(U)}. \quad (16.5)$$

Найдём $\lambda(U)$. Для этого подставим в (16.2') вместо $\rho(E)$ выражение (16.5):

$$e^{-\frac{F}{T}} = \int e^{S(E) - \frac{E}{T}} \frac{dE}{\lambda(E)}, \quad (16.6)$$

где $S(E)$ — энтропия, отвечающая энергии E . В интеграле (16.6) главную роль играют значения E , близкие к U ; так как $\lambda(E)$ представляет собой медленно меняющуюся функцию, то мы вынесем значение λ в точке $E = U$ за знак интеграла. В результате получим:

$$\lambda(U) = \int e^{\frac{F}{T} + S(E) - \frac{E}{T}} dE = \int e^{S(E) - S(U) + \frac{U-E}{T}} dE.$$

Преобразуем показатель в подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} S(E) - S(U) + \frac{U-E}{T} &= \\ &= \frac{dS}{dU} (E-U) + \frac{1}{2} \frac{d^2S}{dU^2} (E-U)^2 + \frac{U-E}{T}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T},$$

получим:

$$\lambda(U) = \int e^{\frac{1}{2} \frac{d^2S}{dU^2} (E-U)^2} dE.$$

Величина $\frac{d^2S}{dU^2}$ отрицательна, так как U — монотонно возрастающая функция T . Расширив пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$, найдём:

$$\lambda(U) = \sqrt{2\pi} \left| \frac{d^2S}{dU^2} \right|^{-1/2} = \sqrt{2\pi} T \left(\frac{dU}{dT} \right)^{1/2}, \quad (16.7)$$

и, следовательно, окончательно получим:

$$\rho(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dU} \right)^{1/2} e^{S(U)}. \quad (16.8)$$

Считая для простоты уровни невырожденными, найдём отсюда среднее расстояние $D(U)$ между уровнями ядра с энергией возбуждения U :

$$D(U) = \frac{1}{\rho(U)} = T \sqrt{2\pi \frac{dU}{dT}} e^{-S(U)}. \quad (16.8')$$

Для того чтобы оценить величину $D(U)$, необходимо сделать какие-либо упрощающие предположения, позволяющие установить связь между энтропией и энергией возбуждения ядра или, что то же самое, между энергией U и температурой T .

Будем считать энергию и температуру ядра, находящегося в основном состоянии, равными нулю. Так как энергия возбуждения ядра мала по сравнению с его общей энергией связи, то мы имеем дело, как уже упоминалось выше, с низкими ядерными температурами.

Энергия возбуждения обычных макроскопических тел при низких температурах выражается, как известно, формулой вида

$$U = BT^n, \quad (16.9)$$

где B и n — константы; так, для твёрдых тел $n=4$, для вырожденного фермиевского газа (например, электронного

«газа» в металле) $n = 2$; для жидкой капли, совершающей поверхностные колебания, $n = 7/3$ [48].

Можно предполагать, что формулой такого же вида определяется в случае низких ядерных температур и энергия возбуждения ядра. Следует, однако, иметь в виду, что ни один из указанных выше примеров не может быть целиком использован в качестве макроскопической модели сильно возбуждённого ядра, так как в этих примерах полностью не воспроизводятся условия, которые в действительности осуществляютя в ядре.

В самом деле, если исходить из газовой модели ядра, то при этом не учитывается взаимодействие между частицами. Модель жидкой капли учитывает в некотором смысле взаимодействие между ядерными частицами. Однако нет оснований считать, что свойства ядерного вещества при низких температурах, когда существенны квантовые эффекты, могут удовлетворительно описываться моделью жидкой капли. Можно также заметить, что проводимая в этой модели аналогия между ядром и вязкой жидкостью не может считаться правильной ввиду тесной связи между отдельными частицами. Что касается модели твёрдого тела — кристалла, то, как уже было отмечено ранее, ею также пользоваться нельзя.

Вопрос о характере возбуждения ядра связан с большими трудностями, которые происходят как от нашего незнания специфических ядерных сил, так и от сложности решения соответствующей квантовомеханической задачи, если бы даже силы были известны.

Тем не менее формула для энергии типа (16.9) в применении к ядру разъясняет основные особенности совокупности ядерных уровней при высоких возбуждениях ядра, и, в частности, показывает, что плотность ядерных уровней возрастает с увеличением энергии возбуждения. Конечно, при этом не может быть и речи о точном определении $D(U)$, так как формула (16.8') очень чувствительна к значению энтропии $S(U)$, зависящей от параметров B и n . Поскольку невозможно точно определить эти константы, мы можем лишь грубо оценить величины T , D , ρ в зависимости от энергии возбуждения ядра.

Заметим, что для тяжёлых ядер, пренебрегая поверхностными эффектами, можно считать константу B , так же как

и в случае макроскопических тел, пропорциональной массе, т. е. числу частиц, входящих в состав ядра. Это предположение даёт возможность определить зависимость плотности уровней от атомного веса. Для реальных ядер такое предположение является очень грубым, так как по диаметру наиболее тяжёлых ядер укладывается приблизительно всего 7 частиц и, следовательно, поверхностные эффекты даже для самых тяжёлых ядер всё ещё играют существенную роль.

Считая $U = BT^n$, мы получим для энтропии выражение

$$S = B \frac{n}{n-1} T^{n-1} = \frac{n}{n-1} (BU^{n-1})^{1/n}.$$

Подставляя это выражение в формулу (16.8'), найдём:

$$D(U) = (2\pi n)^{1/2} \left(\frac{U^{n+1}}{B}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{n}{n-1} B^{1/n} U^{\frac{n-1}{n}}\right). \quad (16.8'')$$

Заметим, что согласно теореме Нернста, при $T = 0$ энтропия должна обращаться в нуль и, следовательно, должно выполняться условие $n > 1$.

Приведём в заключение этого параграфа в качестве иллюстрации значения T и D в зависимости от U для различных ядер, вычисленные для модели жидкой капли, в которой учитываются поверхностные и объёмные колебания [48].

Атомный вес $A =$	20	50	100	200
Температура в MeV для				
$U = 5$ MeV	1,4	1,1	0,9	0,7
$U = 10$ MeV	1,8	1,4	1,2	1,0
$U = 20$ MeV	2,3	1,8	1,5	1,2
Расстояние между уровнями в eV для				
$U = 5$ MeV	36 000	5 900	1 100	150
$U = 10$ MeV	2 700	180	16	0,9
$U = 20$ MeV	30	0,5	0,01	$1,5 \cdot 10^{-4}$

Приведённые данные показывают, что с увеличением энергии возбуждения и увеличением числа частиц уменьшается расстояние между уровнями.

Для тяжёлых ядер ($A > 100$) при энергии возбуждения $U \sim 10$ MeV температура ядра составляет около 1 MeV. Сравнивая эту температуру с кинетической энергией ядерной частицы $K = \frac{\hbar^2}{2Mv^2} \approx 10$ MeV, мы видим, что $T \sim \frac{1}{10} K$. Таким образом, ядро действительно можно считать «холодным», что и предполагалось выше.

§ 17. Вероятности упругих и неупругих столкновений

Наша дальнейшая задача заключается в определении сечения образования составного ядра; но прежде чем переходить к её решению, мы рассмотрим общую задачу о рассеянии частиц некоторым рассеивателем, способным поглощать частицы (например, ядром).

Пусть на рассеиватель в направлении оси z падает монохроматический пучок частиц, описываемых плоской волной $e^{i\mathbf{k}z}$ (\mathbf{k} — величина волнового вектора частиц). Вдали от рассеивателя рассеянная волна имеет вид

$$\frac{1}{r} e^{i\mathbf{k}r} f(\theta),$$

где r — расстояние до рассеивателя и θ — угол рассеяния. Величина $f(\theta)$ имеет размерность длины и называется амплитудой рассеяния. Амплитуда рассеяния непосредственно связана с дифференциальным сечением $\sigma(\theta) d\theta$ упругого рассеяния частиц в телесном угле $d\theta$ ($d\theta = 2\pi \sin \theta d\theta$) соотношением

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\theta. \quad (17.1)$$

Амплитуда рассеяния может быть выражена через так называемые «фазы на бесконечности»^[8], определяющие асимптотическое поведение радиальных волновых функций частицы при различных значениях её орбитального момента по отношению к рассеивателю. Так как метод расчёта амплитуды рассеяния с помощью фаз на бесконечность чрезвычайно важен, то мы остановимся на нём несколько подробнее.

Заметим прежде всего, что имеет место следующее разложение плоской волны $e^{i\mathbf{k}z}$ в ряд по полиномам Лежандра^[9]

$$e^{i\mathbf{k}z} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) f_l(kr), \quad (17.2)$$

где

$$f_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(kr),$$

и $J_{l+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя $l + \frac{1}{2}$ ранга.

Каждое отдельное слагаемое в сумме (17.2) представляет собой волновую функцию свободной частицы с определённым значением орбитального момента количества движения, т. е. слагаемое с индексом l соответствует моменту частицы относительно рассеивателя, равному $l\hbar$.

Из теории функций Бесселя известно, что при больших r справедлива асимптотическая формула

$$f_l(kr) \sim (kr)^{-1} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right).$$

Отсюда видно, что волновая функция свободной частицы при больших r ведёт себя как

$$\frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l e^{ikr}] P_l(\cos \theta). \quad (17.3)$$

Поэтому функция

$$\frac{i}{2kr} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l e^{ikr}] \quad (17.3')$$

представляет собой асимптотическое выражение для радиальной волновой функции свободной частицы с моментом $l\hbar$. В этом выражении первое слагаемое представляет собой падающую волну с моментом l , а второе — расходящуюся.

Если частица испытывает отклонение в силовом поле, т. е. не является свободной, то асимптотическое выражение для её волновой функции при больших r будет определяться вместо (17.3) формулой

$$\psi \sim \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l \beta_l e^{ikr}] P_l(\cos \theta). \quad (17.4)$$

Эта функция отличается от функции, описывающей свободное движение, другими амплитудами расходящихся волн: амплитуда расходящейся волны с моментом l в формуле (17.4) отличается множителем β_l от амплитуды расходящейся волны с моментом l в случае свободного движения. Величины β_l при наличии рассеяния отличны от единицы. Если рассеиватель не поглощает частиц, то по модулю они равны единице, так как интенсивность расходящейся волны равняется в этом случае интенсивности падающей волны. В этом важном случае отсутствия поглощения величину β_l можно представить в виде

$$\beta_l = e^{2i\eta_l},$$

где η_l — вещественная величина, определяющая изменение при рассеянии фазы на бесконечности у l -волны, описывающей движение частицы с моментом $l\hbar$. Эта величина называется фазой на бесконечности. Асимптотическое выражение для радиальной волновой функции несвободной частицы с моментом l имеет вид

$$e^{i\eta_l} (kr)^{-1} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \eta_l \right).$$

Пользуясь формулами (17.3) и (17.4), легко определить амплитуду рассеяния $f(\theta)$. Для этого следует из (17.4) вычесть (17.3) и результат приравнять $\frac{1}{r} e^{ikr} f(\theta)$. Мы получим, таким образом, следующее выражение для $f(\theta)$, связывающее амплитуду рассеяния с введёнными выше величинами β_l

$$f(\theta) = -\frac{i\lambda}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\beta_l - 1) P_l(\cos \theta), \quad (17.5)$$

где λ — длина волны частицы, делённая на 2π *).

*) В этой формуле не учитывается спин частицы. В дальнейшем формула (17.5) будет применяться к нейтронам, взаимодействие которых с ядрами в интересующей нас области энергии может считаться не зависящим от ориентации спина нейтрона, так как поглощение нейтрона ядром определяется только орбитальным моментом нейтрона и не зависит от спина [см. формулу (20.9)].

Для свободного движения, когда $\beta_l = 1$, это выражение как и должно быть, обращается в нуль.

Определим интегральное сечение упругого рассеяния. Пользуясь формулой (17.1) и замечая, что

$$\int |P_l(\cos \theta)|^2 d\theta = \frac{4\pi}{2l+1}, \quad (17.5')$$

получим, интегрируя (17.1) по телесному углу, следующее выражение для интегрального сечения упругого рассеяния

$$\sigma_s = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\beta_l - 1|^2. \quad (17.6)$$

Если отсутствует поглощение частиц, то $\beta_l = e^{2i\eta_l}$ (η_l — вещественно) и

$$\sigma_s = 4\pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l. \quad (17.6')$$

Заметим, что формула (17.6) является более общей, чем формула (17.6'), так как она применима также и в тех случаях, когда происходит поглощение частиц. В этом случае модуль β_l меньше единицы, так как интенсивность расходящейся волны меньше интенсивности волны.

Выведем теперь общую формулу для сечения поглощения частиц рассеивателем. Проще всего с этой целью определить поток частиц через поверхность сферы большого радиуса, окружающей рассеиватель. Этот поток, взятый в направлении внутренней нормали к сфере, определяет, очевидно, число частиц, поглощаемых в единицу времени рассеивателем, например, ядром. Поток определяется известной формулой

$$S = \frac{i\hbar}{2M} r^2 \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \right) d\theta, \quad (17.7)$$

где r — радиус сферы, $d\theta$ — элемент телесного угла и M — масса частицы, описываемой волновой функцией ψ . В качестве ψ мы должны, очевидно, воспользоваться асимптотическим выражением (17.4), справедливым вдали от ядра. Замечая, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\psi}{r} + \frac{1}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-1)^l \times \\ \times \{ e^{-ikr} + (-1)^l \beta_l e^{ikr} \} P_l(\cos \theta)$$

и используя условие нормировки шаровых функций (17.5'), получим следующий результат:

$$S = \frac{\pi \hbar}{Mk} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2).$$

Для определения эффективного поперечника поглощения σ_c нужно разделить S на плотность потока падающих частиц, равную $\frac{\hbar k}{M}$. В результате мы получим следующее выражение для сечения поглощения частиц:

$$\sigma_c = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2). \quad (17.8)$$

Если $|\beta_l| = 1$, то, как и следовало ожидать, $\sigma_c = 0$.

Итак, мы видим, что как сечение упругого рассеяния, так и сечение захвата полностью определяются величинами β_l . Входящая в (17.8) величина $(1 - |\beta_l|^2)$ может быть названа вероятностью или коэффициентом прилипания. Мы будем обозначать её через ζ_l . Так как $\sigma_c > 0$, то величина ζ_l не может быть больше единицы. Вводя ζ_l , перепишем (17.8) в виде

$$\sigma_c = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \zeta_l. \quad (17.8')$$

Эта формула, связывающая, сечение захвата с коэффициентами прилипания, допускает простую физическую интерпретацию, заключающуюся в следующем.

Рассмотрим параллельный пучок быстрых частиц, падающих на рассеиватель. Считая длину волны частиц достаточно малой, мы можем пользоваться квазиклассическим рассмотрением. В этом случае можно приравнять выражения для момента количества движения частицы, даваемые классической и квантовой механикой. В классической механике момент количества движения частицы равен $Mv_{\infty}b$, где v_{∞} — скорость частицы на бесконечном расстоянии от рассеивателя, а b — кратчайшее расстояние, на котором прошла бы частица от рассеивателя, двигаясь по прямой (эта величина называется параметром столкновения). В квантовой механике момент

равен $\sqrt{l(l+1)} \hbar$. Приравнивая оба выражения, мы определим параметр столкновения

$$b = \frac{\hbar}{Mv_{\infty}} \sqrt{l(l+1)}.$$

Замечая, что $\frac{\hbar}{Mv_{\infty}} = \tilde{\lambda}$ и что в квазиклассическом приближении квантовые числа велики, получим следующее выражение для параметра столкновения:

$$b = l\tilde{\lambda}. \quad (17.9)$$

Используя (17.9), легко видеть, что вдали от рассеивателя частицы с моментом l пронизывают площадь кольца, ориентированного перпендикулярно к направлению движения частиц, причём внутренний и внешний радиусы кольца равны соответственно $l\tilde{\lambda}$ и $(l+1)\tilde{\lambda}$. Предположим, что плотность потока частиц, т. е. число их, падающее в единицу времени на единицу площади, равно единице. Так как площадь кольца равна $(2l+1)\pi\tilde{\lambda}^2$, то число частиц, падающих в единицу времени и обладающих моментом l , равняется $(2l+1)\pi\tilde{\lambda}^2$. Умножив $(2l+1)\pi\tilde{\lambda}^2$ на ζ_l , мы определим долю этих частиц, поглощаемых рассеивателем. Поэтому сумма $\sum (2l+1)\pi\tilde{\lambda}^2\zeta_l$ представляет собой полное сечение захвата частиц.

Заметим, что хотя наши рассуждения, строго говоря, справедливы при $l \gg 1$, полученная формула, совпадающая с (17.8'), справедлива при всех l .

Величины β_l и ζ_l являются сложными функциями энергии падающей частицы. В следующем параграфе мы определим вид этих функций в предельных случаях быстрых и медленных частиц.

Если сложить σ_s и σ_c , то мы получим полное сечение для всех процессов, могущих иметь место при столкновении частиц с рассеивателем

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_c = 2\pi\tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \operatorname{Re} \beta_l). \quad (17.10)$$

Если рассеивателем является ядро, то σ_s представляет собой сечение упругого рассеяния частиц, не связанного с образованием составного ядра, а σ_c — сечение всех процессов, свя-

занных с образованием составного ядра, иначе говоря, сечение образования составного ядра.

Заметим, что в σ_e входит сечение упругого резонансного рассеяния, связанного с образованием составного ядра.

В общем случае поглощающего рассеивателя также можно пользоваться формулой

$$\beta_l = e^{2i\eta_l},$$

если считать фазу η_l не действительной, а комплексной величиной [52]:

$$\eta_l = \eta_l^{(r)} + i\eta_l^{(i)}, \quad (17.11)$$

где $\eta_l^{(r)}$ и $\eta_l^{(i)}$ — вещественные величины, причём $\eta_l^{(i)} > 0$. Мнимая часть η связана простым соотношением с коэффициентом прилипания ζ :

$$\zeta_l = 1 - |\beta_l|^2 = 1 - e^{-4\eta_l^{(i)}}. \quad (17.12)$$

Замечая, что

$$|\beta_l - 1|^2 = 2e^{-2\eta_l^{(i)}} (\operatorname{ch} 2\eta_l^{(i)} - \cos 2\eta_l^{(r)}),$$

представим сечение упругого рассеяния при наличии поглощения в виде

$$\sigma_s = 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-2\eta_l^{(i)}} (\operatorname{ch} 2\eta_l^{(i)} - \cos 2\eta_l^{(r)}). \quad (17.13)$$

Если $\eta_l^{(i)} = 0$, то эта формула переходит в (17.6'). Формулой (17.13) можно пользоваться при определении сечения упругого рассеяния частиц ядрами, не связанного с образованием составного ядра.

Сечение поглощения и полное сечение выражаются следующим образом через $\eta_l^{(r)}$ и $\eta_l^{(i)}$:

$$\sigma_e = 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-2\eta_l^{(i)}} \operatorname{sh} 2\eta_l^{(i)}, \quad (17.14)$$

$$\sigma_t = 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - e^{-2\eta_l^{(i)}} \cos 2\eta_l^{(r)}). \quad (17.15)$$

В случае рассеяния медленных частиц (например, тепловых нейтронов) ядрами сечения σ_s и σ_e почти всегда малы

по сравнению с $\pi\lambda^2$. В этих условиях модуль фазы η_l мал по сравнению с единицей, и формулы (17.13), (17.14), (17.15) приобретают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= 4\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [(\eta_l^{(i)})^2 + (\eta_l^{(r)})^2], \\ \sigma_c &= 4\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \eta_l^{(i)} (1 - 2\eta_l^{(i)}), \\ \sigma_t &= 4\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [(\eta_l^{(r)})^2 - (\eta_l^{(i)})^2 + \eta_l^{(i)}]. \end{aligned} \right\} (17.16)$$

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний о рассеянии медленных нейтронов ядрами; под словом «медленные» мы понимаем такие нейтроны, длина волны которых λ значительно больше радиуса ядра R . В этом случае все β_l , за исключением β_0 , равны единице, и суммы в (17.13), (17.14), (17.15) и (17.16) сводятся к одному слагаемому с $l=0$. Отсюда следует, что рассеяние медленных нейтронов в системе координат, где покоится центр инерции ядра и сталкивающейся с ним частицы, является сферически симметричным.

Сечение упругого рассеяния в отсутствие поглощения равно согласно (17.13)

$$\sigma_s = 4\pi\lambda^2 \sin^2 \eta_0. \quad (17.17)$$

Дифференциальное сечение упругого рассеяния в системе координат, где покоится центр инерции, имеет вид

$$d\sigma_s = \frac{\sigma_s}{2} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (17.18)$$

Заметим, что в системе координат, где до столкновения ядро покоилось, энергия нейтрона, равная до столкновения E , становится в результате столкновения равной

$$E' = E \frac{M^2 + m^2 + 2mM \cos \vartheta}{(M + m)^2},$$

где m и M — массы нейтрона и ядра. Из этой формулы следует, что

$$\sin \vartheta d\vartheta = \frac{(M + m)^2}{2mM} \frac{dE'}{E},$$

поэтому формула (17.18) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_s &= \sigma_s \frac{(M+m)^2}{4mM} \frac{dE'}{E}, \\ E \gg E' &\gg \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 E. \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

Отсюда легко заключить, что пронормированная вероятность того, что в результате столкновения с ядром энергия нейтрона будет находиться в интервале E' и $E' + dE'$, равна:

$$\omega(E') dE' = \frac{dE'}{(1-\varepsilon)E}, \quad \varepsilon = \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2. \quad (17.20)$$

Мы видим, что в результате столкновения все значения энергии в интервале $(E, \varepsilon E)$ равновероятны.

Для медленных нейтронов в суммах (17.16) также играет роль только первый член, соответствующий $l=0$; при этом если $\eta_0^{(s)} \ll \eta_0^{(r)}$, то

$$\frac{\eta_0^{(r)}}{\eta_0^{(s)}} = \frac{k\sigma_c}{V 4\pi\sigma_s}. \quad (17.21)$$

§ 18. Вероятность образования составного ядра

Перейдём к определению зависимости вероятности прилипания ζ_i от энергии частицы. Заметим, предварительно, что мы рассматриваем здесь случай близко расположенных или даже перекрывающихся уровней и не учитываем особенностей отдельных индивидуальных уровней. Таким образом, наше рассмотрение будет, по существу, статистическим *).

Будем исходить из того, что свободная частица, попавшая в ядро, поглощается последним и теряет свою индивидуальность [59]. Поэтому, рассматривая образование составного ядра с феноменологической точки зрения, мы должны характеризовать ядерное вещество большим поглощением ядерных частиц.

*) Результаты, полученные в этом параграфе, относятся также к случаю неперекрывающихся уровней и определяют усреднённую вероятность образования составного ядра (усреднение производится по большому числу уровней составного ядра).

Для получения качественной картины сделаем простейшее предположение, считая, что число частиц, поглощаемых в единицу времени в некоторой точке ядра, пропорционально плотности частиц в этой точке.

Уравнение непрерывности с учётом поглощения можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{2}{\hbar} \sigma \cdot \rho, \quad (18.1)$$

где \mathbf{j} и ρ — соответственно плотность тока и плотность частиц, а σ — некоторая величина, характеризующая поглощение, которую будем называть абсорбционным потенциалом.

Эта величина зависит от координат, а также от энергии и других величин, характеризующих частицу (спин, направленные движения и т. д.). Будем считать, что зависимость от спина и направления движения не существенна. Что же касается зависимости от энергии частицы, то она может стать заметной только в очень большом интервале изменения энергии, по порядку величины равном энергии связи частиц в ядре (~ 10 MeV). Рассматривая небольшой интервал изменения энергии, можно считать σ не зависящим от энергии частицы.

Итак, мы предполагаем, что σ зависит только от координат частицы.

Легко видеть, что наличие абсорбционного потенциала в (18.1) можно учесть, если записать уравнение Шредингера для падающей частицы в виде

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V + i\sigma) \psi = 0, \quad (18.2)$$

где E — кинетическая энергия частицы вдали от ядра, а V — её потенциальная энергия.

Чтобы доказать эквивалентность уравнений (18.1) и (18.2), умножим (18.2) на ψ^* [ψ^* — величина комплексно сопряжённая ψ] и вычтем из полученного произведения комплексно сопряжённое ему выражение. Пользуясь определениями ρ и \mathbf{j} :

$$\rho = \psi^* \psi; \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \psi^*),$$

мы и получим (18.1). Таким образом, абсорбционный потенциал появляется, как мнимая часть эффективной комплексной потенциальной энергии частицы $V - i\sigma$.

Внутри ядра σ по порядку величины равняется энергии ядерного взаимодействия, что составляет около 30 MeV.

Заметим, что ни σ , ни V не испытывают резкого скачка на границе ядра, поскольку ядерные силы, которыми в сущности и определяются V и σ , обладают конечным радиусом действия. Следует также иметь в виду, что граница ядра не может считаться резкой благодаря наличию нулевых колебаний ядерных частиц и конечности радиуса действия ядерных сил. Вне узкого пограничного слоя, который мы назовём областью диффузности ядерной границы, потенциал $V - i\sigma$ можно не учитывать.

Следует подчеркнуть, что феноменологическое рассмотрение, которым мы пользуемся, вводя σ , не может, конечно, дать исчерпывающего описания всех сторон ядерных столкновений (хотя бы потому, что при этом мы исходим из рассмотрения задачи одного тела). К этому следует добавить, что интересующая нас величина коэффициента прилипания ζ_l существенно зависит от хода изменения σ у поверхности ядра, о котором можно лишь делать те или иные предположения. Поэтому излагаемая теория является полукачественной; тем не менее, как мы увидим далее, основные особенности поведения ζ_l при больших и малых энергиях она передаёт правильно.

Запишем потенциальную энергию частицы в виде $V = V_n + V_l$, где V_n связано с ядерными, а V_l — с кулоновскими и центробежными силами. Будем считать, что V_n , σ , V_l зависят только от r — расстояния до центра ядра. Волновая функция ψ зависит в этом случае также только от r . Введём радиальную функцию $u = r\psi$; уравнение Шредингера для неё имеет вид

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \Phi(r) u, \quad (18.3)$$

где

$$\Phi(r) = \frac{2m}{\hbar^2} [-W(r) + V_n(r) - i\sigma(r)]$$

и

$$W(r) = E - V_l(r).$$

Вне ядра, но вблизи от его поверхности, где V_n и σ играют ещё существенную роль, будем считать $W(r)$ постоянной, равной

$$W = E - V_l(R),$$

где R — радиус ядра.

Рассмотрим сначала случай больших энергий падающей частицы, когда её длина волны значительно меньше радиуса ядра. В этом случае можно пользоваться методом квазиклассического приближения. Условие применимости этого метода состоит в том, что модуль изменения Φ на протяжении длины волны, равной $|\Phi^{-1/2}|$, должен быть малым по сравнению с абсолютным значением самой функции Φ .

Поскольку величина W предполагается большой, а V_n и σ не испытывают резкого изменения на границе ядра, можно считать, что условия применимости метода квазиклассического приближения выполнены.

Пользуясь этим методом, представим решение уравнения (18.3) в виде

$$u = \text{const.} \cdot \Phi^{-1/4} \exp\left(\int_0^r \Phi^{1/2} dr\right). \quad (18.4)$$

Мы должны при этом взять $\sqrt{\Phi}$ с таким знаком, чтобы u убывало по направлению к центру ядра. Такой выбор знака соответствует нашему основному предположению о поглощении частиц ядром. Итак, вещественная часть $\Phi^{1/2}$ должна быть положительной. При $r < R$ величина Φ находится в третьей четверти плоскости комплексного переменного (вещественная и мнимая части Φ отрицательны). Поэтому $\Phi^{1/2}$ должна лежать в четвёртой четверти комплексной плоскости.

Представим себе теперь, что r увеличивается; при этом σ и V_n уменьшаются и, наконец, вне ядра становятся равными нулю. Поскольку $\Phi^{1/2}$ всё время должно оставаться в четвёртой четверти, мнимая часть $\Phi^{1/2}$ должна быть отрицательной также и вне ядра. Поэтому решение (18.4) вне ядра имеет вид

$$u = \text{const.} \cdot \Phi^{-1/4} \exp\left\{-i \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int [E - V_l(r)]^{1/2} dr\right\}, \quad (18.4')$$

т. е. представляет собой чисто падающую волну. Так как мы не получили отражённой волны, то это значит, что вероятность прилипания ζ_l равна единице.

Итак, для быстрых частиц, попадающих в сферу действия ядра,

$$\zeta_l = 1.$$

Полученное соотношение имеет простой физический смысл. Поскольку мы рассматриваем случай быстрых частиц, т. е. малых длин волн, справедлива классическая механика. Но в таком случае совершенно ясно, что если частица попадает в сферу действия ядра, т. е. параметр столкновения для неё меньше радиуса ядра, то частица поглощается ядром, иначе говоря, $\zeta_l = 1$. Отклонения от соотношения $\zeta = 1$ связаны с неточностью квазиклассического приближения, которым мы пользовались.

Перейдём теперь к рассмотрению случая малых энергий падающей частицы, когда её длина волны велика по сравнению с радиусом ядра.

Предположим, что падающей частицей является медленный нейтрон, орбитальный момент которого равен нулю. В этом случае $V_l = 0$.

Вне ядра уравнение (18.3) имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E u = 0, \quad (18.5)$$

откуда

$$u = \text{const.} \cdot \sin(kr + \eta) = \text{const.} \cdot (e^{ikr + i\eta} - e^{-ikr - i\eta}), \quad (18.5')$$

где $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ и η — комплексная фаза рассеяния. Последнюю можно связать со значением логарифмической производной u на поверхности ядра, т. е. при $r = R$

$$\left(\frac{1}{u} \frac{du}{dr} \right)_{r=R} \equiv \chi. \quad (18.5'')$$

Так как мы предполагаем, что длина волны падающей частицы значительно больше размеров ядра, то значение этой производной вне ядра не испытывает существенного изменения на расстояниях порядка R . Поэтому введение величины χ имеет смысл, несмотря на диффузность ядерной границы.

Величину χ следует считать комплексной, так как благодаря возможности поглощения частиц, комплексной является эффективная потенциальная энергия. Мы запишем χ в виде

$$\chi = \frac{1}{b} e^{-i \frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi > 0,$$

где b по порядку величины определяет ширину области диффузности ядерной границы, φ — вещественная фаза, зависящая от комплексного потенциала $V - i\sigma$ [то обстоятельство, что $\varphi > 0$, следует из выражения для коэффициента прилипания ζ_0 , см. ниже, формула (18.6)]. В первом приближении можно считать, что b и φ не зависят от энергии.

Так как при $kR \ll 1$ абсолютное значение η обычно мало по сравнению с единицей (последнее условие означает, что величина сечения рассеяния мала по сравнению с $\pi \lambda^2$), то (18.5') можно представить в виде

$$u \approx \text{const.} \cdot (kr + \eta).$$

Граничное условие (18.5'') приводит к результату

$$\eta = -kR + kbe^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

Если $\sigma = 0$, то величина η будет вещественной. В этом случае мы имеем чисто упругое рассеяние нейтронов. Сечение рассеяния σ_s связано с фазой η соотношением

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \eta.$$

Считая b малым по сравнению с R , мы получим $\eta \approx -kR$, и поэтому

$$\sigma_s = 4\pi R^2.$$

Это сечение рассеяния медленных частиц от непроницаемого шара радиуса R в четыре раза превышает соответствующее сечение, даваемое классической механикой.

Из формулы (18.5') следует, что отношение амплитуд расходящейся и падающей волн равно $\beta_0 = e^{2i\eta}$. В случае комплексной фазы η величина $|\beta_0|$ — меньше единицы. Вероят-

ность прилипания частиц с моментом $l = 0$ равна, согласно (17.12):

$$\zeta_0 = 1 - |\beta_0|^2 = 1 - |e^{2i\eta}|^2 \approx 4kb \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (18.6)$$

причём мы пренебрегли здесь членами порядка η^2 .

Выше мы говорили, что b и φ в области малых энергий можно считать не зависящими от энергии нейтрона. Формула (18.6) показывает в таком случае, что для медленных нейтронов, длина волны которых велика по сравнению с R , вероятность прилипания пропорциональна k , т. е. \sqrt{E} .

Согласно (18.6) можно теперь определить сечение захвата медленных нейтронов

$$\sigma_c = \pi \lambda^2 \zeta_0 = \frac{\text{const.}}{v}. \quad (18.7)$$

(v — скорость нейтронов).

Эта формула выражает хорошо известный закон поглощения медленных нейтронов (закон $\frac{1}{v}$).

Мы определили зависимость вероятности прилипания от энергии падающей частицы в двух предельных случаях больших и малых энергий, когда длина волны частицы мала или велика по сравнению с радиусом ядра.

Для получения общей формулы для ζ_l , пригодной при всех энергиях, необходима детальная теория ядерных сил.

Отметим, что в случае нейтронов вероятность прилипания ζ_0 становится по порядку величины равной единице при энергии, равной $E_0 \approx 1$ MeV, если считать $b \approx 10^{-13}$ см. Таким образом, по отношению к нейтронам, энергия которых значительно превосходит 1 MeV, ядра являются абсолютно «чёрными» (следует иметь в виду, что при очень больших энергиях ядра становятся прозрачными). При этом предполагается, что параметр столкновения $l\tilde{\lambda}$ не превосходит радиуса ядра, т. е. $l \leq \frac{R}{\tilde{\lambda}}$.

Для нейтронов с энергией, меньшей E_0 , вероятность прилипания ζ_0 имеет вид

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{E}{E_0}}. \quad (18.8)$$

§ 19. Распад составного ядра

В предыдущих параграфах мы говорили, что если энергия возбуждения составного ядра сосредоточивается на какой-либо частице, то последняя покидает составное ядро. Возможны следующие виды превращения составного ядра: испускание нейтрона или заряженной частицы (протон, α -частица), испускание γ -кванта и, наконец, деление ядра.

Заметим, что переход из возбуждённого в основное состояние может происходить также в результате β -распада составного ядра. Это явление мы можем, однако, не учитывать, так как время жизни ядра по отношению к β -распаду в большинстве случаев значительно больше времени жизни по отношению к другим видам превращений.

Из перечисленных выше процессов деление происходит только с тяжёлыми ядрами. Что касается испускания частиц, то вероятность вылета заряженной частицы из-за барьерных эффектов, вообще говоря, меньше, чем нейтральной. Этот вывод не относится к лёгким ядрам и несправедлив для очень больших возбуждений ядра, когда барьерный фактор не играет роли.

Мы знаем, что каждая возможность распада связана с некоторым уширением уровня системы. Поэтому каждому процессу распада можно привести в соответствие так называемую частичную ширину уровня, которая определяется как вероятность рассматриваемого процесса в единицу времени, умноженная на \hbar .

Если умножить сечение образования составного ядра σ_c на относительную вероятность какого-либо процесса α , равную $\frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma}$, где Γ_α — частичная ширина, отвечающая процессу α , а Γ — полная ширина уровня, то мы получим сечение для этого процесса σ_α :

$$\sigma_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma} \sigma_c = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma} \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \zeta_l. \quad (19.1)$$

Покажем теперь, как связать частичные ширины с другими величинами, характеризующими состояние ядра. С этой целью мы воспользуемся так называемым принципом детального равновесия, устанавливающим связь между вероятно-

стями прямого и обратного переходов. В данном случае речь идёт об установлении связи между шириной уровня и сечением образования составного ядра [45, 47].

Представим себе большой сосуд объёма Ω , содержащий ядра самых различных сортов. Мы рассмотрим состояние статистического равновесия, при котором число расщеплений в единицу времени ядер сорта C , происходящих, согласно схеме $C \rightarrow A + a$ (A , a — продукты реакции), равно числу рекомбинаций в единицу времени типа $A + a \rightarrow C$.

Обозначим вероятности процессов расщепления и рекомбинации, отнесённые к единице времени, соответственно через w_{Aa}^C и w_C^{Aa} . Условие равенства между числом расщеплений типа $C \rightarrow A + a$ и числом рекомбинаций типа $A + a \rightarrow C$ можно записать в виде

$$g_C w_{Aa}^C = g_A g_a w_C^{Aa}, \quad (19.2)$$

где g_A — статистический вес состояния, в котором находится ядро A , и т. д.

Обозначим через E_A, E_C, \dots значения внутренней энергии ядер A, C, \dots , понимая под внутренней энергией разность между полной энергией покоящегося ядра и энергией покоя составляющих его частиц. Пусть, далее, p_A, p_C, \dots обозначают импульсы ядер A, C, \dots . Мы предположим, что импульс ядра A находится в интервале между p_A и $p_A + dp_A$.

Если E_A относится к дискретному спектру, то под статистическим весом g_A мы должны понимать произведение $2i_A + 1$ (i_A — момент количества движения ядра A в состоянии с энергией E_A) на $\frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3}$.

Если E_A относится к непрерывному спектру и внутренняя энергия ядра A лежит в интервале $(E_A, E_A + dE_A)$, то статистический вес g_A равен

$$g_A = \rho(E_A) dE_A \frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $\rho(E_A) dE_A$ — число уровней ядра A в интервале энергии $(E_A, E_A + dE_A)$, причём каждый уровень считается столько раз, какова кратность его вырождения.

В этом параграфе мы понимаем под C составное ядро, энергия которого лежит в непрерывном спектре, состояние же ядра A считаем дискретным. Под a мы понимаем частицу, покидающую ядро C . Итак,

$$g_C = \rho(E_C) dE_C \frac{\Omega d\mathbf{p}_C}{(2\pi\hbar)^3};$$

$$g_A = (2i + 1) \frac{\Omega d\mathbf{p}_A}{(2\pi\hbar)^3}; \quad g_a = (2s + 1) \frac{\Omega d\mathbf{p}_a}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (19.3)$$

где s — спин частицы a , i — момент количества движения ядра A . В том случае, когда вылетающей частицей является γ -квант, $s = 1$ или 2 , в зависимости от того, является ли γ -квант дипольным или квадрупольным.

Подставляя (19.3) в (19.2), получим:

$$\omega_{Aa}^C \rho(E_C) dE_C d\mathbf{p}_C =$$

$$= (2i + 1)(2s + 1) \omega_C^{Aa} d\mathbf{p}_A d\mathbf{p}_a \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (19.4)$$

Введём в рассмотрение импульс относительного движения частиц A и a , который обозначим через \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = \frac{M_a M_A}{M_a + M_A} (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_A) = \frac{M_A \mathbf{p}_a - M_a \mathbf{p}_A}{M_a + M_A}$$

(здесь M_A , M_a — массы частиц A и a ; \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_a — их скорости). Легко убедиться в том, что имеет место равенство

$$d\mathbf{p}_A d\mathbf{p}_a = d\mathbf{p}_C d\mathbf{p}$$

(это равенство означает, что якобиан перехода от переменных \mathbf{p}_A , \mathbf{p}_a к переменным $\mathbf{p}_C = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_a$ и $\mathbf{p} = \frac{M_A \mathbf{p}_a - M_a \mathbf{p}_A}{M_a + M_A}$ равен единице.) Используя это равенство, перепишем (19.4)

в виде

$$\omega_{Aa}^C dE_C = (2i + 1)(2s + 1) \frac{1}{\rho(E_C)} \omega_C^{Aa} d\mathbf{p} \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (19.5)$$

Воспользуемся теперь законом сохранения энергии, в силу которого

$$E_C = E_A + E_a + E,$$

где E_a — энергия связи частицы a , E — энергия относительного движения частиц A и a :

$$E = \frac{p^2}{2M}, \quad M = \frac{M_a M_A}{M_a + M_A}.$$

Из написанного равенства следует, что $dE_C = dE$. Заменяя dp на $4\pi p^2 dp = 4\pi p^2 \frac{dp}{dE} dE_C$, мы получим из (19.5) соотношение

$$\begin{aligned} \omega_{Aa}^C &= \omega_C^{Aa} \frac{(2i+1)(2s+1)}{\rho(E_C)} \frac{4\pi M p \Omega}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \omega_C^{Aa} \frac{(2i+1)(2s+1)}{(2J+1)} D_J \frac{4\pi M p \Omega}{(2\pi\hbar)^3}, \end{aligned} \quad (19.6)$$

где J — момент количества движения составного ядра, а D_J — среднее расстояние между вырожденными уровнями составного ядра, момент количества движения которых равен J (мы считаем при этом, что кратность вырождения уровня составного ядра с энергией возбуждения E_C равна $2J+1$).

Умножив ω_{Aa}^C на \hbar , найдём частичную ширину по отношению к распаду типа $C \rightarrow A + a$, усреднённую по всем уровням составного ядра, энергия которых лежит вблизи $E_C = E_A + E_a + E$. Обозначим эту усреднённую ширину через Γ_{Aa}^C . Введём ещё сечение образования составного ядра в результате столкновения частиц A и a , равное

$$\sigma_C^{Aa} = \frac{\omega_C^{Aa}}{v/\Omega},$$

где v — скорость относительного движения частиц A и a .

Формулу (19.6) мы перепишем окончательно в виде

$$\Gamma_{Aa}^C = \frac{(2i+1)(2s+1)}{2J+1} D_J \frac{\sigma_C^{Aa}}{2\pi^2 \lambda^2}, \quad (19.7)$$

где λ — разделённая на 2π длина волны частицы a .

Таким образом, пользуясь статистическими соображениями, можно связать частичную ширину уровня с вероятностью обратного процесса, т. е. с сечением образования составного ядра. При этом следует ещё раз подчеркнуть, что речь идёт

о ширине, усреднённой по большому числу уровней, лежащих вблизи энергии возбуждения E_C .

Умножив σ_C^{Aa} на Γ_{Bb}^C/Γ^C , где Γ^C — полная ширина уровня составного ядра, а Γ_{Bb}^C — частичная ширина по отношению к распаду C на ядро B и частицу b , и просуммировав полученное выражение по всем значениям момента составного ядра J , совместимым с законом сохранения момента, найдём усреднённое эффективное сечение для процесса: $A + a \rightarrow B + b$

$$\overline{\sigma_{Bb}^{Aa}} = \frac{2\pi^2 \lambda^2}{(2l+1)(2s+1)} \sum_J (2J+1) \cdot \frac{\Gamma_{Aa}^C \Gamma_{Bb}^C}{\Gamma^C D_J}. \quad (19.8)$$

Заметим, что при заданной энергии падающей частицы сечение образования составного ядра в случае столкновения исходного ядра с нейтроном будет, вообще говоря, больше, чем в случае столкновения с положительно заряженной частицей, если энергия последней меньше высоты потенциального барьера. Поэтому обычно нейтронная ширина больше частичной ширины по отношению к вылету заряженной частицы.

Остановимся теперь на определении σ_C^{Aa} . Эта величина представляет собой сечение образования составного ядра C с моментом J в результате столкновения ядра A с частицей a . Пусть момент количества движения частицы a равен l ; тогда, очевидно,

$$\sigma_C^{Aa} \equiv \sigma_J^{Al} = \sigma_l \alpha_{lJ}, \quad (19.9)$$

где

$$\sigma_l = (2l+1) \pi \lambda^2 \zeta_l$$

обозначает общее эффективное сечение образования составного ядра в результате столкновения ядра A с частицей a , обладающей моментом l , независимо от того, какое значение будет иметь при этом момент количества движения составного ядра, а α_{lJ} представляет собой вероятность того, что образующееся составное ядро будет иметь момент J .

Будем предполагать, что вероятность прилипания ζ_l не зависит от J . Иными словами, мы считаем, что вероятность появления какого-либо значения J определяется только ста-

стистическим весом J , т. е. числом различных возможных ориентаций вектора момента, имеющего значение J . Число этих ориентаций равно $2J + 1$. Поэтому мы полагаем:

$$\alpha_{iJ} = g_{is, J} \frac{2J + 1}{(2s + 1)(2l + 1)(2i + 1)}, \quad (19.10)$$

где $g_{is, J}$ представляет собой число способов, которыми можно получить данное значение J , складывая векторно l , i , s .

Если хотя бы одно из чисел l , i , s равняется нулю, то $g = 1$. Если $s = \frac{1}{2}$, то для максимального и минимального значений J , равных соответственно $l + i + \frac{1}{2}$ и $|l - i| - \frac{1}{2}$, $g = 1$; для всех промежуточных значений J $g = 2$, так как такие значения J можно получать двумя способами (если $i = l$, то значение $J = |l - 1| - \frac{1}{2}$ не реализуется).

Легко убедиться в том, что определённая указанным образом величина α_{iJ} представляет собой пронормированную вероятность, т. е. $\sum_J \alpha_{iJ} = 1$, причём суммирование распространяется на все возможные (совместимые с законом сохранения момента) значения J .

Пользуясь формулами (19.9), (19.10), представим сечение образования составного ядра σ_J^{Al} в виде

$$\sigma_J^{Al} = \pi \lambda^2 g_{is, J} \frac{2J + 1}{(2s + 1)(2l + 1)} \zeta_l. \quad (19.11)$$

Подставляя это выражение в формулу (19.7), найдём усреднённую ширину $\Gamma_{Al}^J (\equiv \Gamma_{Aa}^C)$:

$$\Gamma_{Al}^J = g_{is, J} D_J \frac{\zeta_l}{2\pi}. \quad (19.12)$$

Эта формула связывает вероятность (т. е. частичную ширину) распада составного ядра C , в результате которого появляется частица a с моментом l и ядро A , с вероятностью прилипания ζ_l частицы a к ядру A и средним расстоянием между уровнями составного ядра D_J (речь идёт, очевидно, об уровнях C с энергией возбуждения, близкой

к $E_C = E_A + E_a + E$). Величина ζ_l определяется энергией падающей частицы E и её моментом l .

Из (19.12) вытекает важный вывод: если вероятность прилипания ζ_l по порядку величины равняется единице, то частичная ширина Γ_{Al}^J имеет порядок величины расстояния между уровнями составного ядра D_J . Иными словами, уровни составного ядра в этом случае перекрываются.

Вряд ли нужно ещё раз подчёркивать, что формула (19.12) определяет только усреднённую по большому числу близко расположенных уровней частичную ширину для какого-либо вида расщепления составного ядра. Индивидуальные ширины отдельных уровней могут, конечно, при этом сильно отличаться друг от друга.

Воспользуемся формулой (19.12), чтобы получить выражение для средней нейтронной ширины Γ_n . Вылетающие из ядра нейтроны предполагаются медленными, поэтому для них $l = 0$ и $g_{ljs, J} = 1$. Пользуясь формулой (18.8) для вероятности прилипания ζ_0 , получим:

$$\Gamma_n = \frac{D}{2\pi} \zeta_0 = \frac{D}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{E_0}}, \quad (19.13)$$

где E — энергия вылетающих из ядра нейтронов. Полагая $E_0 \approx 0,7 \text{ MeV}$ [53], получим отсюда:

$$\Gamma_n = 2 \cdot 10^{-4} D E^{1/2}, \quad (19.13')$$

причём здесь E и D (среднее расстояние между уровнями составного ядра) выражены в eV. Считая для ядер среднего атомного веса ($A \sim 100$) $D \approx 10 \text{ eV}$, получим из (19.13'):

$$\Gamma_n E^{-1/2} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ (вольт)}^{1/2}. \quad (19.13'')$$

Применим развитые статистические соображения к нахождению функции распределения частиц, вылетающих при распаде составного ядра по энергиям.

Пусть E_C и E_A — энергии возбуждения составного ядра C и ядра A , остающегося после вылета из C частицы a . Кинетическая энергия вылетающей частицы a равна

$$E = E_C - E_A - E_a,$$

где E_a — энергия связи частицы a . Будем считать, что E_A относится к непрерывному спектру ядра A , и поставим вопрос, какова вероятность того, что вылетевшая из ядра частица имеет энергию, заключённую в пределах от E до $E + dE$? Обозначим эту вероятность, отнесённую к единице времени, через $\omega(E) dE$. Воспользуемся общей формулой (19.2) и положим в ней

$$g_C = \rho_C(E_C) dE_C \frac{\Omega d\mathbf{p}_C}{(2\pi\hbar)^3}, \quad g_A = \rho_A(E_A) dE_A \frac{\Omega d\mathbf{p}_A}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$g_a = (2s + 1) \frac{\Omega d\mathbf{p}_a}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $\rho_A(E_A) dE_A$ — число уровней ядра A в интервале энергии dE_A , причём каждый уровень считается столько раз, какова кратность его вырождения. Вместо ω_{Aa}^C мы должны теперь писать $\omega(E) dE$. Таким образом, мы получим:

$$\begin{aligned} \omega(E) dE \rho_C(E_C) dE_C d\mathbf{p}_C &= \\ &= \omega_{C}^{Aa} \rho_A(E_A) dE_A \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p}_A (2s + 1) d\mathbf{p}_a. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Перейдём от переменных \mathbf{p}_A и \mathbf{p}_a к переменным \mathbf{p}_C и \mathbf{p} , где \mathbf{p} — импульс относительного движения частиц A и a , а также от переменных E_A, p к переменным E_C, E . В результате получим:

$$\omega(E) dE = (2s + 1) \frac{\rho_A(E_A)}{\rho_C(E_C)} \frac{ME}{\pi^2 \hbar^3} \sigma_C^{Aa} dE, \quad (19.15)$$

где σ_C^{Aa} — сечение образования составного ядра C , возникающего при столкновении частицы a с энергией E и ядра A , энергия возбуждения которого равна E_A .

Вспомним теперь связь между плотностью состояний ρ и энтропией ядра S (см. § 16). Считая в формуле (16.5) медленно меняющуюся функцию энергии $\lambda(u)$ постоянной, получим приближенно:

$$\frac{\rho_A(E_A)}{\rho_C(E_C)} \approx e^{S_A(E_A) - S_C(E_C)}$$

(индекс при S указывает на принадлежность к тому или иному ядру). Пользуясь этим соотношением, перепишем (19.15) в виде

$$\omega(E)dE = \frac{2s+1}{\pi^2 \hbar^3} M \sigma_C^{Aa} e^{S_A(E_C - E_a - E) - S_C(E_C)} E dE. \quad (19.16)$$

Рассмотрим случай, когда кинетическая энергия вылетающей частицы значительно меньше $E_C - E_a$. Полагая в этом случае $S_A(E_C - E_a - E) \approx S_A(E_C - E_a) - ES'_A(E_C - E_a)$ и вспоминая, что

$$S'_A(W) = \frac{1}{T_A(W)},$$

где $T_A(W)$ — температура ядра A , энергия возбуждения которого равна W , получим:

$$\omega(E)dE = \frac{2s+1}{\pi^2 \hbar^3} M \sigma_C^{Aa} e^{S_A(E_C - E_a) - S_C(E_C)} e^{-\frac{E}{T_A(E_C - E_a)}} E dE. \quad (19.17)$$

Напомним, что σ_C^{Aa} зависит от E и E_A . Если частицей a является нейтрон, то в области больших энергий E сечение $\sigma \approx \pi R^2$ (см. § 20). В этих условиях мы получаем распределение максвелловского типа, причём модулем этого распределения служит температура ядра A , остающегося после вылета частицы, а не исходного ядра C . Различие между этими температурами, вообще говоря, довольно значительно, так как в результате вылета частицы происходит сильное «охлаждение» ядра.

Из формулы (19.17) следует, что средняя энергия вылетающих частиц при заданном E_C по порядку величины равна $T_A(E_C - E_a)$. В том случае, когда сечение образования составного ядра не зависит от энергии, средняя энергия вылетающих частиц равна $2T_A(E_C - E_a)$. Отсюда можно сделать следующий вывод. Если составное ядро C создаётся в результате столкновения быстрого нейтрона с энергией E и ядра A , находящегося в основном состоянии, то получающиеся при распаде C нейтроны обладают в среднем энергией $\sim 2T_A(E_C - E_a) = 2T_A(E_A + E)$, которая, вообще говоря, значительно меньше E .

§ 20. Диффракционное рассеяние быстрых нейтронов поглощающими ядрами

Перейдём теперь к рассмотрению упругого рассеяния частиц поглощающими ядрами. Соотношения, полученные в § 17, показывают, что поглощение вызывает дополнительное возмущение падающей волны и, следовательно, приводит к дополнительному упругому рассеянию частиц, которое не связано с образованием составного ядра и последующим испусканием частиц. Это упругое рассеяние, обусловленное наличием поглощающего рассеивателя, в случае малых длин волн частиц ($\lambda \ll R$, R — радиус ядра) аналогично диффракции света от абсолютно чёрного шара и может быть поэтому названо диффракционным рассеянием [54]. Чтобы сделать более ясной эту аналогию, напомним, что диффракционные явления в оптике наблюдаются в том случае, если на пути распространения света стоит непрозрачный, поглощающий свет экран. Диффракционные явления, характеризующиеся отсутствием резкой границы между областями света и тени, представляют собой отклонения от геометрической оптики и непосредственно связаны с волновой природой света; они проявляются тем сильнее, чем меньше размеры непрозрачных тел по сравнению с длиной волны света. Так как ядра в определённой области энергии поглощают падающие на них частицы, т. е. ведут себя по отношению к ним как непрозрачные, поглощающие экраны, то, наблюдая в таких условиях упругое рассеяние частиц, мы должны получить диффракционную картину.

Феноменологическая трактовка ядра как непрозрачного, поглощающего частицы экрана возможна в тех случаях, когда энергия частиц не превосходит нескольких десятков MeV для лёгких ядер и нескольких сотен MeV для тяжёлых. Если мы имеем дело с нейтронами, т. е. электрически нейтральными частицами, причём длина волны их значительно меньше радиуса ядра, то следует ожидать полной аналогии между упругим рассеянием таких частиц и диффракцией света от непрозрачного тела, имеющего форму и размеры ядра.

Однако необязательно ограничиваться нейтральными частицами. В этом случае имеют место особенно простые соотношения, но диффракционные явления должны наблюдаться также и при рассеянии достаточно быстрых заряженных частиц [55].

Диффракционная картина в этом последнем случае гораздо сложнее, чем в случае света, и переходит в обычную картину, если заряд частицы равен нулю.

В этом параграфе мы рассмотрим простейший случай диффракционного рассеяния нейтральных частиц, считая ядро абсолютно «чёрным» телом, поглощающим все падающие на него частицы.

Будем предполагать, что ядро имеет форму шара радиуса R и что длина волны нейтронов значительно меньше размеров ядра. При выполнении этого условия ядро можно считать абсолютно «чёрным» для нейтронов, попадающих в сферу действия ядра.

Оценим энергию нейтрона E_0 , при которой его длина волны λ становится равной радиусу ядра. Считая, что радиус ядра равен приблизительно $R = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см, где A — массовое число ядра, получим:

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2MR^2} = \frac{8,2}{A^{2/3}} \text{ MeV.}$$

При $A = 40$ $E_0 \approx 0,8$ MeV, при $A = 100$ $E_0 \approx 0,5$ MeV, при $A = 240$ $E_0 \approx 0,25$ MeV.

Итак, мы видим, что если энергия нейтронов превосходит несколько миллионов электрон-вольт, то выполняется условие

$$\lambda \ll R.$$

С другой стороны, хорошо известно, что если длина волны света мала по сравнению с размерами препятствия, то возможно получение общей формулы, описывающей диффракционные явления. Основываясь на этой оптической диффракционной формуле, найдём сперва диффракционную картину, возникающую при рассеянии быстрых нейтронов, а затем убедимся, что та же картина получается, если исходить из строгой квантовомеханической теории рассеяния. Прежде всего напомним эту формулу и, пользуясь ею, установим диффракционную картину в том случае, когда свет падает на абсолютно чёрный, поглощающий шар радиуса R .

Общая формула, определяющая диффракцию, имеет следующий вид [56]:

$$u = \int_S \frac{k}{2\pi i r} u_0 e^{ikr} df_n. \quad (20.1)$$

Здесь u — искомое поле в некоторой точке P , u_0 — поле в какой-либо точке поверхности интегрирования S , df_n — проекция элемента поверхности df на направление луча n , идущего от источника света к элементу df , r — расстояние от точки P до элемента поверхности df , k — волновой вектор. Поверхность S , в общем произвольного вида, покрывает отверстия в непрозрачном экране и ограничивается его краями. Значения поля u_0 предполагаются здесь такими же, как если бы вовсе не было никаких экранов.

В дальнейшем нас будет интересовать тот случай, когда и источник света и точка наблюдения P находятся на весьма больших расстояниях от экранов. В этом случае, который известен под названием диффракции Фраунгофера, лучи, идущие от источника света, падают на экраны параллельным пучком; параллельными являются также лучи, идущие от экранов в точку наблюдения. Поэтому при диффракции Фраунгофера мы имеем дело с изменением направления пучка света, претерпевшего диффракцию около экранов. Интенсивность света является в этом случае функцией угла отклонения света от первоначального направления. Этот угол называется углом диффракции.

В случае диффракции Фраунгофера все лучи, падающие на экран, имеют одинаковое направление, т. е. одинаковый волновой вектор k . Поэтому поле u_0 на поверхности интегрирования в формуле (20.1) можно представить в виде

$$u_0 = Ae^{ik\rho},$$

где A — постоянная, ρ — радиус-вектор, проведённый из некоторой точки O к элементу поверхности df (рис. 11). Как видно из этого рисунка, расстояние r от df до точки наблюдения P можно приближённо при большом R_0 заменить на

$$R \approx R_0 - \rho n',$$

где n' — единичный вектор в направлении R_0 , т. е. в направлении луча, идущего от экрана в точку наблюдения. Используя это соотношение и замечая, что в подинтегральном выражении величина $\frac{1}{r}$ может считаться постоянной и равной $\frac{1}{R_0}$,

представим общую формулу (20.1) в случае дифракции Фраунгофера в виде

$$u = \text{const.} \int_S e^{i(k-k') \cdot r} df_n, \quad (20.2)$$

где $\text{const.} = \frac{Ake^{ikR_0}}{2\pi i R_0}$ и $k' = kn'$ — волновой вектор диффракцированного луча.

Из формулы (20.2) вытекает важное свойство так называемых дополнительных экранов, т. е. двух таких плоских экранов, из которых один имеет отверстие там, где второй непрозрачен. Оно заключается в том, что диффракционные

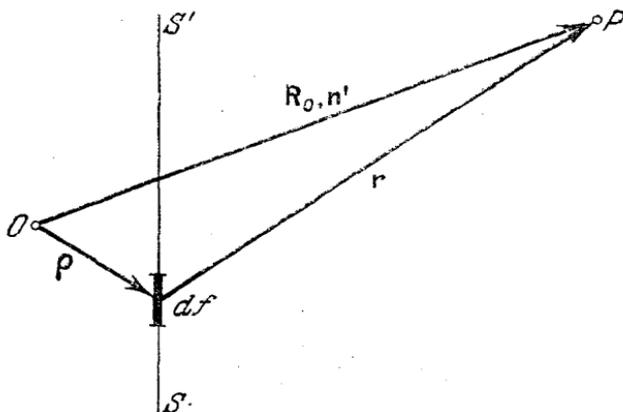


Рис. 11.

картины дополнительных экранов одинаковы. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно заметить, что если в качестве поверхности интегрирования в (20.2) взять всю бесконечную плоскость, в которой лежит отверстие, то (20.2) сведётся к $\delta(k-k')$, где δ — дираковская δ -функция. Поэтому при $k \neq k'$ этот интеграл обращается в нуль и, следовательно, для дополнительных экранов при $k \neq k'$ значения функции u отличаются только знаком. При $k = k'$ сформулированное выше свойство дополнительных экранов, вообще говоря, не имеет места.

Нас интересует диффракция от абсолютно чёрного шара радиуса R , на который падает параллельный пучок лучей. Диффракционная картина в этом случае, согласно сказанному выше, совпадает с диффракционной картиной от круглого отверстия радиуса R в непрозрачном экране, перпендикулярно плоскости которого падает свет. Важно заметить, что диффракционные картины совпадают также и при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, так как в этом направлении в обоих случаях имеет место максимум интенсивности.

Итак, рассмотрим диффракцию от круглого отверстия радиуса R . Обозначим проекцию вектора \mathbf{k}' на плоскость отверстия через x (вектор \mathbf{k} , как было сказано выше, перпендикулярен к этой плоскости).

Введём цилиндрические координаты z, ρ, φ с осью z , проходящей через центр отверстия перпендикулярно к его плоскости. Из соображений симметрии ясно, что интенсивность диффрагированных лучей будет зависеть только от x ; поэтому достаточно ограничиться рассмотрением луча идущего в плоскости $\varphi = 0$. Формула (20.2) приводит к следующему выражению для поля диффрагированной волны:

$$u = \text{const.} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{i x \rho \cos \varphi} \rho \, d\rho \, d\varphi = \\ = \frac{A k e^{i k R_0}}{i R_0} \int_0^R J_0(x\rho) \rho \, d\rho, \quad (20.2')$$

где $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i x \cos \varphi} d\varphi$ — функция Бесселя нулевого ранга.

Пользуясь известным из теории бesselовых функций соотношением

$$\int_0^R J_0(x\rho) \rho \, d\rho = \frac{R J_1(xR)}{x},$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого ранга, перепишем (20.2') в виде

$$u = R \frac{A k e^{i k R_0}}{i R_0} \frac{J_1(xR)}{x}. \quad (20.3)$$

Умножив $|u|^2$ на $R_0^2 d\omega$, где $d\omega$ — элемент телесного угла, в котором лежит вектор k' , найдём интенсивность света dI , диффрагированного в этом направлении:

$$dI = R^2 A^2 k^2 \left| \frac{J_1(xR)}{x} \right|^2 d\omega.$$

Замечая, что $A^2 \pi R^2$ представляет собой полную интенсивность падающего на отверстие света, которую мы обозначим через I_0 , представим dI в виде

$$dI = \frac{I_0}{\pi} \frac{J_1^2(kR \sin \theta)}{\sin^2 \theta} d\omega, \quad (20.4)$$

где θ — угол дифракции, связанной с x соотношением $x = k \sin \theta$.

Такой же формулой определяется распределение света при дифракции от абсолютно чёрного поглощающего шара [57]. В этом случае под I_0 следует понимать полную интенсивность света, падающего на площадь поперечного сечения шара. Мы видим, что в этом случае, так же как и при дифракции от круглого отверстия, максимум интенсивности лежит при $x = 0$, т. е. в направлении распространения падающего пучка света. Иными словами, максимум интенсивности лежит в центре тени, получаемой по законам геометрической оптики.

Аналогичной формулой должно определяться диффракционное упругое рассеяние быстрых нейтронов ядрами в том случае, когда ядра полностью поглощают падающие на них нейтроны. Под k и k' следует при этом понимать волновые векторы падающих и рассеянных нейтронов, а под I_0 — число нейтронов, падающих на площадь поперечного сечения ядра в единицу времени.

Формулу (20.4) в случае рассеяния нейтронов удобнее выражать в терминах эффективных сечений. Если разделить dI на плотность потока падающих нейтронов, равную $I_0/\pi R^2$, то мы получим дифференциальное поперечное сечение рассеяния $\sigma(\theta) d\omega$, отнесённое к элементу телесного угла $d\omega$. Оно определяется следующей формулой:

$$\sigma(\theta) d\omega = R^2 \left| \frac{J_1(kR \sin \theta)}{\sin \theta} \right|^2 d\omega. \quad (20.4')$$

Заметим, что по самому смыслу оптической диффракционной теории отклонения от геометрической оптики должны быть небольшими; это значит, что угол диффракции должен быть малым. Из полученной нами формулы (20.4') для сечения рассеяния легко заключить, что эффективный угол рассеяния мал и по порядку величины составляет $\frac{\lambda}{R} \ll 1$. Действительно, при больших значениях аргумента функция Бесселя $J_1(x)$ асимптотически равна

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \gg 1. \quad (20.5)$$

Поэтому в области углов, удовлетворяющих условию $1 > \sin \theta \gg \frac{1}{kR}$, сечение $\sigma(\theta)$ убывает обратно пропорционально $\sin^3 \theta$. Благодаря быстрому спаданию эффективного

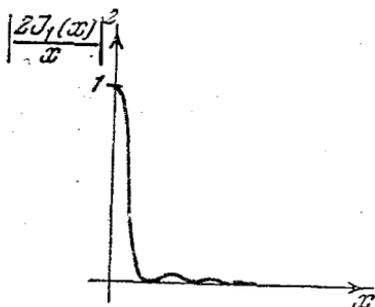


Рис. 12.

сечения при углах рассеяния, превышающих λ/R , главную роль в интегральном эффективном сечении играют углы порядка λ/R . Учитывая это обстоятельство, мы заменим в (20.4') $\sin \theta$ на θ и представим $\sigma(\theta) d\theta$ в виде

$$\sigma(\theta) d\theta = R^2 \left| \frac{J_1(kR\theta)}{\theta} \right|^2 d\theta. \quad (20.6)$$

Рис. 12, на котором изображена зависимость функции

$\left| \frac{2J_1(x)}{x} \right|^2$ от x , даёт представление о характере угловой зависимости сечения. Функция $\left| \frac{2J_1(x)}{x} \right|^2$ имеет резкий максимум при $x=0$ и далее, осциллируя, стремится к нулю при возрастании x .

В области малых углов рассеяния, когда $\theta \ll \frac{\lambda}{R}$, функции Бесселя $J_1(kR\theta)$ может быть заменена на $\frac{kR\theta}{2}$ и поэтому

$$\sigma(\theta) d\theta = \frac{k^2 R^2}{4} d\theta, \quad \theta \ll \frac{\lambda}{R}. \quad (20.7)$$

Таким образом, при очень малых углах дифференциальное сечение рассеяния стремится к постоянному пределу. Если углы θ удовлетворяют условию $1 \gg \theta \gg \frac{\lambda}{R}$, то функция Бесселя может быть заменена асимптотическим выражением (20.5) и $\sigma(\theta) d\theta$ имеет вид

$$\sigma(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} R \lambda \frac{\sin^2\left(\frac{R\theta}{\lambda} - \frac{\pi}{4}\right)}{\theta^3} d\theta, \quad 1 \gg \theta \gg \frac{\lambda}{R}.$$

Эффективное сечение в этой области углов быстро осциллирует с частотой $\frac{R}{\lambda}$, причём амплитуда колебаний убывает обратно пропорционально кубу угла рассеяния. В силу этого, как уже отмечалось выше, большие углы не играют роли, и эффективными в интегральном сечении оказываются углы порядка $\frac{\lambda}{R}$.

Итак, мы видим, что диффракционное рассеяние нейтронов характеризуется резкой асимметрией, нейтроны рассеиваются преимущественно вперёд. Эффективный угол рассеивания по порядку величины равен $\frac{\lambda}{R}$. При больших углах имеют место вторичные максимумы, отличающиеся, однако, значительно меньшей интенсивностью, чем главный максимум.

Определим полное эффективное сечение рассеяния σ_s . Интегрируя (20.6) и расширяя пределы интегрирования по $x = kR\theta$ от нуля до бесконечности, найдём:

$$\sigma_s = 2\pi R^2 \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(x)}{x} dx.$$

Последний интеграл равен $\frac{1}{2}$ [58]. Поэтому

$$\sigma_s = \pi R^2, \quad \lambda \ll R. \quad (20.8)$$

Таким образом, интегральное сечение рассеяния быстрых нейтронов, длина волны которых значительно меньше радиуса ядра, равна площади поперечного сечения последнего. Этот результат является совершенно естественным, так как при

$\lambda \ll R$ справедлива классическая механика, в которой, как известно, сечение рассеяния частиц непроницаемой сферой равно πR^2 .

Покажем теперь, что формула (20.6) может быть получена из общей квантовомеханической теории рассеяния частиц, рассмотренной в § 17.

Рассматривая быстрые нейтроны ($\lambda \ll R$), мы будем считать, что они поглощаются ядром, если только параметр столкновения меньше радиуса ядра. Так как $\lambda \ll R$, то параметр столкновения для нейтрона с моментом $l\hbar$ равен $l\lambda$. Поэтому мы приходим к выводу, что коэффициент прилипания ζ_l равен единице, если $l \leq \frac{R}{\lambda}$, и равен нулю, если

$l > \frac{R}{\lambda}$:

$$\zeta_l = \begin{cases} 1, & \text{если } l \leq \frac{R}{\lambda}, \\ 0, & \text{если } l > \frac{R}{\lambda}. \end{cases} \quad (20.9)$$

Отсюда следует, что β_l равно нулю, если $l \leq \frac{R}{\lambda}$.

Если $l > \frac{R}{\lambda}$, то нейтрон проходит вне ядра и с ним не взаимодействует. Поэтому для моментов количества движения $l > \frac{R}{\lambda}$ величина β_l равна единице. Итак,

$$\beta_l = \begin{cases} 0, & \text{если } l \leq R/\lambda, \\ 1, & \text{если } l > R/\lambda. \end{cases}$$

Прежде чем вычислять амплитуду рассеяния с этим значениями β_l , заметим, что резкое разграничение значений моментов количества движения, для которых коэффициент прилипания равен нулю и единице, имеет, конечно, приближенный характер. Это связано, во-первых, с неточностью квазиклассического рассмотрения, которым мы пользовались выше при определении β_l и, во-вторых, с нерезкостью ядерной границы, которая возникает благодаря движению ядерных частиц, расположенных у границы ядра. Поэтому можно

сказать, что введение критического момента $l_0 = \left[\frac{R}{\lambda} \right]$, ограничивающего значения моментов, для которых ζ равно нулю или единице, имеет смысл с точностью до величины порядка единицы.

Покажем, что тем не менее мы можем пользоваться приведёнными значениями β_l при определении сечения рассеяния быстрых нейтронов, для которых $\lambda \ll R$. Вычисление амплитуды рассеяния с этими значениями β_l даст, очевидно, правильный результат, если изменение l_0 на единицу не приведёт к заметному изменению амплитуды рассеяния. Записав $f(\theta)$ в виде

$$f(\theta) = -\frac{i\lambda}{2} \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) P_l(\cos \theta), \quad (20.10)$$

мы приходим к следующему условию применимости этого метода расчёта:

$$|P_{l_0}(\cos \theta) - P_{l_0 \pm 1}(\cos \theta)| \ll |P_{l_0}(\cos \theta)|. \quad (20.10')$$

Так как $l_0 \gg 1$, то для полиномов Лежандра можно воспользоваться асимптотическим выражением [58]

$$P_l(\cos \theta) \approx \left(\frac{2}{\pi l \sin \theta} \right)^{1/2} \cos \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (20.11)$$

[Эта формула справедлива, если $2(2l+3)\sin \theta \gg 1$]. Подстановка (20.11) в (20.10) приводит к выводу, что угол рассеяния должен быть малым по сравнению с единицей.

Таким образом, использование полученных квазиклассических значений β_l приводит к правильному результату при вычислении $f(\theta)$ в случае малых углов рассеяния.

Покажем теперь, что при $\lambda \ll R$ малые углы рассеяния играют главную роль. Воспользуемся для этого равенством [58]

$$(2l+1) P_l(\cos \theta) = P'_{l+1}(\cos \theta) - P'_{l-1}(\cos \theta). \quad (20.12)$$

Амплитуда рассеяния может быть представлена в виде

$$f(\theta) = \frac{i\lambda}{2} [P'_{l_0+1}(\cos \theta) + P'_{l_0}(\cos \theta)]. \quad (20.13)$$

Поставим сюда вместо $P_{l_0}(\cos \theta)$ выражение (20.11), получим:

$$f(\theta) = i\lambda \left(\frac{2l_0}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\sin^{3/2}\theta} \sin \left[\left(l_0 + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (20.13')$$

Это выражение показывает, что сечение рассеяния убывает с ростом угла обратно пропорционально $\sin^3 \theta$. Отсюда следует, что главную роль в упругом рассеянии нейтронов с $\lambda \ll R$ играют малые углы рассеяния, для которых наше рассмотрение является вполне законным. Заменяв $\sin \theta$ его аргументом, получим:

$$f(\theta) \approx iR \left(\frac{2}{\pi l_0}\right)^{1/2} \frac{\sin \left[\left(l_0 + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{\theta^{3/2}}. \quad (20.14)$$

Эта формула справедлива, если $2(2l_0 + 3)\theta \gg 1$.

Обратим теперь внимание на то, что при больших значениях аргумента для функции Бесселя $J_1(x)$ справедливо асимптотическое выражение (20.5). Сравнение этой формулы с (20.14) показывает, что при $2(2l_0 + 3)\theta \gg 1$

$$f(\theta) = iR \frac{J_1(l_0\theta)}{\theta}. \quad (20.15)$$

Это выражение для амплитуды рассеяния, совпадающее с полученным ранее при оптико-дифракционном рассмотрении, имеет существенное преимущество по сравнению с (20.14), так как оказывается справедливым при сколь угодно малых углах θ . Действительно, при $\theta \rightarrow 0$ точная формула (20.10) для $f(\theta)$ даёт

$$f(\theta) = \frac{i\lambda}{2} \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1).$$

Так как $l_0 \gg 1$, то эту сумму можно заменить интегралом:

$$f(0) \approx \frac{i\lambda}{2} \int_0^{l_0} 2l \, dl = \frac{l}{2} \frac{R^2}{\lambda}.$$

К такому же результату, как легко видеть, приводит и формула (20.15).

Умножив квадрат модуля $f(\theta)$ на элемент телесного угла, найдём дифференциальное сечение рассеяния

$$\sigma(\theta) d\omega = |f(\theta)|^2 d\omega = R^2 \left| \frac{J_1\left(\frac{R\theta}{\lambda}\right)}{\theta} \right|^2 d\omega. \quad (20.16)$$

Эта формула в точности совпадает с формулой (20.6), полученной из элементарных оптических соображений. Мы видим, следовательно, что и обычная теория диффракции и точная теория рассеяния, использующая основное предположение о непрозрачности ядра для нейтронов, приводят к одинаковым результатам, что, собственно говоря, и следовало ожидать.

Проинтегрировав (20.16) по углам, получим полное сечение упругого рассеяния

$$\sigma_s = \pi R^2.$$

Оно равно площади поперечного сечения ядра.

Подчеркнём ещё раз, что последняя величина представляет собой сечение упругого рассеяния быстрых нейтронов, вызываемого их поглощением. Существенно отметить, что самый факт наличия упругого рассеяния является прямым следствием поглощения нейтронов.

Выпадение нейтронов из пучка будет вызываться как их поглощением, так и рассеянием. Легко видеть, что сечение поглощения нейтронов в рассматриваемом случае малых длин волн также равняется πR^2 , так что полное сечение всех процессов равняется $2\pi R^2$. Чтобы убедиться в этом, следует воспользоваться формулой (17.8') и подставить в неё значение ζ_1 , даваемое (20.9). Мы получим следующее выражение для сечения захвата нейтронов:

$$\sigma_c = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) \approx \pi R^2.$$

Таким образом, сечение захвата, т. е. неупругого рассеяния быстрых нейтронов при $\lambda \ll R$, равняется площади поперечного сечения ядра («чёрное» ядро). Наличие поглощения обуславливает дополнительное упругое рассеяние (не связанное с образованием составного ядра и последующим

испусканием нейтрона), происходящее главным образом на малые углы, которое может быть названо диффракционным рассеянием и полное сечение которого, так же как и неупругого рассеяния, равняется πR^2 . Полное сечение для всех процессов как упругого, так и неупругого рассеяния быстрых нейтронов равняется $2\pi R^2$. Эта величина определяет выпадение нейтронов из пучка.

Следует подчеркнуть, что полученные нами результаты справедливы только при $\lambda \ll R$ (при $\lambda = \frac{1}{10} R$ величины σ_s и σ_e могут ещё заметно отличаться от своих предельных значений).

Изложенные закономерности диффракционного рассеяния нейтронов были экспериментально подтверждены рядом авторов [69], изучивших угловое распределение упруго рассеянных нейтронов с энергией ~ 14 MeV в свинце. Было показано, что это угловое распределение находится в соответствии с формулой (20.4'), если считать в ней радиус ядра свинца равным $\sim 8,7 \cdot 10^{-13}$ см.

§ 21. Диффракционное рассеяние быстрых нейтронов полупрозрачными ядрами

В предыдущем параграфе мы предполагали, что ядро поглощает все попадающие на него нейтроны ($l \leq R$), иными словами, мы считали, что длина свободного пробега нейтронов в ядерном веществе мала по сравнению с размерами ядра. Такое предположение становится неверным в области энергий порядка 100 MeV и выше, так как при этом начинает сказываться прозрачность ядер для попадающих на них быстрых частиц. Рассмотрим поэтому сейчас специально рассеяние очень быстрых нейтронов, длина свободного пробега которых в ядерном веществе сравнима с радиусом ядра.

Чтобы выяснить, какие изменения происходят в этом случае в картине диффракционного рассеяния быстрых нейтронов, будем попрежнему трактовать ядро феноменологически, считая, что ядерное вещество характеризуется некоторым коэффициентом поглощения нейтронов K и, кроме того, показателем преломления n . Поскольку речь идёт об

очень больших энергиях, можно считать, что первая из этих величин определяется произведением среднего сечения рассеяния нейтрона отдельными ядерными частицами-нуклонами $\bar{\sigma}$ на число этих частиц в единице объёма ^[60], т. е.

$$K = \frac{3A\bar{\sigma}}{4\pi R^3},$$

где A — массовое число и R — радиус ядра.

Показатель преломления нейтронной волны определяется средней потенциальной энергией нейтрона \bar{V} в ядре. Если волновой вектор падающего нейтрона вне ядра равен $k = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar}$, то волновой вектор нейтрона внутри ядра будет $k_1 = \frac{\sqrt{2M(E + \bar{V})}}{\hbar}$. Поэтому показатель преломления равняется

$$n = \frac{k_1}{k} = \sqrt{1 + \frac{\bar{V}}{E}}. \quad (21.1)$$

Оценим величины K и n ^[60]. Согласно имеющимся экспериментальным данным сечение рассеяния нейтронов с энергией 90 MeV свободными протонами равняется $\sim 8,3 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2$. Такому сечению соответствует $K \approx 2,4 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}$ для $\frac{Z}{A} = \frac{1}{2}$ и $K \approx 2,1 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}$ для $\frac{Z}{A} = 0,4$ (свинец). Величину средней потенциальной энергии нейтронов в ядре будем считать порядка 30 MeV. Тогда для нейтронов с энергией в 90 MeV, что соответствует $k = 2,08 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-1}$, показатель преломления будет $n = 1,155$ и $k(n - 1) = 3,22 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}$.

Наша задача состоит в том, чтобы определить рассеяние нейтронной волны сферой радиуса R , вещество которой характеризуется константами K и n . При этом следует иметь в виду, что приведённые значения этих величин относятся к внутренней области ядра; в пограничном слое K и n имеют меньшие значения и постепенно возрастают внутрь ядра, достигая приведённых значений на расстоянии от края ядра, превышающем $\frac{1}{k}$. В силу этого обстоятельства мы можем пренебречь отражёнными волнами на поверхности

ядра, так как даже внутри ядра $K \ll k$ и $n-1 \ll 1$. Поскольку $\lambda \ll R$, мы можем не учитывать кривизны ядерной поверхности. В этих условиях отношение амплитуды прошедшей через ядро нейтронной волны к амплитуде падающей волны равняется

$$\beta = e^{-\left[\frac{1}{2} K - i(n-1)k\right] 2s},$$

где $2s$ — путь, проходимый нейтроном в ядре. В этой формуле первое слагаемое в экспоненте определяет затухание волны на расстоянии $2s$, а второе — изменение фазы. Путь, проходимый нейтроном в ядре, связан с параметром столкновения b очевидным соотношением $2s = 2\sqrt{R^2 - b^2}$. В квазиклассическом приближении, которым мы имеем право пользоваться, $b \approx l\lambda$ и поэтому

$$s \equiv s_l = \sqrt{R^2 - l^2\lambda^2}.$$

Ясно, что определённая нами только что величина β совпадает с введённой ранее β_l . Поэтому мы можем воспользоваться общими формулами § 17, в которых следует считать β_l равными

$$\left. \begin{aligned} \beta_l &= e^{-[K - 2i(n-1)]s_l}, & l &\leq \frac{R}{\lambda}, \\ \beta_l &= 1, & l &> \frac{R}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Для амплитуды упругого рассеяния получим, согласно (17.5), следующее выражение:

$$f(\theta) = \frac{i\lambda}{2} \sum_{l=0}^{R/\lambda} (2l+1) \{1 - e^{-[K - 2i(n-1)]s_l}\} P_l(\cos \theta). \quad (21.3)$$

Так как при малых углах рассеяния и больших l , играющих основную роль в (21.3), справедливо соотношение $P_l(\cos \theta) \approx J_0(l \sin \theta)$, то формула (21.3) после замены суммирования интегрированием по l может быть представлена в виде

$$f(\theta) = i\lambda \int_0^{R/\lambda} l \{1 - e^{-[K - 2i(n-1)k]s_l}\} J_0(l \sin \theta) dl.$$

Переходя от переменной l к новой переменной интегрирования — параметру столкновения $b = \tilde{\lambda}l$, получим:

$$f(\theta) = ik \int_0^R \left\{ 1 - e^{-[K - 2i(n-1)k]s} \right\} J_0(kb \sin \theta) b db. \quad (21.4)$$

Заметим, что эту формулу можно получить также из элементарной диффракционной теории. Чтобы учесть прозрачность ядра — экрана, мы должны в основной диффракционной формуле (20.2), записанной в виде

$$f(\theta) = \frac{ik}{2\pi} \int_S A' e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}} df_n, \quad (21.4')$$

понимать под A' разность амплитуд падающей и прошедшей через ядро нейтронной волны:

$$A' = 1 - e^{-[K - 2i(n-1)k]s}.$$

Интегрирование в (21.4') следует производить по площади круга радиуса R . Замечая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-x b \cos \varphi} d\varphi = J_0(xb)$$

($x = k \sin \theta$), приведём (21.4') к виду (21.4). Считая в формуле (21.4) $KR \gg 1$, мы придём к амплитуде рассеяния нейтронов для абсолютно «чёрного» ядра.

Определим теперь интегральное сечение упругого рассеяния нейтронов полупрозрачным ядром. Согласно (17.6) оно определяется следующей формулой:

$$\sigma_s = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{R/\tilde{\lambda}} (2l+1) \left| 1 - e^{[-K + 2i(n-1)k]s_l} \right|^2. \quad (21.5)$$

Переходя здесь от суммирования к интегрированию по b , получим:

$$\begin{aligned}\sigma_s &\approx \pi \tilde{\lambda}^2 \int_0^{R/\tilde{\lambda}} (2l+1) |1 - e^{-[K-2i(n-1)k]s}|^2 dl = \\ &= 2\pi \int_0^R |1 - e^{-[K-2i(n-1)k]s}|^2 b db.\end{aligned}$$

Выполнив интегрирование по b , получим следующий окончательный результат:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \pi R^2 \left[1 + \frac{1}{2K^2 R^2} \{1 - (1 + 2KR) e^{-2KR}\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\left(\frac{1}{4} K^2 + (n-1)^2 k^2\right) R^2} \left\{ \left(\frac{1}{4} K^2 - (n-1)^2 k^2\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-KR} \left[2(n-1)kR \left(\frac{1}{4} K^2 + (n-1)^2 k^2\right) + (n-1)kK \right] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sin 2(n-1)kR - e^{-KR} \left[\left(\frac{1}{4} K^2 - (n-1)^2 k^2\right) + KR \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \left(\frac{1}{4} K^2 + (n-1)^2 k^2\right) \right] \cos 2(n-1)kR \right\} \right]. \quad (21.6)\end{aligned}$$

Сечение захвата нейтрона может быть определено на основании (17.8)

$$\sigma_c = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{R/\tilde{\lambda}} (2l+1) (1 - e^{-2Ks_l}). \quad (21.7)$$

Переходя здесь от суммирования к интегрированию по l и снова полагая $l = kb$, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_c &= 2\pi \int_0^R (1 - e^{-2Ks}) b db = 2\pi \int_0^R (1 - e^{-2Ks}) s ds = \\ &= \pi R^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} (KR)^{-2} [1 - (1 + 2KR) e^{-2KR}] \right\}. \quad (21.8)\end{aligned}$$

При $KR \gg 1$ мы получаем прежний результат

$$\sigma_c = \pi R^2.$$

На рис. 13 [60] представлена зависимость величин $\frac{\sigma_s}{\pi R^2}$, $\frac{\sigma_c}{\pi R^2}$, $\frac{\sigma_t}{\pi R^2}$ от KR при энергии нейтронов $E = 90$ MeV; энергия взаимодействия нейтрона с ядром считается ~ 31 MeV и K принято равным $2,2 \cdot 10^{12}$ см⁻¹, что соответствует средней длине свободного пробега нейтрона в ядерном веществе $L \approx 4,5 \cdot 10^{-18}$ см.

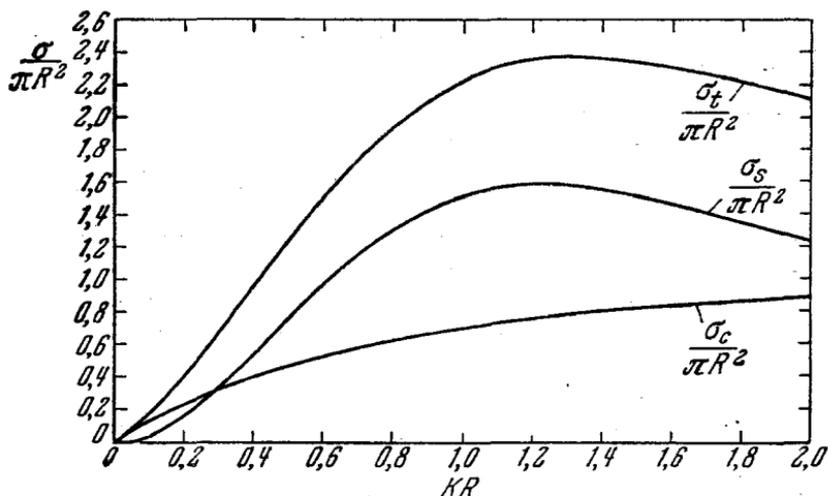


Рис. 13.

Так как из экспериментов по рассеянию более медленных нейтронов ядрами, которые почти полностью поглощают падающие на них нейтроны, можно непосредственно определять радиусы ядер, то сопоставление этих данных с данными о рассеянии очень быстрых нейтронов, для которых ядра становятся полупрозрачными, даст возможность определить длину свободного пробега нейтронов в ядерном веществе и коэффициент преломления нейтронной волны n ; последний зависит от средней энергии взаимодействия нейтрона с ядром ($n = \sqrt{1 + \frac{V}{E}}$), поэтому возможно, что таким путём удастся определить энергию этого взаимодействия.

§ 22. Диффракционное рассеяние быстрых заряженных частиц

Перейдём к рассмотрению рассеяния быстрых заряженных частиц, которые могут поглощаться ядрами [55, 91]. При этом также должны происходить диффракционные явления, в некоторой мере аналогичные диффракции быстрых нейтронов. Явление, однако, усложняется наличием заряда у частиц. В силу этого мы не можем пользоваться элементарной оптической теорией для описания интересующего нас рассеяния, которое можно охарактеризовать как диффракцию заряженных лучей около абсолютно чёрного заряженного тела. Чтобы определить амплитуду рассеяния, следует с самого начала пользоваться общей формулой теории рассеяния (17.5).

Мы должны прежде всего выяснить, какой вид имеют теперь величины β_1 и ζ_1 . В отличие от случая нейтронов, для которых β_1 равняется единице, если параметр столкновения превышает радиус ядра, при рассеянии заряженных частиц β_1 всегда, для всех сколь угодно больших значений l отлично от единицы. Это связано с кулоновским рассеянием, существующим при всех сколь угодно больших значениях параметра столкновения.

Так же, как и в случае быстрых нейтронов, будем предполагать, что заряженная частица, попадающая в сферу действия ядра, поглощается последним. Рассматривая нейтроны, мы считали, что поглощение происходит в том случае если параметр столкновения не превосходит радиуса ядра. Для заряженных частиц условие поглощения должно быть сформулировано несколько иначе.

В рассматриваемом нами случае быстрых частиц, длина волны которых мала по сравнению с размерами ядра, справедливо квазиклассическое рассмотрение. Поэтому можно сказать, что для поглощения частицы во всяком случае необходимо, чтобы кратчайшее расстояние r_0 между ядром и частицей, двигающейся по законам классической механики, не превосходило радиуса ядра R

$$r_0 \leq R. \quad (22.1)$$

Величину r_0 легко связать с параметром столкновения b . Обозначая скорость частицы при наименьшем и бесконечном

расстояниях от ядра соответственно через v_0 и v_∞ , имеем на основании закона сохранения момента $\frac{r_0}{b} = \frac{v_\infty}{v_0}$. Отношение скоростей равняется, очевидно:

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Zee'}{r_0 E}}},$$

где E — энергия падающей частицы, e' — её заряд, Ze — заряд ядра. Поэтому $r_0 = b \left(1 - \frac{Zee'}{r_0 E}\right)^{-1/2}$, и неравенство (22.1) приобретает вид

$$b \leq R \sqrt{1 - \frac{Zee'}{RE}}. \quad (22.2)$$

Таково условие, которому должен удовлетворять параметр столкновения для того, чтобы частица могла быть поглощённой ядром.

Ниже мы будем предполагать, что если условие (22.2) выполняется, то частица поглощается ядром. При $e' = 0$ это условие переходит в условие поглощения нейтронов, которым мы пользовались выше. Для отрицательно заряженных частиц параметр столкновения может превосходить радиус ядра. Для положительно заряженных частиц параметр столкновения должен быть меньше радиуса ядра. В этом последнем случае величина $\frac{Zee'}{R}$ представляет собой, очевидно, высоту барьера, препятствующего прохождению частицы в ядро. Обозначая высоту барьера через B , перепишем (22.2) в виде

$$b \leq R \sqrt{1 - \frac{B}{E}}, \quad e' > 0.$$

С ростом E радикал стремится к единице, поэтому при $E \gg B$ условие поглощения заряженных частиц совпадает с условием поглощения нейтронов.

В квазиклассическом приближении, которым можно пользоваться в случае быстрых частиц, параметр столкновения равен, как известно, $\lambda_{\infty} l$, где λ_{∞} — длина волны частицы на бесконечном расстоянии от ядра, $\hbar l$ — момент частицы. От-

сюда видно, что для поглощения частицы её момент l не должен превосходить величины

$$l_0 = \frac{R}{\lambda_\infty} \sqrt{1 - \frac{Zee'}{RE}}$$

$$l \leq l_0 \equiv \frac{R}{\lambda_\infty} \sqrt{1 - \frac{Zee'}{RE}}. \quad (22.2')$$

Это условие заменяет для заряженных частиц условие $l \leq \frac{R}{\lambda}$, относящееся к нейтронам. Легко видеть, что величина

$$\lambda_\infty \left(1 - \frac{Zee'}{RE}\right)^{-1/2}$$

представляет собой длину волны частицы на поверхности ядра. Обозначая её через λ_0 , мы можем переписать (22.2') в виде

$$l \leq \frac{R}{\lambda_0}.$$

Итак, мы предполагаем, что частица, длина волны которой значительно меньше радиуса ядра, поглощается ядром, если её момент количества движения не превосходит l_0 , т. е. коэффициент прилипания ζ_l равен единице, если $l \leq l_0$. Отсюда следует, что при $l \leq l_0$ $\beta_l = 0$.

Так же, как и в случае нейтронов, следует иметь в виду, что при очень больших энергиях ядро становится прозрачным для падающих на него заряженных частиц. Мы будем предполагать, что энергии лежат ниже того предела, при котором ядро становится прозрачным для частиц.

Приведём значения величины l_0 , которую можно назвать критическим значением момента для различных частиц в зависимости от энергии E . Для тяжёлых ядер (в конце периодической системы) высота потенциального барьера составляет примерно 12—14 MeV для протонов и 25—28 MeV для α -частиц. Для таких ядер и протонов с энергией порядка 15 MeV величина l_0 равна примерно 4; при энергии протонов ~ 25 MeV $l_0 \sim 7$. Для тяжёлых ядер и α -частиц с энергией 50 MeV $l_0 \sim 20$; для α -частиц с энергией 25 MeV $l_0 \sim 5$. В случае более лёгких ядер ($A \approx 100$) и протонов с энергией 25 MeV

$l_0 \sim 6$; для таких же ядер и α -частиц с энергией 50 MeV $l_0 \sim 17$.

Если орбитальный момент частицы превосходит l_0 , то коэффициент прилипания равняется нулю. Отсюда следует, что коэффициенты рассеяния β_l при $l > l_0$ равны по модулю единице. В случае нейтронов, проходящих вне ядра, мы попросту считали β_l равным единице. В случае заряженных частиц, проходящих на сколько угодно большом расстоянии от ядра, всегда имеет место рассеяние, вызываемое кулоновскими силами, поэтому β_l при $l > l_0$ отлично от единицы. Можно считать, что при $l > l_0$ фазы на бесконечности будут такими же, как и в случае чисто кулоновского рассеяния. В последнем случае, как известно, фаза на бесконечности η_l равняется

$$\eta_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\alpha),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\alpha = \frac{Ze^2}{\hbar v}$; v — скорость частицы на бесконечном расстоянии от ядра. Таким образом, при $l > l_0$

$$\beta_l = e^{2i\eta_l}.$$

Теперь можно сформулировать задачу определения амплитуды рассеяния быстрых заряженных частиц поглощающим ядром следующим образом: требуется найти величину $f(\theta)$, определяемую формулой (17.5), в которой β_l равны

$$\beta_l = \begin{cases} 0, & \text{если } l \leq l_0, \\ e^{2i\eta_l}, & \text{если } l > l_0. \end{cases} \quad (22.3)$$

Прежде чем переходить к вычислению $f(\theta)$, заметим, так же как это было сделано выше при рассмотрении рассеяния нейтронов, что резкое разграничение значений орбитальных моментов, для которых коэффициент прилипания равен нулю и единице, имеет приближенный характер. Можно сказать, что введение критического момента l_0 имеет смысл с точностью до величины порядка единицы. Поэтому вычисление $f(\theta)$ с приведенными выше значениями β_l даст правильный результат, если в написанной ниже сумме (22.4) роль промежуточных членов, т. е. членов со значениями l , близкими к l_0 , будет незначительной. Иными словами, наш метод расчёта $f(\theta)$ даст правильный результат, если при изменении l_0 на вели-

чину порядка единицы амплитуда рассеяния изменится незначительно.

Чтобы выяснить, к каким условиям приводит это требование, выпишем амплитуду рассеяния с определёнными выше значениями β_l :

$$f(\theta) = \frac{1}{2} i\tilde{\lambda} \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) P_l(\cos\theta) - \frac{1}{2} i\tilde{\lambda} \sum_{l_0}^{\infty} (2l+1) \times \\ \times (e^{2i\eta_l} - 1) P_l(\cos\theta). \quad (22.4)$$

Изменение l_0 на величину порядка единицы не скажется на амплитуде рассеяния при выполнении условий

$$\left. \begin{aligned} |P_{l_0}(\cos\theta) - P_{l_0 \pm 1}(\cos\theta)| &\ll |P_{l_0}(\cos\theta)|, \\ |\eta_{l_0 \pm 1} - \eta_{l_0}| &\ll |\eta_{l_0}|. \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

Первое из этих неравенств уже рассматривалось выше и было показано, что оно приводит к условию

$$\theta \ll 1.$$

Рассмотрим теперь второе неравенство. Используя формулу Стирлинга *), определяющую $\Gamma(z)$ при больших $|z|$, можно представить $e^{2i\eta_l}$ в случае больших значений l в виде

$$e^{2i\eta_l} = \frac{\Gamma(1+l+ia)}{\Gamma(1+l-ia)} \approx e^{2ia \ln l}, \quad l \gg 1.$$

Отсюда легко заключить, что второе из неравенств (22.5) приводит к условию

$$a \ll l_0.$$

Таким образом, вводя квазиклассически величину l_0 , ограничивающую значения l , для которых коэффициент прилипания равен нулю и единице, мы получим правильный результат для амплитуды рассеяния в области малых углов рассеяния, если только длина волны частицы на поверхности

*) Эта формула имеет вид [58]

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}.$$

ядра мала по сравнению с его радиусом и если $\alpha \ll l_0$. Как будет видно из дальнейшего, главную роль при $\lambda \ll R$ играют малые углы рассеяния, для которых наше рассмотрение является вполне законным.

Перейдем к исследованию формулы (22.4), определяющей амплитуду рассеяния.

Заметим предварительно, что бесконечный ряд, определяющий $f(\theta)$, строго говоря, расходится, так как фаза η_l не стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$. Это связано с отмечавшимся уже ранее свойством кулоновского взаимодействия: рассеяние, обусловливаемое кулоновскими силами, происходит при сколь угодно больших расстояниях между частицами. Тем не менее ряд (22.4) является суммируемым: его можно рассматривать как предел степенного ряда, члены которого отличаются от соответствующих членов (22.4) множителями ε^l , где $\varepsilon < 1$ и $\varepsilon \rightarrow 1$. Если $\theta \neq 0$, то существует предел суммы этого ряда при $\varepsilon \rightarrow 1$; сумму ряда (22.4) мы и считаем равной этому пределу.

Бесконечную сумму, входящую в (22.4), можно связать с амплитудой кулоновского рассеяния, которая отличается от бесконечной суммы (22.4) тем, что в ней суммирование производится не от l_0 , а от нуля. Поэтому $f(\theta)$ можно записать в виде

$$f(\theta) = \frac{1}{2} i \lambda \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) e^{2i\eta_l} P_l(\cos \theta) + f_{\text{кулон}}(\theta), \quad (22.6)$$

где $f_{\text{кулон}}(\theta)$ — амплитуда кулоновского рассеяния, равная, как известно,

$$\begin{aligned} f_{\text{кулон}}(\theta) &= -\frac{Ze^2}{Mv^2} e^{-2i\alpha \ln \sin \frac{\theta}{2} + 2i\eta_0} \frac{1}{1 - \cos \theta} = \\ &= -\alpha \lambda e^{-2i\alpha \ln \sin \frac{\theta}{2} + 2i\eta_0} \frac{1}{1 - \cos \theta}. \end{aligned} \quad (22.6')$$

Формулой (22.6) неудобно пользоваться; поэтому преобразуем несколько основное соотношение (22.4). Рассмотрим с этой целью ряд $\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta)$. Этот ряд также рас-

ходится, но является суммируемым в указанном выше смысле, и его сумма при $\theta \neq 0$ равняется нулю. Вычитая этот ряд из (22.4), представим амплитуду $f(\theta)$ в виде

$$f(\theta) = -\frac{i\lambda}{2} \sum_{l_0}^{\infty} (2l+1) e^{2i\alpha \ln l} P_l(\cos \theta). \quad (22.7)$$

Заметим теперь, что если амплитуду кулоновского рассеяния умножить на $(1 - \cos \theta)$, то мы получим конечную величину при всех сколь угодно малых углах. По этой причине оказывается целесообразным преобразовать формулу (22.7), умножив её предварительно на $(1 - \cos \theta)$ и используя известное соотношение

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x).$$

При этом получится следующее выражение для $(1 - \cos \theta) \times f(\theta)$:

$$\begin{aligned} (1 - \cos \theta) f(\theta) = & -\frac{i\lambda}{2} \sum_{l_0}^{\infty} l^{2i\alpha} [(2l+1)P_l(\cos \theta) - \\ & - (l+1)P_{l+1}(\cos \theta) - lP_{l-1}(\cos \theta)] = -\frac{i\lambda}{2} \left\{ l_0(l_0-1)^{2i\alpha} \times \right. \\ & \times P_{l_0}(\cos \theta) - l_0^{2i\alpha+1} P_{l_0-1}(\cos \theta) + \sum_{l_0}^{\infty} [(2l+1)l^{2i\alpha} - \\ & \left. - l(l-1)^{2i\alpha} - (l+1)^{2i\alpha+1}] P_l(\cos \theta) \right\}. \quad (22.8) \end{aligned}$$

Так как $l_0 \gg 1$, то выражение, стоящее в квадратных скобках в последней формуле с точностью до $1/l^2$ равняется $-(2i\alpha)^2 l^{2i\alpha-1}$, поэтому формула (22.8) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} (1 - \cos \theta) f(\theta) = & -\frac{i\lambda}{2} \left\{ l_0^{2i\alpha+1} [P_{l_0}(\cos \theta) - P_{l_0-1}(\cos \theta)] - \right. \\ & \left. - 2i\alpha l_0^{2i\alpha} P_{l_0}(\cos \theta) - (2i\alpha)^2 \sum_{l_0}^{\infty} l^{2i\alpha-1} P_l(\cos \theta) \right\}. \quad (22.8') \end{aligned}$$

Выше мы указывали, что наш метод определения амплитуды рассеяния является законным только при малых углах рас-

сеяния и больших l_0 . Если $\theta \ll 1$ и $l_0 \gg 1$, то, как известно, справедливо соотношение $P_l(\cos \theta) \approx J_0(l\theta)$, где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого ранга. Принимая ещё во внимание неравенство $\alpha \ll l_0$, из которого следует, что относительное изменение множителя $l^{2i\alpha}$ при переходе от l к $l+1$ значительно меньше единицы, можно заменить бесконечную сумму, входящую в (22.8') интегралом:

$$\sum_{l_0}^{\infty} l^{2i\alpha-1} P_l(\cos \theta) \approx \theta^{-2i\alpha} \int_{l_0\theta}^{\infty} z^{2i\alpha} \frac{J_0(z)}{z} dz.$$

Кроме того, разность $P_{l_0}(\cos \theta) - P_{l_0-1}(\cos \theta)$ можно заменить на $\theta J'_0(l_0\theta) = -\theta J_1(l_0\theta)$. Поэтому окончательно мы получим следующее выражение для $f(\theta)$:

$$f(\theta) = -i\lambda \left\{ l_0^{2i\alpha+1} \frac{J_1(l_0\theta)}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \left[2i\alpha l_0^{2i\alpha} J_0(l_0\theta) + \right. \right. \\ \left. \left. + (2i\alpha)^2 \theta^{-2i\alpha} \int_{l_0\theta}^{\infty} z^{2i\alpha} \frac{J_0(z)}{z} dz \right] \right\}. \quad (22.9)$$

При $\alpha = 0$ это выражение переходит в известное уже нам выражение для амплитуды рассеяния нейтральных частиц.

Входящий в (22.9) интеграл, который мы обозначим через $L_\alpha(l_0\theta)$, не выражается в общем случае через известные трансцендентные функции. Он может быть назван диффракционным интегралом исследуемой задачи. Ниже мы будем пользоваться следующими обозначениями для его вещественной и мнимой частей:

$$C_\alpha(x) = \int_x^{\infty} \cos(2\alpha \ln z) \frac{J_0(z)}{z} dz, \\ S_\alpha(x) = \int_x^{\infty} \sin(2\alpha \ln z) \frac{J_0(z)}{z} dz.$$

Умножив квадрат модуля $f(\theta)$ на элемент телесного угла $d\theta$, получим дифференциальное сечение рассеяния, которое может быть представлено в виде

$$\sigma(\theta) d\theta = \frac{4\alpha^2 \lambda^2}{\theta^4} N(l_0\theta; \alpha) d\theta, \quad (22.9')$$

где $\frac{4\alpha^2\lambda^2}{\theta^4} \equiv \sigma_R(\theta)$ — дифференциальное сечение рассеяния в чисто кулоновском поле при малых углах рассеяния*), а $N(l_0\theta, \alpha)$ — множитель, определяющий отклонение сечения от формулы Резерфорда. Этот множитель равен

$$N(x, \alpha) = J_0^2(x) + \left(\frac{x}{2\alpha}\right)^2 J_1^2(x) + 4\alpha^2 \{C_\alpha^2(x) + S_\alpha^2(x)\} + \\ + 2C_\alpha(x) \{\alpha \sin(2\alpha \ln x) J_0(x) - x \cos(2\alpha \ln x) J_1(x)\} - \\ - 2S_\alpha(x) \{\alpha \cos(2\alpha \ln x) J_0(x) + x \sin(2\alpha \ln x) J_1(x)\},$$

где $x = l_0\theta$.

Отличие от сечения в чисто кулоновском поле обусловлено возможностью поглощения частиц ядрами. На рис. 14 пока-

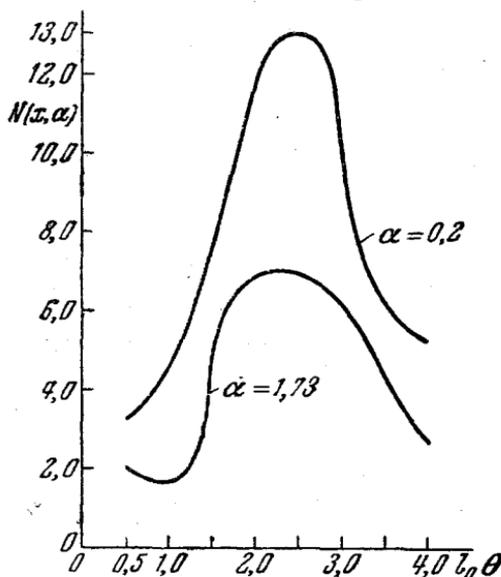


Рис. 14.

зан ход зависимости множителя $N(x, \alpha)$ от $l_0\theta$ для двух значений α .

*) Амплитуда этого рассеяния при $\theta \ll 1$ равна

$$f_{\text{Кулон}}(\theta) = -\frac{2\alpha\lambda}{\theta^2} e^{-2i\alpha \ln \frac{\theta}{2} + 2i\eta_0}.$$

Диффракционный интеграл может быть выражен через известные функции в ряде предельных случаев, которые мы здесь приведём [61].

Если $x \ll 1$, то при любых α справедливо соотношение

$$L_\alpha(x) = \frac{1}{2i\alpha} e^{2i\alpha \ln 2 + 2i\eta_0} - \frac{x^{2i\alpha}}{2i\alpha}, \quad x \ll 1. \quad (22.10)$$

Если $x \gg 1$ и $\alpha \ll x$, то

$$L_\alpha(x) = -x^{2i\alpha-1} J_1(x), \quad x \gg 1, \quad \alpha \ll x. \quad (22.11)$$

Если $x \gg 1$ и $2\alpha > x$, то

$$L_\alpha(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{i(2\alpha \ln 2\alpha - 2\alpha)}. \quad (22.12)$$

Выясним теперь поведение амплитуды и сечения рассеяния. Начнём со случая малых α , $\alpha \ll 1$. Рассмотрим сперва область малых углов рассеяния θ , удовлетворяющих условию $l_0\theta \ll 1$. Для малых значений аргумента диффракционный интеграл определяется формулой (22.10). Пользуясь этой формулой и замечая, что при $x \ll 1$, $J_0(x) \approx 1$, $J_1(x) \approx \frac{x}{2}$, представим $f(\theta)$ в виде

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{2} l_0^2 e^{2i\alpha \ln l_0 + i\frac{\pi}{2}} - \frac{2\alpha\lambda}{\theta^2} e^{-2i\alpha \ln \frac{\theta}{2} + 2i\eta_0}, \quad l_0\theta \ll 1. \quad (22.13)$$

Первое слагаемое в этой формуле, не зависящее от угла θ , представляет собой амплитуду диффракционного, а второе слагаемое, обратно пропорциональное θ^2 , — амплитуду кулоновского рассеяния.

Дифференциальное сечение рассеяния при $l_0\theta \ll 1$ равняется

$$\sigma(\theta) = \frac{4\alpha^2\lambda^2}{\theta^4} \left\{ 1 - \frac{(l_0\theta)^4}{16\alpha^2} + \frac{(l_0\theta)^2}{2\alpha} \sin\left(2\alpha \ln \frac{l_0\theta}{2} - 2\eta_0\right) \right\}. \quad (22.13')$$

Множитель в фигурных скобках, определяющий отклонение от формулы Резерфорда, может значительно отличаться от единицы. Если $(l_0\theta)^2 \ll 2\alpha$, т. е. $\theta \ll \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$, то этот мно-

житель практически равен единице и сечение определяется формулой Резерфорда

$$\sigma(\theta) = \frac{4\alpha^2 \lambda^2}{\theta^4}, \quad \theta \ll \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}, \quad \alpha \ll 1. \quad (22.14)$$

Если $\frac{1}{l_0} \gg \theta \gg \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$, то множитель сводится к $\frac{(l_0\theta)^4}{16\alpha^2}$, сечение не зависит от угла рассеяния и равняется

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4} \lambda^2 l_0^4, \quad \frac{1}{l_0} \gg \theta \gg \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}, \quad \alpha \ll 1. \quad (22.15)$$

Это выражение совпадает с сечением рассеяния быстрых нейтронов в том случае, когда $\theta \ll \frac{1}{l_0}$.

Рассмотрим теперь углы рассеяния, превосходящие $\frac{1}{l_0}$. При малых значениях α диффракционный интеграл определяется формулой (22.11). С ростом $l_0\theta$ он убывает как $(l_0\theta)^{-3/2}$. В выражении (22.9), определяющем $f(\theta)$, основную роль играет первое слагаемое

$$f(\theta) = -i\lambda l_0^{2\alpha} \frac{l_0}{\theta} J_1(l_0\theta), \quad 1 \gg \theta \gg \frac{1}{l_0}, \quad \alpha \ll 1. \quad (22.16)$$

В этих условиях амплитуда рассеяния заряженных частиц только фазой отличается от амплитуды рассеяния нейтронов. Сечение рассеяния как для тех, так и для других частиц одинаково и равняется

$$\sigma(\theta) = \lambda^2 l_0^2 \left| \frac{J_1(l_0\theta)}{\theta} \right|^2, \quad 1 \gg \theta \gg \frac{1}{l_0}, \quad \alpha \ll 1. \quad (22.16')$$

Итак, в рассмотренных предельных случаях сечение рассеяния определяется либо формулой Резерфорда, либо формулой (20.6), описывающей диффракционное рассеяние нейтронов, причём тот или другой случай имеет место в зависимости от того, какое рассеяние больше — кулоновское или диффракционное. Величина $\frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$ разграничивает области углов с разными законами рассеяния. На рис. 15 схематически показаны разные области рассеяния.

Перейдём к исследованию случая больших α , $\alpha \gg 1$. Начнём с рассмотрения малых углов рассеяния $\theta \ll \frac{1}{l_0}$. В этом случае диффракционный интеграл определяется формулой (22.10). Сечение рассеяния определяется формулой (22.13'),

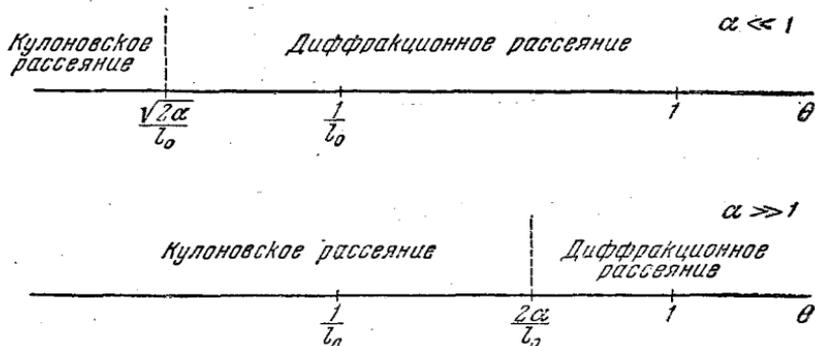


Рис. 15.

справедливой при любых значениях α . В частности, кулоновское рассеяние имеет место при углах $\theta \ll \frac{\sqrt{2}\alpha}{l_0}$. Однако, как мы сейчас увидим, область применимости формулы Резерфорда значительно расширяется в сторону больших углов, которые должны лишь удовлетворять условию $\theta \ll \frac{2\alpha}{l_0}$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим углы $\theta \gg \frac{1}{l_0}$. Если $\alpha \gg l_0 \theta \gg 1$, то диффракционный интеграл определяется формулой (22.12). Амплитуда рассеяния приобретает вид

$$\begin{aligned}
 f(\theta) = i\lambda \left[l_0^{2i\alpha} \frac{l_0}{\theta} J_1(l_0\theta) + \right. \\
 \left. + \frac{2i\alpha}{\theta^2} l_0^{2i\alpha} J_0(l_0\theta) - \frac{2\alpha}{\theta^2} e^{-2i\alpha \left(\ln \frac{\theta}{2} - \ln \alpha + 1 \right)} \right] \approx \\
 \approx - \frac{2i\alpha\lambda}{\theta^2} e^{-2i\alpha \left(\ln \frac{\theta}{2} - \ln \alpha + 1 \right)}. \quad (22.17)
 \end{aligned}$$

Точно такой же формулой определяется амплитуда рассеяния в кулоновском поле в том случае, когда $\alpha \gg 1$. Действи-

тельно, фазовый множитель $e^{2i\gamma_0}$ при $\alpha \gg 1$ может быть представлен в виде

$$e^{2i\gamma_0} = \frac{\Gamma(1 - i\alpha)}{\Gamma(1 + i\alpha)} \approx i e^{-i2\alpha + 2i\alpha \ln \alpha}$$

(мы воспользовались формулой Стирлинга). Поэтому амплитуда $f_{\text{кулон}}(\theta)$ при $\alpha \gg 1$ равняется

$$f_{\text{кулон}}(\theta) = -\frac{2i\alpha\lambda}{\theta^2} e^{-2i\alpha \left(\ln \frac{\theta}{2} - \ln \alpha + 1\right)},$$

что совпадает с (22.17).

Итак, в области углов $\frac{1}{l_0} \ll \theta \ll \frac{2\alpha}{l_0}$ рассеяние является чисто кулоновским.

В области углов $\frac{2\alpha}{l_0} \ll \theta \ll 1$ диффракционный интеграл определяется формулой (22.11). В выражении (22.9) для амплитуды рассеяния первое слагаемое значительно больше двух остальных. Поэтому

$$f(\theta) = i\lambda l_0^{2i\alpha} \frac{l_0}{\theta} J_1(l_0\theta)$$

и

$$\sigma(\theta) = \lambda^2 l_0^2 \left| \frac{J_1(l_0\theta)}{\theta} \right|^2 \approx \frac{2}{\pi} l_0 \lambda^2 \frac{\sin^2\left(l_0\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\theta^3},$$

$$\frac{2\alpha}{l_0} \ll \theta \ll 1.$$

Мы получили выражение для сечения диффракционного рассеяния нейтронов.

Таким образом, при $\alpha \gg 1$ в области углов $\theta \ll \frac{2\alpha}{l_0}$ рассеяние является кулоновским, а в области углов $\frac{2\alpha}{l_0} \ll \theta \ll 1$ — диффракционным. Разграничение двух областей углов с разными законами рассеяния происходит при $\theta \sim \frac{2\alpha}{l_0}$, в то время как в случае $\alpha \ll 1$ такое разграничение имеет место при $\theta \sim \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$ (см. рис. 15). Следовательно, при $\alpha \gg 1$ область углов, в которой сечение рассеяния опре-

деляется формулой Рёзерфорда, относительно шире, чем при малых α .

Заметим, что в случае $\alpha \ll 1$ амплитуды кулоновского и диффракционного рассеяния совпадают по порядку величины при $\theta \sim \frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$. В случае $\alpha \gg 1$ эти амплитуды при $\theta \sim \frac{2\alpha}{l_0}$ не совпадают, напротив, амплитуда кулоновского рассеяния превосходит амплитуду диффракционного рассеяния в $\alpha^{1/2}$ раз. Равенство амплитуд имеет место при $\theta \sim \frac{4\alpha^2}{l_0}$ и лишь при больших углах амплитуда диффракционного рассеяния становится больше амплитуды кулоновского рассеяния. Выше, однако, было показано, что рассеяние приобретает черты диффракционного уже при углах $\theta > \frac{2\alpha}{l_0}$, а не при углах, превосходящих $\frac{4\alpha^2}{l_0}$, т. е. рассеяние становится диффракционным при углах, гораздо меньших, чем те, при которых сравниваются амплитуды обоих видов рассеяния. Отсюда вытекает важный вывод: вблизи угла $\theta \sim \frac{2\alpha}{l_0}$ происходит резкое уменьшение сечения рассеяния, по порядку величины в α раз. Резкое уменьшение сечения рассеяния происходит из-за изменения ширины области эффективных значений переменной в диффракционном интеграле, при переходе угла рассеяния через значение $\theta_0 \approx \frac{2\alpha}{l_0}$. Интервал углов, в котором происходит резкое изменение сечения по порядку величины, равен $\frac{\theta_0}{\sqrt{\alpha}}$; он в $\sqrt{\alpha}$ раз меньше граничного угла $\theta_0 \approx \frac{2\alpha}{l_0}$, отделяющего области кулоновского и диффракционного рассеяний [61].

Подводя итоги, мы можем сказать, что упругое рассеяние быстрых заряженных частиц, которые могут поглощаться ядрами, вообще говоря, не описывается формулой Рёзерфорда.

Если $\alpha = \frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1$, то рассеяние определяется формулой Рёзерфорда только при очень малых углах по сравнению с $\frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$ ($l_0 = \frac{R}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{Zee'}{RE}}$). При углах, больших $\frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$,

сечение упругого рассеяния заряженных частиц совпадает с сечением упругого рассеяния быстрых нейтронов. Это рассеяние, в котором главную роль играют углы $\theta \ll 1$, может быть названо диффракционным, так как оно имеет такой же характер, как и диффракция света от абсолютно чёрного шара. Различие между нейтронами и заряженными частицами проявляется только в фазе амплитуды рассеяния. В области углов от $\frac{\sqrt{2\alpha}}{l_0}$ до $\frac{1}{l_0}$ это эффективное сечение не зависит от угла рассеяния. При больших углах появляются характерные диффракционные осцилляции.

Если $\alpha \gg 1$, то формула Резерфорда имеет место при углах, меньших $\frac{2\alpha}{l_0}$. При больших углах рассеяние снова имеет диффракционный характер. Вблизи угла $\theta_0 \sim \frac{2\alpha}{l_0}$ происходит резкое уменьшение сечения рассеяния, по порядку величины в α раз.

Так как сечение диффракционного рассеяния в среднем обратно пропорционально кубу угла рассеяния, а не четвёртой степени, как это имеет место при рассеянии в чисто кулоновском поле, то можно сказать, что благодаря наличию поглощающего ядра рассеяние на большие углы становится более вероятным. В силу этого средний угол рассеяния оказывается значительно большим, чем в случае чисто кулоновского рассеяния.

ГЛАВА III

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 23. Дисперсионная формула

В предыдущей главе мы видели, что в области больших энергий возбуждения составного ядра расстояния между его соседними уровнями того же порядка величины, что и ширины уровней, поэтому в этой области мы имеем дело по существу с непрерывным энергетическим спектром.

В области малых энергий возбуждения ширины уровней меньше расстояний между ними, поэтому в этой области энергий особенно резко проявляется роль отдельных уровней составного ядра. В частности, вероятность образования составного ядра и выход ядерных реакций очень сильно зависят от энергии падающей частицы, причём эта зависимость носит резонансный, а не монотонный характер. Можно указать, например, на резонансное поглощение нейтронов, сечение которого при определённых значениях энергии, называемых резонансными, может в несколько тысяч раз превосходить поперечное сечение ядра.

Перейдём теперь к рассмотрению резонансных явлений, наблюдающихся при ядерных реакциях. Заметим предварительно, что существует определённая аналогия между процессами, происходящими при ядерных реакциях, и рассеянием света атомными системами. Действительно, как мы видели выше, столкновение ядра A с частицей a приводит сначала к поглощению последней, т. е. к образованию составного ядра C , которое испускает затем частицу b . Формально эта схема аналогична следующему описанию процесса рассеяния света атомом: световой квант, частота и волновой вектор

которого равны ω и k , поглощается атомом, который затем испускает квант с частотой ω' и волновым вектором k' .

При рассмотрении рассеяния света атомом можно пользоваться теорией возмущений. Что касается процессов ядерной динамики, то, строго говоря, теория возмущений к описанию этих процессов неприменима, так как в отличие от задачи о рассеянии света, где взаимодействие между атомом и светом мало (ввиду малости постоянной тонкой структуры $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$), взаимодействие между ядром и падающей на него частицей очень велико при малой энергии относительного движения, т. е. именно в тех случаях, когда наблюдаются резонансные явления. Тем не менее представляет интерес выяснить, к каким результатам приводит теория возмущений, если применить её к описанию ядерной реакции, происходящей по схеме



Мы покажем далее, что результаты, к которым приводит теория возмущений, не зависят от допускаемого в ней предположения о малости энергии взаимодействия и являются поэтому правильными.

Итак, мы будем пока пользоваться теорией возмущений [62, 63].

Нас интересует вероятность процесса



Такого рода процессы относятся к эффектам второго приближения теории возмущений с учётом затухания [89]. Пренебрегая высшими приближениями, получим во втором приближении следующую формулу для эффективного сечения процесса $A + a \rightarrow C \rightarrow B + b$:

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = 4\pi^2 \lambda^2 \left| \sum_r \frac{H_r^{Aa} H_r^{Bb}}{E^A + E^a - E_r^C + \frac{i}{2} \gamma_r} \right|^2. \quad (23.1)$$

Здесь λ — разделённая на 2π длина волны падающей частицы; E^A и E^a — энергии исходного ядра A и частицы a ; E_r^C — энергия составного ядра в состоянии r ; H_r^{Aa} — матричный элемент, отвечающий переходу из начального состояния,

в котором имеется исходное ядро A и частица a , в состоянии r составного ядра C ; H_{Bb}^r — матричный элемент перехода из состояния r в конечное состояние (частица b и ядро B); наконец, γ_r — полная ширина уровня r ; суммирование производится по всем «промежуточным» состояниям, т. е. по всем состояниям r составного ядра C . Индексы A и B служат здесь как для обозначения ядер, так и для обозначения состояний, в которых эти ядра находятся. Входящие в матричные элементы волновые функции частиц a и b предполагаются нормированными на энергию, поэтому матричные элементы имеют размерность $[(\text{эрг})^{1/2}]^*$.

Полная ширина γ_r с точностью до множителя \hbar совпадает с отнесённой к единице времени вероятностью распада ядра C , находящегося в состоянии r . При выбранной нормировке волновых функций частиц γ_r равняется

$$\gamma_r = 2\pi \sum_{B'b'} |H_{B'b'}^r|^2, \quad (23.2)$$

где суммирование производится по всем видам частиц b' , могущих вылететь из ядра C , и по всем состояниям ядра B' , остающегося после вылета b' .

Отдельные слагаемые в (23.2) представляют собой частичные ширины $\gamma_{B'b'}^r$, отвечающие различным процессам распада составного ядра (типа $C \rightarrow B' + b'$)

$$\gamma_{B'b'}^r = 2\pi |H_{B'b'}^r|^2.$$

Частичная ширина уровня r , отвечающая вылету частицы b , равняется

$$\gamma_b^r = 2\pi \sum_B |H_{Bb}^r|^2 \quad (23.2')$$

(суммирование производится по всем состояниям остаточного ядра B).

Формула (23.1) не учитывает вырождения ядерных уровней, связанного с существованием углового момента. Учтёт

*) Плоская волна, нормированная на энергию, имеет вид

$$\psi_E = \left(\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3 dE} \right)^{1/2} e^{ikr}$$

где k — волновой вектор частицы.

этого вырождения приводит к следующему выражению для сечения [63]:

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \frac{\pi \tilde{\lambda}^2}{(2s+1)(2l+1)} \sum_{l, j, l', j', J} (2J+1) \times \\ \times \left| \sum_r \frac{u_{rJ}^{Aa} u_{rJ}^{Bb}}{E^A + E^a - E_{rJ}^C + \frac{l}{2} \gamma_{rJ}} \right|^2. \quad (23.3)$$

Здесь l, J — моменты количества движения ядер A и C , s — спин частицы a , l и l' — орбитальные и j и j' — полные моменты этих частиц; величины u представляют собой матричные элементы, пропорциональные H и нормированные таким образом, что соответствующие частичные ширины равны

$$\gamma_{Aal}^{rJ} \equiv \gamma_{Aa}^r = |u_{Aa}^{rJ}|^2$$

(в числе индексов, определяющих γ , отмечены моменты ядра C и частицы a). Суммирование в (23.3) производится по всей совокупности квантовых чисел r , характеризующих составное ядро, за вычетом его углового момента J , а также по всем возможным значениям моментов l, j, l', j', J .

Формула (23.3), известная под названием дисперсионной, показывает, что состояния составного ядра, характеризующиеся различными значениями момента количества движения J , не интерферируют друг с другом.

Как видно из этой формулы, сечение для процесса $A + a \rightarrow B + b$ достигает максимума, если энергия падающей частицы E^a становится равной одному из значений $E_{rJ} = E_{rJ}^C - E^A$. Эти значения энергии называются резонансными.

Если энергия падающей частицы близка к одному из значений E_{rJ} , то в (23.3) главную роль играет только один член, и сечение σ_{Bb}^{Aa} приобретает вид

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \tilde{\lambda}^2 \frac{2J+1}{(2l+1)(2s+1)} \frac{\gamma_{Aa}^{rJ} \gamma_{Bb}^{rJ}}{(E - E_{rJ})^2 + \frac{1}{4} \gamma_{rJ}^2}. \quad (23.4)$$

Входящая сюда величина γ_{Aa}^{rJ} представляет собой частичную ширину уровня rJ составного ядра по отношению к вылету

частицы a (состояние остаточного ядра обозначено символом A). Аналогичный смысл имеет величина γ_{Bb}^{rJ} ; наконец, γ_{rJ} представляет собой полную ширину уровня rJ , равную

$$\gamma_{rJ} = \sum_{bB} \gamma_{Bb}^{rJ}$$

(суммирование производится по всем видам вылетающей частицы b и по всем состояниям остаточного ядра B).

Частичные ширины, а также полная ширина зависят от энергии падающей частицы E . Выясним, какова эта зависимость. Заметим предварительно, что волновая функция падающей частицы с моментом l , нормированная на энергию, имеет вид [2]

$$\psi_a = \left(\frac{2}{\pi} \frac{dk}{dE} \right)^{1/2} \frac{\chi_l(kr)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

где k — волновой вектор, Y_{lm} — шаровая функция, а χ_l — решение уравнения

$$\frac{d^2 \chi_l(kr)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l = 0,$$

ведущее себя при больших r как $\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right)$; при малых r ($kr \ll 1$), $\chi_l(kr) \sim (kr)^{l+1}$.

Рассмотрим случай малых энергий падающей частицы, когда $kR \ll 1$ (R — радиус ядра). В этом случае в матричный элемент, определяющий величины γ , входят малые значения аргумента волновой функции падающей частицы. Так как энергия ядерного взаимодействия очень велика, то энергия падающей частицы может входить только через посредство ψ_a . Поэтому матричный элемент, определяющий γ_{Aa}^{rJ} , содержит в качестве множителя $\left(\frac{dk}{dE}\right)^{1/2} k^{l+1}$, т. е. $k^{l+1/2}$. Отсюда вытекает, что

$$\gamma_{Aa}^{rJ} \sim k^{2l+1} \sim \lambda^{-(2l+1)}.$$

Мы можем поэтому представить γ_{Aal}^{rJ} в виде

$$\gamma_{Aal}^{rJ} = \Gamma_{Aal}^{rJ} \left(\frac{\lambda_a}{\lambda} \right)^{2l+1} = \Gamma_{Aal}^{rJ} \left(\frac{E_a}{E_r} \right)^{l+\frac{1}{2}}, \quad (23.5)$$

где E_r^a и λ_r^a — резонансная энергия и соответствующая ей длина волны частицы a , Γ_{Aal}^{rJ} — значение рассматриваемой частичной ширины при резонансе.

Эта формула справедлива также и в том случае, если частицей a является γ -квант (для дипольного кванта $l=1$, для квадрупольного кванта $l=2$ и т. д.).

Пользуясь (23.5), можно представить дисперсионную формулу (23.4) в следующем виде:

$$\sigma_{Bbl'}^{Aal} = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2l+1)(2s+1)} \left(\frac{\lambda_r^a}{\lambda} \right)^{2l+1} \left(\frac{\lambda_r^b}{\lambda'} \right)^{2l'+1} \times \\ \times \frac{\Gamma_{Aal}^{rJ} \Gamma_{Bbl'}^{rJ}}{(E - E_{rJ}^a)^2 + \frac{1}{4} \gamma_{rJ}^2}, \quad (23.6)$$

где λ' — делённая на 2π длина волны вылетающей частицы b .

Так как для медленных частиц ($kR \ll 1$) волновая функция пропорциональна $(kr)^{l+1}$, то наиболее важную роль играет волна с наименьшим l , т. е. с $l=0$ (в случае света нет волны с $l=0$, и наименьшее l равно 1 [64]). Пользуясь (23.5), отсюда можно заключить, что частичная ширина по отношению к вылету медленной частицы, обладающей массой покоя, пропорциональна \sqrt{E} , где E — энергия частицы, покидающей составное ядро. Этот результат мы имели уже раньше [см. (19. 13)].

Для быстрых частиц ($kR \gtrsim 1$) формула (23.5) неприменима. Часто, однако, в этом случае знание точной зависимости γ_{Aa}^{rJ} от E не является необходимым ввиду энергетической немонохроматичности падающих частиц.

Если энергия падающей частицы велика, то для резонанса существенны высоко расположенные уровни составного ядра, расстояние между которыми мало по сравнению с энергией частицы. Обычно интервал энергии, в котором находятся падающие частицы, также гораздо больше этого расстояния. Поэтому необходимо усреднить значение ширины по интервалу немонохроматичности частиц. Усреднённую ширину можно считать не зависящей от энергии частицы. Иными словами, величину γ_{Aa}^{rJ} можно заменить её значением при резонансе, т. е. считать, что $\gamma_{Aal}^{rJ} \approx \Gamma_{Aa}^{rJ}$.

Пользуясь этим выводом, представим ширину γ_{rJ} в виде

$$\gamma_{rJ} = \sum \Gamma_{Bb}^{rJ} + \sum \sqrt{\frac{E^b}{E_r^b}} \Gamma_{Bb}^{rJ}, \quad (23.7)$$

(быстрые частицы) (медленные частицы)

где E^b означает энергию вылетающей частицы b ; первая сумма распространяется на быстрые, а вторая — на медленные частицы, могущие покидать составное ядро, находящееся в состоянии rJ . Энергия вылетающей частицы E^b зависит от энергии падающей частицы E и от энергии возбуждения E^B ядра B , остающегося после её вылета:

$$E^b = E^A + E - E^B.$$

Отметим несколько случаев применения резонансной формулы (23.6).

Если и падающая и вылетающая частицы являются быстрыми, то

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{Aa}^r \Gamma_{Bb}^r}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \gamma_r^2}. \quad (23.8)$$

Если падающая частица — медленная, а вылетающая — быстрая, то $l=0$ и

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \lambda \lambda_r^a \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{Aa}^r \Gamma_{Bb}^r}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \gamma_r^2}. \quad (23.9)$$

Мы видим, что помимо резонансного множителя, сюда входит ещё множитель $\lambda \sim \frac{1}{v}$ (v — скорость падающей частицы).

Если падающая и вылетающая частицы — медленные, то

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \frac{\lambda}{\lambda_r} \lambda_r^a \lambda_r^b \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{Aa}^r \Gamma_{Bb}^r}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \gamma_r^2}. \quad (23.10)$$

Заметим, что если в реакции участвуют медленные частицы, то действуют строгие правила отбора, касающиеся углового момента. Действительно, в случае медленных частиц

$l=0$ и $j=s$. Поэтому момент составного ядра J должен равняться векторной сумме s и i , где i — момент количества движения исходного ядра A . Величина J должна быть заключена, следовательно, в пределах $|i-s|$, $i+s$:

$$|i-s| \leq J \leq i+s. \quad (23.11)$$

Отсюда следует, что если падающей частицей является медленный нейтрон или протон, то $J=i \pm \frac{1}{2}$. Если падающей частицей является медленная α -частица ($s=0$), то $J=i$. При поглощении дипольного γ -кванта $J=i$, $i = \pm 1$ (переход $0 \rightarrow 0$ запрещён); при поглощении квадрупольного кванта $J=i$, $i \pm 1$, $i \pm 2$ (при этом запрещены переходы $0 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1$, $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$).

Остановимся ещё на правилах отбора, касающихся чётности волновой функции. Напомним, что волновая функция системы называется чётной, если она не меняет своего знака при изменении знака координат всех частиц, входящих в систему, и называется нечётной, если её знак при этом меняется. Мы называем характером чётности волновой функции число w , равное ± 1 , в зависимости от того, является ли волновая функция чётной или нечётной.

Характер чётности системы не меняется при её самопроизвольном распаде. Отсюда следует, что характер чётности составного ядра C , распадающегося на ядра B и Q , равняется

$$w_C = w_B w_Q w_{BQ},$$

где w_B и w_Q — характеры чётности ядер B и Q (если Q — элементарная частица, то $w_Q = 1$), а w_{BQ} — характер чётности волновой функции, описывающей относительное движение ядер B и Q . Известно, что

$$w_{BQ} = (-1)^{l'},$$

где l' — момент количества движения частицы Q относительно B . Поэтому

$$w_C = w_B w_Q (-1)^{l'}, \quad (23.12)$$

Аналогично мы можем написать

$$\omega_C = (-1)^l \omega_A \omega_P, \quad (23.12')$$

где A и P обозначают частицы, в результате столкновения которых образовалось ядро C , и $\hbar l$ — момент частицы P относительно A .

Из приведённых формул следует, что при поглощении медленной частицы чётность не меняется. При поглощении дипольного γ -кванта чётность меняется, а при поглощении квадрупольного кванта не меняется.

§ 24. Теория резонансного рассеяния

Покажем теперь, что дисперсионная формула может быть получена из очень общих предположений, не основывающихся на малости каких-либо членов в гамильтониане ядерной системы и не связанных поэтому с обычной теорией возмущений*).

Рассмотрим сначала задачу об упругом резонансном рассеянии частиц, отличающуюся особенной простотой математической трактовки. Предположим, что длина волны частицы значительно больше радиуса действия ядерных сил, так что главную роль играет орбитальный момент относительного движения частиц, равный нулю. В этих условиях рассеяние будет сферически симметричным.

Если расстояние r между частицами велико, то волновая функция частиц имеет следующий асимптотический вид:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi vr}} (e^{-ikr} - \beta_E e^{ikr}) \psi(i), \quad (24.1)$$

где k — волновой вектор, равный $\sqrt{2ME}$, M — приведённая масса частиц, E — кинетическая энергия относительного движения, v — относительная скорость частиц; $\psi(i)$ — волновая функция, описывающая внутреннее состояние частиц.

Первое слагаемое в скобках представляет собой падающую,

*) Выводу дисперсионной формулы, не основывающемуся на теории возмущений, посвящён целый ряд работ (см. [65-70]). Мы следуем ниже [70].

а второе — расходящуюся волну, причём обе они нормированы на единичный поток.

Величина β_E , зависящая от энергии, в рассматриваемом случае упругого рассеяния, равна по модулю единице, т. е.

$$\beta_E = e^{2i\eta}, \quad (24.1')$$

где η — вещественная величина, называемая «фазой на бесконечности». Сечение рассеяния $\sigma(E)$ связано с β соотношением

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \eta = \frac{\pi}{k^2} |\beta_E - 1|^2. \quad (24.2)$$

Нас интересует зависимость сечения (24.2) от энергии. С этой целью важно выяснить вопрос об особых точках функции $\sigma(E)$. Из физических соображений ясно, что при положительных вещественных значениях E функции $\sigma(E)$ и $\beta(E)$ особых точек не имеют. Поэтому мы расширим область переменной E и будем рассматривать также комплексные значения энергии, которые обозначим через W . В комплексной области функция $\sigma(W)$ имеет особые точки. Мы увидим, что существование особых точек, лежащих достаточно близко от вещественной оси, вызывает острые максимумы в ходе сечения с энергией (вдоль вещественной положительной полуоси).

Введение комплексных значений энергии является, как известно, очень полезным при изучении свойств распадающихся систем, так как мнимая часть энергии непосредственно связана со временем жизни системы.

Итак, введём комплексные значения энергии W и, предполагая функцию $\sigma(W)$ аналитической, исследуем поведение функции $\sigma(W)$ в окрестности особой точки. Будем предполагать, что при конечных значениях W функция $\sigma(W)$ имеет только простые полюсы.

В дальнейшем мы будем исходить из двух основных свойств функции β_E . Первое свойство состоит в том, что на положительной вещественной полуоси, т. е. при $W = E$, функция β_E по модулю равна единице. Это свойство означает, что отсутствует поглощение частиц, в силу чего интенсивность расходящейся волны должна быть равна интенсивности падающей волны.

Чтобы разъяснить второе свойство, заметим, что если в выражении (24.1) заменить k на $-k$, то член e^{-ikr} , описывающий падающую волну, будет представлять расходящуюся волну, и наоборот. Так как мы рассматриваем чисто упругое рассеяние, то безразлично, что называть падающей и что расходящейся волной. Поэтому замена k на $-k$ не может привести к существенному изменению волновой функции (24.1). Ясно, что квадрат модуля (24.1), имеющий непосредственный физический смысл плотности вероятности, должен оставаться при такой замене неизменным. Отсюда легко убедиться, что при замене k на $-k$ величина β_E должна перейти в комплексно сопряжённую ей величину β_E^* .

Это свойство функции β_E можно сформулировать ещё следующим образом. Представим себе, что мы совершаем обход в плоскости комплексного переменного W вокруг точки $W=0$. Такой обход эквивалентен замене k на $-k$, так как в результате обхода величина \sqrt{E} , пропорциональная k , меняет свой знак. Поэтому можно сказать, что после обхода вокруг точки $W=0$ величина β_E переходит в комплексно сопряжённую ей величину β_E^* .

Введём в рассмотрение новую переменную $z = \sqrt{W}$; мы можем тогда рассматривать β_W как однозначную аналитическую функцию от z :

$$\beta_W = \beta(z),$$

которая равна по модулю единице на вещественной оси и принимает комплексно сопряжённые значения в точках $z = \sqrt{E}$ и $z = -\sqrt{E}$ ($E > 0$):

$$\beta(-\sqrt{E}) = \beta(\sqrt{E})^* = \frac{1}{\beta(\sqrt{E})}.$$

В силу аналитичности $\beta(z)$ отсюда следует, что

$$\beta(-z) = \frac{1}{\beta(z)}. \quad (24.3)$$

Пусть точка $z = z_0$ есть полюс функции $\beta(z)$. Так как на вещественной оси $|\beta(z)| = 1$, то отсюда следует, что точка $z = z_0^*$ будет нулём $\beta(z)$.

В этом легко убедиться следующим образом. Введём в рассмотрение функцию

$$\gamma(z) = i \frac{1 + \beta(z)}{1 - \beta(z)}.$$

Когда z принимает вещественные значения, то, как показывает непосредственная проверка, функция $\gamma(z)$ также принимает вещественные значения. Поэтому, согласно принципу зеркального отображения, имеет место соотношение

$$\gamma(z^*) = \gamma(z)^*.$$

Переписав это соотношение в виде

$$i \frac{1 + \beta(z^*)}{1 - \beta(z^*)} = -i \frac{1 + \beta(z)^*}{1 - \beta(z)^*},$$

мы получим:

$$\beta(z^*) \beta(z)^* = 1.$$

Последнее соотношение показывает, что если точка $z = z_0$ является нулём функции $\beta(z)$, то точка $z = z_0^*$ является её полюсом.

Поэтому $\beta(z)$ можно представить в виде

$$\beta(z) = \frac{z - z_0^*}{z - z_0} \beta_1(z), \quad (24.4)$$

где $\beta_1(z)$ в точке $z = z_0$ регулярна и подобно $\beta(z)$ равна по модулю единице на вещественной оси.

Используя (24.3), мы получим из (24.4):

$$\frac{1}{\beta(z)} = \frac{-z - z_0^*}{-z - z_0} \beta_1(-z),$$

т. е.

$$\beta(z) = \frac{z + z_0}{z + z_0^*} \beta_2(z), \quad (24.4')$$

где $\beta_2(z)$ регулярна в точке $z = -z_0^*$.

Таким образом, точка $z = -z_0^*$ является полюсом $\beta(z)$, а точка $z = -z_0$ — нулём $\beta(z)$.

Из (24.4) и (24.4') следует, что если полюс z_0 не чисто мнимый, то

$$\beta_E = \beta(\sqrt{E}) = \frac{\sqrt{E} - z_0^*}{\sqrt{E} - z_0} \frac{\sqrt{E} + z_0}{\sqrt{E} + z_0^*} \chi(\sqrt{E}), \quad (24.5)$$

где $\chi(z)$ регулярна в точках z_0 и $-z_0^*$, равна по модулю единице на вещественной оси и так же, как и $\beta(z)$, удовлетворяет условию (24.3).

Если точка z_0 лежит на мнимой оси, то вместо (24.5) мы получаем более простое представление β_E :

$$\beta_E = \frac{\sqrt{E} + ia}{\sqrt{E} - ia} \chi(\sqrt{E}). \quad (24.6)$$

Рассмотрим функцию $\frac{\ln \chi(z)}{z}$. В окрестности точки $W = 0$ плоскости W эта функция однозначна, так как при обходе вокруг нуля и числитель и знаменатель меняют свой знак. Отсюда следует, что

$$\chi(z) = \pm e^{iz\varphi(W)},$$

где $\varphi(W)$ — аналитическая функция от W , регулярная в точке $W = 0$, а также в точках $W = z_0^2$, z_0^{*2} , и принимающая вещественные значения на положительной половине вещественной оси W .

Таким образом, если точка z_0 не лежит на мнимой оси, то мы получаем следующее представление для β_E :

$$\beta_E = \pm e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + i\sqrt{E}b}{E - E_0 - i\sqrt{E}b}, \quad (24.6')$$

где

$$E_0 = z_0 z_0^*, \quad b = \frac{1}{2} \operatorname{Im} z_0.$$

В том случае, если точка z_0 лежит на мнимой оси, представление β_E имеет вид

$$\beta_E = \pm e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{\sqrt{E} + ia}{\sqrt{E} - ia}. \quad (24.6'')$$

Выбор знака в формулах (24.6'), (24.6'') может быть произведён, исходя из условия конечности сечения рассеяния при $E \rightarrow 0$. Так как $\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} |\beta_E - 1|^2$, то отсюда следует, что

$$\lim_{E \rightarrow 0} \beta_E = 1.$$

Поэтому в формуле (24.6') следует взять верхний, а в формуле (24.6'') нижний знак:

$$\beta_E = e^{iV\bar{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + i\sqrt{E}b}{E - E_0 - i\sqrt{E}b}, \quad (24.7)$$

$$\beta_E = e^{iV\bar{E}\varphi(E)} \frac{ia + \sqrt{E}}{ia - \sqrt{E}}. \quad (24.8)$$

Определим теперь сечение упругого рассеяния. Подставляя (24.7) в (24.2), получим:

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \frac{\pi}{k^2} \left| e^{iV\bar{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + i\sqrt{E}b}{E - E_0 - i\sqrt{E}b} - 1 \right|^2 = \\ &= \frac{\pi}{k^2} \left| e^{iV\bar{E}\varphi(E)} - 1 \right|^2 + \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} + \\ &\quad + 2 \frac{\pi}{k^2} \operatorname{Re} \frac{i\gamma [1 - e^{-iV\bar{E}\varphi(E)}]}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}}, \end{aligned} \quad (24.9)$$

где

$$\gamma = 2b\sqrt{E}. \quad (24.9')$$

Это выражение полезно при исследовании поведения сечения вблизи точки $E = E_0$, так как при этом $\varphi(E)$ не имеет особенностей.

Если $\varphi(E) = 0$, то (24.9) переходит в известную уже нам резонансную формулу

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (24.10)$$

определяющую сечение резонансного рассеяния вблизи уровня E_0 .

Ширина уровня согласно (24.9') пропорциональна \sqrt{E} . Этот результат нам уже известен (см. предыдущий параграф) и находится в соответствии с тем, что мы рассматриваем случай малых энергий, когда длина волны частицы велика по сравнению с радиусом действия сил, т. е. размерами ядра.

В общем случае, когда $\varphi(E) \neq 0$, сечение рассеяния (24.9) состоит из трёх слагаемых. Первое слагаемое, не содержащее резонансного знаменателя, представляет собой так называемое

потенциальное рассеяние, аналогичное рассеянию, происходящему в потенциальном поле. Второе слагаемое описывает резонансное рассеяние и третье — интерференцию обоих видов рассеяния.

Если энергия стремится к нулю, то потенциальное рассеяние стремится к пределу:

$$\lim_{E \rightarrow 0} \sigma_{\text{пот}} = \pi \rho^2, \quad (24.11)$$

где

$$\rho = \frac{\varphi(0) \sqrt{E}}{k}.$$

Экспериментально определяемое сечение упругого рассеяния σ_s для медленных нейтронов имеет порядок величины πR^2 , где R — радиус ядра.

Резонансное рассеяние (24.10) мало по сравнению с πR^2 , исключая случай близкого резонанса, поэтому σ_s обязано главным образом потенциальному рассеянию.

Заметим, однако, что σ_s изменяется немонотонно с ростом атомного номера. Это обстоятельство указывает, повидимому, на то, что потенциальное рассеяние скорее соответствует рассеянию от потенциальной ямы, нежели рассеянию от барьера, так как в последнем случае рассеяние менялось бы монотонно с ростом атомного номера (оно равнялось бы $4\pi R^2$).

Определим теперь сечение рассеяния в том случае, когда величина β_E выражается формулой (24.8).

Подставляя (24.8) в (24.2), получим:

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} |\beta_E - 1|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{ik\psi(E)} \frac{k + i\alpha}{k - i\alpha} + 1 \right|^2,$$

где $\psi = \varphi \frac{\sqrt{E}}{k}$ и $\alpha = a \frac{k}{\sqrt{E}}$. В случае достаточно малых энергий получим отсюда:

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2 + \alpha^2} \left| \left(1 - \frac{1}{2} \alpha \rho \right) \left(1 + i \frac{k\rho}{2} \right) \right|^2.$$

Предполагая, что $|\alpha\rho| \ll 1$ и $|k\rho| \ll 1$, перепишем окончательно это выражение в виде

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2 + \alpha^2} \left[1 - \alpha\rho + \frac{1}{4} (\alpha^2 + k^2) \rho^2 \right]^{-1}. \quad (24.12)$$

Мы получили формулу, которая совпадает с формулой (3.15), определяющей сечение рассеяния нейтронов протонами с учётом конечности радиуса действия ядерных сил. При этом ρ выступает как эффективный радиус действия ядерных сил, введённый в § 3. Если $\varphi(0) = 0$, то мы получим формулу, соответствующую случаю $r_0 \rightarrow 0$. То обстоятельство, что при $\varphi(0) \neq 0$ учитывается конечность радиуса ядра, находится в соответствии с выражением (24.11), определяющим потенциальное рассеяние.

Итак, мы видим, что самые общие предположения о величине β приводят только к двум законам упругого рассеяния медленных частиц: именно, рассеяние может быть либо резонансным, либо оно может быть такого же типа, как рассеяние медленных нейтронов протонами.

Перейдём теперь, после рассмотрения упругого рассеяния, к изучению общего случая распада составного ядра.

Будем попрежнему считать, что относительный момент количества движения частиц, образующих составное ядро, а также частиц, возникающих при его распаде, равняется нулю. Для простоты не будем пока учитывать спин ядер.

Начнём с определения общего сечения всех неупругих процессов σ_u .

Согласно формуле (17.8) σ_u связано с отношением амплитуд расходящейся и сходящейся волн β_E следующим соотношением:

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\beta_E|^2). \quad (24.13)$$

(Напомним, что если возможно поглощение частиц, то $|\beta| < 1$.)

Сечение упругого рассеяния, сопровождающегося образованием составного ядра, равняется при этом

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} |1 - \beta_E|^2. \quad (24.14)$$

Выясним, какой вид имеет теперь β_E .

В случае чисто упругого рассеяния β_E вблизи уровня E_0 определяется формулой (24.7). Если возможно поглощение

частиц ($|\beta| < 1$), то формулу (24.7) следует заменить формулой

$$\beta_E = e^{i\omega(E)} \frac{E - E_0 - i\left(\frac{\gamma}{2} - \gamma_s\right)}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}}, \quad (24.15)$$

где $\omega(E)$ — вещественная функция, не имеющая особенностей при $E > 0$. Величина γ_s удовлетворяет условию

$$\gamma_s < \gamma,$$

которое необходимо для того, чтобы модуль β_E был меньше единицы. Если $\gamma_s = \gamma$, то формула (24.15) переходит в (24.7).

Подставляя выражение (24.15) в (24.13), мы получим следующую формулу для общего сечения неупругих столкновений:

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\pi}{k^2} \left(1 - \left| \frac{E - E_0 - i\left(\frac{\gamma}{2} - \gamma_s\right)}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}} \right|^2 \right) = \\ &= \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_s(\gamma - \gamma_s)}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \end{aligned} \quad (24.16)$$

Сечение упругого столкновения согласно (24.14) имеет вид

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\omega(E)} + 1 - e^{i\omega(E)} \frac{i\gamma_s}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}} \right|^2. \quad (24.17)$$

Последняя формула отличается от формулы (24.9) только тем, что в числитель амплитуды резонансного рассеяния вместо полной ширины γ входит теперь величина γ_s . Если не учитывать потенциальное рассеяние, то формула (24.17) даёт:

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_s^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (24.17')$$

откуда следует, что γ_s представляет собой частичную ширину по отношению к упругому рассеянию.

Вводя обозначение

$$\gamma_a = \gamma - \gamma_s,$$

перепишем формулу (24.16) для σ_u в виде

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_s \gamma_\alpha}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (24.16')$$

Величина γ_α представляет собой суммарную ширину уровня для всех неупругих процессов.

Чтобы получить сечение σ_α для какого-либо определённого процесса α , необходимо в формуле (24.16') заменить γ_α на соответствующую частичную ширину γ_α . Мы получим, таким образом, общую дисперсионную формулу

$$\sigma_\alpha = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_s \gamma_\alpha}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (24.18)$$

В приведённых выше формулах спин ядра считался равным нулю. Покажем теперь, как учесть спин ядра.

Так как мы рассматриваем случай медленных частиц, то для них $l=0$, и поэтому значения момента количества движения составного ядра J заключены в пределах

$$|i - s| \leq J \leq i + s,$$

где i — момент количества движения исходного ядра, s — спин падающей частицы.

Вероятность определённого значения J равна

$$\frac{2J + 1}{(2s + 1)(2i + 1)}, \quad (24.19)$$

так как общее число возможных ориентаций векторов i и s равно $(2s + 1)(2i + 1)$, а число ориентаций вектора J равно $2J + 1$.

Чтобы учесть спин ядра, нужно приведённые выше формулы для σ_s и σ_u умножить на фактор (24.19). Мы получим, таким образом, формулу (23.4).

В изложенном только что выводе дисперсионной формулы мы исходили из общих теоретико-функциональных свойств амплитуды рассеяния. Покажем теперь, что дисперсионную формулу можно получить также, изучая поведение нормальной производной волновой функции у поверхности ядра.

Пусть на ядро падает медленный нейтрон, длина волны которого велика по сравнению с радиусом ядра. Внутри ядра волновой вектор нейтрона k_i будет очень велик, поэтому мы должны связать на поверхности ядра волну с малым волновым вектором k вне ядра с волной внутри ядра, которая характеризуется большим волновым вектором k_i . В общем случае такое «сшивание» волновых функций приводит к тому, что амплитуда волновой функции внутри ядра оказывается значительно меньше амплитуды волновой функции вне ядра (отношение амплитуд по порядку величины равно k/k_i).

Однако в тех специальных случаях, когда нормальная производная внутренней волновой функции на поверхности ядра очень мала, обе функции имеют сравнимые амплитуды. При этом вероятность проникновения нейтронной волны внутрь ядра особенно велика и, следовательно, велика вероятность ядерной реакции.

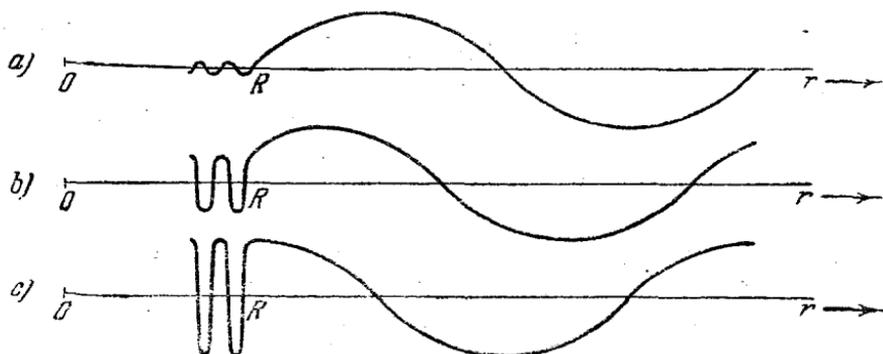


Рис. 16.

Равенство нулю нормальной производной выполняется при определённых значениях энергии нейтрона, представляющих собой резонансные уровни. Для иллюстрации этих соотношений служит рис. 16, на котором схематически представлен вид волновой функции нейтрона у поверхности ядра в зависимости от расстояния r до центра ядра. Радиус ядра обозначен через R . Рис. 16, *a* соответствует общему случаю, когда энергия нейтрона не находится вблизи резонансного уровня. На рис. 16, *b* представлен тот случай, когда энергия

нейтрона близка к резонансной энергии, а рис. 16, с соответствует резонансу.

Таким образом, для исследования свойств амплитуды рассеяния необходимо рассмотреть зависимость нормальной производной волновой функции на поверхности ядра от энергии нейтрона E .

Волновая функция падающей частицы, которая предполагается в дальнейшем медленной, вне ядра определяется формулой (24.1).

Определим радиус ядра R как наименьшее расстояние от центра ядра, на котором падающая частица уже не находится в сфере действия ядерных сил.

Величину β_E , входящую в (24.2), можно выразить через логарифмическую производную волновой функции на поверхности ядра. Введём в рассмотрение функцию

$$f(E) = R \left(\frac{d}{dr} (r\psi) \right)_{r=R}, \quad (24.20)$$

где ψ — волновая функция частицы внутри ядра; тогда

$$\beta_E = -e^{-2i\alpha} \frac{x - if}{x + if}, \quad (24.21)$$

где $x = kR$.

Заметим, что хотя в действительности положение поверхности ядра не является резко ограниченным, введение функции $f(E)$ оказывается законным, так как мы предполагаем, что длина волны частицы значительно больше радиуса действия ядерных сил R . В силу этого условия значение логарифмической производной волновой функции вне ядра не испытывает большого изменения на расстояниях порядка области диффузности ядерной поверхности.

Представим функцию $f(E)$ в виде

$$f(E) = f_0(E) - ih(E), \quad (24.21')$$

где f_0 и h — вещественные функции. Так как $|\beta_E| \leq 1$, то $h(E)$ должна удовлетворять условию

$$h \geq 0.$$

Используя выражение (24.21) для β_E , получим на основании (24.13), (24.14) следующие формулы для σ_u и σ_s :

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \frac{\pi}{k^2} (1 - |\beta_E|^2) = \frac{\pi}{k^2} \left[1 - \frac{(x-h)^2 + f_0^2}{(x+h)^2 + f_0^2} \right] = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \frac{xh}{(x+h)^2 + f_0^2},\end{aligned}\quad (24.22)$$

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \frac{\pi}{k^2} |1 - \beta_E|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{2i\alpha} + \frac{x - if}{x + if} \right|^2 = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{x}{i(x+h) - f_0} + e^{i\alpha} \sin \alpha \right|^2.\end{aligned}\quad (24.23)$$

Резонанс наступает в том случае, когда $f_0 = 0$. Значения энергии E , для которых f_0 обращается в нуль, мы называем резонансными уровнями.

Для значений энергий, близких к резонансному уровню E_0 , функцию $f_0(E)$ можно представить в виде

$$f_0(E) = (E - E_0) f'_0(E_0).$$

Пользуясь этим разложением и вводя обозначения

$$\gamma_s = -\frac{2x}{f'_0(E)}, \quad \gamma_a = -\frac{2h}{f'_0(E_0)},\quad (24.21'')$$

представим σ_u и σ_s в виде

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_a \gamma_s}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}},\quad (24.24)$$

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{\frac{1}{2} \gamma_s}{E - E_0 + \frac{1}{2} \gamma} + e^{i\alpha} \sin \alpha \right|^2,\quad (24.25)$$

где

$$\gamma = \gamma_s + \gamma_a.$$

Мы получили знакомые уже нам формулы.

Чтобы можно было интерпретировать γ_s и γ_a как частичные ширины по отношению к упругому и неупругому рассеянию, остается показать, что

$$f'_0(E_0) < 0,\quad (24.26)$$

так как только при выполнении этого условия величины γ_s и γ_a будут положительными (напомним, что $\hbar \geq 0$). Неравенство (24.26) вытекает из следующих соображений.

Величина f , входящая в граничное условие (24.20), является функцией энергии возбуждения ядра $W = E + B$, где B — энергия связи частицы в ядре. Функция $f(W)$ определяется логарифмической производной от волновой функции составного ядра. Если исходить из уравнения Шредингера

$$H_0 \Psi_0 = W \Psi_0,$$

где H_0 — гамильтониан составного ядра, то с помощью волновой функции Ψ_0 мы не получим функции $f(W)$, так как не учитываем конечной величины времени жизни составного ядра. С помощью функции Ψ_0 мы найдем лишь $f_0(W)$. Чтобы учесть конечность времени жизни состояний составного ядра, необходимо к гамильтониану H_0 добавить мнимый член — $i\gamma_a/2$, $\gamma_a > 0$ (комплексное значение энергии $W - \frac{i\gamma_a}{2}$ приводит к характерному затухающему множителю в волновой функции $e^{-\gamma_a t/2\hbar}$).

Поэтому мы исходим из уравнения

$$\left(H_0 - \frac{1}{2} i\gamma_a\right) \Psi = W \Psi$$

(W в обоих уравнениях имеет одно и то же значение).

Знание Ψ принципиально даёт возможность определить $f(W)$. Переписав последнее уравнение в виде

$$H_0 \Psi = \left(W + \frac{i\gamma_a}{2}\right) \Psi,$$

мы видим, что Ψ получается из Ψ_0 , если заменить в Ψ_0 величину W на $W + \frac{i\gamma_a}{2}$. По этой причине $f(W)$ совпадает с $f_0\left(W + \frac{i\gamma_a}{2}\right)$. Если $\frac{\gamma_a}{2} \ll W$, то

$$f(W) \approx f_0(W) + \frac{i\gamma_a}{2} f'_0(W).$$

Сравнение с (24.21') показывает, что

$$h = -\frac{1}{2} \gamma_a f'_0(W).$$

Это выражение совпадает с (24.21''). Так как $h > 0$, то $f'_0(W) < 0$, что и утверждалось выше.

§ 25. Захват медленных нейтронов свободными ядрами

Возможны следующие процессы взаимодействия нейтронов с ядрами: упругое и неупругое рассеяние нейтронов, захват нейтронов с излучением γ -квантов (радиационный захват), захват нейтронов с испусканием заряженных частиц и, наконец, деление ядер под действием нейтронов.

Об упругом рассеянии мы говорили уже выше. Неупругое рассеяние возможно лишь в том случае, если энергия нейтрона превосходит расстояние между первыми двумя уровнями ядра. В случае взаимодействия медленных *) нейтронов с лёгкими ядрами этот процесс энергетически невозможен, так как расстояние между наиболее низкими уровнями лёгких ядер по порядку величины составляет несколько сот KeV.

Делению ядер под действием нейтронов посвящена глава V.

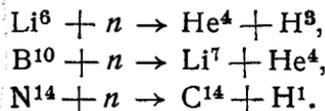
В этом параграфе мы рассмотрим захват медленных нейтронов, сопровождаемый испусканием быстрых частиц (γ -кванта или заряженной частицы). Изучение этого процесса даёт возможность экспериментально определять параметры, входящие в дисперсионную формулу.

Радиационный захват нейтронов представляет собой очень распространённый тип реакции, причём получающиеся ядра могут быть как стабильными, так и радиоактивными (искусственно радиоактивные ядра).

Эффективные сечения радиационного захвата медленных нейтронов могут достигать чрезвычайно больших значений, в тысячи раз превосходящих геометрические размеры захватывающих ядер. Например, сечение захвата медленных нейтронов ядрами ${}_{49}\text{In}$ превышает $20\,000 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, для ${}_{45}\text{Rh}$ оно составляет около $6100 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ [71] и т. д.

*) Под медленными понимаются нейтроны в энергетическом интервале от нескольких тысяч электрон-вольт до тепловых энергий.

Захват медленных нейтронов лёгкими ядрами может сопровождаться также испусканием заряженных частиц — α -частиц и протонов (испускание дейтронов при захвате медленных нейтронов не наблюдается, так как энергетически оно невозможно ввиду большой внутренней энергии дейтрона). Можно указать следующие примеры таких реакций:



Заметим, что в случае захвата не очень быстрых нейтронов тяжёлыми ядрами испускание заряженных частиц становится крайне мало вероятным ввиду большой высоты потенциального барьера, который необходимо пройти частице; поэтому в этом случае происходит главным образом радиационный захват нейтронов.

Перейдём к рассмотрению эффективного сечения для захвата медленных нейтронов. Будем считать, что захват нейтрона обусловлен наличием одного резонансного уровня, энергию которого обозначим через E_0 .

Общая дисперсионная формула даёт в этом случае следующее выражение для сечения захвата нейтрона, сопровождающегося испусканием частицы b , которую мы считаем быстрой:

$$\sigma_b^n(E) = \pi \frac{2J+1}{(2i+1)(2s+1)} \lambda \lambda_0 \frac{\Gamma_n \Gamma_b}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \gamma^2}. \quad (25.1)$$

Здесь Γ_n — частичная нейтронная ширина уровня при резонансе; Γ_b — частичная ширина по отношению к вылету быстрой частицы b (в случае радиационного захвата вместо Γ_b мы пишем Γ_γ); γ — полная ширина уровня, λ — длина волны падающего нейтрона; λ_0 — значение λ при резонансе; J и i — угловые моменты составного и исходного ядер; $s = \frac{1}{2}$ — спин нейтрона.

Полная ширина γ может быть представлена в виде

$$\gamma = \Gamma_n \left(\frac{E}{E_0} \right)^{1/2} + \sum_b \Gamma_b,$$

где первое слагаемое представляет собой нейтронную ширину по отношению к процессу последующего излучения медленного нейтрона, а второе слагаемое — сумму частичных ширин по отношению к вылету быстрых частиц b . Ввиду фактора \sqrt{E} первое слагаемое мало по сравнению со вторым. Обычно возможно испускание только одного сорта частиц, поэтому $\sum \Gamma_b$ содержит одно слагаемое.

Итак, мы можем считать γ равным

$$\gamma \approx \Gamma_b = \Gamma.$$

Так как в рассматриваемом случае захвата медленного нейтрона имеют место правила отбора

$$J = i \pm \frac{1}{2}, \quad \text{если } i \neq 0,$$

$$J = \frac{1}{2}, \quad \text{если } i = 0,$$

то выражение (25.1) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_b^n(E) = \frac{\pi}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1} \right) \lambda \lambda_0 \frac{\Gamma_n \Gamma_b}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}. \quad (25.2)$$

Если измерять энергии и ширины в вольтах, то мы получим:

$$\sigma_b^n(E) = \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{1}{1+x^2}, \quad x = \frac{E - E_0}{\Gamma/2}, \quad (25.2')$$

где σ_0 — значение сечения при резонансе, равное

$$\sigma_0 = 1,3 \cdot 10^{-18} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1} \right) \frac{1}{E_0} \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \text{ см}^2.$$

Сечение упругого резонансного рассеяния нейтронов при наличии только одного уровня E_0 равняется

$$\sigma_n^n(E) = \frac{\pi}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1} \right) \lambda_0^2 \frac{\Gamma_n^2}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}. \quad (25.3)$$

Отношение сечений упругого рассеяния и радиационного захвата равно

$$\frac{\sigma_n^n}{\sigma_\gamma^n} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{1/2}. \quad (25.3')$$

Для ядер, сильно поглощающих нейтроны (Cd, Ag, Rh и т. д.), это отношение очень мало (в случае ${}_{47}\text{Ag}$ сечение захвата составляет $\sim 3600 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, а сечение рассеяния $\sim 9 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, для ${}_{48}\text{Cd}$ сечение захвата $4500 \div \div 3300 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, сечение рассеяния $\sim 4 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ [71]). Отсюда следует, что, как правило, для составных ядер среднего атомного веса, возникающих в результате захвата медленных нейтронов, нейтронная ширина значительно меньше радиационной ширины.

Зная из эксперимента сечение радиационного захвата $\sigma_Y^n(E)$ как функцию энергии нейтрона, можно найти, пользуясь (25.2), Γ_n и Γ_Y . Радиационная ширина составляет для ядер среднего атомного веса около 0,1 eV (возможны вариации в несколько раз в ту или другую сторону). Нейтронная ширина при резонансной энергии ~ 1 eV находится обычно в пределах $10^{-4} - 10^{-2}$ eV.

Сечение захвата нейтронов содержит в качестве множителя λ . Поэтому для достаточно малых значений E , меньших энергии первого резонансного уровня, существует область энергии, где сечение захвата обратно пропорционально скорости нейтрона (закон $1/v$). Относительное изменение резонансного множителя

$$\frac{1}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}$$

изменения $\frac{1}{v}$, если

$$4E |E_0 - E| \ll (E_0 - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2.$$

Отсюда следует, что для выполнения закона $1/v$ энергия нейтрона должна быть меньше большей из величин E_0 и Γ^* .

Учитывая особенности в расположении уровней тяжёлых и лёгких ядер, можно заключить, что у лёгких ядер интервал энергии, в котором действует закон $1/v$, будет гораздо больше, чем в случае тяжёлых ядер. Для последних известны уровни, близко примыкающие или даже лежащие в тепловой области ($kT \sim 1/40$ eV при комнатной температуре). Например, для Gd обнаружено сильное резонансное поглощение нейтронов с энер-

*) Если E_0 — отрицательно, то E должно быть меньше $|E_0|$ и Γ .

гией 0,03 eV; для Cd найден резонансный уровень при 0,082 eV, для Eu — при 0,465 eV, для Ir при 0,635 eV, для Rh — при 1,28 eV, для Sm — при 0,096 eV; Dy обладает отрицательным уровнем [72]. Ясно, что в таких случаях закон $1/v$ имеет малую область применимости. У лёгких ядер [Li, B, N и т. д.] первый уровень находится на высоте порядка расстояния между наиболее низкими уровнями, что составляет около 10^6 eV. При этом закон $1/v$ может оказаться справедливым вплоть до энергий порядка нескольких десятков тысяч eV.

Заметим, что если сечение захвата нейтрона обратно пропорционально его скорости, то вероятность захвата, отнесённая к единице времени, не зависит от энергии нейтрона.

Сделаем здесь несколько замечаний относительно радиационного захвата быстрых нейтронов, для которых $\lambda \ll R$ (R — радиус ядра).

Сечение радиационного захвата быстрых нейтронов можно оценить по формуле (см. § 17)

$$\sigma_{\gamma}^n \approx \pi R^2 \frac{\Gamma_{\gamma}}{\Gamma}, \quad (25.4)$$

где Γ — полная ширина уровня. Так как для быстрых частиц $\Gamma_{\gamma} \ll \Gamma$, то это сечение значительно меньше площади геометрического сечения ядра, которым определяется полное сечение всех неупругих процессов в случае быстрых нейтронов (для тяжёлых ядер $\sigma_{\gamma}^n \approx 0,1 \cdot 10^{-24}$ см²) [111].

В области больших энергий главную роль играют процессы упругого и неупругого рассеяния нейтронов (реэссия нейтронов).

При выводе дисперсионной формулы (25.2) мы предполагали, что захватывающее ядро является свободным и неподвижным. Это значит, что формула (25.2) определяет поглощение нейтронов в газе, атомы которого предполагаются неподвижными.

Если поглощение нейтронов происходит в твёрдом теле, то ядра нельзя считать свободными. Учёту связи ядер в твёрдом теле посвящён § 38. В настоящем параграфе мы подробно рассмотрим вопрос о поглощении нейтронов в газе [63].

Предположение о неподвижности ядер газа является законным, если составное ядро образуется в результате захвата

быстрой частицы. При захвате медленного нейтрона его скорость может быть того же порядка величины, что и скорость захватывающего ядра. Поэтому пренебрегать последней в этом случае нельзя.

Чтобы учесть тепловое движение ядер, достаточно заметить, что в формулу (25.2), относящуюся к поглощению нейтронов свободными ядрами, должна входить, очевидно, энергия относительного движения нейтрона и поглощающего ядра. Если v — скорость нейтрона и u — тепловая скорость ядра, то под E в (25.2) следует понимать величину

$$E = \frac{m'}{2} (v - u)^2,$$

где m' — приведённая масса нейтрона, равная $\frac{mM}{m+M}$ (m и M — массы нейтрона и ядра).

Пренебрегая квадратом скорости теплового движения, перепишем выражение для E в виде

$$E = \frac{m'v^2}{2} - m'vu. \quad (25.5)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой энергию относительного движения нейтрона и неподвижного ядра. Эта энергия, которую мы обозначим через E' , множителем $\frac{M}{M+m}$ отличается от $\frac{mv^2}{2}$ — энергии нейтрона по отношению к бесконечно тяжёлому ядру. В случае тяжёлых ядер ($M \gg m$) энергию E' можно представить в виде

$$E' = \frac{mv^2}{2} - R,$$

где $R = \frac{m}{M} \frac{mv^2}{2}$ — энергия отдачи ядра.

Мы видим, таким образом, что если не учитывать теплового движения ядер и понимать в формуле (25.2) под энергией нейтрона величину $mv^2/2$, то величину E_0 следует заменить на $E_{0\infty} + R$, где $E_{0\infty}$ — резонансная энергия, отвечающая бесконечно тяжёлому ядру.

Возвращаясь к формуле (25.5), перепишем её в виде

$$E = E' - \sqrt{2m'E'}u_x, \quad (25.5')$$

где u_x — проекция u на направление скорости нейтрона v . Предполагая, что скорости u распределены по закону Максвелла, будем исходить из следующей формулы для вероятности того, что u_x лежит между u_x и $u_x + du_x$:

$$w(u_x) du_x = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{Mu_x^2}{2kT}} du_x,$$

где T — температура, k — постоянная Больцмана. Пользуясь (25.5'), можно выразить u_x через E ; мы получим, таким образом, распределение по энергиям относительного движения E при заданном E' :

$$w(E) dE = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(E-E')^2}{\Delta^2}} \frac{dE}{\Delta}, \quad (25.6)$$

где

$$\Delta = 2\sqrt{\frac{mE'kT}{M}} \quad (25.7)$$

[$w(E) dE$ — вероятность, нормирования на единицу].

Величина Δ называется обычно доплеровской шириной, так как влияние движения ядра на захват нейтронов можно по аналогии с известными оптическими и акустическими явлениями назвать эффектом Доплера. Если $\frac{m}{M} \ll 1$, то доплеровская ширина может быть представлена в виде

$$\Delta \approx 2\sqrt{R \cdot kT}. \quad (25.7')$$

Имея выражение для вероятности различных значений относительной энергии, легко учесть влияние теплового движения ядер на захват нейтронов. Необходимо, очевидно, усреднить сечение захвата (25.2) по всем возможным значениям относительной энергии E . Для этого следует умножить сечение (25.2) на $w(E) dE$ и проинтегрировать по E .

Заметим, что множитель λ , т. е. $1/v$, стоящий перед резонансным членом, усреднять не нужно, так как этот множитель связан с определением понятия эффективного сечения и происходит от нормировки нейтронной волновой функции на единичный поток.

Усреднённое сечение захвата $\bar{\sigma}_c$ имеет следующий вид:

$$\bar{\sigma}_c = \int \sigma_b^n(E) \omega(E) dE = \sigma_0 \psi(\xi, x), \quad (25.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= 2\pi \left(1 \pm \frac{1}{2i+1}\right) \lambda_0^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma}, \\ \psi(\xi, x) &= \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2}}{1+y^2} dy, \\ x &= \frac{2(E' - E_0)}{\Gamma}, \quad \xi = \frac{\Gamma}{\Delta}, \\ \Delta &= 2\sqrt{\frac{mE_0kT}{M}}. \end{aligned} \right\} \quad (25.9)$$

(Предполагается, что энергия нейтрона близка к резонансной, поэтому в выражении для доплеровской ширины энергия E' заменена на E_0 . На том же основании λ заменено на λ_0 в выражении для σ_0 .)

Прежде чем исследовать формулу (25.9), заметим, что функция $\psi(\xi, x)$ может быть представлена ещё в следующем виде:

$$\psi(\xi, x) = \int_0^{\infty} \cos xy e^{-y - \frac{y^2}{\xi^2}} dy. \quad (25.10)$$

Действительно, применим к $\psi(\xi, x)$ преобразование Фурье. Вводя обозначение

$$\begin{aligned} \psi_k(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi, x) e^{ikx} dx = \\ &= \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2}}{1+y^2} e^{ikx} dx dy, \end{aligned}$$

получим:

$$\psi_k(\xi) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2 z^2} e^{ikz} dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iky}}{1+y^2} dy.$$

Первый из этих интегралов (включая множитель $\frac{\xi}{2\sqrt{\pi}}$) равен $e^{-\frac{k^2}{\xi^2}}$, а второй равен $\pi e^{-|k|}$. Поэтому

$$\psi_k(\xi) = \pi e^{-\frac{k^2}{\xi} - |k|}.$$

Воспользовавшись формулой обращения, найдём $\psi(\xi, x)$:

$$\psi(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\xi) e^{-ikx} dk = \int_0^{\infty} \cos kx e^{-k - \frac{k^2}{\xi}} dk,$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к исследованию общей формулы (25.8) для сечения захвата нейтрона свободным ядром с учётом эффекта Доплера.

Условимся, рассматривая поглощение нейтронов, обусловленное уровнем E_0 , говорить, по аналогии с оптикой, о линии поглощения E_0 . Согласно этой терминологии зависимость сечения захвата от энергии определяет форму контура линии поглощения. Формулы (25.2) и (25.8) определяют естественную форму линии поглощения и форму линии с учётом эффекта Доплера.

Легко показать, что площадь, ограниченная контуром линии поглощения при наличии эффекта Доплера, будет такой же, как и для естественной формы линии. Действительно,

$$\int_0^{\infty} \sigma_b^n(E) dE = \pi \sigma_0 \frac{\Gamma}{2};$$

такой же результат мы получим, если будем исходить из формулы (25.8), так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi.$$

Общее выражение для сечения захвата (25.8) может быть значительно упрощено в двух предельных случаях, которые мы сейчас и рассмотрим.

Рассмотрим сперва случай, когда естественная ширина линии значительно больше доплеровской ширины, т. е. $\xi = \frac{\Gamma}{\Delta} \gg 1$. В формуле (25.9), определяющей функцию $\psi(\xi, x)$, основную роль играют в этом случае значения $y \sim x$. Вынося $\frac{1}{1+y^2}$ в точке $y = x$ за знак интеграла, мы получим:

$$\begin{aligned} \psi(\xi, x) &\approx \frac{1}{1+x^2} \frac{\xi}{2\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2} dy = \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \quad \xi \gg 1. \end{aligned} \quad (25.11)$$

Иными словами, если $\xi \gg 1$, то линия поглощения, как и следовало ожидать, имеет естественную форму, так как эффект Доплера не может играть роли при $\Gamma \gg \Delta$.

Теперь рассмотрим случай, когда естественная ширина меньше доплеровской, т. е. $\xi \ll 1$. Будем, кроме того, предполагать, что выполняется условие $\xi^2|x| \ll 1$; последнее условие, переписанное в виде $|E' - E_0| \ll \frac{\Delta^2}{\Gamma}$, означает, что энергия нейтрона E' мало отличается от резонансной энергии E_0 .

Представив $\psi(\xi, x)$ в виде

$$\psi(\xi, x) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}\xi^2 xy - \frac{1}{4}\xi^2 y^2}}{1+y^2} dy,$$

получим следующую приближённую формулу:

$$\psi(\xi, x) \approx e^{-\frac{1}{4}\xi^2 x^2} \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2 x^2}, \quad (25.12)$$

$$\xi \ll 1, \quad \xi^2 x \ll 1.$$

Формулой (25.12) определяется доплеровская форма линии поглощения. При резонансе согласно (25.12) ψ равняется $\psi(\xi, 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \ll 1$, в то время как для естественной формы линии поглощения ψ при резонансе равняется 1.

Таким образом, благодаря эффекту Доплера контур линии поглощения в центре линии понижается; так как площадь, ограниченная контуром линии, не меняется, то это значит, что линия расширяется.

При условии $\xi \ll 1$ ($\Gamma \ll \Delta$) ширина линии поглощения определяется главным образом доплеровской шириной.

Перейдём теперь к рассмотрению формы далёких крыльев контура линии поглощения, т. е. области энергии, где x велико. Предположим, что $x \gg \xi^{-2}$ (ξ произвольно). Обозначая xu через z , перепишем (25.10) в виде

$$\psi(\xi, x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \cos z \cdot e^{-\frac{1}{x} \left(z + \frac{z^2}{x\xi^2} \right)} dz.$$

Если $x\xi^2 \gg 1$, то в показателе подинтегральной функции можно вычеркнуть $\frac{z^2}{x\xi^2}$, поэтому

$$\psi(\xi, x) \approx \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \cos z \cdot e^{-\frac{z}{x}} dz = \frac{1}{1+x^2}, \quad x\xi^2 \gg 1. \quad (25.13)$$

Итак, мы видим, что если $x\xi^2 \gg 1$, то линия поглощения имеет естественную форму.

Таким образом, эффект Доплера оказывает влияние на форму линии поглощения только в том случае, если $\xi = \frac{\Gamma}{\Delta} \ll 1$ и $x\xi^2 \ll 1$. Последнее условие означает, что величина $|E - E_0|$, т. е. расстояние от центра линии, должно быть малым по сравнению с $\frac{\Delta^2}{2\Gamma}$. Далёкие крылья контура линии поглощения ($x\xi^2 \gg 1$) не подвергаются действию эффекта Доплера ни при каких значениях ξ . Этот результат физически очевиден, так как на больших расстояниях от центра линии доплеровское смещение может иметь место только для ядер,двигающихся с большими скоростями; но число таких ядер относительно мало, поэтому эффект Доплера не оказывает влияния на далёкие крылья контура линии поглощения.

Заметим, что при $x = 0$, т. е. при резонансе,

$$\psi(\xi, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \xi e^{\frac{1}{4} \xi^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2} \xi\right) \right], \quad (25.14)$$

где $\Phi(z)$ — функция ошибок:

$$\Phi(z) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

§ 26. Нейтронная и радиационная ширина

Остановимся на вопросе о зависимости от энергии нейтронной и радиационной ширины.

Если энергия возбуждения составного ядра меньше энергии связи нейтрона в ядре, то нейтронная ширина γ_n равна, очевидно, нулю. В области энергий возбуждения, лишь немного превышающих энергию связи нейтрона, γ_n невелика и пропорциональна скорости вылетающего нейтрона.

Малая величина нейтронной ширины допускает простую физическую интерпретацию. Если составное ядро образуется в результате захвата медленного нейтрона, то имеется лишь одно конечное состояние, в котором может находиться ядро после испускания нейтрона, а именно — основное состояние исходного ядра. Если же происходит излучение γ -кванта, то число конечных состояний может быть большим, так как энергетически возможно любое состояние остаточного ядра с энергией возбуждения, не превышающей энергии связи нейтрона (примерно 8 MeV). Иными словами, после излучения γ -кванта ядро может ещё находиться в возбуждённом состоянии, переход из которого в основное состояние будет сопровождаться излучением новых γ -квантов. И действительно, экспериментально было показано [73], что число γ -квантов, излучаемых ядрами кадмия в результате захвата нейтронов, в несколько раз превосходит число поглощённых нейтронов.

Можно сказать, что излучение γ -кванта связано с меньшей концентрацией энергии составного ядра на одной степени свободы, чем испускание медленного нейтрона, которое в рассматриваемых условиях требует почти полного сосредоточения

всей энергии возбуждения на одной ядерной частице. Такая полная концентрация энергии на одной ядерной частице в случае сравнительно тяжёлого ядра статистически довольно мало вероятна. Это обстоятельство сильно уменьшает нейтронную ширину, которая для ядер среднего атомного веса ($A \sim 100$) в области энергий возбуждения, не превосходящих примерно $E_n + 10^4 \text{ eV}$ (E_n — энергия связи нейтрона), оказывается меньше радиационной ширины.

Приведённые статистические соображения теряют свою силу для лёгких ядер; в этом случае решающим является то обстоятельство, что взаимодействие ядерных частиц друг с другом гораздо больше, чем их взаимодействие с электромагнитным полем. Поэтому вылет частицы становится более вероятным, чем испускание γ -кванта, и соответственно меняется соотношение между частичными ширинами: нейтронная ширина становится гораздо больше радиационной (исключая, конечно, случай совсем медленных нейтронов, для которых нейтронная ширина, пропорциональная скорости, очень мала). Такие соотношения имеют место, например, для Co (при резонансной энергии нейтронов, равной 115 eV) и Mn (при резонансной энергии 300 eV) [74].

С увеличением энергии возбуждения нейтронная ширина сильно возрастает. Это связано с тем, что при больших энергиях возбуждения ядро, остающееся после вылета нейтрона, может само по себе находиться в возбуждённом состоянии. Поэтому число возможностей, связанных с вылетом нейтрона, значительно возрастает, что и приводит к сильному увеличению γ_n . Для ядер среднего атомного веса при энергиях нейтрона $\sim 0,1 \text{ MeV}$ нейтронная ширина уже значительно больше радиационной ширины, которая обычно не превосходит $\sim 0,1 \text{ eV}$.

Малая величина радиационной ширины, как уже указывалось выше, связана с тем обстоятельством, что взаимодействие между излучением и веществом вообще невелико. Подчеркнём ещё раз, что радиационная ширина превосходит нейтронную только в том специальном случае, когда составное ядро образуется в результате захвата медленного нейтрона, причём ядро не является лёгким.

Сделаем несколько замечаний о радиационных свойствах ядер.

Известно, что если длина волны излучения λ значительно больше размеров излучающей системы a , то интенсивность излучения может быть представлена в виде ряда по степеням $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$. Первый член этого разложения представляет собой дипольное излучение, второй член, содержащий дополнительный множитель $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$, — квадрупольное излучение и т. д.

Излучение возбужденного атома удовлетворяет условию $\lambda \gg a$, поэтому обычно, когда нет специальных условий, запрещающих дипольные переходы, главную роль в излучении атома играет дипольное излучение.

Несколько иные соотношения имеют место при излучении возбужденного ядра. Если энергия возбуждения ядра невелика, то условие $\lambda \gg R$ выполняется и здесь, однако при сравнительно малых возбуждениях в излучении ядра важную роль играет квадрупольное излучение, интенсивность которого часто превосходит интенсивность дипольного излучения.

Чтобы объяснить эту особенность ядерного излучения, необходимо помнить о сильном взаимодействии между ядерными частицами. Можно предполагать, что если возбуждение ядра не настолько велико, чтобы существенно повлиять на относительное положение соседних частиц, то излучательные свойства ядра будут подобны излучательным свойствам однородно заряженного макроскопического тела [44].

Легко видеть, что деформация такого тела, а также его вращения не сопровождаются дипольным излучением. В самом деле, дипольный момент тела \mathbf{d} равен

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \int \rho_e \mathbf{r} dV = \frac{\rho_e}{\rho} \mathbf{R}M,$$

где ρ_e — плотность электричества, ρ — плотность вещества, одинаковые вдоль тела, \mathbf{R} — радиус-вектор, определяющий положение центра инерции тела, и M — его масса. В случае свободного движения тела $\ddot{\mathbf{R}} = 0$. Поэтому $\ddot{\mathbf{d}} = 0$ и, следовательно, равняется нулю интенсивность дипольного излучения, пропорциональная $|\ddot{\mathbf{d}}|^2$.

Таким образом, деформациям формы и вращениям рассматриваемого тела отвечают колебания не дипольного мо-

мента, а моментов более высокого порядка, в первую очередь квадрупольного момента. Эти простые соображения показывают, что в излучении ядра должно быть сравнительно сильно представлено квадрупольное излучение.

Можно сказать, что колебания дипольного момента связаны с перемещениями центра зарядов относительно центра инерции ядра. При малых возбуждениях ядра ($\sim 1 \text{ MeV}$), благодаря приблизительному совпадению центра зарядов с центром инерции, дипольные колебания отсутствуют, или, по крайней мере, сильно приглушены по сравнению с колебаниями квадрупольными, которые требуют для своего возбуждения гораздо меньшей энергии, чем дипольные колебания. Последние возникают с заметной интенсивностью только при сравнительно больших возбуждениях ядра ($\sim 10 \text{ MeV}$)^[75].

Таким образом, несмотря на то, что $\lambda \gg R$, интенсивность дипольных линий при малых возбуждениях ядра оказывается меньшей или того же порядка величины, что и интенсивность квадрупольных линий^[44, 75]. При больших возбуждениях ядра главную роль в излучении ядра играет дипольное излучение.

Оценим вероятность квадрупольного излучения ядра. Интенсивность этого излучения равна

$$J = \omega^6 \frac{q^2}{5c^5},$$

где q^2 — квадрат тензора квадрупольного момента. По порядку величины q^2 равно

$$q^2 \approx (e^2 Z^2) \xi^2 R^2,$$

где eZ — заряд ядра, R — его радиус и ξ — амплитуда колебаний ядерного вещества.

Вероятность излучения в единицу времени равна $J/\hbar\omega$, а соответствующая ширина линии Γ_γ равна:

$$\Gamma_\gamma = \frac{J}{\omega} \sim \omega^5 \frac{e^2 Z^2 \xi^2 R^2}{5c^5}. \quad (26.1)$$

Для оценки величины ξ можно положить:

$$\hbar\omega \sim M\omega^2 \xi^2,$$

где M — масса ядра. Таким образом, мы получим приближённое выражение, которое может служить для оценки величины радиационной ширины^[44]:

$$\Gamma_{\gamma} \sim \frac{e^2 Z^2}{5RA} \left(\frac{R}{\hbar c} \right)^3 \frac{(\hbar \omega)^4}{M_p c^2} \quad (26.2)$$

(M_p — масса протона, A — атомный номер). Эта формула приводит к следующему результату: при энергиях возбуждения ~ 1 MeV радиационная ширина для ядер среднего атомного веса по порядку величины равна $0,1$ eV^[44, 53].

Интенсивность октупольного излучения, а также излучения более высокой полярности, как правило, гораздо меньше, чем интенсивность квадрупольного излучения (если только $\lambda \gg R$).

Интенсивность l -польного излучения определяется l -м членом в разложении запаздывающих потенциалов в ряд по степеням $\frac{R}{\lambda}$. Известно, что $l\hbar$ представляет собой момент количества движения, уносимого γ -квантом; поэтому, если J и J' — моменты ядра до и после излучения (в единицах \hbar), то

$$J = J' + 1.$$

В частности, если ядро переходит в состояние с $J' = 0$, то момент исходного состояния ядра должен равняться l .

Для грубой оценки порядка величины радиационной ширины Γ_{γ}^l , отвечающей излучению l -польного γ -кванта, можно воспользоваться следующей формулой^[76]:

$$\Gamma_{\gamma}^l \sim \kappa^2 e^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^{2l+1} \frac{R^{2l}}{(l!)^2}, \quad (26.3)$$

где κ — безразмерная величина порядка единицы [заметим, что квадрупольное излучение соответствует второму члену в разложении запаздывающих потенциалов; в этом случае в согласии с формулой (26.1) Γ_{γ}^2 пропорционально ω^5].

Время жизни возбуждённого состояния по отношению к излучению l -польного γ -кванта равняется $\tau_l = \frac{\hbar}{\Gamma_{\gamma}^l}$. Для

грубой оценки τ_2 можно положить в (26.3) $x \sim 1$, $R \sim 10^{-12}$ см; при этом мы получим^[76]:

$$\tau_2 \sim 5 \cdot 10^{-21} (l!)^2 \left(\frac{20}{\hbar\omega} \right)^{2l+1} \text{ сек.}, \quad (26.4)$$

где $\hbar\omega$ выражается в MeV. Эта формула приводит к следующим значениям τ_2 . Если $l = 3$, то при энергии возбуждения $\hbar\omega = 10$ keV $\tau \sim 7$ часов; при $\hbar\omega = 50$ keV $\tau \sim 0,3$ сек.; при $\hbar\omega = 200$ keV $\tau \sim 2 \cdot 10^{-5}$ сек.

Если $l = 5$, то при $\hbar\omega = 10$ keV $\tau \sim 5 \cdot 10^{12}$ лет; при $\hbar\omega = 200$ keV $\tau \sim 10$ дней.

Как видно из приведённых данных, время жизни слабо возбуждённого ядра по отношению к излучению γ -кванта небольшой энергии и высокой полярности чрезвычайно велико.

Это обстоятельство может быть использовано для объяснения явления ядерной изомерии*).

Ядерные изомеры представляют собой модификации одного и того же изотопа, отличающиеся некоторыми своими свойствами. Обычно явление ядерной изомерии устанавливается по различию радиоактивных свойств изомерных ядер. В этом случае число радиоактивных периодов у какого-либо элемента превышает число радиоактивных изотопов.

Для объяснения ядерной изомерии следует считать, что ядра ряда изотопов могут находиться в метастабильных состояниях, отличающихся достаточно большим временем жизни (которое во всяком случае превосходит период распада изомеров).

Можно предположить^[79], что эти метастабильные состояния представляют собой слабо возбуждённые состояния, отличающиеся сравнительно большим значением момента количества движения по сравнению с основным состоянием.

Согласно сказанному выше, время жизни таких состояний по отношению к γ -излучению может быть очень большим (при достаточно малых $\hbar\omega$ и достаточно больших разностях моментов исходного и конечного состояний ядра).

*) Явление ядерной изомерии у искусственно радиоактивных ядер было открыто Б. Курчатовым, И. Курчатовым, Л. Мысовским и Л. Русиновым^[77, 78].

Следует, однако, иметь в виду, что время жизни метастабильного состояния нельзя определить по формуле (26.4), так как эта формула учитывает только γ -переход, в действительности же возможны безрадиационные переходы, сопровождающиеся испусканием электрона из внешней оболочки атома (внутренняя конверсия γ -лучей). Поэтому для определения времени жизни метастабильных состояний нужно время, вычисленное согласно (26.4), уменьшить в отношении

$1 + \frac{N_e}{N_\gamma}$, где N_e — число конверсионных электронов, а N_γ — число γ -квантов, испускаемых в единицу времени^[80]. Так, например, если энергия возбуждения равняется 25 keV и $l=5$, то время жизни, вычисленное по (26.4) и равное $\sim 2 \cdot 10^8$ лет, уменьшается до $\sim 10^4$ лет.

Заметим, что метастабильное состояние, в котором находится изомер, не обязательно должно отличаться от основного состояния значением углового момента. Вполне вероятно, что некоторые случаи ядерной изомерии можно объяснить, считая угловые моменты обоих состояний равными нулю и предполагая, что основное и метастабильное состояния отличаются различной чётностью. Если эти условия выполнены, то переход из метастабильного в основное состояние с излучением дипольного и квадрупольного γ -квантов становится невозможным. Кроме того, в первом приближении невозможны вылет атомного электрона и образование пар. Переходы из метастабильного состояния в основное могут происходить только благодаря процессам второго приближения (испускание двух γ -квантов, вылет двух атомных электронов и т. д.). Вероятность этих процессов в случае малой разности энергий метастабильного и основного состояний крайне мала, благодаря чему время жизни метастабильного состояния оказывается достаточно большим.

§ 27. Усреднённые эффективные сечения

В этом параграфе мы рассмотрим зависимость от энергии эффективных сечений различных процессов взаимодействия нейтронов с ядрами, предполагая, что энергия нейтрона не превышает 1 — 2 MeV.

В этой области энергий наиболее важную роль играют радиационный захват, упругое и неупругое рассеяние нейтронов, а также деление ядер.

Нас будут в дальнейшем интересовать средние значения эффективных сечений, т. е. сечения, усреднённые по некоторому интервалу энергий, о котором мы будем предполагать, что он содержит большое число уровней составного ядра. Такие усреднённые сечения могут служить для описания ядерных процессов в тех случаях, когда нейтроны или другие частицы, взаимодействующие с ядрами, не обладают строго одинаковой энергией, причём интервал размытости энергии велик по сравнению с расстоянием между соседними уровнями составного ядра.

Усреднённые сечения в области больших энергий возбуждения мы уже ввели в § 19, рассматривая статистические свойства ядра. При этом ширины уровней предполагались того же порядка величины, что и расстояния между соседними уровнями.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда ширины уровней значительно меньше расстояния между ними, так что статистические соображения, развитые в § 19, уже не применимы. Эффективное сечение определяется теперь общей дисперсионной формулой, которую следует усреднить по большому числу уровней.

Среднее эффективное сечение $\bar{\sigma}_\alpha(E)$ какого-либо процесса α связано с усредняемым сечением $\sigma_\alpha(E)$ соотношением

$$\bar{\sigma}_\alpha(E) = \frac{1}{\Delta E} \int_{E - \frac{\Delta E}{2}}^{E + \frac{\Delta E}{2}} \sigma_\alpha(E) dE, \quad (27.1)$$

где E — энергия падающей частицы (в рассматриваемых ниже случаях — нейтрона), ΔE — интервал энергии, по которому производится усреднение. Этот интервал должен быть значительно больше среднего расстояния между соседними уровнями D и значительно меньше того интервала энергии, на протяжении которого заметно меняется само усреднённое сечение.

Так как эффективные сечения различных процессов (исключая потенциальное рассеяние) имеют резкие максимумы вблизи резонансных уровней, то в интеграле (27.1) главную роль играют значения энергии, лежащие вблизи резонансных уровней.

Эффективное сечение процесса α при значениях энергии E , близких к резонансной энергии E_r , имеет следующий вид:

$$\sigma_{\alpha}(E) = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\gamma_{\alpha}^{(r)} \gamma_{n0}^{(r)}}{(E-E_r)^2 + \frac{\gamma_r^2}{4}}, \quad (27.2)$$

где $\gamma_{\alpha}^{(r)}$ — частичная ширина процесса α , $\gamma_{n0}^{(r)}$ — нейтронная ширина, соответствующая упругому рассеянию, γ_r — полная ширина уровня E_r , λ — длина волны нейтрона, J и i — моменты количества движения составного и исходного ядер, s — спин нейтрона.

Пользуясь формулой (27.2), можно представить усреднённое сечение $\bar{\sigma}_{\alpha}(E)$ в виде

$$\bar{\sigma}_{\alpha}(E) = \sum_r \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \int \frac{\gamma_{\alpha}^{(r)} \gamma_{n0}^{(r)}}{(E-E_r)^2 + \frac{\gamma_r^2}{4}} \pi \lambda^2 \frac{dE}{\Delta E}, \quad (27.3)$$

где суммирование производится по всем уровням, лежащим в интервале ΔE .

Величины γ и λ являются медленно меняющимися функциями энергии. Мы можем поэтому вынести их значения при резонансе за знак интеграла. Поскольку ширины γ предполагаются малыми, пределы интегрирования можно расширить от $-\infty$ до $+\infty$. В результате мы получим:

$$\bar{\sigma}_{\alpha}(E) = \frac{N}{\Delta E} \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_{\alpha}}{\Gamma} 2\pi^2 \lambda^2,$$

где N — общее число уровней в интервале ΔE , а Γ_n , Γ_{α} , Γ — значения величин γ_n , γ_{α} , γ_r при резонансе (черта сверху означает, что берётся среднее значение величины).

Так как $N = \Delta E/D$, то

$$\bar{\sigma}_{\alpha}(E) = 2\pi^2 \lambda^2 \frac{2J+1}{(2i+1)(2s+1)} \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_{\alpha}}{\Gamma D}. \quad (27.4)$$

Ради простоты мы не пишем над правой частью (27.4) черты, однако следует иметь в виду, что сюда входят средние значения величин $\bar{\lambda}$, $2J+1$, $\Gamma_{n0}^{(r)}$, $\Gamma_{\alpha}^{(r)}$, $\Gamma^{(r)}$ и D по всем уровням, лежащим в интервале ΔE . Эти средние значения являются функциями энергии E .

Заметим, что формула (27.4) совпадает с формулой (19.8) для усреднённого сечения в области больших энергий возбуждения. Чтобы убедиться в этом, нужно лишь ввести в (19.8) среднее расстояние между уровнями D [эта величина отличается от входящей в (19.8) величины D_J — среднего расстояния между уровнями с определёнными значениями J].

Заменив в (19.8) сумму $\sum_J (2J+1) \frac{1}{D_J}$ на $\frac{2J+1}{D}$, мы получим формулу (27.4).

Определим, пользуясь формулой (27.4), усреднённое сечение радиационного захвата $\bar{\sigma}_{\gamma}(E)$.

Заменяя Γ_{α} радиационной шириной Γ_{γ} , получим:

$$\bar{\sigma}_{\gamma}(E) = \frac{2J+1}{2i+1} \pi^2 \bar{\lambda}^2 \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_{\gamma}}{\Gamma D}. \quad (27.5)$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_{\gamma} + \Gamma_n$, Γ_n — полная нейтронная ширина (средняя), отвечающая процессам как упругого, так и неупругого рассеяния нейтронов.

Заметим, что $\frac{\Gamma_{n0}}{D}$ представляет собой вероятность прилипания нейтрона.

Обозначим через E_0 энергию, при которой радиационная ширина становится равной нейтронной ширине. Эта энергия по порядку величины равна $E_0 \approx 10^4$ eV.

В интервале энергии $0 < E < E_0$ полная нейтронная ширина Γ_n не отличается от нейтронной ширины, отвечающей упругому рассеянию Γ_{n0} . Средняя ширина уровня Γ практически совпадает с радиационной шириной. Поэтому в интервале $0 < E < E_0$ формула (27.5) принимает вид

$$\bar{\sigma}_{\gamma} = \frac{2J+1}{2i+1} \pi^2 \bar{\lambda}^2 \frac{\Gamma_n}{D}. \quad (27.5')$$

Средняя нейтронная ширина при малых энергиях может быть представлена, как мы знаем, в виде [см. (19.15')]

$$\Gamma_n = 2 \cdot 10^{-4} D E^{1/2} \text{ eV}. \quad (27.6)$$

Подставляя это выражение в (27.5'), получим:

$$\bar{\sigma}_\gamma \approx \frac{4}{\sqrt{E}} 10^{-22} \text{ см}^2 \quad (27.6')$$

(E выражено в eV, множитель, содержащий угловые моменты, не выписан, так как (27.6') определяет $\bar{\sigma}_\gamma$ только по порядку величины).

Формула (27.6') выражает известный уже нам закон $1/\nu$.

В интервале энергий $E_1 > E > E_0$, где E_1 — энергия первого резонансного уровня, равная по порядку величины 10^5 — 10^6 eV, неупругое рассеяние нейтронов попрежнему отсутствует. Нейтронная ширина (для упругого рассеяния) превосходит радиационную ширину и практически совпадает с полной шириной:

$$\Gamma_{n0} \approx \Gamma_n \approx \Gamma, \Gamma_{n0} > \Gamma_\gamma.$$

Формула (27.5) даёт в этом интервале энергии

$$\bar{\sigma}_\gamma = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_\gamma}{D} = \frac{\text{const.}}{E}. \quad (27.7)$$

При $E_1 > E > E_0$, Γ_γ и D практически не зависят от E ; поэтому в этом интервале энергии среднее сечение радиационного захвата падает обратно пропорционально энергии, т. е. быстрее, чем по закону $1/\nu$. Для тяжёлых элементов

$$\bar{\sigma}_\gamma \approx 10^{-25} - 10^{-26} \text{ см}^2 \quad (E_1 \approx 10^5 \text{ eV}).$$

В области энергий $E > E_1$ главную роль играют процессы неупругого рассеяния нейтронов. При этом радиационная ширина и ширина, отвечающая упругому рассеянию нейтронов, значительно меньше общей нейтронной ширины, которая практически совпадает с полной шириной уровня:

$$\Gamma_{n0} \ll \Gamma_n \approx \Gamma, \Gamma_\gamma \ll \Gamma_n.$$

Согласно (27.5) получим в этом случае:

$$\bar{\sigma}_\gamma = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0}}{D} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_n}. \quad (27.8)$$

С ростом энергии величина Γ_{n0}/D , представляющая собой коэффициент прилипания, стремится к единице, а Γ_γ/Γ_n стре-

мится к нулю ввиду быстрого роста нейтронной ширины, отвечающей процессам неупругого рассеяния. Поэтому при $E > E_1$ сечение $\bar{\sigma}_r$ быстро убывает с ростом энергии, по-видимому, быстрее, чем $1/E$.

Следует заметить, что при $E > E_1$, необходимо учитывать значения орбитального момента нейтрона, отличные от нуля, так как при $E \sim E_1$ длина волны нейтрона оказывается по порядку величины равной радиусу ядра. Это обстоятельство не меняет, однако, выгода о быстром спадании сечения радиационного захвата с ростом энергии, так как соотношения, имеющие место при $l=0$, сохраняются и при значениях $l \neq 0$.

Перейдём теперь к рассмотрению среднего эффективного сечения упругого рассеяния нейтронов. Мы должны при этом учитывать как резонансное, так и потенциальное рассеяние, амплитуды которых складываются. При усреднении по энергии интерференционный член, возникающий от наложения обеих амплитуд, исчезает; поэтому среднее сечение упругого рассеяния выражается в виде суммы сечений, соответствующих потенциальному и резонансному рассеянию.

Обозначая усреднённое сечение упругого рассеяния через $\bar{\sigma}_s$, получим:

$$\bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_p + \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0}^2}{\Gamma D}, \quad (27.9)$$

где $\bar{\sigma}_p$ — усреднённое сечение потенциального рассеяния; второе слагаемое представляет собой усреднённое сечение резонансного рассеяния, которое определяется общей формулой (27.4), если положить в ней $\Gamma_\alpha = \Gamma_{n0}$.

В области энергий $E < E_0$ полная ширина практически совпадает с радиационной шириной; нейтронная ширина определяется формулой (27.6). Усреднённое сечение резонансного рассеяния в этих условиях не зависит от энергии. Сечение потенциального рассеяния также не зависит от энергии (см. § 24); поэтому общее сечение упругого рассеяния в интервале энергии $E < E_0$ также не зависит от энергии нейтрона.

Сечение потенциального рассеяния $\bar{\sigma}_p$ по порядку величины равно πR^2 (R — радиус ядра) и составляет $2 - 3 \times 10^{-24}$ см². Сечение резонансного рассеяния может рав-

няться 10^{-23} см², поэтому при $E < E_0$ потенциальное и резонансное рассеяние играют примерно одинаковую роль. Не исключена, однако, возможность того, что существуют ядра, у которых σ_p в несколько раз меньше среднего сечения резонансного рассеяния.

В области энергии $E_0 < E < E_1$ полная ширина совпадает с нейтронной, поэтому (27.9) принимает вид

$$\bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_p + \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_n}{D} = \bar{\sigma}_p + \frac{\text{const.}}{v}. \quad (27.10)$$

Если первое слагаемое меньше второго, то в интервале энергии $E_0 < E < E_1$ сечение упругого рассеяния будет обратно пропорционально скорости нейтрона (закон $1/v$ для рассеяния).

В области энергии $E > E_1$ быстрый рост нейтронной ширины, отвечающей неупругому рассеянию, приводит к падению сечения упругого резонансного рассеяния. Что касается потенциального рассеяния, то оно постепенно, с ростом энергии, переходит в рассмотренное ранее диффракционное рассеяние (§ 20) (с ростом энергии нейтрона постепенно «включаются» более высокие значения орбитального момента нейтрона l вплоть до значения $l_{\max} \sim R/\lambda$).

Неупругое резонансное рассеяние нейтронов начинает играть роль при энергии нейтронов, равной $E = E_1$, и быстро увеличивается с ростом энергии. При $\lambda \ll R$ полное сечение всех неупругих процессов, совпадающее с сечением образования составного ядра, становится равным πR^2 . При этом сечение упругого рассеяния (потенциального) также равно πR^2 , т. е. общее сечение равняется $2\pi R^2$.

Сечение деления ядер нейтронами будет рассмотрено в § 35.

§ 28. Ядерные реакции с заряженными частицами

При изучении ядерных реакций с положительно заряженными частицами необходимо учитывать потенциальный барьер, окружающий ядро, который образуется благодаря комбинарованному действию ядерных сил, действующих на малых расстояниях между частицами, и кулоновских сил отталкивания вне ядра.

Высота барьера B для частиц с зарядом Ze равна

$$B = \frac{Zze^2}{R},$$

где R — радиус ядра и Ze — его заряд. Считая, что $R = r_0 A^{1/3}$ (A — массовое число, $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$ см), получим для B выражение

$$B = 0,96zZA^{-1/3} \text{ MeV.}$$

Для прохождения барьера существенна относительная кинетическая энергия, равная $\frac{M_1}{M_1 + M_2} E$, где E — кинетическая энергия падающей частицы по отношению к бесконечно тяжёлому ядру, M_1 и M_2 — массы частицы и ядра. Барьер не играет роли, если $E \gg B'$, где B' — эффективная высота барьера, равная

$$B' = \frac{M_1 + M_2}{M_1} B = 0,96zZ(A + a)A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (28.1)$$

($a = \frac{M_1}{M_0}$, M_0 — масса протона). Ниже приведены значения B' в MeV для различных ядер.

Значения B' и g для различных ядер

Ядро	He	Be	Ne	Ca	Zn	Sn	Yb	U	
Z	2	4	10	20	30	50	70	92	
A	4	9	20	40	66	112	174	238	
B'	p	1,5	2,1	3,7	5,7	7,2	10,0	12,0	14,2
	d	1,8	2,2	3,8	5,9	7,4	10,1	12,1	14,4
	α	4,8	5,3	8,5	12,2	15,0	20,5	24,6	28,6
g	p	0,5	0,86	1,6	2,7	3,5	5,0	6,4	7,8
	d	0,7	1,2	2,2	3,7	5,0	7,1	9,1	11,0
	α	1,1	2,1	4,3	7,2	10,0	14,0	18,0	21,9

Перейдём к определению проникаемости барьера P . Для частицы с массой M и энергией E она определяется следующей формулой:

$$P = e^{-2C}, \quad C = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_E} \sqrt{2M[V(r) - E]} dr, \quad (28.2)$$

где $V(r)$ — потенциальная энергия частицы с учётом центробежной энергии, равной $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}$ (l — момент частицы). Нижний предел в этом интеграле мы считаем равным радиусу ядра R , верхний предел r_E может быть найден из уравнения

$$\frac{Zze^2}{r_E} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr_E^2} = E.$$

В случае лобовых столкновений ($l=0$) центробежная энергия обращается в нуль и

$$C \equiv C_0 = \frac{\sqrt{2M}}{\hbar} \int_R^{r_E} \sqrt{\frac{zZe^2}{r} - E} dr,$$

где $r_E = \frac{Zze^2}{E}$. Выполнив интегрирование, мы получим в этом случае [82]:

$$C_0 = \frac{2zZe^2}{\hbar v} [\arccos x^{1/2} - x^{1/2}(1-x)^{1/2}], \quad (28.3)$$

где $x = \frac{E}{B}$ и $v = \sqrt{\frac{2E}{M}}$ — скорость частицы на бесконечном расстоянии от ядра. В предельном случае малых энергий, когда $E \ll B$, C_0 выражается следующей простой формулой:

$$C_0 = \frac{\pi zZe^2}{\hbar v} - \frac{2e}{\hbar} (2zZMR)^{1/2}, \quad l=0, \quad E \ll B. \quad (28.4)$$

Полученные соотношения имеют важное значение для теории α -распада, так как основным фактором, определяющим вероятность α -распада, является проницаемость потенциального барьера.

Если предполагать, что α -частица находится в s -состоянии ($l=0$) и что её энергия E значительно меньше высоты барьера, то для логарифма периода полураспада τ получится следующее выражение:

$$\ln \tau = \frac{2\pi zZe^2}{\hbar v} - K, \quad E \ll B, \quad (28.5)$$

где K — константа, содержащая согласно (28.4) радиус ядра.

Это соотношение, связывающее время жизни и энергию распада α -активных ядер, хорошо оправдывается в огромном диапазоне изменения τ (от $\tau = 2 \cdot 10^{10}$ лет для медленных α -частиц с энергией 4,3 MeV до $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ сек. для быстрых α -частиц с энергией 8,9 MeV), с практически одним и тем же K , т. е. с почти неизменным радиусом ядра.

Заметим, что сравнение экспериментальных данных с формулой (28.5) даёт возможность оценить радиусы α -активных ядер, причём полученные значения находятся в соответствии с данными по диффракционному рассеянию быстрых нейтронов ядрами.

Проницаемость барьера при лобовых столкновениях может быть представлена ещё в следующем виде [82]:

$$P_0 = e^{-2g\gamma\left(\frac{E}{B}\right)}, \quad (28.6)$$

где

$$g = \frac{(2MzZe^2R)^{1/2}}{\hbar} \doteq \frac{R}{\lambda_B}, \quad \gamma(x) = x^{-1/2} \arccos x^{1/2} - (1-x)^{1/2}$$

(λ_B — длина волны частицы, соответствующая энергии $E = B$).

Значения g даны в приведённой выше таблице.

Проницаемость барьера для частицы с моментом l равна [82]

$$P_l = e^{-2C_l},$$

$$C_l = \frac{g}{2} x^{-1/2} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1-2x}{(1+4xy)^{1/2}} \right] - (y+1-x)^{1/2} +$$

$$+ y^{1/2} \ln \frac{1+2y^{1/2}[y^{1/2}+(y+1-x)^{1/2}]}{(1+4xy)^{1/2}}, \quad (28.7)$$

где $x = \frac{E}{B}$ и $y = \frac{l(l+1)}{g^2}$.

Если $y \ll 1$, т. е. $l \ll g$ и $x < 1$, то

$$C_l \approx C_0 + \frac{2}{3} g [(y+1-x)^{3/2} - (1-x)^{3/2}].$$

Для значений энергии, не очень близких к B , выражение в квадратных скобках приближённо равно $\frac{3}{2} y (1-x)^{1/2}$; при этом проницаемость определяется простой формулой

$$P_l = P_0 e^{-2gy(1-x)^{1/2}}. \quad (28.8)$$

С увеличением l эта величина уменьшается и становится равной $\frac{1}{e} P_0$ при $y = \frac{1}{2} g^{-1} (1-x)^{-1/2}$, чему соответствует значение l , равное

$$l_G = \left(\frac{1}{2} g\right)^{1/2} (1-x)^{-1/4} - \frac{1}{2}.$$

При расщеплении ядра заряженной частицей эффективными оказываются все значения её момента от $l=0$ до $l \sim l_G$.

Для нейтронов роль l_G играет величина $l_0 = \frac{R}{\lambda}$.

В случае медленных заряженных частиц ($E \ll B$) $l_G \approx \sqrt{\frac{1}{2} g}$. Эта величина отлична от нуля, в то время как для медленных нейтронов $l_0 = 0$.

Отсюда вытекает важное следствие, касающееся свойств углового распределения продуктов ядерной реакции.

Если момент количества движения составного ядра равен нулю, то угловое распределение продуктов реакции будет сферически симметричным. Поэтому в том случае, когда ядерная реакция происходит под действием неполяризованных медленных нейтронов ($\lambda \gg R$), причём момент количества движения исходного ядра равен нулю, из равенства нулю величины l_0 следует, что угловое распределение продуктов реакции будет сферически симметричным.

Так как $l_G \neq 0$, то угловое распределение продуктов реакции, вызываемой неполяризованным пучком заряженных частиц, может не быть сферически симметричным даже в том случае, когда длина волны частиц значительно больше размеров ядра.

Если энергия заряженной частицы превосходит высоту барьера, то в общем имеют место такие же закономерности, что и для нейтрона той же энергии. В частности, полное эффективное сечение всех неупругих процессов, вызываемых заряженной частицей с энергией $E > B$ при условии, что длина волны частицы у поверхности ядра значительно меньше его радиуса, равняется πR^2 (об упругом рассеянии быстрых заряженных частиц мы говорили в § 22).

Резонансные явления с заряженными частицами наблюдаются только у лёгких ядер, для которых велико расстояние

между первыми уровнями ($\sim 1 \text{ MeV}$). В случае тяжёлых ядер это расстояние обычно гораздо меньше разброса заряженных частиц по энергиям.

Можно указать на резонансные явления при радиационном захвате протонов, а также при реакциях с α -частицами, сопровождающихся испусканием протона или нейтрона. При реакциях с дейтроном резонансные явления не наблюдаются. Это объясняется большой энергией возбуждения составного ядра, получающегося в результате захвата дейтрона (из-за малой энергии связи дейтрона энергия возбуждения составного ядра примерно в два раза превосходит энергию возбуждения, возникающую при захвате нейтрона или протона).

Сделаем несколько замечаний о распаде составного ядра, сопровождающемся вылетом заряженной частицы.

Вероятность вылета заряженной частицы определяется двумя факторами: во-первых, вероятностью концентрации энергии возбуждения составного ядра на этой частице и, во-вторых, вероятностью прохождения частицы через барьер.

Первая из этих вероятностей определяет частичную ширину в отсутствие барьера. Мы обозначим её для частицы a через G_{Aa} , где A обозначает состояние ядра, остающегося после вылета частицы a . Реальная ширина Γ_{Aa} равна

$$\Gamma_{Aa} = G_{Aa} P_{Aa},$$

где P_{Aa} — проницаемость барьера. Можно предполагать, что значения G для протона и нейтрона мало отличаются друг от друга. Общая ширина по отношению к вылету частицы a равна:

$$\Gamma_a = \sum_A G_{Aa} P_{Aa}. \quad (28.9)$$

Ширина Γ_a зависит от числа возможных состояний ядра, остающегося после вылета частицы a . Это число состояний в свою очередь зависит от общей энергии, освобождаемой при реакции и равной $E + Q_0$, где E — энергия падающей частицы, а $Q_0 = c^2 (M_I + M - M_{II} - M')$. (M_I и M_{II} — массы начального и конечного ядер, M и M' — массы падающей и вылетающей частиц, c — скорость света).

Если освобождаемая энергия превосходит высоту барьера B_a для частицы a , то главную роль в сумме (28.9) играют те слагаемые, для которых проникаемость барьера P_{Aa} равна единице. Обозначая через $N(U)$ число состояний конечного ядра с энергией возбуждения, меньшей или равной U , представим сумму (28.9) в виде

$$\Gamma_a \approx N(E + Q_0 - B_a) \bar{G}_a, \quad (28.10)$$

где \bar{G}_a — некоторое среднее значение G_{Aa} (усреднённое по состояниям конечного ядра).

Таким образом, Γ_a пропорционально числу состояний конечного ядра с энергией $U \leq E + Q_0 - B_a$. Мы имеем $N(E + Q_0 - B_a)$ групп вылетающих частиц, отличающихся своей энергией; наибольшее число частиц имеет энергию, заключённую между B_a и $B_a + T$, где T — температура ядра, соответствующая энергии возбуждения $E + Q_0 - B_a$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда освобождаемая энергия меньше высоты барьера, $Q + E < B_a$. В этом случае проникаемость барьера P отлична от единицы для всех значений энергии вылетающей частицы. Наибольшее P_{Aa} отвечает основному состоянию остаточного ядра. Частичная ширина по порядку величины равна в этом случае:

$$\Gamma_a = G_{a0} P_{a0} \quad (28.11)$$

(индекс 0 означает основное состояние остаточного ядра).

Ясно, что частичная ширина в первом из рассмотренных выше случаев больше, чем во втором. Мы видим, что полная ширина $\Gamma = \sum \Gamma_a$ определяется главным образом теми вылетающими частицами, для которых разность между освобождаемой энергией и высотой барьера $E + Q_0 - B_a$, а также вероятность концентрации энергии на частице G имеют наибольшие значения.

Этим условиям лучше всего удовлетворяет нейтрон, испускание которого является весьма вероятным процессом, независимо от вида падающей частицы.

Испускание α -частицы также представляет собою довольно распространённый тип реакции, несмотря на большую высоту барьера для α -частиц. Это связано с тем, что большая высота

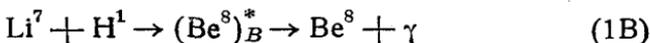
барьера для α -частицы компенсируется большим значением освобождаемой энергии *).

Испускание дейтрона крайне мало вероятно вследствие большой внутренней энергии дейтрона (обычно оно просто невозможно по энергетическим соображениям).

Радиационная ширина, как правило, очень мала. Только в специальных случаях (например, при захвате медленных нейтронов) полная ширина практически совпадает с радиационной шириной.

Радиационный захват имеет место также в тех случаях, когда вылет частицы невозможен по энергетическим соображениям либо запрещён строгими правилами отбора.

Приведём следующий пример, разъясняющий эти правила. При столкновении протонов с Li^7 имеют место реакции



(звёздочка над скобкой обозначает, что ядро находится в возбуждённом состоянии, индексами A и B различаются состояния образующихся составных ядер). Вторая из этих реакций является резонансной (резонансная энергия протонов ~ 440 keV), в то время как выход α -частиц в реакции (1A) монотонно растёт с увеличением энергии протонов.

Чтобы понять различный характер реакций (1A) и (1B), достаточно сделать предположение о различной чётности волновых функций, описывающих состояния составных ядер $(\text{Be}^8)_A^*$ и $(\text{Be}^8)_B^*$. Чётность α -частицы $w_\alpha = +1$. Так как спин α -частицы равен нулю, то волновая функция, описывающая относительное движение двух α -частиц, может содержать волны только с чётными l . Поэтому распад ядра $(\text{Be}^8)^*$ на две α -частицы возможен только в том случае, если чётность этого ядра $w = +1$. Мы допустим, что чётность ядра $(\text{Be}^8)_A^*$ $w = +1$, чётность ядра $(\text{Be}^8)_B^*$ $w = -1$. На основании (23.12)

*) Разность освобождаемых энергий при вылете α -частицы и протона равняется $\Delta H + \Delta(A-1) - \Delta(\alpha) - \Delta(A-4)$, где $\Delta(A)$ — дефект массы ядра с атомным номером A . Эта величина [48] в случае тяжёлых ядер того же порядка величины, что и разность высот барьера $B_\alpha - B_H$.

отсюда следует, что распад $(\text{Be}^8)^*_B$ на две α -частицы невозможен.

Таким образом, в реакции (1B) вылет α -частиц строго запрещён. Поэтому ширина уровня составного ядра $(\text{Be}^8)^*_B$ гораздо меньше ширины уровня $(\text{Be}^8)^*_A$ и резонанс наблюдается при реакции (1B) и не наблюдается при реакции (1A).

Так как, по всей вероятности, характер чётности ядра Li^7 $\omega = -1$ [82], то для возможности протекания реакции (1A) необходимо, чтобы момент протона l был нечётным.

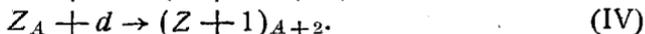
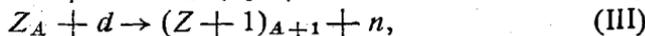
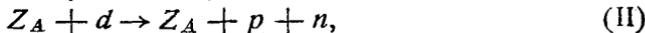
Рассмотрим ещё вопрос о характере излучения, испускаемого ядрами $(\text{Be}^8)^*_B$.

Основное состояние ядра Be мы предполагаем чётным моментом $J=0$. Легко показать, что γ -квант, испускаемый при реакции (1B), будет дипольным. Действительно, если предположить, что излучение является дипольным, то состояние ядра $(\text{Be}^8)^*_B$ будет нечётным с моментом, равным $J=1$. Благодаря нечётности волновой функции, описывающей $(\text{Be}^8)^*_B$, обеспечивается невозможность распада $(\text{Be}^8)^*_B$ на две α -частицы, как это и должно быть.

Если же предположить, что излучение является квадрупольным, то состояние $(\text{Be}^8)^*_B$ будет чётным с $J=2$; ядро $(\text{Be}^8)^*_B$ сможет при этом распадаться на две α -частицы, что по условию невозможно.

§ 29. Столкновения дейтронов с тяжёлыми ядрами

Существенной особенностью отличаются ядерные реакции, в которых участвуют дейтроны, если их энергия меньше высоты потенциального барьера. При столкновении дейтрона с ядром он не обязательно должен целиком входить в ядро. Благодаря сравнительно малой энергии связи дейтрона может произойти его «диссоциация» ещё вне ядра. При этом нужно различать следующие реакции:



Как мы увидим далее, для всех этих реакций механизм, связанный с «предварительным» расщеплением дейтрона, оказывается более вероятным, чем механизм, связанный с образованием составного ядра *).

Реакцию (II) — расщепление дейтрона в кулоновском поле ядра — мы рассмотрели в § 13 и вывели формулы, определяющие эффективное сечение расщепления, а также распределения вылетающих частиц по энергиям и углам.

Чтобы определить сечения реакций (I), (III), (IV), нужно, помимо вероятности расщепления дейтрона, знать также коэффициент прилипания частиц к ядру. Так как точная теория этого коэффициента в настоящее время отсутствует, то вычисление эффективных сечений реакций (I), (III), (IV) имеет смысл только с «экспоненциальной точностью», т. е. без сравнительно медленно меняющегося с энергией сталкивающихся частиц коэффициента перед экспоненциальным множителем с большой отрицательной экспонентой (большая по сравнению с единицей величина абсолютного значения экспоненты является условием применимости квазиклассического метода, см. ниже). При этом можно считать орбитальный момент l дейтрона относительно ядра равным нулю, т. е. рассматривать лишь «лобовое» столкновение. Члены в эффективном сечении, соответствующие отличным от нуля l , во всяком случае меньше члена с $l = 0$ и в рассматриваемом приближении несут существенны. Будем предполагать, что ядро является достаточно тяжёлым и считать его неподвижным при столкновении с дейтроном.

Рассмотрим сначала реакцию (I), т. е. распад дейтрона с захватом нейтрона. Образующийся при распаде дейтрона нейтрон может захватиться на один из уровней составного ядра. Ниже мы увидим, что нейтрон должен захватываться преимущественно на неглубокие уровни. Число таких уровней у тяжёлого ядра, вообще говоря, велико, и они расположены относительно близко друг от друга. Другими словами, конечных состояний в этом процессе очень много, и поэтому образующиеся при распаде дейтрона частицы характеризуются

*) В применении к реакции (1) этот механизм был указан Оппенгеймером и Филлипсом [83]. Количественная теория всех этих реакций была дана Е. Лифшицем [84].

непрерывным энергетическим спектром (мы увидим, впрочем, что предположение о густоте ядерных уровней становится вообще несущественным при энергиях дейтрона, превышающих определённое значение).

Вероятность реакции зависит как от энергии E падающего дейтрона, так и от конечного состояния системы, в частности, от энергии E_p вылетающего протона (энергии E , E_p и энергия E_n захватываемого нейтрона связаны, очевидно, законом сохранения: $E_p + E_n = E - \epsilon$, где ϵ — энергия связи дейтрона). В рассматриваемом приближении достаточно вычислить эту вероятность для того конечного состояния, при котором она имеет наибольшее возможное значение. Эта максимальная вероятность и будет определять в основном вероятность процесса.

Количественный расчёт может быть проведён с помощью развитой Л. Ландау квазиклассической теории столкновений [112] (см. также [84] и [113]). В применении к рассматриваемому случаю этот метод сводится к следующему. Необходимо рассмотреть чисто классически «лобовое» столкновение дейтрона с неподвижным тяжёлым ядром, причём до некоторого «расстояния» $r = \xi$ дейтрон движется как целое, в этой точке он «распадается», после чего протон с энергией $E_p > 0$ уходит на бесконечность, а нейтрон с энергией E_n попадает в точку $r = 0$, т. е. в ядро. Мы не учитываем здесь конечности радиуса ядра, которое рассматривается как точечное*). Положение «точки распада» ξ может быть определено через энергию E_n (или E_p) с помощью законов сохранения энергии и импульса при распаде дейтрона. Следует подчеркнуть, что название «точка распада» имеет здесь чисто формальный характер — речь идёт о формальном описании движения в «классически недостижимой» (подбарьерной) области, и ξ может, вообще говоря, оказаться даже комплексным.

Построив таким образом «классическую траекторию», надо вычислить для этого движения классическое действие:

$$S = S_d(\infty, \xi) + S_p(\xi, \infty) + S_n(\xi, 0), \quad (29.1)$$

где S_d — действие для дейтрона как целого при движении из бесконечности в «точку распада» $r = \xi$, S_p и S_n — дей-

*) Учёт конечности радиуса ядра выполнен в [116].

ствия для протона и нейтрона при их движении из «точки распада» соответственно в бесконечность и в ядро. Искомое эффективное сечение реакции по порядку величины равняется

$$\sigma \sim e^{-\frac{2}{n} \operatorname{Im} S}. \quad (29.2)$$

Согласно сказанному выше положение точки ξ должно быть при этом определено так, чтобы σ имело наибольшее возможное (при заданном E и положительном E_p) значение, т. е. из условия минимальности мнимой части действия, $\operatorname{Im} S$. Определённое таким образом эффективное сечение будет, очевидно, функцией только от начальной энергии дейтрона E .

Опустив подробное изложение вычислений, приведём здесь лишь получающиеся результаты. Эффективное сечение удобно представить в следующем виде:

$$\sigma(E) \sim e^{-\frac{2Ze^2}{n} \sqrt{\frac{M}{\varepsilon}} f(E)}, \quad (29.3)$$

где функция $f(E)$ связана с минимальным значением мнимой части S соотношением $f(E) = \frac{\sqrt{\varepsilon/M}}{Ze^2} \operatorname{Im} S$. Можно показать, что в области малых энергий функция $f(E)$ определяется следующими параметрическими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} f &= 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}} \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{E}{E + \chi^2 \varepsilon} + \frac{\lambda \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}}{1 - \chi}}, \\ \frac{E}{\varepsilon} &= \frac{(1 - \chi)^2}{2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}} - \chi^2, \quad \chi = \frac{2 \cos \lambda - \lambda \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}}{2 + \lambda \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (29.4)$$

(знак arccos надо брать таким же, как знак χ). Вычисленные по этим формулам значения $f(E)$ при всех E меньше, чем значения функции $f = \pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}}$, которая соответствует переходу дейтрона целиком через барьер. При $E \rightarrow 0$ разложение (29.4) в ряд даёт:

$$f(E) = \pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}} - 2,21. \quad (29.5)$$

Энергия нейтрона E_n , соответствующая определяемой формулами (29.4) максимальной вероятности, является функцией энергии дейтрона E и убывает с возрастанием E (E_n лежит в интервале $1,5-0,5\varepsilon$).

В области энергий дейтрона $E \gg \varepsilon$ имеется ещё один минимум у мнимой части действия, соответствующей равной нулю энергии нейтрона ($E_n = 0$). Этот минимум сначала лежит выше минимума (29.4), но, начиная с энергии $E \approx 1,72\varepsilon$, он оказывается более низким, и, следовательно, именно он определяет вероятность рассматриваемого процесса. Соответствующее выражение для $f(E)$ может быть вычислено в явном виде и равно

$$f(E) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{E-\varepsilon}} \arccos \sqrt{\frac{E-\varepsilon}{E+\varepsilon}} - 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}} \arccos \sqrt{\frac{E}{E+\varepsilon}}. \quad (29.6)$$

При больших E разложение в ряд даёт:

$$f(E) \approx \frac{4\varepsilon^2}{3E^2}. \quad (29.7)$$

Нейтрон, как уже было указано, поглощается в случае $E \gg \varepsilon$ с энергией, равной нулю, вне зависимости от значения энергии дейтрона (точнее говоря, нейтрон захватывается на какой-нибудь близкий к нулю уровень составного ядра; ясно, что структура более глубоких уровней становится при этом вообще несущественной).

При $E_n = 0$ нейтрон может либо захватиться, либо вылететь вместе с протоном. Поэтому те же формулы (29.3), (29.4), (29.6) определяют и эффективное сечение реакции (II) (конечно, с другим предэкспоненциальным множителем) для всех энергий E , начиная от ε (если $E < \varepsilon$, то распад дейтрона с освобождением обеих частиц, очевидно, вообще невозможен)*).

При $E > 1,72\varepsilon$ сечения обеих реакций (I) и (II) пропорциональны одному и тому же экспоненциальному выраже-

*) Реакции (II) соответствуют энергии $E_n \geq 0$; при этом действие S_n является чисто действительным. Можно показать, что никаких других минимумов, кроме минимума с $E_n = 0$, $\text{Im } S$ в области $E_n \geq 0$ не имеет.

нию (29.3), в котором $f(E)$ определяется формулой (29.6). Этот экспоненциальный множитель, как и должно быть, совпадает с экспоненциальным множителем в точной формуле (13.12), определяющей сечение реакции (II).

Перейдём к рассмотрению распределения освобождающихся при реакции (I), (II) частиц по энергиям. Для этого следует определить изменение $\text{Im } S$ при отклонении от точек минимума.

Вылетающие при реакции (I) протоны при энергиях $E < 1,72\varepsilon$ удовлетворяют гауссовому распределению с некоторым наиболее вероятным значением $E_{p0} = E_{p0}(E)$, зависящим от энергии, и с шириной, обратно пропорциональной Z и медленно возрастающей с энергией E .

При энергиях $E > 1,72\varepsilon$, как уже было указано, наиболее вероятное значение энергии нейтрона равно $E_n = 0$, и соответственно наиболее вероятная энергия вылетающих протонов равна $E_{p0} = E - \varepsilon$. Распределение протонов с энергиями $E_p > E_{p0}$ (чему соответствуют нейтроны, захватывающиеся с отрицательными энергиями, $E_n < 0$) не является гауссовым и определяется формулой

$$\begin{aligned} d\sigma(E_p) &= \text{const} \cdot \exp \left\{ -Z \sqrt{\frac{E_p - E_{p0}}{\Delta(E)}} \right\} dE_p = \\ &= \text{const} \cdot \exp \left\{ -Z \sqrt{\frac{-E_n}{\Delta(E)}} \right\} dE_n, \end{aligned} \quad (29.8)$$

где «ширина» распределения Δ представляет собой возрастающую функцию E . Протоны же с энергиями $E_p < E - \varepsilon$ (и соответственно нейтроны с $E_n > 0$) соответствуют в основном реакции (II); их распределение определяется формулой вида

$$\begin{aligned} d\sigma(E_p) &= \text{const} \cdot \exp \left\{ Z \frac{E_p - E_{p0}}{\Delta(E)} \right\} dE_p = \\ &= \text{const} \cdot \exp \left\{ \frac{-ZE_n}{\Delta(E)} \right\} dE_p \end{aligned} \quad (29.9)$$

с некоторой другой (тоже возрастающей) функцией $\Delta(E)$.

Экспоненциальный множитель в этом выражении совпадает, как и следовало ожидать, с экспоненциальным множителем в точной формуле (13.11), определяющей распределение вылетающих нейтронов в реакции (II).

Таким образом, в отличие от случая $E < 1,72\varepsilon$, при энергии дейтрона $E > 1,72\varepsilon$ распределение вылетающих частиц не является гауссовым. Такая существенная разница в характерах распределений при $E > 1,72\varepsilon$ и $E < 1,72\varepsilon$ связана с тем, что минимум $\text{Im } S$, определяющий максимальную вероятность, при $E < 1,72\varepsilon$ есть обычный минимум, вблизи которого функция параболична, минимум же $\text{Im } S$, определяющий вероятность при $E > 1,72\varepsilon$, соответствующий энергии нейтрона $E_n = 0$, есть угловая точка функции.

Остановимся, наконец, на реакциях (III) и (IV) — распаде дейтрона с захватом протона и с захватом обеих частиц. Оказывается, что в этих реакциях наиболее вероятная энергия нейтрона равна нулю. Соответственно этому эффективные сечения обеих реакций пропорциональны одному и тому же экспоненциальному множителю. Показатель этого множителя равен

$$\left. \begin{aligned} f(E) &= 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}} \arccos \sqrt{\frac{E}{E+\varepsilon}} + \\ &+ \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\varepsilon-E}} \operatorname{arg sh} \sqrt{\frac{\varepsilon-E}{\varepsilon+E}} \quad (\text{при } E < \varepsilon), \\ f(E) &= 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}} \arccos \sqrt{\frac{E}{E+\varepsilon}} + \\ &+ \sqrt{\frac{2\varepsilon}{E-\varepsilon}} \arcsin \sqrt{\frac{E-\varepsilon}{E+\varepsilon}} \quad (\text{при } E > \varepsilon). \end{aligned} \right\} (29.10)$$

При малых E разложение $f(E)$ в ряде имеет вид

$$f(E) = \pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}} - 0,75, \quad (29.11)$$

т. е. $f(E)$ стремится к своему «барьерному» выражению, оставаясь, однако, меньше его. При больших E справедливо выражение

$$f(E) = \pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{2E}}, \quad (29.12)$$

что соответствует «барьерной» формуле для протона.

Распределение вылетающих при реакции (III) нейтронов по энергиям имеет следующий вид:

$$d\sigma(E_n) = \text{const} \cdot e^{-Z \frac{E_n}{\Delta(E)}} dE_n, \quad (29.13)$$

причём «ширина» $\Delta(E)$ возрастает с энергией дейтрона.

Подчеркнём в заключение ещё раз, что все изложенные результаты справедливы в «квазиклассическом» приближении. Условие их применимости сводится к требованию, чтобы абсолютное значение экспоненты в выражении для эффективного сечения было велико по сравнению с единицей.

ГЛАВА IV

ЗАМЕДЛЕНИЕ НЕЙТРОНОВ

§ 30. Кинетическое уравнение

Возникающие при ядерных реакциях нейтроны обладают обычно энергиями порядка нескольких сот тысяч или нескольких миллионов eV . Во многих случаях такие нейтроны приходится замедлять до значительно меньших энергий (например, до тепловых энергий).

Замедление быстрых нейтронов может происходить либо благодаря неупругому рассеянию, либо в результате упругих столкновений нейтронов с ядрами той среды (замедлителя), в которой движутся нейтроны. Неупругое рассеяние возможно только в том случае, если энергия нейтронов превосходит энергию первого возбуждённого уровня ядер замедлителя. Для лёгких ядер, представляющих наибольший интерес с точки зрения замедления, эта энергия по порядку величины равна нескольким MeV . При меньших энергиях замедление нейтронов может происходить только в результате упругих столкновений.

В этой главе мы рассмотрим замедление нейтронов, происходящее в результате упругих столкновений с ядрами замедлителя*). Основная задача, которая нас интересует, состоит в нахождении функции распределения нейтронов. Если \mathbf{r} и \mathbf{p} — радиус-вектор и импульс нейтрона, то функция распределения по координатам и импульсам $N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ определяется таким образом, что $N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ представляет

*) Все результаты этой главы содержатся в обзоре [92]. При написании главы нам оказал помощь Л. Пятигорский, которому мы выражаем здесь благодарность.

собой число нейтронов в момент времени t , для которых \mathbf{r} и \mathbf{p} заключены в интервалах $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{p}$ (если во всём объёме находится только один нейтрон, то $N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ имеет смысл плотности вероятности).

Чтобы установить уравнение, которому удовлетворяет функция распределения, рассмотрим изменение числа нейтронов в элементе объёма $d\mathbf{r}$ и интервале импульсов $d\mathbf{p}$, отнесённое к единице времени. Это изменение определяется частной производной $\frac{\partial N}{\partial t}$, которая складывается из трёх частей: числа нейтронов q , ежесекундно доставляемых источником; изменения числа нейтронов, обусловленного их столкновениями с ядрами $\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{от}}$ и изменения числа нейтронов, обусловленного их свободным движением. Последняя величина равна — $\mathbf{v} \text{ grad } N$, где \mathbf{v} — скорость нейтронов. Поэтому

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{от}} - \mathbf{v} \text{ grad } N + q. \quad (30.1)$$

Изменение функции распределения, обусловленное столкновениями, можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{от}} = -\frac{v}{l} N + \int \frac{v'}{l'_s} N(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) \omega(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\mathbf{p}', \quad (30.2)$$

где l — полная длина свободного пробега нейтрона с энергией E и скоростью v , l'_s — длина свободного пробега нейтрона с энергией E' и скоростью v' по отношению к упругому рассеянию, $\omega(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ — относительная вероятность того, что нейтрон в результате столкновения перешёл из состояния с импульсом \mathbf{p}' в состояние с импульсом \mathbf{p} . Функция $\omega(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ при всех \mathbf{p} удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\int \omega(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\mathbf{p}' = 1. \quad (30.3)$$

Полная длина свободного пробега l связана с длинами пробега l_s и l_g по отношению к рассеянию и захвату соотношением

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_s} + \frac{1}{l_g}.$$

Величины l , l_s , l_c зависят, вообще говоря, от энергии нейтрона.

Первое слагаемое в (30.2) определяет число нейтронов, уходящих каждую секунду из состояния с импульсом \mathbf{p} , а второе — число нейтронов, приходящих в это состояние благодаря упругим столкновениям с ядрами. Подставляя (30.2) в (30.1), получим следующее интегродифференциальное уравнение для определения функции распределения:

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + v \operatorname{grad} N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \frac{v}{l} N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int \frac{v'}{l_s} \omega(\mathbf{p}', \mathbf{p}) N(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) d\mathbf{p}' + q. \quad (30.4)$$

Это уравнение называется кинетическим и является основным уравнением в теории замедления нейтронов.

В интересующем нас случае, когда энергия нейтрона меньше энергии первого возбуждённого уровня ядер замедлителя, длина волны нейтрона λ значительно больше, чем радиус этих ядер R_0 . Поэтому упругое рассеяние нейтронов ядрами замедлителя в системе центра инерции будет сферически симметричным. Мы не будем учитывать химической связи атомов замедлителя и будем считать ядра последнего свободными (см. § 41). Так как $\lambda \gg R_0$, то взаимодействие между нейтроном и ядром может быть описано, так же как это было сделано в § 6, потенциальной энергией V , имеющей вид

$$V = A\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}),$$

где \mathbf{r} и \mathbf{R} — радиус-векторы нейтрона и ядра и A — некоторая функция энергии нейтрона.

Пользуясь этим выражением для V , легко определить вид функции $\omega(\mathbf{p}', \mathbf{p})$, входящей в (30.4). Применяя теорию возмущений, мы получим, очевидно, следующее выражение для $\omega(\mathbf{p}', \mathbf{p})$:

$$\omega(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = a(E) \delta \left[E - E' - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \right],$$

где $\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M}$ представляет собой энергию, переданную нейтроном ядру при упругом соударении (M — масса ядра)

и $a(E)$ — некоторая функция энергии нейтрона, которая немедленно определяется из условия нормировки (30.3):

$$a(E) \int \delta \left[E - E' - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \right] d\mathbf{p}' = 1.$$

Устранив δ -функцию путём интегрирования по углу θ между \mathbf{p} и \mathbf{p}' и замечая, что энергия E' заключена в пределах $\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 E \ll E' \leq E$, получим следующее выражение для $a(E)$:

$$a(E) = \frac{(M+m)^2}{8\pi (mM)^2} \left(\frac{2m}{E}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$\omega(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{M+m}{Mm}\right)^2 \left(\frac{2m}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \delta \left[E - E' - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \right]. \quad (30.5)$$

В кинетическом уравнении (30.4) удобно перейти от проекций импульса нейтрона к новым переменным $u = \ln \frac{E_0}{E}$ и $\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{p}}{p}$, где E_0 — некоторая начальная энергия нейтронов. Целесообразность применения логарифмической шкалы для энергии заключается в том, что, как мы увидим дальше, функция распределения нейтронов в этой шкале при больших u не зависит от u .

В новых переменных уравнение (30.4) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad} N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t) + \frac{v}{l(u)} N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t) = \\ = \int_0^u du' \int d\mathbf{\Omega}' \frac{v'}{l_s} f(\mu_0, u - u') N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', u', t) + s(\mathbf{r}, u, t), \end{aligned} \quad (30.6)$$

где s — число нейтронов, доставляемых источником в единицу объёма и единичный интервал переменной u , а функция f связана с ω соотношением

$$f du' d\mathbf{\Omega}' = \omega d\mathbf{p}'$$

(μ_0 — косинус угла между \mathbf{p} и \mathbf{p}').

Из (30.5) легко убедиться, что

$$f(\mu, u) = \frac{(M+m)^2}{8\pi Mm} e^{-u} \delta\left(\mu - \frac{M+m}{2m} e^{-\frac{u}{2}} + \frac{M-m}{2m} e^{\frac{u}{2}}\right), \quad (30.7)$$

причём

$$\int d\Omega du f(\mu, u) = 1.$$

Уравнение (30.6) относится к тому случаю, когда замедлитель состоит из ядер одного сорта. Если в состав замедлителя входят ядра нескольких сортов, то уравнение (30.6) заменяется следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} N + \frac{v}{l} N = \\ = \sum_{\alpha} \int_0^u du' \int d\Omega' \frac{v'}{l_{s\alpha}} f_{\alpha}(\mu, u-u') N(\mathbf{r}, \Omega', u, t) + s(\mathbf{r}, u, t), \end{aligned} \quad (30.8)$$

где

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_s} + \frac{1}{l_c} = \sum_{\alpha} \frac{1}{l_{s\alpha}} + \sum_{\alpha} \frac{1}{l_{c\alpha}}$$

и $l_{s\alpha}$ и $l_{c\alpha}$ — длины свободного пробега нейтрона по отношению к рассеянию и захвату ядрами α -сорта. Функция f_{α} определяется формулой (30.7), в которой вместо M следует подставить M_{α} — массу ядра α -сорта.

Под знаком интеграла в уравнении (30.6) содержится комбинация $\frac{v}{l_s} N(\mathbf{r}, \Omega, u, t)$, представляющая собой общее число столкновений нейтронов в единицу времени, отнесённое к единичным интервалам \mathbf{r} и Ω . Обозначая эту величину через $\psi(\mathbf{r}, \Omega, u, t)$, мы получим следующее уравнение для определения ψ :

$$\begin{aligned} \frac{l(u)}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + l(u) \Omega \operatorname{grad} \psi + \psi = \\ = \int_0^u du' \int d\Omega' \frac{l'}{l_s} f(\mu_0, u-u') \psi(\mathbf{r}, \Omega', u', t) + s(\mathbf{r}, u, t). \end{aligned} \quad (30.9)$$

Если замедлитель состоит из ядер различных сортов, то это уравнение приобретает следующий вид:

$$\frac{l(u)}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + l(u) \mathbf{\Omega} \operatorname{grad} \psi + \psi = \int_0^u du' \int d\mathbf{\Omega}' \bar{f}(\mu_0, u - u') h(u') \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', u', t) + s(\mathbf{r}, u, t), \quad (30.10)$$

где

$$\bar{f}(\mu_0, u - u') = \sum_{\alpha} c_{\alpha} f_{\alpha}(\mu_0, u - u'),$$

$$h(u) = \frac{l(u)}{l_s(u)}, \quad c_{\alpha} = \frac{l_s(u')}{l_{s\alpha}(u')}.$$

Нахождение точных решений кинетического уравнения (30.6) представляет чрезвычайно сложную математическую задачу, которой мы не будем здесь заниматься.

Во многих случаях достаточно знание функции распределения замедляющихся нейтронов по энергиям и пространственным моментам функции распределения \bar{r}^k :

$$\bar{r}^k = \int \frac{r^k N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t) d\mathbf{r}}{N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t) d\mathbf{r}}.$$

Особенно важно знание второго момента \bar{r}^2 , представляющего собой, как будет показано в § 32, средний квадрат длины замедления нейтронов. Знание всех моментов в принципе полностью определяет функцию $N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t)$. В дальнейшем будет показано, каким образом можно последовательно находить пространственные моменты функции N .

§ 31. Функция распределения нейтронов по энергиям

Перейдём к определению функции распределения нейтронов по энергиям $N_0(u, t)$. Будучи умноженной на du , эта функция определяет число нейтронов во всем объёме, энергия которых (точнее логарифмы энергии) лежит в интервале du . Ясно, что

$$N_0(u, t) = \int N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t) d\mathbf{r} d\mathbf{\Omega}.$$

Для нахождения функции N_0 или функции ψ_0 , связанной с N_0 соотношением

$$\psi_0(u, t) = \int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t) d\mathbf{r} d\mathbf{\Omega} = \frac{v}{l_s} N_0(u, t),$$

проинтегрируем уравнение (30.6) по \mathbf{r} и $\mathbf{\Omega}$. Если плотность нейтронов на бесконечности равна нулю, то интеграл по объёму от $\mathbf{\Omega} \text{grad } N$ обращается в нуль, и мы получим следующее уравнение для определения ψ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{l(u)}{v} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \psi_0'(u, t) &= \\ &= \int_0^u du' f_0(u - u') h(u') \psi_0(u', t) + q(u, t), \end{aligned} \quad (31.1)$$

где

$$f_0(u) = \int f(\mu, u) d\mathbf{\Omega}, \quad q(u, t) = 4\pi \int s(\mathbf{r}, u, t) d\mathbf{r}.$$

Мы рассмотрим далее тот весьма важный случай, когда нейтроны испускаются источником непрерывно, так что q не зависит от времени. При этом ψ_0 также не зависит от времени и уравнение (31.1) приобретает вид

$$\psi_0(u) = \int_0^u du' f_0(u - u') h(u') \psi_0(u') + q(u). \quad (31.2)$$

Функция f_0 может быть найдена интегрированием (30.7) по $d\mathbf{\Omega} = 2\pi d\mu$. Замечая, что энергия нейтрона после столкновения E' заключена в пределах $\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 E \leq E' \leq E$ (E — начальная энергия), мы получим следующий результат:

$$f_0(u) = \begin{cases} \frac{(M+m)^2}{4mM} e^{-u}, & \text{если } u \leq \ln \left(\frac{M+m}{M-m}\right)^2, \\ 0, & \text{если } u > \ln \left(\frac{M+m}{M-m}\right)^2. \end{cases} \quad (31.3)$$

Уравнение (31.2) относится к тому случаю, когда замедлитель содержит ядра только одного сорта. Если в замедлителе входят ядра различных сортов, причём длины свободного пробега $l_{s\alpha}$ по отношению к рассеянию различ-

ными ядрами одинаково зависят от энергии нейтрона, то уравнение (31.2) остаётся в силе, но функция $f_0(u)$ вместо (31.3) определяется следующим образом:

$$f_0(u) = \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha} \Delta_{\alpha}(u)}{1 - \varepsilon_{\alpha}} e^{-u}, \quad (31.4)$$

где

$$c_{\alpha} = \frac{l_s}{l_{s\alpha}}, \quad \varepsilon_{\alpha} = \left(\frac{M_{\alpha} - m}{M_{\alpha} + m} \right)^2 \quad \text{и} \quad \Delta_{\alpha}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \leq \ln \frac{1}{\varepsilon_{\alpha}}, \\ 0, & \text{если } u > \ln \frac{1}{\varepsilon_{\alpha}}. \end{cases}$$

В случае водородного замедлителя $f_0(u)$ для всех значений u равняется e^{-u} и уравнение (31.2) приобретает вид

$$\psi_0(u) = \int_0^u du' h(u') e^{-(u-u')} \psi_0(u') + q(u).$$

Продифференцировав это уравнение по u , придём к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi_0}{du} = [h(u) - 1] \psi_0(u) + q + \frac{dq}{du}. \quad (31.5)$$

Если нейтроны, испускаемые источником, монохроматичны, причём в единицу времени испускается Q нейтронов, то $q = Q\delta(u)$, и решение (31.5) имеет вид

$$\psi_0(u) = Q \frac{l(0)}{l_s(0)} \exp \left[- \int_0^u \frac{l(u')}{l_e(u')} du' \right]. \quad (31.6)$$

В отсутствие захвата $\psi_0 = Q = \text{const.}$, т. е. число столкновений в единицу времени, отнесённое к единичному интервалу u не зависит от энергии. Переходя от u к энергии, мы получим следующее выражение для функции распределения в водороде в отсутствие захвата

$$N_0(E) dE = Q \frac{l_s(E)}{v} \frac{dE}{E}. \quad (31.7)$$

В случае более тяжёлых замедлителей не существует простого решения общего уравнения (31.2). Однако решение

уравнения (31.2) может быть последовательно найдено на интервалах $(0, u_M)$, $(u_M, 2u_M)$, $(2u_M, 3u_M)$, ..., переменной u , где $u_M = \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Действительно, если $u \leq u_M$, то (31.2) может быть записано в виде

$$\psi_0(u) = \frac{(M+m)^2}{4mM} \int_0^u h(u') e^{-(u-u')\psi_0(u')} du' + q(u), \quad u \leq u_M.$$

Это уравнение дифференцированием по u приводится к дифференциальному уравнению, решение которого легко находится при любом виде функции $h(u)$. Если $u > u_M$, то уравнение (31.2) согласно (31.3) приобретает вид

$$\begin{aligned} \psi_0(u) &= \frac{(M+m)^2}{4mM} \int_{u-u_M}^u h(u') e^{-(u-u')\psi_0(u')} du' + q(u) = \\ &= \frac{(M+m)^2}{4mM} \int_0^u h(u') e^{-(u-u')\psi_0(u')} du' - \\ &\quad - \frac{(M+m)^2}{4mM} \int_0^{u-u_M} h(u') e^{-(u-u')\psi_0(u')} du' + q(u). \end{aligned}$$

В интервале $(u_M, 2u_M)$ второй интеграл является известной функцией u и поэтому, дифференцируя это уравнение по u , мы получим дифференциальное уравнение с известным свободным членом в интервале $(u_M, 2u_M)$. Решив это уравнение, найдём ψ_0 в этом интервале. Аналогичным образом мы сможем последовательно находить ψ_0 на интервалах $(2u_M, 3u_M)$, $(3u_M, 4u_M)$, ...

Решение уравнения (31.2) в замкнутом виде с помощью преобразования Лапласа может быть найдено в том важном случае, когда отсутствует захват нейтронов [$h(u) = 1$]. К рассмотрению этого случая мы теперь и перейдём. Умно-

жая (31.2) на $e^{-\eta u}$ и интегрируя по u от 0 до ∞ , получим:

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta u} \psi_0(u) du = \int_0^{\infty} du e^{-\eta u} \int_0^u du' \psi_0(u') f_0(u - u') + \\ + \int_0^{\infty} q(u) e^{-\eta u} du. \quad (31.8)$$

Замечая, что

$$\int_0^{\infty} du \dots \int_0^u du' \dots = \int_0^{\infty} du' \dots \int_{u'}^{\infty} du \dots \quad (31.8')$$

и вводя обозначения

$$\Phi_0(\eta) \equiv L\psi_0 = \int_0^{\infty} e^{-\eta u} \psi_0(u) du,$$

$$F_0(\eta) \equiv Lf_0 = \int_0^{\infty} e^{-\eta u} f_0(u) du,$$

$$G(\eta) \equiv Lq = \int_0^{\infty} e^{-\eta u} q(u) du$$

(L обозначает преобразование Лапласа), перепишем (31.8) в виде

$$\Phi_0(\eta) = F_0(\eta) \Phi_0(\eta) + G(\eta),$$

откуда

$$\Phi_0(\eta) = \frac{G(\eta)}{1 - F_0(\eta)}.$$

По формуле обращения находим $\psi_0(u)$:

$$\psi_0(u) = L^{-1}\Phi_0(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_0(\eta) e^{\eta u} d\eta = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{G(\eta)}{1 - F_0(\eta)} e^{\eta u} d\eta. \quad (31.9)$$

Преобразование Лапласа функции $f_0(u)$ равно согласно (31.3)

$$F_0(\eta) = \frac{1}{1-\varepsilon} \int_0^{u_M} e^{-\eta u} e^{-u} du = \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{1 - e^{-u_M(1+\eta)}}{1+\eta}. \quad (31.9')$$

Поэтому (31.9) приобретает следующий вид:

$$\psi_0(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{G(\eta) e^{\eta u} d\eta}{1 - \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{1 - e^{-u_M(1+\eta)}}{1+\eta}}, \quad (31.10)$$

где интегрирование производится по прямой, параллельной мнимой оси и расположенной правее всех полюсов подинтегральной функции. Считая, что $G(\eta)$ не имеет полюсов, мы должны найти нули знаменателя подинтегрального выражения. Так как $u_M = \ln \frac{1}{\varepsilon}$, то уравнение для определения полюсов можно представить в виде

$$(1-\varepsilon)(1+\eta) = 1 - \varepsilon^{\eta+1}. \quad (31.11)$$

Это трансцендентное уравнение имеет один корень $\eta_0 = 0$ с неотрицательной вещественной частью; все остальные корни $\eta_j (j > 0)$ лежат слева от мнимой оси. Замыкая прямую интегрирования полуокружностью, охватывающей левую полуплоскость, и применяя теорему о вычетах, получим следующее выражение для $\psi_0(u)$:

$$\psi_0(u) = \sum_j \frac{(1 - \varepsilon^{1+\eta_j}) e^{\eta_j u} G(\eta_j)}{1 - \varepsilon + \varepsilon^{1+\eta_j} \ln \varepsilon}, \quad (31.12)$$

где суммирование распространяется на все корни уравнения (31.11) с неположительной вещественной частью.

Наибольший интерес представляют большие значения u , соответствующие малым конечным энергиям нейтрона. В этом случае в (31.12) можно пренебречь всеми слагаемыми, для которых вещественная часть η_j отрицательна. Единственным слагаемым с неотрицательной вещественной частью является член с $\eta_0 = 0$. Поэтому при $u \gg 1$

$$\psi_0(u) \approx \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} Q, \quad (31.13)$$

где $Q = G(0) = \int_0^{\infty} q(u) du$ представляет собой полную мощность источников, т. е. общее число быстрых нейтронов, испускаемых источниками в единицу времени.

Итак, общее число столкновений, отнесённое к единичному интервалу u , не зависит при $u \gg 1$ от энергии.

Если переписать (31.13) в виде

$$\psi_0 = \frac{Q}{\xi}, \quad (31.14)$$

где

$$\xi = 1 + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \ln \epsilon,$$

то ξ приобретает простой физический смысл. Эта величина представляет собой среднюю логарифмическую потерю энергии нейтрона при одном столкновении. Действительно, среднее число столкновений ν_{12} , которое испытывает нейтрон при замедлении от энергии $E_1 = E_0 e^{-u_1}$ до энергии $E_2 = E_0 e^{-u_2}$, при малых (по сравнению с начальной энергией E_0) энергиях E_1 и E_2 равняется

$$\nu_{12} = \frac{1}{Q} \int_{u_1}^{u_2} \psi_0 du = \frac{u_2 - u_1}{\xi} = \xi \ln \frac{E_1}{E_2}, \quad (31.15)$$

откуда

$$\xi = \frac{u_2 - u_1}{\nu_{12}} = \frac{\ln \frac{E_1}{E_2}}{\nu_{12}}.$$

Зависимость ξ от ϵ может быть получена из элементарных соображений. Действительно, пронормированная вероятность того, что после столкновения с ядром энергия нейтрона будет находиться в интервале между E' и $E' - dE'$, равна согласно (17.20)

$$w(E') dE' = \frac{1}{1 - \epsilon} \frac{dE'}{E},$$

где E — энергия нейтрона до столкновения.

Поэтому средняя логарифмическая потеря энергии при одном столкновении равна

$$\overline{\ln \frac{E}{E'}} = \int_{\varepsilon E}^E \ln \frac{E}{E'} \omega(E') dE' = 1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \ln \varepsilon \equiv \xi. \quad (31.15')$$

Число нейтронов в энергетическом интервале dE равно согласно (31.14)

$$N(E) dE = \frac{l_s(E)}{v} \psi_0(u) du = \frac{l_s(E)}{vE\xi} Q dE. \quad (31.16)$$

Эта формула, так же как и (31.14), справедлива, если $E \ll E_0$; при этом длина свободного пробега l_s может быть произвольной функцией энергии. Таким образом, при $E \ll E_0$ $N(E)$ обратно пропорционально $E^{3/2}$.

Вид функции $N(E)$ при $E \ll E_0$ может быть установлен из элементарных соображений, если воспользоваться сохранением потока нейтронов в энергетическом пространстве или в пространстве u .

Представим себе ось, вдоль которой откладывается u . Так как мы пренебрегаем захватом нейтронов, то через каждое сечение оси в единицу времени проходит одинаковое число нейтронов, равное Q . Поток нейтронов равен, очевидно, $\dot{u}N(u)$, где \dot{u} — изменение u в единицу времени. Поэтому

$$\dot{u}N(u) = Q.$$

Величина \dot{u} может быть точно определена, если изменение u при одном столкновении мало, т. е. в том случае, когда $\frac{\Delta u}{\Delta v} = \xi \ll u$. Чтобы найти \dot{u} , нужно разделить изменение u при одном столкновении, равное ξ , на среднее время между двумя столкновениями, т. е. на $\frac{l}{v}$. Итак,

$$\dot{u} = \xi \frac{v}{l_s(E)},$$

и написанное выше соотношение сразу приводит к (31.16).

Полученные выше результаты относятся к тому случаю, когда замедлитель состоит из ядер одного сорта. Если в со-

став замедлителя входят ядра различных сортов, то простое решение кинетического уравнения может быть получено при одинаковой зависимости от энергии сечений рассеяния нейтронов различными ядрами. В этом случае распределение по энергиям определяется прежней формулой (31.16), если под ξ понимать величину

$$\xi = 1 + \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}}{1 - \varepsilon_{\alpha}} \ln \varepsilon_{\alpha}, \quad (31.17)$$

где $c_{\alpha} = \frac{n_{\alpha} \sigma_{s\alpha}}{\sum n_{\alpha} \sigma_{s\alpha}} = \frac{l_s}{l_{s\alpha}}$ (n_{α} — число ядер α -сорта, $\sigma_{s\alpha}$ — сечение рассеяния нейтронов этими ядрами). Выражение (31.17) следует из определения ξ как средней логарифмической потери энергии при одном столкновении [см. (31.15)]; необходимо лишь иметь в виду, что в случае смеси ядер вероятность попадания нейтрона после столкновения в энергетический интервал $(E', E' - dE')$ равна

$$\omega(E') dE' = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \frac{\Delta_{\alpha}(E')}{1 - \varepsilon_{\alpha}} \frac{dE'}{E'}$$

§ 32. Средний квадрат длины замедления

Определим теперь среднее расстояние от источника, на котором нейтрон обладает заданной энергией. Если точечный источник моноэнергетических нейтронов находится в начале координат, то квадрат этого расстояния, называемый средним квадратом длины замедления, определяется следующей формулой:

$$\overline{r^2}(u) = \frac{\psi_2(u)}{\psi_0(u)}, \quad (32.1)$$

где

$$\psi_0(u) = 4\pi \int \psi(r, \Omega, u) dr,$$

$$\psi_2(u) = 4\pi \int \psi(r, \Omega, u) r^2 dr$$

(так как источник предполагается точечным, то эти интегралы не зависят от Ω , т. е. от направления скорости нейтрона).

Ясно, что функция $\psi_0(u)$ совпадает с введённой в предыдущем параграфе функцией распределения нейтронов по

энергиям. Эту функцию можно назвать пространственным моментом функции распределения нулевого порядка, а функцию $\psi_2(u)$ — моментом второго порядка.

Покажем, что пространственные моменты функции распределения $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u)$ можно находить, не решая кинетического уравнения (30.9).

Считая, что захват нейтронов отсутствует, мы будем исходить из следующего уравнения:

$$l(u) \mathbf{\Omega} \operatorname{grad} \psi + \psi = \int_0^u du' \int d\mathbf{\Omega}' f(\mu_0, u - u') \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', u') + \frac{1}{4\pi} \delta(\mathbf{r}) \delta(u), \quad (32.2)$$

где $\frac{1}{4\pi} \delta(\mathbf{r}) \delta(u)$ — мощность постоянно действующего точечного источника моноэнергетических нейтронов, расположенного в начале координат. Интегрируя это уравнение по всему объёму, получим уравнение для определения функции $\psi_0(u)$:

$$\psi_0(u) = \int_0^u du' f_0(u - u') \psi_0(u') + \delta(u), \quad (32.3)$$

где согласно (31.3)

$$f_0(u) = \int f(\mu, u) d\mathbf{\Omega} = \begin{cases} \alpha e^{-u}, & \text{если } u \leq u_M, \\ 0, & \text{если } u > u_M \end{cases}$$

и

$$\alpha = \frac{(M+m)^2}{4mM}, \quad u_M = \ln \frac{1}{\varepsilon} = \ln \frac{(M+m)^2}{(M-m)^2}.$$

Чтобы установить уравнение для $\psi_2(u)$, умножим (32.2) на r^2 и проинтегрируем по всему объёму. Замечая, что

$$\int \mathbf{\Omega} \operatorname{grad} \psi r^2 d\mathbf{r} = -2 \int \mathbf{\Omega} \psi d\mathbf{r}$$

(преполагается, что функция ψ обращается в нуль на бесконечности), получим:

$$\psi_2(u) - 2l(u) \psi_1(u) = \int_0^u du' f_0(u - u') \psi_2(u'), \quad (32.4)$$

где

$$\psi_1(u) = 4\pi \int \mathbf{Q}\mathbf{r} \cdot \psi(\mathbf{r}, \mathbf{Q}, u) d\mathbf{r}$$

представляет собой пространственный момент первого порядка функции ψ .

Нам осталось установить уравнение для $\psi_1(u)$. С этой целью умножим (32.2) на \mathbf{r} и проинтегрируем результат по всему объёму. Так как мы имеем дело с точечным источником, то векторный интеграл $\int \mathbf{r}\psi(\mathbf{r}, \mathbf{Q}, u) d\mathbf{r}$ должен иметь направление \mathbf{Q} , т. е.

$$\int \mathbf{r}\psi(\mathbf{r}, \mathbf{Q}, u) d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{Q}\psi_1(u).$$

Замечая, что

$$\int \mathbf{r}(\mathbf{Q} \operatorname{grad} \psi) d\mathbf{r} = -\mathbf{Q} \int \psi d\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{Q}}{4\pi} \psi_0(u),$$

получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} -l(u) \mathbf{Q}\psi_0(u) + \mathbf{Q}\psi_1(u) &= \\ &= \int_0^u du' \int d\mathbf{Q}' \mathbf{Q}' f(\mu_0, u-u') \psi_1(u'). \end{aligned} \quad (32.5)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой вектор, имеющий направление \mathbf{Q} , поэтому и правая часть должна иметь то же направление. Мы вправе, следовательно, заменить вектор \mathbf{Q}' , входящий в подинтегральное выражение, его проекцией на \mathbf{Q} , т. е. заменить \mathbf{Q}' на $\mathbf{Q}(\mathbf{Q}\mathbf{Q}') = \mu_0 \mathbf{Q}$. Вводя функцию

$$\begin{aligned} f_1(u) &\doteq \int \mu f(\mu, u) d\mathbf{Q} = \\ &= \begin{cases} \alpha \left[\frac{M+m}{2m} e^{-\frac{u}{2}} - \frac{M-m}{2m} e^{\frac{u}{2}} \right] e^{-u}, & \text{если } u \leq u_M, \\ 0, & \text{если } u > u_M, \end{cases} \end{aligned} \quad (32.6)$$

перепишем (32.5) в виде

$$\psi_1(u) - l(u) \psi_0(u) = \int_0^u f_1(u-u') \psi_1(u') du'. \quad (32.7)$$

Мы получили три интегральных уравнения (32.3), (32,7) и (32.4) для определения трёх пространственных моментов $\psi_0(u)$, $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$.

Умножая основное уравнение (32.2) на более высокие степени r и поступая аналогично предыдущему, можно получить уравнения для пространственных моментов более высокого порядка. Система этих уравнений такова, что она допускает последовательное нахождение моментов нулевого, первого, второго и более высоких порядков.

Решение системы уравнений (32.3), (32,7) и (32.4) проще всего найти, применяя преобразование Лапласа. Умножая каждое из этих уравнений на $e^{-\eta u}$ и интегрируя по u от 0 до ∞ , мы придём к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\eta) &= \Phi_0(\eta) F_0(\eta) + 1, \\ \Phi_1(\eta) - L(L\psi_0) &= \Phi_1(\eta) F_1(\eta), \\ \Phi_2(\eta) - 2L(L\psi_1) &= \Phi_2(\eta) F_0(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (32.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i(\eta) &\equiv L[\psi_i(u)] = \int_0^{\infty} e^{-\eta u} \psi_i(u) du, \quad i = 0, 1, 2, \\ F_i(\eta) &\equiv L[f_i(u)] = \int_0^{\infty} e^{-\eta u} f_i(u) du, \quad i = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (32.9)$$

Из первого уравнения следует, что

$$\Phi_0(\eta) = \frac{1}{1 - F_0(\eta)} \equiv \Gamma_0(\eta),$$

откуда по теореме обращения

$$\psi_0(u) = L^{-1}[\Gamma_0(\eta)] \equiv \gamma_0(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\eta u} \Gamma_0(\eta) d\eta. \quad (32.10)$$

Из второго уравнения следует, что

$$\Phi_1(\eta) = \frac{L(L\psi_0)}{1 - F_1(\eta)} = \Gamma_1(\eta) L(L\psi_0),$$

где

$$\Gamma_1(\eta) \equiv \frac{1}{1 - F_1(\eta)}.$$

Используя известное соотношение [см. (31.8')]

$$L[g_1(u)]L[g_2(u)] = L\left[\int_0^u g_1(u-u')g_2(u')du'\right], \quad (32.11)$$

получим:

$$\psi_1(u) = \int_0^u \gamma_1(u-u')l(u')\psi_0(u')du', \quad (32.12)$$

где

$$\gamma_1(u) = L^{-1}[\Gamma_1(\eta)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\eta u} \Gamma_1(\eta) d\eta.$$

Переходя, наконец, к третьему уравнению (32.8), перепишем его в виде

$$\Phi_2(\eta) = 2 \frac{L(l\psi_1)}{1-F_0(\eta)} = 2\Gamma_0(\eta)L(l\psi_1),$$

откуда согласно (32.11)

$$\psi_2(u) = L^{-1}\Phi_2 = 2 \int_0^u \gamma_0(u-u')l(u')\psi_1(u')du'.$$

Подставляя сюда вместо $\psi_1(u)$ интегральное представление (32.12), получим окончательно следующее выражение для $\psi_2(u)$:

$$\begin{aligned} \psi_2(u) &= \\ &= 2 \int_0^u \gamma_0(u-u')l(u')du' \int_0^{u'} \gamma_1(u'-u'')l(u'')\psi_0(u'')du''. \end{aligned} \quad (32.13)$$

Формулы (32.10), (32.12) и (32.13) определяют функции ψ_0 , ψ_1 и ψ_2 в общем случае, при произвольной зависимости длины свободного пробега l от энергии u . Квадрат длины замедления может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \overline{r^2}(u) &= \\ &= \frac{2}{\psi_0(u)} \int_0^u \gamma_0(u-u')l(u')du' \int_0^{u'} \gamma_1(u'-u'')l(u'')\psi_0(u'')du''. \end{aligned} \quad (32.14)$$

Рассмотрим специально тот случай, когда длина свободного пробега не зависит от энергии. В этом случае основная система уравнений (32.8) приобретает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\eta) &= \Phi_0(\eta) F_0(\eta) + 1, \\ \Phi_1(\eta) - l\Phi_0(\eta) &= \Phi_1(\eta) F_1(\eta), \\ \Phi_2(\eta) - 2l\Phi_1(\eta) &= \Phi_2(\eta) F_0(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (32.15)$$

откуда

$$\Phi_2(\eta) = \frac{2l^2}{(1-F_0)^2(1-F_1)} = 2l^2\Gamma_1(\eta)\Gamma_0^2(\eta) \quad (32.16)$$

и по теореме обращения

$$\psi_2(u) = \frac{1}{2\pi i} 2l^2 \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\eta u} \Gamma_1(\eta) \Gamma_0^2(\eta) d\eta, \quad (32.17)$$

где интегрирование совершается вдоль прямой, параллельной мнимой оси и расположенной правее всех полюсов подинтегральной функции.

Квадрат длины замедления в случае $l = \text{const.}$ равняется

$$\bar{r}^2(u) = 2l^2 \frac{\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\eta u} \Gamma_1(\eta) \Gamma_0^2(\eta) d\eta}{\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\eta u} \Gamma_0(\eta) d\eta}. \quad (32.18)$$

Определим входящие сюда функции Γ_0 и Γ_1 . Найдём сперва $F_0(\eta)$ и $F_1(\eta)$. Согласно (32.9), (32.3) и (32.6)

$$F_0(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-\eta u} f_0(u) du = \frac{\alpha}{1+\eta} [1 - e^{-(1+\eta)u_M}],$$

$$F_1(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-\eta u} f_1(u) du =$$

$$= \alpha \left[\frac{M+m}{m} \frac{1 - e^{-(\eta + \frac{3}{2})u_M}}{2\eta + 3} - \frac{M-m}{m} \frac{1 - e^{-(\eta + \frac{1}{2})u_M}}{2\eta + 1} \right].$$

Функции Γ_0 и Γ_1 связаны с F_0 и F_1 соотношениями

$$\Gamma_0(\eta) = \frac{1}{1-F_0(\eta)}, \quad \Gamma_1(\eta) = \frac{1}{1-F_1(\eta)}.$$

Входящие в (32.18) интегралы равны сумме вычетов относительно полюсов подинтегральных функций. Нас в дальнейшем будет интересовать значительное замедление, т. е. область больших u . При этом главную роль играет вычет относительно полюса с наибольшей вещественной частью. Таким полюсом является полюс функции $\Gamma_0(\eta)$, равный $\eta = 0$ (это единственный полюс с неотрицательной вещественной частью, см. § 31).

Вычет $\Gamma_0(\eta)$ относительно полюса $\eta = 0$ равен, как мы видели в § 31,

$$\psi_0 = -\frac{1}{F'_0(0)} = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon \ln \varepsilon} = \frac{1}{\xi}.$$

Вычет функции $e^{\eta u} \Gamma_1(\eta) \Gamma_0^2(\eta)$ относительно полюса $\eta = 0$ равен, как легко убедиться

$$\text{Res}_{\eta=0} \{ e^{\eta u} \Gamma_1(\eta) \Gamma_0^2(\eta) \} = \frac{\frac{d}{d\eta} [e^{\eta u} \Gamma_1(\eta)]_{\eta=0} - \Gamma_1(0) \frac{F''_0(0)}{F'_0(0)}}{[F'_0(0)]^2}.$$

Поэтому квадрат длины замедления равняется

$$\bar{r}^2(u) = \frac{2I^2}{\xi} \Gamma_1(0) \left[u + \frac{\Gamma'_1(0)}{\Gamma_1(0)} - \frac{F''_0(0)}{F'_0(0)} \right].$$

Замечая, что

$$\Gamma_1(0) = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \frac{1}{A}}, \quad \Gamma'_1(0) = \left[u_M \frac{(A-1)^2}{4A} - 1 \right] \Gamma_1^2(0),$$

$$F'_0(0) = -1 + \frac{u_M (A-1)^2}{4A} = -\xi,$$

$$F''_0(0) = 2 - u_M \frac{(A-1)^2}{2A} \left(1 + \frac{1}{2} u_M \right), \quad \left(A = \frac{M}{m} \right),$$

получим окончательно:

$$\bar{r}^2(u) = \frac{2I^2}{\xi \left(1 - \frac{2}{3A} \right)} (u + B), \quad (32.19)$$

где

$$B = \frac{6A^2 + 18A - 22}{3(3A - 2)} - \frac{u_M}{6A - 4} (A-1)^2 (A+2) + \frac{u_M^2 (A-1)^3}{u_M (A-1)^2 - 4A}$$

(заметим, что при $A \rightarrow \infty$, $B \rightarrow 0$). Таким образом, средний квадрат длины замедления логарифмически зависит от энергии нейтрона. Наглядное истолкование этой зависимости будет дано в следующем параграфе.

Если длина свободного пробега не является постоянной, а меняется с энергией, но эта зависимость является слабой,

то член $l^2 u$ в (32.19) следует заменить на $\int_0^u l(u) du$. Мы

видим, что вклад различных энергетических областей, через которые проходит нейтрон в процессе замедления, пропорционален $l^2 \Delta u = l^2 \frac{\Delta E}{E}$.

§ 33. Диффузионное приближение

Определённый в предыдущем параграфе квадрат длины замедления нейтронов является важной характеристикой пространственного распределения нейтронов. Нахождение точного вида функции распределения представляет собой чрезвычайно сложную задачу, решение которой известно только в некоторых частных случаях. Мы говорили выше, что знание всех моментов функции распределения (квадрат длины замедления пропорционален второму моменту) даёт в принципе возможность определить функцию распределения, но последовательное нахождение моментов приводит к громоздким и неудобным формулам, так что этот метод нахождения функции распределения является мало эффективным. Однако во многих случаях при определении функции распределения достаточно пользоваться приближённым методом, основанным на замене точного интегро-дифференциального кинетического уравнения дифференциальным уравнением. Это уравнение является уравнением диффузионного типа и поэтому само приближение называется диффузионным. Диффузионное приближение является законным, как мы увидим далее, в области энергий, малых по сравнению с начальной энергией нейтронов, и на расстояниях от источника, малых по сравнению с \bar{r}^2/l_s ; кроме того, длина свободного пробега должна быть достаточно медленно-меняющейся функцией энергии.

Переходя к рассмотрению диффузионного приближения, заметим предварительно, что после большого числа столкновений нейтрона с ядрами, которое требуется для того, чтобы энергия нейтрона стала малой по сравнению с начальной энергией E_0 , практически исчезает корреляция между векторами \mathbf{r} и \mathbf{p} ; иными словами, все значения угла между векторами \mathbf{r} и $\mathbf{\Omega}$ становятся с большой степенью точности равновероятными. Функция распределения, или, что то же самое, функция $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t)$, не будет при этом сильно зависеть от направления движения нейтрона; поэтому исходным является предположение о возможности сохранения в разложении функции распределения в ряд по шаровым функциям двух первых членов. Иными словами, мы будем искать ψ в виде

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t) = \frac{1}{4\pi} [\psi_0(\mathbf{r}, u, t) + 3\mathbf{\Omega}\psi_1(\mathbf{r}, u, t)], \quad (33.1)$$

где функции ψ_0 и ψ_1 не зависят от $\mathbf{\Omega}$. Ограничение разложения по шаровым функциям только двумя первыми членами требует выполнения условия

$$|\psi_1| \ll \psi_0. \quad (33.2)$$

В дальнейшем мы выясним, когда выполняется это неравенство.

Чтобы получить уравнения для функций ψ_0 и ψ_1 , подставим (33.1) в основное кинетическое уравнение (30.9). Предполагая для простоты, что захват отсутствует, мы получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{l}{v} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \psi_0 + 3\mathbf{\Omega} \left(\frac{l}{v} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \psi_1 + \frac{1}{3} l \operatorname{grad} \psi_0 \right) + 3l\mathbf{\Omega} \operatorname{grad} (\mathbf{\Omega}\psi_1) = \\ = \int_0^u du' \int d\mathbf{\Omega}' f(\mu, u - u') \psi_0(\mathbf{r}, u', t) + \\ + 3 \int_0^u du' \int d\mathbf{\Omega}' [\mathbf{\Omega}'\psi_1(\mathbf{r}, u', t)] f(\mu, u - u') + 4\pi s(\mathbf{r}, u, t). \end{aligned} \quad (33.3)$$

Преобразуем последний интеграл. Если θ и θ' — углы, образуемые $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Omega}'$ с вектором $\psi_1 \equiv \psi_1(\mathbf{r}, u', t)$, то $\cos \theta' = \cos \theta \cos \vartheta + \sin \theta \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi')$, где ϑ — угол между $\mathbf{\Omega}$

и Ω' , так что $\Omega\Omega' = \cos\vartheta = \mu_0$. При интегрировании по φ' последний член исчезает и мы получим:

$$\begin{aligned} \int_0^u du' \int d\Omega' (\Omega'\psi'_1) f(\mu_0, u-u') &= \\ &= \int_0^u du' \int d\Omega' (\Omega\psi'_1) \mu_0 f(\mu_0, u-u'). \end{aligned}$$

Вводя обозначения [см. (31.3), (32.6)]

$$f_0(u-u') = \int d\Omega' f(\mu_0, u-u'),$$

$$f_1(u-u') = \int d\Omega' \mu_0 f(\mu_0, u-u'),$$

перепишем (33.3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{l}{v} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \psi_0 + 3\Omega \left(\frac{l}{v} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \psi_1 + \frac{1}{3} l \operatorname{grad} \psi_0 \right) + 3l\Omega \operatorname{grad}(\Omega\psi_1) &= \\ = \int_0^u du' f_0(u-u') \psi'_0 + 3 \int_0^u du' f_1(u-u') \Omega\psi'_1. \end{aligned} \quad (33.4)$$

Отсюда легко получить уравнения для ψ_0 и ψ_1 , не содержащие Ω . С этой целью проинтегрируем (33.4) по $d\Omega$. Замечая, что

$$\overline{\Omega \operatorname{grad}(\Omega\psi_1)} = \frac{1}{3} \operatorname{div} \psi_1$$

(черта сверху обозначает усреднение по телесному углу), получим:

$$\frac{l}{v} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \psi_0 + l \operatorname{div} \psi_1 = \int_0^u du' f_0(u-u') \psi_0(\mathbf{r}, u', t) + S, \quad (33.5)$$

где $S = 4\pi s$. Для получения второго уравнения, связывающего ψ_0 и ψ_1 , умножим (33.4) на Ω и после этого проинтегрируем по $d\Omega$. В результате получим:

$$\frac{l}{v} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \psi_1 + \frac{1}{3} l \operatorname{grad} \psi_0 = \int_0^u du' f_1(u-u') \psi_1(\mathbf{r}, u', t). \quad (33.6)$$

Переходя к исследованию уравнений (33.5) и (33.6), заметим прежде всего, что в (33.6) можно пренебречь членом

$\frac{l}{v} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$ по сравнению с ϕ_1 . Действительно, $\frac{\partial \phi_1}{\partial t}$ по порядку величины равняется $\frac{1}{T_D} \phi_1$, где T_D — время, в течение которого функция ϕ_1 претерпевает существенное изменение. В диффузионном приближении это время всегда значительно больше времени свободного пробега между отдельными столкновениями, равного $\frac{l_s}{v}$, откуда и вытекает возможность пренебрежения $\frac{l}{v} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$ по сравнению с ϕ_1 . Заметим, что аналогичное рассуждение неприменимо к уравнению (33.5), ибо, как мы покажем ниже, интеграл в (33.5) почти равен ψ_0 , и поэтому нельзя сравнивать входящие в левую часть (33.5) члены $\frac{l}{v} \frac{\partial \psi_0}{\partial t}$ и ψ_0 .

Входящие в (33.5) и (33.6) функции $f_0(u - u')$ и $f_1(u - u')$ отличны от нуля, если $u - u' \leq u_M$.

Предполагая, что $u \gg u_M$, мы видим, что интервал интегрирования в (33.5) и (33.6) мал по сравнению с u . В предыдущих параграфах было показано, что первые моменты функции ψ только логарифмически зависят от энергии [функция $\psi_0(u)$ при $u \gg 1$ вовсе не зависит от u]. Будем поэтому предполагать, что $\psi_0(r, u, t)$ и $\psi_1(r, u, t)$ являются медленно меняющимися функциями u , и воспользуемся в интервале $u \geq u' \geq u - u_M$ ($u_M \ll u$) следующими разложениями:

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(r, u', t) &= \psi_0(r, u, t) + (u' - u) \frac{\partial \psi_0(r, u, t)}{\partial u}, \\ \psi_1(r, u', t) &= \psi_1(r, u, t). \end{aligned} \right\} (33.7)$$

Подставляя эти формулы в (33.5) и (33.6) и замечая, что

$$\begin{aligned} \int_0^{u_M} f_0(s) ds &= \frac{(M+m)^2}{4mM} \int_0^{u_M} e^{-s} ds = 1, \\ \int_0^{u_M} s f_0(s) ds &= \frac{(M+m)^2}{4mM} \int_0^{u_M} s e^{-s} ds = 1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \ln \varepsilon = \xi, \\ \int_0^{u_M} f_1(s) ds &= \frac{(M+m)^2}{4mM} \int_0^{u_M} e^{-s} \left[\frac{M+m}{2m} e^{-s/2} - \frac{M-m}{2m} e^{s/2} \right] ds = \frac{2m}{3M}, \end{aligned}$$

получим следующую систему уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{v} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + l \operatorname{div} \psi_1 &= -\xi \frac{\partial \psi_0}{\partial u} + S, \\ \psi_1 + \frac{1}{3} l \operatorname{grad} \psi_0 &= \overline{\psi_1 \cos \vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (33.8)$$

где введено обозначение $\overline{\cos \vartheta} = \frac{2m}{3M} = \int d\Omega \mu \int f(\mu, s) ds$ (последний интеграл показывает, что $2m/3M$ можно рассматривать как некоторое среднее значение косинуса угла рассеяния).

Из второго уравнения (33.8) следует, что

$$\psi_1 = -\frac{1}{3} l_t \operatorname{grad} \psi_0, \quad (33.9)$$

где

$$l_t = \frac{l}{1 - \overline{\cos \vartheta}} = \frac{l}{1 - \frac{2}{3} \frac{m}{M}}.$$

Эта величина называется транспортной длиной свободного пробега (она представляет собой среднее расстояние, проходимое нейтроном между двумя столкновениями в первоначальном направлении). Подставляя (33.9) в первое уравнение (33.8), получим:

$$\frac{l}{v} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = \frac{1}{3} l_t \Delta \psi_0 - \xi \frac{\partial \psi_0}{\partial u} + S. \quad (33.10)$$

Введём вместо ψ_0 новую функцию $\xi \psi_0 = n(\mathbf{r}, u, t)$ и вместо u новую переменную τ , дифференциал которой равен $d\tau = \frac{1}{3} l_t \frac{du}{\xi}$, так что

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{l_t}{3\xi} du. \quad (33.11)$$

Уравнение (33.10) приобретёт тогда вид

$$\frac{1}{D} \frac{\partial n}{\partial t} = \Delta n - \frac{\partial n}{\partial \tau} + \overline{S}(\mathbf{r}, \tau), \quad (33.12)$$

где $D = \frac{1}{3} v l_t$ и $\overline{S} = \frac{3\xi}{l_t} S$. Величина D является коэффициентом диффузии замедляющихся нейтронов, скорость кото-

рых равна σ . Мы видим, что в коэффициент диффузии входит не обычная, а транспортная длина свободного пробега.

Уравнение (33.12) представляет собой основное уравнение диффузионного приближения. В стационарном случае оно переходит в уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n + \bar{S}. \quad (33.13)$$

Это уравнение диффузионного типа, в котором роль времени играет величина τ . Сравнивая (33.11) с формулой (32.19) для квадрата длины замедления, находим, что при $u \gg 1$

$$\tau(E) = \frac{1}{6} \bar{l}^2(E) = \frac{\int_0^u l^2(u') du'}{3 \left(1 - \frac{2m}{3M}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \ln \varepsilon\right)}. \quad (33.14)$$

При не зависящей от энергии длине свободного пробега

$$\tau = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2 \ln \frac{E_0}{E}}{\left(1 - \frac{2m}{3M}\right) \varepsilon}, \quad E \ll E_0. \quad (33.15)$$

В случае тяжёлого замедлителя ($M \gg m$)

$$\tau = \frac{2}{3} l^2 \frac{\ln \frac{E_0}{E}}{1-\varepsilon}. \quad (33.15')$$

Так как $\tau(E)$ пропорционально среднему квадрату расстояния, проходимого нейтроном до достижения им энергии E , то τ может быть названо «возрастом» нейтрона.

Если нейтроны, испускаемые источником монохроматичны, то

$$\bar{S} = s(\mathbf{r}) \delta(u),$$

где $s(\mathbf{r})$ — некоторая функция координат. В этом случае уравнение (33.13) может быть заменено уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n \quad (33.16)$$

вместе с «начальным» условием

$$n(\mathbf{r}, 0) = s(\mathbf{r}), \quad (33.16')$$

Остановимся теперь на физическом смысле величин ψ_0, ψ_1, n . Если от числа столкновений ψ перейти к функции распределения N , то (33.1) заменится соотношением

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, u, t) = \frac{1}{4\pi} [N_0(\mathbf{r}, u, t) + 3\mathbf{\Omega}N_1(\mathbf{r}, u, t)], \quad (33.17)$$

где

$$N_0 = \frac{l}{v} \psi_0, \quad N_1 = \frac{v}{v} \psi_1.$$

Так как $|N_1| \ll N_0$, то функция N_0 определяет в основном пространственную плотность нейтронов, отнесённую к единичному интервалу u . Векторная функция N_1 определяет поток нейтронов, скорость которых равна v . Действительно, по определению, плотность потока нейтронов со скоростью v равна

$$\mathbf{j} = \int vN d\mathbf{\Omega}.$$

Подставляя сюда вместо N (33.17) и замечая, что $\overline{\Omega_i \Omega_k} = \frac{1}{3} \delta_{ik}$ (черта означает усреднение по телесному углу $\mathbf{\Omega}$), получим:

$$\mathbf{j} = vN_1 = l\psi_1.$$

Используя (33.9), перепишем последнее равенство в виде

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{3} l v_t \text{grad } \psi_0 = -\frac{1}{3} v l_t \text{grad } N_0 = -D \text{grad } N_0, \quad (33.18)$$

где $D = \frac{1}{3} l_t v$ — коэффициент диффузии нейтронов со скоростью v . Соотношение (33.18) хорошо известно из теории диффузии.

Функция $n = \xi \psi_0 = \xi \frac{v}{l} N_0$, пропорциональная N_0 , определяет пространственную плотность нейтронов со скоростью v . Так как множитель пропорциональности зависит только от энергии, то, пронормировав $n(\mathbf{r}, \tau)$ согласно условию

$$\int n(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r} = 1, \quad (33.19)$$

можно утверждать, что решение уравнения (33.16), нормированное таким образом, определяет плотность вероятности того, что нейтрон с энергией $E(\tau)$ находится в точке \mathbf{r} .

Рассмотрим важный пример применения диффузионного уравнения (33.16). Пусть в начале координат находится точечный источник монохроматических нейтронов, окружённый со всех сторон бесконечной замедляющей средой. «Начальное» условие (33.16') имеет в этом случае вид $n(\mathbf{r}, 0) = \text{const.} \delta(\mathbf{r})$, причём константа, определяющая мощность источника, должна быть согласно условию (33.19) взята равной единице. Как известно, решение (33.16), удовлетворяющее условию нормировки (33.19) и «начальному» условию $n(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r})$, имеет вид

$$n(r, \tau) = (4\pi\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}}. \quad (33.20)$$

Таким образом, вероятность того, что нейтрон с энергией $E(\tau)$ окажется на расстоянии r от источника, определяется гауссовым распределением.

Выясним теперь условия применимости диффузионного приближения. При выводе основного уравнения (33.16) мы предполагали, что абсолютное значение $\psi_1 = -\frac{1}{3} l_t \text{grad } \psi_0$ мало по сравнению с ψ_0 и кроме того пользовались разложением (33.7).

Неравенство $|\psi_1| \ll \psi_0$ на основании (33.9) может быть записано в виде

$$l_t \left| \frac{\partial}{\partial r} \ln \psi_0 \right| \ll 1. \quad (33.21)$$

Это означает, что плотность нейтронов должна мало меняться на расстояниях порядка l_t .

Если в (33.21) подставить вместо ψ_0 (33.20) (напомним, что $n = \xi \psi_0$), то мы придём к условию

$$r \ll \frac{6\tau}{l_t}. \quad (33.22)$$

Это условие означает, что диффузионное приближение не применимо на очень больших расстояниях от источника; расстояния не должны, грубо говоря, превосходить $\frac{\tau}{l} = l \ln \frac{E_0}{E}$.

Можно показать, что на больших расстояниях гауссово распределение (33.20) заменяется экспоненциальным вида $n \sim e^{-r/l}$. Действительно, в области $r > \frac{\tau}{l}$ выражение (33.20)

приводит к очень малым значениям плотности нейтронов n , поэтому плотность нейтронов при $r > \frac{\tau}{l}$ будет определяться теми нейтронами, которые попадают сюда, испытав малое число столкновений; количество таких нейтронов пропорционально $e^{-r/l}$, поэтому $n \sim e^{-r/l}$.

Применённые нами разложения (33.7) предполагают, что выполняются условия

$$u_M \left| \frac{\partial}{\partial u} \ln \psi_0 \right| \ll 1, \quad u_M \left| \frac{\partial}{\partial u} \ln \psi_1 \right| \ll 1. \quad (33.23)$$

Так как $\psi_1 = -\frac{1}{3} l_i \text{grad } \psi_0$, то второе условие эквивалентно первому условию и, кроме того, условию

$$u_M \left| \frac{\partial}{\partial u} \ln l(u) \right| \ll 1. \quad (33.23')$$

Последнее условие означает, что длина свободного пробега должна быть медленно меняющейся функцией энергии и в логарифмической шкале энергии не должна претерпевать больших изменений в интервале $u_M = \ln \left(\frac{M+m}{M-m} \right)^2$. В случае водорода диффузионным приближением пользоваться нельзя, т. е. условие (33.23') не выполняется.

Первое из условий (33.23) после подстановки вместо ψ_0 точного решения (33.20) приводит к условию $u_M \frac{\partial}{\partial u} \ln \tau \ll 1$, откуда следует, что должно выполняться неравенство

$$\xi l^2(u)_{\max} \ll \int_0^u l^2(u') du' \quad (33.24)$$

(мы использовали приближённое равенство $u_M \approx 2\xi$, справедливое при $M > m$). Если l не зависит от энергии, то отсюда следует, что $u = \ln \frac{E_0}{E}$ должно быть велико по сравнению с u_M . Так как $\frac{u}{\xi}$ определяет число столкновений, в результате которых энергия нейтрона стала равной E , то это условие означает, что число столкновений должно быть большим.

Итак, диффузионным приближением можно пользоваться при больших u , на расстояниях от источника, не превышающих $\frac{\tau}{l}$ и при достаточно слабой зависимости длины свободного пробега от энергии.

Заметим, что основное уравнение диффузионного приближения (33.16) может быть получено в случае тяжёлых замедлителей ($M \gg m$) из элементарных соображений^[110]. Будем исходить из диффузионного уравнения для нейтронов

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n, \quad (33.25)$$

где $D = \frac{1}{3} v l_t$ — коэффициент диффузии нейтронов. Взамен стационарной мы рассматриваем нестационарную задачу о диффузии нейтронов, попадающих в замедлитель в момент времени $t = 0$ с энергией E_0 . С течением времени меняется энергия нейтрона, и если при каждом столкновении изменение энергии незначительно, то время пребывания нейтрона в замедлителе можно рассматривать как непрерывную функцию его энергии. Чтобы связать время с энергией, напомним, что среднее число столкновений $\Delta \nu$, которое испытывает нейтрон при изменении u на Δu равно $\Delta \nu = \frac{\Delta u}{\xi}$ [см. (31.15)], а так как $\Delta \nu = \frac{v}{l} \Delta t$, то

$$dt = \frac{l}{v \xi} du.$$

Если теперь в уравнении (33.25) перейти от t к новой независимой переменной u , то мы получим уравнение для стационарной диффузионной проблемы замедления нейтронов при непрерывном действии источника нейтронов. Указанная замена переменного приводит к уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n,$$

где $d\tau = D dt = \frac{1}{3} l_t \frac{du}{\xi}$. Это и есть основное уравнение (33.16) [см. также (33.11)].

До сих пор мы пренебрегали поглощением нейтронов. Чтобы учесть поглощение нейтронов в диффузионном приближении, нужно в правой части уравнения (33.25) добавить член $-\frac{1}{T_c}n$, где $T_c = \frac{l_c}{v}$ — время жизни нейтрона по отношению к захвату. Соответственно этому в правой части уравнения (33.16) необходимо добавить член $-\frac{1}{L^2}n$, где $L^2 = DT_c = \frac{1}{3}l_cl_v$. Поэтому основное уравнение диффузионного приближения с учётом поглощения нейтронов имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n - \frac{1}{L^2}n. \quad (33.26)$$

Заметим, что если в состав замедлителя входят ядра различных сортов, то предыдущие результаты остаются в силе, нужно только вместо ξ подставить выражение (31.17)

Г Л А В А V

ДЕЛЕНИЕ ТЯЖЁЛЫХ ЯДЕР

§ 34. Механизм деления

Тяжёлые ядра при сравнительно малых энергиях возбуждения способны расщепляться на две или большее число примерно равных частей. Это явление называется делением ядер *).

Продукты деления (осколки) находятся, как правило, в возбуждённом состоянии и во многих случаях являются β -активными.

Рассмотрение дефекта массы тяжёлых ядер показывает, что ядра, атомный вес которых превосходит ~ 110 , должны быть неустойчивыми по отношению к делению. В этом можно убедиться, если сравнить энергию покоящегося исходного ядра, массу которого мы обозначим через M_0 , с энергией дочерних ядер, массы которых в невозбуждённом состоянии обозначим через M_1, M_2, \dots . Разность этих энергий равна:

$$\Delta E = (M_0 - \sum M_i)c^2. \quad (34.1)$$

Эта величина ^[87] оказывается положительной для всех ядер, атомный номер которых превосходит 110, если рассматривается разделение ядра на два дочерних ядра примерно равной массы. (Во многих случаях $\Delta E > 0$ при делении ядра на три и даже большее число частей.)

Таким образом, тяжёлые ядра оказываются энергетически неустойчивыми.

*) Явление деления ядер было открыто Ганом и Штрассманом ^[85]. Теории деления посвящён ряд работ Н. Бора ^[86], ^[87], Я. Френкеля ^[88] и др. В этом и следующем параграфах излагаются основные результаты работы ^[87].

Несмотря на свою энергетическую неустойчивость, они, однако, не расщепляются самопроизвольно с заметной вероятностью, так как этому препятствует наличие потенциального барьера в пространстве параметров, характеризующих деформацию ядра; осколки должны пройти этот барьер, прежде чем будет достигнуто их полное отделение.

Если сравнивать ядро с жидкой каплей, что мы будем далее делать, чтобы получить качественную картину процесса деления, то можно сказать, что делению ядра должна предшествовать некоторая деформация, причём вначале увеличение

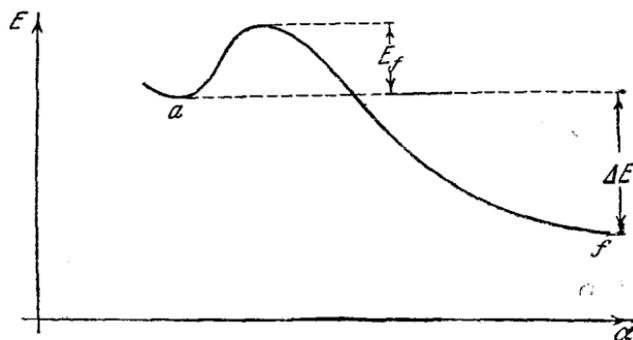


Рис. 17.

деформации сопровождается увеличением энергии ядра. Иными словами, если мы будем графически изображать зависимость этой энергии от некоторого параметра α , характеризующего деформацию, которая при своём возрастании приводит в конечном счёте к делению ядра, то мы получим кривую, схематически изображённую на рис. 17. Здесь точка a изображает состояние исходного материнского ядра, а точка f соответствует тому состоянию, когда ядро разделилось на две части. Энергия начального состояния a превосходит энергию конечного состояния f на ΔE — энергию, освобождающуюся при делении ядра (эта энергия переходит в кинетическую энергию осколков и в энергию β - и γ -излучения).

Начальное состояние соответствует минимуму энергии, т. е. является устойчивым, но эта устойчивость имеет место только по отношению к деформациям, не превосходящим некоторого предела. Так как $\Delta E > 0$, то состоянию f соот-

ветствует более глубокий минимум, однако переходу из a в f препятствует, как видно из рисунка, потенциальный барьер (высота барьера обозначена через E_p).

Чтобы деление могло произойти, необходимо предварительно создать такую деформацию ядра, при которой потенциальная энергия деформации, т. е. энергия возбуждения ядра, была бы по крайней мере равна высоте этого барьера. Эта деформация называется критической, а отвечающая ей энергия — критической энергией деления.

Покажем, как оценить высоту барьера, препятствующего делению ядра.

Мы будем ^[87] проводить качественную аналогию между ядром и несжимаемой, равномерно заряженной жидкой каплей, обладающей некоторым поверхностным натяжением O . Энергии возбуждения ядра мы поставим в соответствие энергию деформации такой капли, совершающей колебания под действием поверхностного натяжения и сил электростатического отталкивания. Благодаря действию этих сил и создаётся потенциальный барьер, высоту которого мы хотим определить.

Рассмотрим сначала малые деформации жидкой капли.

Деформированная поверхность капли, которую ради простоты будем считать телом вращения, определяется уравнением

$$r(\theta) = R [1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos \theta) + \alpha_3 P_3(\cos \theta) + \dots],$$

где $r(\theta)$ — радиус-вектор, проведённый из центра капли в точку её поверхности под углом θ к оси вращения, R — начальный радиус ядра, $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, α_i — малые параметры, характеризующие деформацию. В это выражение не входит член $\alpha_1 P_1(\cos \theta)$, содержащий первый полином Лежандра, так как этот член соответствует смещению шаровой капли как целого без изменения формы *).

*) Чтобы убедиться в этом, напишем полярное уравнение сферы, предполагая, что начало координат смещено относительно центра сферы на малый вектор \mathbf{a} . В векторной форме уравнение имеет вид $r = R + \mathbf{a}$, где R — вектор, проведённый из центра сферы в какую-либо её точку. Так как $a \ll R$, то $r = \sqrt{(R + \mathbf{a})^2} \approx \sqrt{R^2 + 2R\mathbf{a}} \approx R(1 + a \cos \theta) = R[1 + \alpha_1 P_1(\cos \theta)]$, что и требовалось доказать.

Потенциальная энергия капли, которая складывается из поверхностной и электростатической энергии, является функцией параметров α_i . Эта функция в пространстве параметров α_i изображается некоторой поверхностью. На этой энергетической поверхности состояния исходного ядра и разделившихся осколков изображаются точками, лежащими в потенциальных «долинах» (на рис. 17 — точки a и f), которые разделены потенциальным барьером. Точка перевала на «хребте», разделяющем обе потенциальные долины, определяет критическую деформацию ядра, за которой может последовать его деление.

Выясним прежде всего, каковы условия устойчивости капли по отношению к малым деформациям. Определим для этого потенциальную энергию капли с точностью до членов α_i^2 . Можно показать, что в этом приближении сумма поверхностной и электростатической энергии деформированной капли равняется [37]

$$E_{S+E} = 4\pi (r_0 A^{1/3})^2 O \times \\ \times \left[1 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 + \frac{5}{7} \alpha_3^2 + \dots + \frac{(n-1)(n+2)}{2(2n+1)} \alpha_n^2 + \dots \right] + \\ + \frac{3}{5} \cdot \frac{(Ze)^2}{r_0 A^{1/3}} \left[1 - \frac{\alpha_2^2}{5} - \frac{10}{49} \alpha_3^2 - \dots - \right. \\ \left. - \frac{5(n-1)}{(2n+1)^2} \alpha_n^2 - \dots \right], \quad (34.2)$$

где O — коэффициент поверхностного натяжения капли и Ze — заряд ядра, радиус которого считается равным $R = r_0 A^{1/3}$.

Как и следовало ожидать, деформация приводит к увеличению поверхностной и уменьшению электрической энергии капли (отклонение от шарообразности приводит к увеличению поверхности капли, т. е. к увеличению поверхностной энергии и к раздвижению зарядов, т. е. к уменьшению электрической энергии).

Рассмотрим коэффициент, стоящий в (34.2) перед α_2^2 :

$$4\pi r_0^2 O A^{2/3} \frac{2}{5} \left\{ 1 - \frac{Z^2}{A} \frac{e^2}{10 \frac{4\pi}{3} r_0^3 O} \right\}. \quad (34.3)$$

Ясно, что для устойчивости капли необходимо, чтобы выражение, стоящее в фигурных скобках, было положительным. Это значит, что Z^2/A должно быть меньше некоторого предельного значения, равного

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right)_0 = 10 \frac{4\pi}{3} \frac{Or_0^3}{e^2}. \quad (34.4)$$

При выполнении этого условия $\left[\frac{Z^2}{A} < \left(\frac{Z^2}{A}\right)_0\right]$ обеспечивается устойчивость не только по отношению к деформациям типа $P_2(\cos \theta)$, но также и по отношению к деформациям типа $P_n(\cos \theta)$, где $n = 3, 4, \dots$

Если $\frac{Z^2}{A} = \left(\frac{Z^2}{A}\right)_0$, то капля является неустойчивой по отношению к бесконечно малым деформациям типа $P_2(\cos \theta)$ (см.

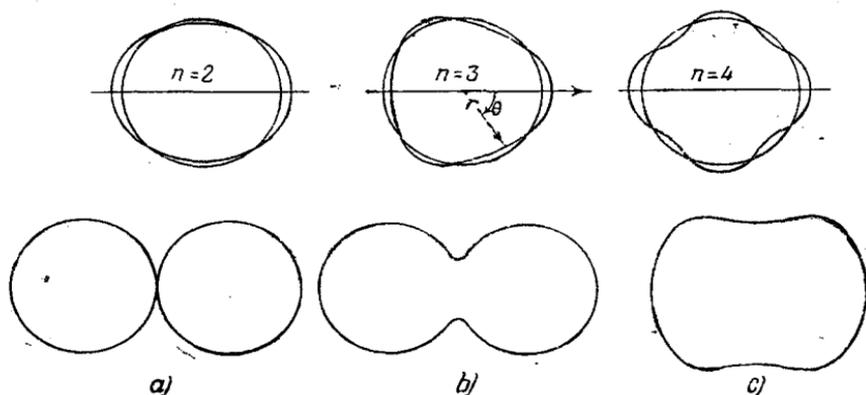


Рис. 18.

рис. 18, на котором изображена форма капли для простейших деформаций типа $\delta r(\theta) = \alpha_n P_n(\cos \theta)$ при $n = 2, 3, 4$.

Энергия $4\pi r_0^2 O$ имеет порядок величины ядерных энергий. Полагая $4\pi r_0^2 O \approx 1,4 \cdot 10^7$ eV, найдём, что $(Z^2/A)_0$ близко к значению Z^2/A для урана [87].

Таким образом, тяжёлые ядра, например уран и торий, находятся вблизи предела устойчивости, что связано с почти полной компенсацией действия сил поверхностного натяжения и сил электростатического отталкивания.

Если $\frac{Z^2}{A} < \left(\frac{Z^2}{A}\right)_0$, то ядро будет устойчивым по отношению к малым деформациям, однако, как уже об этом говорилось выше, достаточно большая деформация приведёт ядро в состояние неустойчивого равновесия. Эта критическая деформация должна быть тем больше, чем меньше Z^2/A . На рис. 18 схематически изображена критическая форма капли в состоянии неустойчивого равновесия для трёх различных значений Z^2/A . Форма *c*) отвечает Z^2/A , близкому к $(Z^2/A)_0$. Для меньшего значения Z^2/A мы получим форму типа *b*) и, наконец, при $Z = 0$ — форму *a*). В последнем случае мы имеем, очевидно, две равные соприкасающиеся сферы, массы которых равны половине массы исходного ядра.

Чтобы определить критическую энергию деления, которую мы обозначим через E_f , нужно знать форму капли в состоянии неустойчивого равновесия. Равновесная форма капли должна быть найдена из условия

$$kO + \varphi = \text{const.},$$

где k — кривизна поверхности капли, O — поверхностное натяжение и φ — потенциал электрических сил. Точное решение задачи о нахождении равновесной формы капли наталкивается на большие математические трудности. Мы поступим поэтому следующим образом. Из соображений размерности видно, что критическую энергию деления E_f можно представить в виде произведения поверхностной энергии, равной $4\pi r_0^2 A^{2/3} O$ на некоторую безразмерную функцию отношения $\frac{Z^2}{A} / \left(\frac{Z^2}{A}\right)_0$ т. е.

$$E_f = 4\pi r_0^2 A^{2/3} O f \left[\frac{Z^2/A}{(Z^2/A)_0} \right]. \quad (34.5)$$

Найти общий вид функции $f(x)$ не представляется возможным, однако можно найти $f(x)$ в двух предельных случаях, когда $x \ll 1$ и когда $1 - x \ll 1$.

В первом из этих случаев роль электростатических сил очень мала. Мы можем поэтому считать, что форма капли в состоянии неустойчивого равновесия мало отличается от той, которая изображена на рис. 18, *a* (две соприкасающиеся сферы половинной массы).

Если бы заряд капли равнялся нулю, то энергия E_f была бы попросту равна работе, которую необходимо произвести против сил поверхностного натяжения при разделении капли на две равные части, т. е.

$$E_f = 2 \cdot 4\pi r_0^2 \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} O - 4\pi r_0^2 A^{1/3} O, \quad Ze \rightarrow 0. \quad (34.6)$$

При наличии заряда мы должны прибавить сюда разность электрических энергий конечной и начальной конфигураций, которая равна

$$\frac{2}{r_0} \frac{3}{5} \left(\frac{Ze}{2}\right)^2 \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{Ze}{2}\right)^2 \frac{1}{2r_0} \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3} - \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{r_0 A^{1/3}} \quad (34.6')$$

(первый член представляет собой электрическую энергию разделённых сфер радиуса $r_0 \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3}$, второй член — взаимную потенциальную энергию обеих сфер и третий член — электрическую энергию исходного ядра).

Из (34.4), (34.6) и (34.6') мы получим при выполнении условия $\frac{Z^2}{A} \ll \left(\frac{Z^2}{A}\right)_0$ следующий результат:

$$f(x) = 0,260 - 0,215x, \quad x = \frac{\frac{Z^2}{A}}{\left(\frac{Z^2}{A}\right)_0} \ll 1. \quad (34.7)$$

Определим теперь $f(x)$ для значений x , близких к единице, когда ядро находится вблизи предела устойчивости. В этом случае состояние неустойчивого равновесия достигается при малых деформациях.

Выше мы определили уже полную энергию E_{S+E} в случае малых деформаций с точностью до членов α_i^2 . Для определения E_f этого приближения не достаточно, так как выражение (34.2), рассматриваемое как функция α_i , не имеет максимума. Мы должны, очевидно, учесть ангармоничность колебаний капли, т. е. ввести в выражение для энергии более высокие степени параметров α_i . Введём в рассмотренные члены, пропорциональные α_2^3 и α_2^4 и, кроме того, член, пропорциональный $\alpha_2^3 \alpha_4$, который учитывает связь между

колебаниями типов $n = 2$ и $n = 4$. С учётом этих членов E_{S+E} приобретает следующий вид:

$$E_{S+E} = 4\pi r_0^2 O A^{2/3} \left[\frac{2}{5} \alpha_2^2 + \frac{116}{105} \alpha_2^3 + \frac{101}{35} \alpha_2^4 + \frac{2}{35} \alpha_2^2 \alpha_4 + \alpha_4^2 \right] - \\ - \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{r_0 A^{1/3}} \left[\frac{1}{5} \alpha_2^2 + \frac{64}{105} \alpha_2^3 + \frac{58}{35} \alpha_2^4 + \frac{8}{35} \alpha_2^2 \alpha_4 + \frac{5}{27} \alpha_4^2 \right].$$

Искомая энергия E_f определяется, очевидно, точкой перевала на поверхности, изображающей E_{S+E} как функцию $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ в пространстве этих параметров.

Для нахождения E_f следует сначала найти минимум E_{S+E} по отношению к переменной α_4 (при постоянном α_2) и затем максимум полученного выражения, являющегося функцией только α_2 . Можно показать, что E_f имеет следующий вид [87]:

$$E_f = 4\pi r_0^2 A^{2/3} O \left\{ \frac{98}{135} (1-x)^3 + \dots \right\} \quad (34.8)$$

[невывисанные члены в фигурных скобках содержат более высокие степени $(1-x)$]. Таким образом, если $1-x \ll 1$, то

$$f(x) \approx \frac{98}{135} (1-x)^3. \quad (34.9)$$

Интерполируя результаты (34.7) и (34.9), можно приближённо найти E_f для промежуточных значений x . Результаты такой интерполяции представлены в виде кривой на рис. 19.

Следует подчеркнуть, что эта интерполяция имеет только качественный характер; в действительности величина x для ядер урана и тория не очень близка к единице, так как критическая деформация, приводящая эти ядра к делению, не является малой [89].

Энергия E_f для составного ядра U^{236} , получающегося в результате захвата нейтрона ядром U^{235} , равняется примерно $5\frac{1}{4}$ MeV, в то время как для составного ядра U^{239} $E_f \approx 6$ MeV [87].

Энергия связи нейтрона E_n для различных ядер, способных делиться, имеет следующие значения [87]:

$$E_n(U^{236}) \approx 6,4 \text{ MeV}; \quad E_n(U^{235}) \approx 5,4 \text{ MeV}; \\ E_n(U^{239}) \approx 5,2 \text{ MeV}; \quad E_n(\text{Th}^{233}) \approx 5,2 \text{ MeV}; \\ E_n(\text{Pa}^{232}) \approx 5,4 \text{ MeV}.$$

где $E_{S+E}(\alpha)$ — потенциальная энергия ядра, зависящая от некоторого параметра α , характеризующего его деформацию, E_0 — начальная энергия ядра, m_i — массы ядерных частиц, x_i — их координаты. Интегрирование совершается в пространстве параметров α_i вдоль линии «скорейшего спуска», проходящей через точку перевала, которая, как указывалось выше, отвечает критической деформации. Начальная точка пути интегрирования соответствует равновесному состоянию исходного ядра, конечная точка — разошедшимся осколкам. Вдоль пути интегрирования координаты частиц следует считать функциями параметра α (в том случае, когда имеется только одна частица, эта формула переходит в обычную формулу (28.2) для проницаемости барьера).

Необходимо подчеркнуть, что в качестве E_{S+E} нельзя пользоваться выражением (34.2), справедливым в том случае, когда капля совершает малые колебания, так как в действительности мы имеем дело с большими деформациями ядра [использование выражения (34.2) в качестве $E_{S+E}(\alpha)$ приводит к периоду полураспада ядер урана, равному примерно 1 часу [89].

Ясно, что вероятность прохождения через барьер будет очень малой из-за большой величины масс осколков. Можно оценить показатель в формуле (34.10) приближённо как

$$\sqrt{2ME_f \frac{\alpha}{\hbar}},$$

где M — масса ядра; полагая $\alpha \approx 10^{-13}$ см, мы получим время жизни урана по отношению к спонтанному распаду порядка $\tau_f \approx 10^{22}$ лет. Согласно экспериментальным данным [90] $\tau_f \approx 10^{16} - 10^{17}$ лет.

Большое значение величины τ_f показывает, что спонтанное деление практически не оказывает никакого влияния на устойчивость существующих ядер. Однако так как с увеличением $\frac{Z^2}{A}$ величина τ_f быстро падает, то вполне возможно, что спонтанное деление ответственно за отсутствие в природе некоторых трансурановых элементов.

Приведём в заключение этого параграфа значения энергии ΔE , выделяющейся при делении различного рода ядер [87].

(В последнем столбце указаны значения энергии, освобождающейся в результате последующих β -распадов осколков деления). Мы видим, что освобождающаяся при делении ядра урана энергия составляет около 200 MeV (E_f для урана ~ 6 MeV).

Заметим, что, согласно расчётам [87], при расщеплении ядра урана на три примерно равные части должна выделяться

Исходное ядро	Продукты деления	Энергия, выделяемая при делении (в MeV)	Энергия, выделяемая при последующем β -распаде осколков (в MeV)
$^{28}\text{Ni}^{61}$	$^{14}\text{Si}^{30, 31}$	—11	2
$^{50}\text{Sn}^{117}$	$^{25}\text{Mn}^{58, 59}$	10	12
$^{63}\text{Er}^{167}$	$^{34}\text{Se}^{83, 84}$	94	13
$^{82}\text{Pb}^{206}$	$^{41}\text{Ne}^{103, 103}$	120	32
$^{92}\text{U}^{239}$	$^{46}\text{Pd}^{119, 120}$	200	31

энергия около 210 MeV, что несколько превышает энергию, выделяемую при делении на две части. Разделение урана на четыре части должно приводить к выделению энергии ~ 150 MeV (разделение становится эндотермическим, если число дочерних ядер равно 15).

Деление ядер урана на три и четыре части наблюдалось экспериментально, причём было установлено, в соответствии с теоретическими расчётами, что энергия, выделяющаяся при делении на три части, превышает энергию, выделяющуюся при делении на две части [91].

§ 35. Вероятность деления

Ядро, энергия возбуждения которого превосходит E_f , не обязательно должно подвергнуться делению. Можно лишь сказать, что будет иметь место соревнование между различными процессами, могущими привести к распаду составного ядра. Наиболее важными из них, помимо деления, являются испускание нейтрона и эмиссия γ -кванта. В то время как вылет частицы связан с концентрацией энергии возбуждения ядра, распределённой вначале между многими частицами и имеющей характер тепловой энергии, на одной частице,

находящейся у поверхности ядра, деление ядра связано с переходом части этой энергии в потенциальную энергию деформации ядра, достаточной для того, чтобы привести к делению.

Сравним между собой частичные ширины составного ядра по отношению к делению, вылету нейтрона и испусканию γ -кванта.

Покажем прежде всего, каким образом можно оценить частичную ширину по отношению к делению Γ_f .

Рассмотрим совокупность ядер, энергия возбуждения которых лежит между E и $E + dE$. Обозначим число состояний ядра с энергией возбуждения в интервале $(E, E + dE)$ через $\rho(E) dE$. Пусть в каждом из этих состояний находится по одному ядру. Согласно определению ширины деления из общего числа ядер $\rho(E) dE$ в единицу времени подвергается делению $\rho(E) dE \frac{\Gamma_f}{\hbar}$ ядер. С другой стороны, это число может быть определено ещё следующим образом. Пусть $d\alpha$ — смещение в направлении деления. Отнесённое к $d\alpha$ общее число квантовых состояний составного ядра, находящегося в переходном состоянии, непосредственно предшествующем делению, можно представить в виде

$$\frac{dp d\alpha}{2\pi\hbar} \rho^*(E - E_f - K) dE.$$

Здесь K и p — энергия и импульс, которые приобретают при разлёте осколки деления (величины K и p заключены в интервалах dK и dp); ρ^* — плотность тех уровней составного ядра в переходном состоянии, которые возникают от возбуждения не связанных с делением степеней свободы ядра (энергия возбуждения этих степеней свободы в переходном состоянии равна $E - E_f - K$, она и является аргументом функции ρ^*); наконец, $dp d\alpha / 2\pi\hbar$ — число квантовых состояний в интервалах dp и $d\alpha$ переменных p и α (эти состояния связаны с переменной, которая определяет деформацию, приводящую к делению ядра).

Поскольку вначале в каждом квантовом состоянии находилось по одному ядру, общее число делений в единицу времени равно

$$dE \int \frac{v dp}{2\pi\hbar} \rho^*(E - E_f - K),$$

где $v = \frac{d\alpha}{dt}$ — относительная скорость осколков. Замечая, что

$v dp = dK$, можно переписать это выражение в виде

$$dE \int \frac{v dp}{2\pi\hbar} \rho^*(E - E_f - K) = \frac{dE}{2\pi\hbar} N^*(E - E_f),$$

где $N^*(E - E_f)$ — общее число уровней составного ядра в переходном состоянии с энергией возбуждения, не превосходящей $E - E_f$.

Приравнявая $\rho(E) dE \frac{\Gamma_f}{\hbar}$ этому выражению, получим следующую формулу для ширины деления Γ_f :

$$\Gamma_f = \frac{N^*(E - E_f)}{2\pi\rho(E)} = \frac{1}{2\pi} DN^*(E - E_f), \quad (35.1)$$

где D — среднее расстояние между соседними уровнями составного ядра с энергией возбуждения, равной E .

При энергиях возбуждения, не превосходящих E_f , ширина деления равна нулю. Если $E - E_f \sim \varepsilon$, где ε — расстояние между наименьшими уровнями составного ядра в переходном состоянии *), то $N^* \sim 1$ и $\Gamma_f \approx \frac{D}{2\pi}$; эта величина составляет примерно 1—10 eV. С увеличением энергии возбуждения ширина деления сильно возрастает. Действительно, плотность уровней ядра пропорциональна $e^{S(E)}$, где $S(E)$ — энтропия составного ядра. Поэтому ширина Γ_f пропорциональна $e^{S(E - E_f) - S(E)}$. Отсюда следует, что, начиная с $E = E_f$, величина Γ_f сильно, почти экспоненциально, возрастает с увеличением E .

Рассмотрим теперь вероятности испускания γ -кванта и эмиссии нейтрона. Что касается радиационной ширины Γ_γ , то, как мы знаем, у обычных ядер $\Gamma_\gamma \approx 0,1$ eV, причём эта ширина почти постоянна в большом интервале энергии. Можно предполагать, что у ядер, могущих делиться, Γ_γ — того же порядка величины, что и у обычных ядер. Действительно, из всех степеней свободы ядра, способного делиться, только одна степень, отвечающая колебанию типа $P_2(\cos \theta)$ (см. выше), обладает аномальными свойствами — большой амплитудой колебаний при сравнительно малой энергии возбуждения. Однако

*) Можно думать, что ε по порядку величины совпадает с расстоянием между наименьшими уровнями для обычных тяжёлых ядер-т. е. $\varepsilon \sim 0,1 - 0,2$ MeV.

излучение, связанное с этой степенью свободы, мало ввиду малости частот колебаний [87].

При $E - E_f \sim \varepsilon$ радиационная ширина примерно в 10—100 раз меньше ширины деления; с увеличением энергии возбуждения это отношение сильно растёт.

Нейтронная ширина Γ_n очень мала, если энергия возбуждения лишь немного превышает энергию связи нейтрона E_n ; в этом случае Γ_n совпадает с частичной шириной упругого рассеяния нейтрона Γ_{n0} . При возрастании энергии возбуждения Γ_n сильно возрастает и очень скоро становится больше Γ_{n0} . Действительно, если $E > E_n$, то $\Gamma_n = \sum_B \Gamma_{nB}$, где суммирование производится по состояниям остаточного ядра B . Последнюю сумму можно представить в виде

$$\Gamma_n = \int \Gamma_{nB} \tilde{\rho}(E - E_n - K) dK,$$

где $\tilde{\rho}$ — плотность уровней остаточного ядра, K — кинетическая энергия нейтрона. Вынося за знак интеграла некоторое среднее значение Γ_{nB} , которое мы обозначим через $\bar{\Gamma}_{nB}$, получим:

$$\Gamma_n = \bar{\Gamma}_{nB} \tilde{N}(E - E_n),$$

где \tilde{N} — общее число уровней остаточного ядра с энергией возбуждения, меньшей, чем $E - E_n$.

Если энергия возбуждения примерно на 1 MeV превосходит энергию связи нейтрона, то, как было показано в § 19, коэффициент прилипания нейтронов к ядру близок к единице; при этом среднее значение ширины Γ_{nB} по порядку величины равно $D/2\pi$, где D — среднее расстояние между соседними уровнями составного ядра. Поэтому

$$\Gamma_n \sim \frac{D}{2\pi} \tilde{N}(E - E_n). \quad (35.2)$$

Сравнение этой формулы с формулой (35.1) для Γ_f показывает, что при возрастании E , начиная с $E = E_n$, Γ_n быстро возрастает с энергией.

Таким образом, мы можем сделать следующие выводы. Если энергия возбуждения составного ядра E меньше или того же порядка величины, что и E_f , то $\Gamma_f \sim 0$. Излучение

при этом гораздо более вероятно, чем деление. При увеличении энергии возбуждения, начиная с энергии $E = E_f$, частичная ширина деления Γ_f быстро возрастает и очень скоро становится больше Γ_γ . При достаточно больших энергиях возбуждения излучение можно вовсе не учитывать, так что основными процессами, ведущими к распаду составного ядра, будут деление и вылет нейтрона. Можно предполагать, что асимптотическое поведение Γ_f и Γ_n при $E \gg E_n, E_f$ примерно одинаково, так как при больших энергиях возбуждения температура ядра настолько велика, что экспоненциальные факторы в Γ_f и Γ_n по порядку величины равны единице и различие в Γ_n и Γ_f обуславливается различием предэкспоненциальных множителей, которые медленно меняются с энергией возбуждения. Отсюда видно, что при больших энергиях возбуждения оба процесса могут играть примерно одинаковую роль.

Следует отметить, что если энергия возбуждения превосходит сумму $E_f + E_n$, то сечение деления возрастает благодаря следующему процессу [93]. Сильно возбуждённое составное ядро, образующееся благодаря слиянию исходного ядра с быстрым нейтроном, может подвергнуться делению либо сразу, либо после вылета нейтрона, если только энергия возбуждения остаточного ядра превосходит характерную для этого ядра энергию деления.

Приведём теперь формулы, определяющие эффективное сечение деления. Пусть возбуждение составного ядра создаётся в результате захвата нейтрона. Рассмотрим сначала тот случай, когда энергия нейтрона лежит вне тепловой области (о сечениях в тепловой области см. § 36).

Если существенную роль играет только один уровень с энергией E_0 , то сечение деления σ_f выражается резонансной формулой

$$\sigma_f = \pi \lambda^2 \frac{2J + 1}{(2s + 1)(2i + 1)} \frac{\Gamma_n \Gamma_f}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad (35.3)$$

где E — энергия падающего нейтрона, λ — длина его волны, $\Gamma = \Gamma_f + \Gamma_n + \Gamma_\gamma$ — полная ширина уровня, s — спин нейтрона, i и J — угловые моменты исходного и составного ядер.

При захвате медленного нейтрона $\Gamma_{n0} \sim \sqrt{E}$, поэтому сечение деления обратнó пропорционально скорости нейтрона.

Сечение радиационного захвата в этих условиях имеет вид

$$\sigma_{\gamma} = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_{\gamma}}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (35.4)$$

Если захватывается медленный нейтрон и при этом состояние составного ядра попадает в область перекрывающихся уровней ($\Gamma \sim D$), то усреднённое сечение деления определяется общей формулой (27.4)

$$\sigma_f = 2\pi^2 \lambda^2 g \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_{\gamma}}{\Gamma D}, \quad (35.5)$$

где $g = 1$, если $i = 0$ и $g = \frac{1}{2}$, если $i > 0$. (Так как орбитальный момент нейтрона $l = 0$, то $J = i \pm \frac{1}{2}$, если $i \neq 0$, $J = \frac{1}{2}$, если $i = 0$.)

Усреднённое сечение радиационного захвата в этих же условиях определяется формулой

$$\sigma_{\gamma} = 2\pi^2 \lambda^2 g \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_{\gamma}}{\Gamma D}. \quad (35.6)$$

Если деление возможно уже под действием тепловых нейтронов, то ширина деления всегда больше радиационной ширины и полная ширина Γ практически совпадает с шириной деления Γ_f . Усреднённое сечение деления близко при этом к сечению образования составного ядра

$$\sigma_f \approx \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0}}{D} = \pi^2 \lambda^2 \zeta \quad (35.7)$$

(ζ — вероятность прилипания нейтрона).

Усреднённое сечение радиационного захвата для ядер, могущих делиться под действием тепловых нейтронов, равняется

$$\sigma_{\gamma} = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_{\gamma}}{\Gamma D} \approx \frac{\Gamma_{\gamma}}{\Gamma_f} \sigma_f. \quad (35.8)$$

При энергии нейтрона $\sim 10^5$ eV сечение деления оказывается по порядку величины равным 10^{-24} см², если считать, что $\zeta \approx \frac{1}{3}$. Оба выражения (35.7) и (35.8) справедливы вплоть до таких энергий, при которых начинает играть роль неупругое рассеяние нейтронов ($E \sim 1$ MeV).

В случае захвата быстрого нейтрона ($\lambda \ll R$) сечение деления σ_f определяется формулой

$$\sigma_f \approx \pi R^2 \frac{\Gamma_f}{\Gamma}. \quad (35.9)$$

Заметим, что помимо нейтронов, деление могут вызывать также дейтроны, протоны, γ -лучи и другие частицы, если они обладают достаточно большой энергией, чтобы создать необходимое возбуждение ядра.

Что касается дейтронов, то следует иметь в виду, что они должны иметь возможность целиком проникнуть в ядро. Нейтрон, захватываемый ядром после диссоциации медленного дейтрона в поле ядра, оказывается обычно неспособным вызвать деление, так как возникающее при этом возбуждение ядра меньше критической энергии деления E_f [87].

§ 36. Цепная реакция

При делении тяжёлых ядер под действием нейтронов, помимо ядер-осколков, испускаются вторичные быстрые нейтроны, которые в свою очередь способны вызывать деление ядер. Эти нейтроны распределены по энергиям непрерывно, причём основная масса их имеет энергию около 1—2 MeV (максимальная энергия нейтронов по порядку величины равна 10 MeV).

Таким образом, появляется возможность осуществления цепной ядерной реакции. Чтобы такая реакция происходила, необходимо выполнение ряда условий, к рассмотрению которых мы теперь перейдём.

Рассмотрим сначала простейший случай бесконечной мультиплицирующей системы, когда вещество, ядра которого способны делиться, занимает всё пространство. В таких системах можно не интересоваться потерей нейтронов, имеющей место в системах конечных размеров и происходящей из-за диффузии нейтронов в окружающее пространство.

Пусть в состав мультиплицирующей системы входят только ядра тяжёлых элементов, способных делиться под действием нейтронов. Обозначим через ν среднее число нейтронов, возникающих при одном акте деления ядра. При столкновении таких нейтронов с ядрами наиболее вероятны процессы деления и неупругого рассеяния нейтронов (радиационный захват быстрых нейтронов мал, но всё же происходит с заметной вероятностью).

Если неупругое рассеяние мало, то для протекания цепной реакции необходимо, чтобы ν было больше единицы. Это же условие должно выполняться также и в том случае, когда неупругое рассеяние нейтронов не мало, но неупруго рассеянные нейтроны способны вызывать деление ядер. Для возможности деления кинетическая энергия почти всех неупруго рассеянных нейтронов должна превосходить разность между критической энергией деления E_f и энергией связи нейтрона E_n , так как только в этом случае вероятность деления под действием неупруго рассеянных нейтронов будет достаточно большой (вблизи порога деления сечение деления стремится к нулю, см. § 35).

В том случае, когда неупруго рассеянные нейтроны (после одного или нескольких актов рассеяния) не способны вызывать деление, возможность протекания цепной реакции определяется, кроме величины ν , вероятностью неупругого рассеяния и энергетическим спектром рассеянных нейтронов. Мы не будем, однако, подробно рассматривать этот случай.

Если из-за большого неупругого рассеяния, выводящего нейтроны из области энергии, в которой они способны делить ядра, а также из-за радиационного захвата нейтронов, роль которого возрастает с уменьшением энергии нейтронов, цепная реакция на быстрых нейтронах невозможна, то можно создать условия, благоприятствующие протеканию цепной реакции на медленных (тепловых) нейтронах. Для этой цели в систему необходимо ввести замедлитель — лёгкий элемент, ядра которого эффективно замедляют нейтроны при упругих столкновениях.

Цепная реакция на медленных нейтронах осуществляется, например, в системе, состоящей из урана и лёгкого замедлителя (графит, тяжёлая вода).

Как известно, основной изотоп урана делится только под действием быстрых нейтронов с энергией, большей, чем $\sim 1 \text{ MeV}$. Поэтому большое неупругое рассеяние препятствует протеканию цепной реакции на быстрых нейтронах с использованием основного изотопа в качестве делящегося материала.

Изотоп U^{235} делится уже под действием тепловых нейтронов, причём в соответствии с законом $1/v$ эффективное сечение деления U^{235} особенно велико именно в тепловой области.

Эффективное сечение радиационного захвата нейтронов в тепловой области (изотопами U^{238} и U^{235}) также следует закону $1/v$, так что относительная вероятность деления и радиационного захвата в этой области энергии не зависит от энергии.

Введением замедлителя достигается возможность уменьшить роль радиационного захвата нейтронов ядрами основного изотопа U^{238} (приводящего к образованию плутония). Благодаря этому при замедлении нейтронов до тепловых энергий создаются благоприятные условия для развития реакции с использованием изотопа U^{235} (главным образом) в качестве делящегося материала.

Хотя при больших энергиях нейтронов ($E \gtrsim 1 \text{ MeV}$) радиационный захват ядрами U^{238} очень мал, уже при энергиях $\sim 10^5 \text{ eV}$ он достигает величины порядка 10^{-25} см^2 . В области энергии нейтронов $kT < E < 10^4 \text{ eV}$ этот процесс играет наиболее важную роль.

Так как процентное содержание изотопа U^{235} очень невелико (число ядер U^{235} составляет около $1/140$ общего числа ядер урана), то радиационный захват в области энергии $10^4 - 10^5 \text{ eV}$ мешает протеканию цепной реакции в системах, не содержащих замедлителя.

Неблагоприятное для протекания цепной реакции соотношение между сечением радиационного захвата ядрами U^{238} и сечением деления ядер U^{235} (с учётом величины концентрации этого изотопа) имеет место вплоть до самых малых энергий нейтрона. Положение, однако, резко меняется вблизи тепловой области, точнее говоря, при энергиях, меньших чем энергия наинизшего резонансного уровня U^{238} .

При приближении энергии нейтрона к тепловой области сечение резонансного поглощения нейтронов ядрами U^{238} становится малым по сравнению с сечением деления ядер U^{235} .

Чтобы разъяснить это обстоятельство, заметим, что в тепловой области, вообще говоря, нельзя пользоваться введенными в § 35 сечениями, усредненными по большому числу уровней. Эти сечения определяются главным образом значениями энергии, лежащими вблизи резонансных уровней. Если вблизи тепловой области нет резонансных уровней, то эффективное сечение в тепловой области может быть существенно меньше усредненного сечения. Именно так и обстоит дело с радиационным захватом нейтронов ядрами основного изотопа U^{238} , для которых энергия наиболее низко расположенного резонансного уровня составляет несколько eV.

Определим сечение радиационного захвата нейтронов ядрами U^{238} в тепловой области, предполагая, что захват обуславливается одним наиболее низко расположенным уровнем U^{238} , энергию которого обозначим через E_0 .

Общая дисперсионная формула [см. (24.18)] приводит к следующему выражению для сечения радиационного захвата $\sigma_{\gamma}^{238}(kT)$:

$$\sigma_{\gamma}^{238}(kT) = \pi \lambda_T^2 \frac{\Gamma_{\gamma} \gamma_n(kT)}{(kT - E_0)^2 + \frac{1}{4} \gamma^2}, \quad (36.1)$$

где $\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{2mkT}}$ — длина волны нейтрона, соответствующая тепловой энергии kT (k — постоянная Больцмана, T — температура); $\gamma_n(kT)$ — значение нейтронной ширины при тепловой энергии; Γ_{γ} — радиационная и γ — полная ширина уровня. Предполагая, что $\gamma \ll E_0$ и пренебрегая в знаменателе (36.1) тепловой энергией kT по сравнению с E_0 , представим сечение захвата $\sigma_{\gamma}^{238}(kT)$ в виде

$$\sigma_{\gamma}^{238}(kT) \approx \pi \lambda_T^2 \frac{\Gamma_{\gamma} \gamma_n(kT)}{E_0^2}. \quad (36.1')$$

Сравним это выражение с усредненным сечением радиационного захвата при энергии kT . Напомним, что усредненное сечение определяется большим числом уровней и,

согласно (27.5') в интересующей нас области энергии выражаются следующей формулой:

$$\bar{\sigma}_{\gamma}^{238}(kT) = \pi^2 \lambda_T^2 \frac{\Gamma_n}{D}, \quad (36.2)$$

где Γ_n — средняя нейтронная ширина при энергии kT ; D — среднее расстояние между соседними уровнями. По порядку величины D равно E_0 ; кроме того, $\Gamma_n \approx \gamma_n(kT)$. Поэтому из (36.1') и (36.2) вытекает соотношение

$$\sigma_{\gamma}^{238}(kT) \approx \bar{\sigma}_{\gamma}^{238}(kT) \frac{\Gamma_{\gamma}}{\pi E_0}. \quad (36.3)$$

Считая, что $\Gamma_{\gamma} \approx 0,1$ eV и $E_0 \approx 10$ eV, получим отсюда:

$$\sigma_{\gamma}^{238}(kT) \approx 0,01 \bar{\sigma}_{\gamma}^{238}(kT). \quad (36.3')$$

Таким образом, в тепловой области сечение радиационного захвата значительно меньше, чем усреднённое сечение захвата.

Рассмотрим теперь сечение деления ядер U^{235} нейтронами в тепловой области. Это сечение, которое мы обозначим через σ_f^{235} , зависит от соотношения между шириной деления Γ_f и средним расстоянием между уровнями D . Если $\Gamma_f \gg D$, то сечение деления совпадает с усреднённым сечением деления $\bar{\sigma}_f^{235}(kT)$, которое, согласно (27.4), можно представить в виде

$$\bar{\sigma}_f^{235}(kT) = \pi^2 \lambda_T^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_f}{\Gamma D}. \quad (36.4)$$

Поскольку в этом случае полная (средняя) ширина практически совпадает с шириной деления Γ_f , то

$$\bar{\sigma}_f^{235}(kT) \approx \pi^2 \lambda_T^2 \frac{\Gamma_n}{D}. \quad (36.4')$$

Величины Γ_n и D относятся к изотопу U^{235} , однако можно думать, что эти величины не слишком отличаются от соответствующих значений для изотопа U^{238} . В таком случае сравнение формул (36.4') и (36.2) показывает, что усреднённое сечение деления $\sigma_f^{235}(kT)$ по порядку величины совпадает с усреднённым сечением радиационного захвата нейтронов ядрами U^{238} (оба сечения относятся к тепловой области).

Итак, если $\Gamma_f \gg D$, то

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx \bar{\sigma}_f^{235}(kT) \approx \bar{\sigma}_f^{238}(kT).$$

Используя (36.3'), мы получим отсюда:

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx 100\sigma_f^{238}(kT). \quad (36.5)$$

Это соотношение показывает, что, несмотря на малую концентрацию изотопа U^{235} ($\sim 10^{-2}$), вероятность деления ядер U^{235} и вероятность радиационного захвата нейтронов ядрами U^{238} становятся сравнимыми в тепловой области. Отсюда следует, что могут быть созданы условия, благоприятные для протекания цепной реакции на медленных нейтронах.

К такому же выводу мы придём и в том случае, когда ширина деления Γ_f меньше среднего расстояния между уровнями. В этом случае сечение деления определяется общей дисперсионной формулой. В тепловой области сечение деления имеет вид

$$\sigma_f^{235}(kT) = \pi \lambda_T^2 \frac{\gamma_n(kT) \Gamma_f}{(kT - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}, \quad (36.6)$$

где E_0 — энергия наиболее низко расположенного уровня ядра U^{235} . В рассматриваемом случае полная ширина уровня γ меньше расстояния между соседними уровнями, которое по порядку величины равно E_0 . Поэтому (36.6) можно заменить следующим приближённым выражением:

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx \pi \lambda_T^2 \frac{\gamma_n(kT) \Gamma_f}{E_0^2}. \quad (36.6')$$

Сравнение (36.1') с (36.6') даёт:

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx \sigma_f^{238}(kT) \frac{\Gamma_f}{\Gamma_f} \quad (36.7)$$

(мы считаем, что энергия наиболее низко расположенного уровня в двух изотопах U имеет одинаковый порядок величины). Если $\Gamma_f \geq 10^2 \Gamma_f$, что, по видимому, имеет место, то

это выражение приводит к такому же результату, что и формула (36.5); а именно, что в тепловой области вероятность деления ядер U^{235} сравнима с вероятностью радиационного захвата нейтронов ядрами U^{238} .

Сформулируем теперь условие, необходимое для протекания цепной реакции на медленных нейтронах.

Обозначим через P вероятность того, что первоначально имевшийся быстрый нейтрон будет захвачен ядром урана с последующим делением. Пусть при одном акте деления возникает в среднем ν быстрых нейтронов. Тогда среднее число нейтронов второго поколения равно:

$$k = P\nu.$$

Эта величина называется коэффициентом размножения системы. Если размеры системы бесконечны, так что отсутствует утечка нейтронов через внешнюю границу системы, то условие протекания саморазвивающейся цепной реакции состоит, очевидно, в том, что величина k должна быть больше единицы. Если $k < 1$, то протекание цепной реакции невозможно.

Выясним, чем определяется вероятность P . Рассмотрим для этого историю жизни нейтрона.

Быстрый нейтрон, появившийся в системе, может быть захвачен ядром урана ещё до того, как его энергия заметно уменьшится из-за столкновений с ядрами. В этом случае нейтрон может вызвать деление ядра U^{233} . Однако вероятность деления быстрыми нейтронами, которую мы обозначим через P_F , очень мала (она составляет всего несколько процентов). Это связано с тем, что энергия нейтрона в результате столкновений с ядрами замедлителя и урана очень быстро становится меньше, чем порог деления ядер U^{238} . Если система содержит много замедлителя и мало урана, то быстрое уменьшение энергии нейтрона происходит из-за упругих соударений нейтрона с ядрами замедлителя. Если же, напротив, в системе много урана и мало замедлителя, то весьма вероятны неупругие столкновения нейтрона с ядрами U^{238} , которые ещё быстрее выводят нейтрон из области энергии, в которой он может производить деление.

Итак, деление вызывается в основном тепловыми нейтронами.

Обозначим вероятность того, что быстрый нейтрон станет тепловым и в дальнейшем вызовет деление, через P_T . Величину P можно представить в виде

$$P = P_F + P_T.$$

Выясним, чем определяется P_T .

В процессе замедления нейтрон может быть резонансно захвачен ядром урана, главным образом, ядром U^{238} . Обозначим через φ вероятность того, что быстрый нейтрон замедлится до тепловой энергии, не будучи резонансно захваченным ядрами U^{238} (величина $1 - \varphi$ представляет собой вероятность резонансного поглощения ядрами U^{238}). Если нейтрон не будет захвачен в процессе замедления, то он достигнет тепловой области и впоследствии будет захвачен либо ядром урана, либо ядром замедлителя.

Пусть θ обозначает вероятность поглощения теплового нейтрона ядром урана (безразлично ядром какого именно изотопа). Если σ_f и σ_γ — эффективные сечения деления и резонансного захвата тепловых нейтронов, отнесённые к одному ядру смеси изотопов, то $\frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_\gamma}$ будет относительной вероятностью того, что тепловой нейтрон, поглощённый ядром урана, вызовет его деление. Поэтому величина

$$\theta_f = \theta \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_\gamma}$$

определяет вероятность того, что тепловой нейтрон вызовет деление. Ясно, что искомая величина P_T равна

$$P_T = \varphi \theta_f = \varphi \theta \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_\gamma},$$

и, следовательно, коэффициент размножения нейтронов может быть представлен в виде

$$k = P\nu = P_F\nu + \nu\varphi\theta \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_\gamma}. \quad (36.8)$$

Условие протекания саморазвивающейся цепной реакции в бесконечной системе состоит в выполнении неравенства $k > 1$ [94].

Изложенные до сих пор соображения относились к бесконечным системам. Если размеры системы конечны, то для протекания саморазвивающейся цепной реакции, помимо условий, относящихся к бесконечной системе, необходимо выполнение ещё одного условия: размеры системы должны превосходить некоторые минимальные, так называемые критические, размеры. Существование критических размеров связано с вылетом нейтронов из системы в окружающее пространство.

Если размеры системы слишком малы, то потеря нейтронов, обусловленная их диффузией в окружающее пространство, превосходит число нейтронов, рождающихся в системе в результате деления ядер. Так как вылет нейтронов из системы представляет собой поверхностный эффект, а рождение нейтронов в системе есть эффект объёмный, то с увеличением размеров системы первый из этих эффектов становится всё менее и менее существенным. Критические размеры характеризуются тем, что потеря нейтронов, обусловленная их вылетом из системы, как раз компенсируется возникновением нейтронов в системе.

Возвращаясь к рассмотрению свойств бесконечных систем, необходимо отметить, что условие $k > 1$ может не выполняться для однородной смеси замедлителя и делящегося вещества, однако будет выполняться для неоднородной системы, состоящей из отдельных блоков делящегося вещества, расположенных в замедлителе. Такая неоднородная система, в которой делящееся вещество распределено в виде блоковой решётки, включённой в замедлитель, может состоять, например, из стержней урана, упорядоченно расположенных в замедлителе (графите, тяжёлой воде и т. д.).

Выгодность неоднородной системы связана с уменьшением резонансного поглотения при расположении делящегося вещества в виде отдельных блоков. Это видно из следующих соображений. В однородной системе нейтроны в процессе замедления всё время находятся в окружении ядер U^{238} , могущих их поглощать. В блоковой системе у нейтрона имеется возможность проскочить «опасную» зону вблизи уровня резонансного поглощения, находясь вдали от блока; иными словами, нейтрон может замедлиться до тепловой энергии с вероятностью, большей чем в однородной системе. Таким образом, радиационный захват нейтронов в блоковой

системе может быть сильно уменьшен по сравнению с однородной системой.

Другая причина, в силу которой в блоковой системе уменьшается резонансное поглощение, состоит в том, что внутренние части блоков в области сильного резонансного поглощения экранируются наружными слоями и поэтому «используются» неэффективно. Это экранирование приводит к тому, что радиационное поглощение нейтрона с энергией, близкой к резонансной, ядром урана, находящимся внутри блока, будет значительно меньше поглощения отдельным, свободным ядром.

Следует иметь в виду, что вместе с уменьшением резонансного поглощения имеет место также и уменьшение поглощения нейтронов в тепловой области. Однако эффект уменьшения резонансного поглощения оказывается более значительным, чем эффект уменьшения поглощения нейтронов в тепловой области.

Введённые выше величины φ и θ в случае однородной системы являются функциями концентраций делящегося вещества и замедлителя. В блоковой системе эти величины зависят от размеров блоков и расстояний между ними.

Наивыгоднейшие условия протекания цепной реакции реализуются в том случае, когда величина $\varphi\theta$ достигает максимума. Существование такого максимума видно из следующих соображений. Увеличение θ , т. е. вероятности поглощения теплового нейтрона ядрами делящегося вещества, связано с увеличением концентрации делящегося вещества, например урана, и уменьшением концентрации замедлителя. Наоборот, увеличение φ , т. е. вероятности того, что нейтрон станет тепловым, не будучи резонансно захваченным, связано с уменьшением концентрации урана. Отсюда следует, что произведение $\varphi\theta$ достигает максимума при определённой оптимальной концентрации урана.

В блоковой системе $\varphi\theta$ зависит ещё от размеров и расположения блоков урана. При некоторых значениях параметров блоковой решётки величина $\varphi\theta$ достигает максимума; эти значения параметров являются, очевидно, оптимальными.

Приведём значения вероятностей для различных процессов, происходящих с нейтроном в уран-графитовой блоковой системе [95].

Тип процесса	Вероятность в %
Деление, обусловленное быстрым нейтроном . . .	3
Резонансное поглощение U^{238} (вне тепловой области)	10
Поглощение в графите	10
Поглощение теплового нейтрона U^{235} и U^{238}	77

Плотность нейтронов с определённой энергией в блоковой системе, состоящей из большого числа ячеек, изменяется от точки к точке вдоль решётки. Для описания свойств неоднородной системы можно, однако, в первом приближении не рассматривать локальных изменений нейтронной плотности, связанных с периодической структурой системы*). Иными словами, в первом приближении мы заменяем истинные нейтронные плотности их средними значениями, которые получаются при усреднении плотности по объёму ячейки (ячейка представляет собой урановый блок вместе с прилегающей к нему частью замедлителя). Такая усреднённая плотность будет плавной функцией точки, как если бы система была однородной. Таким образом, мы заменяем неоднородную блоковую систему некоторой эквивалентной однородной системой.

Рассмотрим плотность тепловых нейтронов в точке $\mathbf{r}(x, y, z)$ в момент времени t , которую мы обозначим через $n(\mathbf{r}, t)$. Эта функция удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n - \frac{1}{\tau_c} n + q, \quad (36.9)$$

где D — коэффициент диффузии тепловых нейтронов, τ_c — время их жизни по отношению к захвату и q — плотность источников тепловых нейтронов.

Будем рассматривать далее стационарный случай и положим поэтому $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$.

Определим плотность источников тепловых нейтронов q . Обозначим через $Q(\mathbf{r})$ число быстрых нейтронов, возникающих в единицу времени в единице объёма около точки \mathbf{r}

*) Мы следуем ниже [96].

внутри нашей системы. Сталкиваясь при своём движении с ядрами замедлителя, эти нейтроны замедляются, но в ходе замедления часть их резонансно поглощается и не доходит до тепловой области. Мы обозначим через φ вероятность того, что быстрый нейтрон превратится в тепловой, не будучи резонансно захваченным. Замедление быстрого нейтрона, родившегося в точке \mathbf{r}' , может окончиться в различных точках \mathbf{r} . Как было показано в § 33, вероятность того, что нейтрон станет тепловым в точке \mathbf{r} , выражается гауссовой функцией от расстояния $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Иными словами, вероятность быстрому нейтрону, родившемуся в элементе объёма dV' около точки \mathbf{r}' , стать тепловым в точке \mathbf{r} имеет вид

$$\frac{\varphi}{\pi^{3/2} r_0^3} e^{-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{r_0^2}} dV', \quad (36.10)$$

где r_0^2 — средний квадрат длины замедления нейтронов (будучи проинтегрированным по dV' (36.10), даёт φ , как и должно быть).

Умножив эту вероятность на $Q(\mathbf{r}')$ и проинтегрировав по dV' , найдём плотность источников тепловых нейтронов, т. е. функцию $q(\mathbf{r})$:

$$q(\mathbf{r}) = \frac{\varphi}{\pi^{3/2} r_0^3} \int Q(\mathbf{r}') e^{-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{r_0^2}} dV'. \quad (36.11)$$

Заметим теперь, что быстрые нейтроны возникают в результате делений ядер, вызываемых главным образом тепловыми нейтронами. Иными словами, $Q(\mathbf{r})$ может быть выражено через плотность тепловых нейтронов $n(\mathbf{r})$.

Число тепловых нейтронов, поглощаемых в единицу времени в единице объёма, равно $\frac{1}{\tau_c} n(\mathbf{r})$. Умножив эту величину на θ_f , мы найдём число нейтронов, поглощаемых в единицу времени ураном и вызывающих при этом деление его ядер. Так как в одном акте деления возникает в среднем ν нейтронов, то число быстрых нейтронов, рождающихся в единицу времени в единице объёма, равняется

$$\frac{\nu \theta_f}{\tau_c} n(\mathbf{r}).$$

Если имеется ещё внешний источник быстрых нейтронов, дающий $Q_0(\mathbf{r})$ нейтронов в единицу времени в единице объёма, то искомая функция $Q(\mathbf{r})$ представится в виде

$$Q(\mathbf{r}) = Q_0(\mathbf{r}) + \frac{\nu\theta_f}{\tau_c} n(\mathbf{r}). \quad (36.12)$$

Обычно, однако, $Q_0 = 0$.

Подставив (36.12) в (36.11), мы выразим плотность источников тепловых нейтронов $q(\mathbf{r})$ через плотность тепловых нейтронов $n(\mathbf{r})$. Подставив далее полученное выражение для $q(\mathbf{r})$ в формулу (36.9), получим следующее интегро-дифференциальное уравнение для определения плотности тепловых нейтронов:

$$\begin{aligned} D \Delta n - \frac{1}{\tau_c} n + \frac{\nu\theta_f \varphi}{\pi^{3/2} r_0^3 \tau_c} \int n(\mathbf{r}') e^{-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{r_0^2}} dV' = \\ = - \frac{\varphi}{\pi^{3/2} r_0^3} \int Q_0(\mathbf{r}') e^{-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{r_0^2}} dV'. \end{aligned} \quad (36.13)$$

Решение этого уравнения можно найти, разлагая $Q_0(\mathbf{r})$ и $n(\mathbf{r})$ в ряды Фурье.

Если система граничит с вакуумом и её размеры велики по сравнению с длиной свободного пробега нейтронов, то граничное условие задачи заключается в равенстве нулю плотности нейтронов на внешней поверхности системы (см. в связи с этим следующий параграф).

Рассмотрим случай, когда система имеет форму куба, ребро которого равно a . Компоненты Фурье функции $Q_0(\mathbf{r})$ имеют вид

$$Q_0 \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n_2 \pi}{a} y \cdot \sin \frac{n_3 \pi}{a} z$$

(начало координат — в одной из вершин куба; n_1, n_2, n_3 — положительные целые числа).

Легко убедиться в том, что этой компоненте Фурье $Q_0(\mathbf{r})$ соответствует следующая компонента Фурье функции $n(\mathbf{r})$:

$$n = \tau_c \varphi Q_0 \frac{\sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n_2 \pi}{a} y \cdot \sin \frac{n_3 \pi}{a} z}{(1 + D\tau_c \omega^2) e^{\omega^2 r_0^2/4} - \nu \theta_f \varphi}, \quad (36.14)$$

где

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

Критические размеры могут быть найдены из условия обращения в нуль знаменателя (36.14) для основной гармонике, т. е. при $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Действительно, в этом случае нейтронная плотность обращается в бесконечность и, следовательно, она будет отлична от нуля в отсутствие внешнего источника, когда $Q_0 = 0$.

Итак, для определения критических размеров мы получаем уравнение

$$\left(1 + \frac{3\pi^2}{a^2} D\tau_c\right) e^{\frac{3\pi^2 r_0^2}{4a^2}} = \nu \theta_f \varphi. \quad (36.15)$$

Обычно $a \gg r_0$, поэтому экспоненциальный множитель может быть заменён на $1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2 r_0^2}{a^2}$. Уравнение (36.15) приводит к следующему значению критического ребра куба:

$$a = \frac{\pi \sqrt{3 \left(D\tau_c + \frac{1}{4} r_0^2 \right)}}{\sqrt{k-1}}, \quad (36.16)$$

где k — коэффициент размножения, равный в рассматриваемом случае $\nu \theta_f \varphi$ (учитывая деление на быстрых нейтронах, сюда следует вместо k подставить $\nu P_F + \nu \theta_f \varphi$).

Мы видим, что критические размеры системы (линейные) обратно пропорциональны $(k-1)^{1/2}$.

Зависимость критических размеров систем произвольной формы от коэффициента размножения может быть получена из следующих элементарных соображений. Пусть объём системы равен V , тогда прирост общего количества нейтронов во всей системе в единицу времени равняется $\frac{V}{\tau_c} (k-1) \bar{n}$,

где \bar{n} — среднее значение плотности нейтронов. Приравняем эту величину диффузионному потоку нейтронов через поверхность системы, равному $DS \frac{\partial \bar{n}}{\partial \nu}$, где S — площадь поверхности системы, $\frac{\partial \bar{n}}{\partial \nu}$ — среднее значение нормальной производной от плотности нейтронов и D — коэффициент диффузии нейтронов. Полагая $V = a^3$, $S = \alpha a^2$ и $\frac{\partial \bar{n}}{\partial \nu} = \gamma' \frac{\bar{n}}{a}$, где α и γ' — безразмерные коэффициенты порядка единицы, зависящие от формы системы, получим:

$$a = \frac{V \gamma D \tau_e}{\sqrt{k-1}},$$

где $\gamma = \alpha \gamma'$. Это соотношение показывает, что независимо от формы мультиплицирующей системы её критические размеры обратно пропорциональны $(k-1)^{1/2}$.

Заметим, что критические размеры могут быть уменьшены, если окружить систему слоем так называемой нейтронной изоляции, которая частично отражает обратно нейтроны, покинувшие систему.

§ 37. Пример определения критических размеров при реакции на быстрых нейтронах

Если цепная реакция происходит без участия тепловых нейтронов, то критические размеры могут оказаться сравнимыми с длиной свободного пробега нейтронов. Это связано с двумя обстоятельствами: во-первых, при реакции на быстрых нейтронах нет необходимости замедлять нейтроны и, во-вторых, величина коэффициента размножения может быть при этом гораздо больше, чем для систем, в которых используются медленные нейтроны.

В том случае, когда размеры системы велики по сравнению с длиной свободного пробега нейтронов, можно пользоваться диффузионной теорией; плотность нейтронов удовлетворяет при этом диффузионному уравнению (§§ 33, 36).

Если размеры системы сравнимы с длиной свободного пробега, то диффузионная теория неприменима. В этом случае следует исходить из точного кинетического уравнения.

Исследование этого уравнения представляет собой очень сложную задачу. Мы ограничимся поэтому здесь только полукачественным рассмотрением [96], основанным на некоторых упрощающих предположениях. Именно, мы предположим, что все рождающиеся нейтроны имеют одинаковую энергию и что отсутствует неупругое рассеяние нейтронов; кроме того, мы будем предполагать, что упругое рассеяние нейтронов является сферически симметричным. Ради простоты будем считать, что нейтронная изоляция отсутствует.

При выполнении этих предположений вместо функции распределения, зависящей как от координат, так и от компонент скорости нейтрона, для описания нейтронного поля можно пользоваться обычной плотностью нейтронов, которую мы обозначим через $n(x, y, z, t)$ (x, y, z — координаты точки, t — момент времени).

Общее число рассеянных и родившихся вторичных нейтронов в элементе объема $dx' dy' dz'$ за время dt' равно, очевидно,

$$\beta v n(x', y', z', t') dx' dy' dz' dt',$$

где v — скорость нейтронов, $\beta = N(\sigma_s + v\sigma_f)$ (N — число ядер в единице объема σ_s и σ_f — сечения рассеяния и деления, v — среднее число нейтронов, возникающее при одном акте деления ядра).

Будем следить за движением этих нейтронов. На расстоянии r от точки (x', y', z') их число уменьшится в e^{-ar} раз и они будут равномерно заполнять сферический слой радиуса r и толщины $v dt'$ $\left[a \equiv \frac{1}{l} = N(\sigma_f + \sigma_\gamma + \sigma_s), l \right.$ — длина свободного пробега нейтронов, σ_γ — сечение их радиационного захвата $\left. \right]$. Плотность этих нейтронов в точке (x, y, z) рассматриваемого слоя в момент времени $t' = t - \frac{r}{v}$ равна

$$\frac{\beta}{4\pi r^2} n(x', y', z', t') e^{-ar} dx' dy' dz', \quad t' = t - \frac{r}{v}.$$

Проинтегрировав это выражение по $dx' dy' dz'$, мы получим, очевидно, плотность нейтронов в точке (x, y, z) в момент t , т. е. величину $n(x, y, z, t)$. Итак,

$$n(x, y, z, t) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z', t - \frac{r}{v}) \frac{e^{-ar}}{r^2} dx' dy' dz', \quad (37.1)$$

где интегрирование совершается по объёму всего мультиплицирующего тела.

Мы получили интегральное уравнение для плотности нейтронов n , которое при сделанных выше предположениях заменяет общее кинетическое уравнение.

Перейдём к исследованию этого уравнения. Будем искать решение (37.1) в виде

$$n(x, y, z, t) = n(x, y, z) e^{\lambda t}. \quad (37.2)$$

Развитию цепной реакции отвечают, очевидно, значения $\lambda > 0$. Уравнение (37.1) после подстановки в него (37.2) приобретает вид

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') e^{-(\alpha + \frac{\lambda}{v})r} \frac{dx' dy' dz'}{r^2}. \quad (37.3)$$

Если размеры системы являются критическими, то $\lambda = 0$. Определение критических размеров сводится поэтому к следующей математической задаче. Требуется выяснить, при каких условиях уравнение

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') e^{-\alpha r} \frac{dx' dy' dz'}{r^2} \quad (37.3')$$

имеет нетривиальные решения.

Заметим, что, найдя решение уравнения (37.3'), мы тем самым найдём решение общего уравнения (37.3), стоит лишь вместо α подставить $\alpha + \frac{\lambda}{v}$.

Сформулируем прежде всего условие протекания саморазвивающейся цепной реакции. Для протекания реакции необходимо, очевидно, чтобы на единице длины пути нейтрона число появляющихся новых нейтронов превосходило число поглощаемых нейтронов.

Первое из этих чисел равно $N\sigma_{p\nu}$, а второе — $N\sigma_c$, где σ_c — сечение поглощения нейтрона, равное $\sigma_f + \sigma_r$. Итак, для протекания цепной реакции необходимо выполнение условия

$$N\sigma_{p\nu} > N\sigma_c$$

или

$$(\nu - 1)\sigma_f > \sigma_r. \quad (37.4)$$

Если воспользоваться введёнными выше величинами α и β , то это условие может быть представлено в виде

$$\beta > \alpha. \quad (37.4')$$

Мы рассмотрим далее два предельных случая, когда $\beta - \alpha \ll \beta$ и когда $\beta \gg \alpha$.

Если $\beta - \alpha \ll \beta$, то требуется много столкновений для существенного возрастания числа нейтронов. Поэтому в этом случае возможно диффузионное рассмотрение задачи (см. предыдущий параграф). Плотность нейтронов при выполнении условия $\beta - \alpha \ll \beta$ испытывает малое изменение на расстояниях порядка длины свободного пробега. Поэтому функцию $n(x', y', z')$ в интеграле (37.3') можно разложить в ряд по степеням $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ и сохранить в нём члены не выше второго порядка. Вдали от границы члены первого порядка при интегрировании по $dx' dy' dz'$ дают нуль и мы приходим к диффузионному уравнению

$$\frac{\beta}{3\alpha^3} \Delta n + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)n = 0. \quad (37.5)$$

Легко убедиться в том, что коэффициенты, стоящие в (37.5) перед Δn и n , имеют обычный для диффузионного уравнения вид. Действительно, умножив уравнение (37.5) на v и воспользовавшись определением величин α и β , можно представить это уравнение в виде

$$\frac{l v}{3} \Delta n + \frac{v}{l_c} (v\theta - 1) n = 0, \quad (37.5')$$

где l — длина свободного пробега нейтрона как по отношению к рассеянию, так и по отношению к захвату, $l_c = (N\sigma_c)^{-1}$ — длина свободного пробега по отношению к захвату и $\theta = \sigma_f/\sigma_c$. Величина $lv/3$ представляет собой коэффициент диффузии нейтронов, а l_c/v — время жизни нейтрона по отношению к захвату. Член $(v/l_c)n$ даёт число нейтронов, поглощаемых в единицу времени в единице объёма, а $(v/l_c)v\theta n$ — число нейтронов, рождающихся в единицу времени в единице объёма.

Для решения уравнения (37.5) нужно знать граничное условие на внешней поверхности мультиплицирующей системы. Можно показать [97], что для систем, размеры которых велики

по сравнению с длиной свободного пробега нейтронов, это условие имеет вид

$$0,71l \frac{\partial n}{\partial x} + n = 0, \quad (37.6)$$

где x — направление внешней нормали к поверхности тела. Для больших систем $\frac{\partial n}{\partial x} \sim \frac{n}{R}$, где R по порядку величины характеризует линейные размеры системы. Поэтому отношение первого члена ко второму в (37.6) по порядку величины равно $\frac{l}{R} \ll 1$. Таким образом, для больших систем граничное условие может быть в первом приближении сформулировано в виде требования, чтобы нейтронная плотность обращалась в нуль на внешней поверхности системы

$$n = 0. \quad (37.6')$$

В рассматриваемом нами случае малых мультипликаций, когда $\beta - \alpha \ll \beta$, размеры системы значительно больше длины свободного пробега, поэтому в первом приближении мы будем пользоваться условием (37.6').

Возвращаясь к уравнению (37.5), найдём его решение в случае мультиплицирующей сферы. Сферически симметричное решение (37.5) имеет вид

$$n(r) = \text{const.} \frac{\sin pr}{r}, \quad (37.7)$$

где r — расстояние до центра сферы и

$$p = \sqrt{3\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}.$$

Если исходить из граничного условия (37.6'), то критический радиус R_0 найдётся из уравнения $\sin pR_0 = 0$, откуда *)

$$R_0 = \frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{3 \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}} = \frac{\pi \sqrt{\frac{1}{3} u_c}}{\sqrt{v\theta - 1}} = \frac{\pi \sqrt{D\tau_c}}{\sqrt{k-1}}, \quad (37.8)$$

*) Плотность нейтронов является существенно-положительной величиной, поэтому мы должны взять наименьший (не считая нуля) корень уравнения $\sin x = 0$.

где $D = \frac{1}{3} l v$ — коэффициент диффузии нейтронов, $\tau_c = l_c/v$ — время жизни нейтрона по отношению к захвату, $k = v\theta$ — коэффициент размножения нейтронов.

Так как по условию $1 - \frac{\alpha}{\beta} \ll 1$, то из (37.8) следует, что критический радиус значительно больше длины пробега l , как это и утверждалось выше.

Заметим, что формула (37.8) совпадает с формулой (36.16) для критических размеров куба, если считать в последней длину замедления нейтронов r_0 равной нулю и отвлечься от множителя $\sqrt{3}$, связанного с другой геометрией задачи. Это обстоятельство является следствием того, что в обоих случаях мы пользовались диффузионным рассмотрением, справедливым при малых мультипликациях.

Использование точного граничного условия (37.6) приводит к следующему уравнению для определения величины R_0 :

$$pR_0 \operatorname{ctg} pR_0 = 1 - \frac{\alpha R_0}{0,71}. \quad (37.9)$$

Обозначая $1 - \frac{\alpha}{\beta}$ через ξ^2 и пренебрегая при малых ξ степенями ξ выше второй, получим:

$$\frac{1}{pR_0} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \xi + 0,71 \frac{3}{\pi^2} \xi^2 = 0,55\xi + 0,22\xi^2. \quad (37.10)$$

Рассмотрим теперь другой предельный случай — случай больших мультипликаций, когда $\beta \gg \alpha$.

Заметим, что этот случай практически не осуществляется, так как для выполнения условия $\beta \gg \alpha$ необходимо, чтобы v было значительно больше единицы. Тем не менее рассмотрение этого случая представляет интерес, так как при этом получаются критические размеры, значительно меньшие, чем длина свободного пробега l . Зная зависимость критического радиуса от эффективных сечений в двух предельных случаях $R_0 \gg l$ и $R_0 \ll l$ можно путём интерполирования находить R_0 в промежуточной области ($R_0 \approx l$), для которой непосредственное вычисление критических размеров очень затруднительно.

При выполнении условия $\beta \gg \alpha$ можно пренебречь показателем в множителе $e^{-\alpha r}$, входящем в интегральное уравнение (37.1), так как оказывается, что радиус сферы в рассматриваемом случае значительно меньше длины свободного пробега. Поэтому при $\beta \gg \alpha$ мы получаем из (37.3') уравнение

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') \frac{dx' dy' dz'}{r^2}, \quad (37.11)$$

где

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Будем предполагать, что плотность нейтронов n зависит только от расстояния ρ до центра сферы. В этом случае легко выполнить интегрирование по углам в уравнении (37.11). В результате мы получим:

$$n(\rho) = \frac{\beta}{2} \int_0^R \frac{\rho'}{\rho} n(\rho') \ln \frac{\rho + \rho'}{|\rho - \rho'|} d\rho', \quad (37.11')$$

где R — радиус сферы.

Вводя вместо $n(\rho)$ функцию $f(\rho) = \rho n(\rho)$ и обозначая ρ/R через x , перепишем (37.11') в виде

$$\frac{2}{\beta R} f(x) = \int_0^1 f(x') \ln \frac{x + x'}{|x - x'|} dx', \quad f(0) = 0 \quad (37.12)$$

или иначе:

$$\lambda f = Lf, \quad f(0) = 0, \quad (37.12')$$

где $\lambda = 2/\beta R$ и L — интегральный оператор, входящий в (37.12).

Мы получили интегральное уравнение с положительным симметричным ядром. Нас интересует наибольшее собственное значение λ_0 этого уравнения. Чтобы приблизительно вычислить λ_0 , будем исходить из следующего свойства наибольшего собственного значения. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, не принимающая отрицательных значений и отличающаяся тем свойством, что отношение Lf/f ограничено. Тогда, если Lf/f заключено в пределах Δ_1 и Δ_2 :

$$\Delta_1 < \frac{Lf}{f} < \Delta_2,$$

то в этих же пределах находится также наибольшее собственное значение λ_0 *):

$$\Lambda_1 < \lambda_0 < \Lambda_2$$

Отсюда следует, что если нам удастся подобрать такую функцию $f(x)$ (не принимающую отрицательных значений), для которой величины Λ_1 и Λ_2 будут мало отличаться друг от друга, то тем самым мы найдём с большой степенью точности λ_0 .

В качестве $f(x)$ мы возьмём функцию

$$f(x) = x - bx^3, \quad (37.13)$$

*) В этом легко убедиться следующим образом. Если $\varphi_0(x)$ есть собственная функция оператора L , соответствующая наибольшему собственному числу λ_0

$$L\varphi_0(x) = \lambda_0\varphi_0(x), \quad (*)$$

то интеграл

$$\int_0^1 f(x) \varphi_0(x) dx \quad (**)$$

не может быть равен нулю, поскольку подинтегральная функция не изменяет своего знака. Действительно, функция $f(x)$ по условию принимает только положительные значения, а $\varphi_0(x)$ как собственная функция соответствующая наибольшему собственному числу, ни в одной точке не обращается в нуль и, следовательно, не изменяет своего знака.

Разложим функцию $f(x)$ в ряд по собственным функциям оператора L (расположенным в порядке убывания собственных чисел):

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \varphi_j(x). \quad (***)$$

В силу неравенства нуля интеграла (**) коэффициент C_0 не может быть равен нулю

$$C_0 \neq 0.$$

Применяя к обеим частям равенства (***) n раз оператор L , получим:

$$L^n f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \lambda_j^n \varphi_j(x),$$

откуда

$$\frac{L^n f(x)}{\lambda_0^n} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_0} \right)^n \varphi_j(x).$$

Если n устремить к бесконечности, то в правой части последнего

где b — постоянная, которую мы надлежащим образом подберём. Легко видеть, что

$$Lf = \frac{1}{2} (1 - x^2) \ln \frac{1+x}{|1-x|} + x - b \left\{ \frac{1}{4} (1 - x^2) \ln \frac{1+x}{|1-x|} + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{6} x \right\}.$$

Если $b = 0$, то Lf/f изменяется от 1 до 2, причём эти значения достигаются в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Подберём b таким образом, чтобы на границах интервала $(0, 1)$ функция $f(x)$ принимала одинаковые значения. Для этого должно быть $b = 0,634$. Оказывается, что если взять функцию (37.13) с этим значением b , то $\Delta_1 = 1,55$, $\Delta_2 = 1,59$. Отсюда следует, что

$$\lambda_0 = 1,57 \pm 0,02.$$

равенства все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^n f(x)}{\lambda_0^n} = C_0 \varphi_0(x). \quad (****)$$

С другой стороны, условие $\Delta_1 < \frac{Lf}{f} < \Delta_2$ можно переписать в виде

$$\Delta_1 f < Lf < \Delta_2 f.$$

Применяя к этому неравенству оператор L k раз, получаем:

$$\Delta_1 L^k f < L^{k+1} f < \Delta_2 L^k f.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\Delta_1 > 0$, поэтому

$$\Delta_1 < \frac{L^{k+1} f}{L^k f} < \Delta_2$$

и, следовательно,

$$\Delta_1^k < \frac{L^k f}{f} < \Delta_2^k.$$

В частности,

$$\frac{\Delta_1^n}{\lambda_0^n} f < \frac{L^n f}{\lambda_0^n} < \frac{\Delta_2^n}{\lambda_0^n} f.$$

Отсюда и из (****) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta_1}{\lambda_0} \right)^n f < C_0 \varphi_0(x) < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta_2}{\lambda_0} \right)^n f;$$

эти неравенства возможны только в том случае, если

$$\Delta_1 < \lambda_0 < \Delta_2,$$

что и требовалось доказать.

Итак, при $\beta \gg \alpha$ критический радиус R равен

$$R_0 \approx \frac{2}{1,57\beta} = \frac{1}{0,78\beta}. \quad (37.14)$$

Этот результат мы получили, считая α равным нулю. Чтобы найти поправку, учитывающую конечность α , заменим в (37.3') экспоненциальный фактор $e^{-\alpha r}$ на $1 - \alpha r$. Мы получим тогда вместо уравнения (37.12') уравнение

$$\lambda f = Lf - Mf, \quad (37.15)$$

где оператор L имеет прежнее значение, а Mf равняется

$$Mf = \alpha R \int_0^1 f(x') \{ |x + x'| - |x - x'| \} dx'.$$

Рассматривая в (37.15) Mf как малое возмущение, легко определить поправку в собственном значении λ , линейную относительно α . Она имеет следующий вид:

$$\delta\lambda = - \frac{\int f M f dx}{\int f^2 dx},$$

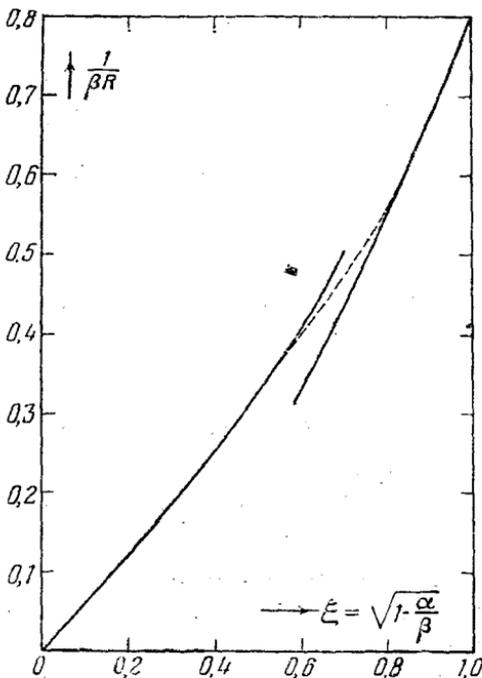


Рис. 20.

где в качестве f мы подставим (37.13) с $b = 0,634$.

Таким образом, мы получим:

$$\frac{1}{\beta R} = 0,78 - 0,39\alpha R.$$

Подставляя в правую часть этого соотношения вместо R значение, даваемое (37.14), получим:

$$\frac{1}{\beta R} = 0,78 - 1,02(1 - \xi), \quad \xi = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\beta}}. \quad (37.16)$$

Мы видим, что в случае больших мультипликаций $\beta \gg \alpha$ критические размеры оказываются значительно меньшими, чем длина свободного пробега нейтронов $l = \frac{1}{\alpha}$.

Мы рассмотрели предельные случаи больших и малых мультипликаций. Для промежуточных значений отношения β/α критические размеры могут быть найдены путём численного решения интегрального уравнения (37.3'). Для приближённого определения критических размеров можно воспользоваться интерполяционной кривой (рис. 20), дающей зависимость $\frac{1}{\beta R}$ от $\xi = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$ (участки кривой, для которых $\xi \ll 1$ и $\xi \sim 1$, строятся на основании полученных выше результатов).

ГЛАВА VI

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ С ВЕЩЕСТВОМ

§ 38. Захват медленных нейтронов в кристаллах

В предыдущих главах мы изучали различные процессы взаимодействия частиц со свободными изолированными ядрами. Однако при изучении взаимодействия частиц с веществом ядра, вообще говоря, нельзя рассматривать как свободные. Учёт связи между атомами особенно необходим для тех процессов, в которых участвуют медленные частицы, в частности, медленные нейтроны. Благодаря этой связи возникают интерференционные явления при упругом и неупругом рассеянии медленных нейтронов в кристаллах; в ряде случаев связь оказывает существенное влияние на радиационный захват медленных нейтронов в кристаллах.

В этой главе мы будем рассматривать главным образом взаимодействие медленных нейтронов с кристаллами и выясним, к каким эффектам приводит связь между атомами кристалла.

Атомы кристалла совершают малые колебания около положений равновесия, образующих правильную периодическую решётку. При изучении различных процессов рассеяния и захвата нейтронов мы должны будем учитывать как эту периодическую структуру кристалла, так и колебательное движение атомов. Колебательное состояние кристалла мы будем определять заданием чисел колебательных квантов-фононов с различными частотами, волновыми векторами и состояниями поляризации и обозначать через $\{n_s\}$, где n_s — число фононов s -сорта.

Начнём с изучения радиационного захвата медленных нейтронов в кристаллах [98]. Нас интересует вероятность $\omega(E)$ захвата нейтрона с энергией E ядром типа A , занимающим определённое положение в кристаллической решётке. В результате захвата излучается γ -квант с импульсом \mathbf{k} , а решётка переходит из состояния $\{n_s^0\}$ в состояние $\{n_s\}$. Для краткости будем обозначать в дальнейшем начальное и конечное состояния всей системы (включающей нейтрон, решётку, ядро и γ -квант) соответственно символами $\mathbf{p} \{n_s^0\} A$ и $\mathbf{k} \{n_s\} B$ (B обозначает конечное состояние ядра, \mathbf{p} — импульс нейтрона).

Достижению конечного состояния предшествует образование составного ядра, состояние которого мы обозначим через C . Можно сказать, что конечное состояние достигается через промежуточное состояние, в котором нет ни нейтрона, ни γ -кванта. Это промежуточное состояние характеризуется, помимо состояния составного ядра C , некоторым состоянием решётки $\{n_s'\}$. Будем предполагать, что захват нейтрона обусловливается одним резонансным уровнем с энергией E_0 .

На языке теории возмущений интересующая нас задача представляет собой эффект второго порядка. Пользуясь известными формулами [33], можно представить искомую вероятность $\omega(E)$ в следующем виде:

$$\omega(E) = \sum_{\{n_s\}} \left| \sum_{\{n_s'\}} \frac{(\mathbf{p} \{n_s^0\} A | H | \{n_s'\} C) (\{n_s'\} C | H | \mathbf{k} \{n_s\} B)}{E - E_0 + \sum_s \hbar \omega_s (n_s^0 - n_s') - \frac{i}{2} \Gamma(\{n_s'\})} \right|^2, \quad (38.1)$$

где $(\mathbf{p} \{n_s^0\} A | H | \{n_s'\} C)$ — соответствующим образом нормированный матричный элемент перехода из начального состояния $\mathbf{p} \{n_s^0\} A$ в промежуточное состояние, которое мы обозначим через $\{n_s'\} C$, $(\{n_s'\} C | H | \mathbf{k} \{n_s\} B)$ — матричный элемент перехода из промежуточного в конечное состояние $\mathbf{k} \{n_s\} B$ и, наконец, $\Gamma(\{n_s'\})$ — ширина состояния $C \{n_s'\}$.

В выражении (38.1) амплитуда вероятности суммируется по всем возможным наборам чисел фононов n_1, n_2, n_3, \dots в промежуточном состоянии; квадрат модуля амплитуды вероятности суммируется по наборам чисел фононов в конечном

состоянии, а черта над суммой означает, что результат усредняется по возможным начальным состояниям решётки.

Поскольку рассматривается захват медленных нейтронов, полная ширина $\Gamma(\{n'_s\})$ определяется главным образом радиационной шириной, которую можно считать практически не зависящей от состояния решётки. Поэтому в дальнейшем мы пренебрегаем зависимостью $\Gamma(\{n'_s\})$ от состояния решётки и пишем вместо $\Gamma(\{n'_s\})$ просто Γ .

Перейдём к определению матричных элементов, входящих в (38.1).

Обозначим через \mathbf{r}_A^0 радиус-вектор, определяющий положение равновесия ядра A . Смещение ядра A из положения равновесия, обусловленное тепловыми колебаниями решётки, можно представить в виде

$$\mathbf{u}_A = \sum_s \mathbf{e}_s \left(\xi_s e^{\frac{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}_A^0}{\hbar}} + \xi_s^* e^{-\frac{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}_A^0}{\hbar}} \right),$$

где $s \equiv \mathbf{f}j$ служит для обозначения колебания, частота и волновой вектор которого равны $\omega_s \equiv \omega_{\mathbf{f}j}$ и \mathbf{f}/\hbar и характер поляризации которого определяется индексом j ($j = 1, 2, 3$); ξ_s и ξ_s^* — амплитуда колебания и комплексно сопряжённая ей величина, \mathbf{e}_s — единичный вектор в направлении колебаний.

Волновая функция, описывающая колебательное состояние кристалла, имеет вид

$$\prod_s \varphi_{n_s}(\xi_s),$$

где $n_s \equiv n_{\mathbf{f}j}$ — число фононов сорта s , $\varphi_{n_s}(\xi_s)$ — волновая функция гармонического осциллятора с энергией $\hbar\omega_s(n_s + \frac{1}{2})$.

Заметим, что единственные матричные элементы ξ и ξ^* , отличные от нуля, равны

$$\left. \begin{aligned} \xi_{n_s, n_s+1} &= \sqrt{\frac{\hbar(n_s+1)}{2MN\omega_s}} e^{-i\omega_s t}, \\ \xi_{n_s, n_s-1}^* &= \sqrt{\frac{\hbar n_s}{2MN\omega_s}} e^{i\omega_s t}, \end{aligned} \right\} \quad (38.2)$$

где M — масса ядра, N — число ядер в кристалле.

Матричный элемент перехода из начального в промежуточное состояние имеет вид

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{p} \{n_s^0\} A | H | \{n_s'\} C) &= \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r}} \psi_A(i_A) \prod_s \varphi_{n_s^0}(\xi_s) H \psi_C^*(i_C) \times \\
 &\quad \times \prod_s \varphi_{n_s'}^*(\xi_s) d\mathbf{r} d\tau_i d\tau_\xi, \quad (38.3)
 \end{aligned}$$

где $\psi_A(i_A)$ — волновая функция ядра A , зависящая от внутренних координат i_A ; аналогичный смысл имеет $\psi_C(i_C)$ для ядра C ; $\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r} / \hbar}$ — нормированная на объём Ω волновая функция нейтрона. Интегрирование совершается по всему конфигурационному пространству ($d\mathbf{r}$ — элемент объёма в пространстве \mathbf{r} , $d\tau_i$ — элемент объёма в пространстве внутренних координат ядер A и C , $d\tau_\xi = \prod_s d\xi_s$).

В § 6 мы видели, что при рассмотрении различных процессов взаимодействия медленных нейтронов с ядрами можно пользоваться своеобразной теорией возмущений, считая энергию взаимодействия нейтрона с ядром пропорциональной $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)$ ($\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A^0 + \mathbf{u}_A$ — радиус-вектор, определяющий положение ядра A).

В силу этого интегрирование по \mathbf{r} сводится просто к замене \mathbf{r} на \mathbf{r}_A . Обозначая матричный элемент, отвечающий захвату нейтрона свободным ядром A , через M_c , перепишем (38.3) в виде

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{p} \{n_s^0\} A | H | \{n_s'\} C) &= M_c e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r}_A^0} (\{n_s^0\} | e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{u}_A} | \{n_s'\}) = \\
 &= M_c e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r}_A^0} \prod_s M_{n_s^0 u_s'}, \quad (38.3')
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 M_{n_s^0 u_s'} &= \int \varphi_{n_s^0}(\xi_s) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{u}_s} \varphi_{n_s'}^*(\xi_s) d\xi_s, \\
 \mathbf{u}_s &= \mathbf{e}_s (\xi_s e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r}_s^0} + \xi_s^* e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{r}_s^0}).
 \end{aligned}$$

Аналогично (38,3') матричный элемент $(\{n'_s\} C | H | \mathbf{k} \{n_s\} B)$, отвечающий переходу из промежуточного в конечное состояние, можно представить в виде

$$(\{n'_s\} C | H | \mathbf{k} \{n_s\} B) = (\{n'_s\} | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{k} r_A} | \{n_s\}) M_{\gamma}, \quad (38.4)$$

где M_{γ} — матричный элемент, отвечающий испусканию фотона \mathbf{k} свободным ядром.

Пренебрегая незначительной зависимостью величины k от конечного состояния решётки, легко выполнить в (38.1) суммирование по наборам чисел фононов $\{n_s\}$ в конечном состоянии. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{\{n_s\}} (\{n'_s\} | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{k} r_A} | \{n_s\}) (\{n''_s\} | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{k} r_A} | \{n_s\})^* &= \\ = \sum_{\{n_s\}} (\{n'_s\} | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{k} r_A} | \{n_s\}) (\{n_s\} | e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k} r_A} | \{n''_s\}) &= \\ = (\{n'_s\} | I | \{n''_s\}) \equiv \delta_{\{n'_s\}, \{n''_s\}}, \end{aligned}$$

где I — единичная матрица. Поэтому (38.1) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} w(E) &= \\ &= |M_c M_{\gamma}|^2 \sum_{\{n'_s\}} \frac{|\langle \{n_s^0\} | e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} r_A} | \{n'_s\} \rangle|^2}{\left[E - E_0 + \sum_s \hbar \omega_s (n_s^0 - n'_s) \right]^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}. \quad (38.5) \end{aligned}$$

Это выражение показывает, что различные промежуточные состояния решётки не интерферируют между собой.

Если пренебречь энергией, передаваемой решётке, то мы получим из (38.5):

$$w(E) = \frac{\text{const.}}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}.$$

Такой формулой, как мы знаем, определяется вероятность поглощения нейтрона свободным ядром.

Преобразуем общую формулу (38.5).

Используя известное представление δ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu x} d\mu$$

и замечая, что $\int \delta(\rho - a) f(\rho) d\rho = f(a)$, представим (38.5) в следующем виде:

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \sum_{\{n'_s\}} | \langle \{n_s^0\} | e^{i\vec{n} \cdot \mathbf{p} \mathbf{u}_A} | \{n'_s\} \rangle |^2 e^{i\mu \sum_s \hbar \omega_s (n_s^0 - n'_s)} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mu \rho} d\rho}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2} \quad (38.6)$$

[мы опустили здесь множитель $(M_\sigma M_\gamma)^2$].

Вычислим входящий сюда матричный элемент

$$\langle \{n_s^0\} | e^{i\vec{n} \cdot \mathbf{p} \mathbf{u}_A} | \{n'_s\} \rangle,$$

равный согласно (38.3') $\prod_s M_{n_s^0 n'_s}$. Так как матричные элементы ξ и ξ^* стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$, то считая $N \gg 1$, мы можем разложить множитель $e^{i\vec{n} \cdot \mathbf{p} \mathbf{u}_A}$, входящий в $M_{n_s^0 n'_s}$ в ряд по степеням \mathbf{u}_s . Ниже будет показано, что величины $|M_{n_s^0 n'_s}|^2$ достаточно вычислить с точностью до N^{-2} , поэтому в этом ряду следует сохранить не более трёх первых членов.

Вычислим сначала $M_{n_s^0 n_s^0}$. Используя (38.2), получим:

$$M_{n_s^0 n_s^0} = \langle n_s^0 | e^{i\vec{n} \cdot \mathbf{p} \mathbf{u}_s} | n_s^0 \rangle = \\ = 1 - \frac{1}{2\hbar^2} (\mathbf{p} \mathbf{e}_s)^2 \langle n_s^0 | \xi_s \xi_s^* + \xi_s^* \xi_s | n_s^0 \rangle + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = \\ = 1 - \frac{1}{2\hbar^2} (\mathbf{p} \mathbf{e}_s)^2 \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s} + O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

$\left[O \left(\frac{1}{N^2} \right) \right]$ содержит члены, пропорциональные N^{-2} , N^{-3} , ...].
С точностью до членов N^{-2}

$$|M_{n_s^0 n_s^0}|^2 = 1 - (2n_s^0 + 1) q_s^2, \quad (38.7)$$

$$\text{где } q_s^2 = \frac{(\mathbf{p}e_s)^2}{2MN\hbar\omega_s}.$$

Определим теперь $M_{n_s^0 n_s^0'}$, когда $n_s^0 \neq n_s^0'$. Эти величины стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Интересующие нас матричные элементы, ведущие себя при $N \gg 1$, как $N^{-1/2}$, соответствуют тем случаям, когда $n_s^0 = n_s^0 \pm 1$. Используя снова (38.2), получим:

$$\left. \begin{aligned} |M_{n_s^0, n_s^0+1}|^2 &= (n_s^0 + 1) q_s^2, \\ |M_{n_s^0, n_s^0-1}|^2 &= n_s^0 q_s^2. \end{aligned} \right\} \quad (38.8)$$

Так как n_s^0 , согласно сказанному выше, может отличаться от n_s^0 не более чем на единицу, то формула (38.6) на основании (38.7) и (38.8) приобретает следующий вид:

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \prod_s [1 + (n_s^0 + 1) q_s^2 e^{-i\mu\hbar\omega_s} + n_s^0 q_s^2 e^{i\mu\hbar\omega_s} - (2n_s^0 + 1) q_s^2] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mu\rho} d\rho}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}. \quad (38.9)$$

В этом выражении легко произвести усреднение по всем начальным состояниям решётки, так как числа фононов в начальном состоянии n_s^0 входят в (38.9) линейно. Мы должны, очевидно, произвести усреднение по различным значениям чисел фононов n_s^0 . В результате такого усреднения n_s^0 заменится средним значением чисел фононов в состоянии s , которое, как известно, определяется формулой Планка

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\hbar\omega_s/T} - 1}$$

(T — температура в энергетических единицах).

В усреднённую вероятность входит произведение вида $\prod_s (1 + \lambda_s q_s^2)$, которое при $N \gg 1$ может быть заменено выражением $e^{\sum_s \lambda_s q_s^2}$:

$$\prod_s (1 + \lambda_s q_s^2) = e^{\sum_s \lambda_s q_s^2}, \quad N \gg 1. \quad (38.9')$$

Действительно, разложение $e^{\sum_s \lambda_s q_s^2}$ в ряд по степеням q_s^2 имеет вид

$$e^{\sum_s \lambda_s q_s^2} = 1 + \sum_s \lambda_s q_s^2 + \sum_{s < r} \lambda_s \lambda_r q_s^2 q_r^2 + \frac{1}{2} \sum_s \lambda_s^2 q_s^4 + \dots$$

Произведение

$$\prod (1 + \lambda_s q_s^2) = 1 + \sum_s \lambda_s q_s^2 + \sum_{s < r} \lambda_s \lambda_r q_s^2 q_r^2 + \dots$$

отличается от этого разложения отсутствием членов

$$\frac{1}{2} \sum_s \lambda_s^2 q_s^4, \quad \frac{1}{6} \sum_s \lambda_s^3 q_s^6, \quad \dots,$$

которые обратно пропорциональны N , N^2 , ..., так как число слагаемых в этих суммах равно N , а q_s^2 обратно пропорционально N . Поэтому в пределе, когда $N \rightarrow \infty$, приведённая выше формула (38.9') становится точной.

Эта формула показывает также, что при $N \rightarrow \infty$ величины q_s^2 должны быть вычислены с точностью до N^{-2} ; с такой точностью мы и определяли выше матричные элементы $M_{n_s^0 n_s'}^0$.

Используя формулу (38.9'), представим $\omega(E)$ в следующем виде:

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mu\rho + g(\mu)}}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} d\rho d\mu, \quad (38.10)$$

где

$$g(\mu) = \sum_s q_s^2 \{ (\bar{n}_s + 1) e^{-i\mu \hbar \omega_s} + \bar{n}_s e^{i\mu \hbar \omega_s} - 1 - 2n_s \} \quad (38.11)$$

и \bar{n}_s — среднее число фононов в состоянии s , определяемое формулой Планка.

В формуле (38.10) легко выполнить интегрирование по ρ с помощью теоремы о вычетах; в результате получим:

$$w(E) = \frac{2}{\Gamma} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{i\mu(E-E_0 + i\frac{\Gamma}{2}) + g(\mu)} d\mu. \quad (38.12)$$

Этой формулой определяется форма линии поглощения нейтрона в кристалле.

Если не учитывать дисперсии фононов и анизотропии скорости звука, то мы получим для $g(\mu)$ следующее выражение:

$$g(\mu) = \frac{3}{2} \frac{p^2}{M\theta^3} \int_0^{\theta} [(1 + \bar{n}_s) e^{-i\mu\varepsilon} + \bar{n}_s e^{i\mu\varepsilon} - 2\bar{n}_s - 1] \varepsilon d\varepsilon, \quad (38.13)$$

где $\varepsilon = \hbar\omega$, $n_s \equiv \bar{n}_s$ и θ — температура Дебая, определяемая как $\theta = \hbar\omega_{\max}$ (ω_{\max} — максимальная частота фононов).

В общем виде выполнить суммирование в (38.11) или интегрирование в (38.13) не удастся. Мы ограничимся поэтому рассмотрением двух предельных случаев больших и малых энергий нейтрона, для которых несущественны значения μ , лежащие вблизи $\mu \sim \frac{1}{\theta}$.

Покажем, что при достаточно больших энергиях нейтрона в интеграле (38.12) существенна область малых μ , $|\mu\theta| \ll 1$. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $|\mu\theta| \ll 1$ и разложим $g(\mu)$ в ряд по степеням $\mu\theta$. Пользуясь выражением (38.13) и ограничиваясь квадратичным относительно μ членом, получим следующую формулу для $g(\mu)$:

$$g(\mu) = -i\mu\theta \frac{R}{\theta} - (\mu\theta)^2 \frac{R\varepsilon_0}{\theta^2}, \quad (38.14)$$

где

$$\varepsilon_0 = 3T \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \int_0^{\theta/T} \left(\frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{2}\right) t^3 dt \quad (38.15)$$

и $R = \frac{p^2}{2M}$ — энергия отдачи ядра (M — масса ядра). Выражение (38.14) в соединении с (38.12) приводит к выводу, что область малых μ , $|\mu\theta| \ll 1$, будет существенной в интеграле (38.12) при выполнении условия

$$R\varepsilon_0 \gg \theta^2. \quad (38.16)$$

Действительно, условие (38.16) означает, что коэффициент, стоящий при $(\mu\theta)^2$ в формуле (38.14), значительно больше единицы; поэтому в интеграле (38.12) большие значения величины $\mu\theta$ не могут играть существенной роли.

Так как $R = \left(\frac{m}{M}\right)E$ (E — энергия нейтрона), то условие (38.16) можно представить ещё в следующем виде:

$$E \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\varepsilon_0}. \quad (38.16')$$

Таким образом, в области больших энергий нейтрона существенны малые μ , $|\mu\theta| \ll 1$.

Подставляя в (38.12) выражение (38.14), получим следующую формулу для вероятности захвата $w(E)$, справедливую в области больших энергий нейтрона

$$\begin{aligned} w(E) &= \frac{2}{\Gamma} \int_0^\infty d\mu \cos[\mu(E - E_0 - R)] \exp\left(-\frac{1}{2} \mu\Gamma - \mu^2 R\varepsilon_0\right) = \\ &= \frac{4}{\Gamma^2} \int_0^\infty dy \cos xy e^{-y - \frac{y^2}{\xi^2}}, \end{aligned} \quad (38.17)$$

где

$$x = \frac{E - E_0 - R}{\Gamma/2}, \quad \xi = \frac{\Gamma}{\Delta}, \quad \Delta = 2\sqrt{R\varepsilon_0}.$$

Согласно (25.10) последний интеграл может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \frac{4}{\Gamma^2} \int_0^\infty dy \cos xy e^{-y - \frac{y^2}{\xi^2}} &= \\ &= \frac{4}{\Gamma^2} \frac{\xi}{2\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4} \xi^2 (x-y)^2} \frac{dy}{1+y^2} \equiv \frac{4}{\Gamma^2} \psi(\xi, x). \end{aligned}$$

Мы получили для $\omega(E)$ выражение, формально совпадающее с выражением (25.9), справедливым для свободного ядра. Различие заключается в том, что доплеровская ширина Δ , входящая в (38.17), определяется формулой

$$\Delta = 2\sqrt{R\varepsilon_0} \quad (38.17')$$

вместо формулы

$$\Delta = 2\sqrt{RT},$$

относящейся к случаю свободного ядра. Таким образом, в Δ входит вместо температуры величина ε_0 , которую можно трактовать как среднюю энергию, приходящуюся на одну колебательную степень свободы кристалла (в ε_0 входит также энергия нулевых колебаний).

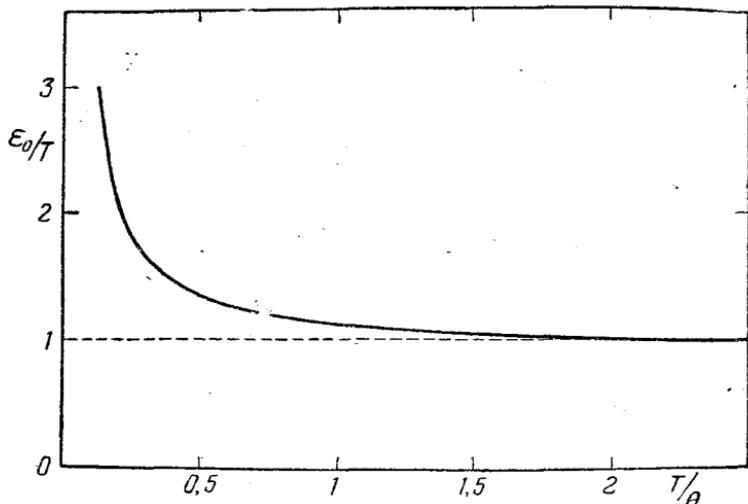


Рис. 21.

На рис. 21 [98] представлена зависимость $\frac{\varepsilon_0}{T}$ от $\frac{T}{\theta}$. Отметим, что

$$\left. \begin{array}{ll} \varepsilon_0 = \frac{3}{8} \theta, & \text{если } T \ll \theta, \\ \varepsilon_0 = T, & \text{если } T \gg \theta. \end{array} \right\} \quad (38.18)$$

Из этих предельных формул для ϵ_0 вытекает, что доплеровская ширина линии поглощения в кристалле при низких температурах ($T \ll \theta$) больше соответствующей ширины для свободного ядра; при высоких температурах ($T \gg \theta$) ширины для связанного и свободного ядер одинаковы.

То обстоятельство, что при $T \ll \theta$ доплеровская ширина в кристалле значительно больше, чем в газе, обусловлено наличием нулевых колебаний, благодаря чему средняя энергия, приходящаяся на одну колебательную степень свободы в кристалле, значительно превосходит классическое значение, равное T .

Заметим, что в рассматриваемом случае больших энергий нейтрона центр линии поглощения совпадает с энергией $E_0 + R$, как и в случае свободного ядра.

Перейдём теперь к рассмотрению малых энергий нейтрона, когда $\epsilon_0 R \ll \theta^2$.

Если $\frac{\epsilon_0 R}{\theta^2} \ll 1$, то, как видно из формулы (38.13), модуль функции $g(\mu)$ мал. В этом случае, очевидно, не существенны осциллирующие множители $e^{\pm i\mu\epsilon}$, входящие в (38.13) (это значит, что главную роль играют большие μ , $|\mu\theta| \gg 1$). Мы можем поэтому не рассматривать этих множителей и считать, что $g(\mu)$ приближённо равняется

$$g(\mu) \approx g(\infty) = -\frac{3p^2}{M\theta^3} \int_0^{\theta} \left[n_\epsilon + \frac{1}{2} \right] \epsilon d\epsilon. \quad (38.19)$$

Подставляя это выражение в (38.12), получим следующую формулу для $\omega(E)$, справедливую в области малых энергий нейтрона

$$\omega(E) = \frac{e^{g(\infty)}}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}. \quad (38.20)$$

Заметим, что $g(\infty) = -6 \frac{RT}{\theta^2}$, если $T \gg \theta$ и $g(\infty) = -\frac{3}{2} \frac{R}{\theta}$, если $T \ll \theta$. В пределе когда $\frac{\epsilon_0 R}{\theta^2} \rightarrow 0$, $g(\infty) \rightarrow 0$ и

$$\omega(E) = \frac{1}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}.$$

Таким образом, в предельном случае малых энергий нейтрона линия поглощения имеет естественную форму, причём центр линии совпадает с E_0 , т. е. с резонансной энергией, отвечающей бесконечно большой массе поглощающего ядра.

В рассмотренных предельных случаях мы нашли аналитический вид функции $\omega(E)$. В промежуточных случаях для определения формы линии поглощения приходится производить численное интегрирование. На рис. 22 и 23 [98] показано, какую форму имеет линия поглощения для кристалла

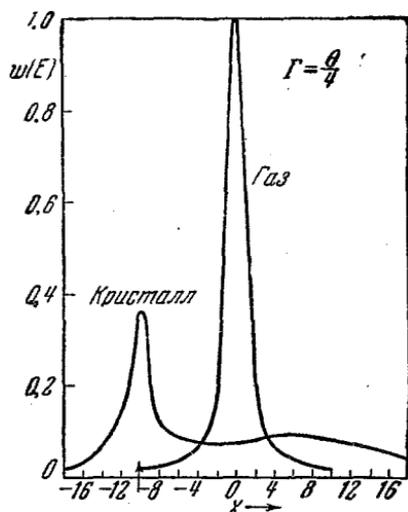


Рис. 22.

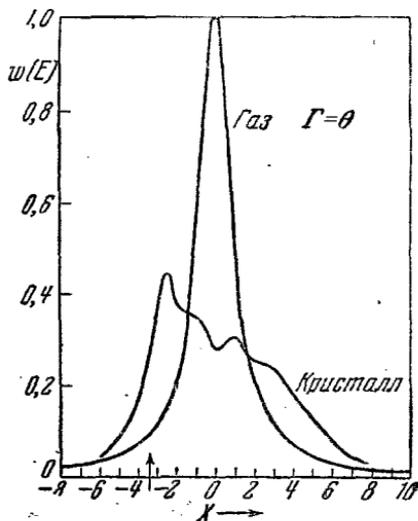


Рис. 23.

с температурой Дебая $\theta = 210^\circ$ для двух значений Γ , равных $\theta/4$ и θ (абсциссой является $X = \frac{E - E_0}{\Gamma/2}$); предполагается, что температура кристалла значительно ниже температуры Дебая. Для сравнения на рисунках показана также форма линии поглощения для свободного ядра при тех же значениях температуры и ширины Γ . Мы видим, что в промежуточных случаях форма линии поглощения в кристалле может сильно отличаться от формы линии поглощения в газе, причём могут появляться даже дополнительные максимумы.

Выше мы видели, что в области больших энергий нейтрона ($E \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\varepsilon_0}$) линия поглощения в кристалле имеет такую же форму, как и для свободного ядра, различие заключается лишь в том, что доплеровская ширина определяется не температурой, а величиной ε_0 . В случае высоких температур ($T \gg \theta$) $\varepsilon_0 \approx T$, поэтому при $T \gg \theta$ радиационный захват нейтронов в кристалле, обусловленный высоко расположенными уровнями, $E_0 \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{T}$, не отличается от захвата свободными ядрами.

Химическая связь может сказаться на радиационном захвате при $T \gg \theta$ только в том случае, если E_0 удовлетворяет условию $E_0 \lesssim \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{T}$. При $\theta = 200^\circ$, $T = 300^\circ$, $\frac{M}{m} = 200$ это условие даёт $E_0 \lesssim 5 \text{ eV}$.

Таким образом, при $T \gg \theta$ только та часть поглощения в кристаллах, которая обусловлена наиболее низко расположенными уровнями, может отличаться от поглощения свободными ядрами.

В случае низких температур ($T \ll \theta$; $\varepsilon_0 \approx \frac{3}{8} \theta$) линии поглощения в кристалле, обусловленные высоко расположенными уровнями $E_0 \gg \frac{M}{m} \theta$, имеют ту же форму, что и для свободных ядер, но доплеровская ширина в кристалле всегда больше доплеровской ширины в газе. Линии поглощения, обусловленные низко расположенными уровнями ($E_0 \lesssim 5 \text{ eV}$), могут иметь форму, сильно отличающуюся от формы линий поглощения для свободных ядер.

§ 39. Упругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах

Мы рассмотрим в этом и следующих параграфах упругое и неупругое рассеяния медленных нейтронов в кристаллах [$10^9 - 10^{13}$], считая, что энергия нейтронов недостаточна для возбуждения ядер и что нейтроны способны лишь возбуждать колебания решётки. Ниже будет показано, что связь между рассеивающими ядрами, образующими кристаллическую

решётку, оказывается существенной только при рассеянии достаточно медленных нейтронов, энергия которых E меньше, чем $\frac{M \theta^2}{m \varepsilon_0}$, где θ — характеристическая температура кристалла, m и M — массы нейтрона и ядра и ε_0 — величина, определённая формулой (38.15). Если длина волны нейтрона сравнима с постоянной решётки, то при рассеянии таких медленных нейтронов будут наблюдаться интерференционные явления. В области больших энергий, когда $E \gg \frac{M \theta^2}{m \varepsilon_0}$, рассеяние нейтронов в кристаллах не отличается от рассеяния свободными ядрами.

Для определения эффективных сечений различных процессов рассеяния нейтронов в кристалле мы будем пользоваться, так же как и в § 6, своеобразной теорией возмущений, считая энергию взаимодействия между нейтроном и ядром равной

$$V_l = \alpha_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l),$$

где \mathbf{r} и \mathbf{R}_l — векторы, определяющие положение нейтрона и ядра, находящегося в l -м узле решётки, и α_l — некоторая величина, зависящая, вообще говоря, от энергии нейтрона. Как мы увидим ниже, при наличии поглощения нейтронов в кристалле, величина α_l будет комплексной.

Энергия взаимодействия нейтрона со всем кристаллом V представляет собой сумму V_l по всем ядрам решётки:

$$V = \sum_l \alpha_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l). \quad (39.1)$$

Величина α_l может быть связана с амплитудой рассеяния нейтронов изолированными ядрами. Повторяя рассуждения § 6, мы получим следующее соотношение:

$$\alpha = \frac{2\pi\hbar^2}{m'} a, \quad (39.2)$$

где a — амплитуда рассеяния и $m' = \frac{mM}{m+M}$ — приведённая масса нейтрона (ради простоты у a опущен индекс l , характеризующий ядро, с которым взаимодействует нейтрон).

Заметим, что для большинства ядер $a > 0$ (Ba, Be, C, Ca, Cu, Fe, F, Mg, N, Ni, O, Pb, S, Zn и т. д.), и лишь

для некоторых типов ядер $a < 0$ (Li, Mn)^[104, 105]. Различные изотопы одного и того же элемента могут обладать отличающимися как по величине, так и по знаку значениями a .

Сечение упругого рассеяния нейтронов свободными ядрами равняется

$$\sigma_s = 4\pi |a|^2 = \frac{|a|^2}{\pi \hbar^4} m'^2. \quad (39.3)$$

Заметим, что дифференциальное сечение рассеяния, при котором конечная энергия нейтрона лежит в интервале $(E', E' + dE')$, равна согласно (17.19)

$$d\sigma_s = \frac{a^2 m M dE'}{4\pi \hbar^4 E}, \quad \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 E \leq E' \leq E, \quad (39.4)$$

где E — начальная энергия нейтрона.

Величина α может быть также связана с комплексной фазой рассеяния η , определяющей асимптотическое поведение волновой функции нейтрона (мы рассматриваем только S -волну, поэтому у величины η опущен индекс нуль).

Будем предполагать, что модуль фазы рассеяния η мал по сравнению с единицей; это значит, что сечения рассеяния и захвата предполагаются малыми по сравнению с $\pi \lambda^2$ (последнее условие выполняется во всех практически интересных случаях).

Известно, что если модуль фазы η мал, то фаза может быть представлена в виде ^[6]

$$\eta = \eta^{(r)} + i\eta^{(i)} = -\frac{2m'k}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) |f_0(r)|^2 r^2 dr,$$

где k — волновой вектор нейтрона и $f_0 = \frac{\sin kr}{kr}$. Подставляя сюда вместо $V(r)$ $\alpha \delta(r) \rightarrow \frac{\alpha}{4\pi r^2} \delta(r)$, получим

$$\eta = -\frac{2m'k}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{\alpha}{4\pi r^2} \delta(r) \left(\frac{\sin kr}{kr}\right)^2 r^2 dr = -\frac{\alpha m'k}{2\pi \hbar^2},$$

откуда

$$\alpha = -\frac{2\pi \hbar^2}{m'k} \eta. \quad (39.5)$$

Сечения упругого рассеяния и захвата нейтронов изолированными ядрами σ_s и σ_c связаны следующими соотношениями с $\eta^{(r)}$ и $\eta^{(i)}$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{4\pi}{k^2} \{ |\eta^{(r)}|^2 + |\eta^{(i)}|^2 \}, \\ \sigma_c &= \frac{4\pi}{k^2} \eta^{(i)} (1 - 2\eta^{(i)}). \end{aligned} \right\} \quad (39.6)$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \eta^{(r)} &\approx \pm \sqrt{\frac{k^2}{4\pi} \sigma_s - \left(\frac{k^2}{4\pi} \sigma_c\right)^2}, \\ \eta^{(i)} &\approx \frac{k^2}{4\pi} \sigma_c. \end{aligned} \right\} \quad (39.7)$$

Приведём ещё выражение, определяющее η вблизи некоторого резонансного уровня E_0 . Используя формулу (24.15), определяющую $\beta = e^{2i\eta}$ вблизи уровня E_0 , и предполагая, что $|\eta| \ll 1$, получим:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\omega}{2} + \frac{\gamma_s}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}} = \\ &= \eta_p + \frac{\gamma_s(E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} + \frac{i}{2} \frac{\gamma_s \gamma}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \end{aligned} \quad (39.8)$$

где $\eta_p = \frac{\omega}{2}$ — фаза потенциального рассеяния (эта формула относится к тому случаю, когда спин ядра равен нулю).

В области энергий, лежащих значительно ниже первого резонансного уровня, величины η и α могут считаться вещественными и не зависящими от энергии нейтрона.

Если ядро обладает спином, то при рассеянии направление спина нейтрона может измениться на обратное. Это изменение связано с поворотом момента ядра в соответствии с законом сохранения момента количества движения.

При отличном от нуля спине ядра величина α_l складывается из двух членов: постоянной A_l , не зависящей от спина нейтрона \mathbf{S} и спина ядра \mathbf{K}_l , и члена, учитывающего возможность изменения направления спина. Этот член должен содержать спиновые матрицы нейтрона и матрицы момента

ядра. Так как спин нейтрона равен $\frac{1}{2}$, то квадрат его спиновых матриц равен единице. В силу этого энергия взаимодействия может содержать спиновые матрицы нейтрона только линейно, иными словами, величина α_l должна иметь вид

$$\alpha_l = A_l I + B_l \mathbf{SK}_l, \quad (39.9)$$

где I — единичная матрица, A_l, B_l — константы.

Смысл этой формулы состоит в том, что α , а следовательно, и амплитуда рассеяния зависят от взаимной ориентации спинов нейтрона и ядра. Иными словами, следует различать значения α_+ и α_- , относящиеся к параллельной и антипараллельной ориентации спинов нейтрона и ядра. (По имеющимся экспериментальным данным [106] отношение обоих значений α составляет около 2 для Вi и около 3 для Al .)

Замечая, что

$$\mathbf{SK} = \frac{1}{2} \{J^2 - K^2 - S^2\},$$

где $J = K + S$, и полагая $J = j \pm \frac{1}{2}$ (j — квантовое число, определяющее момент ядра), найдём, что \mathbf{SK} при параллельной ориентации спинов нейтрона и ядра равно:

$$(\mathbf{SK})_+ = \frac{1}{2} \left\{ \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{3}{2} \right) - j(j+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} = \frac{1}{2} j,$$

а при антипараллельной ориентации спинов равно:

$$(\mathbf{SK})_- = \frac{1}{2} \left\{ \left(j - \frac{1}{2} \right) \left(j + \frac{1}{2} \right) - j(j+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} = -\frac{1}{2} (j+1).$$

Отсюда следует, что α_+ и α_- равны соответственно

$$\alpha_+ = A + \frac{1}{2} jB, \quad \alpha_- = A - \frac{1}{2} (j+1)B$$

и

$$A = \frac{(j+1)\alpha_+ + j\alpha_-}{2j+1}, \quad B = \frac{2(\alpha_+ - \alpha_-)}{2j+1}. \quad (39.9')$$

Напомним, что отличные от нуля матричные элементы проекций момента K_x, K_y, K_z определяются следующими формулами:

$$(K_z)_{mm} = m,$$

$$(K_x + iK_y)_{m+1, m} = (K_x - iK_y)_{m, m+1} = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)},$$

где m — магнитное квантовое число ядра. Представив α в виде

$$\alpha = A_l + BS_zK_z + \frac{1}{2} B [(S_x - iS_y)(K_x + iK_y) + (S_x + iS_y)(K_x - iK_y)],$$

мы видим, что член $A + BS_zK_z$ обуславливает переходы, при которых направление спина нейтрона не изменяется, а член $B(S_xK_x + S_yK_y)$ — переходы, при которых направление спина изменяется.

Легко показать, что если момент ядра отличен от нуля, то в формуле (39.3) под $|\alpha_l|^2$ нужно понимать выражение

$$|A_l|^2 + \frac{1}{4} j_l(j_l + 1) |B_l|^2.$$

Подставляя (39.9) в (39.1), получим следующее общее выражение для энергии взаимодействия нейтрона с кристаллической решёткой

$$V = \sum_l \alpha_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) = \sum_l [A_l + B_l(\mathbf{S}K_l)] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l). \quad (39.1')$$

Если ядра, образующие кристаллическую решётку, абсолютно тождественны, то константы A_l и B_l не зависят от l . При наличии изотопов и механических моментов ядер величины A_l и B_l являются функциями номера узла l даже в том случае, когда кристалл построен из атомов одного элемента.

В этом и следующих параграфах предполагается, что различие между ядрами решётки, если оно имеет место, вызывается только наличием изотопов и механических моментов ядер.

Мы будем рассматривать нейтрон и кристаллическую решётку как одну квантовомеханическую систему, состояние которой характеризуется заданием импульса нейтрона \mathbf{p} , его спинового магнитного квантового числа μ , квантовых чисел n_i всех осцилляторов, описывающих тепловые колебания решётки, и магнитных квантовых чисел ядер m_l ($|m_l| \leq j_l$).

Рассеяние нейтронов можно рассматривать как переход системы из состояния

$$\mathbf{p}, \mu, n_1, n_2, \dots, m_1, m_2, \dots$$

в состояние

$$\mathbf{p}', \mu', n'_1, n'_2, \dots, m'_1, m'_2, \dots$$

Волновая функция системы нейтрон + решётка имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r}} \chi_{\mu} \prod_i \varphi_{n_i} \prod_l \psi_{m_l},$$

где χ_{μ} — спиновая функция нейтрона ($\mu = \pm \frac{1}{2}$), φ_{n_i} — волновая функция i -го осциллятора (n_i представляет собой число фононов i -го сорта), наконец, ψ_{m_l} — спиновая волновая функция l -го ядра.

Определим матричный элемент энергии взаимодействия нейтрона с решёткой. Интегрирование по координатам нейтрона сводится просто к замене \mathbf{r} на \mathbf{R}_l . Подставляя вместо \mathbf{R}_l сумму $\mathbf{R}_l^0 + \mathbf{u}_l$, где \mathbf{R}_l^0 — радиус-вектор, определяющий положение равновесия l -го ядра, и \mathbf{u}_l — его смещение из положения равновесия, вызванное тепловыми колебаниями решётки, представим матричный элемент в виде

$$M = \frac{1}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} (\mu, m_l | A_l I + B_l (\mathbf{K}_l \mathbf{S}) | \mu', m_l') \times \\ \times (\{n_i\} | e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{u}_l} | \{n'_i\}), \quad (39.10)$$

где для матричного элемента оператора V , отвечающего переходу из состояния a в состояние b , принято обозначение $(a | V | b)$ (символ $\{n_i\}$, так же как и в § 38, служит для обозначения всей совокупности чисел фононов n_i).

Матричный элемент, определяющий переходы в решётке, можно переписать в виде (обозначения см. § 38)

$$(\{n_i\} | e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{u}_l} | \{n'_i\}) = \prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{u}_{ls}} | n'_s),$$

где

$$\mathbf{u}_{ls} = \mathbf{e}_s (\xi_s e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r}_s \mathbf{R}_l^0} + \xi_s^* e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{r}_s \mathbf{R}_l^0}).$$

Найдём матричный элемент, определяющий переходы в системе магнитных квантовых чисел. Если направление спина нейтрона не изменяется, то матричный элемент равен

$$(\mu, m_l | A_l I + B_l (\mathbf{K}_l \mathbf{S}) | \mu, m_l) = A_l \pm \frac{1}{2} m_l B_l, \quad (39.11)$$

где знак $+$ берётся при $\mu = +\frac{1}{2}$ и знак $-$ при $\mu = -\frac{1}{2}$.

При изменении направления спина нейтрона магнитное квантовое число изменится только у одного из ядер, например, у ядра с индексом l ; тогда $m'_l = m_l \pm 1$, $m'_l = m_l$ ($l' \neq l$). Матричный элемент равен при этом [106]:

$$\begin{aligned} (\mu, m_q | A_q I + B_q (\mathbf{SK}_q) | \mu', m'_q) = \\ = \frac{B_l}{2} \sqrt{j_l(j_l + 1) - m_l(m_l \pm 1)} \delta_{ql}, \end{aligned} \quad (39.12)$$

где знак $+$ берётся при $\mu' = \frac{1}{2}$ и знак $-$ при $\mu' = -\frac{1}{2}$.

Перейдём к рассмотрению упругого рассеяния нейтронов, при котором состояние решётки, т. е. числа фононов, не изменяется. Вероятность рассеяния $d\omega$, при котором импульс нейтрона \mathbf{p}' находится в телесном угле $d\omega'$, связана с соответствующим матричным элементом M соотношением

$$d\omega = \frac{mp}{4\pi^2 \hbar^4} \Omega |M|^2 d\omega'. \quad (39.13)$$

Используя (39.10), (39.11), получим следующее выражение для вероятности упругого рассеяния нейтрона без изменения направления его спина:

$$\begin{aligned} d\omega_{\uparrow\uparrow} = \frac{mp}{4\pi^2 \hbar^4} \Omega d\omega' \left| \sum_l \left(A_l \pm \frac{m_l}{2} B_l \right) e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} \right. \\ \left. \times \prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{u}_{ls}} | n_s) \right|^2. \end{aligned} \quad (39.14)$$

Чтобы найти вероятность упругого рассеяния нейтрона с изменением направления его спина $d\omega_{\uparrow\downarrow}$, нужно найти сначала вероятность рассеяния с изменением направления спина нейтрона на l -м ядре и просуммировать затем результат по всем ядрам решётки. Мы получим, таким образом, следующее выражение для $d\omega_{\uparrow\downarrow}$:

$$\begin{aligned} d\omega_{\uparrow\downarrow} = \frac{mp}{4\pi^2 \hbar^4} \Omega \sum_l \frac{1}{4} |B_l|^2 \{j_l(j_l + 1) - \\ - m_l(m_l \pm 1)\} \prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{u}_{ls}} | n_s)^2. \end{aligned} \quad (39.15)$$

Входящий в (39.14) и (39.15) матричный элемент

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{ls}} | n_s)$$

был определен в § 38 [формула (38.7)]:

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{ls}} | n_s) = 1 - \frac{1}{2\hbar} |(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{e}_s|^2 \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s},$$

где N — общее число ядер в кристалле и M — масса атома. (Мы не будем учитывать в дальнейшем зависимости массы ядра от l , считая, что массы изотопов мало отличаются друг от друга.) Так как N очень велико, то эту формулу можно переписать в виде

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{ls}} | n_s) = \exp\left(\frac{1}{2\hbar} |(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{e}_s|^2 \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s}\right).$$

Произведение матричных элементов, входящих в (39.14) и (39.15), равняется

$$\prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{ls}} | n_s) = e^{-W}, \quad (39.16)$$

где

$$W = \frac{1}{2} \sum_s \frac{|(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{e}_s|^2}{MN\hbar\omega_s} \left(n_s + \frac{1}{2}\right)$$

представляет собой известную из теории рассеяния рентгеновских лучей экспоненту теплового фактора.

Вместо n_s сюда следует подставить среднее значение числа фононов в состоянии s , определяемое формулой Планка

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\hbar\omega_s/T} - 1},$$

где T — температура (в энергетических единицах).

Заметим, что в выражении для W суммирование по s можно заменить интегрированием по $\frac{\Omega f_s^2 df_s d\omega_s}{(2\pi\hbar)^3}$ и суммированием по состояниям поляризации j (\mathbf{f}_s — импульс фонона частоты ω_s , $d\omega_s$ — элемент телесного угла \mathbf{f}_s). Если не учитывать

дисперсии фононов *) и анизотропии скорости звука, то мы получим следующее выражение для W :

$$W = \frac{3}{2} \frac{(p' - p)^2}{M\theta} \left[\frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \right], \quad (39.17)$$

где

$$D(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{x dx}{e^x - 1}$$

и θ — температура Дебая.

Формулы (39.14) и (39.15), определяющие вероятность рассеяния, должны быть усреднены по всем значениям магнитных квантовых чисел m_l и по всем распределениям изотопов в решётке. Пользуясь формулой

$$\sum_{-j_l}^{+j_l} m_l^2 = \frac{1}{3} j_l(j_l + 1)(2j_l + 1),$$

получим следующие выражения для усреднённых вероятностей:

$$d\bar{w}_{\uparrow\uparrow} = \frac{mp d\sigma'}{4\pi^2 \hbar^4 \Omega} \left\{ \left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) R_l^0} \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \overline{B_l^2 j_l(j_l + 1) N} \right\} e^{-2W}, \quad (39.18)$$

$$d\bar{w}_{\uparrow\downarrow} = \frac{mp d\sigma'}{4\pi^2 \hbar^4 \Omega} \frac{1}{6} \overline{B_l^2 j_l(j_l + 1) N} e^{-2W}, \quad (39.19)$$

где черта сверху означает усреднение по всем возможным распределениям изотопов в решётке.

Легко убедиться в том, что среднее значение величины

$\sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) R_l^0} \left| \right|^2$ равняется

$$\overline{\left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) R_l^0} \right|^2} = \\ = N(|\bar{A}|^2 - |A|^2) + |\bar{A}|^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) R_l^0} \right|^2, \quad (39.20)$$

*) Дисперсия фононов не существенна при низких температурах, когда $T \ll \theta$.

где $\bar{A} = \sum_q A^{(q)} C_q$, $|\bar{A}|^2 = \sum_q |A^{(q)}|^2 C_q$ и C_q — концентрация ядер, для которых A_l принимает значение $A^{(q)*}$. Действительно, левая часть (39.20) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} \right|^2 &= \sum_l \sum_{l'} (A_l - \bar{A}) (A_{l'} - \bar{A})^* e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) (\mathbf{R}_l^0 - \mathbf{R}_{l'}^0)} + \\ &+ \bar{A} \sum_{l'} e^{-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_{l'}^0} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} (A_l - \bar{A})^* + \\ &+ \bar{A}^* \sum_{l'} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_{l'}^0} \sum_l e^{-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} (A_l - \bar{A}) + \\ &+ |\bar{A}|^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} \right|^2. \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые равны нулю, так как $A_l - \bar{A} = 0$; члены с $l' \neq l$ в первом слагаемом также равны нулю. Замечая, что

$$|A_l - \bar{A}|^2 = |A_l|^2 - \bar{A}_l \bar{A}^* - \bar{A}_l^* \bar{A} + |\bar{A}|^2 = |A|^2 - |\bar{A}|^2,$$

мы и получим формулу (39.20).

Преобразуем несколько формулу (39.20). Во втором слагаемом произведём сначала суммирование по ядрам, входящим в состав одной элементарной ячейки, а затем результат просуммируем по всем ячейкам. Мы получим, таким образом:

$$\left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} \right|^2 = \left| \sum_{\nu} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_{\nu}^0} \right|^2 \left| \sum_P e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_P^0} \right|^2, \quad (39.21)$$

где \mathbf{R}_P^0 — радиус-вектор некоторой определённой точки внутри элементарной ячейки, \mathbf{R}_{ν}^0 — радиус-вектор ν -го ядра по отношению к этой точке; суммирование по ν распространяется на все ядра, входящие в состав одной элементарной ячейки, а суммирование по P производится по всем элементарным ячейкам.

*) Заметим, что не исключена возможность существования решёток, для которых $\bar{A} = 0$, так как амплитуды рассеяния для различных изотопов могут иметь противоположные знаки (см. стр. 366).

кам. Второй множитель в (39.21) при большом числе элементарных ячеек может быть представлен в виде

$$\left| \sum_P e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_P^0} \right|^2 = \frac{(2\pi)^3 N'}{\Delta} \delta \left(\frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} - 2\pi\boldsymbol{\tau} \right), \quad (39.22)$$

где Δ — объём элементарной ячейки, $\boldsymbol{\tau}$ — вектор обратной решётки*), N' — число элементарных ячеек.

Сложив $d\omega_{\uparrow\uparrow}$ и $d\omega_{\uparrow\downarrow}$ и воспользовавшись формулами (39.20), (39.21), (39.22), получим следующее выражение для вероятности упругого рассеяния нейтрона в кристалле:

$$d\omega = \frac{mp}{4\pi^2 \hbar^4} \left\{ n (|\bar{A}|^2 - |\bar{A}'|^2 + \frac{|B|^2 j(j+1)}{4}) + |\bar{A}'|^2 \frac{(2\pi)^3}{\Delta} n' \delta \left(\frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} - 2\pi\boldsymbol{\tau} \right) S_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'} \right\} e^{-2W} d\omega',$$

где n — число ядер в единице объёма, n' — число элементарных ячеек в единице объёма и

$$S_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'} = \left| \sum_V e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_V^0} \right|^2$$

— так называемый структурный множитель.

*) Вектор обратной решётки определяется через базисные векторы обратной решётки $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\tau} = p_1 \mathbf{b}_1 + p_2 \mathbf{b}_2 + p_3 \mathbf{b}_3,$$

где p_1, p_2, p_3 — целые числа.

Базисные векторы обратной решётки связаны с базисными векторами (основными периодами) прямой решётки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ соотношениями

$$\mathbf{b}_1 = \frac{[\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}{\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{[\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1]}{\mathbf{a}_2 [\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1]}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]}{\mathbf{a}_3 [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]}.$$

Каждому вектору обратной решётки соответствует семейство параллельных кристаллических плоскостей, уравнения которых имеют вид

$$\boldsymbol{\tau} \mathbf{r} = m,$$

где $\mathbf{r} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3$, n_1, n_2, n_3 и m — целые числа. Расстояние между соседними плоскостями равно $1/\tau$ (при этом предполагается, что p_1, p_2, p_3 — числа взаимно простые).

Разделив $d\omega$ на v/Ω , найдём дифференциальное сечение упругого рассеяния нейтрона, отнесённое к одному ядру и единице телесного угла; оно имеет следующий вид:

$$\sigma = \left\{ \frac{2\pi^3}{\Delta} \frac{n'}{n} \sigma_0 S_\tau \delta \left(\frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} - 2\pi\boldsymbol{\tau} \right) + \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left(|\overline{A}|^2 - |\bar{A}|^2 + \frac{1}{4} j(j+1) |\overline{B}|^2 \right) \right\} e^{-2W}, \quad (39.23)$$

где $\sigma_0 = \frac{|\bar{A}|^2 m^2}{\pi \hbar^4}$ и S_τ значение S при $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = 2\pi\hbar\boldsymbol{\tau}$. Величина S_τ может быть представлена в виде

$$S_\tau = \left| \sum_{\nu} e^{2\pi i (p_1 u_1^\nu + p_2 u_2^\nu + p_3 u_3^\nu)} \right|^2,$$

где $u_1^\nu, u_2^\nu, u_3^\nu$ — координаты \mathbf{R}_ν^0 ($\mathbf{R}_\nu^0 = \mathbf{a}_1 u_1^\nu + \mathbf{a}_2 u_2^\nu + \mathbf{a}_3 u_3^\nu$) и p_1, p_2, p_3 — целые числа, определяющие $\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau} = \mathbf{b}_1 p_1 + \mathbf{b}_2 p_2 + \mathbf{b}_3 p_3$).

Первое слагаемое в (39.23) имеет резкие максимумы при выполнении условий Вульфа-Брэгга

$$\mathbf{p}' - \mathbf{p} = 2\pi\hbar\boldsymbol{\tau}.$$

Это слагаемое определяет когерентное рассеяние нейтронов. Второе слагаемое определяет некогерентное рассеяние нейтронов; если не учитывать множителя e^{-2W} , то оно не зависит от угла рассеяния и аналогично фону, наблюдаемому при рассеянии рентгеновских лучей.

Обратим внимание на то обстоятельство, что когерентное рассеяние определяется средним значением величины A (по различным распределениям изотопов в решётке). Некогерентное рассеяние определяется суммой квадрата флуктуации A , т. е. $|\overline{A} - \bar{A}|^2$ и величины $\frac{1}{4} |\overline{B}|^2 j(j+1)$.

Мы видим, что когерентное рассеяние обуславливается столкновениями без изменения направления спина нейтрона. Это связано с тем, что в интерференционных явлениях должны участвовать все ядра, что может иметь место только в том случае, если при рассеянии направление спина нейтрона не изменяется.

Величину $\sigma_0 = \frac{|\bar{A}|^2 m^2}{\pi \hbar^4}$ можно назвать сечением упругого когерентного рассеяния нейтронов связанными ядрами. Пользуясь (39.2) и (39.9'), можно выразить σ_0 через амплитуды рассеяния a'_+ и a'_- , отвечающие параллельной и антипараллельной ориентации спинов нейтрона и связанного ядра:

$$\sigma_0 = 4\pi \left| \frac{(j+1)a'_+ + ja'_-}{2j+1} \right|^2, \quad (39.24)$$

где $a' = \frac{M+m}{M} a$ [a — амплитуда рассеяния нейтрона свободным ядром, см. (39.2)]; черта сверху означает усреднение по возможным распределениям изотопов.

Полное сечение некогерентного упругого рассеяния нейтронов связанными ядрами без учёта теплового множителя можно представить согласно (39.23) и (39.9') в следующем виде:

$$\sigma' = 4\pi (|\overline{a'}|^2 - |\bar{a}'|^2) + 4\pi \frac{j(j+1)}{(2j+1)^2} |\overline{a'_+ - a'_-}|^2, \quad (39.25)$$

где

$$a' = \frac{1}{2j+1} [(j+1)a'_+ + ja'_-].$$

Экспериментально можно отдельно определять когерентное и некогерентное рассеяние (когерентное рассеяние отсутствует, если длина волны нейтронов больше чем $2d$, где d — наибольшее значение межплоскостного расстояния в кристалле, см. ниже); поэтому можно находить отношение $\frac{a'_+}{a'_-}$, характеризующее зависимость рассеяния нейтронов от спина частиц [106].

Заметим, что для кристаллов конечных размеров сечение рассеяния при точном выполнении условий Вульфа-Брэгга не обращается в бесконечность, так как величина $\left| \sum e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} \right|^2$ остаётся конечной (она становится равной $N'^2 S^2$, где N' — число ячеек). С этим связано то обстоятельство, что для кристаллов конечных размеров брэгговская линия имеет не бесконечно малую, а конечную угловую ширину, а именно,

она охватывает интервал телесных углов, по порядку величины равный $\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$, где λ — длина волны, l — линейные размеры кристалла.

Если размеры кристалла достаточно малы, то такой кристалл мало рассеивает падающие на него нейтроны. Определим по порядку величины максимальные размеры кристалла, который рассеивает ещё малую часть нейтронной волны, падающей на него под углом, удовлетворяющим условию Вульфа-Брэгга.

Интенсивность рассеянной волны при выполнении условий Вульфа-Брэгга пропорциональна произведению σ_0 на квадрат числа ядер в кристалле, т. е. пропорциональна величине $r = \sigma_0 (nl^3)^2$ (n — число ядер в единице объёма). Умножив r на эффективную величину телесного угла, в котором происходит рассеяние, и разделив результат на площадь поперечного сечения кристалла, равную l^2 , мы найдём отношение интенсивностей рассеянной и падающей волн R :

$$R \approx r \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot \frac{1}{l^2} \approx \left(\frac{l}{l_0}\right)^2,$$

где

$$l_0 = \sigma_0^{-1/2} (n\lambda)^{-1}.$$

Если $l \ll l_0$, то кристалл является «тонким», т. е. отражает малую долю падающей на него волны. Считая для тепловых нейтронов $\sigma_0 \approx 10^{-24}$ см², мы получим при $n \approx 5 \cdot 10^{23}$ $l_0 \approx 10^{-3}$ см.

Формула (39.23) относится к монокристаллу.

Для того чтобы получить сечение упругого рассеяния нейтронов в поликристаллах, нужно усреднить в выражении (39.23) первое слагаемое, содержащее δ -функцию, по направлениям τ (при заданной величине абсолютного значения τ). При этом δ -функция от $\frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} - 2\pi\tau$ заменится δ -функцией от $\frac{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|}{\hbar} - 2\pi\tau$, и мы получим следующее выражение для усреднённого сечения, отнесённого к одному ядру и единице телесного угла:

$$\bar{\sigma} = \left[\frac{\sigma_0}{8\pi\Delta\tau^2} \frac{n'}{n} \bar{S}_\tau \delta\left(\frac{2p}{\hbar} \sin \frac{\vartheta}{2} - 2\pi\tau\right) + \frac{1}{4\pi} \sigma' \right] e^{-2W}, \quad (39.26)$$

где \bar{S}_τ — среднее значение S_τ при заданной величине τ и ϑ — угол между векторами \mathbf{p}' и \mathbf{p} . [Коэффициент при δ -функции

находится из условия, что интеграл от первого слагаемого в (39.26) по $4\pi\tau^2 d\tau$ равен интегралу от первого слагаемого в (39.23) по $d\tau_x d\tau_y d\tau_z$.

Аналогичной формулой определяется, как известно, рассеяние рентгеновских лучей в поликристаллах.

Определим интегральное сечение упругого рассеяния нейтронов. Проинтегрируем для этого (39.26) по углу рассеяния, т. е. по $d\vartheta = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$, и кроме того просуммируем первое слагаемое по всем допустимым векторам обратной решётки. Легко видеть, что абсолютное значение τ не должно превосходить $\frac{k}{\pi}$, где $k = \frac{p}{\hbar}$. В результате мы получим следующее выражение для интегрального сечения упругого рассеяния:

$$\sigma_s = \frac{\pi}{2\Delta k^2} \frac{n'}{n} \sigma_0 \sum_{\tau \leq \frac{k}{\pi}} \frac{1}{\tau} S_{\tau} e^{-2W_{\tau}} + \frac{1}{2} \sigma' \int_0^{\pi} e^{-2W} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (39.26')$$

где W_{τ} — значение W при $\mathbf{p}' - \mathbf{p} = 2\pi\hbar\tau$; суммирование распространяется на все возможные векторы обратной решётки, абсолютное значение которых не превосходит $\frac{k}{\pi}$.

Если воспользоваться формулой (39.17) для W , то мы получим

$$W_{\tau} = 6\pi^2 \frac{\hbar^2 \tau^2}{M\theta} \left[\frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \right].$$

Входящий в (39.26') интеграл равен при этом

$$\int_0^{\pi} e^{-2W} \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^{\pi} e^{-\frac{\alpha}{2}(1-\cos \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta = 2 \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha},$$

где

$$\alpha = 24 \frac{m}{M} \frac{E}{\theta} \left[\frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \right]$$

(m — масса нейтрона, E — его энергия). Поэтому (39.26') приобретает вид

$$\sigma_s = \frac{\pi}{2\Delta k^2} \frac{n'}{n} \sigma_0 \sum_{\tau \leq \frac{k}{\pi}} \frac{1}{\tau} S_{\tau} e^{-2W_{\tau}} + \sigma' \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}. \quad (39.27)$$

Отметим, что при низких температурах, когда $T \ll \theta$, $\frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \approx \left(\frac{T}{\theta}\right)^2$; при высоких температурах, когда

$$T \gg \theta, \quad \frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \approx \frac{T}{\theta}.$$

Рассмотрим подробнее выражение (39.27). Первое слагаемое в (39.27) определяет интерференционное рассеяние. Оно, очевидно, исчезает, если волновой вектор нейтрона k меньше $\pi\tau_{\min}$, где τ_{\min} — наименьшее значение длины вектора обратной решётки (в простой кубической решётке $\tau_{\min} = \frac{1}{a}$, a — постоянная прямой решётки)*).

Таким образом, при $k < \pi\tau_{\min}$ в формуле (39.27) остаётся только второе слагаемое, определяющее некогерентное рассеяние нейтронов. Когерентное рассеяние нейтронов, волновой вектор которых меньше $\pi\tau_{\min}$, невозможно. Рассеяние таких длинноволновых нейтронов обусловлено, следовательно, только наличием изотопов и существованием механических моментов ядер.

Длина свободного пробега нейтронов, волновой вектор которых меньше $\pi\tau_{\min}$ (по отношению к рассеянию), равняется

$$l_s = \frac{1}{nc'} \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}}.$$

С ростом энергии, благодаря уменьшению теплового фактора $e^{-\alpha}$, l_s возрастает. Это имеет место также и при увеличении температуры.

Если ядра решётки не имеют изотопов и не обладают механическими моментами, то упругое рассеяние нейтронов,

*) В случае гексагональной решётки, к которой относится графит, базисные векторы обратной решётки определяются следующим образом. Если основные периоды решётки суть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, причём $a_1 = a_2 = a$, $\sphericalangle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = 60^\circ$, $\mathbf{a}_3 \perp \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, то базисные векторы обратной решётки, которая также является гексагональной, равны $b_1 = b_2 = \frac{2}{\sqrt{3}a}$,

$b_3 = \frac{1}{a_2}$, причём $\sphericalangle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 = 60^\circ$, $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$.

Для графита $a = 2,46 \text{ \AA}$, $a_2 = 6,80 \text{ \AA}$ [114].

волновой вектор которых меньше $\pi\tau_{\min}$, становится невозможным.

Ниже будет показано, что неупругое рассеяние нейтронов, волновой вектор которых меньше $\pi\tau_{\min}$, в этих условиях также невозможно.

Отсюда следует, что если на кристалл с тождественными ядрами падает пучок тепловых нейтронов, то в направлении первоначального пучка, после выхода из кристалла, будут двигаться только такие нейтроны, волновой вектор которых меньше $\pi\tau_{\min}$. Таким образом, можно отфильтровать очень медленные или, как их называют, «холодные» нейтроны.

В качестве примера решётки, ядра которой не имеют изотопов и не обладают моментами, можно указать графит. Используя графит в качестве фильтра для очень медленных нейтронов, удалось получить нейтроны с энергией около 18°K [108].

Заметим, что жидкий гелий II должен обладать аналогичными свойствами в смысле выделения очень медленных нейтронов. Расчёты показывают, что для нейтронов с энергией $\sim 4^\circ\text{K}$, гелий II является «прозрачным» [109].

Выясним теперь, как ведёт себя сечение упругого рассеяния нейтронов при возрастании их энергии. Выше мы говорили, что если $k < \pi\tau_1$ ($\tau \equiv \tau_{\min}$), то когерентное рассеяние отсутствует. При $k = \pi\tau_1$ сечение скачком возрастает на величину $\frac{\sigma_0}{2\pi\Delta\tau_1^3} \frac{n'}{n} Se^{-2W\tau_1}$. Если энергия нейтрона не лежит

в области резонансных уравнений ядер решётки, то σ_0 и σ' могут считаться не зависящими от энергии нейтрона, и при дальнейшем возрастании энергии вплоть до значения $k = \pi\tau_2$ (τ_2 — второе в порядке возрастания значение τ) сечение, обусловленное интерференционным членом, монотонно убывает обратно пропорционально энергии нейтрона.

При $k = \pi\tau_2$ сечение снова скачком возрастает [в (39.27) теперь входят два члена] и затем вплоть до $k = \pi\tau_3$ (τ_3 — третье в порядке возрастания значение τ) убывает обратно пропорционально энергии нейтрона *).

*) Скачкообразная структура рассеяния в соответствии с формулой (39.27) наблюдалась экспериментально при изучении рассеяния нейтронов с энергией в интервале от 0,001 eV до 1 eV в поликристаллах Be и BeO [107].

С дальнейшим ростом энергии нейтрона скачки в сечении уменьшаются, и сечение стремится к некоторому пределу, который легко определить. Действительно, при достаточно больших ka (a — постоянная решётки) сумма, входящая в (39.27), содержит много слагаемых, и поэтому суммирование может быть заменено интегрированием по τ , точнее говоря, по $4\pi\Delta\tau^2 d\tau$ в пределах от $\tau = 0$ до $\tau = \frac{k}{\pi}$. Замечая ещё, что в этих условиях структурный фактор даёт просто число ядер в ячейке, мы получим следующее выражение для суммы, входящей в (39.27):

$$\frac{\pi\sigma_0 n'}{2\Delta k^2 n} S \sum_{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-2W\tau} = \sigma_0 \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}, \quad ka \gg 1, \quad (39.27')$$

причём мы воспользовались для W выражением (39.17). Складывая (39.27') со вторым слагаемым в (39.27), получим предельное значение сечения в виде

$$\sigma_{\infty} = (\sigma_0 + \sigma') \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}, \quad ka \gg 1. \quad (39.28)$$

Замечая, что

$$\sigma_0 + \sigma' = \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left[|A|^2 + \frac{1}{4} j(j+1) |B|^2 \right]$$

и сравнивая это выражение с выражением (39.3) для сечения рассеяния изолированными ядрами, мы видим, что даже при $\alpha = 0$, т. е. без учёта теплового фактора, (39.28) отличается от (39.3) множителем $\left(\frac{M}{m+M}\right)^2$. Наличие этого множителя связано с тем, что мы здесь рассматриваем только чисто упругое рассеяние. Общий вопрос о переходе от рассеяния связанными ядрами к рассеянию свободными ядрами рассматривается в § 41.

§ 40. Неупругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах

Перейдём теперь к рассмотрению неупругого рассеяния медленных нейтронов в кристаллах, связанного с возбуждением колебаний решётки.

В области малых энергий нейтрона наиболее вероятными являются, как мы увидим далее, однофононные процессы — испускание и поглощение одного фонона.

Определим сначала вероятность испускания фонона с импульсом \mathbf{f} и частотой $\omega_s \equiv \omega_{fj}$.

Матричный элемент энергии возмущения (39.1'), отвечающий испусканию фонона s , можно представить в виде

$$M_{\substack{\mathbf{p}, \mu, n_1, n_2, \dots, n_s, \dots, m_1, m_2, \dots \\ \mathbf{p}', \mu', n_1, n_2, \dots, n_s + 1, m_1', m_2', \dots}} = \frac{1}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{R}_l^0} \times \\ \times (\mu, m_l | A_l I + B_l (\mathbf{K}_l \mathbf{S}) | \mu', m_l') (n_s | e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{ls}} | n_s + 1) \times \\ \times \prod_r' (n_r | e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{lr}} | n_r), \quad (40.1)$$

где штрих над произведением означает, что в нём отсутствует член с $r = s$. Так как каждый множитель бесконечно мало отличается от единицы ($N \rightarrow \infty$), то \prod_r' не отличается от произведения \prod_s , входящего в матричный элемент для упругого рассеяния. Поэтому мы можем вместо \prod_r' подставить e^{-W} , где W попрежнему выражается формулой (39.16). Иными словами, тепловой фактор для рассеяния с учётом однофононных процессов не отличается от теплового фактора для упругого рассеяния.

Чтобы вычислить матричный элемент

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{ls}} | n_s + 1),$$

разложим $e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{ls}}$ в ряд, сохранив в нём первые два члена*). Пользуясь выражениями (38.2) для матричных эле-

*) При рассмотрении двухфононных процессов в разложении $e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{ls}}$ нужно сохранить первые три члена.

ментов амплитуд колебания ξ_s и ξ_s^* , получим:

$$\begin{aligned} (n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}_{1s}} | n_s + 1) = \\ = \frac{i}{\hbar} \mathbf{e}_s(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \sqrt{\frac{(n_s + 1)\hbar}{2MN\omega_s}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r}_{1s} \cdot \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (40.2)$$

Заметим, что, заменив здесь $n_s + 1$ на n_s и \mathbf{f} на $-\mathbf{f}$, мы получим матричный элемент, отвечающий поглощению фонона s . Подставляя (40.2) в (40.1), получим:

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{p}, \dots, n_s, \dots, m_s, \dots, \mu =} \\ \mathbf{p}', \dots, n_s + 1, \dots, m_s', \mu' \\ = \frac{1}{\Omega} \sum e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}_{1s}^0} (\mu, m_l | A_l I + B_l(\mathbf{K}_l \mathbf{S}) | \mu', m_l) \times \\ \times \frac{i}{\hbar} \mathbf{e}_s(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \sqrt{\frac{(n_s + 1)\hbar}{2MN\omega_s}} e^{-W}. \end{aligned} \quad (40.3)$$

Чтобы найти дифференциальное сечение рассеяния нейтрона в телесном угле $d\omega'$, которое сопровождается излучением в телесном угле $d\omega_f$ фонона с импульсом, лежащим в интервале $(f, f + df)$, нужно квадрат модуля матричного элемента (40.3) умножить на

$$\frac{mp' \Omega^3}{4\pi^2 \hbar^4 v} d\omega' \frac{f^2 df d\omega_f}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Далее необходимо, так же как и при вычислении сечения упругого рассеяния, усреднить полученное выражение по магнитным квантовым числам и возможным распределениям изотопов в решётке. В результате мы получим следующее выражение для отнесённого к одному ядру дифференциального сечения рассеяния с испусканием фонона:

$$\begin{aligned} d\sigma_+ = \left\{ \pi^2 \sigma_0 \frac{p'}{p} \left(\frac{n'}{n}\right)^2 S \delta\left(\frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f}}{\hbar} - 2\pi\boldsymbol{\tau}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2n} \sigma' \right\} \frac{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}| \mathbf{e}_s|^2}{M\hbar\omega_s} (n_s + 1) e^{-2W} \frac{f^2 df d\omega' d\omega_f}{(2\pi\hbar)^3} \end{aligned} \quad (40.4)$$

[величины σ_0 и σ' определяются формулами (39.24) и (39.25)]. При этом импульс нейтрона после рассеяния находится из закона сохранения энергии

$$\frac{p'^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} - \hbar\omega_s. \quad (40.5)$$

Дифференциальное сечение рассеяния, при котором поглощается фонон с импульсом \mathbf{f} , может быть получено из формулы (40.4), если заменить в ней $n_s + 1$ на n_s и \mathbf{f} на $-\mathbf{f}$. Это сечение имеет следующий вид:

$$d\sigma_- = \left\{ \pi^2 \sigma_0 \frac{p'}{p} \left(\frac{n'}{n} \right)^2 S \delta \left(\frac{p' - p - \mathbf{f}}{\hbar} - 2\pi\tau \right) + \frac{1}{2n} \sigma' \right\} \times \\ \times \frac{|(p' - p) e_s|^2}{M \hbar \omega_s} n_s e^{-2W} \frac{f^2 df d\sigma' d\sigma_f}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (40.6)$$

Первое слагаемое в (40.4) и (40.6) обуславливает резкие максимумы интенсивности рассеянных нейтронов, определяемые условиями

$$p' - p + \mathbf{f} = 2\pi\hbar\tau, \quad (40.7)$$

$$p' - p - \mathbf{f} = 2\pi\hbar\tau. \quad (40.8)$$

Рассмотрим подробнее интерференционные условия в случае испускания фонона. Ради простоты мы не будем учитывать дисперсию фононов и анизотропию скорости распространения колебаний, т. е. положим $\hbar\omega = sf$, где s — скорость звука. Из (40.7) и (40.5) легко вывести, что

$$\frac{1}{2} (v + v') (f - 2\pi\hbar\tau) = sf,$$

где v и v' — скорости нейтрона до и после рассеяния. Это соотношение показывает, что если $\tau = 0$ и $v < s$, то условия (40.7) и (40.5) одновременно не могут быть выполнены. Иными словами, при точном выполнении закона сохранения импульса испускание фононов нейтронами, скорость которых меньше скорости звука, невозможно. Оно становится, однако, возможным, если $\tau \neq 0$. В этом заключается роль процессов «переброса», при которых не соблюдается закон сохранения импульса.

Заметим, что если $v < s$ и $\tau = 0$, то поглощение фонона возможно, но при этом должно выполняться условие

$f \gg 2m(s - v)$, которое часто противоречит условию $f \leq f_0$, где f_0 — максимальное значение f , равное θ/s (θ — температура Дебая).

Условия (40.5) и (40.7) допускают наглядную геометрическую интерпретацию. Если ввести переменную $x = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$, то легко получить неравенства

$$x + f \geq 2\pi\hbar\tau, \quad |x - f| \leq 2\pi\hbar\tau,$$

откуда

$$p + \sqrt{p^2 - 2msf} \geq x \geq p - \sqrt{p^2 - 2msf}.$$

Этими неравенствами определяется некоторая область допустимых значений x и f , которая изображена на рис. 24 в виде заштрихованной площади (в качестве переменных на рис. 24 приняты

$$\xi = \frac{sf}{p^2/2m}, \quad \eta = \frac{x}{2p},$$

$$\tau^* = \frac{\pi\hbar\tau}{p}, \quad \beta = \frac{1}{4} \frac{v}{s}.$$

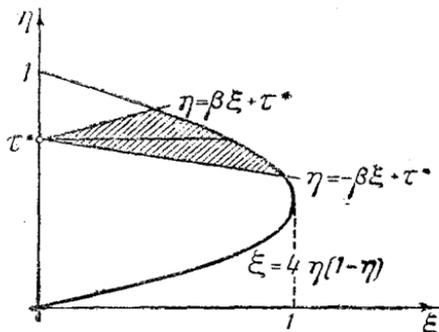


Рис. 24.

Если при заданном импульсе нейтрона (т. е. при заданной величине β) увеличивать τ^* , то заштрихованная площадь будет уменьшаться и при некотором значении τ^* вовсе исчезнет. Это максимально допустимое значение τ^* определяется, очевидно, из того условия, что прямая, угловой коэффициент которой равен $-\beta$, касается параболы $\xi = 4(\eta - \eta^2)$. Точка пересечения касательной с осью η даёт максимально возможное τ^* , как функцию β . Легко убедиться в том, что если $\beta \leq \frac{1}{4}$, т. е. если $v \leq s$, то максимально возможное значение τ^* равняется единице; иными словами, если $v < s$, то при рассеянии, сопровождающемся испусканием фонона, возможные значения τ , так же как и при упругом рассеянии, не превосходят k/π . Если $v > s$, то максимально возможное значение τ^* равняется:

$$\tau_{\max}^*(v) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{v}{s}\right) \left(1 + \frac{s}{v}\right). \quad (40.9)$$

Предположим, что скорость нейтрона меньше скорости звука; если при этом импульс нейтрона меньше $\pi\hbar\tau_1$ ($\tau_1 \equiv \tau_{\text{min}}$), то неупругое интерференционное рассеяние с испусканием фонона невозможно*). При этом неупругое рассеяние является некогерентным и обуславливается только наличием изотопов и механических моментов ядер [оно определяется вторым слагаемым формулы (40.4)]. В случае тождественных ядер, спин которых равен нулю, некогерентное рассеяние отсутствует.

Рассмотрим более подробно некогерентное рассеяние, определяемое вторым слагаемым формулы (40.4). Найдём дифференциальное сечение рассеяния, при котором конечная энергия нейтрона находится в интервале dE' . Интегрируя второе слагаемое (40.4) по направлениям импульса испущенного фонона и суммируя по состояниям его поляризации, получим:

$$d\sigma_+ = \sigma' \frac{p'}{p} \frac{(p' - p)^2}{2M} \frac{\hbar\omega d(\hbar\omega) d\omega'}{(2\pi\hbar)^3 ns^3} \left(1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}\right) e^{-2W}, \quad (40.10)$$

где $d\omega'$ — элемент телесного угла, в котором находится импульс нейтрона после рассеяния, $\hbar\omega' = \frac{1}{2m}(p^2 - p'^2)$.

При выводе (40.10) мы не учитывали дисперсии фононов и анизотропии скорости распространения колебаний в кристалле.

Если исходить из модели изотропного тела и попрежнему не учитывать дисперсии, то следует величину s^{-3} заменить на $\frac{1}{3}(s_l^{-3} + 2s_t^{-3})$, где s_l и s_t — скорости продольных и поперечных колебаний.

Проинтегрируем (40.10) по углам $d\omega'$. Не учитывая теплого фактора, мы получим следующее выражение для отнесённого к одному ядру дифференциального сечения рассеяния нейтрона с потерей энергии между $E - E'$ и $E - E' - dE'$:

$$d\sigma_+ = \frac{1}{\pi^2} \sigma' \sqrt{\frac{m}{2M}} \sqrt{\frac{E'}{Ms^2}} \frac{E^2 - E'^2}{\hbar^3 s^2 v n} (n_\omega + 1) dE' \quad (40.11)$$

(n_ω — планковская функция).

*) Это рассеяние можно назвать также неупругим когерентным рассеянием.

Умножив $d\sigma_+$ на vn , найдём вероятность того, что энергия нейтрона в результате рассеяния попадает в интервал E' , $E' - dE'$.

Выражение (40.11) показывает, что вероятность неупругого рассеяния растёт с увеличением потерянной энергии, так что главную роль при неупругом рассеянии играют переходы с большой потерей энергии, порядка начальной энергии нейтрона.

Заменив в (40.11) $n_{\omega} + 1$ на n_{ω} и $E^2 - E'^2$ на $E'^2 - E^2$, получим выражение для сечения поглощения фонона, энергия которого лежит в интервале $(E' - E, E' - E + dE')$:

$$d\sigma_- = \frac{1}{\pi^2} \sigma' \sqrt{\frac{m}{2M}} \sqrt{\frac{E'}{Ms^2} \frac{E'^2 - E^2}{\hbar^3 s^3 v n}} n_{\omega} dE'. \quad (40.12)$$

Формулы (40.11) и (40.12) определяют сечения неупругого рассеяния в области очень малых энергий нейтрона, когда первое слагаемое (40.4) и (40.6), описывающее интерференционное рассеяние, отсутствует, т. е. когда $v < s$ и $v < \frac{\pi \hbar \tau}{m}$.

Проинтегрировав (40.11) по E' в пределах от нуля до E , найдём интегральное сечение рассеяния с испусканием фонона. В области низких температур ($T \ll \theta$) оно имеет следующий вид:

$$\sigma_+ = \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \sigma' \quad (40.13)$$

[температура Дебая θ определена здесь как $\theta = (6\pi^2)^{1/3} \hbar s n^{1/3}$].

Если $v < s$ и $v < \frac{\pi \hbar \tau_1}{m}$, то сечение упругого рассеяния сводится к σ' и отношение сечений неупругого и упругого рассеяния равняется

$$\frac{\sigma_+}{\sigma_s} = \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3. \quad (40.13')$$

Легко убедиться, что если $v < s, \frac{\pi \hbar \tau_1}{m}$, то $E < \theta$. Поэтому $\frac{\sigma_+}{\sigma_s}$ меньше единицы. С ростом энергии это отношение быстро увеличивается.

Выясним, как ведёт себя сечение неупругого рассеяния с ростом энергии нейтрона.

При некотором значении энергии нейтрона в общем выражении (40.4) начинает играть роль первое слагаемое, определяющее неупругое когерентное рассеяние.

Если $\pi\hbar\tau_1 < ms$, то интерференционное рассеяние начинается при скорости нейтрона $v_0 = \frac{\pi\hbar\tau_1}{m}$, причём вначале возможно лишь одно значение τ , равное τ_1 . При увеличении скорости v от v_0 до s постепенно включаются другие значения τ (заметим, что v_0 по порядку величины равно s).

Если решётка такова, что $\pi\hbar\tau_1 > ms$, то интерференционное рассеяние начинается при скорости нейтрона, равной скорости звука. В этом случае вначале возможно только значение $\tau = 0$, отвечающее точному выполнению закона сохранения импульса в решётке. Процессы переброса ($\tau \neq 0$) становятся возможными при скоростях нейтрона $v > s$. Скорость нейтрона, при которой допускается значение τ_1 , определяется согласно (40.9) из уравнения

$$\tau_{\max}^* \equiv \frac{1}{4} \left(1 + \frac{v}{s}\right) \left(1 + \frac{s}{v}\right) = \tau_1^*.$$

Для получения полного сечения рассеяния с испусканием фона нужно проинтегрировать (40.4) по $df d\theta' d\theta_f$ и просуммировать первое слагаемое по всем допустимым значениям вектора обратной решётки τ . Чтобы не усложнять формул, приведём результат для случая простой решётки ($n = n'$, $S = 1$):

$$\begin{aligned} \sigma_+ = \frac{1}{4} \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{v}{s}\right)^2 \sum_{\tau^*}^{\tau^* \leq \tau_{\max}^*(v)} \frac{1}{\tau^*} \int (n_\omega + 1) e^{-2W} \eta^2 d\eta d\xi + \\ + \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \sigma'. \end{aligned} \quad (40.14)$$

Если $v < 4s$, то при интегрировании по η можно заметить подинтегральную функцию в первом слагаемом её значением при $\eta = \tau^*$ и считать интервал изменения η равным

23ξ. Выполнив интегрирование, мы получим следующий результат:

$$\sigma_+ = \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{p}{ms} \right)^3 \sum_{\tau^*}^{\tau^* \leq 1} \left[\tau^{*3} (1 - \tau^*)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \tau^{*2} \left(\frac{T}{E} \right)^2 \int_0^{4\pi^*(1-\tau^*) \frac{E}{T}} \frac{z dz}{e^z - 1} \right] e^{-2W_\tau} + \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta} \right)^3 \sigma', \quad (40.15)$$

где

$$W_\tau = 12 \frac{m}{M} \frac{E}{\theta} \tau^{*2} \left[\frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D \left(\frac{\theta}{T} \right) \right].$$

Как указывалось выше, по мере увеличения энергии нейтрона возрастает число допустимых значений вектора обратной решётки.

В предельном случае $ka \gg 1$ (a — постоянная решётки) число возможных значений τ очень велико и поэтому суммирование по τ может быть заменено интегрированием*). В результате интегрирования устраняются δ -функции от импульса, входящие в формулы (40.4), (40.6) и (39.23).

Пренебрегая тепловым фактором, получим следующие выражения для сечений неупругого рассеяния:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_+ &= \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta} \right)^3 (\sigma_0 + \sigma'), & ka \gg 1, \\ \sigma_s &= \sigma_0 + \sigma', & ka \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (40.16)$$

Мы видим, что отношение $\frac{\sigma_+}{\sigma_s}$ при $ka \gg 1$ равно $\frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta} \right)^3$. Такой же вид имеет это отношение в области очень малых энергий ($k < \pi\tau_1$), когда невозможно выполнение интерференционных условий и рассеяние обуславливается существованием изотопов и механических моментов ядер (если кристалл построен из абсолютно тождественных ядер, момент которых равен нулю, то рассеяние нейтронов при условии $k < \pi\tau_1$ невозможно).

*) Условие $ak \gg 1$ выполняется для тепловых нейтронов при комнатной температуре.

При выполнении условия $ka \gg 1$ рассеяние нейтронов в решётках с тождественными и отличающимися ядрами (если отличие вызывается существованием изотопов и механических моментов ядер) происходит одинаково. Это связано с тем, что при достаточно больших k , как было разъяснено выше, устраняются δ -функции от импульса, т. е. устраняются интерференционные условия. Эти условия отсутствуют также в решётках с нетождественными ядрами, поэтому при $ka \gg 1$ стирается различие между обоими видами решёток.

В двух предельных случаях $ka \gg 1$ и $k < \pi\tau_1$ сечение рассеяния, сопровождающегося излучением фонона, определяется одним и тем же выражением:

$$\sigma_+ = 24 \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \int_0^1 \xi \left(1 + \frac{1}{e^{E\xi/T} - 1}\right) d\xi \times$$

$$\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \xi}) \int \eta^3 e^{-W\eta^2} d\eta, \quad (40.17)$$

$$\frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - \xi})$$

где

$$\sigma_s = \sigma_0 + \sigma', \quad \text{если } ka \gg 1 \quad \text{и} \quad \sigma_s = \sigma', \quad \text{если } k < \pi\tau_1;$$

$$W = 24 \frac{m}{M} \frac{E}{\theta} \left[\frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \right].$$

Пренебрегая тепловым фактором, мы получим отсюда следующие соотношения. Если $T \ll E$, то

$$\sigma_+ \approx \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \left[\frac{8}{7} + \pi^2 \left(\frac{T}{E}\right)^2 \right]; \quad (40.18)$$

если $T \gg E$, то

$$\sigma_+ \approx \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \left[\frac{8}{7} + \frac{16}{5} \frac{T}{E} \right]. \quad (40.19)$$

Так как при $E \ll \theta$ главную роль играют однофононные процессы (см. ниже), то в этой области энергии приведённые формулы определяют полное сечение неупругого рассеяния нейтронов с передачей энергии решётке.

Сечение неупругого рассеяния нейтронов с поглощением фонона при выполнении условия $ka \gg 1$ или условия $k < \pi\tau_1$, имеет вид (мы пренебрегаем тепловым фактором)

$$\sigma_- = 3 \frac{m}{M} \sigma_s \frac{E}{\theta} \left(\frac{T}{\theta}\right)^2 \int_0^{\theta/T} \frac{(2 + \frac{T}{E} z) \sqrt{1 + \frac{T}{E} z} dz}{e^z - 1}. \quad (40.20)$$

При низких температурах $T \ll \theta$ мы получим отсюда:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_- &= \pi^2 \frac{m}{M} \sigma_s \frac{E}{\theta} \left(\frac{T}{\theta}\right)^2, & \text{если } T \ll E, \\ \sigma_- &= 3\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{T}{E}\right)^{1/2} \left(\frac{T}{\theta}\right)^3, & \text{если } T \gg E \end{aligned} \right\} \quad (40.21)$$

(Γ — гамма-функция).

При высоких температурах $T \gg \theta$ сечение σ_- имеет вид

$$\sigma_- = 6 \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^2 \frac{T}{\theta} \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{\theta}{E}\right)^{3/2} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \left[\left(1 + \frac{\theta}{E}\right)^{5/2} - 1 \right] \right\}; \quad (40.22)$$

если $E \ll \theta$, то

$$\sigma_- = \frac{6}{5} \frac{m}{M} \sigma_s \frac{T}{\theta} \left(\frac{\theta}{E}\right)^{1/2}. \quad (40.22')$$

Приведём ещё формулу для изменения энергии нейтрона на единице пути:

$$-\frac{dE}{dx} = N \sum_{\tau} \int \hbar \omega (d\sigma_+ - d\sigma_-),$$

где N — число ядер в единице объёма.

Пренебрегая тепловым фактором и считая, что $ak \gg 1$ (или $k < \pi\tau_1$), получим следующее выражение для $-\frac{dE}{dx}$:

$$-\frac{dE}{dx} = 3 \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^4 \theta N \left\{ \int_0^1 (2 - \xi) \sqrt{1 - \xi} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{e \frac{E\xi}{T} - 1} \right) \xi^2 d\xi - \int_0^{\theta/E} \frac{(2 + \xi) \sqrt{1 + \xi^2} d\xi}{e \frac{E\xi}{T} - 1} \right\}. \quad (40.23)$$

Легко показать, что если $\theta \gg E \gg T$, то

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{64}{105} \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^4 \theta N; \quad (40.24)$$

если $E \ll \theta \ll T$, то

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{2}{7} \frac{m}{M} \sigma_s \sqrt{\frac{\theta}{E}} TN. \quad (40.25)$$

До сих пор мы рассматривали только однофоновые процессы. Покажем теперь, что в области малых энергий нейтрона и при достаточно низких температурах, когда выполняются условия $E \ll \theta$ и $T \ll \theta$, однофоновые процессы играют основную роль. Чтобы убедиться в этом, вычислим вероятность испускания двух фононов. С этой целью нужно взять в разложении $e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}}$ в ряд по степеням \mathbf{u} квадратичный член и найти его матричный элемент. Вероятность перехода пропорциональна

$$\frac{|\langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} | \mathbf{e}_1 | \rangle|^2}{\hbar^2} \frac{\hbar (n_1 + 1)}{2MN \omega_1} \frac{|\langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} | \mathbf{e}_2 | \rangle|^2}{\hbar^2} \frac{\hbar (n_2 + 1)}{2MN \omega_2},$$

где ω_1 и ω_2 — частоты фононов, \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — единичные векторы в направлении колебаний и n_1 и n_2 — числа фононов.

По сравнению с вероятностью однофоновых процессов сюда входит дополнительный множитель

$$g = \frac{|\langle \mathbf{p}' - \mathbf{p} | \mathbf{e}_2 | \rangle|^2}{\hbar^2} \frac{\hbar (n_2 + 1)}{2MN \omega_2},$$

среднее значение которого мы и должны оценить. Умножая g на число состояний фонона ω_2 , равное $\frac{\Omega \omega_2^2 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi s)^3}$ (s — скорость звука) и суммируя по состояниям поляризации фонона, найдём, что среднее значение g по порядку величины равняется

$$\bar{g} \approx \frac{\rho^2 a^3}{M \hbar s^3} \int_0^{E/\hbar} \omega_2 d\omega_2 \approx \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3,$$

где θ определяется как $\hbar \omega_{\max} \approx \frac{\hbar s}{a}$ (a^3 — объём, приходящейся на одно ядро). Верхний предел в этом интеграле мы

считаем равным $\frac{E}{\hbar}$, так как по условию $E \ll \theta$; множитель $n_2 + 1$ заменён единицей, так как $T \ll \theta$.

Сечение рассеяния нейтрона с испусканием одного фонона равно $\frac{8}{7} \sigma_s \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3$. Поэтому сечение рассеяния с испусканием двух фононов пропорционально $\left(\frac{m}{M}\right)^2 \left(\frac{E}{\theta}\right)^6$.

Мы видим, таким образом, что если $E \ll \theta$ и $T \ll \theta$, то однофононные процессы дают первый член в разложении сечения неупругого рассеяния в ряд по степеням энергии нейтрона. Точнее говоря, разложение происходит по степеням $\frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3$; эта величина при сделанных предположениях значительно меньше единицы.

§ 41. Переход к рассеянию свободными ядрами

Перейдём теперь к выводу общей формулы для эффективного сечения рассеяния нейтронов в кристаллах с учётом поглощения и испускания любого числа фононов.

Для определённости будем считать решётку состоящей из тождественных ядер. Пусть попрежнему \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы нейтрона до и после рассеяния, n_1^0, n_2^0, \dots и n_1, n_2, \dots — совокупности чисел фононов в начальном и конечном состояниях решётки.

Интересующая нас вероятность перехода имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{A}{\Omega}\right)^2 \times \\ & \times \left| \sum_{n_1, n_2, \dots} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} (n_1^0, n_2^0, \dots) \left| e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{r}_l} | n_1, n_2, \dots \right|^2 \right. \times \\ & \left. \times \delta \left[E' + \sum_s (n_s - n_s^0) \hbar \omega_s - E \right], \quad (41.1) \right. \end{aligned}$$

где E и E' — значения энергии нейтрона до и после рассеяния.

Входящий сюда матричный элемент можно представить в виде

$$\begin{aligned} (n_1^0, n_2^0, \dots | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_l} | n_1, n_2, \dots) = \\ = \prod_s (n_s^0 | e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}_{ls}} | n_s) \equiv \prod_s M_{n_s^0, n_s}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{u}_{ls} = \mathbf{e}_s \left(\xi_s e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_l^0} + \xi_s^* e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_l^0} \right).$$

Так же, как и в § 38, мы можем ограничиться рассмотрением только тех случаев, когда n_s отличается от n_s^0 не больше чем на единицу. Вводя для краткости обозначение

$$q_s^2 = \frac{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 |\mathbf{e}_s|^2}{2MN\hbar\omega_s},$$

имеем с точностью до N^{-2} [см. (38.7) и (38.8)]:

$$|M_{n_s^0, n_s^0}|^2 = 1 - (2n_s^0 + 1) q_s^2,$$

$$|M_{n_s^0, n_s^0 + 1}|^2 = (n_s^0 + 1) q_s^2,$$

$$|M_{n_s^0, n_s^0 - 1}|^2 = n_s^0 q_s^2.$$

Используя представление δ -функции в виде

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\mu} d\mu$$

и переходя от вероятности ω к дифференциальному сечению $d\sigma$, отнесённому к одному ядру, получим:

$$\begin{aligned}
 d\sigma = & \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} d\omega' dE' \times \\
 & \times \int \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{R}_l^0} \right|^2 \prod_s [1 - (2n_s + 1)q_s^2] + \right. \\
 & + \sum_s \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f})\mathbf{R}_l^0} \right|^2 (n_s + 1)q_s^2 e^{i\mu\hbar\omega_s} + \\
 & + \sum_s \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{f})\mathbf{R}_l^0} \right|^2 n_s q_s^2 e^{-i\mu\hbar\omega_s} + \\
 & + \sum_s \sum_{s'} \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f} + \mathbf{f}')\mathbf{R}_l^0} \right|^2 \times \\
 & \times (n_s + 1)(n_{s'} + 1)q_s^2 q_{s'}^2 e^{i\mu(\hbar\omega_s + \hbar\omega_{s'} + \dots)} \left. \right\} \times \\
 & \times e^{i\mu(E' - E)} d\mu, \quad (41.2)
 \end{aligned}$$

где $d\omega'$ — элемент телесного угла, в котором находится импульс нейтрона \mathbf{p}' после рассеяния. Ради простоты из многофононных процессов здесь выписан только один член, отвечающий возникновению двух фононов \mathbf{f} и \mathbf{f}' .

Входящие в (41.2) \sum_l дают δ -функции от импульса; если энергия нейтрона достаточно велика (а нас интересует именно этот случай), то, как мы видели в предыдущих параграфах, δ -функции можно вовсе не учитывать. Используя это обстоятельство и пренебрегая всеми степенями q_s^2 выше первой, получим:

$$\begin{aligned}
 d\sigma = & \frac{p'}{p} \frac{\sigma_0}{8\pi^2} d\omega' dE' \int e^{i\mu(E' - E)} \times \\
 & \times \left\{ 1 - \sum_s [(2n_s + 1)q_s^2 + (n_s + 1)q_s^2 e^{i\mu\hbar\omega_s} + n_s q_s^2 e^{-i\mu\hbar\omega_s}] \right\} d\mu.
 \end{aligned}$$

Учитывая малость q_s^2 , можно представить $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{8\pi^2} d\sigma' dE' \frac{p'}{p} \int e^{i\mu(E'-E) + g(\mu)} d\mu, \quad (41.3)$$

где

$$g(\mu) = \sum_s [(n_s + 1) e^{i\mu\hbar\omega_s} + n_s e^{-i\mu\hbar\omega_s} - 2n_s - 1] q_s^2.$$

Вместо n_s сюда следует, очевидно, подставить планковскую функцию.

Напомним, что эта же функция $g(\mu)$ входит и в выражение для вероятности захвата нейтрона в кристалле [см. формулу (38.11)].

Выполнить интегрирование в формуле (41.3) в общем виде не представляется возможным. Поэтому мы, так же как и в § 38, ограничимся рассмотрением двух предельных случаев — большой и малой передачи энергии, для которых несущественны значения μ , лежащие вблизи $\mu \sim \frac{1}{\theta}$. В первом из этих случаев существенны малые μ , $|\mu\theta| \ll 1$ и $g(\mu)$ определяется формулой

$$g(\mu) = i\mu\theta \frac{R}{\theta} - (\mu\theta)^2 \frac{R\varepsilon_0}{\theta^2},$$

где R — энергия отдачи ядра, равная $R = \frac{(p' - p)^2}{2M}$. Этот случай имеет место при выполнении условия

$$R\varepsilon_0 \gg \theta^2, \quad (41.4)$$

где ε_0 определяется формулой (38.15).

Во втором случае — случае малых передач энергии — выполняется условие

$$R\varepsilon_0 \ll \theta^2 \quad (41.4')$$

и $g(\mu)$ определяется формулой

$$g(\mu) \approx -\frac{3(p' - p)^2}{M\theta^3} \int_0^{\infty} \left(\bar{n}_s + \frac{1}{2}\right) \varepsilon d\varepsilon \equiv -2W, \quad (41.5)$$

где W — тепловой фактор, введённый в § 39.

В случае больших передач энергии эффективное сечение $d\sigma$ имеет вид:

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{8\pi^2} dE' d\phi' \frac{p'}{p} \int e^{i\mu(E' - E + R) - \mu^2 R \varepsilon_0} d\mu = \\ = \frac{\sigma_0}{8\pi^{3/2}} \frac{p'}{p} \frac{d\phi' dE'}{\sqrt{R\varepsilon_0}} e^{-\frac{1}{4} \frac{(E' - E + R)^2}{R\varepsilon_0}}. \quad (41.6)$$

Это выражение можно приближённо заменить следующим:

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{4\pi} \frac{p'}{p} \delta(E' - E + R) dE' d\phi'. \quad (41.7)$$

Смысл формулы (41.7) очевиден: нейтрон рассеивается по закону столкновения упругих шаров; связь атомов в кристалле не играет роли.

Таким образом, при больших передачах энергии рассеяние нейтронов в кристалле не отличается от рассеяния отдельными ядрами.

Рассмотрим теперь случай малых передач энергии.

Пользуясь асимптотической формулой (41.5) для $g(\mu)$, представим $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} d\phi' dE' e^{-2W} \int e^{i\mu(E' - E)} d\mu = \\ = \frac{\sigma_0}{4\pi} e^{-2W} \delta(E' - E) dE' d\phi'. \quad (41.8)$$

Мы получили формулу для сечения упругого рассеяния. Проинтегрировав (41.8) по $dE' d\phi'$, найдём полное сечение упругого рассеяния, совпадающее с выведенным ранее выражением.

Таким образом, при выполнении условия $R\varepsilon_0 \ll \theta^2$ имеет место главным образом упругое рассеяние, сечение которого мало отличается от σ_0 , так как тепловой фактор практически равен единице.

С ростом энергии сечение упругого рассеяния уменьшается, и одновременно всё большую роль приобретает неупругое рассеяние, возникающее от следующих членов разложения $\exp g(\mu)$ в ряд по степеням $g(\mu)$. В области больших энергий ($E \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\varepsilon_0}$) чисто упругое рассеяние ($E' = E$) отсутствует;

главную роль играет неупругое рассеяние, происходящее по законам столкновения упругих шаров (неупругим мы его называем потому, что оно происходит с возбуждением тепловых колебаний решётки).

С увеличением энергии нейтрона меняется характер неупругого рассеяния. В области малых энергий нейтрона, при малом общем сечении неупругого рассеяния, наиболее вероятны

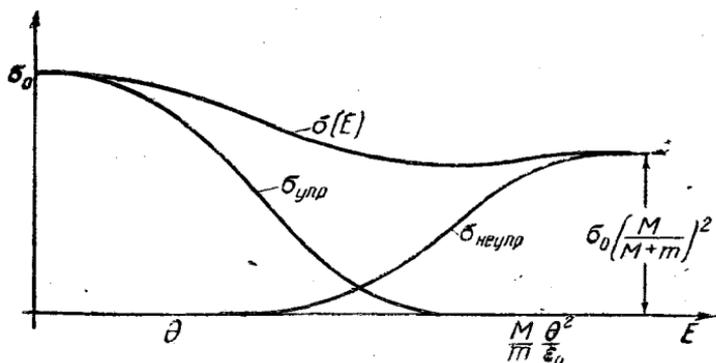


Рис. 25.

большие передачи энергии нейтрона, порядка всей его энергии. В области больших энергий, когда неупругое рассеяние составляет главную часть рассеяния, передаваемая энергия по порядку величины составляет $\frac{m}{M} E$.

На рис. 25 приведён схематически ход зависимости от энергии сечения рассеяния. Как видно из рисунка, полное сечение $\sigma(E)$ может обладать минимумом при значении энергии, лежащем между θ и $\frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\epsilon_0}$.

§ 42. Функция распределения нейтронов в кристалле

Остановимся ещё на вопросе о нахождении функции распределения нейтронов в кристалле.

Если энергия нейтрона E значительно больше, чем $\frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\epsilon_0}$ (обозначения см. в предыдущих параграфах), то связь ато-

мов в кристалле несущественна и функция распределения определяется формулой (31.16).

Результаты § 31 становятся неприменимыми в области очень малых энергий, когда $E \ll \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\varepsilon_0}$ и поэтому нельзя пренебрегать связью атомов в кристалле. Рассмотрим подробнее этот случай, причём будем предполагать, что $T \ll E$. В этом случае можно не учитывать поглощения фононов.

Вероятность перехода нейтрона с энергией E в интервал энергии dE' выражается формулой

$$w(E, E') dE' = w_0 (E^2 - E'^2) \sqrt{E'} dE', \quad (42.1)$$

где

$$w_0 = \frac{\sigma_0}{(2\pi\hbar)^3 s^2} \sqrt{\frac{2m}{M}} \frac{1}{\sqrt{Ms^2}}$$

(см. § 40).

Составим кинетическое уравнение для определения функции распределения $f(E)$.

В стационарном случае это уравнение имеет следующий вид:

$$w_0 \int_E^{E_0} (E'^2 - E^2) \sqrt{E'} f(E') dE' - \\ - w_0 \int_0^E (E^2 - E'^2) \sqrt{E'} f(E) dE' = \frac{1}{\tau_c} f(E). \quad (42.2)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой число нейтронов, приходящих в состояние с энергией E из состояний с энергией $E' > E$ (предполагается, что энергия нейтронов, испускаемых источником, значительно больше θ), второе слагаемое даёт число нейтронов, уходящих из состояния с энергией E в состояния с энергией $E' < E$. Справа стоит число нейтронов, поглощаемых ядрами в единицу времени (τ_c — время жизни нейтрона по отношению к захвату). Напомним, что в случае медленных нейтронов τ_c можно считать не зависящим от энергии нейтрона, если только в тепловой области нет резонансных уровней, так как в этом случае сечение захвата обратно пропорционально скорости нейтрона.

Выполнив интегрирование во втором слагаемом, представим кинетическое уравнение (42.2) в виде

$$\int_E^{E_0} (E'^2 - E^2) f(E') dE' = \left(\frac{8}{21} E^{7/2} + \frac{1}{\omega_0 \tau_c} \right) E^{-1/2} f(E). \quad (42.3)$$

Вводя обозначение

$$\int_E^{E_0} f(E) dE = \varphi(E)$$

и дифференцируя (42.3) по E , получим:

$$\frac{d}{dE} \left\{ E^{-1/2} \left(\frac{8}{21} E^{7/2} + \frac{1}{\omega_0 \tau_c} \right) \frac{d\varphi}{dE} \right\} = 2E\varphi(E). \quad (42.4)$$

Если ввести вместо E новую переменную x , равную

$$x = \frac{E}{E_0}, \quad E_0 = \left(\frac{21}{8} \frac{1}{\omega_0 \tau_c} \right)^{2/7},$$

то уравнение (42.4) примет вид

$$\frac{d}{dx} \left[(x^3 + x^{-1/2}) \frac{d\psi}{dx} \right] = \frac{21}{4} x\psi(x), \quad (42.5)$$

где

$$\psi(x) \equiv \varphi(E)$$

(при $x = 1$ вероятность неупругого рассеяния равна вероятности захвата).

Уравнение (42.5) имеет частное решение $\psi = x^{3/2}$; поэтому общее решение этого уравнения ищем в виде

$$\psi = x^{3/2} y(x).$$

Функция y удовлетворяет уравнению

$$(x + x^{9/2}) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(6x^{7/2} + \frac{5}{2} \right) \frac{dy}{dx} = 0,$$

которое легко интегрируется.

В результате простых выкладок получаем следующее выражение для $\psi(x)$:

$$\psi(x) = C \left\{ 1 - \frac{3}{7} x^{3/2} \sum_{k=1}^7 \omega^{4k} \ln(\sqrt{x} + \omega^k) \right\},$$

где $\omega = e^{2\pi i/7}$. Постоянная C представляет собой число нейтронов с энергией $E \gg 0$. Она равна

$$C = Q\tau_c,$$

где Q — число нейтронов, доставляемых источником в единицу времени.

Функция распределения $f(E)$ находится дифференцированием $\psi(x)$:

$$f(x) = C \left\{ \frac{9}{14} x^{1/2} \sum_{k=1}^7 \omega^{4k} \ln \left(1 + \frac{\omega^k}{\sqrt{x}} \right) - \frac{3}{2} \frac{x^{5/2}}{1+x^{7/2}} \right\}. \quad (42.6)$$

Приведём асимптотические выражения для $f(x)$.

Если $x \ll 1$, что соответствует энергиям нейтронов, меньшим, чем

$$E_0 = \left(\frac{21}{8} \right)^{2/7} \left(\frac{M}{2m} \right)^{1/7} (Ms^2)^{1/7} \left(\frac{s^2 \hbar^3}{\sigma_0 \tau_c} \right)^{2/7}, \quad (42.7)$$

то

$$f(x) \approx 2,1 C x^{1/2}. \quad (42.8)$$

Таким образом, при $x \ll 1$ функция распределения пропорциональна \sqrt{E} . Этот результат непосредственно следует из уравнения (42.2), в котором при малых энергиях ($E \ll E_0$), когда неупругое рассеяние не играет существенной роли, можно пренебречь вторым членом, дающим число нейтронов, уходящих из состояния с энергией E в состояния с энергией $E' < E$. Так как первый член, дающий число нейтронов, приходящих в состояние E из состояний с большей энергией, пропорционален \sqrt{E} , то функция распределения, равная числу таких нейтронов, разделённому на вероятность захвата (не зависящую от энергии), оказывается пропорциональной \sqrt{E} в соответствии с формулой (42.8).

Если $x \gg 1$, то

$$f(x) = \frac{21}{20} C x^{-9/2}. \quad (42.9)$$

Зависимость функции распределения от энергии при $x \gg 1$ может быть получена элементарно из рассмотрения потока

нейтронов в энергетическом пространстве. Так как при $x \gg 1$ захват мал, то должен сохраняться поток частиц в энергетическом пространстве, равный

$$f(E) \dot{E} = \text{const.}$$

Изменение энергии нейтрона в единицу времени по порядку величины равно

$$\dot{E} \approx E \sigma_+ v N,$$

где σ_+ — сечение неупругого рассеяния. Вспоминая, что $\sigma_+ \sim E^3$, получим:

$$\dot{E} \sim E^{3/2},$$

и поэтому

$$f(E) \sim E^{-3/2}.$$

Заметим, что соотношение, выведенное для \dot{E} , справедливо только по порядку величины; оно было бы точным при малых передачах энергии, в действительности же передаваемая

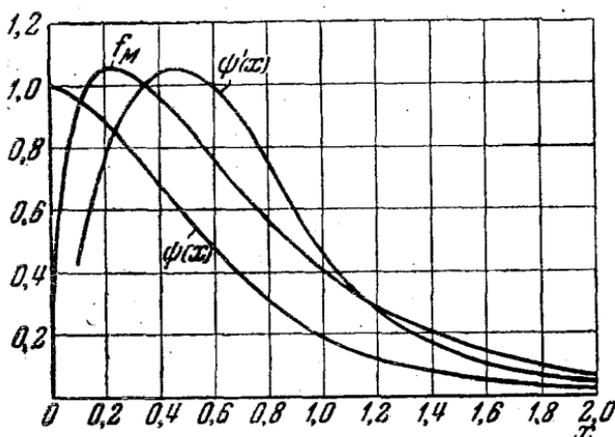


Рис. 26.

нейтроном энергия порядка E . Поэтому приведённый вывод имеет качественный характер.

Выражение для средней энергии нейтрона имеет вид

$$\bar{E} = 0,69 \left(\frac{21}{8} \sqrt{\frac{M}{2m}} \frac{\hbar^2 s^2}{\sigma_0} \frac{\sqrt{M s^2}}{\tau_c} \right)^{2/3}. \quad (42.10)$$

По порядку величины \bar{E} равно энергии E_0 , при которой вероятность неупругого рассеяния становится равной вероятности захвата. Этому соответствует то обстоятельство, что нейтроны эффективно замедляются только до энергий порядка E_0 , которыми и обладает наибольшее количество частиц.

С увеличением сечения захвата (уменьшением τ_c) средняя энергия \bar{E} медленно растёт (пропорционально $\tau_c^{-2/7}$) в соответствии с тем, что вероятность захвата сравнивается с вероятностью неупругого рассеяния при больших энергиях.

На рис. 26 показан ход функций $\psi(x)$, $\psi'(x)$. Для сравнения приведена также кривая, изображающая максвелловское распределение с той же средней энергией (кривая f_M).

§ 43. Рефракция нейтронов

В § 39 мы видели, что в кристаллах с тождественными ядрами, спин которых равен нулю, не происходит рассеяния нейтронов с длиной волны, превосходящей $(\pi\tau_1)^{-1}$.

Однако при прохождении таких медленных нейтронов из одной среды в другую они могут испытывать преломление и отражение. Эти явления можно описать макроскопически, вводя коэффициент преломления нейтронов n . Такое макроскопическое рассмотрение законно в том случае (так же, как в оптике), когда длина волны нейтронов значительно больше, чем расстояние между соседними атомами. Предполагая это условие выполненным, выведем выражение для коэффициента преломления n .

Напомним предварительно, что энергия взаимодействия медленного нейтрона с ядром может быть представлена в виде

$$A\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}),$$

где \mathbf{r} и \mathbf{R} — радиус-векторы, определяющие положение нейтрона и ядра, и A — некоторая величина, зависящая, вообще говоря, от энергии нейтрона.

В § 39 мы установили связь между A и комплексной фазой рассеяния η , определяющей асимптотическое поведение

волновой функции нейтрона. Эта связь выражается следующей формулой:

$$A = -\frac{2\pi\hbar^2}{m'k_0} \eta,$$

где k_0 — волновой вектор нейтрона в вакууме. Используя формулы (39.7), определяющие вещественную и мнимую часть η , получим следующее выражение для A :

$$A = -\frac{2\pi\hbar^2}{m'} \left(\pm \sqrt{\frac{1}{4\pi} \sigma_s - \frac{1}{16\pi^2} k_0^2 \sigma_s^2} + i \frac{k_0}{4\pi} \sigma_c \right). \quad (43.1)$$

Заметим, что знания сечений упругого рассеяния и поглощения нейтронов недостаточно для определения знака вещественной части A . Он зависит от распределения резонансных уровней составного ядра (падающий нейтрон + исходное ядро). Из формулы (39.8) следует, что резонансные уровни, лежащие выше нулевой энергии (эта энергия определяется здесь как сумма энергий нейтрона и исходного ядра), приводят к положительному знаку; резонансные уровни, лежащие ниже нулевой энергии, приводят к отрицательному знаку. Поэтому тот или иной знак вещественной части A определяется соотношением между ролью уровней, лежащих выше и ниже нуля.

Определим теперь потенциальную энергию нейтрона в кристалле. Она равна, очевидно, сумме энергий взаимодействия нейтрона со всеми ядрами решётки. Предполагая ядра тождественными и не имеющими механических моментов, получим следующее выражение для потенциальной энергии нейтрона в кристалле:

$$V = A \sum_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l), \quad (43.2)$$

где суммирование распространяется на все ядра решётки.

Будем предполагать, что длина волны нейтрона λ значительно больше расстояния между соседними атомами. В этих условиях суммирование по l может быть заменено интегрированием по ρdV , где ρ — число ядер в единице объёма; dV — элемент объёма. Поэтому энергия взаимодействия приобретает вид:

$$V = A\rho. \quad (43.3)$$

Смысл замены суммирования интегрированием заключается по существу в том, что матричные элементы операторов (43.2) и (43.3) при выполнении условия $\lambda \gg a$, где a — среднее расстояние между соседними атомами, одинаковы.

Считая выражение (43.3) потенциальной энергией нейтрона в кристалле, напишем уравнение Шрёдингера для нейтрона в кристалле

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + A\rho \psi = E\psi, \quad (43.4)$$

где E — энергия нейтрона.

Вне кристалла уравнение Шрёдингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_0 = E\psi_0. \quad (43.5)$$

Будем искать решения уравнений (43.4), (43.5) в виде плоских волн

$$\psi = C_1 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \psi_0 = C_2 e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}, \quad (43.6)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор нейтрона в среде, а \mathbf{k}_0 — в вакууме; C_1 и C_2 — константы.

Подстановка (43.6) в (43.5) и (43.4) даёт:

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + A\rho = E, \quad \frac{\hbar^2}{2m} k_0^2 = E, \quad (43.7)$$

откуда

$$k^2 - k_0^2 = 4\pi\rho \left(\pm \sqrt{\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k_0^2 \sigma_c^2}{16\pi^2}} + i \frac{k_0}{4\pi} \sigma_c \right). \quad (43.8)$$

Введём теперь коэффициент преломления нейтронов n , как это обычно делается в оптике, $n = \frac{k}{k_0}$ [52].

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi\rho}{k_0^2} \left(\pm \sqrt{\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k_0^2 \sigma_c^2}{16\pi^2}} + i \frac{k_0 \sigma_c}{4\pi} \right). \quad (43.9)$$

Если поглощение нейтронов отсутствует, то

$$n^2 - 1 = \pm \frac{\rho}{k_0^2} \sqrt{4\pi\sigma_s} = \pm \frac{\hbar^2 \rho \sqrt{4\pi\sigma_s}}{2mE}. \quad (43.10)$$

Оценим порядок величины коэффициента преломления n . Считая σ_s и σ_c по порядку величины равными 10^{-24} см², мы

получим для тепловых нейтронов ($k_0 \approx 4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$) $n^2 - 1 \approx 10^{-6}$.

Таким образом, коэффициент преломления нейтронов очень близок к единице. Аналогичное положение имеет место, как известно, и в случае рентгеновских лучей.

Зная коэффициент преломления, можно определить коэффициент отражения нейтронов, падающих на плоскую поверхность.

Используя условие непрерывности волновой функции ψ и её нормальной производной $\frac{\partial \psi}{\partial \nu}$ на границе раздела, легко получить следующее выражение для коэффициента отражения R :

$$R = \left| \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \cos \theta} \right|^2, \quad (43.11)$$

где θ — угол между направлением падающего пучка и нормалью к поверхности.

Рассмотрим подробнее случай, когда можно не учитывать поглощения нейтронов.

Если $n^2 > 1$, то R всегда меньше единицы. Если же $n^2 < 1$, то $R = 1$ для всех углов θ , которые больше θ_0 , где θ_0 определяется из условия

$$\sin \theta_0 = n. \quad (43.12)$$

Так как n очень мало отличается от единицы, то угол θ_0 близок к $\pi/2$.

Рассмотрим коэффициент отражения для углов θ , близких к $\pi/2$. Обозначая $\pi/2 - \theta$ через φ и замечая, что при малых $\varphi \cos \theta \approx \varphi$, получим из (43.11):

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu}{\varphi^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\mu}{\varphi^2}}} \right)^2, \quad (43.13)$$

где $\mu = 1 - n$.

Если $\varphi < \sqrt{2\mu}$, то имеет место полное внутреннее отражение нейтронов.

В обычных условиях угол $\sqrt{2\mu}$ порядка $10'$. Таким образом, нейтроны, падающие под скользящими углами к по-

верхности, могут испытывать полное отражение. При этом (как и в оптике) нейтронная волна экспоненциально затухает при распространении внутрь отражающего тела. Глубина проникновения волны, т. е. длина, на которой интенсивность нейтронной волны уменьшается в e раз по сравнению с её значениями на поверхности тела, равна [52]:

$$d = \frac{1}{k_0 \sqrt{\sin^2 \theta - n}} = \frac{1}{k_0 \sqrt{2\mu}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\mu}}. \quad (43.14)$$

Если $\mu \approx 10^{-6}$, то $d \approx \lambda \cdot 10^3$. В случае тепловых нейтронов $d \approx 10^{-6}$ см.

Заметим, что коэффициент преломления нейтронов в случае намагниченного парамагнитного или ферромагнитного кристалла зависит от ориентации спина по отношению к вектору магнитной индукции.

Чтобы определить коэффициент преломления нейтронов для намагниченного кристалла, нужно добавить к потенциальной энергии $A\rho$ в уравнении Шрёдингера член $-\mu\mathbf{s}\mathbf{B}$, где μ — магнитный момент нейтрона, \mathbf{s} — спиновый вектор Паули и \mathbf{B} — вектор индукции.

Взамен формул (43.7) мы получим теперь соотношения

$$k_{\pm}^2 - k_0^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} (\rho A \pm \mu B), \quad (43.15)$$

где k_+ и k_- — значения волнового вектора нейтрона (внутри кристалла), спин которого направлен соответственно по или против направления вектора магнитной индукции.

Обозначая коэффициенты преломления нейтронов для обеих ориентаций спина через n_+ и n_- , найдём в соответствии с (43.9) и (43.15) [115]

$$\left. \begin{aligned} n_+^2 &= 1 + \frac{1}{E} \left\{ \frac{2\pi\hbar^2\rho}{m} \left[\pm \left(\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k^2\sigma_c^2}{16\pi} \right)^{1/2} + i \frac{k}{4\pi} \sigma_c \right] - \mu B \right\}, \\ n_-^2 &= 1 + \frac{1}{E} \left\{ \frac{2\pi\hbar^2\rho}{m} \left[\pm \left(\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k^2\sigma_c^2}{16\pi^2} \right)^{1/2} + i \frac{k}{4\pi} \sigma_c \right] + \mu B \right\}. \end{aligned} \right\} (43.16)$$

Коэффициенты отражения нейтронов для обеих ориентаций спина равны

$$R_+ = \frac{|(n_+^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta|^2}{|(n_+^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} + \cos \theta|^2},$$

$$R_- = \frac{|(n_-^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta|^2}{|(n_-^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} + \cos \theta|^2}.$$

Так как коэффициент преломления зависит от ориентации спина нейтрона, то угол полного отражения также будет зависеть от ориентации спина по отношению к вектору индукции \mathbf{B} . Это обстоятельство может быть использовано для получения поляризованного пучка нейтронов.

Если угол падения нейтронов таков, что только нейтрон с одной ориентацией спина полностью отражается от намагниченного кристалла, то прошедшие в кристалл нейтроны будут полностью поляризованы. Отражённый луч будет при этом частично поляризован [115].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Bethe a. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc. A* **148**, 146 (1935).
2. Г. Бете и Р. Бечер, *Физика ядра*, ч. I, стр. 42, ДНТВУ (1938).
3. Г. Бете, Лекции по теории ядра, ИЛ (1949).
4. Я. Смородинский, *ДАН LX*, 217 (1948).
5. Я. Смородинский, *ЖЭТФ* **15**, 89 (1945); **17**, 941 (1947).
6. Н. Мотт и Х. Мессе, *Теория атомных столкновений*, стр. 33, ОНТИ (1936).
7. Н. Bethe, *Phys. Rev.* **76**, 38 (1949).
8. J. Kellogg, J. Rabi, N. Ramsey, J. Zacharias, *Phys. Rev.* **57**, 677 (1940).
9. W. Rarita a. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **59**, 436 (1941).
10. W. Heppner a. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc.* **181**, 43 (1943).
11. П. Дирак, Основы квантовой механики, стр. 241, ОНТИ (1937).
12. L. Alvarez a. F. Bloch, *Phys. Rev.* **57**, 111, 352 (1940).
13. W. Arnold a. A. Roberts, *Phys. Rev.* **71**, 878 (1947).
14. Е. Кондон и Г. Шортли, *Теория атомных спектров*, стр. 66, ИЛ (1949).
15. J. Schwinger a. E. Teller, *Phys. Rev.* **52**, 286 (1937).
16. Г. Бете, *Физика ядра*, ч. II, стр. 112, Гостехиздат (1948).
17. W. Jevons, Report on Band Spectra of diatomic Molecules.
18. М. Намермеш а. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **71**, 678 (1947).
19. R. Sutton, T. Hall и др., *Phys. Rev.* **72**, 1147 (1947).
20. М. Намермеш а. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **69**, 145 (1946).
21. Н. Мотт и Х. Мессе и, *loc. cit.*, стр. 113.
22. J. Hadley, E. Kelly, C. Leith, E. Segre, C. Wiegand, H. York, *Phys. Rev.* **75**, 351 (1949).
23. А. Алиханов, А. Алиханян и А. Вайсенберг, *ЖЭТФ* **18**, 301 (1948).
24. И. Померанчук и И. Шмушкевич, *ДАН LXIV*, 499, (1949).
25. И. Померанчук и И. Шмушкевич, *ДАН LXX*, 33 (1950)
- 25а. В. Я. Фейнберг и Е. Л. Фейнберг, *ДАН LXVIII* **45** (1949).
26. Н. Мотт и Х. Мессе и, *loc. cit.*, стр. 100.
27. M. White, *Phys. Rev.* **47**, 573 (1935).
28. M. Tuve, N. Heydenburg, L. Haftstad, *Phys. Rev.* **50**, 806 (1936).
29. R. Herber, D. Kerst и др., *Phys. Rev.* **55**, 998 (1939).
30. R. Wilson и др., *Phys. Rev.* **71**, 339, 384, 560 (1947).
31. Г. Бете и Р. Бечер, *loc. cit.*, стр. 81.

32. Л. Ландау и Я. Смородинский, *ЖЭТФ* **14**, 269 (1944).
33. R. Peierls a. M. Preston, *Phys. Rev.* **72**, 250 (1947).
34. Н. Мотт и Х. Месс и, *loc. cit.*, стр. 37.
35. Г. Бете и Р. Бечер, *loc. cit.*, стр. 42.
36. Е. Уиттекер и Т. Ватсон, Курс современного анализа, т. 2, стр. 139, ГТТИ (1934).
37. E. Fermi, *Phys. Rev.* **48**, 570 (1935).
38. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, стр. 119 и д., Гостехиздат (1940).
39. Л. Ландау и Е. Лифшиц, *ЖЭТФ* **18**, 750 (1948).
40. A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, гл. VI, § 4 и гл. VII, § 2 (1939).
41. S. Dancoff, *Phys. Rev.* **72**, 1017 (1947).
42. R. Serber, *Phys. Rev.* **72**, 1008 (1947).
43. N. Bohr, *Nature* **137**, 344, 350 (1936); *УФН XVI*, 425 (1936); *Nature* **141**, 326 (1938).
44. Н. Бор и Ф. Калькар, *УФН XX*, 1 (1938).
45. Л. Ландау, *ЖЭТФ* **7**, 819 (1937).
46. Я. Френкель, *Sov. Phys.* **9**, 533 (1936).
47. V. Weisskopf, *Phys. Rev.* **52**, 295 (1937).
48. Г. Бете, Физика ядра, ч. II, Гостехиздат (1948).
49. R. Peierls, *Reports on Progress in Physics VII*, 89 (1940).
50. R. Serber, *Phys. Rev.* **72**, 1114 (1947).
51. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, стр. 407, Гостехиздат (1944).
52. M. Goldberger a. F. Seitz, *Phys. Rev.* **71**, 294 (1947).
53. H. Bethe, *Phys. Rev.* **57**, 1125 (1940).
54. H. Bethe a. G. Placzek, *Phys. Rev.* **57**, 1075 A (1940).
55. А. Ахиезер и И. Померанчук, *Journ. of Phys.* **IX**, 471 (1945).
56. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, § 59, Гостехиздат (1948).
57. М. Борн, Оптика, ОНТИ (1934).
58. Е. Уиттекер и Т. Ватсон, *loc. cit.*, стр. 99, 135, 182.
59. Amaldi и др., *Nuovo Cimento* **3**, 203 (1946).
60. S. Fernbach, R. Serber, T. Taylor, *Phys. Rev.* **75**, 1352 (1949).
61. А. Ахиезер и И. Померанчук, *УФН XXXIX*, 153 (1949).
62. G. Breit a. E. Wigner, *Phys. Rev.* **49**, 519 (1936).
63. H. Bethe a. G. Placzek, *Phys. Rev.* **51**, 450 (1937).
64. В. Паули, Общие принципы волновой механики, стр. 309, Гостехиздат (1947).
65. P. Karip a. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc.* **166**, 277 (1938).
66. A. Siegert, *Phys. Rev.* **56**, 750 (1939).
67. G. Breit, *Phys. Rev.* **69**, 472 (1946).
68. E. Wigner, *Phys. Rev.* **70**, 15, 606 (1946).
69. H. Feshbach, Peaslec, V. Weisskopf, *Phys. Rev.* **71**, 145 (1947).
70. А. Ахиезер и И. Померанчук, *ЖЭТФ* **18**, 603 (1948).

71. Нейтронные эффективные сечения элементов, приложение к книге «Научные и технические основы ядерной энергетики», ИЛ, 1948.
72. W. Sturm a. S. Turkel, *Phys. Rev.* **70**, 103 (1946); L. Rainwater a. W. Havens, *Phys. Rev.* **70**, 136, 154 (1946); **71**, 65 (1947).
73. Griffiths a. Szilard, *Nature* **139**, 323 (1937).
74. Seidl и др., *Phys. Rev.* **72**, 168 (1947).
75. А. Мигдал, *ЖЭТФ* **15**, 81 (1945).
76. Г. Бете, Физика ядра, ч. II, стр. 299 и д., Гостехиздат (1948).
77. Б. Курчатов, И. Курчатов, Л. Мысовский, Л. Русинов, *S. R.* **200**, 1201 (1935).
78. И. Курчатов и Л. Русинов, Юбилейный сборник, посвящённый 30-летию Октябрьской Революции, изд. АН СССР (1947), стр. 285.
79. Weizsäcker, *Naturwiss.* **24**, 813 (1936).
80. M. Hebb a. G. Uhlenbeck, *Physica V*, 605 (1938).
81. R. Sachs, *Phys. Rev.* **57**, 194 (1940).
82. Г. Бете, Физика ядра, ч. II, стр. 188, Гостехиздат (1948).
83. I. Oppenheimer a. Phillips, *Phys. Rev.* **48**, 500 (1935).
84. Е. Лифшиц, *Sow. Phys.* **13**, 224 (1938).
85. O. Hahn u. F. Strassmann, *Naturwiss.* **27**, 11 (1939).
86. N. Bohr, *Nature* **143**, 330 (1939); *Phys. Rev.* **55**, 418 (1939).
87. N. Bohr a. J. Wheeler, *Phys. Rev.* **56**, 426 (1939).
88. Я. Френкель, *ЖЭТФ* **9**, 641 (1939).
89. В. Берестецкий и А. Мигдал, *Изв. АН СССР V*, 602 (1941).
90. К. Петржаки и Г. Флёров, *УФН XXV*, 178 (1941).
91. N. Feather, *Nature* **159**, 607 (1947); E. Wollan, Moak, Sawyer, *Phys. Rev.* **72**, 447 (1947); Tsien San Tsiang и др., *Phys. Rev.* **71**, 382 (1947).
92. Marshak, *Rev. Mod. Phys.* **19**, 185 (1947).
93. N. Bohr, *Phys. Rev.* **58**, 864 (1940).
94. Я. Зельдович и Ю. Харитон, *ЖЭТФ* **9**, 1425 (1939); **10**, 29, 477 (1940).
95. Э. Ферми, *УФН XXXII*, 54 (1947).
96. R. Peierls, *Proc. Camb. Phil.* **35**, 610 (1939).
97. E. Hopf, *Camb. Tracts in Mathematics and Mathem. Physics*, № 31, стр. 54 (1934).
98. W. Lamb, *Phys. Rev.* **55**, 190 (1939).
99. G. Wick, *Phys. Zs.* **38**, 403, 689 (1937).
100. И. Померанчук, *Sow. Phys.* **13**, 65 (1938).
101. R. Weinstock, *Phys. Rev.* **65**, 1 (1944).
102. O. Halpern, M. Hammermesh a. M. Johnson, *Phys. Rev.* **59**, 981 (1941).
103. А. Ахиезери и И. Померанчук, *ЖЭТФ* **17**, 769 (1947).
104. E. Fermi a. L. Marshall, *Phys. Rev.* **71**, 666 (1947).
105. E. Fermi a. L. Marshall, *Phys. Rev.* **72**, 408 (1947).
106. В. Паули, *loc. cit.*, стр. 174.
107. E. Fermi, W. Sturm, R. Sachs, *Phys. Rev.* **71**, 589 (1947).
108. H. Anderson, E. Fermi, L. Marshall, *Phys. Rev.* **70**, 815 (1946).

109. А. Ахизери и И. Померанчук, *Journ. of Phys.* IX, 461 (1945).
 110. S. Flügge, *Phys. Zs.* 21/22, 445 (1943).
 111. Hughes, Spätz, Goldstein, *Phys. Rev.* 75, 1781 (1949).
 112. Л. Ландау, *Sov. Phys.* 1, 88 (1932).
 113. Л. Ландау и Е. Лифшиц, *Квантовая механика*, ч. I, § 51, Гостехиздат (1948).
 114. P. Ewald u. G. Hermann, *Strukturbericht* 30 (1931).
 115. А. Ахизери и И. Померанчук, *ЖЭТФ* 18, 475 (1948).
 116. P. Curie, *Proc. Roy. Soc. A* 163, 553 (1937).
 117. B. Bjorklund, W. Crandall, B. Moyer, N. York, *Phys. Rev.* 77, 213 (1950).
 118. A. Seriff, R. Leighton, C. Hsias, E. Cowan, C. Anderson, *Bull. of amer. Phys. Soc.* 25, 13 (1950).
 119. M. Kaplan, B. Peters, H. Bradt, *Phys. Rev.* 76, 1735 (1949).
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- β -радиоактивность осколков 311, 321
- Вероятность прилипания 166, 170 и д.
- Вульфа-Брегга формула 377
- γ -излучение 149
- , внутренняя конверсия 258
- дипольное 99, 104, 109, 112, 113, 116, 118, 179
- квадрупольное 99, 110, 179
- магнитное дипольное 99, 109, 113, 120
- под действием обменных сил 79
- при делении ядер 323
- при захвате нейтронов протонами 96
- Дейтрон, возбуждённые состояния 18, 25
- , квадрупольный момент 33 и д.
- , магнитный момент 48
- , основное состояние 11 и д., 33
- , расщепление в поле ядра 121 и д.
- , — «непрозрачным» ядром 138, 141, 144, 145
- , — при столкновении с ядром 134
- , — «прозрачным» ядром 138, 144
- Дейтрон, сечение «сдирания» 134
- , фоторасщепление 110
- , энергия связи 32
- Деление ядер 311
- —, вероятность 321
- —, механизм 311
- —, спонтанное 320
- —, цепная реакция 327
- Дисперсионная формула 219, 222, 227
- Дифракционное рассеяние быстрых заряженных частиц 204
- — поглощающими ядрами 186
- — полупрозрачными ядрами 198
- «Закон $1/v$ » 176, 244, 262
- Захват нейтронов в кристаллах 352
- — протонами 96
- — свободными ядрами 241
- Изомерия 257
- Критические размеры 341
- Коэффициент размножения 333, 334
- Линия поглощения, форма — — 249, 363
- Нейтроны вторичные 327
- , длина свободного пробега 281, 381
- , замедление 280 и д.
- , магнитный момент 48
- , рассеяние в кристаллах неупругое 383
- , — — упругое 365
- , — в параоводороде 51
- , — в ортоводороде 51
- , — свободными протонами 20
- , — связанными протонами 67
- , рефракция 405
- , средний квадрат длины замедления 293
- , функция распределения в кристаллах 400

- Ортоводород 52
 Параводород 52
 Потенциальный барьер 264
 Правила отбора 226, 271
 Предел устойчивости ядра 315
 Проницаемость барьера 265
 Протоны, рассеяние протонами
 87
 — связанные 69
 —, угловое распределение 88

 Радиус действия ядерных сил 65
 — ядра 245
 Распределение частиц по энергиям 183, 285
 Рассеяние быстрых нейтронов 74, 186, 198
 — дифракционное 186, 198, 204
 —, дифференциальное сечение 22, 70, 74
 —, интегральное сечение 25
 — медленных нейтронов 20, 169
 — нейтронов в кристаллах, влияние спина 371
 — — свободными протонами 20
 — — связанными протонами 67
 — неупругое 149, 264, 400
 — потенциальное 20, 233, 263
 — протонов протонами 87
 — резонансное 227
 — свободными ядрами 395
 — уругое 148, 232, 263, 399

 Свободная энергия ядра 157
 Составное ядро 146
 — —, вероятность образования 170
 — —, распределение частиц по энергиям 183
 Столкновения неупругие, эффективное сечение 162 и д.
 — упругие, эффективное сечение 70, 74, 162 и д.

 Форма линии поглощения 249, 360, 363
 Формула дисперсионная 219, 222, 227
 — для энергии возбуждения 159
 — Резерфорда 84
 Функция распределения нейтронов в кристаллах 400

 Цепная реакция 327 и д.
 — —, критические размеры 341
 — —, неоднородная система 335

 Ширина уровня 153, 177, 263

 Энергия возбуждения 159
 — критическая 313
 — связи дейтрона 32
 Энтропия ядра 158
 Эффект Допплера 247
 Эффективное сечение деления 325
 — — захвата 103, 106, 109, 110, 111, 242, 248
 — — неупругих столкновений 162 и д., 386
 — — образования составного ядра 166
 — — рассеяния 20, 26, 76, 81, 233, 367, 377, 380
 — — упругих столкновений 70, 74, 162 и д., 228, 367
 — — усреднённое 32, 258 и д.

 Ядерные реакции с заряженными частицами 264 и д.
 — силы 74 и д., 85
 — —, радиус действия 27, 65
 Ядро, изомерия 257
 —, капельная модель 156, 313 и д.
 —, критическая деформация 313
 —, — энергия 313
 —, предел устойчивости 315
 —, радиационные свойства 253
 —, тяжёлое, деление 311
 — —, термодинамика 154

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По вине
74	4 св.	$(1 - \cos$	$(1 - \cos \vartheta)$	Тип.
114	ф. (12.9')	$+ \cos kr$	$- \cos kr$	"
170	ф. (17.21)	$\frac{\gamma_{i0}^{(r)}}{\gamma_{i0}^{(r)}}$	$\frac{\gamma_{i0}^{(i)}}{\gamma_{i0}^{(r)}}$	"
219	1 св.	лава III	глава III	"
372	2 св.	$\{j_l(j+1)$	$\{j_l(j_l+1)$	Ред.
374	ф. (39.20)	$= N(A ^2 - A ^2) +$ $+ \bar{A} ^2 \left \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{R}_l^0} \right ^2,$	$= N(A ^2 - \bar{A} ^2) +$ $+ \bar{A} ^2 \left \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{R}_l^0} \right ^2,$	Тип.
375	4 св.	$(A_l - A)^*$	$(A_l - \bar{A})^*$	"
384	ф. (40.1)	μ, m_l'	μ', m_l'	"
397	6 св.	$\left \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{R}_l^0} \right ^2$	$\left \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{R}_l^0} \right ^2$	"

Зак. 1800.

А х и з е р и П о м е р а н ч у к. «Некоторые вопросы теории ядра».