

А. И. АХИЕЗЕР  
В. Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ

# КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1981

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Предисловие . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 3         |
| Из предисловия к первому изданию . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 5         |
| <b>Глава 1. Релятивистская квантовая механика электрона . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>7</b>  |
| § 1.1. Свободный электрон . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 7         |
| 1.1.1. Уравнение Дирака (7). 1.1.2. Симметричная форма уравнения Дирака (10). 1.1.3. Решения с положительными и отрицательными частотами (11). 1.1.4. Плоские волны (15). 1.1.5. Поляризацонные состояния электрона (16). 1.1.6. Поляризацонная матрица плотности электрона (18). 1.1.7. Поляризацонные состояния электрона в ультрарелятивистском пределе (19).                                                                                                                     |           |
| § 1.2. Уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле и свойства инвариантности уравнения Дирака . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 20        |
| 1.2.1. Уравнение Дирака для электрона во внешнем электромагнитном поле (20). 1.2.2. Уравнение непрерывности (21). 1.2.3. Различные представления уравнения Дирака (22). 1.2.4. Алгебра матриц Дирака (23). 1.2.5. Релятивистская инвариантность уравнения Дирака (25). 1.2.6. Пространственное отражение, обращение времени и зарядовое сопряжение (28). 1.2.7. Ковариантные билинейные формы (30). 1.2.8. Использование обозначений, соответствующих псевдоевклидовой метрике (30). |           |
| § 1.3. Пределные переходы к нерелятивистской квантовой механике и релятивистской классической механике . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 32        |
| 1.3.1. Уравнение Паули (32). 1.3.2. Второе приближение (33). 1.3.3. Переход к релятивистской классической механике (35). 1.3.4. Высокоэнергетическое приближение (36). 1.3.5. Борновское приближение (39).                                                                                                                                                                                                                                                                           |           |
| § 1.4. Момент импульса электрона . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 40        |
| 1.4.1. Шаровые спиноры (40). 1.4.2. Волновая функция свободного электрона с определенным моментом (43). 1.4.3. Четность состояния (45). 1.4.4. Разложение по сферическим волнам (46).                                                                                                                                                                                                                                                                                                |           |
| § 1.5. Движение электрона в центральном поле . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 48        |
| 1.5.1. Разделение переменных в центральном поле (48). 1.5.2. Сферически-симметричная потенциальная яма (50). 1.5.3. Движение электрона в кулоновском поле ядра (54). 1.5.4. Волновые функции непрерывного спектра в кулоновском поле ядра (57). 1.5.5. Критический заряд ядра (58).                                                                                                                                                                                                  |           |
| § 1.6. Движение в однородных полях . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 60        |
| 1.6.1. Уравнения, описывающие электрон в однородном электромагнитном поле (60). 1.6.2. Электрон в постоянном и однородном магнитном поле (62). 1.6.3. Электрон в постоянном и однородном электрическом поле (64). 1.6.4. Парадокс Клейна (65).                                                                                                                                                                                                                                       |           |
| § 1.7. Рассеяние электронов . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 67        |
| 1.7.1. Расходящиеся и сходящиеся волны (67). 1.7.2. Амплитуда и сечение рассеяния (70). 1.7.3. Поляризация и азимутальная асимметрия (73). 1.7.4. Упругое рассеяние в борновском приближении (75). 1.7.5. Упругое рассеяние в эйковальном приближении (75). 1.7.6. Рассеяние в кулоновском поле ядра (77).                                                                                                                                                                           |           |
| <b>Глава 2. Квантование полей . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>80</b> |
| § 2.1. Квантовая механика фотона . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 80        |
| 2.1.1. Уравнения Максвелла в форме Майорана (80). 2.1.2. Волновая функция фотона (81). 2.1.3. Плоские волны (83).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |           |

|                                                         |                                                                                                                                |     |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 2.2.                                                  | Момент импульса фотона . . . . .                                                                                               | 84  |
| 2.2.1.                                                  | Оператор момента (84).                                                                                                         |     |
| 2.2.2.                                                  | Собственные функции оператора момента фотона (86).                                                                             |     |
| 2.2.3.                                                  | Продольный и поперечные шаровые векторы (87).                                                                                  |     |
| 2.2.4.                                                  | Четность состояний фотона (89).                                                                                                |     |
| 2.2.5.                                                  | Сферические электромагнитные волны (90).                                                                                       |     |
| § 2.3.                                                  | Квантование электромагнитного поля . . . . .                                                                                   | 92  |
| 2.3.1.                                                  | Операторы испускания и поглощения фотона (92).                                                                                 |     |
| 2.3.2.                                                  | Перестановочные соотношения для потенциалов электромагнитного поля (97).                                                       |     |
| 2.3.3.                                                  | Хронологическое и нормальное произведения операторов электромагнитных потенциалов (99).                                        |     |
| § 2.4.                                                  | Корреляционные функции электромагнитного поля . . . . .                                                                        | 103 |
| 2.4.1.                                                  | Интерференция света (103).                                                                                                     |     |
| 2.4.2.                                                  | Когерентные состояния (105).                                                                                                   |     |
| 2.4.3.                                                  | Корреляционные функции и когерентность высших порядков (109).                                                                  |     |
| 2.4.4.                                                  | Поляризационная матрица плотности (112).                                                                                       |     |
| § 2.5.                                                  | Квантование электроинно-позитронного поля . . . . .                                                                            | 114 |
| 2.5.1.                                                  | Условия квантования (114).                                                                                                     |     |
| 2.5.2.                                                  | Операторы испускания и поглощения электронов и позитронов (118).                                                               |     |
| 2.5.3.                                                  | Антикоммутаторы электронного поля (120).                                                                                       |     |
| 2.5.4.                                                  | Хронологическое и нормальное произведения операторов электронного поля (121).                                                  |     |
| Глава 3. Электромагнитное взаимодействие . . . . .      |                                                                                                                                | 125 |
| § 3.1.                                                  | Основные уравнения квантовой электродинамики . . . . .                                                                         | 125 |
| 3.1.1.                                                  | Уравнения квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении (125)                                                     |     |
| 3.1.2.                                                  | Лагранжиан и гамильтониан взаимодействующих полей (127)                                                                        |     |
| 3.1.3.                                                  | Представление взаимодействия (131).                                                                                            |     |
| § 3.2.                                                  | Матрица рассеяния . . . . .                                                                                                    | 135 |
| 3.2.1.                                                  | Проблемы рассеяния в квантовой электродинамике (135).                                                                          |     |
| 3.2.2.                                                  | Инвариантная теория возмущений (138).                                                                                          |     |
| 3.2.3.                                                  | Представление матрицы рассеяния в виде суммы нормальных произведений (140).                                                    |     |
| 3.2.4.                                                  | Функциональная форма представления матрицы рассеяния в виде $N$ -упорядоченного оператора (144).                               |     |
| § 3.3.                                                  | Графическое представление элементов матрицы рассеяния . . . . .                                                                | 146 |
| 3.3.1.                                                  | Графическое представление нормальных произведений (146).                                                                       |     |
| 3.3.2.                                                  | Импульсное представление (152).                                                                                                |     |
| 3.3.3.                                                  | Правила Фейнмана (156).                                                                                                        |     |
| § 3.4.                                                  | Вероятность и эффективное сечение . . . . .                                                                                    | 158 |
| 3.4.1.                                                  | Амплитуда рассеяния и вероятность (158).                                                                                       |     |
| 3.4.2.                                                  | Суммирование по состояниям поляризации электронов и фотонов (160).                                                             |     |
| 3.4.3.                                                  | Эффективное сечение (162).                                                                                                     |     |
| 3.4.4.                                                  | Вероятность процессов рассеяния поляризованных частиц (164).                                                                   |     |
| § 3.5.                                                  | Структура диаграмм матрицы рассеяния . . . . .                                                                                 | 166 |
| 3.5.1.                                                  | Собственно энергетические и вершинные диаграммы (166).                                                                         |     |
| 3.5.2.                                                  | Эффективные линии (169).                                                                                                       |     |
| 3.5.3.                                                  | Уравнения Дайсона для функций Грина и графическое уравнение для вершинной функции (172).                                       |     |
| 3.5.4.                                                  | Функции Грина как вакуумные средние (176).                                                                                     |     |
| § 3.6.                                                  | Перенормировка массы и заряда электрона . . . . .                                                                              | 182 |
| 3.6.1.                                                  | Перенормировка массы электрона (182).                                                                                          |     |
| 3.6.2.                                                  | Физический заряд электрона (185).                                                                                              |     |
| 3.6.3.                                                  | Перенормировка функций Грина и вершинной функции (187).                                                                        |     |
| 3.6.4.                                                  | Перенормировка элементов матрицы рассеяния (191).                                                                              |     |
| § 3.7.                                                  | Расходимости в матрице рассеяния и их устранение . . . . .                                                                     | 193 |
| 3.7.1.                                                  | Расходимости в интегральных выражениях для неприводимых диаграмм (193).                                                        |     |
| 3.7.2.                                                  | Введение граничного импульса (195).                                                                                            |     |
| 3.7.3.                                                  | Регуляризация функций, соответствующих неприводимым диаграммам (196).                                                          |     |
| 3.7.4.                                                  | Регуляризация функций, соответствующих приводимым диаграммам (200).                                                            |     |
| § 3.8.                                                  | Асимптотические свойства функций Грина . . . . .                                                                               | 203 |
| 3.8.1.                                                  | Структура функций Грина в области больших импульсов (203).                                                                     |     |
| 3.8.2.                                                  | Асимптотические выражения для функций Грина (208).                                                                             |     |
| 3.8.3.                                                  | Асимптотический характер регуляризованных разложений матрицы рассеяния и проблема замкнутости квантовой электродинамики (210). |     |
| Глава 4. Основные электродинамические явления . . . . . |                                                                                                                                | 213 |
| § 4.1.                                                  | Излучение фотона . . . . .                                                                                                     | 213 |
| 4.1.1.                                                  | Амплитуда излучения (213).                                                                                                     |     |
| 4.1.2.                                                  | Излучение электрического и магнитного мультиполей (214).                                                                       |     |
| 4.1.3.                                                  | Излучение ядер. Правила отбора (217).                                                                                          |     |
| 4.1.4.                                                  | Фотоэффект (218).                                                                                                              |     |

|                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 4.2.                                                                                         | Рассеяние фотона электроном . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 222 |
|                                                                                                | 4.2.1. Матричный элемент рассеяния (225). 4.2.2. Дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных частиц (225). 4.2.3. Угловое распределение рассеянных фотонов и полное сечение (227). 4.2.4. Поляризационные эффекты (230) 4.2.5. Рассеяние поляризованных фотонов неполяризованными электронами (231) 4.2.6. Дисперсионная формула (233).                                                                                                                                  |     |
| § 4.3.                                                                                         | Тормозное излучение . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 238 |
|                                                                                                | 4.3.1. Сечение тормозного излучения в борновском приближении (238). 4.3.2. Тормозное излучение в высокэнергетическом приближении (243). 4.3.3. Сечение тормозного излучения в кулоновском поле ядра в борновском приближении (247). 4.3.4. Экранирование (248) 4.3.5. Потеря энергии на излучение (252). 4.3.6. Тормозное излучение в кулоновском поле ядра в высокэнергетическом приближении (254). 4.3.7. Точная теория тормозного излучения в нерелятивистской области (255). |     |
| § 4.4.                                                                                         | Излучение длинноволновых фотонов . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 258 |
|                                                                                                | 4.4.1. «Инфракрасная катастрофа» (258). 4.4.2. Сечение рассеяния электрона с излучением мягкого фотона (262). 4.4.3. Исследование расходимости в области малых частот (268). 4.4.4. Излучение мягких фотонов при произвольных столкновениях (271).                                                                                                                                                                                                                               |     |
| § 4.5.                                                                                         | Образование и аннигиляция электронно-позитронных пар . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 273 |
|                                                                                                | 4.5.1. Образование электронно-позитронной пары фотоном в поле ядра порога. 4.5.2. Точная теория образования пары фотоном в поле ядра в борновском приближении при крайне релятивистских энергиях (278). 4.5.3. Образование пары двумя фотонами (280) 4.5.4. Аннигиляция пары в два и три фотона (282) 4.5.5. Поляризационные эффекты при двухфотонной аннигиляции пар (285) 4.5.6. Распад позитрония (287) 4.5.7. Превращение пары в один фотон (289)                            |     |
| § 4.6.                                                                                         | Рассеяние электрона и позитрона электроном . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 290 |
|                                                                                                | 4.6.1. Рассеяние электрона электроном (290) 4.6.2. Сечение рассеяния позитрона электроном (293) 4.6.3. Рассеяние поляризованных электронов (294) 4.6.4. Рассеяние мюона электроном Превращение электронной пары в мюонную пару (295) 4.6.5. Излучение фотона при рассеянии электрона электроном и электрона позитроном и при превращении $e^+e^-$ в $\mu^+\mu^-$ (297).                                                                                                          |     |
| § 4.7.                                                                                         | Запаздывающее взаимодействие зарядов . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 298 |
|                                                                                                | 4.7.1. Функция взаимодействия двух зарядов (298). 4.7.2. Энергия взаимодействия двух электронов с точностью до $v^2/c^2$ (301). 4.7.3. Взаимодействие электрона с позитроном и позитроний (305).                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
| § 4.8.                                                                                         | Метод эквивалентных фотонов . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 309 |
|                                                                                                | 4.8.1. Связь между сечениями процессов с участием виртуальных и реальных фотонов (309) 4.8.2. Тормозное излучение в процессах рассеяния электрона ядром и электрона электроном (314). 4.8.3. Образование пар фотоном в поле ядра и при столкновении двух быстрых заряженных частиц (315). 4.8.4. Сечение двухструйного процесса (317).                                                                                                                                           |     |
| Глава 5. Квантовоэлектродинамические эффекты в высших приближениях теории возмущений . . . . . |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 320 |
| § 5.1.                                                                                         | Раднационные поправки к электродинамическим функциям Грина . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 320 |
|                                                                                                | 5.1.1. Массовый оператор второго порядка (320). 5.1.2. Поляризационный оператор второго порядка (322). 5.1.3. Вершинная функция третьего порядка (326).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
| § 5.2.                                                                                         | Модификация закона Кулона. Аномальный магнитный момент электрона . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 331 |
|                                                                                                | 5.2.1. Модификация закона Кулона (331). 5.2.2. Аномальный магнитный момент электрона и мюона (332)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
| § 5.3.                                                                                         | Раднационное смещение атомных уровней . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 335 |
|                                                                                                | 5.3.1. Уравнение Дирака с массовым оператором (335). 5.3.2. Раднационное смещение в естественная ширина атомных уровней (337) 5.3.3. Раднационное смещение уровней атома водорода (339). 5.3.4. Рассеяние фотона вливан резонанса (343)                                                                                                                                                                                                                                          |     |
| § 5.4.                                                                                         | Раднационные поправки к сечениям рассеяния электрона во внешнем поле и рассеяния электрона электроном . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 345 |
|                                                                                                | 5.4.1. Дифференциальное сечение рассеяния электрона в кулоновском поле ядра с учетом раднационных поправок порядка $\alpha$ (345). 5.4.2. Исключение «массы» фотона из сечения рассеяния (348) 5.4.3. Устранение инфракрасной расходимости в случае произвольного процесса рассеяния (350) 5.4.4. Раднационные поправки к сечению рассеяния электрона электроном и электрона позитроном (356).                                                                                   |     |

|                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 5.5. Радиационные поправки к сечениям комптоновского рассеяния, образования и аннигиляции пар и тормозного излучения . . . . . | 359 |
| 5.5.1. Радиационные поправки к сечению комптоновского рассеяния (359).                                                           |     |
| 5.5.2. Рассеяние электроном фотонов малой частоты (366).                                                                         |     |
| 5.5.3. Радиационные поправки к сечению двухфотонной аннигиляции пар (370).                                                       |     |
| 5.5.4. Радиационные поправки к сечению тормозного излучения (373).                                                               |     |
| 5.5.5. Радиационные поправки к сечению превращения электронно-позитронной пары в мюонную пару (374).                             |     |
| § 5.6. Нелинейная электродинамика вакуума . . . . .                                                                              | 375 |
| 5.6.1. Тензор рассеяния фотона фотоном четвертого ранга (375).                                                                   |     |
| 5.6.2. Сечение рассеяния фотона фотоном (376).                                                                                   |     |
| 5.6.3. Радиационные поправки к функциям Лагранжа электромагнитного поля в вакууме (380).                                         |     |
| 5.6.4. Точное выражение для лагранжиана произвольного медленно меняющегося электромагнитного поля (384).                         |     |
| 5.6.5. Сечение рассеяния фотона в постоянном электромагнитном поле (390).                                                        |     |
| 5.6.6. Связь между амплитудой рассеяния фотона на нулевой угол и сечением образования пар (392).                                 |     |
| 5.6.7. Импульсное и угловое распределение ядер отдачи при образовании пар фотоном в поле ядра (395).                             |     |
| § 5.7. Дважды логарифмическая асимптотика сечений квантово-электродинамических процессов . . . . .                               | 398 |
| 5.7.1. Дважды логарифмическая асимптотика вершинной функции (398).                                                               |     |
| 5.7.2. Дважды логарифмическая асимптотика сечения рассеяния электрона во внешнем поле (406).                                     |     |
| 5.7.3. Дважды логарифмическая асимптотика сечения процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (409).                                |     |
| 5.7.4. Сводка формул для сечений квантово-электродинамических процессов в дважды логарифмическом приближении (414).              |     |
| Приложение . . . . .                                                                                                             | 416 |
| A.1. Вычисление интегралов по инвариантному объему в 4-импульсном пространстве (416).                                            |     |
| A.2. Метод размерной регуляризации (420)                                                                                         |     |
| Литература . . . . .                                                                                                             | 423 |
| Предметный указатель . . . . .                                                                                                   | 427 |

530.1

А 95

УДК 530.145

**АХИЕЗЕР А. И., БЕРЕСТЕЦКИЙ В. Б. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981.**

Четвертое издание монографии значительно переработано по сравнению с предыдущим изданием. Цель настоящего издания — дать систематическое и компактное изложение собственно квантовой электродинамики, т. е. теории взаимодействия электронов и фотонов, с упором на изложение теории конкретных квантовоэлектродинамических эффектов. По сравнению с предыдущим изданием добавлены новые разделы, посвященные высокоэнергетическому и эйкональному приближениям, парадоксу Клейна, критическому заряду ядра; заново написаны параграфы о рассеянии и тормозном излучении электрона, о корреляционных функциях электромагнитного поля, о методе эквивалентных фотонов, об излучении при рассеянии электрона электроном. Новые разделы добавлены в главу, посвященную радиационным поправкам, в частности в параграфы о нелинейной электродинамике вакуума и об асимптотике функций Грина.

Рис. 94. Таблиц 4. Библ. 159 назв.

*Александр Ильич Ахиезер*

*Владимир Борисович Берестецкий*

**КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

Редактор *Л. П. Русакова.*

Технический редактор *С. Я. Шкляр.* Корректор *В. П. Сорокина.*

ИБ № 11273

Сдано в набор 16.01.81. Подписано к печати 03.08.81. Т-23457. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 27. Уч.-изд. л. 29,7. Тираж 9500 экз. Заказ № 1292. Цена 2 р. 10 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано и матрицировано в ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15. Отпечатано в Ленинградской типографии № 2 головном предприятии им. ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

А  $\frac{20402-096}{053(02)-81}$  92-81. 1704020000

Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической литературы,  
1981

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Со времени выхода в свет третьего издания «Квантовой электродинамики» прошло немногим более десяти лет. За это время квантовая теория поля обогатилась открытиями первостепенного значения. Была построена единая теория слабого и электромагнитного взаимодействий лептонов; родилась квантовая хромодинамика, которая на основе теории неабелевых калибровочных полей и концепции асимптотической свободы кварков позволила описать многие свойства адронов и их взаимодействий. Иными словами, произошло мощное проникновение методов квантовой электродинамики в теорию слабого и теорию сильного взаимодействий, которое с новой силой подтвердило основополагающее значение квантовой теории поля для физики элементарных частиц.

Если еще учесть, что за последнее десятилетие был получен ряд важных результатов, относящихся к теории взаимодействия электронов и фотонов, то станет ясным, как резко увеличился объем квантовой электродинамики в широком смысле, включающей общие вопросы квантовой теории поля, собственно квантовую электродинамику, т. е. теорию взаимодействия электронов и фотонов, и дочерние теории — квантовую хромодинамику и единую теорию слабого и электромагнитного взаимодействий лептонов.

Поэтому, когда возник вопрос о переиздании нашей «Квантовой электродинамики», было решено, что целесообразнее всего издать две отдельные монографии — одну, посвященную собственно квантовой электродинамике, и другую, посвященную общим вопросам теории волновых полей и современному развитию квантовой теории поля.

С такой установкой я и приступил к переработке «Квантовой электродинамики», на сей раз один, так как в 1977 г. не стало моего друга и соавтора Владимира Борисовича Берестецкого.

Настоящая книга представляет собой первую из двух указанных монографий. Цель ее — дать систематическое и компактное изложение собственно квантовой электродинамики с упором

на практическую сторону дела, т. е. на теорию конкретных квантовоэлектродинамических эффектов.

Я сохранил деление книги на пять глав, но сильно изменил их содержание и объем. Книга начинается теперь с релятивистской квантовой механики электрона, в которую по сравнению с предыдущим изданием введены новые разделы, посвященные высокоэнергетическому и эйкональному приближениям, парадоксу Клейна, теории образования пар в электрическом поле; по-новому изложена теория рассеяния электронов.

Глава 2 посвящена квантованию свободных полей; сюда включена квантовая теория интерференции и корреляционных функций электромагнитного поля. В главе 3 излагаются основы теории электромагнитного взаимодействия; по-новому здесь изложена теория асимптотического поведения функций Грина.

Последние две главы посвящены конкретным квантовоэлектродинамическим эффектам: в главе 4 эффекты рассматриваются в первом исчезающем приближении; в главе 5 дается теория радиационных поправок. Здесь заново изложены теория тормозного излучения, теория запаздывающего взаимодействия, метод эквивалентных фотонов; много нового материала внесено в теорию высших приближений.

В переработке книги большую помощь оказали мне мои ученики и сотрудники: Ю. П. Степановский — в переработке глав 1 и 2 и написании в них новых разделов; Н. Ф. Шульга — в написании §§ 1.3 и 1.7, а также § 4.3; В. И. Трутень — в переработке гл. 3 и написании § 3.8; Э. А. Кураев — в переработке и внесении значительных дополнений в гл. 5; Н. П. Меренков — в переработке глав 4, 5 и написании §§ 4.7, 4.8; А. П. Рекало — в написании Приложения. Всем им приношу глубокую благодарность.

*А. И. Ахиезер*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время известен ряд частиц, которым соответствуют различные квантовые поля, взаимодействующие друг с другом. Однако из многообразия физических взаимодействий, существующих в природе, достаточно детально изучены в настоящее время, кроме гравитационного, только электромагнитные взаимодействия. Теория этих взаимодействий составляет предмет квантовой электродинамики, систематическому изложению которой посвящена настоящая книга.

Так как электромагнитные взаимодействия являются основными для электронов и фотонов, то квантовая электродинамика дает возможность объяснять и предсказывать широкий круг явлений, связанных с поведением этих частиц. Что касается применения квантовой электродинамики к другим частицам (нуклонам и мезонам), то оно весьма ограничено вследствие существенной роли, которую играют для этих частиц другие типы взаимодействий (ядерные или мезонные взаимодействия). Поэтому вопросы, связанные с мезонами, в книге не излагаются, а взаимодействие нуклонов с электромагнитным полем рассматривается только в предельном случае малых скоростей.

Формулировка основных уравнений квантовой электродинамики и даже сама возможность разделения взаимодействующих полей на электромагнитное и электронно-позитронное связаны с тем, что взаимодействие между полями является слабым. Это обстоятельство находит свое выражение в малости постоянной  $\alpha = e^2/\hbar c$ , характеризующей взаимодействие. Поэтому взаимодействие между полями рассматривается в квантовой электродинамике как малое возмущение, и математическим аппаратом квантовой электродинамики является теория возмущений, которая представляет все количественные результаты в виде разложений по степеням  $\alpha$ .

Так как электромагнитное и электронно-позитронное поля представляют собой системы с неограниченным числом степеней свободы, то при применении теории возмущений возникают характерные для современной теории расходящиеся выражения, которые отсутствуют только в первом исчезающем приближе-

нии теории возмущений. Развитие квантовой электродинамики в последние годы позволило установить принципы регуляризации расходящихся выражений, благодаря чему стало возможным вычисление высших приближений (так называемые радиационные поправки).

Этот прогресс в значительной степени связан с новой, инвариантной формой теории возмущений. Инвариантная теория возмущений дала возможность представлять результаты в компактном и релятивистски инвариантном виде, что позволило сформулировать правила регуляризации. С другой стороны, применение инвариантной теории возмущений представляет значительные практические преимущества по сравнению с прежними методами и при расчетах первых приближений. Поэтому все изложение в книге строится на основе инвариантной теории возмущений.

Являясь вполне удовлетворительной теорией определенной области физических явлений, современная квантовая электродинамика обладает тем крупным недостатком, что для устранения возникающих в ней расходимостей приходится привлекать дополнительные идеи, не содержащиеся в основных формулировках теории и не отраженные в ее исходных уравнениях. Такое положение вещей имеет, по-видимому, глубокне причины. Они лежат в том, что далеко не всегда возможно построение замкнутой теории ограниченного круга явлений (в данном случае чисто электромагнитных) без учета более широкого класса взаимосвязей, имеющих место в природе.

Мы выражаем благодарность Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуку и участникам руководимых ими семинаров за обсуждение ряда вопросов, изложенных в книге,

## § 1.1. Свободный электрон

1.1.1. Уравнение Дирака. Корпускулярные свойства света явились исторически первым фундаментальным фактом, послужившим основой для развития квантовой теории. Соотношение Планка — Эйнштейна  $\varepsilon = \hbar\omega$  между энергией  $\varepsilon$  частицы света — фотона — и частотой колебаний соответствующего ему электромагнитного поля  $\omega$  было исторически первым соотношением, содержащим квантовую постоянную  $\hbar$ .

Однако последовательная квантовая механика атома была построена до квантовой механики фотона. Это обстоятельство имеет глубокую физическую причину. Атомные частицы — электроны и ядра — имеют отличную от нуля массу покоя. Для них существует область энергий, малых по сравнению с энергией покоя, в которой можно не учитывать теорию относительности. Напротив, масса покоя фотона равна нулю, для него не существует нерелятивистской области, и квантовая механика фотона должна быть с самого начала релятивистской теорией.

По этой причине естественно начать изучение релятивистской квантовой теории с релятивистской квантовой механики электрона, допускающей предельный переход к нерелятивистской квантовой механике, в основе которой лежит уравнение Шредингера для волновой функции  $\psi$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

где  $H$  — гамильтониан системы (постоянная Планка считается равной единице).

Релятивистское квантовомеханическое уравнение для электрона было открыто Дираком (1928 г.) [1], который исходил из требования, чтобы преобразование, связывающее волновую функцию, отнесенную к определенному моменту времени, с волновой функцией, отнесенной к более позднему моменту времени, было унитарным:

$$\psi(t) = U(t) \psi(0),$$

где  $U$  — унитарный оператор. Унитарность преобразования  $U$  эквивалентна справедливости уравнения Шредингера, в котором

оператор  $\hat{H}$  связан с  $U$  соотношением

$$U = e^{-iHt}.$$

С другой стороны, уравнение Шредингера содержит первую производную по времени, поэтому, если исходить из симметрии между пространственными координатами и временем, то следует считать гамильтониан  $H$  не квадратичным, а линейным по пространственным производным:

$$H = \alpha p + \beta m,$$

где  $p = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  — оператор импульса частицы и  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые величины, не зависящие от координат.

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\alpha p + \beta m) \psi. \quad (1.1.1)$$

Дифференцируя его по времени, получим

$$i \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\alpha p + \beta m) \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i (\alpha p + \beta m)^2 \psi.$$

Но для свободной частицы, обладающей заданными импульсом  $p$  и энергией  $\epsilon$ , волновая функция должна изменяться как  $e^{i p x - i \epsilon t}$ ; поэтому из последнего уравнения следует, что

$$\epsilon^2 \psi = (\alpha p + \beta m)^2 \psi = [\alpha_i \alpha_k p_i p_k + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i + \beta^2 m^2] \psi. \quad (1.1.2)$$

Для релятивистской частицы  $\epsilon^2 = p^2 + m^2$  (считается, что  $c = 1$ ). Эта связь между энергией и импульсом будет тождественно выполняться, если

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik}, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad \beta^2 = 1. \quad (1.1.3)$$

Мы видим, что величины  $\alpha$  и  $\beta$  нельзя рассматривать как обычные числа. Однако соотношения (1.1.3) могут быть удовлетворены, если  $\alpha$  и  $\beta$  являются матрицами. Например, можно считать, что

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.1.4)$$

где  $\sigma$  — матрицы Паули,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.5)$$

Уравнение (1.1.1) с матрицами  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяющими соотношениям (1.1.3), называется уравнением Дирака. Так как  $\alpha$  и  $\beta$  представляются четырехрядными матрицами, то волновую функцию  $\psi$  следует считать четырехкомпонентной величиной

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (1.1.6)$$

так что  $(\alpha\psi)_i = (\alpha)_{ik} \psi_k$ .

Четырехкомпонентная функция  $\psi$  называется биспинором. Ее можно представить как совокупность двух двухкомпонентных функций — спиноров  $\varphi$  и  $\chi$ :

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (1.1.6')$$

Из уравнения Дирака следует, что  $\varphi$  и  $\chi$  удовлетворяют уравнениям

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = m\varphi + \sigma \mathbf{r} \chi, \quad i \frac{\partial \chi}{\partial t} = -m\chi + \sigma \mathbf{r} \varphi. \quad (1.1.7)$$

Мы привели соображения, которыми руководствовался Дирак при установлении своего уравнения. Однако следует иметь в виду, что уравнения в гамильтоновой форме сами по себе могут быть еще недостаточными для полного описания свойств динамической системы. Например, уравнения Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}$$

имеют гамильтонову форму

$$i \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = (\alpha \mathbf{r})_{kl} \psi_l, \quad (1.1.8)$$

где

$$\psi_k = E_k + iH_k, \quad (\alpha_i)_{kl} = -i\epsilon_{ikh}.$$

Однако этих уравнений недостаточно для полного описания электромагнитного поля, так как они должны быть дополнены условием  $\partial \psi_k / \partial x_k = 0$ . В случае уравнений Максвелла матрицы  $\alpha$  не удовлетворяют перестановочному соотношению  $\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik} I$ , тем не менее уравнения (1.1.8) вместе с дополнительным условием  $\partial \psi_k / \partial x_k = 0$  приводят к тому, что  $\psi$  удовлетворяет волновому уравнению  $(\partial^2 / \partial t^2 - \Delta) \psi = 0$ . Из приведенного примера видно, что из (1.1.2) еще не вытекают соотношения (1.1.3): последние являются достаточными, но не необходимыми условиями справедливости (1.1.2).

Что касается симметрии между пространственными координатами и временем, то такой симметрии может и не быть, а теория будет тем не менее релятивистски инвариантной. Рассмотрим, например, уравнение Клейна—Гордона, описывающее частицу со спином нуль,

$$(\partial^2 / \partial t^2 - \Delta + m^2) \psi = 0.$$

Если ввести вместо скалярной функции  $\psi$  двухкомпонентную функцию

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi \\ i \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix},$$

то уравнение Клейна — Гордона примет вид

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H \Phi,$$

где

$$H = -\alpha \frac{\Delta}{m} + \beta m, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение является релятивистски инвариантным, но содержит первую производную по времени и вторые производные по пространственным координатам.

Таким образом, соображения, использованные при установлении уравнения Дирака, строго говоря, недостаточны. «Развитие релятивистской теории электрона, — говорит Дирак [2], — можно рассматривать сейчас как пример того, как неверные доводы приводят иногда к ценному результату».

Главное заключается в том, что нельзя исходить из того, что волновая функция отдельного электрона должна изменяться согласно закону унитарного преобразования, поскольку релятивистская квантовая механика не может быть развита как теория одной частицы, а должна строиться как теория многих частиц.

Тем не менее существует большой круг явлений, которые можно описывать, исходя из одночастичной картины. Этим кругом явлений мы и будем в основном заниматься в данной главе и только при изучении движения электрона в электрическом поле будем вынуждены выйти за пределы одночастичной теории (см. § 1.6).

**1.1.2. Симметричная форма уравнения Дирака.** Уравнению Дирака можно придать более симметричный вид, если умножить (1.1.1) слева на  $i\beta$ :

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0, \quad (1.1.9)$$

где

$$\gamma_k = -i\beta\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.10)$$

Вводя обозначение

$$\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu, \quad p_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (1.1.11)$$

можно записать (1.1.9) в виде

$$(i\hat{p} + m) \psi = 0. \quad (1.1.12)$$

Матрицы  $\gamma_\mu$  удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} I, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4. \quad (1.1.13)$$

Как и матрицы  $\alpha$ ,  $\beta$ , они эрмитовы,  $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$  (напомним, что  $(\gamma_\mu^\dagger)_{ik} = (\gamma_\mu^T)_{ik}^* = (\gamma_\mu)_{ki}^*$ ; индекс  $T$  служит для обозначения транспонированной матрицы).

Получим теперь уравнение для комплексно-сопряженной волновой функции. Комплексно-сопряженный биспинор  $\psi^*$  мы будем также обозначать через  $\psi^+$ , т. е. представлять его в виде строки  $\psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$ , в отличие от биспинора-столбца (1.1.6). Введем, кроме того, линейную комбинацию компонент  $\psi^+$ :

$$\bar{\psi} = \psi^+ \beta, \quad (1.1.14)$$

т. е.  $\bar{\psi}_\mu = \psi_\mu^+ \beta_{\mu\lambda}$ . Переходя в уравнении (1.1.11) к комплексно-сопряженным величинам и учитывая эрмитовость матриц  $\gamma_\mu$ , получим

$$-i p_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu + m \bar{\psi} = 0, \quad (1.1.15)$$

где  $(\bar{\psi} \gamma_\mu)_\alpha = \bar{\psi}_\beta (\gamma_\mu)_{\beta\alpha}$ . Это уравнение, очевидно, можно записать в виде

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - m \bar{\psi} = 0,$$

или

$$\bar{\psi} (-i \hat{p} + m) = 0 \quad (1.1.16)$$

(в последнем выражении подразумевается, что дифференциальные операторы  $p_\mu$  действуют на находящуюся слева от них функцию  $\bar{\psi}$ ). Наконец, уравнение (1.1.15) можно записать также в виде

$$\left( \gamma_\mu^T \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \bar{\psi} = 0, \quad (1.1.17)$$

где  $\gamma_\mu^T$  — матрица, транспонированная по отношению к  $\gamma_\mu$ , а компоненты  $\bar{\psi}$  подразумеваются расположенными в виде столбца.

**1.1.3. Решения с положительными и отрицательными частотами.** Чтобы понять смысл четырехкомпонентной волновой функции, найдем решение уравнения Дирака для свободного электрона.

Представим волновую функцию электрона  $\psi$  в виде интеграла Фурье

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 p \psi_p(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}.$$

Тогда компонента Фурье  $\psi_p(t)$  — волновая функция электрона в импульсном пространстве — будет удовлетворять, согласно (1.1.1), уравнению

$$i \frac{\partial \psi_p}{\partial t} = (\alpha \mathbf{p} + \beta m) \psi_p(t).$$

Подставляя сюда  $\psi_p(t)$  в виде столбца из двух спиноров  $\varphi_p(t)$  и  $\chi_p(t)$  и используя для матриц  $\alpha, \beta$  представление (1.1.4), получим для  $\varphi_p(t)$  и  $\chi_p(t)$  уравнения, представляющие собой преобразование Фурье уравнений (1.1.7):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \varphi_p}{\partial t} &= m \varphi_p + \sigma \mathbf{p} \chi_p(t), \\ i \frac{\partial \chi_p}{\partial t} &= -m \chi_p(t) + \sigma \mathbf{p} \varphi_p(t). \end{aligned}$$

Решения этих уравнений содержат, очевидно, время в виде  $e^{-i\omega t}$ , где частота  $\omega$  — некоторая константа, определяемая из уравнений

$$(\omega - m)\varphi_p - \sigma p \chi_p = 0, \quad -\sigma p \varphi_p + (\omega + m)\chi_p = 0. \quad (1.1.18)$$

Из условия разрешимости этой системы

$$\begin{vmatrix} \omega - m & -\sigma p \\ -\sigma p & \omega + m \end{vmatrix} = 0$$

найдем  $\omega$ :

$$\omega = \pm \sqrt{p^2 + m^2}.$$

Эти значения частоты представляют собой, очевидно, собственные значения оператора

$$H = \frac{1}{i} \alpha V + \beta m,$$

который мы интерпретировали в п. 1.1.1 как гамильтониан свободного электрона,

$$H\psi_p = \omega\psi_p.$$

Таким образом, существуют два типа решений уравнения Дирака для свободного электрона — решения с положительными частотами ( $\omega > 0$ )

$$\psi^{(+)}(r, t) = \int d^3p \psi_p e^{i(pr - \varepsilon t)}$$

и решения с отрицательными частотами ( $\omega < 0$ )

$$\psi^{(-)}(r, t) = \int d^3p \psi_{-p} e^{-i(pr - \varepsilon t)},$$

где  $p = (p, i\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = \sqrt{p^2 + m^2}$  и

$$\psi_{\pm p} = \begin{pmatrix} \varphi_{\pm p} \\ \chi_{\pm p} \end{pmatrix}.$$

Спиноры  $\varphi_{\pm p}$ ,  $\chi_{\pm p}$  удовлетворяют уравнениям (1.1.18) соответственно при  $\omega = +\varepsilon$  и  $\omega = -\varepsilon$ . Поэтому один спинор может быть выбран произвольно, второй же выразится через первый. Задавая, например,  $\varphi_p$  и  $\chi_{-p}$ , можно найти  $\chi_p$  и  $\varphi_{-p}$ :

$$\chi_p = \frac{\sigma p}{\varepsilon + m} \varphi_p, \quad \varphi_{-p} = \frac{\sigma p}{\varepsilon + m} \chi_{-p}. \quad (1.1.19)$$

Общее решение уравнения Дирака для свободного электрона можно разделить на решения с положительными и отрицательными частотами:

$$\psi(r, t) = \psi^{(+)}(r, t) + \psi^{(-)}(r, t).$$

Такое разделение, очевидно, релятивистски инвариантно, так как при собственных преобразованиях Лоренца знак частоты не может измениться (наименьшая положительная частота равна  $m$ ; а наибольшая отрицательная частота равна  $-m$ , т. е. области частот разных знаков разделены конечным интервалом  $2m$ , в то

время как собственные преобразования Лоренца определяются только непрерывными параметрами).

Так как решения с положительными и отрицательными частотами относятся к различным собственным значениям оператора  $H$ , который является самосопряженным, то эти решения взаимно ортогональны:

$$\int d^3x \psi^{(+)*}(\mathbf{r}, t) \psi^{(-)}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Существование решений уравнения Дирака двух типов — с положительными и отрицательными частотами — имеет фундаментальное значение. Оно приводит к выводу, что в релятивистской квантовой механике невозможно сохранить обычную интерпретацию нерелятивистской квантовой механики, согласно которой собственные значения гамильтониана имеют смысл значений энергии частицы. Действительно, частоты  $\omega$  представляют собой собственные значения гамильтониана свободного электрона. Поэтому, если бы была справедлива обычная интерпретация собственных значений гамильтониана, то это означало бы существование у свободного электрона состояний с отрицательной энергией и отсутствие наинизшего энергетического состояния. В свою очередь отсюда следовало бы, что при взаимодействии с другими частицами электрон мог бы неограниченно отдавать свою энергию, переходя во все более низкие энергетические состояния, что физически абсурдно.

Таким образом, мы приходим к заключению о необходимости изменения в релятивистской квантовой механике электрона основного положения нерелятивистской квантовой механики, касающегося интерпретации собственных значений гамильтониана.

Чтобы сформулировать это изменение, необходимость которого диктуется наличием решений с отрицательными частотами, следует исходить из того, что наряду с электроном существует другая частица — позитрон, которая отличается от электрона только знаком электрического заряда. Поэтому можно сказать, что существует некая единая частица, могущая находиться в двух состояниях, различающихся только знаком заряда. Эта единая частица должна описываться уравнением Дирака, и естественно считать, что двум ее зарядовым состояниям соответствуют положительные и отрицательные частоты. Иными словами, решениям с положительной частотой мы будем сопоставлять электронные состояния, а решениям с отрицательной частотой — позитронные состояния.

Построим волновую функцию позитрона  $\psi_{\text{поз}}$ . Она должна строиться с помощью функции  $\psi^{(-)}$ , содержащей отрицательные частоты,  $\omega < 0$ . Но мы хотим интерпретировать величину  $|\omega|$  как энергию частицы, т. е. позитрона. Поэтому функция  $\psi_{\text{поз}}$  должна быть некоторой линейной комбинацией компонент  $\psi^{(-)*}$  или  $\overline{\psi^{(-)}}$ , поскольку именно они, а не компоненты  $\psi^{(-)}$ , пропор-

циональны  $e^{-i|\omega|t}$ . Функция  $\overline{\psi^{(-)}}$  удовлетворяет, очевидно, уравнению (1.1.17)

$$\left(\gamma_{\mu}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m\right) \overline{\psi^{(-)}} = 0,$$

волновая же функция позитрона должна удовлетворять уравнению (1.1.9)

$$\left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + m\right) \psi_{\text{поз}} = 0, \quad (1.1.20)$$

которому удовлетворяет и волновая функция электрона  $\psi_{\text{эл}}$ . Последнее уравнение должно быть следствием уравнения для  $\overline{\psi^{(-)}}$ . Поэтому мы можем положить

$$\psi_{\text{поз}}(x) = C \overline{\psi^{(-)}}(x), \quad (1.1.21)$$

где  $C$  — некоторая численная четырехрядная матрица. Подстановка этого выражения в (1.1.20) и сравнение с уравнением для  $\overline{\psi^{(-)}}(x)$  показывает, что должны выполняться соотношения

$$C^{-1} \gamma_{\mu} C = -\gamma_{\mu}^{\tau}, \quad (1.1.22)$$

которые в принципе должны служить для определения матрицы  $C$ .

Легко проверить, что если матрицы  $\gamma_{\mu}$  определяются соотношениями (1.1.10), то матрица  $C$  имеет вид

$$C = \gamma_2 \gamma_4.$$

Матрица  $C$  носит название матрицы зарядового сопряжения. Мы вернемся к ней в п. 1.2.6.

Итак, если произведено разбиение общего решения уравнения Дирака для свободной частицы на решения с положительными и отрицательными частотами,

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x),$$

то мы будем интерпретировать  $\psi^{(+)}(x)$  как волновую функцию электрона, а функцию, зарядово-сопряженную по отношению к  $\psi^{(-)}(x)$ , как волновую функцию позитрона:

$$\psi_{\text{эл}} = \psi^{(+)}(x), \quad \psi_{\text{поз}} = C \overline{\psi^{(-)}}(x).$$

Ясно, что как  $\psi_{\text{эл}}(x)$ , так и  $\psi_{\text{поз}}(x)$  будут содержать только положительные частоты.

Отметим, что, определив таким образом волновую функцию позитрона, мы выходим за рамки допустимых в квантовой механике линейных преобразований, так как подвергаем часть решений уравнения Дирака антилинейному преобразованию (содержащему комплексное сопряжение). По этой причине общее решение уравнения Дирака

$$\psi(x) = \psi_{\text{эл}}(x) + C \overline{\psi_{\text{поз}}}(x)$$

не имеет смысла волновой функции частицы (который имеют порознь  $\psi_{\text{эл}}(x)$  и  $\psi_{\text{поз}}(x)$ ).

1.1.4. **Плоские волны.** Так как гамильтониан свободного электрона  $\hat{H} = \alpha \mathbf{p} + \beta m$  коммутирует с оператором импульса  $p$ :

$$[\hat{H}, p] = 0,$$

то для свободного электрона возможны состояния с определенной энергией и с определенным импульсом  $p$ . Таким состояниям соответствуют решения уравнения Дирака, имеющие вид плоских монохроматических волн с обоими знаками частот. Мы будем записывать их в виде

$$\psi_{\pm p}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}} u(\pm p) e^{\pm i p x}, \quad (1.1.23)$$

где  $V$  — нормировочный объем,  $p$  — 4-вектор импульса частицы,  $p = (\mathbf{p}, i\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  и  $u(\pm p)$  — постоянные биспиноры, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} (\pm i \hat{p} + m) u(\pm p) &= 0, \\ \bar{u}(\pm p) (\pm i \hat{p} + m) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

При этом, в соответствии с (1.1.21), решение с положительной частотой  $\omega = \varepsilon$  описывает состояние электрона, а решение с отрицательной частотой  $\omega = -\varepsilon$  — состояние позитрона:

$$\begin{aligned} \psi_p^{\text{эл}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}} u(p) e^{i p x}, \\ \psi_p^{\text{поз}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}} C u(-p) e^{i p x}. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что волновые функции  $\psi^{(\pm)}(r, t)$  удовлетворяют условию нормировки

$$\int_V d^3x |\psi_p^{(\pm)}(r, t)|^2 = 1,$$

где интегрирование совершается по объему  $V$ . Из этого условия легко установить условие нормировки биспиноров  $u(\pm p)$ . Именно, воспользовавшись уравнениями (1.1.24) и соотношениями (1.1.13), мы получим

$$\begin{aligned} \bar{u}(\pm p) \gamma_\mu u(\pm p) &= \\ &= \mp \frac{i}{2m} \bar{u}(\pm p) (\hat{p} \gamma_\mu + \gamma_\mu \hat{p}) u(\pm p) = \mp \frac{i}{m} p_\mu \bar{u}(\pm p) u(\pm p), \end{aligned}$$

откуда

$$\bar{u}(\pm p) \gamma_4 u(\pm p) = u^*(\pm p) u(\pm p) = \pm \frac{8}{m} \bar{u}(\pm p) u(\pm p).$$

Из этого соотношения и условия нормировки  $\psi_p^{(\pm)}(r, t)$  следует, что

$$\bar{u}(\pm p) u(\pm p) = \pm 2m, \quad (1.1.25)$$

$$i \bar{u}(\pm p) \gamma_\mu u(\pm p) = 2p_\mu. \quad (1.1.26)$$

Соотношения (1.1.25) и (1.1.26) и представляют собой условия нормировки биспиноров  $u(\pm p)$ .

Заметим, что соотношения (1.1.26) справедливы не только для электрона, но и для нейтрино, в последнем случае  $m=0$ , и в качестве условий нормировки следует брать соотношения (1.1.26).

Выше мы записывали биспинор  $\psi$  в виде столбца, содержащего два спинора, связанных между собой соотношениями (1.1.18). Используя эти соотношения и условия нормировки (1.1.25), можно представить биспиноры  $u(\pm p)$  в виде столбцов

$$\begin{aligned} u(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m} v^{(+)} \\ \sqrt{\varepsilon-m} \sigma \mathbf{v} v^{(+)} \end{pmatrix}, \\ u(-p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon-m} \sigma \mathbf{v} v^{(-)} \\ \sqrt{\varepsilon+m} v^{(-)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/|p|$  и двухкомпонентные спиноры  $v^{(\pm)}$  удовлетворяют условию нормировки

$$v^{(\pm)*} v^{(\pm)} = 1.$$

**1.1.5. Поляризационные состояния электрона.** Возвратимся к уравнениям (1.1.24). Эти уравнения не определяют биспиноры  $u(\pm p)$  однозначно (т. е. с точностью до нормировочной константы). Действительно, так как спин электрона равен  $1/2$ , то каждое из уравнений (1.1.24) имеет два линейно-независимых решения. Об этих решениях говорят, что они соответствуют двум различным состояниям поляризации электрона.

Состояние поляризации нерелятивистского электрона можно характеризовать, задав направление, проекция спина на которое имеет вполне определенное значение, а именно  $+1/2$  или  $-1/2$ . Более того, каково бы ни было состояние электрона, обязательно найдется некоторое направление, на которое проекция спина электрона равна  $+1/2$ . Иными словами, каков бы ни был двухкомпонентный спинор  $v$ , описывающий нерелятивистский электрон (или позитрон), обязательно найдется единичный вектор  $\mathbf{n}$  такой, что будет выполняться соотношение

$$1/2 \sigma \mathbf{n} v = 1/2 v.$$

Для доказательства этого утверждения воспользуемся тем, что произвольная двухрядная матрица  $Q$  может быть разложена по полному набору двухрядных матриц, состоящему из единичной матрицы и матриц Паули:

$$Q = 1/2 \text{Sp}(Q) I + 1/2 \text{Sp}(Q\sigma) \sigma.$$

Взяв в качестве  $Q$  матрицу  $v_\alpha v_\beta^*$ , получим

$$v_\alpha v_\beta^* = 1/2 (\sigma^* v) \delta_{\alpha\beta} + 1/2 (v^* \sigma v) (\sigma)_{\alpha\beta}. \quad (1.1.28)$$

Умножив далее обе части этого равенства на  $v_\beta$  и просуммировав по  $\beta$ , найдем  $(v^* \sigma v) \sigma = v$ , или

$$\mathbf{n} \sigma v = v, \quad (1.1.29)$$

где единичный вектор  $\mathbf{n}$  определяется равенством

$$\mathbf{n} = v^* \boldsymbol{\sigma} v \quad (1.1.29')$$

(предполагается, что  $v^* v = 1$ ).

Таким образом, мы доказали сформулированное утверждение и, кроме того, выяснили, что вектор  $\mathbf{n}$  связан со средним значением оператора спина электрона.

Заметим, что соотношение (1.1.28) при условии нормировки  $v^* v = 1$  принимает вид

$$v_\alpha v_\beta^* = \frac{1}{2} (I + \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}. \quad (1.1.30)$$

Рассмотрим теперь биспинор  $u_0$ , описывающий неподвижный электрон. В этом случае соотношение (1.1.29) принимает вид

$$\frac{1}{2} \Sigma \mathbf{n} u_0 = \frac{1}{2} u_0, \quad (1.1.31)$$

где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вводя далее матрицу  $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ , имеем  $\Sigma = i \gamma_5 \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}_4$ , и из уравнения Дирака следует, что  $\gamma_4 u_0 = u_0$ . Поэтому (1.1.31) можно записать в виде

$$i \gamma_5 \boldsymbol{\gamma} \mathbf{n} u_0 = u_0.$$

Если электрон движется и описывается биспинором  $u$ , то предыдущее уравнение приобретает вид

$$i \gamma_5 \hat{a} u = u, \quad (1.1.32)$$

где 4-вектор  $a = (a, a_0)$  получается из вектора  $\mathbf{n}$  с помощью преобразования Лоренца, переводящего систему отсчета, в которой электрон покоится, в систему  $u$ , в которой он обладает импульсом  $p$ :

$$a = \mathbf{n} + \frac{p(np)}{m(e+m)}, \quad a_0 = \frac{np}{m}; \quad (1.1.33)$$

4-вектор  $a_\mu$  называется 4-вектором поляризации электрона. Отметим, что

$$a^2 = 1, \quad ap = 0. \quad (1.1.34)$$

Особенно просто 4-вектор  $a$  выглядит, если  $np = 0$  («поперечная» поляризация):

$$a = \mathbf{n}, \quad a_0 = 0. \quad (1.1.35)$$

Если вектор  $\mathbf{n}$  параллелен  $p$ ,  $\mathbf{n} = \pm p/p$  («продольная» поляризация: знак плюс соответствует спиральности  $+1/2$  или правополяризованному электрону, знак минус — спиральности  $-1/2$  или левополяризованному электрону), то

$$a = \pm \frac{e}{m} \frac{p}{|p|}, \quad a_0 = \pm \frac{|p|}{m}. \quad (1.1.36)$$

Переходя в (1.1.32) к зарядово-сопряженному биспинору  $u^c(p, a) = C\bar{u}(p, a) \equiv u(-p, a)$ , получим соотношение, определяющее состояние поляризации позитрона:

$$(i\gamma_5 \hat{a} - I) u(-p, a) = 0. \quad (1.1.37)$$

Выпишем теперь все соотношения, определяющие (с точностью до фазового множителя) биспинор  $u(\pm p, a)$ , описывающий электрон (позитрон), 4-импульс которого равен  $p$ , а поляризация определяется 4-вектором  $a$ :

$$\begin{aligned} (\pm i\hat{p} + m) u(\pm p, a) &= 0, \\ (i\gamma_5 \hat{a} - I) u(\pm p, a) &= 0, \\ \bar{u}(\pm p, a) u(\pm p, a) &= \pm 2m. \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

При вычислении вероятностей различных процессов рассеяния с участием поляризованных электронов необходимо знать квадратичную комбинацию  $u_\alpha(\pm p, a) \bar{u}_\beta(\pm p, a)$ . Она полностью определяется соотношениями (1.1.38) и равна

$$u_\alpha(\pm p, a) \bar{u}_\beta(\pm p, a) = \frac{1}{2} [(\pm m - i\hat{p})(I + i\gamma_5 \hat{a})]_{\alpha\beta}. \quad (1.1.39)$$

**1.1.6. Поляризационная матрица плотности электрона.** До сих пор речь шла о чистых состояниях электрона (позитрона), т. е. о состояниях, описываемых определенными волновыми функциями. Между тем могут быть ситуации, когда частица находится не в чистом состоянии, а в состоянии смеси. В таких случаях состояние частицы описывается матрицей плотности

$$\rho_{\alpha\beta} = \overline{u_\alpha \bar{u}_\beta},$$

где черта означает усреднение по параметрам, характеризующим систему, частью которой является электрон.

Определим эту матрицу.

В нерелятивистском случае, усредняя соотношение (1.1.30), получим

$$\rho_{\alpha\beta} = \overline{v_\alpha v_\beta^\dagger} = \frac{1}{2} (I + \xi \sigma)_{\alpha\beta},$$

где  $\xi$  — вектор поляризации нерелятивистского электрона,

$$\xi = \overline{\mathbf{n}} = \overline{v^* \sigma v}.$$

Так как  $n^2 = 1$ , то  $\xi^2 \leq 1$ .

Усредняя соотношение (1.1.39), получим выражение для релятивистской матрицы плотности электрона (позитрона) [3]

$$\rho_{\alpha\beta}^\pm(p) = \overline{u_\alpha(\pm p) \bar{u}_\beta(\pm p)} = \frac{1}{2} [(\pm m - i\hat{p})(I + i\gamma_5 \hat{s})]_{\alpha\beta}, \quad (1.1.40)$$

где  $s_\mu = \overline{\tilde{a}_\mu}$  — 4-вектор поляризации электрона (позитрона) в смешанном состоянии. Согласно (1.1.34)

$$s^2 \leq 1, \quad sp = 0.$$

Случай  $s^2 = 1$  ( $\xi^2 = 1$ ) отвечает чистому состоянию, а случай  $s = 0$  ( $\xi = 0$ ) — неполяризованному состоянию:

$$\rho^\pm(p) = 1/2 (\pm m - i\hat{p}). \quad (1.1.41)$$

Компоненты 4-вектора  $s_\mu$  выражаются через их значения  $\xi$  в системе покоя:

$$s = \xi + \frac{(\xi p) p}{m(e+m)}, \quad s_0 = \frac{\xi p}{m}. \quad (1.1.42)$$

**1.1.7. Поляризационные состояния электрона в ультрарелятивистском пределе.** В формуле (1.1.33) нельзя непосредственно положить  $m=0$ . Поэтому она непригодна в ультрарелятивистском случае. Мы видоизменим поэтому описание поляризации электрона таким образом, чтобы оно было пригодно при любом  $m$ . Заметим с этой целью, что уравнение (1.1.32) эквивалентно уравнению

$$[i\gamma_5 (\hat{a} - f\hat{p}) \mp fm\gamma_5 - I] u(\pm p, a) = 0,$$

где  $f$  — произвольное число, которое можно выбрать таким образом, чтобы последнее уравнение обладало пределом  $m \rightarrow 0$ . Вводя обозначения  $a - fp \equiv b$ ,  $fm \equiv \lambda$ , перепишем это уравнение в виде

$$(i\gamma_5 \hat{b} \pm \lambda\gamma_5 - I) u(\pm p, b, \pm \lambda) = 0, \quad (1.1.43)$$

где в числе аргументов  $u$  отмечена также величина  $\lambda$ .

Псевдоскаляр  $\lambda$  и 4-вектор  $b$  полностью характеризуют состояние поляризации электрона. Величины  $p$ ,  $b$  и  $\lambda$  связаны между собой соотношениями

$$bp - \lambda m = 0, \quad b^2 + \lambda^2 = 1, \quad (1.1.44)$$

которые вместе с соотношением (1.1.43) инвариантны относительно преобразований

$$b \rightarrow b' = b + \alpha p, \quad \lambda \rightarrow \lambda' = \lambda - \alpha m. \quad (1.1.45)$$

Если масса частицы отлична от нуля, то с помощью этих преобразований можно сделать  $\lambda$  равным нулю и описывать состояние поляризации электрона только 4-вектором поляризации  $b = a$ . Если же масса частицы равна нулю, то введение величины  $\lambda$  необходимо [4].

Выбирая  $\lambda = \frac{e}{p} \frac{np}{p}$ , получим имеющие предел при  $m=0$  величины

$$b = n - \frac{(np) p}{p^2}, \quad b_0 = -\frac{m}{p} \frac{np}{p}, \quad \lambda = \frac{e}{p} \frac{np}{p}.$$

При  $m=0$  величина  $\lambda$  не изменяется при преобразованиях (1.1.45) и представляет собой спиральность электрона.

Положив в (1.1.39)  $a = b + \frac{\lambda}{m} p$ , найдем квадратичную комбинацию  $u_\alpha \bar{u}_\beta$ :

$$u_\alpha(\pm p, b, \pm \lambda) \bar{u}_\beta(\pm p, b, \pm \lambda) = \\ = \frac{1}{2} [(\pm m - i\hat{p})(I + i\gamma_5 \hat{b} \pm \lambda \gamma_5)]_{\alpha\beta}. \quad (1.1.46)$$

Для поляризационной матрицы плотности получим отсюда выражение

$$\rho_{\alpha\beta}(p) = \overline{u_\alpha(\pm p) \bar{u}_\beta(\pm p)} = \frac{1}{2} [(\pm m - i\hat{p})(I + i\gamma_5 \hat{s} \pm \sigma \gamma_5)]_{\alpha\beta}, \quad (1.1.47)$$

где  $s_\mu = \bar{b}_\mu$ ,  $\sigma = \bar{\lambda}$ . Ясно, что в соответствии с (1.1.44)

$$sp - \sigma m = 0, \quad s^2 + \sigma^2 \leq 1.$$

## § 1.2. Уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле и свойства инвариантности уравнения Дирака

### 1.2.1. Уравнение Дирака для электрона во внешнем электромагнитном поле.

Уравнение Дирака (1.1.12) описывает свободный электрон. Если же электрон находится во внешнем электромагнитном поле, то состояние электрона описывается уравнением, которое получается из (1.1.12) путем замены  $p_\mu$  на  $p_\mu - eA_\mu$ , где  $e$  — заряд электрона и  $A_\mu$  — 4-потенциал внешнего электромагнитного поля.

Итак, биспиноры  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , описывающие электрон во внешнем электромагнитном поле, удовлетворяют уравнениям

$$[i(\hat{p} - e\hat{A}) + m]\psi = 0, \\ \bar{\psi}[i(-\hat{p} - e\hat{A}) + m] = 0. \quad (1.2.1)$$

Обратим внимание на то, что в эти уравнения Дирака не входит непосредственно поле, т. е. тензор  $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ , а входит только 4-потенциал поля  $A_\mu$ . С этим связано важное свойство уравнения Дирака, а именно его калибровочная (или градиентная) инвариантность. Свойство это заключается в следующем. Уравнение Дирака для свободного электрона определяет биспинор  $\psi$  с точностью до постоянного фазового множителя  $e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  — константа. Действительно, при преобразовании  $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i\alpha}$  уравнение (1.1.12) остается неизменным.

Иная ситуация возникает, если считать  $\alpha$  функцией  $x$ : в этом случае уравнение (1.1.12) уже не будет инвариантно по отношению к преобразованиям

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{i\alpha(x)}, \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)}, \quad (1.2.2)$$

уравнение же (1.2.1) с 4-потенциалом  $A_\mu$  инвариантно по отношению к этому преобразованию. Действительно, 4-вектор потенциала определяется полем неоднозначно, так как, не изменяя поля,

можно перейти от потенциала  $A_\mu(x)$  к потенциалу  $A'_\mu = A_\mu + (\partial/\partial x_\mu) \Lambda(x)$ , где  $\Lambda(x)$  — любая функция  $x$ . Поэтому вместе с преобразованием (1.2.2) функции  $\psi(x)$  можно подвергнуть также преобразованию 4-вектор потенциала, выбрав  $\Lambda(x) = (1/e)\alpha(x)$ , и уравнение Дирака останется при этом неизменным. Такое комбинированное преобразование

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{i\alpha(x)}, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)},$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu + \frac{1}{e} \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu},$$

оставляющее инвариантным уравнение Дирака, называется калибровочным.

Можно, следовательно, сказать, что инвариантность уравнения Дирака по отношению к фазовому преобразованию с переменной фазой достигается благодаря взаимодействию электрона с электромагнитным полем.

Уравнению Дирака (1.2.1) можно придать вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi,$$

где  $H$  — гамильтониан, определяемый формулой

$$H = \alpha(p - eA) + \beta m + e\varphi, \quad \varphi = A_0. \quad (1.2.3)$$

**1.2.2. Уравнение непрерывности.** Умножив первое из уравнений (1.2.1) слева на  $\bar{\psi}$ , а второе справа на  $\psi$  и сложив результаты, получим

$$\bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi = 0,$$

или

$$\partial_s \mu / \partial x_\mu = 0, \quad s_\mu = i (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi). \quad (1.2.4)$$

В трехмерной форме это уравнение имеет вид

$$\partial s_0 / \partial t + \text{div } s = 0,$$

где

$$s_0 = \bar{\psi} \gamma_4 \psi = \psi^\dagger \psi, \quad s = i \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \psi = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi$$

( $\boldsymbol{\gamma}$  обозначает совокупность матриц  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ).

Как мы убедимся далее, величины  $s_\mu$  образуют 4-вектор, который можно интерпретировать как 4-вектор плотности тока, а уравнение (1.2.4) — как уравнение непрерывности.

Уравнение непрерывности позволяет ввести инвариантную нормировку волновой функции  $\psi$  согласно условию

$$\int d^3x \psi^\dagger \psi = 1. \quad (1.2.5)$$

Поскольку  $s_\mu$  — 4-вектор, удовлетворяющий соотношению (1.2.4), то входящий сюда интеграл представляет собой релятивистский инвариант. Заметим, однако, что, в отличие от нерелятивистской квантовой механики, величину  $\psi^\dagger \psi$ , вообще говоря, нельзя интерпретировать как плотность вероятности нахождения электрона

в определенной точке пространства. Это связано с тем, что в релятивистском случае нельзя, как уже упоминалось, построить последовательную одночастичную теорию. Тем не менее 4-вектор  $s_\mu$  играет важную роль, так как с его помощью может быть построен 4-вектор плотности электрического тока  $j_\mu$ , связанного с электроном,

$$|j_\mu = ie (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi). \quad (1.2.6)$$

**1.2.3. Различные представления уравнения Дирака.** Если подвергнуть волновую функцию  $\psi$  линейному преобразованию

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi \quad (1.2.7)$$

и одновременно произвести над матрицами  $\gamma_\mu$  преобразование подобия

$$\gamma_\mu \rightarrow \gamma'_\mu = U\gamma_\mu U^{-1}, \quad (1.2.8)$$

где  $U$  — произвольная четырехрядная неособенная матрица, то уравнение Дирака, как легко видеть, не изменит своего вида. При этом, очевидно, матрицы  $\gamma'_\mu$  будут удовлетворять тем же соотношениям (1.1.13), что и матрицы  $\gamma_\mu$ , т. е.

$$\gamma'_\mu \gamma'_\nu + \gamma'_\nu \gamma'_\mu = 2\delta_{\mu\nu} I.$$

Если матрица  $U$  унитарна,  $UU^+ = I$ , то матрицы  $\gamma'_\mu$  будут, как и матрицы  $\gamma_\mu$ , эрмитовыми,  $\gamma'_\mu = \gamma'^{\mu+}$ .

Приведем пример унитарных преобразований уравнения Дирака. Выберем  $U$  в виде действительной матрицы [5]

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}, \quad U^2 = I \quad (1.2.9)$$

(каждый элемент означает двухрядную матрицу). В этом случае

$$\gamma'_k = -\gamma_k, \quad \gamma'_i = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.2.10)$$

Если записать преобразованную волновую функцию в виде

$$\psi' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (1.2.11)$$

то  $\xi$  и  $\eta$  будут связаны с  $\varphi$  и  $\chi$  соотношениями

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi + \chi), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi - \chi),$$

и система уравнений, которым удовлетворяют эти двухкомпонентные величины в отсутствие поля, будет иметь вид

$$i \frac{\partial \xi}{\partial t} = \sigma \mathbf{r} \xi + m \eta, \quad i \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\sigma \mathbf{r} \eta + m \xi. \quad (1.2.12)$$

Величины  $\xi$  и  $\eta$ , в отличие от  $\varphi$  и  $\chi$ , обладают следующим замечательным свойством: они преобразуются независимо при преобразованиях собственной группы Лоренца (см. п. 1.2.5).

При  $m=0$  эти уравнения распадаются на два независимых уравнения

$$i \frac{\partial \xi}{\partial t} = \sigma \rho \xi, \quad i \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\sigma \rho \eta, \quad (1.2.13)$$

которые называются уравнениями Вейля [6].

Таким образом, при нулевой массе частица со спином  $1/2$  может описываться одним двухкомпонентным спинором, удовлетворяющим уравнению Вейля. Каждое из двух уравнений (1.2.13) в отдельности инвариантно относительно преобразований собственной группы Лоренца, но неинвариантно относительно инверсии (см. п. 1.2.6). Такие уравнения описывают нейтрино.

1.2.4. Алгебра матриц Дирака. Мы видим, таким образом, что уравнение Дирака определяется не столько явным видом матриц  $\gamma_\mu$ , сколько их алгебраическими свойствами, заключенными в соотношениях (1.1.13). От данной совокупности матриц  $\gamma_\mu$  можно перейти к другой  $\gamma'_\mu$  при помощи преобразования подобия (1.2.8). Справедливо и обратное утверждение: если две совокупности четырехрядных матриц  $\gamma_\mu$  и  $\gamma'_\mu$  удовлетворяют соотношениям (1.1.13), то они связаны между собой преобразованием подобия (1.2.8), причем матрица  $U$  определяется с точностью до численного множителя однозначно (основная теорема о матрицах Дирака [7]).

Изучим подробнее алгебру матриц Дирака.

Если рассмотреть все произведения различного числа матриц  $\gamma_\mu$ , то произведения более чем четырех матриц будут сводиться в силу (1.1.13) к произведениям двух, трех и четырех матриц. Поэтому все произведения могут быть сведены к следующим линейно-независимым 16 матрицам:

$I$ ,

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ,

$\gamma_1\gamma_2, \gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_1, \gamma_1\gamma_4, \gamma_2\gamma_4, \gamma_3\gamma_4$ ,

$\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \gamma_2\gamma_3\gamma_4, \gamma_3\gamma_1\gamma_4, \gamma_1\gamma_2\gamma_4$ ,

$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$

или к матрицам

$$\Gamma_j \equiv I, \quad \gamma_\mu, \quad \sigma_{\mu\nu}, \quad i\gamma_5\gamma_\mu, \quad \gamma_5, \quad (1.2.14)$$

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i} (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \quad \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Из линейной независимости 16 матриц  $\Gamma_j$  следует, что число строк и столбцов в квадратных матрицах  $\gamma_\mu$  не может быть меньше четырех.

Шестнадцать матриц  $\Gamma_j$  образуют полный набор четырехрядных матриц и по ним может быть разложена любая четырехрядная матрица  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{4} \text{Sp}(Q) I + \frac{1}{4} \text{Sp}(Q\gamma_\mu) \gamma_\mu + \frac{1}{4} \text{Sp}(Q\gamma_5) \gamma_5 + \\ + \frac{1}{8} \text{Sp}(Q\sigma_{\mu\nu}) \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \text{Sp}(Qi\gamma_5\gamma_\mu) i\gamma_5\gamma_\mu. \quad (1.2.15)$$

Поскольку уравнение Дирака определено с точностью до преобразования подобия (1.2.7), (1.2.8), физические результаты, получаемые на основе этого уравнения, должны выражаться через величины, инвариантные относительно таких преобразований. Такими практически очень важными инвариантами являются следы произведений матриц  $\gamma_\mu$ .

Прежде всего легко видеть, что след произведения нечетного числа матриц  $\gamma_\mu$  равен нулю:

$$\text{Sp}(\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2n+1}}) = 0.$$

Определим следы произведений четного числа матриц  $\gamma_\mu$ . Если число их равно двум, из (1.1.13) немедленно получаем

$$\frac{1}{4} \text{Sp}(\gamma_j \gamma_l) = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, 2, 3, 4. \quad (1.2.16)$$

Определим далее  $\text{Sp}(\gamma_j \gamma_l \gamma_k \gamma_n)$ . Замечая, что  $\gamma_j \gamma_l \gamma_k \gamma_n = 2\delta_{jl} \gamma_k \gamma_n - \gamma_l \gamma_j \gamma_k \gamma_n$ , имеем

$$\gamma_j \gamma_l \gamma_k \gamma_n = 2\delta_{jl} \gamma_k \gamma_n - 2\delta_{jk} \gamma_l \gamma_n + 2\delta_{jn} \gamma_l \gamma_k - \gamma_l \gamma_k \gamma_n \gamma_j$$

и, учитывая, что

$$\text{Sp}(\gamma_j \gamma_l \gamma_k \gamma_n) = \text{Sp}(\gamma_l \gamma_k \gamma_n \gamma_j),$$

найдем, используя (1.2.16),

$$\frac{1}{4} \text{Sp}(\gamma_j \gamma_l \gamma_k \gamma_n) = \delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{jn} \delta_{lk}. \quad (1.2.17)$$

В общем случае

$$\frac{1}{4} \text{Sp}(\gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_{2n}}) = \sum (-1)^N \delta_{i_k} \delta_{i_m} \dots, \quad (1.2.18)$$

где  $i, k, l, m$  — некоторая комбинация индексов  $i_1, i_2, \dots, i_{2n}$  и сумма берется по всем возможным комбинациям пар чисел  $i, k, l, m, \dots$ ;  $N$  — число парных перестановок, переводящих последовательность  $i_1, i_2, \dots, i_{2n}$  в  $i, k, \dots$ , причем порядок следования индексов внутри каждой пары отвечает их порядку в последовательности  $i_1, i_2, \dots, i_{2n}$ . Число слагаемых в сумме равно, очевидно,  $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)$ .

Знаки отдельных слагаемых в (1.2.18) удобно находить следующим образом [8, 9]. Сопоставим каждой матрице  $\gamma_i$  точку на окружности и расположим их в таком же порядке, в каком они расположены в левой части равенства. Соединим далее эти точки попарно прямыми линиями. Тогда каждой прямой, соединяющей точки  $i$  и  $k$ , соответствует множитель  $\delta_{ik}$ , а каждому способу соединения точек — слагаемое  $(-1)^N \delta_{ik} \delta_{lm} \dots$ , где  $N$  — число точек пересечения прямых.

Из (1.2.18) легко заключить, что

$$\frac{1}{4} \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_i \gamma_k \gamma_l \gamma_m) = \varepsilon_{iklm}. \quad (1.2.19)$$

где  $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \frac{1}{4!} \varepsilon_{iklm} \gamma_i \gamma_k \gamma_l \gamma_m$  и  $\varepsilon_{iklm}$  — единичный антисимметричный тензор,  $\varepsilon_{1234} = 1$ .

1.2.5. Релятивистская инвариантность уравнения Дирака. Докажем теперь релятивистскую инвариантность уравнения Дирака, т. е. инвариантность по отношению к преобразованиям собственной группы Лоренца, инверсии и обращению времени.

Начнем с собственных преобразований Лоренца. Утверждение об инвариантности уравнений (1.2.1) относительно собственных преобразований Лоренца означает, что для каждого собственного преобразования Лоренца  $x'_\mu \rightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$  и соответственно преобразования 4-импульса и 4-потенциала

$$p_\mu \rightarrow p'_\mu = a_{\mu\nu} p_\nu, \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x') = a_{\mu\nu} A_\nu(x) \quad (1.2.20)$$

можно найти такое линейное преобразование волновой функции электрона

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S\psi(x), \quad (1.2.21)$$

где  $S = S(a)$  — некоторая четырехрядная неособенная матрица, являющаяся функцией матрицы  $a$ , при котором  $\psi'(x')$  и  $\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^\dagger \gamma_4$  будут удовлетворять уравнениям, имеющим такой же вид, как и исходные уравнения:

$$\begin{aligned} \left[ \gamma_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x'_\mu} - ie A'_\mu(x') \right) + m \right] \psi'(x') &= 0, \\ \left[ \gamma_\mu^\dagger \left( \frac{\partial}{\partial x'_\mu} + ie A'_\mu(x') \right) - m \right] \bar{\psi}'(x') &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Докажем, что такое преобразование существует. Подставим для этого (1.2.21) в первое уравнение (1.2.22) и умножим его слева на  $S^{-1}$ . Учитывая (1.2.20), получим

$$S^{-1} \left[ \gamma_\mu a_{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} - ie A_\nu(x) \right) + m \right] S \psi(x) = 0.$$

Это уравнение должно совпадать с исходным уравнением Дирака для  $\psi(x)$ , причем необходимо выполнение условий

$$\gamma_\nu^\alpha = S \gamma_\nu S^{-1}, \quad (1.2.23)$$

где  $\gamma_\nu^\alpha = \gamma_\mu a_{\mu\nu}$ .

Чтобы убедиться в существовании матрицы  $S$ , удовлетворяющей этим условиям, достаточно заметить, что матрицы  $\gamma_\nu^\alpha$  удовлетворяют перестановочным соотношениям матриц Дирака,  $\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\alpha + \gamma_\nu^\alpha \gamma_\mu^\alpha = 2\delta_{\mu\nu} I$ . Отсюда, согласно основной теореме о матрицах Дирака, следует, что существует преобразование подобия, связывающее матрицы  $\gamma_\mu^\alpha$  и  $\gamma_\mu$ , каковым и является соотношение (1.2.23).

Легко видеть, что при преобразовании (1.2.21) биспинор  $\bar{\psi}(x)$  преобразуется согласно закону

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}. \quad (1.2.24)$$

Действительно, подставляя это выражение во второе уравнение (1.2.22) и умножая его слева на  $S^\dagger$ , мы придем к исходному

уравнению для  $\bar{\psi}(x)$ , если выполняются условия  $S^T \gamma_\mu^T (S^{-1})^T a_{\mu\nu} = \gamma_\nu^T$ , которые тождественны условиям (1.2.23).

Учтем теперь, что функции  $\bar{\psi}'(x')$  и  $\psi'(x')$  связаны между собой так же, как и функции  $\bar{\psi}(x)$  и  $\psi(x)$ , т. е.  $\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^T \gamma_4$ . Подставляя сюда (1.2.21) и (1.2.24), получим  $\bar{\psi}(x) S^{-1} = (S\psi(x))^T \gamma_4 = \bar{\psi}(x) \gamma_4^{-1} S^T \gamma_4$ , откуда

$$S^T \gamma_4 = \gamma_4 S^{-1}. \quad (1.2.25)$$

Этому условию, помимо соотношений (1.2.23), должна удовлетворять матрица  $S$ .

Найдем явный вид матрицы  $S$ . Рассмотрим сперва бесконечно малое собственное преобразование Лоренца  $a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}$ ,  $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ ,  $|\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1$ . Ему соответствует преобразование (1.2.23), бесконечно мало отличающееся от единичного:

$$S = I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I_{\mu\nu}, \quad I_{\mu\nu} = -I_{\nu\mu}, \quad (1.2.26)$$

где  $I_{\mu\nu}$  — так называемые инфинитезимальные операторы преобразования. Подставляя (1.2.26) в (1.2.23), получим

$$\gamma_\mu I_{\lambda\nu} - I_{\lambda\nu} \gamma_\mu = \delta_{\lambda\mu} \gamma_\nu - \delta_{\nu\mu} \gamma_\lambda. \quad (1.2.27)$$

Этим соотношениям можно удовлетворить, положив

$$I_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu}. \quad (1.2.28)$$

При этом будет удовлетворено также условие (1.2.25).

Зная инфинитезимальные операторы  $I_{\mu\nu}$ , легко найти вид матрицы  $S$ , соответствующей произвольному собственному преобразованию Лоренца  $x' = ax$ .

Рассмотрим два типа преобразований, входящих в собственную группу Лоренца: преобразования пространственного поворота и преобразования, связывающие различные инерциальные системы отсчета. В случае бесконечно малого пространственного поворота, очевидно,  $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jkl} d\theta_l$ ,  $i, k, l = 1, 2, 3$ , где  $d\theta$  — бесконечно малый угол поворота системы координат, и матрица  $S(d\theta)$ , соответствующая этому повороту, имеет вид

$$S(d\theta) = I + \frac{1}{2} \varepsilon_{jk} I_{jk} = I + \frac{1}{2} \Sigma d\theta, \quad (1.2.29)$$

$$\Sigma_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} \sigma_{kl} = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} = i \gamma_4 \gamma_j \gamma_j. \quad (1.2.30)$$

Пусть теперь происходит вращение вокруг заданной оси, направление которой характеризуется единичным вектором  $n$ , на конечный угол  $\theta$ . Так как при этом вращения на различные углы независимы, то

$$S(\theta + d\theta) = S(\theta) S(d\theta) = S(\theta) \left( I + \frac{i}{2} \Sigma n d\theta \right),$$

откуда

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta} = \frac{i}{2} \Sigma n S(\theta),$$

и, следовательно,

$$S(\theta) = \exp\left(i\Sigma n \frac{\theta}{2}\right) = I \cos \frac{\theta}{2} + i\Sigma n \sin \frac{\theta}{2}. \quad (1.2.31)$$

Эта формула показывает, что матрицу  $\frac{1}{2}\Sigma$  можно интерпретировать как оператор спина электрона.

Из (1.2.31), (1.2.30) следует, что спиноры  $\varphi$  и  $\chi$ , образующие биспинор  $\psi$ , преобразуются при вращениях независимо друг от друга по одинаковому закону.

Обратим внимание на то, что в  $S(\theta)$  входит половинный угол вращения. Благодаря этому при вращении на угол  $\theta = 2\pi$  преобразованная волновая функция отличается знаком от исходной,  $S(2\pi) = -I$ . Это обстоятельство связано со спинорным характером функции  $\psi(x)$ .

Рассмотрим теперь преобразования Лоренца, связывающие различные инерциальные системы отсчета. Если относительное движение систем происходит вдоль оси  $x_1$ , то такие преобразования можно рассматривать как вращения в плоскости  $x_1, x_4$  с мнимым углом вращения  $i\theta$ , где  $\text{th } \theta = v$  и  $v$  — относительная скорость систем. При этом у  $\varepsilon_{\mu\nu}$  будут отличны от нуля только две компоненты,  $\varepsilon_{41} = -\varepsilon_{14} = -i d\theta$ , и, следовательно, бесконечно малое преобразование волновой функции будет иметь вид

$$S(d\theta) = I + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}I_{\mu\nu} = I + \frac{i}{2}\gamma_1\gamma_4 d\theta = I + \frac{1}{2}\alpha_1 d\theta.$$

Если движение происходит не вдоль оси  $x_1$ , а вдоль произвольного направления, характеризуемого единичным вектором  $n$ , то это выражение должно быть заменено на

$$S(d\theta) = I + \frac{1}{2}\alpha n d\theta.$$

Отсюда, повторяя рассуждения, приводящие к (1.2.31), легко получить формулу для  $S$  в случае конечного поворота на угол  $\theta$ :

$$S(\theta) = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha n \theta\right), \quad (1.2.32)$$

где  $\text{th } \theta = v$ .

Так как матрицы  $\alpha_i$  в представлении (1.1.4) недиагональны (в смысле разбиения на двумерные матрицы), то спиноры  $\varphi$  и  $\chi$  в выражении (1.1.6') для биспинора  $\psi$  преобразуются при лоренцевых преобразованиях (1.2.32) не независимо друг от друга; иначе говоря, каждый из этих спиноров в отдельности не является релятивистски ковариантной величиной. Если, однако, выбрать представление матриц Дирака в виде (1.2.10)

$$\Sigma' = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \alpha' = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (1.2.33)$$

то спиноры  $\xi, \eta$ , образующие преобразованный при унитарном преобразовании (1.2.9) биспинор  $\psi'$ , будут при лоренцевых преобразованиях (1.2.32) преобразовываться независимо друг от друга.

**1.2.6. Пространственное отражение, обращение времени и зарядовое сопряжение.** Уравнение Дирака инвариантно также относительно дискретных преобразований полной группы Лоренца — пространственного отражения (инверсии) и обращения времени.

При пространственном отражении  $r \rightarrow r' = -r$ ,  $t \rightarrow t' = t$  4-вектор потенциала преобразуется согласно закону

$$\begin{aligned} A(r, t) &\rightarrow A'(r', t') = -A(r, t), \\ A_0(r, t) &\rightarrow A'_0(r', t') = A_0(r, t). \end{aligned}$$

Мы предположим, что преобразованию инверсии соответствует следующее преобразование биспиноров  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &\rightarrow \psi'(r', t') = P\psi(r, t), \\ \bar{\psi}(r, t) &\rightarrow \bar{\psi}'(r', t') = \bar{\psi}(r, t)P^{-1}, \end{aligned} \quad (1.2.34)$$

где  $P$  — некоторая неособенная четырехрядная матрица. Повторяя рассуждения предыдущего раздела, легко убедиться, что должны выполняться следующие условия:  $\gamma_i P = -P\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\gamma_4 P = P\gamma_4$ . Отсюда следует, что

$$P = \eta_P \gamma_4, \quad (1.2.35)$$

где  $|\eta_P| = 1$ .

Для определения величины  $\eta_P$  мы можем исходить из того, что двойное отражение должно быть эквивалентно либо тождественному преобразованию, либо вращению на угол  $2\pi$ . В первом случае  $\eta_P^2 = 1$ , и, следовательно,  $\eta_P = \pm 1$ , а во втором случае, согласно (1.2.31),  $\eta_P^2 = -1$ , и, следовательно,  $\eta_P = \pm i$ . В конце этого пункта мы сформулируем дополнительное требование, на основании которого должен быть сделан выбор  $\eta_P = -1$ .

В зависимости от знака  $\eta_P$  следует различать два типа биспиноров  $\psi(x)$ . Это значит, что в принципе возможно существование двух типов частиц, подчиняющихся одному и тому же уравнению Дирака, но отличающихся характером преобразования при пространственном отражении. Об этих частицах говорят, что они обладают различной внутренней четностью.

Из (1.2.35) и (1.1.6') следует, что двухкомпонентные спиноры  $\varphi$  и  $\chi$  преобразуются при пространственном отражении  $P$  по законам

$$P\varphi(r, t) = \eta_P \varphi(-r, t), \quad P\chi(r, t) = -\eta_P \chi(-r, t),$$

т. е. независимо друг от друга, причем четности  $\varphi$  и  $\chi$  противоположны. Этот результат следует непосредственно из уравнений (1.1.7), если учесть, что оператор спина является аксиально-векторным оператором. Из (1.2.35) и (1.2.11) следует, что двухкомпонентные 4-спиноры  $\xi$  и  $\eta$  преобразуются при пространственном отражении по законам

$$P\xi(r, t) = \eta_P \eta(-r, t), \quad P\eta(r, t) = \eta_P \xi(-r, t).$$

Таким образом, 4-спиноры  $\xi$  и  $\eta$ , преобразующиеся независимо друг от друга при преобразованиях собственной группы

Лоренца, переходят друг в друга при преобразовании пространственного отражения. По этой причине уравнение Вейля (1.2.13), а также уравнение (1.2.5) не обладают инвариантностью относительно пространственных отражений.

Рассмотрим теперь преобразование обращения времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad t \rightarrow t' = -t, \\ A(\mathbf{r}, t) \rightarrow A'(\mathbf{r}', t') = -A(\mathbf{r}, t), \\ A_0(\mathbf{r}, t) \rightarrow A'_0(\mathbf{r}', t') = A_0(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

В нерелятивистской квантовой механике это преобразование сопровождается антилинейным преобразованием волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}', t') = \psi^*(\mathbf{r}, t)$ . Уравнение Дирака также инвариантно по отношению к антилинейному преобразованию, которое мы запишем в виде

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}', t') = T\bar{\psi}(\mathbf{r}, t), \\ \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \bar{\psi}'(\mathbf{r}', t') = \psi(\mathbf{r}, t)T^{-1}, \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

где  $T$  — некоторая неособенная матрица, удовлетворяющая условиям

$$\gamma_i T = -T\gamma_i^T, \quad i = 1, 2, 3, \quad \gamma_4 T = T\gamma_4^T,$$

откуда

$$T = \eta_T \gamma_5 \gamma_4 C, \quad (1.2.37)$$

где  $|\eta_T| = 1$  и  $C$  — матрица зарядового сопряжения, введенная в п. 1.1.3.

Рассмотрим теперь преобразование зарядового сопряжения

$$\psi(x) \rightarrow \psi^c(x) = C\bar{\psi}(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^c(x) = C^{-1}\psi(x).$$

Легко проверить, что зарядово-сопряженные волновые функции  $\psi^c$  и  $\bar{\psi}^c$  удовлетворяют уравнениям Дирака

$$[i(\hat{p} + e\hat{A}) + m]\psi^c = 0, \quad \bar{\psi}^c[i(-\hat{p} + e\hat{A}) + m] = 0,$$

которые отличаются от уравнений (1.2.1) знаком электрического заряда. Так как закон преобразования биспиноров относительно преобразований собственной группы Лоренца однозначно следует из уравнений Дирака (1.2.1), то ясно, что биспиноры  $\psi^c$  и  $\bar{\psi}^c$  преобразуются при преобразованиях собственной группы Лоренца так же, как и биспиноры  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ .

Потребуем теперь, чтобы закон преобразования зарядово-сопряженных биспиноров  $\psi^c$  и  $\bar{\psi}^c$  не отличался от соответствующих законов преобразования биспиноров  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  также и при пространственном отражении и обращении времени. Это дополнительное требование приводит к условиям

$$\eta_{\hat{p}}^c = -1, \quad \eta_T^c = 1. \quad (1.2.38)$$

**1.2.7. Ковариантные билинейные формы.** Установив законы преобразования волновых функций электрона  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , можно выяснить, как преобразуются при лоренцевых преобразованиях различные произведения компонент этих функций. Ограничимся рассмотрением простейшего и наиболее важного случая, когда эти произведения построены билинейно из компонент  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$ , т. е. имеют вид  $\bar{\psi}_1(x) Q \psi_2(x)$ , где  $Q$  — произвольная четырехрядная матрица и  $\psi_1$  и  $\psi_2$  относятся, вообще говоря, к разным состояниям электрона.

В п. 1.2.4 мы видели, что матрицы  $\Gamma_i = I$ ,  $\gamma_\mu$ ,  $\sigma_{\mu\nu}$ ,  $\gamma_5$ ,  $i\gamma_5\gamma_\mu$  образуют систему 16 независимых четырехрядных матриц, по которым может быть разложена любая четырехрядная (квадратная) матрица.

Таким образом, 16 билинейных комбинаций  $\bar{\psi}\Gamma_i\psi$  образуют 5 ковариантных величин:

$$\begin{array}{ll} \text{скаляр} & S = \bar{\psi}\psi, \\ \text{вектор} & V_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \\ \text{тензор} & T_{\mu\nu} = \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi, \\ \text{аксиальный вектор} & A_\mu = \bar{\psi}i\gamma_5\gamma_\mu\psi, \\ \text{псевдоскаляр} & P = \bar{\psi}\gamma_5\psi. \end{array} \quad (1.2.39)$$

При преобразованиях полной группы Лоренца эти формы преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\psi'(x') &= \text{Sgn } a_{44} \cdot a_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x), \\ \bar{\psi}'(x')\sigma_{\mu\nu}\psi'(x') &= \text{Sgn } a_{44} \cdot a_{\mu\rho}a_{\nu\lambda}\bar{\psi}(x)\sigma_{\rho\lambda}\psi(x), \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') &= \det a \cdot \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), \\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma_\mu\psi'(x') &= \det a \cdot a_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\nu\psi(x), \end{aligned}$$

где  $a$  — матрица преобразования  $x \rightarrow x'$ ,  $x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$ .

**1.2.8. Использование обозначений, соответствующих псевдоевклидовой метрике.** Наряду с принятыми нами обозначениями, соответствующими евклидовой метрике 4-пространства (с мнимой четвертой компонентой 4-векторов), часто используются также обозначения, соответствующие псевдоевклидовой метрике с вещественной четвертой компонентой 4-векторов [10, 11]. При этом скалярное произведение двух 4-векторов  $a$  и  $b$  определяется не как

$$ab = \sum_{\mu=1}^4 a_\mu b_\mu = \underline{ab} + a_4 b_4,$$

а как

$$\underline{ab} = a_0 b_0 - ab,$$

где  $a_0 = \frac{1}{i} a_4$ .

При таком определении скалярного произведения удобно вместо матриц  $\gamma_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) применять другие матрицы,

которые мы будем обозначать через  $\gamma_\mu^F$  ( $\mu=0, 1, 2, 3$ ) и которые связаны с матрицами  $\gamma_\mu$  соотношениями

$$\gamma_0^F = \gamma_4 = \beta, \quad \gamma_j^F = i\gamma_j = \beta\alpha_j, \quad j=1, 2, 3. \quad (1.2.40)$$

Ясно, что матрица  $\gamma_0^F$  эрмитова, а матрицы  $\gamma_j^F$  ( $j=1, 2, 3$ ) антиэрмитовы:

$$(\gamma_0^F)^+ = \gamma_0^F, \quad (\gamma_j^F)^+ = -\gamma_j^F, \quad j=1, 2, 3.$$

Матрицы  $\gamma_\mu^F$  удовлетворяют, очевидно, соотношениям

$$\gamma_\mu^F \gamma_\nu^F + \gamma_\nu^F \gamma_\mu^F = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ 1, & \mu = \nu = 0, \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1.2.41)$$

По аналогии с величиной

$$\hat{a} = \gamma a + \gamma_4 a_4$$

теперь вводится величина

$$\underline{\hat{a}} = \underline{\gamma^F a} = \gamma_0^F a_0 - \gamma^F a = -i\hat{a}. \quad (1.2.42)$$

Используя (1.2.41), легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \gamma^F \gamma^F &= 4, & \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} &= 2ab, \\ \gamma^F \hat{a} \gamma^F &= \gamma_0^F \hat{a} \gamma_0^F - \gamma^F \hat{a} \gamma^F = -2\hat{a}, \\ \gamma^F \hat{a} \hat{b} \gamma^F &= 4ab, & \gamma^F \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma^F &= -2\hat{c}\hat{b}\hat{a}, \\ \frac{1}{4} \text{Sp } \hat{a}\hat{b} &= ab, \\ \frac{1}{4} \text{Sp } (\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}) &= ab \cdot cd + ad \cdot cb - ac \cdot bd. \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

Уравнения Дирака в новых обозначениях имеют вид

$$(\underline{\hat{p}} - e\underline{\hat{A}} - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(\underline{\hat{p}} + e\underline{\hat{A}} + m) = 0, \quad (1.2.44)$$

где

$$\underline{\hat{p}} = i \left( \gamma_0^F \frac{\partial}{\partial t} - \gamma^F \frac{\partial}{\partial r} \right) = -i \underline{\gamma^F \frac{\partial}{\partial x}}, \quad \bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0^F.$$

Легко видеть, что матрица зарядового сопряжения  $S$  связана с матрицами  $\gamma_\mu^F$  такими же соотношениями, как и с матрицами  $\gamma_\mu$ :

$$S \gamma_\mu^F = -(\gamma_\mu^F)^T S.$$

Прежний вид имеют определение 4-вектора плотности тока

$$s_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu^F \psi, \quad \mu=0, 1, 2, 3,$$

а также определения других билинейных форм; в них нужно лишь заменить  $\gamma_\mu$  на  $\gamma_\mu^F$  и  $\gamma_5$  на

$$\gamma_5^F = i \gamma_0^F \gamma_1^F \gamma_2^F \gamma_3^F.$$

При вычислении вероятностей процессов с участием поляризованных электронов нужно в формулах (1.1.40) и (1.1.47) произвести замену

$$i\hat{p} = -\hat{p}, \quad i\hat{s} = -\hat{s}, \quad \gamma_5 = \gamma_5^F.$$

Матрица плотности электрона, определяемая формулой (1.1.40), в новых обозначениях имеет вид

$$\rho = 1/2 (m + \hat{p}) (I - \gamma_5^F \hat{s}).$$

### § 1.3. Предельные переходы к нерелятивистской квантовой механике и релятивистской классической механике

**1.3.1. Уравнение Паули.** Если энергия электрона  $\varepsilon$  мало отличается от его энергии покоя  $m$ , т. е.  $|\varepsilon - m| \ll m$ , то, согласно (1.1.19), один из двух спиноров, образующих волновую функцию электрона, будет мал по сравнению с другим,  $|\chi| \ll |\varphi|$ . Это дает возможность путем формального разложения волновой функции в ряд по степеням  $1/c$  ( $c$  — скорость света в вакууме) получить приближенное уравнение, содержащее только больший спинор.

Перепишем с этой целью уравнение Дирака в форме, содержащей явно скорость света,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ c\alpha \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + eA_0 \right] \psi, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{i} \nabla,$$

где  $\mathbf{A}$  и  $A_0$  — векторный и скалярный потенциалы внешнего электромагнитного поля. Так как в нерелятивистской теории под энергией понимается разность между полной энергией и энергией покоя, то удобно вместо  $\psi$  рассматривать функцию  $\Psi$ :

$$\Psi = \psi e^{imc^2 t} \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Она удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ c\alpha \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + (\beta - 1) mc^2 + eA_0 \right] \Psi, \quad (1.3.2)$$

которое распадается на уравнения

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= c\sigma \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \chi + eA_0 \varphi, \\ i \frac{\partial \chi}{\partial t} &= c\sigma \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi + eA_0 \chi - 2mc^2 \chi \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

для спиноров  $\varphi$  и  $\chi$ , образующих  $\Psi$ .

Чтобы произвести разложение по степеням  $1/c$ , будем считать, что  $\chi$  по порядку величины составляет  $\frac{1}{c} \varphi$  (это оправдывается ходом дальнейших выкладок). Тогда для получения первого приближения можно отбросить во втором уравнении все члены, содер-

жащие  $\chi$ , кроме последнего, в котором коэффициент содержит  $c^2$ . Мы получим, таким образом,

$$\chi = \frac{1}{2mc} \sigma \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi. \quad (1.3.4)$$

Подстановка этого выражения в первое уравнение дает

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} \left[ \sigma \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 + eA_0 \right\} \varphi. \quad (1.3.5)$$

Пользуясь свойствами матриц  $\sigma_i$ , легко убедиться, что

$$\left[ \sigma \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 = \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e}{c} \sigma \mathbf{H},$$

где  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  — магнитное поле. Подстановка этого выражения в (1.3.5) приводит окончательно к следующему уравнению для спинора  $\varphi$ :

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eA_0 - \frac{e}{2mc} \sigma \mathbf{H} \right] \varphi. \quad (1.3.6)$$

Это уравнение, представляющее собой первое приближение в разложении  $\varphi$  по  $1/c$ , называется уравнением Паули [12]. Оно имеет вид уравнения Шредингера с гамильтонианом

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eA_0 - \frac{e}{2mc} \sigma \mathbf{H}, \quad (1.3.7)$$

отличающимся от нерелятивистского гамильтониана бесспиновой частицы наличием члена  $-\boldsymbol{\mu} \mathbf{H}$ , где

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \quad (1.3.8)$$

(мы ввели сюда явно  $\hbar$ ). Этот член представляет собой потенциальную энергию магнитного диполя  $\boldsymbol{\mu}$  во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ .

Таким образом, мы приходим к выводу, что в первом приближении по  $1/c$  электрон ведет себя как нерелятивистская частица, обладающая, кроме заряда, магнитным моментом  $\boldsymbol{\mu}$ .

**1.3.2. Второе приближение.** Найдем теперь второе приближение, продолжив разложение до членов порядка  $1/c^2$ . Ограничимся случаем, когда имеется только постоянное внешнее электрическое поле.

Подставив в отброшенные ранее члены второго уравнения (1.3.3) значение  $\chi$  в первом приближении и решив это уравнение относительно  $\chi$ , получим

$$\chi = \frac{1}{2mc} \left( \sigma \mathbf{p} + \frac{eA_0}{2mc^2} \sigma \mathbf{p} - \frac{i}{2mc^2} \sigma \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi. \quad (1.3.9)$$

Подставив далее это выражение в первое уравнение (1.3.3), получим следующее уравнение для  $\varphi$ :

$$i \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{4mc^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + eA_0 + \frac{e}{4m^2c^2} (\sigma \mathbf{p}) A_0 (\sigma \mathbf{p}) \right) \varphi.$$

Умножая это уравнение на  $(1 - p^2/4m^2c^2)$  и сохраняя члены порядка не выше  $1/c^2$ , перепишем его в виде

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[ \left( 1 - \frac{p^2}{4m^2c^2} \right) \left( \frac{p^2}{2m} - eA_0 \right) + \frac{e}{4m^2c^2} (\sigma p) A_0 (\sigma p) \right] \varphi \equiv H' \varphi. \quad (1.3.10)$$

Хотя это уравнение формально и имеет вид уравнения Шредингера, тем не менее оно им не является, так как функция  $\varphi$  не имеет точного смысла волновой функции электрона, а оператор  $H'$  нельзя рассматривать как оператор Гамильтона. Действительно, интеграл  $\int d^3x |\varphi|^2$  не сохраняется во времени (согласно уравнению непрерывности сохраняется интеграл  $\int d^3x (|\varphi|^2 + |\chi|^2)$ ), поэтому  $\varphi$  нельзя пронормировать; оператор же  $H'$  не является самосопряженным, так как он содержит слагаемое  $\frac{e}{4m^2c^2} (\sigma p) A_0 (\sigma p)$ .

Чтобы найти волновую функцию и гамильтониан во втором приближении, произведем преобразование  $\varphi \rightarrow \Phi = O\varphi$ ,  $H' \rightarrow H = OH'O^{-1}$ , где  $O$  — некоторый оператор, не содержащий явно времени. Тогда  $\Phi$  будет удовлетворять уравнению

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H\Phi.$$

Если мы подберем теперь  $O$  таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int d^3x (|\varphi|^2 + |\chi|^2) = \int d^3x |\Phi|^2,$$

то  $\Phi$  можно будет интерпретировать как волновую функцию, а  $H$  — как гамильтониан во втором приближении.

Подставляя в это условие вместо  $\chi$  выражение (1.3.4), получим

$$\int d^3x \varphi^* \left( 1 + \frac{p^2}{4m^2c^2} \right) \varphi = \int d^3x |\Phi|^2,$$

откуда следует, что с требуемой точностью оператор  $O$  имеет вид

$$O = 1 + \frac{p^2}{8m^2c^2}.$$

Так как оператор  $O$  отличается от единицы на слагаемое порядка  $1/c^2$ , то преобразование  $\varphi \rightarrow \Phi$  не затрагивает уравнения первого приближения, в котором, с точностью до членов порядка  $1/c$ , функция  $\varphi$  является нормируемой.

Найдем теперь оператор Гамильтона во втором приближении. Используя выражения для операторов  $O$  и  $H'$ , получим, сохраняя члены порядка  $1/c^2$ ,

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + eA_0 + \frac{1}{8m^2c^2} (p^2 A_0 - A_0 p^2) - \\ - \frac{e}{4m^2c^2} p^2 A_0 + \frac{e}{4m^2c^2} (\sigma p) A_0 (\sigma p).$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} (\sigma p) A_0 (\sigma p) &= A_0 p^2 - \sigma (A_0 p - p A_0) (\sigma p) = \\ &= A_0 p^2 - i (\sigma \nabla A_0) (\sigma p) = A_0 p^2 + i E p - [E p] \sigma, \\ p^2 A_0 - A_0 p^2 &= -\Delta A_0 + 2i E p, \end{aligned}$$

где  $E = -\nabla A_0$  — электрическое поле, получим окончательно следующее выражение для оператора Гамильтона:

$$H = \frac{p^2}{2m} + e A_0 - \frac{p^4}{8m^3 c^2} - \frac{1}{4m^2 c^2} \sigma [E p] + \frac{e}{8m^2 c^2} \Delta A_0. \quad (1.3.11)$$

Этот оператор, как легко видеть, является эрмитовским.

Последние три члена в гамильтониане (1.3.11) являются поправками порядка  $1/c^2$ . Из них первый член учитывает зависимость массы от скорости, а второй можно интерпретировать как энергию взаимодействия движущегося магнитного диполя с электрическим полем. Поскольку электростатическое поле удовлетворяет уравнению  $\Delta A_0 = -\rho$ , где  $\rho$  — плотность зарядов, создающих поле, то последний член отличен от нуля только в тех точках, где находятся эти заряды.

До сих пор мы считали, что внешнее магнитное поле отсутствует. Чтобы получить гамильтониан при наличии такого поля, нужно в выражении (1.3.11) произвести замены

$$\frac{p^2}{2m} \rightarrow \frac{1}{2m} \left( p - \frac{e}{c} A \right)^2 - \mu H, \quad [E p] \rightarrow \left[ E, \left( p - \frac{e}{c} A \right) \right],$$

где  $A$  — векторный потенциал. В результате мы получим следующее выражение для гамильтониана с учетом членов порядка  $1/c^2$ :

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2m} \left( p - \frac{e}{c} A \right)^2 - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + e A_0 - \frac{e}{2mc} \sigma H + \\ + \frac{e}{8m^2 c^2} \Delta A_0 - \frac{e}{4m^2 c^2} \sigma \left[ E, \left( p - \frac{e}{c} A \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

**1.3.3. Переход к релятивистской классической механике.** В предыдущих разделах мы выяснили связь релятивистской квантовой механики электрона с нерелятивистской квантовой механикой. Теперь мы перейдем к выяснению ее связи с релятивистской классической механикой [13].

Будем исходить из уравнения второго порядка для биспинора  $\Phi$ , связанного с  $\psi$  соотношением

$$\psi = \frac{1}{2mc} \left[ -i \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right) + mc \right] \Phi, \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Согласно (1.2.1) это уравнение можно представить в виде

$$\left[ \left( \hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i \frac{e}{c} A_\mu \right)^2 + \frac{e\hbar}{2c} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m^2 c^2 \right] \Phi = 0, \quad (1.3.13)$$

где  $F_{\mu\nu}$  — тензор поля и  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ .

Так как нас интересует предельный переход  $\hbar \rightarrow 0$ , то будем искать решение (1.3.13), так же как это делается в нерелятивистской квантовой механике, в виде ряда

$$\Phi = e^{\frac{i}{\hbar} S} (f_0 + \hbar f_1 + \hbar^2 f_2 + \dots), \quad (1.3.14)$$

где  $S, f_0, f_1, f_2, \dots$  — некоторые функции координат и времени. Подставляя этот ряд в (1.3.13) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\hbar$ , получим уравнение

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right)^2 + m^2 c^2 = 0 \quad (1.3.15)$$

для определения функции  $S$  и уравнения

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \right] f_0 + 2 \left( \frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \frac{\partial f_0}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{2c} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} f_0 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \right] f_n + 2 \left( \frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \frac{\partial f_n}{\partial x_\mu} - \\ - \frac{ie}{2c} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} f_n = i \square f_{n-1} \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

для определения биспиноров  $f_0, f_1, f_2, \dots$  [13].

Мы видим, как и следовало ожидать, что функция  $S$  представляет собой действие в классической релятивистской механике для частицы, находящейся в электромагнитном поле  $A_\mu$ .

Зная  $S$ , можно последовательно с помощью уравнений (1.3.16) находить биспиноры  $f_0, f_1, f_2, \dots$ .

Если в разложении (1.3.14) ограничиться только первым слагаемым, то волновые пакеты будут вести себя так же, как частицы, движущиеся по классическим траекториям.

**1.3.4. Высокоэнергетическое приближение.** Точное решение уравнений (1.3.13) или (1.3.15) и (1.3.16) нельзя получить в общем виде. Можно, однако, указать процедуру приближенного решения этих уравнений, которая справедлива в области высоких энергий, когда возможно разложение функций  $S$  и  $f$  по  $1/|p|$ , где  $p$  — импульс частицы [14].

Рассмотрим для простоты тот случай, когда  $eA_\mu = (0, iU(\mathbf{r}))$ , где  $U(\mathbf{r})$  не зависит от времени. Полагая  $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-i\varepsilon t}$ ,  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}) e^{-i\varepsilon t}$ , где  $\varepsilon$  — энергия частицы, получим, согласно (1.3.13), следующее уравнение для определения  $\Phi(\mathbf{r})$ :

$$[(\varepsilon - U(\mathbf{r}))^2 + \nabla^2 - m^2 - \gamma_4 \gamma \nabla U(\mathbf{r})] \Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.3.17)$$

Функция  $\psi(\mathbf{r})$  связана с  $\Phi(\mathbf{r})$  соотношением

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} [(\varepsilon - U(\mathbf{r})) \gamma_4 - \gamma \nabla + m] \Phi(\mathbf{r}). \quad (1.3.18)$$

На больших расстояниях от области, где  $U(\mathbf{r})$  отлична от нуля, при  $z \rightarrow -\infty$  функция  $\Phi(\mathbf{r})$  предполагается имеющей вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = ue^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad (1.3.19)$$

где  $p$  — импульс частицы (направленный вдоль оси  $z$ ) и  $u$  — соответствующий постоянный биспинор. Решение (1.3.17) будем искать в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) e^{iS(\mathbf{r})}, \quad (1.3.20)$$

где  $S(\mathbf{r})$  и  $f(\mathbf{r})$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (\nabla S)^2 + m^2 - (e - U)^2 &= 0, \\ 2(\nabla S)(\nabla f) + (\nabla^2 S)f + i\gamma_4 \gamma (\nabla U)f &= i\nabla^2 f. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Если энергия частицы достаточно велика, то функции  $S$  и  $f$  можно искать в виде разложения по обратным степеням  $p$

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}) &= p\mathbf{r} + \chi_0(\mathbf{r}) + \chi_1(\mathbf{r}) + \dots, \\ f(\mathbf{r}) &= f_0 + f_1(\mathbf{r}) + f_2(\mathbf{r}) + \dots, \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

где  $\chi_n$  и  $f_n$  пропорциональны  $p^{-n}$ . Первые члены этого разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_0(\rho, z) &= -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^z U(\rho, z') dz', \\ \chi_1(\rho, z) &= -\frac{1}{p} \int_{-\infty}^z [(\nabla \chi_0)^2 - U] dz', \\ \chi_2(\rho, z) &= -\frac{1}{p} \int_{-\infty}^z (\nabla \chi_0)(\nabla \chi_1) dz', \\ f_0 &= u, \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

$$f_1(\rho, z) = -\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^z dz' [\nabla_{\perp}^2 \chi_0 - iv\gamma_4 \gamma (\nabla_{\perp} \chi_0)] u,$$

$$\begin{aligned} f_2(\rho, z) &= -\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^z dz' \times \\ &\times [2(\nabla \chi_0)(\nabla f_1) + \nabla^2 \chi_1 u + (\nabla^2 \chi_0) f_1 + i\gamma_4 \gamma (\nabla U) f_1 - i\nabla^2 f_1], \end{aligned}$$

где  $v = p/e$ ,  $\rho$  — прицельный параметр и  $\nabla_{\perp} = \partial/\partial\rho$ .

Разложения (1.3.22) справедливы, если  $|\chi_0| \gg |\chi_1|$  и  $|f_0| \gg |f_1|$ . Из этих неравенств следует, что

$$|U|/pv \ll 1, \quad |\chi_0|z/p\rho^2 \ll 1, \quad (1.3.24)$$

где  $\bar{z}$  — некоторая эффективная область координаты  $z$  (вдоль  $p$ ), в которой отличны от нуля интегралы (1.3.23). Кроме того, из условия  $|f_2| \ll |f_1|$  вытекает неравенство

$$\bar{z}/p\rho^2 \ll 1. \quad (1.3.25)$$

Если в разложениях (1.3.22) отбросить слагаемые, пропорциональные  $p^{-2}$ , величину  $\chi_1$  и слагаемое  $\nabla_{\perp}^2 \chi_0$  в  $f_1$ , то мы полу-

чим волновую функцию в так называемом эйкональном приближении

$$\Phi^E(\mathbf{r}) = \left(1 + \frac{iv}{2\rho} \gamma_4 \gamma (\nabla_{\perp} \chi_0)\right) u e^{i(\rho r + \chi_0)}. \quad (1.3.26)$$

Здесь сохранен первый член разложения по  $1/\rho$ , содержащий  $\gamma$ -матрицы, так как при вычислении конкретных матричных элементов этот член может давать вклад, сравнимый со вкладом слагаемого, не содержащего  $\gamma$ -матриц.

Подставляя (1.3.26) в (1.3.18) и сохраняя главный член разложения  $\psi(\mathbf{r})$  по  $1/\rho$ , получим

$$\psi^E(\mathbf{r}) = u e^{i(\rho r + \chi_0(\mathbf{r}))}. \quad (1.3.27)$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} [(\varepsilon - U) \gamma_4 + m - \gamma \nabla] \Phi^E(\mathbf{r}) &= \\ &= e^{i(\rho r + \chi_0)} (\varepsilon \gamma_4 - i p \gamma + m - i \gamma \nabla \chi_0 - U \gamma_4 - \gamma \nabla) \left(1 + \frac{iv}{2\rho} \gamma_4 \gamma \nabla_{\perp} \chi_0\right) u, \\ &(\varepsilon \gamma_4 - i p \gamma + m) u = 2 m u, \\ &(\varepsilon \gamma_4 - i p \gamma + m) \gamma_4 \gamma \nabla_{\perp} \chi_0 u = 2 (m \gamma_4 \gamma \nabla_{\perp} \chi_0 + \varepsilon \gamma \nabla_{\perp} \chi_0) u, \\ &(U \gamma_4 + i \gamma \nabla \chi_0) u = \left(i \gamma \nabla_{\perp} \chi_0 - \frac{m}{\rho^2} \gamma_4 U\right) u, \end{aligned}$$

то в рассматриваемом приближении мы получим для  $\psi(\mathbf{r})$  выражение (1.3.27).

Заметим, что для нахождения главного члена разложения  $\psi(\mathbf{r})$  по  $\rho^{-1}$ , необходимо знать функцию  $\Phi(\mathbf{r})$  с точностью до членов порядка  $\rho^{-1}$ .

Легко получить также следующее приближение в  $\psi(\mathbf{r})$ , содержащее спинорную структуру, отличную от структуры (1.3.27). Сохранив с этой целью в  $\Phi(\mathbf{r})$  слагаемые порядка  $\rho^{-1}$  и содержащие  $\gamma$ -матрицы слагаемые порядка  $\rho^{-2}$ , получим после простых, но длинных вычислений следующее выражение для  $\psi(\mathbf{r})$ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \left(1 + \frac{iv}{2\rho} \gamma_4 \gamma (\nabla_{\perp} \chi_0)\right) u e^{i(\rho r + \chi_0)}. \quad (1.3.28)$$

Мы видим, что в рассматриваемом приближении  $\psi(\mathbf{r}) = \Phi^E(\mathbf{r})$ .

До сих пор предполагалось, что при  $z \rightarrow -\infty$  волновая функция имеет вид плоской волны. Аналогичные результаты можно получить, если волновая функция имеет вид плоской волны не при  $z \rightarrow -\infty$ , а при  $z \rightarrow +\infty$ . В последнем случае эйкональная волновая функция имеет вид

$$\Phi^E(\mathbf{r}) = \left(1 + \frac{iv}{2\rho} \gamma_4 \gamma \nabla_{\perp} \chi_0'\right) u e^{i(\rho r + \chi_0')}, \quad (1.3.29)$$

где

$$\chi_0' = \frac{1}{v} \int_z^{\infty} U(\rho, z') dz'.$$

При этом

$$\psi^E(\mathbf{r}) = ue^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} + x_0)}. \quad (1.3.30)$$

Сравним в заключение этого пункта квазиклассическое и высокоэнергетическое приближения. В квазиклассическом приближении функция  $f$  раскладывается в ряд по степеням  $\hbar$ . В высокоэнергетическом приближении производится разложение этой же функции в ряд по степеням  $p^{-1}$ . Точнее говоря, в квазиклассическом приближении изменение длины волны на расстоянии длины волны должно быть малым по сравнению с длиной волны; в высокоэнергетическом приближении длина волны должна быть мала по сравнению с  $\rho^2/z$ , т. е. должны быть велики прицельные параметры. По этой причине высокоэнергетическое приближение пригодно для описания процессов, при которых угол рассеяния частицы невелик.

**1.3.5. Борновское приближение.** Если потенциальная энергия взаимодействия частицы с внешним полем может считаться малой (по сравнению с чем, должно быть выяснено в каждом конкретном случае), то решение уравнения Дирака можно искать в виде ряда по степеням  $A_\mu$ . Перепишем для этого уравнение Дирака в виде

$$(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m)\psi(\mathbf{r}) = ie\gamma_\mu A_\mu(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \quad (1.3.31)$$

Здесь предполагается, что частица имеет определенную энергию  $\varepsilon$ , так что  $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\varepsilon t}$ .

Полагая

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^{(n)}(\mathbf{r}), \quad (1.3.32)$$

где  $\psi^{(n)} \sim (\gamma_\mu A_\mu)^n$ , получим следующую систему уравнений для  $\psi^{(n)}$ :

$$(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m)\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.3.33)$$

$$(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m)\psi^{(n)}(\mathbf{r}) = ie\gamma_\mu A_\mu(\mathbf{r})\psi^{(n-1)}(\mathbf{r}). \quad (1.3.34)$$

Разложение (1.3.32) носит название борновского.

В качестве  $\psi^{(0)}(\mathbf{r})$  мы возьмем плоскую волну  $\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = ue^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$ , где  $\mathbf{p}$  — импульс электрона на бесконечности. Тогда для определения  $\psi^{(n)}(\mathbf{r})$  получается рекуррентное соотношение

$$\psi^{(n)}(\mathbf{r}) = ie \int d^3r' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \gamma_\mu A_\mu(\mathbf{r}') \psi^{(n-1)}(\mathbf{r}'), \quad (1.3.35)$$

где  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  — функция Грина уравнения

$$(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.3.36)$$

Легко убедиться, что функция Грина, соответствующая запаздывающим решениям, имеет вид

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} (\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m) \frac{e^{i\mathbf{p}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.3.37)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m) g(r, r') &= \\ &= -\frac{1}{4\pi} (\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m) (\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon - m) \frac{e^{ip|r-r'|}}{|r-r'|} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} (\Delta + p^2) \frac{e^{ip|r-r'|}}{|r-r'|} = \delta(r-r'). \end{aligned}$$

Разложив функцию Грина (1.3.37) в интеграл Фурье

$$g(r, r') = g(r-r') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q g(q) e^{iq(r-r')}, \quad (1.3.38)$$

где  $g(q) = -(\varepsilon\gamma_4 - iq\gamma + m)/(p^2 - q^2 + i0)$ , получим следующее выражение для суммы первых двух членов (1.3.32):

$$\Psi(r) = \left[ 1 + \frac{e}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{iqr} \frac{2p_\mu A_\mu(q) + (q\gamma)\gamma_\mu A_\mu(q)}{2pq + q^2 - i0} \right] u e^{ipr}, \quad (1.3.39)$$

где

$$A_\mu(q) = \int d^3r A_\mu(r) e^{-iqr}.$$

Эта формула определяет волновую функцию в первом борновском приближении.

Сравним борновскую волновую функцию (1.3.39) с эйкональной волновой функцией (1.3.28) в том случае, когда  $eA_\mu(r) = (0, iU(r))$ . Считая в выражении (1.3.28) малой потенциальную энергию, получим в первом приближении по  $U$

$$\Psi(r) = \left[ 1 - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{iqr} \frac{2\varepsilon - iq_1 \gamma \gamma_4}{2pq - i0} U(q) \right] u e^{ipr}, \quad (1.3.40)$$

где  $q_1$  — компоненты вектора  $q$ , ортогональные  $p$ . Это выражение совпадает с выражением для волновой функции в первом борновском приближении, если  $q^2 \ll 2|pq|$ . Последнее условие эквивалентно условию  $z/\rho r^2 \ll 1$ , так как  $2|pq| \sim 2\rho/z$  и  $q^2 \sim 1/\rho^2$ . Таким образом, эйкональное приближение и первое борновское приближение совпадают, если  $|\chi_0| \ll 1$  (это условие эквивалентно малости  $U$ ) и если  $z \ll \rho r^2$ , т. е. велики прицельные параметры.

## § 1.4. Момент импульса электрона

**1.4.1. Шаровые спиноры.** До сих пор мы изучали состояния электрона, характеризующиеся определенными значениями энергии, импульса и проекции спина на импульс. Но свободный электрон может находиться также в состояниях с определенными значениями энергии, квадрата момента импульса и проекции момента на какую-либо неподвижную ось. Перейдем теперь к изучению таких состояний.

Оператор момента электрона (мы будем употреблять термин момент вместо момент импульса)  $\mathbf{J}$  складывается из оператора орбитального момента  $\mathbf{L}$  и оператора спинного момента  $\frac{1}{2}\Sigma$ :

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\Sigma,$$

где

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}], \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

$\mathbf{p} = -i\nabla$  — оператор импульса и  $\sigma_i$  — матрицы Паули.

Проекции момента  $\mathbf{J}$  удовлетворяют перестановочным условиям

$$J_i J_k - J_k J_i = i\epsilon_{ikl} J_l.$$

Кроме того, квадрат момента коммутирует с каждой из его проекций:

$$[\mathbf{J}^2, J_k] = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Таким же условиям удовлетворяют проекции  $\mathbf{L}$  и  $\frac{1}{2}\Sigma$ .

Легко видеть, что гамильтониан свободного электрона  $H = \alpha\mathbf{p} + \beta m$  коммутирует с операторами квадрата момента  $\mathbf{J}^2$  и проекции момента на произвольную ось (мы будем называть ее осью  $z$ )  $J_z$

$$[H, \mathbf{J}^2] = 0, \quad [H, J_z] = 0.$$

Поэтому операторы  $H$ ,  $\mathbf{J}^2$ ,  $J_z$  имеют общие собственные функции

$$\begin{aligned} H\psi_{\omega j M} &= \omega\psi_{\omega j M}, \\ \mathbf{J}^2\psi_{\omega j M} &= j(j+1)\psi_{\omega j M}, \quad J_z\psi_{\omega j M} = M\psi_{\omega j M}, \end{aligned}$$

где  $\omega$ ,  $j(j+1)$  и  $M$  — собственные значения  $H$ ,  $\mathbf{J}^2$ ,  $J_z$  (в дальнейшем мы часто будем опускать в числе индексов волновой функции частоту  $\omega$ ).

Волновую функцию — биспинор  $\psi_{jM}$  — можно представить в виде столбца

$$\psi_{jM} = \begin{pmatrix} \varphi_{jM} \\ \chi_{jM} \end{pmatrix},$$

где спиноры  $\varphi_{jM}$  и  $\chi_{jM}$  удовлетворяют уравнениям (1.1.18)

$$(\omega - m)\varphi_{jM} - \sigma\mathbf{r}\chi_{jM} = 0, \quad -\sigma\mathbf{r}\varphi_{jM} + (\omega + m)\chi_{jM} = 0, \quad (1.4.1)$$

и, кроме того, уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2\varphi_{jM} &= j(j+1)\varphi_{jM}, & J_z\varphi_{jM} &= M\varphi_{jM}, \\ \mathbf{J}^2\chi_{jM} &= j(j+1)\chi_{jM}, & J_z\chi_{jM} &= M\chi_{jM}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\sigma$ .

Определим угловые части спиноров  $\varphi_{jM}$  и  $\chi_{jM}$ , т. е. их зависимости от углов  $\theta$ ,  $\varphi$ . Для этого нет необходимости решать написанные уравнения, а достаточно воспользоваться квантово-механическим правилом сложения моментов — орбитального и спинного. Действительно, собственные функции орбитального момента

хорошо известны — это шаровые функции  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , удовлетворяющие уравнениям

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}, \quad L_z Y_{lm} = m Y_{lm}, \quad m = -l, -l+1, \dots, l.$$

Известны также собственные функции спинового момента  $v_\mu(\alpha)$ , где  $\alpha$  — спиновая переменная,  $\alpha = \pm 1/2$  и  $\mu$  — проекция спина на ось  $z$ ,  $\mu = \pm 1/2$ . Так как  $1/2 \sigma_z v_\mu = \mu v_\mu$ , то

$$v_\mu(\alpha) = \delta_{\mu\alpha}.$$

Поэтому собственные функции  $\varphi_{JM}(\mathbf{r}, \alpha)$  оператора полного момента электрона  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + 1/2 \boldsymbol{\sigma}$  будут выражаться в виде билинейной комбинации собственных функций двух электронных подсистем — орбитальной и спиновой:

$$\varphi_{JM}(\mathbf{r}, \alpha) = \sum_{m\mu} C_{lm^1/2\mu}^{jM} Y_{lm}(\mathbf{n}) v_\mu(\alpha), \quad (1.4.2)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}$ ,  $C_{lm^1/2\mu}^{jM}$  — так называемые коэффициенты векторного сложения или коэффициенты Клебша — Гордана \*) и  $M = m + \mu$ ,  $l = j \pm 1/2$ . Значения коэффициентов  $C_{lm^1/2\mu}^{jM}$  приведены в таблице.

Коэффициенты  $C_{l, M-\mu, 1/2, \mu}^{jM}$

| $\mu \backslash l$ | $l + 1/2$                     | $l - 1/2$                      |
|--------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| $1/2$              | $\sqrt{\frac{l+M+1/2}{2l+1}}$ | $-\sqrt{\frac{l-M+1/2}{2l+1}}$ |
| $-1/2$             | $\sqrt{\frac{l-M+1/2}{2l+1}}$ | $\sqrt{\frac{l+M+1/2}{2l+1}}$  |

Функции  $\varphi_{JM}$  определены в пространстве угловых переменных  $\theta$ ,  $\varphi$  и спиновой переменной  $\alpha$ . Поэтому они являются спинорами в пространстве  $\theta$ ,  $\varphi$ , и формулу (1.4.2) можно рассматривать как разложение этих спиноров по ортонормированным спинорам  $v_\mu$ , а величины

$$(\Omega_{jM}(\mathbf{n}))^\mu = C_{lm^1/2\mu}^{jM} Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad m = M - \mu,$$

— как их контравариантные компоненты. Эти компоненты (мы обозначаем их для спинора  $\Phi$  через  $\Phi^\mu$ ) определяются с помощью разложения

$$\Phi = \sum_{\mu} \Phi^\mu v_\mu,$$

а так как  $v_\mu(\alpha) = \delta_{\mu\alpha}$ , то  $\Phi^\mu = \Phi(\mu)$ .

\*) См., например, [15]. Для коэффициентов Клебша — Гордана используются также обозначения  $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j j_2 m)$  либо  $C(j_1 j_2; m_1 m_2 m)$ .

Величины  $(\Omega_{jlm}(\mathbf{n}))^\mu$  с  $\mu = \pm 1/2$  образуют спинор

$$\Omega_{jlm}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} C_{l, M - 1/2, 1/2}^{jM} Y_{l, M - 1/2}(\mathbf{n}) \\ C_{l, M + 1/2, 1/2}^{jM} Y_{l, M + 1/2}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \quad (1.4.3)$$

который называется шаровым спинором или спинорной шаровой функцией.

Шаровые спиноры  $\Omega_{jlm}(\mathbf{n})$  определяют угловую зависимость спиноров  $\varphi_{jM}$  и  $\chi_{jM}$ , образующих вместе биспинор  $\psi_{jM}$ . При этом, если в  $\varphi_{jM}$  входит шаровой спинор  $\Omega_{jlm}$ , то в  $\chi_{jM}$  будет входить шаровой спинор  $\Omega_{j'l'M}$ , где  $l+l'=2j$ . Это обстоятельство связано с тем, что значения  $l$  и  $l'$  должны быть различны (при  $l=l'$  не могут удовлетворяться уравнения (1.4.1)). Поэтому из правила сложения моментов следует, что, если  $l = j \pm 1/2$ , то  $l' = j \mp 1/2$ , т. е.  $l+l' = 2j$ .

Как следует из (1.4.1), спинор  $\chi_{jM}$  пропорционален  $(\sigma\mathbf{n})\varphi_{jM}$ . Но при пространственных вращениях  $\sigma\mathbf{n}$  ведет себя так же, как  $\sigma\mathbf{n}$ . Поэтому угловая часть спинора  $\chi_{jM}$  определяется произведением  $\sigma\mathbf{n}$  на  $\Omega_{jlm}(\mathbf{n})$ . С другой стороны, она имеет вид  $\Omega_{j'l'M}(\mathbf{n})$ . Поэтому должно иметь место равенство  $(\sigma\mathbf{n})\Omega_{jlm}(\mathbf{n}) = c\Omega_{j'l'M}(\mathbf{n})$ , где  $c$  — некоторая константа. Чтобы найти ее, выберем направление  $\mathbf{n}$  вдоль оси  $z$ . Используя определение шарового спинора (1.4.3) и явные выражения для коэффициентов  $C_{l, M - \mu, 1/2, \mu}^{jM}$ , получим  $c = -1$ , т. е.

$$(\sigma\mathbf{n})\Omega_{jlm}(\mathbf{n}) = -\Omega_{j'l'M}(\mathbf{n}), \quad l+l' = 2j. \quad (1.4.4)$$

Шаровые спиноры образуют ортонормированную систему функций

$$\int \Omega_{jlm}^*(\mathbf{n}) \Omega_{j'l'M}(\mathbf{n}) d\omega = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

где  $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  — элемент телесного угла, в котором лежит вектор  $\mathbf{n}$ .

**1.4.2. Волновая функция свободного электрона с определенным моментом.** Перейдем теперь к нахождению волновой функции свободного электрона с определенными значениями энергии и момента. Мы будем обозначать ее через  $\psi_{ejlm}$  и искать в виде

$$\psi_{ejlm} = \begin{pmatrix} \varphi_{ejlm} \\ \chi_{ejlm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(r) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}) \\ ib(r) \Omega_{j'l'M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \quad (1.4.5)$$

где  $\Omega_{jlm}(\mathbf{n})$  — шаровой спинор, определяемый (1.4.3),  $l = j \pm 1/2$ ,  $l' = j \mp 1/2$ , а  $a(r)$  и  $b(r)$  — некоторые функции  $r$  (они называются радиальными функциями). Спиноры  $\varphi_{ejlm}$  и  $\chi_{ejlm}$  удовлетворяют уравнениям (1.4.1), в которых нужно положить  $\omega = \varepsilon$  и считать  $\varepsilon > 0$ .

Подстановка (1.4.5) в (1.4.1) приводит к выражениям

$$(\sigma\mathbf{p}) (a(r) \Omega_{jlm}(\mathbf{n})) = -i \frac{da}{dr} (\sigma\mathbf{n}) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}) + a(r) (\sigma\mathbf{p}) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}),$$

$$(\sigma\mathbf{p}) (ib(r) \Omega_{j'l'M}(\mathbf{n})) = \frac{db}{dr} (\sigma\mathbf{n}) \Omega_{j'l'M}(\mathbf{n}) + ib(r) (\sigma\mathbf{p}) \Omega_{j'l'M}(\mathbf{n}),$$

где  $p = -i\nabla$ . Легко показать, что

$$\begin{aligned}(\sigma p) \Omega_{j l M}(n) &= i \frac{1+\kappa}{r} \Omega_{j l' M}(n), \\(\sigma p) \Omega_{j l' M}(n) &= i \frac{1-\kappa}{r} \Omega_{j l M}(n),\end{aligned}\quad (1.4.6)$$

где  $\kappa = l(l+1) - j(j+1) - 1/4$ . Поэтому в результате мы получим следующую систему уравнений для определения функций  $a(r)$  и  $b(r)$ :

$$\begin{aligned}\frac{da(r)}{dr} + \frac{1+\kappa}{r} a(r) - (\varepsilon + m) b(r) &= 0, \\ \frac{db(r)}{dr} + \frac{1-\kappa}{r} b(r) + (\varepsilon - m) a(r) &= 0,\end{aligned}\quad (1.4.7)$$

где  $\varepsilon$  — энергия частицы. Вводя вместо  $a(r)$  и  $b(r)$  новые неизвестные

$$A(r) = r a(r), \quad B(r) = r b(r),$$

перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned}\frac{dA(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r} A(r) - (\varepsilon + m) B(r) &= 0, \\ \frac{dB(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r} B(r) + (\varepsilon - m) A(r) &= 0.\end{aligned}$$

Исключая отсюда  $B(r)$ , получим уравнение для определения  $A(r)$

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \left( \varepsilon^2 - m^2 - \frac{\kappa(1+\kappa)}{r^2} \right) A(r) = 0.$$

Решение этого уравнения выражается через функции Бесселя:

$$A(r) = c_1 \sqrt{\frac{r}{p}} J_{\kappa+1/2}(pr) + c_2 \sqrt{\frac{r}{p}} J_{-(\kappa+1/2)}(pr),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные константы и  $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$ .

Из условия регулярности  $A(r)$  при  $r \rightarrow 0$  следует, что при обоих значениях  $\kappa$

$$a(r) = c \frac{1}{\sqrt{pr}} J_{l+1/2}(pr). \quad (1.4.8)$$

Легко найти теперь  $B(r)$  и  $b(r)$ :

$$b(r) = \frac{\kappa}{|\kappa|} c \sqrt{\frac{\varepsilon-m}{\varepsilon+m}} \frac{1}{\sqrt{pr}} J_{l'+1/2}(pr). \quad (1.4.9)$$

Входящая в  $a(r)$  и  $b(r)$  постоянная  $c$  определяется условием нормировки. Окончательно волновую функцию  $\psi_{e j l M}(r)$  можно записать в виде

$$\psi_{e j l M}(r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{(\varepsilon+m) p^2 \delta}{2\varepsilon}} g_l(pr) \Omega_{j l M}(n) \\ - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{(\varepsilon-m) p^2 \delta}{2\varepsilon}} g_{l'}(pr) \Omega_{j l' M}(n) \end{pmatrix}, \quad (1.4.10)$$

где  $g_l(x) = (2\pi)^{3/2} i^l J_{l+1/2}(x) / \sqrt{x}$  и  $\delta = \pi/R$  при нормировке на сферу радиуса  $R$  и  $\delta = \varepsilon/\rho$  при нормировке на  $\delta(\varepsilon - \varepsilon')$ .

При  $\rho r \gg 1$  справедлива асимптотическая формула

$$\Psi_{e_j l M}(r) \approx \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\delta}{\pi \varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m} i^l \sin\left(\rho r - l \frac{\pi}{2}\right) \Omega_{j l M}(n) \\ -\sqrt{\varepsilon - m} i^{l'} \sin\left(\rho r - l' \frac{\pi}{2}\right) \Omega_{j l' M}(n) \end{pmatrix}. \quad (1.4.11)$$

**1.4.3. Четность состояния.** Построенные в предыдущем пункте волновые функции электрона являются собственными функциями операторов энергии  $H$ , квадрата полного момента  $J^2$  и его проекции  $J_z$ , но не являются собственными функциями оператора квадрата орбитального момента электрона  $L^2$ ; напротив, спиноры  $\Psi_{e_j l M}(r)$  и  $\chi_{e_j l M}(r)$ , образующие биспинор  $\Psi_{e_j l M}(r)$ , являясь собственными функциями оператора  $L^2$ , относятся, как мы знаем, к различным собственным значениям  $l(l+1)$  и  $l'(l'+1)$  этого оператора, где  $l = j \pm 1/2$  и  $l' = j \mp 1/2$ . Это обстоятельство связано с тем, что гамильтониан  $H$  не коммутирует с оператором  $L^2$ .

Мы приходим, таким образом, к заключению, что для электрона разделение момента количества движения на орбитальный и спиновый моменты не имеет, вообще говоря, смысла. Это разделение приобретает смысл только для нерелятивистского электрона. При этом, как видно из (1.4.10), спинор  $\chi_{e_j l M}$  стремится к нулю, и биспинор  $\Psi_{e_j l M}$  сводится к спинору  $\Psi_{e_j l M}$ . В этом случае  $l(l+1)$  приобретает смысл квадрата орбитального момента электрона. В общем же случае не малых энергий индекс  $l$  у волновой функции  $\Psi_{e_j l M}$  обозначает не орбитальный момент, а указывает лишь на тот факт, что для электрона возможны два различных состояния с одинаковыми значениями  $\varepsilon, j, M$ .

Эти состояния отличаются своей четностью. Действительно, как мы видели в п. 1.2.6, при пространственном отражении  $r \rightarrow -r$ , биспинор  $\Psi(r, t)$  преобразуется согласно закону

$$\Psi(r, t) \rightarrow \Psi'(r, t) = R\Psi(r, t) = \eta_R \gamma_4 \Psi(-r, t).$$

Применяя этот закон к волновой функции  $\Psi_{e_j l M}(r)$ , определяемой (1.4.10), и используя представление (1.1.10) матриц  $\gamma_\mu$ , получим

$$R\Psi_{e_j l M}(r) = \eta_R (-1)^l \Psi_{e_j l M}(r). \quad (1.4.12)$$

Это соотношение показывает, что, помимо внутренней четности, т. е. множителя  $\eta_R$ , одинакового для всех состояний электрона, преобразованная функция отличается от исходной функции (в той же точке пространства) множителем

$$\omega = (-1)^l,$$

который можно назвать четностью состояния.

Итак, квантовое число  $l$  определяет четность состояния, а не орбитальный момент, который не имеет для электрона строгого

физического смысла. Два состояния с различными  $l$  при данном  $j$  ( $l = j \pm 1/2$ ) отличаются своей четностью.

1.4.4. Разложение по сферическим волнам. Мы построили две различные ортонормированные системы волновых функций электрона  $\psi_{p\mu}(\mathbf{r})$  и  $\psi_{\epsilon j l M}(\mathbf{r})$ . Произвольное решение уравнения Дирака может быть разложено по любой из этих систем,

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n a_n \psi_n(\mathbf{r}),$$

где  $n$  означает набор квантовых чисел  $p\mu$  или  $\epsilon j l M$ . Если функции  $\psi_n(\mathbf{r})$  нормированы согласно условию

$$\int_V |\psi_n(\mathbf{r})|^2 d^3x = 1,$$

где  $V$  — нормировочный объем, то, очевидно,

$$a_n = \int \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3x.$$

В частности, можно разложить волновую функцию электрона с определенным импульсом и поляризацией  $\psi_{p\mu}$  по волновым функциям электрона с определенными моментом и четностью  $\psi_{\epsilon j l M}$ :

$$\psi_{p\mu}(\mathbf{r}) = \sum_{j l M} \psi_{\epsilon j l M}(\mathbf{r}) \langle \epsilon j l M | p\mu \rangle,$$

где

$$\langle \epsilon j l M | p\mu \rangle = \int \psi_{\epsilon j l M}^*(\mathbf{r}) \psi_{p\mu}(\mathbf{r}) d^3x, \quad (1.4.13)$$

или произвести обратное разложение

$$\psi_{\epsilon j l M}(\mathbf{r}) = \sum_{p\mu} \psi_{p\mu}(\mathbf{r}) \langle p\mu | \epsilon j l M \rangle,$$

где, очевидно,  $\langle p\mu | \epsilon j l M \rangle = \langle \epsilon j l M | p\mu \rangle^*$ .

Найдем коэффициенты разложения  $\langle \epsilon j l M | p\mu \rangle$ . Подставляя в (1.4.13)

$$\psi_{p\mu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2V\epsilon}} u^\mu(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad u^\mu(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon + m} v^\mu(\mathbf{v}) \\ \sqrt{\epsilon - m} \sigma \mathbf{v} v^\mu(\mathbf{v}) \end{pmatrix},$$

$$(v^\mu(\mathbf{v}))^* v^\mu(\mathbf{v}) = 1, \quad \mathbf{v} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$$

и выражение для  $\psi_{\epsilon j l M}(\mathbf{r})$ :

$$\psi_{\epsilon j l M}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi_{\epsilon j l M}(\mathbf{r}) \\ \chi_{\epsilon j l M}(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

получим

$$\langle \epsilon j l M | p\mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{2V\epsilon}} \left\{ \sqrt{\epsilon + m} \varphi_{\epsilon j l M}^*(\mathbf{p}) + \sqrt{\epsilon - m} \chi_{\epsilon j l M}^*(\mathbf{p}) (\sigma \mathbf{v}) \right\} v^\mu(\mathbf{v}), \quad (1.4.14)$$

где  $\varphi_{\epsilon j l M}(\mathbf{p})$  и  $\chi_{\epsilon j l M}(\mathbf{p})$  — компоненты Фурье функций  $\varphi_{\epsilon j l M}(\mathbf{r})$  и  $\chi_{\epsilon j l M}(\mathbf{r})$ .

Спиноры  $\Phi_{ejlM}(\mathbf{p})$ ,  $\chi_{ejlM}(\mathbf{p})$  образуют, очевидно, волновую функцию электрона с определенными моментом и его проекцией в импульсном пространстве. Так как координаты и проекции импульса входят симметрично в перестановочные условия  $[p_j, x_k] = \frac{1}{i} \delta_{jk}$ , то оператор орбитального момента в импульсном пространстве имеет ту же структуру, что и в координатном пространстве:

$$\mathbf{L}_p = -i[\mathbf{p} \nabla_p], \quad \nabla_p = \partial/\partial \mathbf{p}.$$

Поэтому  $\Phi_{ejlM}(\mathbf{p})$  и  $\chi_{ejlM}(\mathbf{p})$  будут пропорциональны тем же шаровым спинорам  $\Omega_{jlm}(\mathbf{v})$  и  $\Omega_{jl'M}(\mathbf{v})$ , которые определяют угловую зависимость  $\Phi_{ejlM}(\mathbf{r})$  и  $\chi_{ejlM}(\mathbf{r})$ , но аргументом спиноров будет, естественно,  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ , а не  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ . Легко показать, что

$$\begin{aligned} \Phi_{ejlM}(\mathbf{p}) &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon - m)\delta}} \Omega_{jlm}(\mathbf{v}), \\ \chi_{ejl'M}(\mathbf{p}) &= \frac{-(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m)\delta}} \Omega_{jl'M}(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Подставив эти формулы в (1.4.14), найдем  $\langle ejlM | \mathbf{p}\mu \rangle$ :

$$\langle ejlM | \mathbf{p}\mu \rangle = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\rho\sqrt{V\delta}} (\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})), \quad (1.4.16)$$

откуда следует, что разложение плоской волны на сферические волны имеет вид

$$\begin{aligned} w^\mu(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} &\equiv \left( \frac{\sqrt{\varepsilon+m} v^\mu(\mathbf{v})}{\sqrt{\varepsilon-m} (\sigma\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})} \right) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \\ &= \sum_{jlm} (\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m} \frac{1}{r} \sin\left(pr - l \frac{\pi}{2}\right) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}) \\ -\sqrt{\varepsilon-m} \frac{1}{r} \sin\left(pr - l' \frac{\pi}{2}\right) \Omega_{jl'M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

где  $v^{\mu*}(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v}) = 1$ .

При  $\rho r \gg 1$  справедливо асимптотическое представление

$$\begin{aligned} w^\mu(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} &\approx \frac{4\pi}{\rho} \sum_{jlm} (\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) \times \\ &\times \begin{pmatrix} i^l \sqrt{\varepsilon+m} \frac{1}{r} \sin\left(pr - l \frac{\pi}{2}\right) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}) \\ -i^{l'} \sqrt{\varepsilon-m} \frac{1}{r} \sin\left(pr - l' \frac{\pi}{2}\right) \Omega_{jl'M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Величина  $\langle \mathbf{p}\mu | ejlM \rangle$  представляет собой амплитуду вероятности того, что электрон, находясь в состоянии с определенными энергией, моментом и четностью, имеет импульс  $\mathbf{p}$  и спираль-

ность  $\mu$ . Поэтому угловое распределение электронов в этом состоянии определяется формулой

$$d\omega(\nu) = |\Omega_{jlm}(\nu)|^2 d\omega,$$

где  $d\omega$  — элемент телесного угла, в котором лежит вектор  $\nu$ .

## § 1.5. Движение электрона в центральном поле

1.5.1. Разделение переменных в центральном поле. Изучив состояния свободного электрона, перейдем теперь к изучению движения электрона во внешних электромагнитных полях.

Рассмотрим прежде всего движение электрона в электростатическом поле, обладающем центральной симметрией,  $A = 0$ ,  $\varphi = \varphi(r)$ . Гамильтониан электрона имеет в этом случае вид

$$H = \alpha p + \beta m + V(r), \quad (1.5.1)$$

где  $V(r)$  — потенциальная энергия электрона,  $V(r) = e\varphi(r)$ .

Легко видеть, что гамильтониан  $H$  коммутирует с моментом  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\Sigma$ . Поэтому в центрально-симметричном поле существуют состояния электрона с определенными значениями энергии, квадрата момента и проекции момента на одну какую-либо ось (ось  $z$ ). Волновые функции таких состояний, которые мы будем обозначать через  $\psi_{ejlm}(r)$ , удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} H\psi_{ejlm}(r) &= \epsilon\psi_{ejlm}(r), \\ \mathbf{J}^2\psi_{ejlm}(r) &= j(j+1)\psi_{ejlm}(r), \quad J_z\psi_{ejlm}(r) = M\psi_{ejlm}(r). \end{aligned}$$

Представив  $\psi_{ejlm}(r)$  в виде столбца,

$$\psi_{ejlm}(r) = \begin{pmatrix} \varphi_{ejlm}(r) \\ \chi_{ejlm}(r) \end{pmatrix},$$

получим для  $\varphi_{ejlm}(r)$  и  $\chi_{ejlm}(r)$  уравнения

$$\begin{aligned} (\alpha p) \varphi_{ejlm}(r) &= (\epsilon + m - V) \chi_{ejlm}(r), \\ (\alpha p) \chi_{ejlm}(r) &= (\epsilon - m - V) \varphi_{ejlm}(r), \\ \mathbf{J}^2 \varphi_{ejlm}(r) &= j(j+1) \varphi_{ejlm}(r), \\ \mathbf{J}_z \varphi_{ejlm}(r) &= M \varphi_{ejlm}(r), \\ \mathbf{J}^2 \chi_{ejlm}(r) &= j(j+1) \chi_{ejlm}(r), \\ \mathbf{J}_z \chi_{ejlm}(r) &= M \chi_{ejlm}(r), \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

где  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\Sigma$ . Так как поле является центрально-симметричным, то угловая зависимость спиноров  $\varphi_{ejlm}(r)$  и  $\chi_{ejlm}(r)$  должна быть такой же, как и угловая зависимость соответствующих спиноров в случае свободного электрона. Иными словами, можно положить аналогично (1.4.5)

$$\varphi_{ejlm}(r) = g(r) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}), \quad \chi_{ejlm}(r) = if(r) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}), \quad (1.5.3)$$

где  $\Omega_{jlm}(\mathbf{n})$  — шаровой спинор,  $l' = 2j - l$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  и  $g(r)$  и  $f(r)$  — радиальные функции, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rg(r)) + \frac{\kappa}{r}(rg(r)) - (\varepsilon + m - V(r))(rf(r)) &= 0, \\ \frac{d}{dr}(rf(r)) - \frac{\kappa}{r}(rf(r)) + (\varepsilon - m - V(r))(rg(r)) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Вид этих функций, естественно, зависит от вида функции  $V(r)$ . Мы рассмотрим прежде всего асимптотическое поведение радиальных функций при  $r \rightarrow \infty$ , предполагая, что потенциальная энергия достаточно быстро стремится к нулю с возрастанием  $r$ . Пренебрегая в (1.5.4) вторыми слагаемыми, а также  $V(r)$ , получим

$$\frac{d}{dr}(rg(r)) - (\varepsilon + m)(rf(r)) = 0, \quad \frac{d}{dr}(rf(r)) + (\varepsilon - m)(rg(r)) = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} rg(r) &= C\sqrt{m+\varepsilon}(e^{-\lambda r} + qe^{\lambda r}), \\ rf(r) &= -C\sqrt{m-\varepsilon}(e^{-\lambda r} - qe^{\lambda r}), \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

где  $C$  — нормировочный множитель,  $\lambda = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}$  и  $q \equiv q(\varepsilon, j, l)$  — постоянная, определяющаяся из условия конечности функций  $g(r)$  и  $f(r)$  при  $r = 0$ .

Как показывают эти формулы, поведение функций  $f(r)$  и  $g(r)$  при  $r \rightarrow \infty$  существенно зависит от того, будет ли  $\varepsilon > m$  или  $\varepsilon < m$ . Если  $\varepsilon > m$ , то величина  $\lambda$  будет чисто мнимой, и оба слагаемых в (1.5.5), будучи ограниченными при  $r \rightarrow \infty$ , имеют физический смысл: именно, одно из них описывает расходящуюся, а другое — сходящуюся волну (с определенным моментом). Так как поглощения частиц не происходит, то интенсивности обеих волн должны быть одинаковы, т. е.  $q$  по модулю должно равняться единице. Поэтому при  $\varepsilon > m$  можно положить

$$q = e^{2i\delta} (-1)^{l+1}, \quad (1.5.6)$$

где  $\delta$  — вещественная величина, определяющаяся потенциальной энергией  $V(r)$  и зависящая от  $\varepsilon, j, l$ . Она называется фазой на бесконечности. При  $V = 0$  фаза  $\delta$  считается равной нулю.

Используя это представление  $q$ , можно переписать асимптотические формулы (1.5.5) при  $\varepsilon > m$  в виде

$$\begin{aligned} rg(r) &= i^l C_1 \sqrt{\varepsilon + m} \sin(pr - l\pi/2 + \delta), \\ rf(r) &= i^{l'} C_1 \sqrt{\varepsilon - m} \sin(pr - l'\pi/2 + \delta), \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

где  $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$  и константы  $C_1$  и  $C$  связаны между собой соотношением  $C_1 = 2iC (-1)^l e^{i\delta}$ .

Итак, при  $\varepsilon > m$  возможны все значения энергии электрона, т. е. при  $\varepsilon > m$  энергетический спектр электрона непрерывен.

Рассмотрим теперь случай  $\varepsilon < m$ . При этом  $\lambda$  будет вещественной величиной. Поэтому из условия конечности функций  $f(r)$  и  $g(r)$  при  $r \rightarrow \infty$  следует, что величина  $q$ , зависящая от энергии, должна обращаться в нуль,  $q(\varepsilon) = 0$ . Обращение  $q$  в нуль возможно при определенных значениях энергии. Поэтому при  $\varepsilon < m$  энергетический спектр будет дискретным.

**1.5.2. Сферически-симметричная потенциальная яма.** Рассмотрим энергетический спектр в простейшем случае сферически-симметричной потенциальной ямы

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases}$$

где  $V_0$  — глубина и  $r_0$  — ширина ямы.

Исключая из системы (1.5.4) функцию  $rf(r)$ , получим следующие уравнения для определения  $rg(r) \equiv w(r)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w(r)}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} w(r) + [(\varepsilon + V_0)^2 - m^2] w(r) &= 0, & r < r_0, \\ \frac{d^2 w(r)}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} w(r) - (\varepsilon^2 - m^2) w(r) &= 0, & r > r_0. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} w(r) &= \sqrt{r} [A_1 J_{|\kappa+1/2|}(\beta r) + B_1 N_{|\kappa+1/2|}(\beta r)], & r < r_0, \\ w(r) &= \sqrt{r} [A_2 J_{|\kappa+1/2|}(\beta' r) + B_2 N_{|\kappa+1/2|}(\beta' r)], & r > r_0, \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

где  $J(x)$  и  $N(x)$  — функции Бесселя и Неймана,

$$\beta = \sqrt{(\varepsilon + V_0)^2 - m^2}, \quad \beta' = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}.$$

Из условия конечности  $w(r)$  при  $r=0$  следует, что  $B_1 = 0$ . Вместо условия конечности при  $r \rightarrow \infty$  мы введем условие  $w(R) = 0$ , где константа  $R$  удовлетворяет условию  $R \gg r_0$ . Это соответствует помещению системы в сферический ящик с непроницаемыми стенками радиуса  $R$ . Принципиального значения такое изменение граничного условия не имеет. Но практически оно удобно тем, что делает весь спектр дискретным с очень малым расстоянием (порядка  $1/R$ ) между соседними значениями  $\varepsilon$  в области  $|\varepsilon| > m$  (мы пишем модуль  $\varepsilon$ , так как параметр  $\varepsilon$  в (1.5.8) может быть как положительным, так и отрицательным). Благодаря дискретности спектра можно следить за изменением положения каждого уровня при изменении  $V_0$ .

Из граничных условий следует, что

$$B_2 = -A_2 \frac{J_{|\kappa+1/2|}(\beta' r)}{N_{|\kappa+1/2|}(\beta' r)}.$$

Требование непрерывности  $w(r)$  при  $r=r_0$  приводит окончательно к формуле

$$w(r) = A \sqrt{r} \begin{cases} [N_{|\kappa+1/2|}(\beta'R) J_{|\kappa+1/2|}(\beta'r_0) - \\ - J_{|\kappa+1/2|}(\beta'R) N_{|\kappa+1/2|}(\beta'r_0)] J_{|\kappa+1/2|}(\beta r), & r < r_0, \\ J_{|\kappa+1/2|}(\beta r_0) [N_{|\kappa+1/2|}(\beta'R) J_{|\kappa+1/2|}(\beta'r) - \\ - J_{|\kappa+1/2|}(\beta'R) N_{|\kappa+1/2|}(\beta'r)], & r > r_0, \end{cases}$$

где  $A$  — некоторая константа.

Энергетический спектр определяется из условия

$$\left(\frac{w_1}{w}\right)_{r=r_0-0} = \left(\frac{w_1}{w}\right)_{r=r_0+0},$$

где  $w_1(r) = rf(r)$ . Выразив  $w_1(r)$  через  $w(r)$  при помощи (1.5.4) и используя асимптотические выражения функций, содержащих в аргументе  $R$ , получим при  $\varepsilon < m$

$$\frac{1}{\varepsilon + V_0 + m} \left\{ \nu + \alpha \frac{J'_{|\nu|}(\alpha)}{J_{|\nu|}(\alpha)} \right\} = \frac{1}{\varepsilon + m} \left\{ \nu + \alpha' \frac{H'_{|\nu|}(\alpha')}{H_{|\nu|}(\alpha')} \right\}, \quad (1.5.10)$$

где  $\nu = \kappa + 1/2$ ,  $\alpha = \beta r_0$ ,  $\alpha' = \beta' r_0$  и  $H_{|\nu|}^{(1)}(x)$  — функция Ганкеля. Мы рассмотрим здесь случай  $l=0$ ,  $\kappa = -1$ ,  $\nu = -1/2$ . Тогда

$$J_{1/2}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \sin \alpha, \quad H_{1/2}^{(1)}(\alpha) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} e^{i\alpha},$$

и уравнение (1.5.10) принимает вид

$$1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{mr_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2/m^2} + 1}{1 + \varepsilon/m} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mr_0}\right)^2} \right], \quad (1.5.11)$$

где

$$\alpha = r_0 \sqrt{(\varepsilon + V_0)^2 - m^2}.$$

Это уравнение легко решить в предельных случаях широкой и узкой ямы. В первом случае ( $mr_0 \gg 1$ )

$$1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{1 + \varepsilon/m} \left[ 1 + mr_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{m^2}} \right].$$

Отсюда следует, что первое связанное состояние  $\varepsilon = m$  появляется при  $\alpha = \pi/2$ , т. е. при  $V_0 = \pi^2/(8\pi r_0^2)$ , как и в соответствующей нерелятивистской задаче. Энергия уровня достигает значения  $\varepsilon = 0$  при

$$V_0 = \left(1 + \frac{\pi^2}{2m^2 r_0^2}\right) m,$$

и значения  $\varepsilon = -m$  при

$$V_0 = 2 \left(1 + \frac{\pi^2}{4m^2 r_0^2}\right) m.$$

Во втором случае ( $mr_0 \ll 1$ ) состояния с  $\varepsilon = m, 0, -m$  достигаются при следующих значениях  $V_0$ :

$$\varepsilon = m, \quad V_0 = \pi/r_0 - 3m,$$

$$\varepsilon = 0, \quad V_0 = \pi/r_0 - m,$$

$$\varepsilon = -m, \quad V_0 = \pi/r_0 + m.$$

На рис. 1.1 схематически изображена зависимость энергетического спектра от глубины ямы  $V_0$  при заданном радиусе ямы  $r_0$  [16, 17]. Мы видим, что при  $V_0 < V_0^{(1)}$  связанные состояния ( $|\varepsilon| < m$ ) отсутствуют. Спектр состоит, как и при отсутствии внешнего поля, из двух областей  $\varepsilon > m$  и  $\varepsilon < -m$ , которые мы будем называть верхним и нижним континуумами. При  $V_0 > V_0^{(1)}$  нижний из уровней верхнего континуума принимает значение, меньшее  $m$ , т. е. появляется одно связанное состояние. При  $V_0 = V_0^{(2)}$  появляется второе связанное состояние и т. д.

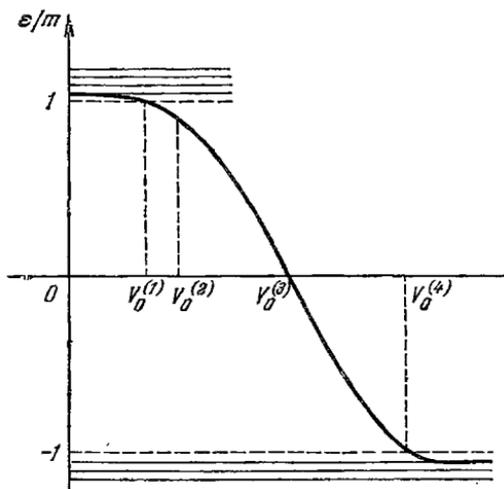


Рис. 1.1.

Значение энергии для каждого связанного состояния непрерывно уменьшается с ростом  $V_0$  и даже становится при  $V_0 > V_0^{(3)}$  отрицательным. Тем не менее мы можем причислить эти состояния к электронным состояниям, так как адиабатическим изменением внешнего поля можно вернуть такие состояния в верхний континуум. Трудность возникает, когда при значении  $V_0 = V_0^{(4)}$  уровень пересекает границу  $\varepsilon = -m$  и сливается с нижним континуумом, представляющим собой совокупность позитронных состояний. Это значение  $V_0$ , которое может быть названо критическим, соответствует, очевидно,  $\alpha = \pi$  и равно

$$V_c = m + \sqrt{m^2 + \pi^2/r_0^2}.$$

При  $V_0 > V_c$  корни уравнения (1.5.11) становятся комплексными. Физический смысл имеют при этом только корни с отрицательной мнимой частью  $-i\gamma/2$ ,  $\gamma > 0$ , так как в этом случае волновые функции обращаются в нуль при  $t \rightarrow \infty$ . Наличие такого типа корней означает, что соответствующие им состояния являются квазистационарными со временем жизни  $\tau \sim 1/\gamma$ .

Возникновение комплексных корней связано с образованием полей при  $V_0 > V_c$  электронно-позитронных пар [17, 18]. Теория этого явления выходит за рамки одночастичного уравнения Дирака, но его можно описать, если привлечь представление об

электронно-позитронном вакууме как совокупности состояний в нижнем континууме, полностью занятых электронами.

При  $V > V_c$  оба континуума могут быть изображены схематически, как показано на рис. 1.2 (жирная линия изображает профиль потенциальной ямы).

При этом, очевидно, электрон с энергией  $\varepsilon$  может перейти из нижнего континуума в верхний. Это и означает, что образовалась электронно-позитронная пара. Освободившееся в нижнем континууме состояние будет вести себя как позитрон, в верхнем же континууме появится электрон.

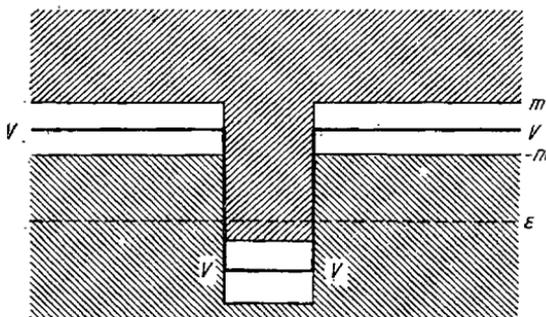


Рис. 1.2.

Вероятность образования пары определяется шириной квазистационарного уровня  $\gamma$ . Ее легко найти, если  $V_0$  мало отличается от  $V_c$ . Полагая в этом случае  $V_0 = V_c + v$  и  $\varepsilon = -m - \eta$ , где  $v \ll V_c$ ,  $|\eta| \ll m$ , получим из (1.5.11)

$$\frac{\pi}{\alpha - \pi} = \frac{1}{\eta} \left( m r_0 \sqrt{\frac{-2\eta}{m}} + 1 \right) V_c.$$

С другой стороны, из определения  $\alpha$  следует, что

$$\pi(\alpha - \pi) = (v - \eta)(V_c - m)r_0^2.$$

Поэтому

$$\pi^2 \eta = \left( 1 + m r_0 \sqrt{\frac{-2\eta}{m}} \right) (v - \eta) (\pi^2 + V_c m r_0^2).$$

Полагая  $\eta = \delta - i\gamma/2$  и пренебрегая сперва величиной  $m r_0 \sqrt{-2\eta/m}$ , найдем отсюда

$$\delta = v \frac{\pi^2 + V_c m r_0^2}{2\pi^2 + V_c m r_0^2}.$$

Учитывая далее величину  $m r_0 \sqrt{-2\eta/m}$ , найдем  $\gamma$ :

$$\gamma = 2\sqrt{2} m \left( \frac{v}{m} \right)^{3/2} \frac{\pi^2 m r_0 (\pi^2 + V_c m r_0^2)^{3/2}}{(2\pi^2 + V_c m r_0^2)^{5/2}}.$$

В предельном случае широкой ямы

$$\gamma = \sqrt{2} \pi^2 m \left( \frac{v}{m} \right)^{3/2} \frac{1}{m r_0}, \quad m r_0 \gg 1;$$

в случае узкой ямы

$$\gamma = \frac{1}{2} m \left( \frac{v}{m} \right)^{3/2}, \quad m r_0 \ll 1.$$

**1.5.3. Движение электрона в кулоновском поле ядра.** Одно из важнейших применений уравнение Дирака находит себе при исследовании движения электрона в поле ядра. Это поле не является строго сферически-симметричным. Отклонение от сферической симметрии связано с наличием у ядер электрического квадрупольного и магнитного дипольного, а также высших мультипольных моментов. Если пренебречь этими эффектами, обуславливающими сверхтонкую структуру электронных уровней, и считать поле ядра сферически-симметричным, то можно рассматривать состояния электрона с определенными значениями энергии, момента и четности. При этом волновые функции таких состояний имеют вид (1.5.3) и задача сводится к решению уравнений для радиальных функций (1.5.4).

Поле вне ядра совпадает с полем точечного заряда, т. е.

$$V(r) = -Z\alpha/r, \quad r > r_0,$$

где  $\alpha = e^2/4\pi$ ,  $Ze$  — заряд ядра и  $r_0$  — радиус ядра. Мы рассмотрим задачу в том приближении, когда можно пренебречь конечными размерами ядра, и будем считать, что это выражение для  $V(r)$  справедливо вплоть до  $r=0$ .

Уравнения для радиальных функций в таком поле имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rg(r)) + \frac{\kappa}{r}(rg(r)) - \left(\varepsilon + m + \frac{Z\alpha}{r}\right)(rf(r)) &= 0, \\ \frac{d}{dr}(rf(r)) - \frac{\kappa}{r}(rf(r)) + \left(\varepsilon - m + \frac{Z\alpha}{r}\right)(rg(r)) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

В соответствии с характером асимптотического поведения радиальных волновых функций (1.5.5) будем искать решение этих уравнений в виде

$$\begin{aligned} rg(r) &= \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{m}} e^{-\lambda r} (F_1(2\lambda r) + F_2(2\lambda r)), \\ rf(r) &= \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{m}} e^{-\lambda r} (F_1(2\lambda r) - F_2(2\lambda r)), \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

где  $\lambda = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}$ . Подстановка этих выражений в (1.5.12) приводит к следующим уравнениям для функций  $F_1(\rho)$  и  $F_2(\rho)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dF_1(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{Z\alpha}{\lambda\rho} - 1\right)F_1(\rho) + \left(\frac{Z\alpha m}{\lambda\rho} + \frac{\kappa}{\rho}\right)F_2(\rho) &= 0, \\ \frac{dF_2(\rho)}{d\rho} - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda\rho}F_2(\rho) - \left(\frac{Z\alpha m}{\lambda\rho} - \frac{\kappa}{\rho}\right)F_1(\rho) &= 0, \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

где  $\rho = 2\lambda r$ .

Выясним сначала поведение решений этих уравнений при  $\rho \rightarrow 0$ . В этом случае можно положить

$$F_1(\rho) = a_1\rho^\nu, \quad F_2(\rho) = a_2\rho^\nu,$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  и  $\gamma$  — константы, связанные, как следует из (1.5.14), соотношениями

$$\begin{aligned} \left(\gamma + \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)a_1 + \left(\kappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right)a_2 &= 0, \\ \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right)a_1 + \left(-\gamma + \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю детерминант этой системы, получим

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 - Z^2\alpha^2} \quad (1.5.15)$$

(знак корня должен быть выбран положительным, чтобы функции  $F_1(\rho)$  и  $F_2(\rho)$  были конечными при  $\rho \rightarrow 0$ ).

Вернемся теперь к системе (1.5.14). Исключив из нее  $F_1(\rho)$  и вводя вместо  $F_2(\rho)$  функцию  $G_2(\rho)$ ,

$$F_2(\rho) = \rho^\gamma G_2(\rho),$$

получим для  $G_2(\rho)$  уравнение

$$\rho \frac{d^2 G_2(\rho)}{d\rho^2} + (2\gamma + 1 - \rho) \frac{dG_2(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} - \gamma\right) G_2(\rho) = 0.$$

Сравнение этого уравнения с уравнением

$$\rho \frac{d^2 \mathcal{F}}{d\rho^2} + (b - \rho) \frac{d\mathcal{F}}{d\rho} - a\mathcal{F} = 0$$

для вырожденной гипергеометрической функции

$$\mathcal{F}(a, b; \rho) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \frac{\rho^n}{n!}$$

показывает, что

$$G_2(\rho) = C \mathcal{F}\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right)$$

и, следовательно,

$$F_2(\rho) = C \rho^\gamma \mathcal{F}\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right), \quad (1.5.16)$$

где  $C$  — некоторая константа. Легко убедиться далее, что

$$F_1(\rho) = -C \frac{\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda}{\kappa - Z\alpha m/\lambda} \rho^\gamma \mathcal{F}\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right). \quad (1.5.17)$$

Формулы (1.5.13), (1.5.16) и (1.5.17) определяют радиальные функции независимо от того, будет ли  $\varepsilon < m$  или  $\varepsilon > m$ . Если  $\varepsilon < m$ , то в этом случае энергетический спектр будет, как мы уже знаем, дискретным. Чтобы найти возможные значения энергии, нужно воспользоваться условием конечности функций  $F_1(\rho)$  и  $F_2(\rho)$  при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Для гипергеометрической функции  $\mathcal{F}(a, b; \rho)$  справедливо асимптотическое представление при  $\rho \gg 1$ :

$$\mathcal{F}(a, b; \rho) \approx e^{-i\pi a} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \rho^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \rho^{a-b} e^{\rho}.$$

Из него следует, что  $\mathcal{F}(a, b; \rho)$  не будет содержать экспоненциально нарастающего члена, если  $1/\Gamma(a) = 0$ . В применении к функциям  $F_2(\rho)$  и  $F_1(\rho)$  это условие дает

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda)} = 0, \quad \frac{1}{(Z\alpha m/\lambda - \kappa) \Gamma(\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda)} = 0.$$

Если  $\frac{Z\alpha m}{\lambda} - \kappa \neq 0$ , то второе условие совпадает с первым (в частности, это имеет место всегда при  $\kappa < 0$ ). Так как полосомами гамма-функции являются целые отрицательные числа и нуль, то мы получаем

$$\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda = -n_r,$$

откуда

$$\varepsilon = m \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{Z\alpha}{\gamma + n_r} \right)^2} \right]^{-1}, \quad (1.5.18)$$

где  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$  и  $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - Z^2\alpha^2}$ . Если  $\kappa = Z\alpha m/\lambda$ , то, как легко видеть,  $\gamma = Z\alpha\varepsilon/\lambda$ , т. е.  $n_r = 0$  (при этом второе условие не выполняется). Мы видим, таким образом, что

$$n_r = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, & \text{если } \kappa < 0, \\ 1, 2, \dots, & \text{если } \kappa > 0. \end{cases}$$

Формула (1.5.18) определяет тонкую структуру уровней водородоподобного атома (при  $\kappa < 0$  число  $n_r$  называется радиальным квантовым числом, при  $\kappa > 0$  радиальным квантовым числом называется  $n_r - 1$ ).

Если  $Z\alpha \ll 1$ , то разложение (1.5.18) по этому параметру с точностью до  $(Z\alpha)^4$  дает

$$\frac{\varepsilon - m}{m} = - (Z\alpha)^2 \left[ \frac{1}{2n^2} + \frac{(Z\alpha)^2}{2n^3} \left( \frac{1}{|\kappa|} - \frac{3}{4n} \right) \right], \quad (1.5.19)$$

где  $n = n_r + \kappa$  (это число совпадает с главным квантовым числом нерелятивистской квантовой механики). Первый член в (1.5.19) соответствует формуле Бальмера.

Формулу (1.5.19) можно переписать также в виде

$$\varepsilon - m = - \frac{Z^2\alpha}{2a_0 n^2} \left[ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left( \frac{1}{|\kappa|} - \frac{3}{4n} \right) \right],$$

где  $a_0$  — радиус первой боровской орбиты,  $a_0 = 1/m\alpha$ .

Характерной особенностью формулы для тонкой структуры является то, что в нее входит абсолютное значение  $\kappa$ . Поэтому все уровни энергии, кроме наинизшего, двукратно вырождены.

В частности, совпадают уровни

$$2s_{1/2} (n_r = 1, \kappa = -1, l = 0, j = \frac{1}{2}, n = 2)$$

и

$$2p_{1/2} (n_r = 1, \kappa = 1, l = 0, j = \frac{1}{2}, n = 2).$$

Заметим, что формула (1.5.18), основанная на применении понятия заданного внешнего поля, не является точной. Поправки к ней снимают вырождение по  $\kappa$ . Величина этих поправок при малых  $Z$  по порядку величины равна  $(Z\alpha)^4\alpha$ . Отсюда видно, что использование формулы (1.5.18) для водорода с точностью, превышающей точность разложения (1.5.19), не имеет смысла.

Приведем окончательные выражения для радиальных функций дискретного спектра:

$$g(r) = -\frac{\sqrt{\Gamma(2\gamma+n_r+1)}}{\Gamma(2\gamma+1)\sqrt{n_r!}} \sqrt{\frac{1+\varepsilon/m}{4N(N-\kappa)}} \left(\frac{2Z}{Na_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{Na_0}} \times \\ \times \left(\frac{2Zr}{Na_0}\right)^{\gamma-1} \left[ n_r \mathcal{F}(-n_r+1, 2\gamma+1; \frac{2Zr}{Na_0}) - \right. \\ \left. - (N-\kappa) \mathcal{F}(-n_r, 2\gamma+1; \frac{2Zr}{Na_0}) \right], \quad (1.5.20)$$

$$f(r) = -\frac{\sqrt{\Gamma(2\gamma+n_r+1)}}{\Gamma(2\gamma+1)\sqrt{n_r!}} \sqrt{\frac{1-\varepsilon/m}{4N(N-\kappa)}} \left(\frac{2Z}{Na_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{Na_0}} \times \\ \times \left(\frac{2Zr}{Na_0}\right)^{\gamma-1} \left[ n_r \mathcal{F}(-n_r+1, 2\gamma+1; \frac{2Zr}{Na_0}) + \right. \\ \left. + (N-\kappa) \mathcal{F}(-n_r, 2\gamma+1; \frac{2Zr}{Na_0}) \right],$$

где  $N = \sqrt{n^2 + 2n_r(|\kappa| - \gamma)}$ .

Эти функции нормированы согласно условию

$$\int (f^2 + g^2) r^2 dr = 1.$$

**1.5.4. Волновые функции непрерывного спектра в кулоновском поле ядра.** При  $\varepsilon > m$  энергетический спектр электрона будет непрерывным. Мы приведем здесь только окончательные выражения для волновых функций:

$$rg(r) = \frac{1}{2} e^{\pi\xi/2} \frac{|\Gamma(\gamma+i\xi)|}{\Gamma(2\gamma+1)} e^{i(2\eta+l\pi/2)} \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon R}} (2pr)^\gamma \times \\ \times [(\gamma+i\xi) e^{-ipr+i\eta} \mathcal{F}(\gamma+1+i\xi, 2\gamma+1; 2ipr) + \text{к.с.}], \quad (1.5.21)$$

$$rf(r) = \frac{i}{2} e^{\pi\xi/2} \frac{|\Gamma(\gamma+i\xi)|}{\Gamma(2\gamma+1)} e^{i(2\eta+l\pi/2)} \sqrt{\frac{\varepsilon-m}{\varepsilon R}} (2pr)^\gamma \times \\ \times [(\gamma+i\xi) e^{-ipr+i\eta} \mathcal{F}(\gamma+1+i\xi, 2\gamma+1; 2ipr) - \text{к.с.}],$$

где

$$e^{2i\eta} = \frac{-\kappa + im\xi/\varepsilon}{\gamma + i\xi} = \frac{\gamma - i\xi}{-\kappa - im\xi/\varepsilon}$$

(волновые функции нормированы на сферу радиуса  $R$ ).

1.5.5. Критический заряд ядра. Полагая в (1.5.18)  $n_r = 0$  и  $\kappa = -1$ , найдем энергию основного состояния:

$$\varepsilon_0 = m \sqrt{1 - Z^2 \alpha^2}.$$

При  $Z\alpha = 1$  эта величина обращается в нуль, а при  $Z\alpha > 1$  становится мнимой. Однако такой вывод не имеет непосредственного физического смысла, так как он относится к идеальному кулоновскому полю точечного заряда. Учет же конечности ядра коренным образом меняет ситуацию. В этом случае связанные состояния могут существовать и при  $Z\alpha > 1$  [18, 19]. С ростом  $Z$  низший уровень понижается и, как это имело место в примере, разобранным в п. 1.5.2, достигает значения, равного  $-m$  при некотором критическом значении  $Z_c$ . Покажем, как найти величину  $Z_c$ .

При  $r > r_0$  волновые функции определяются выражениями (1.5.13), а  $F_2$  и  $F_1$  выражаются через вырожденные гипергеометрические функции аналогично (1.5.16) и (1.5.17). Однако теперь необходимо учитывать оба знака величины  $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}$ . Поэтому  $F_2$  и  $F_1$  будут иметь вид

$$F_2 = c \left[ \frac{\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(-\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda)} \rho^\gamma \mathcal{F}\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right) + \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda)} \rho^{-\gamma} \mathcal{F}\left(-\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, -2\gamma + 1; \rho\right) \right], \quad (1.5.22)$$

$$F_1 = -\frac{c}{\kappa - Z\alpha m/\lambda} \left[ \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) \frac{\Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(-\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda)} \rho^\gamma \mathcal{F}\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right) + \left(-\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda)} \rho^{-\gamma} \mathcal{F}\left(-\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, -2\gamma + 1; \rho\right) \right]. \quad (1.5.23)$$

Коэффициенты перед функциями  $\mathcal{F}$  в (1.5.22) подобраны так, чтобы  $F_2$  не содержало члена, экспоненциально растущего на бесконечности,  $c$  — нормировочная константа.

Сшивая отношение  $f/g$  на границе ядра при  $r = r_0$ , получим условие, определяющее уровни энергии электрона в рассматриваемом потенциале:

$$\frac{\sqrt{m-\varepsilon}}{\sqrt{m+\varepsilon}} \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} \Big|_{r=r_0} = A_\kappa, \quad (1.5.24)$$

где  $A_\kappa$  — отношение  $f/g|_{r=r_0}$  функций  $f$  и  $g$ , описывающих электрон внутри ядра.

Рассмотрим подробнее случай, когда величина  $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} \equiv iq$  становится чисто мнимой, т. е. когда  $Z > 137|\kappa|$ . Считая,

что  $mr_0 \ll 1$ , получим из (1.5.22) – (1.5.24):

$$R(q) + R(-q) = 0, \quad (1.5.25)$$

$$R(q) = -\frac{\rho^{1/q} \Gamma(-2iq)}{\Gamma(-iq - Z\alpha\epsilon/\lambda)} \{ [(-\kappa + iq)\sqrt{m+\epsilon} + Z\alpha\sqrt{m-\epsilon}] A_\kappa + \\ + [(-\kappa - iq)\sqrt{m-\epsilon} + Z\alpha\sqrt{m+\epsilon}] \}.$$

Полагая здесь  $\epsilon = -m$  и используя формулу Стирлинга для асимптотики  $\Gamma$ -функции, получим уравнение, определяющее  $Z_c$ :

$$q \ln(2Z\alpha mr_0) + \arg(1 - 2iq) - \operatorname{arctg} \frac{q}{Z\alpha A_\kappa - \kappa} = n\pi \quad (1.5.26)$$

(мы учли, что  $\arg \Gamma(-2iq) = \pi/2 + \arg \Gamma(1 - 2iq)$ ).

Будем предполагать теперь, что яма внутри ядра имеет прямоугольную форму,  $V = -Z\alpha/r_0$ ,  $r < r_0$ . Тогда для основного состояния ( $\kappa = -1$ ) величина  $A_{-1}$  при  $r_0 \rightarrow 0$  будет равна, согласно п. 1.5.2,

$$A_{-1} = \operatorname{ctg} Z\alpha - 1/Z\alpha.$$

Используя это выражение, получим из (1.5.26) следующее уравнение для определения  $Z_c$ :

$$q \ln(2Z\alpha mr_0) + \arg(1 - 2iq) - \operatorname{arctg} \frac{q}{Z\alpha \operatorname{ctg} Z\alpha} = n\pi. \quad (1.5.27)$$

Минимальное значение  $Z_c$  соответствует значению  $n = -1$ . Численные расчеты показывают, что при  $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-12}$  и  $n = -1$   $Z_c \approx 170$ .

При  $Z = Z_c$  электронный уровень достигает значения  $-m$ . Если же  $Z > Z_c$ , то в поле ядра образуются электронно-позитронные пары. При этом возникает ситуация, аналогичная ситуации, рассмотренной в п. 1.5.2. Уравнение (1.5.25), так же как и уравнение (1.5.11), будет иметь теперь комплексные корни, причем удвоенная мнимая часть энергетического уровня будет определять вероятность образования пары в поле ядра с  $Z > Z_c$ .

Эту вероятность можно оценить, используя квазиклассическое приближение. На рис. 1.3 схематически изображены верхний и нижний континуумы, деформированные полем ядра при  $Z > Z_c$  (жирной линией изображен профиль потенциальной энер-

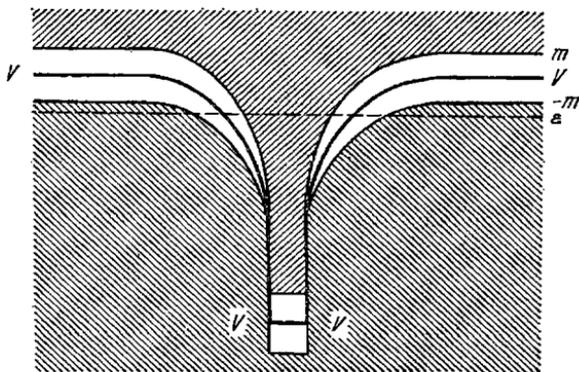


Рис. 1.3.

гии). Мы видим, что энергетическое состояние с энергией  $\varepsilon < -m$  принадлежит одновременно как верхнему, так и нижнему континуумам. Поэтому электрон с энергией  $\varepsilon$  из занятого нижнего континуума может перейти в верхний континуум. Такому переходу соответствует образование электронно-позитронной пары (освобожденное состояние будет вести себя как позитрон). Вероятность перехода определяется формулой

$$\omega \sim \exp\left(-2 \int_{r_1}^{r_2} |p_r| dr\right),$$

где  $p_r = \sqrt{m^2 - (\varepsilon + Z\alpha/r)^2}$  и  $r_1$  и  $r_2$  — корни уравнения  $p_r = 0$  (мы пренебрегли влиянием центробежного барьера). При  $-\varepsilon - m \ll m$  получим отсюда

$$\omega \sim \exp\left(-\frac{2\pi Z\alpha m}{\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}}\right). \quad (1.5.28)$$

Как мы видели, если  $Z \sim Z_c$ , то  $\varepsilon \sim -m$ . В этом случае

$$\varepsilon = -m + a(Z - Z_c),$$

и формула (1.5.28) приобретает вид

$$\omega \sim \exp\left(-\frac{b}{\sqrt{Z - Z_c}}\right),$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые константы. Мы видим, что вероятность образования пары экспоненциально убывает при  $Z \rightarrow Z_c$ .

## § 1.6. Движение в однородных полях

**1.6.1. Уравнения, описывающие электроны в однородном электромагнитном поле.** Перейдем теперь к изучению движения электрона в постоянном и однородном электромагнитном поле.

Как и в случае свободного электрона, уравнение Дирака в поле не определяет поляризацию электрона. Чтобы описать состояние поляризации, следует найти такой оператор  $R$ , который коммутировал бы с оператором  $\hat{p} - e\hat{A}$  и для которого волновая функция электрона была бы собственной функцией. Такой оператор может быть выбран в виде

$$R = (\hat{p} - e\hat{A})F + F(\hat{p} - e\hat{A}),$$

где  $F = F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$  и  $F_{\mu\nu}$  — тензор поля. Действительно, учитывая, что  $(\hat{p} - e\hat{A})^2 = \square + \frac{e}{2}F$ , имеем

$$[(\hat{p} - e\hat{A}), R] = [\square, F] = 0.$$

Замечая далее, что

$$\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho = -2i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\sigma$$

( $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  — единичный антисимметричный тензор), можно записать  $R$  в виде

$$R = i\gamma_5 \hat{S}, \quad S_\mu = 2i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} (p_\sigma - eA_\sigma).$$

Уравнение, определяющее поляризацию электрона, приобретает теперь вид

$$i\gamma_5 \hat{S}\psi = r\psi, \quad (1.6.1)$$

где  $r$  — собственное значение оператора  $R$ .

Сравнение этой формулы с (1.1.32) показывает, что оператор  $S_\mu$  играет роль, аналогичную 4-вектору поляризации  $a_\mu$ .

Мы будем изучать движение электрона в двух случаях: когда имеется постоянное и однородное магнитное поле  $H$ , направленное вдоль оси  $z$  ( $A_x = A_z = A_0 = 0$ ,  $A_y = Hx$ ), либо когда имеется постоянное и однородное электрическое поле  $E$ , направленное вдоль оси  $z$  ( $A_x = A_y = A_z = 0$ ,  $A_0 = -Ez$ ). Оба случая могут быть объединены, если считать, что 4-потенциал имеет вид

$$A_\mu = fa_\mu(bx),$$

где  $f$ ,  $a$  и  $b$  соответственно равны

$$\begin{aligned} f = H, \quad a = (0, 1, 0, 0), \quad b = (1, 0, 0, 0), \\ f = E, \quad a = (0, 0, 0, i), \quad b = (0, 0, -1, 0). \end{aligned}$$

Решение уравнения Дирака

$$[i\hat{p} - ief\hat{a}(bx) + m]\psi(x) = 0$$

будем искать в виде

$$\psi(x) = e^{i p_\perp x + i p_a(ax)} \varphi(\xi), \quad (1.6.2)$$

где

$$\xi = \sqrt{|e|f} \left( \frac{p_a}{ef} - bx \right), \quad (1.6.3)$$

$p_\perp$  и  $p_a$  — постоянные 4-векторы, причем  $p_\perp a = p_\perp b = 0$  и функция  $\varphi(\xi)$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ \hat{b} \frac{d}{d\xi} + i\hat{a}\xi - \frac{1}{\sqrt{|e|f}} (i\hat{p}_\perp + m) \right] \varphi = 0. \quad (1.6.4)$$

Уравнение (1.6.1), определяющее состояние поляризации электрона, приобретает вид

$$i\hat{a}\hat{b}\hat{p}_\perp\varphi_\mu(\xi) = \mu\sqrt{a^2b^2p_\perp^2}\varphi_\mu(\xi),$$

где  $\mu = \pm 1$  (здесь и далее в этом пункте считается, что аргументы всех квадратных корней из вещественных чисел равны либо нулю, либо  $\pi/2$ ).

Введем теперь четыре постоянных биспинора  $u_{\mu}^{\pm}$ , определяемых уравнениями

$$i\hat{a}\hat{b}\hat{\rho}_{\perp}u_{\mu}^{\pm} = \mu\sqrt{a^2b^2\rho_{\perp}^2}u_{\mu}^{\pm}, \quad i\hat{a}\hat{b}u_{\mu}^{\pm} = \pm\sqrt{a^2b^2}u_{\mu}^{\pm}. \quad (1.6.5)$$

Для того чтобы фиксировать относительную фазу биспиноров  $u_{\mu}^{+}$  и  $u_{\mu}^{-}$ , присоединим к этим уравнениям уравнение

$$u_{\mu}^{+} = \frac{\hat{b}}{\sqrt{b^2}} \frac{i\hat{\rho}_{\perp} + m}{\sqrt{\rho_{\perp}^2 + m^2}} u_{\mu}^{-}. \quad (1.6.6)$$

Биспиноры  $u_{\mu}^{\pm}$  линейно-независимы, и по ним может быть разложена функция  $\varphi \equiv \varphi_{\mu}$ :

$$\varphi_{\mu} = \Phi_{+}^{\mu} u_{\mu}^{+} + \Phi_{-}^{\mu} u_{\mu}^{-}.$$

Подставляя это выражение в (1.6.4) и опуская индекс  $\mu$ , характеризующий поляризацию, получим

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2} \frac{d}{d\xi} \Phi_{+} - \xi \sqrt{a^2} \Phi_{+} - k \Phi_{-} &= 0, \\ \sqrt{b^2} \frac{d}{d\xi} \Phi_{-} + \xi \sqrt{a^2} \Phi_{-} - k \Phi_{+} &= 0, \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

где  $k = \sqrt{\rho_{\perp}^2 + m^2} / \sqrt{|e|f}$ . Отсюда следует, что  $\Phi_{\pm}$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ \frac{d^2}{d\xi^2} - a^2 b^2 \xi^2 + b^2 (\mp \sqrt{a^2 b^2} - k^2) \right] \Phi_{\pm} = 0. \quad (1.6.8)$$

Решения уравнений такого типа выражаются через функции параболического цилиндра  $D_p(\alpha\rho)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\left[ \frac{d^2}{d\xi^2} - \left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^2 \xi^2 + \alpha^2 \left(\rho + \frac{1}{2}\right) \right] D_p(\alpha\xi) = 0$$

и рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\xi} + \frac{\alpha^2}{2}\xi\right) D_p(\alpha\xi) &= \alpha\rho D_{p-1}(\alpha\xi), \\ \left(\frac{d}{d\xi} - \frac{\alpha^2}{2}\xi\right) D_p(\alpha\xi) &= -\alpha D_{p+1}(\alpha\xi). \end{aligned}$$

При вещественных  $\rho$  функции параболического цилиндра будут ограниченными в том случае, когда  $\rho$  — целое неотрицательное число.

**1.6.2. Электрон в постоянном и однородном магнитном поле.** Рассмотрим теперь движение электрона в однородном и постоянном магнитном поле (направленном вдоль оси  $z$ ). В этом случае, согласно (1.6.2) и (1.6.3),

$$\psi(x) = e^{ip_z z - iet + ip_y y} \varphi(\xi), \quad \xi = \sqrt{|e|H} \left( \frac{p_y}{eH} - x \right),$$

и уравнения (1.6.7) и (1.6.8), определяющие  $\Phi_{\pm}(\xi)$ , приобретают вид

$$\left(\frac{d}{d\xi} \mp \xi\right) \Phi_{\pm} - k \Phi_{\mp} = 0, \quad \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 \mp 1 - k^2\right) \Phi_{\pm} = 0,$$

где  $k^2 = (p_z^2 - \varepsilon^2 + m^2) / |e|H$ .

Нас интересуют решения этих уравнений, ограниченные при  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Они могут быть выражены через функции  $D_p$ :

$$\Phi_{-}(\xi) = D_{\frac{k^2}{2}}(\xi \sqrt{2}), \quad \Phi_{+}(\xi) = -\frac{k}{\sqrt{2}} D_{\frac{k^2}{2}-1}(\xi \sqrt{2}),$$

где  $-k^2/2 = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , причем значение  $n = 0$  должно быть исключено, если  $\mu = 1$ . Действительно, учитывая (1.6.6), можно переписать волновую функцию электрона с поляризацией  $\mu$  в виде (мы учли, что  $\hat{a} = \gamma_1$ ):

$$\varphi(\xi) = \left[ D_n(\xi \sqrt{2}) - \frac{m + \mu \sqrt{m^2 + n|e|H}}{\sqrt{2|e|H}} D_{n-1}(\xi \sqrt{2}) \gamma_1 \right] u^-.$$

Отсюда следует, что если  $\mu = -1$ , то при  $n = 0$  коэффициент перед  $D_{-1}$  обращается в нуль, и поэтому в этом случае допустимо значение  $n = 0$ . Если же  $\mu = 1$ , то значение  $n = 0$  недопустимо.

Так как  $-k^2/2 = n$ , то энергия электрона в магнитном поле определяется формулой

$$\varepsilon^2 = m^2 + p_z^2 + 2n|e|H,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  при  $\mu = -1$  и  $n = 1, 2, \dots$  при  $\mu = 1$ .

Мы видим, что энергия электрона в постоянном и однородном магнитном поле содержит непрерывный параметр  $p_z$  — импульс электрона вдоль  $\mathbf{H}$  и дискретный параметр  $n$ , связанный с финитностью движения электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю (в классической механике движение в этой плоскости является круговым).

Заметим, что функции  $D_n$  при целом  $n$  выражаются через полиномы Эрмита

$$D_n(\xi \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi).$$

Обратимся теперь к уравнению (1.6.1), определяющему поляризацию электрона, движущегося в магнитном поле:

$$i\gamma_5 \hat{S} \psi_{\mu} = \mu \psi_{\mu}, \quad \mu = \pm 1,$$

где  $S = \left(0, 0, \frac{e}{m^*}, i \frac{p_z}{m^*}\right)$  и  $m^{*2} = m^2 + 2n|e|H$ . Сравнение этой формулы с (1.1.36) показывает, что величину  $\mu$  можно интерпретировать как проекцию спина электрона на направление магнитного поля.

1.6.3. Электрон в постоянном и однородном электрическом поле. Перейдем к рассмотрению движения электрона в постоянном и однородном электрическом поле (направленном вдоль оси  $z$ ) [20, 21]. В этом случае, согласно (1.6.2) и (1.6.3),

$$\psi(x) = e^{ip_x x + ip_y y - iet} \varphi(\xi),$$

где  $\xi = \sqrt{|e|E} (\varepsilon/eE + z)$ . Полагая

$$\varphi(\xi) = \Phi_+(\xi) u^+ + \Phi_-(\xi) u^-$$

и учитывая (1.6.7) и (1.6.8), получим следующие уравнения для определения  $\Phi_{\pm}(\xi)$ :

$$\left(\frac{d}{d\xi} \mp i\xi\right) \Phi_{\pm} - k\Phi_{\mp} = 0, \quad \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \mp i - k^2\right) \Phi_{\pm} = 0, \quad (1.6.9)$$

где  $k^2 = (p_x^2 + p_y^2 + m^2)/|e|E$ .

Функции  $\Phi_{\pm}(\xi)$  выражаются через  $D_p$ , но индекс  $p$  будет теперь комплексным:

$$\Phi_-(\xi) = D_{k^2 i/2}(\xi \sqrt{2i}), \quad \Phi_+(\xi) = -\frac{k}{\sqrt{2i}} D_{k^2 i/2 - 1}(\xi \sqrt{2}).$$

Два линейно независимых решения уравнений (1.6.9) соответствуют различным знакам перед  $\sqrt{i}$ . Мы выберем решение, соответствующее  $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$  и обладающее следующей асимптотикой:

если  $\xi \rightarrow -\infty$  ( $\arg \xi = -\pi$ ), то

$$\varphi(\xi) = e^{-i \frac{\xi^2}{2}} (\xi \sqrt{2i})^{\frac{k^2 i}{2}} u^- + \frac{k}{\sqrt{2i}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-k^2 i/2 + 1)} e^{\frac{\pi k^2}{2}} e^{i \frac{\xi^2}{2}} (\xi \sqrt{2i})^{-\frac{k^2 i}{2}} u^+, \quad (1.6.10)$$

если  $\xi \rightarrow \infty$  ( $\arg \xi = 0$ ), то

$$\varphi(\xi) = e^{-i \frac{\xi^2}{2}} (\xi \sqrt{2i})^{\frac{k^2 i}{2}} u^-. \quad (1.6.11)$$

Обратим внимание на то, что в электрическом поле при любых значениях  $k^2$  волновая функция  $\varphi(\xi)$  остается ограниченной при  $|\xi| \rightarrow \infty$ , но, в отличие от случая магнитного поля, не обращается в нуль при  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Для того чтобы выяснить физический смысл найденной волновой функции  $\varphi(\xi)$ , вычислим компоненту потока вероятности вдоль оси  $z$ . Учитывая, что условие (1.6.5), определяющее функции  $u^{\pm}$ , имеет вид  $i\gamma_4 \gamma_3 u^{\pm} = \mp u^{\pm}$  и что функции  $u^{\pm}$  ортогональны ( $u^{\pm} * u^{\mp} = 0$ ), получим

$$j_z = i(\overline{\varphi} \gamma_3 \varphi) = (|\Phi_-|^2 - |\Phi_+|^2) N, \quad (1.6.12)$$

где  $N = u^{-*} u^- = u^{+*} u^+$ . Это соотношение показывает, что оба слагаемых в (1.6.10) соответствуют волнам, распространяющимся

в противоположных направлениях. Поэтому первое слагаемое в (1.6.10) можно интерпретировать как падающую, а второе — как отраженную волну. Функцию же (1.6.11) можно интерпретировать как волну, прошедшую на бесконечность. (Отметим, что у прошедшей волны направления потока вероятности и возрастания фазы, т. е. импульса, противоположны).

Отношение квадратов модулей амплитуд прошедшей и падающей волн, т. е. коэффициент прохождения определяется, очевидно, формулой

$$D = |(\exp i\pi)^{k^2/2}|^2 = \exp(-\pi k^2). \quad (1.6.13)$$

Существование прошедшей на бесконечность волны противоречит квантовой механике одного тела, так как потенциальная энергия при  $z \rightarrow \infty$  стремится к  $\infty$ . Это противоречие, известное под названием парадокса Клейна [22], мы подробно рассмотрим в следующем пункте.

**1.6.4. Парадокс Клейна.** Как мы видели, движение электрона в постоянном и однородном электрическом поле, в отличие от движения в постоянном и однородном магнитном поле, инфинитно в любом направлении. Поэтому состояние электрона в электрическом поле не зависит от каких-либо дискретных параметров, так же как не зависит от дискретных параметров состояния свободного электрона. Но из-за электрического поля возникает существенное различие между энергетическими континуумами электрона в обоих случаях, а именно изменяются границы верхнего ( $\varepsilon = m$ ) и нижнего ( $\varepsilon = -m$ ) континуумов (рис. 1.4 и 1.5).

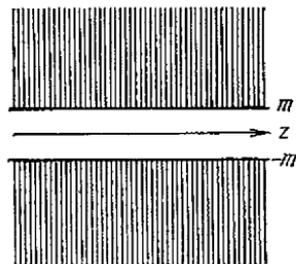


Рис. 1.4.

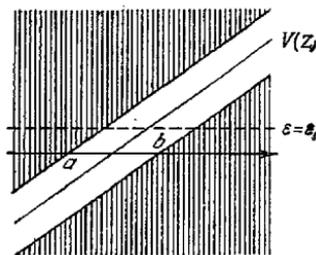


Рис. 1.5.

Если движение происходит вдоль электрического поля  $E$  (по оси  $z$ ), т. е. если  $p_x = p_y = 0$ , то границей верхнего континуума станет линия  $\varepsilon = m + V(z)$ , а границей нижнего континуума — линия  $-\varepsilon = m + V(z)$ , где  $V(z) = -eEz$  — потенциальная энергия электрона ( $e < 0$ ). Поворот запретной энергетической зоны, разделяющей верхний и нижний континуумы, которым соответствуют положительные и отрицательные частоты, т. е. электронные и позитронные состояния, приводит к тому, что области, соответствующие этим состояниям, становятся разделенными пространственно. Например, если энергия электрона равна  $\varepsilon = \varepsilon_0$  (см.

рис. 1.5), то при  $x \leq a$  состояние будет электронным, а при  $x \geq b$  — позитронным.

Таким образом, в электрическом поле не может быть строгого разделения состояний на электронные и позитронные. Более того, из области  $x \leq a$  частица может перейти, благодаря туннельному эффекту, в область  $x \geq b$ . Этот эффект и называется парадоксом Клейна.

Вероятность перехода определяется (в квазиклассическом приближении) по известной формуле

$$D = \exp\left(-2 \int_a^b |\rho(z)| dz\right),$$

где  $\rho(z) = \sqrt{(\varepsilon + eEz)^2 - m^2 - p_{\perp}^2}$  и  $p_{\perp}^2 = p_x^2 + p_y^2$  (предполагается, что  $p_x, p_y \neq 0$ ). Элементарный расчет показывает, что

$$D = \exp\left(-\pi \frac{p_{\perp}^2 + m^2}{|e|E}\right).$$

Этот результат совпадает с точным результатом, полученным в предыдущем пункте. Такой же формулой определяется вероятность проникновения частицы из области  $x \geq b$  в область  $x \leq a$ .

Для того чтобы электроны не могли самопроизвольно переходить в нижний континуум, следует предположить, что все состояния нижнего континуума заняты электронами. Этим определяется электронно-позитронный вакуум. Под влиянием электрического поля электрон из нижнего континуума может перейти в верхний континуум, при этом остается незаполненным некоторое состояние в нижнем континууме. Такое незанятое состояние будет вести себя как позитрон. Иными словами, под действием электрического поля может возникать электронно-позитронная пара. Среднее число пар, создаваемых в элементе фазового объема  $d\tau = V d^3p / (2\pi)^3$ , равно

$$N = 2 \int D(\mathbf{p}) \frac{V d^3p}{(2\pi)^3}$$

(множитель 2 связан с тем, что спин электрона равен  $1/2$ ). Интеграл по  $d p_z$  можно заменить здесь на  $|e|ET$ , где  $T$  — «время действия» поля, ускоряющего электрон вдоль оси  $z$ . Действительно, только те электроны, проекция импульса которых  $p_z$  лежит в интервале  $-|e|ET \leq p_z \leq 0$ , сумеют остановиться и протуннелировать за время  $T$ . Поэтому в результате мы получим следующее выражение для среднего значения числа пар, рождаемых полем в единице объема в единицу времени:

$$n = \frac{N}{VT} = \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{|e|E}\right).$$

Величина  $1 - D(\mathbf{p})$  представляет собой, очевидно, вероятность того, что состояние в нижнем континууме с импульсом  $\mathbf{p}$  и поля-

ризации  $\mu$  останется занятым. Поэтому вероятность того, что нижний континуум вообще не изменит своего состояния, будет равна

$$\omega_0 = \prod_{p, \mu} (1 - D(p)) = \exp \left[ \sum_{p, \mu} \ln (1 - D(p)) \right].$$

Эту величину, представляющую собой вероятность того, что вакуум останется вакуумом, можно представить в виде [23—25]

$$\omega_0 = \exp(-\Omega L),$$

где  $\Omega = VT$  и

$$L = -\frac{|e|E}{2\pi^2} \int \ln \left[ 1 - \exp \left( -\pi \frac{p_{\perp}^2 + m^2}{|e|E} \right) \right] dp_{\perp}^2 = \\ = \frac{(eE)^2}{2\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left( -\frac{\pi m^2}{|e|E} n \right).$$

## § 1.7. Рассеяние электронов

**1.7.1. Расходящиеся и сходящиеся волны.** До сих пор мы рассматривали только такие состояния электрона в центральном поле, которым соответствуют определенные значения энергии, момента и четности. В случае инфинитного движения больший интерес представляют, однако, состояния, в которых электрон вдали от силового центра имеет определенный импульс и определенную поляризацию. Мы перейдем теперь к рассмотрению таких состояний.

Если электрон, движущийся в некотором центральном поле, обладает определенной энергией  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > m$ ), то его волновая функция  $\psi(\mathbf{r})$  может быть, очевидно, представлена в виде суперпозиции волновых функций  $\psi_{\varepsilon j l m}(\mathbf{r})$ , описывающих состояния электрона (в данном поле) с определенными энергией, моментом и четностью,

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{j l m} a_{j l m} \psi_{\varepsilon j l m}(\mathbf{r}),$$

где  $a_{j l m}$  — некоторые коэффициенты. Мы хотим, чтобы волновая функция  $\psi(\mathbf{r})$  описывала состояние электрона, имеющего на бесконечности определенный импульс и определенную поляризацию, и, кроме того, чтобы  $\psi(\mathbf{r})$  обладала определенной асимптотикой при  $r \rightarrow \infty$ . Особенно важны два случая: когда функция  $\psi(\mathbf{r})$  при  $r \rightarrow \infty$  имеет вид либо суперпозиции плоской и сферической расходящейся волн

$$\psi^+(\mathbf{r}) \sim u^{\mu} e^{i p r} + G^+(n) \frac{e^{i p r}}{r}, \quad (1.7.1)$$

либо суперпозиции плоской и сферической сходящейся волн

$$\psi^-(\mathbf{r}) \sim u^{\mu} e^{i p r} + G^-(n) \frac{e^{-i p r}}{r}. \quad (1.7.2)$$

Здесь  $\rho = |\mathbf{p}| = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$ ,  $\rho$  — импульс электрона на бесконечности,  $u^\mu$  — биспинор, описывающий состояние свободного электрона с импульсом  $\rho$  и поляризацией  $\mu$ , и, наконец,  $G^+(\mathbf{n})$  и  $G^-(\mathbf{n})$  — некоторые биспиноры, зависящие от  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ .

Покажем, как найти коэффициенты  $a_{j\ell M}$ , предполагая, что функция  $\psi(\mathbf{r})$  имеет заданную асимптотику.

Вспользуемся для этого асимптотическим разложением (1.4.18) плоской волны по сферическим волнам при  $\rho r \gg 1$

$$u^\mu e^{i\rho r} \approx \frac{4\pi}{\rho r} \sum_{j\ell M} (\Omega_{j\ell M}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) \begin{pmatrix} i^l \sqrt{\varepsilon + m} \Omega_{j\ell M}(\mathbf{n}) \sin\left(\rho r - l \frac{\pi}{2}\right) \\ -i^{l'} \sqrt{\varepsilon - m} \Omega_{j\ell' M}(\mathbf{n}) \sin\left(\rho r - l' \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

и асимптотическим представлением функции  $\psi_{ej\ell M}(\mathbf{r})$  при  $\rho r \gg 1$

$$\psi_{ej\ell M}(\mathbf{r}) \approx \frac{N}{r} \begin{pmatrix} i^l \sqrt{\varepsilon + m} \Omega_{j\ell M}(\mathbf{n}) \sin\left(\rho r - \frac{l\pi}{2} + \delta\right) \\ -i^{l'} \sqrt{\varepsilon - m} \Omega_{j\ell' M}(\mathbf{n}) \sin\left(\rho r - \frac{l'\pi}{2} + \delta\right) \end{pmatrix},$$

где  $\delta$  — фаза на бесконечности, определяющаяся характером силового поля и зависящая от  $\varepsilon$ ,  $j$ ,  $l$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon, j, l) \equiv \delta_{j\ell}$ , и  $N$  — множитель, зависящий от нормировки функции  $\psi_{ej\ell M}(\mathbf{r})$ , который мы будем считать далее равным единице.

Образовав разность  $u^\mu e^{i\rho r} - \sum a_{j\ell M} \psi_{ej\ell M}(\mathbf{r})$ , мы должны потребовать, чтобы в случае асимптотики (1.7.1) в ней исчезали все слагаемые, содержащие  $e^{-i\rho r}$ , а в случае асимптотики (1.7.2) — все слагаемые, содержащие  $e^{i\rho r}$ . Это приводит к следующим значениям коэффициентов  $a_{j\ell M}$ : в первом случае

$$a_{j\ell M}^+ = \frac{4\pi}{\rho} e^{i\delta} (\Omega_{j\ell M}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})),$$

во втором случае

$$a_{j\ell M}^- = \frac{4\pi}{\rho} e^{-i\delta} (\Omega_{j\ell M}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})).$$

Таким образом, ряд

$$\psi_{\rho\mu}^+(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\rho} \sum_{j\ell M} (\Omega_{j\ell M}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) e^{i\delta} \psi_{ej\ell M}(\mathbf{r}) \quad (1.7.3)$$

имеет асимптотику (1.7.1), а ряд

$$\psi_{\rho\mu}^-(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\rho} \sum_{j\ell M} (\Omega_{j\ell M}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) e^{-i\delta} \psi_{ej\ell M}(\mathbf{r}) \quad (1.7.4)$$

— асимптотику (1.7.2).

Волновые функции  $\psi_{\rho\mu}^+(\mathbf{r})$  и  $\psi_{\rho\mu}^-(\mathbf{r})$  являются точными решениями уравнений Дирака во внешнем поле, относящимися к непрерывному спектру. При различных  $\rho$  и  $\mu$  они образуют две полные

ортогональные системы функций, по которым может быть разложено произвольное решение уравнения Дирака.

Мы будем далее пользоваться точными волновыми функциями  $\psi_{\rho\mu}^+(r)$  и  $\psi_{\rho\mu}^-(r)$  при вычислении матричных элементов, характеризующих различные процессы взаимодействия электронов и фотонов. При этом, как будет подробно разъяснено в п. 4.3.9, в качестве волновых функций частиц, образующихся в результате какого-либо процесса, следует всегда брать функции вида  $\psi_{\rho\mu}^+(r)$ , а в качестве волновых функций частиц, исчезающих в результате какого-либо процесса, — функции вида  $\psi_{\rho\mu}^-(r)$ .

В случае кулоновского поля ядра функции  $\psi_{\rho\mu}^+(r)$  и  $\psi_{\rho\mu}^-(r)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{\rho\mu}^+(r) &= \sum_{iM} \frac{4\pi i^{l+1}}{\rho} \sqrt{\varepsilon R} \exp\left[-i\left(\eta + \frac{\pi\gamma}{2} + \arg \Gamma(\gamma + i\xi)\right)\right] \times \\ &\quad \times (\Omega_{iM}^*(v) v^\mu(\rho)) \psi_{iM}(r), \\ \psi_{\rho\mu}^-(r) &= \sum_{iM} \frac{4\pi (-i)^{l+1}}{\rho} \sqrt{\varepsilon R} \exp\left[-i\left(3\eta - \frac{\pi\gamma}{2} - \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \arg \Gamma(\gamma + i\xi)\right)\right] (\Omega_{iM}^*(v) v^\mu(\rho)) \psi_{iM}(r), \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

где использованы обозначения § 1.5. Просуммировать эти ряды в общем виде невозможно. Однако, если по характеру физической задачи известно, что в исследуемом процессе главную роль играют большие прицельные параметры (которым соответствуют большие значения углового момента электрона), то эти ряды могут быть приближенно заменены функциями [26]

$$\begin{aligned} \Phi_{\rho\mu}^+(r) &= \\ &= \Gamma(1 - i\xi) e^{\pi\xi/2} e^{i\rho r} \left(1 - \frac{i\alpha\nabla}{2\varepsilon}\right) \mathcal{F}[i\xi, 1; -i(\rho r - \rho r)] u^\mu(\rho), \\ \Phi_{\rho\mu}^-(r) &= \\ &= \Gamma(1 + i\xi) e^{\pi\xi/2} e^{i\rho r} \left(1 - \frac{i\alpha\nabla}{2\varepsilon}\right) \mathcal{F}[i\xi, 1; -i(\rho r + \rho r)] u^\mu(\rho). \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Смысл этого приближения (оно называется приближением Фарри — Зоммерфельда — Мауэ или FSM; такое же название имеют и функции (1.7.6)) заключается в том, что если произвести разложения функций (1.7.6) в ряды по шаровым спинорам, то члены этих разложений будут существенно отличаться от соответствующих членов рядов (1.7.5) только при  $l \lesssim \frac{1}{2}(\alpha Z)^2$ ; члены же с  $l \gtrsim \frac{1}{2}(\alpha Z)^2$  будут практически совпадать в обоих разложениях. Так как моменту  $l$  соответствует прицельный параметр  $\rho \sim l/\rho$ , то использование функций  $\Phi_{\rho\mu}^\pm(r)$  вместо рядов (1.7.5) будет приводить к малым ошибкам, если эффективные значения прицельного параметра в исследуемом конкретном процессе удовлетворяют неравенству  $\rho \gtrsim \frac{1}{2}(\alpha Z)^2/\varepsilon$ .

Заметим, что так как силовое поле обращается при  $r \rightarrow \infty$  в нуль, то расходящаяся и сходящаяся волны удовлетворяют уравнениям Дирака для свободного электрона

$$(\gamma \nabla - \gamma_4 \varepsilon + m) G^\pm(\mathbf{n}) \frac{e^{\pm i p r}}{r} = 0.$$

Но при  $r \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{i} \nabla G^\pm(\mathbf{n}) \frac{e^{\pm i p r}}{r} \sim n p G^\pm(\mathbf{n}) \frac{e^{\pm i p r}}{r}.$$

Поэтому биспинорные амплитуды  $G^\pm(\mathbf{n})$  удовлетворяют уравнениям

$$(\pm p n \gamma + i \varepsilon \gamma_4 - i m) G^\pm(\mathbf{n}) = 0.$$

Сравнение этих уравнений с (1.1.24) для биспинора  $u(\mathbf{p})$  (при  $\mathbf{p} = \pm p \mathbf{n}$ ) показывает, что амплитуды  $G^+(\mathbf{n})$  и  $G^-(\mathbf{n})$  можно представить в виде, аналогичном (1.1.27):

$$G^\pm(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m} F^\pm(\mathbf{n}) \\ \pm \sqrt{\varepsilon - m} \sigma n F^\pm(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \quad (1.7.7)$$

где  $F^\pm(\mathbf{n})$  — двухкомпонентные спинорные амплитуды.

Используя ряды (1.7.3) и (1.7.4) и асимптотическое представление (1.4.11) функций  $\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ , легко убедиться, что

$$F^+(\mathbf{n}) = \frac{2\pi}{i p} \sum_{j l M} (\Omega_{j l M}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) (e^{2i\delta_{j l}} - 1) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}), \quad (1.7.8)$$

$$F^-(\mathbf{n}) = \frac{2\pi}{i p} \sum_{j l M} (-1)^{l+1} (\Omega_{j l M}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) (e^{-2i\delta_{j l}} - 1) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}). \quad (1.7.9)$$

Заметим, что биспинор  $G^+(\mathbf{n})$  можно разложить по состояниям с определенной поляризацией  $\mu$ :

$$G^+(\mathbf{n}) = \frac{1}{2m} \sum_{\mu} u^\mu(\mathbf{n}) (\bar{u}^\mu(\mathbf{n}) G^+(\mathbf{n})). \quad (1.7.10)$$

**1.7.2. Амплитуда и сечение рассеяния.** Волновая функция  $\psi_{\rho \mu}^+(\mathbf{r})$  описывает процесс упругого рассеяния частиц в центральном поле. Первый член асимптотической формулы (1.7.1) (падающая волна) отвечает частицам, «падающим» из бесконечности на рассеиватель, а расходящаяся волна — рассеянными частицам. По смыслу обоих слагаемых, входящих в эту формулу, величина  $j_0 = \bar{u} \gamma u$ , где  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/p$ , представляет собой плотность потока падающих частиц на бесконечности. Величина же

$$dN^\mu = \frac{1}{(2m)^2} \bar{u}' \gamma n u' |\bar{u}' G^+(\mathbf{n})|^2 d\omega,$$

где  $u' = u^\mu(\mathbf{n})$ , представляет собой число частиц с поляризацией  $\mu$ , рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла  $d\omega$  около направления  $\mathbf{n}$ . (Мы использовали при этом разложение биспи-

нора  $G^+(\mathbf{n})$  (1.7.10) по состояниям с определенной поляризацией  $\mu$ .)

Разделив  $dN^\mu$  на  $j_0$ , получим дифференциальное сечение рассеяния частиц, обладающих в конечном состоянии поляризацией  $\mu$ :  $d\sigma^\mu = dN^\mu/j_0$ .

При нормировке  $\bar{u}\gamma\nu u = 2\rho$  дифференциальное сечение приобретает вид

$$d\sigma^{(\mu)} = |f(\mathbf{n}, \mu)|^2 d\omega, \quad (1.7.11)$$

$$f(\mathbf{n}, \mu) = \frac{1}{2m} \bar{u}' G^+(\mathbf{n}). \quad (1.7.12)$$

Величину  $f(\mathbf{n}, \mu)$  мы будем называть амплитудой рассеяния.

Амплитуда рассеяния определяется асимптотикой волновой функции  $\psi(\mathbf{r})$  при  $r \rightarrow \infty$ . Но ее можно связать также с волновой функцией частицы в области, где отлична от нуля потенциальная энергия  $U(\mathbf{r})$ . Действительно, записав решение уравнения Дирака (1.3.31) в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = ue^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} - \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \gamma_4 U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3r'$$

и используя формулу (1.3.37), из которой следует

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{4\pi} (\gamma_4 \varepsilon - i\mathbf{p}'\boldsymbol{\gamma} + m) \frac{e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - \mathbf{p}'\mathbf{r}')}}{r},$$

где  $\mathbf{p}' = \rho\mathbf{n}$ , имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = ue^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} (\gamma_4 \varepsilon - i\mathbf{p}'\boldsymbol{\gamma} + m) \gamma_4 \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{r} \int e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3r'.$$

Отсюда легко заключить, что

$$G^+(\mathbf{n}) = -\frac{1}{4\pi} (\gamma_4 \varepsilon - i\mathbf{p}'\boldsymbol{\gamma} + m) \gamma_4 \int d^3r' e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'). \quad (1.7.13)$$

Так как  $\bar{u}' (\gamma_4 \varepsilon - i\mathbf{p}'\boldsymbol{\gamma} - m) = 0$ , то

$$f(\mathbf{n}, \mu) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}'} \bar{u}' \gamma_4 \psi(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}'). \quad (1.7.14)$$

Можно связать также  $f(\mathbf{n}, \mu)$  с функцией  $\Phi(\mathbf{r})$ , входящей в (1.3.18):

$$f(\mathbf{n}, \mu) = -\frac{1}{8\pi m} \int d^3r e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}) \bar{u}' \gamma_4 [\gamma_4 (\varepsilon - U(\mathbf{r})) - \boldsymbol{\gamma}\nabla + m] \Phi(\mathbf{r}).$$

Выполняя в слагаемом, содержащем  $\boldsymbol{\gamma}\nabla$ , интегрирование по частям и учитывая, что  $\bar{u}' (\gamma_4 \varepsilon - i\mathbf{p}'\boldsymbol{\gamma} - m) = 0$ , получим

$$f(\mathbf{n}, \mu) = -\frac{\varepsilon}{4\pi m} \int d^3r e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}'} \bar{u}' \left[ \left(1 - \frac{U}{2\varepsilon}\right) U + \frac{\gamma_4 \boldsymbol{\gamma}(\nabla U)}{2\varepsilon} \right] \Phi(\mathbf{r}). \quad (1.7.15)$$

Усреднив  $d\sigma^{(\mu)}$  по поляризациям частицы в конечном состоянии, найдем дифференциальное сечение рассеяния падающих частиц

с поляризацией  $\nu$

$$d\sigma = \frac{1}{8m^2} \bar{G}^+(\mathbf{n}) (\varepsilon\gamma_4 - i\mathbf{p}'\boldsymbol{\gamma} + m) G^+(\mathbf{n}) d\omega. \quad (1.7.16)$$

Используя теперь представление (1.7.7) для функции  $G^+(\mathbf{n})$ , получим

$$d\sigma = |F(\mathbf{n})|^2 d\omega, \quad (1.7.17)$$

где вместо  $F^+(\mathbf{n})$  использовано обозначение  $F(\mathbf{n})$ .

Связь между спинорными амплитудами рассеянной и падающей волн  $F(\mathbf{n})$  и  $\nu(\mathbf{v})$  (мы опускаем в дальнейшем значок  $\mu$  у  $\nu(\mathbf{v})$ ) удобно представить в виде

$$F(\mathbf{n}) = R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \nu(\mathbf{v}), \quad (1.7.18)$$

где  $R(\mathbf{n}, \mathbf{v})$  — некоторая двумерная матрица. Она должна, очевидно, иметь следующую структуру:

$$R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{n}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \sigma,$$

где  $a$  — скаляр, а  $a_1$  — аксиальный вектор. Но единственным аксиальным вектором, который можно построить в задаче о рассеянии, является вектор  $[\mathbf{v}\mathbf{n}]$ . Поэтому  $R(\mathbf{n}, \mathbf{v})$  можно записать в виде

$$R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = a(\vartheta) - ib(\vartheta) [\mathbf{v}\mathbf{n}] \sigma, \quad (1.7.19)$$

или

$$R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = a(\vartheta) - ib(\vartheta) \sin \vartheta (\sigma_y \cos \varphi - \sigma_x \sin \varphi),$$

где  $\vartheta$  и  $\varphi$  — сферические координаты вектора  $\mathbf{n}$  в системе, в которой вектор  $\mathbf{v}$  направлен вдоль полярной оси. Функции  $a(\vartheta)$  и  $b(\vartheta)$  можно найти, сравнивая (1.7.18) с (1.7.8). Используя явный вид шаровых спиноров  $\Omega_{jlm}$  и матриц  $\sigma_i$ , получим

$$\begin{aligned} a(\vartheta) &= \frac{1}{2ip} \sum_{jl} (e^{2i\delta_{jl}} - 1) |\kappa| P_l(\cos \vartheta), \\ b(\vartheta) &= \frac{1}{2ip} \sum_{jl} (e^{2i\delta_{jl}} - 1) \frac{\kappa}{|\kappa|} P'_l(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (1.7.20)$$

где  $P_l(x)$  — полином Лежандра,  $P'_l(x) = dP_l(x)/dx$ ,  $x = \cos \vartheta$ .

Таким образом, амплитуда рассеяния и дифференциальное сечение полностью определяются значениями фаз  $\delta_{jl}$ . Через фазы  $\delta_{jl}$  можно выразить также интегральное сечение рассеяния  $\sigma = \int |F|^2 d\omega$ :

$$\sigma = \frac{4\pi}{p^2} \sum_{jl} |\kappa| \sin^2 \delta_{jl}. \quad (1.7.21)$$

Если для всех  $l$   $\delta_{l+1/2, l} = \delta_{l-1/2, l} \equiv \delta_l$ , то дифференциальное сечение рассеяния имеет вид

$$d\sigma = |a(\vartheta)|^2 d\omega, \quad (1.7.22)$$

где

$$a(\vartheta) = \frac{1}{2ip} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \vartheta), \quad (1.7.23)$$

а полное сечение рассеяния определяется формулой

$$\sigma = \frac{4\pi}{p^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (1.7.24)$$

Сравнение формул (1.7.23) и (1.7.24) показывает, что

$$\sigma = \frac{4\pi}{p} \operatorname{Im} a(\vartheta) |_{\vartheta=0}. \quad (1.7.25)$$

Это соотношение, связывающее интегральное сечение с амплитудой упругого рассеяния на нулевой угол, носит название оптической теоремы.

**1.7.3. Поляризация и азимутальная асимметрия.** Характерной чертой рассеяния электронов является азимутальная асимметрия, т. е. зависимость дифференциального сечения рассеяния от угла  $\varphi$ . Согласно (1.7.19) угол  $\varphi$  содержит матрица  $R(\mathbf{n}, \mathbf{v})$ , определяющая связь между амплитудами падающей и рассеянной волн, причем коэффициенты при  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  содержат операторы спина электрона. Поэтому азимутальная асимметрия рассеяния тесно связана с характером поляризации падающей волны.

Дифференциальное сечение рассеяния легко связать с состоянием поляризации падающей волны, если воспользоваться поляризационной матрицей плотности электрона  $\rho$ . Из (1.7.18) следует, что  $|F|^2 = v^* R^+ \rho v$ . Заменяя произведения компонент спинора  $v_\alpha v_\beta^*$  на элементы матрицы плотности  $\rho_{\alpha\beta}$ , получим, используя (1.7.17),

$$d\sigma = \operatorname{Sp} (R \rho R^+) d\omega. \quad (1.7.26)$$

Подставив сюда  $\rho = \frac{1}{2}(1 + \xi\sigma)$ , где  $\xi$  — вектор поляризации (удвоенный средний спин в системе покоя электрона), и выражение (1.7.19) для  $R$ , получим

$$d\sigma = Q(\vartheta) (1 + \Delta(\vartheta) \xi[\mathbf{v}\mathbf{n}]) d\omega = \\ = Q(\vartheta) \{1 + \Delta(\vartheta) (\xi_y \cos \varphi - \xi_x \sin \varphi)\} d\omega, \quad (1.7.27)$$

где

$$Q(\vartheta) = |a|^2 + |b|^2, \quad \Delta(\vartheta) = \frac{i(ab^* - a^*b)}{|a|^2 + |b|^2} \sin \vartheta. \quad (1.7.28)$$

Из (1.7.27) видно, что рассеивающая система является «анализатором» поляризации. Измерение азимутальной асимметрии дает возможность определить составляющую вектора поляризации  $\xi$ , перпендикулярную к плоскости рассеяния. Выбирая для  $\varphi$  значения 0 и  $\pi$ , получим из (1.7.27)

$$\Delta(\vartheta) \xi_y = \frac{d\sigma(\vartheta, 0) - d\sigma(\vartheta, \pi)}{d\sigma(\vartheta, 0) + d\sigma(\vartheta, \pi)};$$

при  $\varphi = \pm \pi/2$  найдем

$$\Delta(\vartheta) \xi_x = \frac{d\sigma(\vartheta, -\pi/2) - d\sigma(\vartheta, \pi/2)}{d\sigma(\vartheta, -\pi/2) + d\sigma(\vartheta, \pi/2)}.$$

Продольную составляющую вектора поляризации  $\xi_x$  нельзя определить при однократном рассеянии.

Если  $\Delta(\vartheta) = 0$ , то рассеяние не обладает азимутальной асимметрией. Это имеет место, в частности, в нерелятивистском приближении, когда рассеянию в центральном поле отвечают одинаковые фазы  $\delta_{jl}$  при данном  $l$  и различных  $j$ . При этом, согласно (1.7.20),  $b = 0$  и, следовательно,  $\Delta = 0$ .

Кроме того, азимутальная асимметрия отсутствует в случае малых фаз  $\delta_{jl}$ . Действительно, если  $\exp(2i\delta_{jl}) - 1 \approx 2i\delta_{jl}$ , то  $a$  и  $b$  вещественны и, согласно (1.7.28),  $\Delta(\vartheta) = 0$ .

Заметим, что при  $\vartheta \rightarrow 0$  величина  $\Delta \rightarrow 0$ , так как  $\Delta(\vartheta)$  содержит множитель  $\sin \vartheta$ .

Вследствие зависимости матрицы  $R$  от  $\sigma$  при рассеянии меняется состояние поляризации электрона. Поляризационная матрица плотности  $\rho'$  рассеянного электрона может быть определена как  $\rho'_{\alpha\beta} = F^\alpha F^\beta / |F|^2$ , где  $F^\alpha$  — составляющие спинора  $F$ . Из (1.7.18) находим

$$\rho' = \frac{R\rho R^+}{\text{Sp } R\rho R^+}. \quad (1.7.29)$$

Поэтому вектор поляризации  $\xi'$  рассеянного электрона равен

$$\xi' = \frac{\text{Sp } R\rho R^+ \sigma}{\text{Sp } R\rho R^+}. \quad (1.7.30)$$

Если падающий электрон не поляризован, то

$$\xi' = \Delta(\vartheta) \tau, \quad \tau = \frac{[vn]}{\sin \vartheta}, \quad (1.7.31)$$

т. е. рассеянный электрон поляризован в направлении, перпендикулярном к плоскости рассеяния, и степень поляризации равна  $\Delta(\vartheta)$ . Таким образом, рассеивающая система является «поляризатором».

Используя (1.7.31) и (1.7.27), мы приходим к заключению, что вторичное рассеяние неполяризованного электрона будет обладать азимутальной асимметрией. Дифференциальное сечение вторичного рассеяния определяется следующей формулой:

$$d\sigma(n, n') = Q(\vartheta') (1 + \Delta(\vartheta) \Delta(\vartheta') (\tau\tau')) d\omega', \quad (1.7.32)$$

где  $\cos \vartheta' = (nn')$ ,  $\tau' = [nn']/\sin \vartheta'$ ,  $n'$  — единичный вектор в направлении вторичного рассеяния.

В общем случае при наличии начальной поляризации

$$\xi' = \frac{(|a|^2 - |b|^2) \xi + i(ab^* - a^*b) \tau + (ab^* + a^*b) [\tau \xi] + 2|b|^2 (\xi \tau)}{|a|^2 + |b|^2 + i(ab^* - a^*b) \xi \tau}.$$

**1.7.4. Упругое рассеяние в борновском приближении.** Полученные выше формулы для сечения рассеяния электронов являются точными, но они содержат фазы на бесконечности  $\delta_{jl}$ , весьма сложным образом зависящие от внешнего поля. Упрощение возникает, если рассеивающее поле можно трактовать как малое возмущение и, следовательно, можно пользоваться борновским приближением. Фазы в этом случае малы,  $\delta_{jl} \ll 1$ , и сечение рассеяния может быть выражено непосредственно через потенциал внешнего поля. Действительно, согласно (1.3.39), (1.7.13) и (1.7.14) в первом борновском приближении

$$G^+(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} (i\gamma\mathbf{p}' - \gamma_4\varepsilon - m) \gamma_4 u U(\mathbf{q}), \quad (1.7.33)$$

$$f(\mathbf{n}, \mu) = -\frac{1}{4\pi} \bar{u}' \gamma_4 u U(\mathbf{q}), \quad (1.7.34)$$

где  $U(\mathbf{q})$  — фурье-компоненты потенциальной энергии  $U(\mathbf{r}) = eA_0(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ .

Выражая в (1.7.33) биспинорную амплитуду рассеяния  $G^+(\mathbf{n})$  через спинорную (двухкомпонентную) амплитуду  $F(\mathbf{n})$  согласно (1.7.17), а также биспинор  $u$  через спинор  $v(\mathbf{v})$  согласно (1.1.27), мы приходим к выражению вида (1.7.18)

$$F(\mathbf{n}) = R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) v(\mathbf{v}),$$

где  $R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = a(\vartheta) - ib(\vartheta) [\mathbf{v}\mathbf{n}] \sigma$ , причем

$$a(\vartheta) = -\frac{U(\mathbf{q})}{4\pi} [\varepsilon + m + (\varepsilon - m) \cos \vartheta], \quad b(\vartheta) = -\frac{U(\mathbf{q})}{4\pi} (\varepsilon - m). \quad (1.7.35)$$

Так как аргументы величин  $a(\vartheta)$  и  $b(\vartheta)$  одинаковы, то  $\Delta(\vartheta) = 0$  и сечение рассеяния имеет, согласно (1.7.27), вид

$$d\sigma = Q(\vartheta) d\vartheta, \quad Q(\vartheta) = |a|^2 + |b|^2 = \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) U^2(\mathbf{q}) \quad (1.7.36)$$

( $v = p/\varepsilon$  — скорость частицы).

**1.7.5. Упругое рассеяние в эйкональном приближении.** Если энергия частицы достаточно велика, а угол рассеяния мал, то для волновой функции можно воспользоваться высокоэнергетическим приближением (см. п. 1.3.4). Подставляя выражение (1.3.27) для  $\psi^E(\mathbf{r})$  в общую формулу для амплитуды рассеяния (1.7.14) и отбрасывая члены порядка  $1/p$ , получим следующее выражение для амплитуды рассеяния в эйкональном приближении:

$$f(\mathbf{n}, \mu) = -\frac{\bar{u}' \gamma_4 u}{4\pi} \int d\varphi dz e^{iq_0 U(\mathbf{r})} e^{i\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.7.37)$$

где

$$\chi_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^z U(\rho, z') dz'$$

и ось  $z$  параллельна  $\rho$ ; множитель  $\exp(iq_z z)$  мы заменили на единицу, так как компонента переданного импульса  $q_z = q^2/2\rho$  пропорциональна  $1/\rho$ . Выполнив в (1.7.37) интегрирование по  $z$ , получим

$$f(\mathbf{n}, \mu) = \frac{iv}{4\pi} \bar{u}' \gamma_4 u \int d\rho e^{iq_0 \rho} (1 - e^{i\chi_0(\rho)}), \quad (1.7.38)$$

$$\chi_0(\rho) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} U(\rho, z) dz. \quad (1.7.39)$$

Подставляя это выражение в (1.7.11) и производя суммирование по поляризациям, получим дифференциальное сечение упругого рассеяния быстрых частиц в эйкональном приближении

$$d\sigma = |f(\mathbf{n})|^2 d\omega, \quad f(\mathbf{n}) = \frac{ip}{2\pi} \int d\rho e^{iq_0 \rho} (1 - e^{i\chi_0(\rho)}). \quad (1.7.40)$$

Учет в формулах (1.3.20) и (1.7.40) членов порядка  $1/\rho$  приводит к следующему выражению для амплитуды рассеяния [27, 28]:

$$f(\mathbf{n}) = -\frac{ip}{2\pi} \int d\rho e^{iq_0 \rho/\hbar} \{e^{i[\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho)]/\hbar} - 1\}, \quad (1.7.41)$$

где

$$\chi_1(\rho) = \frac{1}{\rho v} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ z (\nabla_{\perp} U) \left( \nabla_{\perp} \int_{-\infty}^z U dz' \right) - \frac{1-v^2}{2v} U^2 \right] \quad (1.7.42)$$

и предполагается, что  $U(\rho, z) = U(\rho, -z)$ .

В случае потенциала  $U(\mathbf{r}) = U(|\rho|, z)$  в (1.7.41) можно выполнить интегрирование по углу между  $q_{\perp}$  и  $\rho$ . В результате получим

$$f(\mathbf{n}) = -ip \int_0^{\infty} \rho d\rho J_0(q_{\perp} \rho/\hbar) \{e^{i[\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho)]/\hbar} - 1\}, \quad (1.7.43)$$

где  $J_0(q_{\perp} \rho/\hbar)$  — функция Бесселя. (В формулах (1.7.41) и (1.7.43) мы явно выписали постоянную Планка  $\hbar$ .)

Эйкональное приближение, как уже отмечалось, справедливо в области малых углов рассеяния. Если малые углы рассеяния играют главную роль, то, используя (1.7.40), можно найти интегральное сечение рассеяния

$$\sigma = \int |f(\mathbf{n})|^2 d\omega.$$

Заменяя в этом случае  $d\omega$  на  $\vartheta d\vartheta d\phi$ , имеем  $d\omega = q_{\perp} dq_{\perp} d\phi/\rho^2$ , где  $q_{\perp} = \rho\vartheta$ . Выполнив теперь интегрирование по  $q_{\perp}$ , получим

$$\sigma = 2 \operatorname{Re} \int d\rho [1 - e^{i(\chi_0 + \chi_1)}]. \quad (1.7.44)$$

Это выражение находится в соответствии с оптической теоремой (1.7.25).

Приведем несколько предельных случаев эйкональной амплитуды рассеяния. Если  $|\chi_0| \ll \hbar$ , то

$$f(\mathbf{n}) = \frac{p}{2\pi\hbar} \int d\rho e^{iq\rho} [\chi_0(\rho) + \chi_1(\rho) + \dots]. \quad (1.7.45)$$

Так как величина  $\chi_0$  пропорциональна  $U$ , а  $\chi_1$  пропорциональна  $U^2$ , то первое слагаемое в выражении для  $f(\mathbf{n})$  соответствует первому борновскому приближению, а второе слагаемое — второму борновскому приближению.

Пусть теперь  $|\chi_0| \gg \hbar$  и  $|\chi_1| \gg \hbar$ , но по-прежнему  $|\chi_0| \gg |\chi_1|$ . Этот предельный случай ( $\hbar \rightarrow 0$ ) соответствует переходу к классической механике. При  $\hbar \rightarrow 0$  можно воспользоваться следующим асимптотическим представлением функции Бесселя:

$$J_0(x) |_{x \rightarrow \infty} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому амплитуда рассеяния (1.7.43) приобретает вид

$$f(\mathbf{n}) = -ip \int_0^\infty d\rho \sqrt{\frac{2\hbar\rho}{q_\perp}} \cos\left(\frac{q_\perp\rho}{\hbar} - \frac{\pi}{4}\right) [e^{i(\chi_0 + \chi_1)/\hbar} - 1].$$

Для вычисления входящего сюда интеграла можно воспользоваться методом стационарной фазы [29]. В результате получим

$$f(\mathbf{n}) = -ip \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{q_\perp} \left| \frac{d\tilde{\rho}}{dq_\perp} \right|} \exp\left\{-i\frac{\pi}{4} - \frac{i}{\hbar} [q_\perp \tilde{\rho} - \chi_0(\tilde{\rho}) - \chi_1(\tilde{\rho})]\right\}, \quad (1.7.46)$$

где  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(q_\perp)$  определяется из условия стационарности фазы

$$q_\perp = \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} (\chi_0(\tilde{\rho}) + \chi_1(\tilde{\rho})) \right|. \quad (1.7.47)$$

Дифференциальное сечение при этом совпадает с результатом, даваемым классической теорией рассеяния:

$$d\sigma = 2\pi\tilde{\rho}(q_\perp) \left| \frac{d\tilde{\rho}(q_\perp)}{dq_\perp} \right| dq_\perp. \quad (1.7.48)$$

Этой формулой можно пользоваться, если  $q_\perp \tilde{\rho}(q_\perp) \gg \hbar$ .

**1.7.8. Рассеяние в кулоновском поле ядра.** Рассмотрим теперь рассеяние электронов в кулоновском поле ядра, когда

$$U(r) = -Z\alpha/r, \quad \alpha = e^2/4\pi.$$

Если  $Z$  невелико, так что  $Z\alpha/\hbar v \ll 1$ , то можно пользоваться борновским приближением. В этом случае, с рассмотрения кото-

рого мы начнем, сечение рассеяния определяется величиной

$$U = -Z\alpha \int \frac{d^3x}{r} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}},$$

которая, как легко видеть, равна

$$U = -\frac{4\pi Z\alpha}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2}. \quad (1.7.49)$$

Подставив это значение  $U$  в формулу (1.7.36), получим дифференциальное сечение рассеяния электронов в кулоновском поле ядра в первом борновском приближении [30]

$$d\sigma = \left(\frac{Z\alpha}{2pv}\right)^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \frac{d\omega}{\sin^4(\vartheta/2)}. \quad (1.7.50)$$

Эта формула только множителем  $1 - v^2 \sin^2(\vartheta/2)$ , имеющим чисто кинематическое происхождение, отличается от классической формулы Резерфорда.

Как отмечалось выше, в рассматриваемом приближении величина  $\Delta(\vartheta)$ , определяющая азимутальную асимметрию рассеяния, равна нулю. Эта асимметрия появляется только в следующих приближениях теории возмущений.

Приведем результаты вычислений сечения рассеяния  $d\sigma$ , т. е. величин  $Q(\vartheta)$  и  $\Delta(\vartheta)$  с учетом второго приближения теории возмущений (т. е. с точностью до членов порядка  $(Z\alpha)^3$ ) [30, 31]:

$$Q(\vartheta) = \left(\frac{Z\alpha}{2pv}\right)^2 \left[1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \pm \pi Z\alpha \left(1 - \sin \frac{\vartheta}{2}\right) \sin \frac{\vartheta}{2}\right] \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)},$$

$$\Delta(\vartheta) = \mp 2Z\alpha \frac{v\sqrt{1-v^2}}{1-v^2 \sin^2(\vartheta/2)} \frac{\sin^3(\vartheta/2)}{\cos(\vartheta/2)} \ln \frac{1}{\sin(\vartheta/2)}. \quad (1.7.51)$$

Эти формулы определяют рассеяние как электронов, так и позитронов (в последнем случае величины, пропорциональные  $Z\alpha$ , должны быть взяты с нижним знаком).

Простой вид имеет выражение дифференциального сечения в случае рассеяния на малые углы. В этом случае сечение рассеяния может быть получено с помощью борновского и эйконального приближений. Результат гласит:

$$d\sigma = \left(\frac{2Z\alpha}{pv}\right)^2 \left[1 \pm \frac{\pi Z\alpha}{2} \vartheta\right] \frac{d\omega}{\vartheta^4}, \quad \vartheta \ll 1. \quad (1.7.52)$$

(Второе слагаемое в квадратных скобках соответствует учету величины  $\chi_1(\rho)$ .)

Заметим, что формула (1.7.52) без поправки, обусловленной  $\chi_1$ , может быть получена также, если использовать приближение FSM (см. п. 1.7.1). Это связано с тем, что при выполнении условий (1.3.25) и (1.3.26) приближение FSM и эйкональное приближение совпадают. Действительно, если  $z/\rho p^2 \ll 1$ , то аргумент гипергео-

метрической функции  $\rho(r-z)$ , входящей в  $\psi^{\text{FSM}}$ , будет большим; поэтому справедлива асимптотическая формула [32]

$$\mathcal{F}(i\xi, 1; iy) = \frac{e^{-\pi\xi/2}}{\Gamma(1-i\xi)} e^{-i\xi \ln y} \left(1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right),$$

где  $y = pr - pr$ , и  $\psi^{\text{FSM}}(r)$  приобретает вид

$$\psi^{\text{FSM}}(r) = e^{ipr} \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon} \gamma_4 \gamma \nabla\right) u \exp\left[-i \frac{Z\alpha}{v} \ln \rho(r-z)\right].$$

Так как  $r \gg Z\alpha/pv$  и

$$\frac{i}{2\varepsilon} \gamma_4 \gamma_2 u = \left(\frac{1}{2\varepsilon v} + \frac{m}{2p} \gamma_4\right) u, \quad \gamma_2 = \frac{\gamma\rho}{q},$$

то вкладом в волновую функцию  $\psi^{\text{FSM}}$  слагаемого, содержащего матрицу  $\gamma_2$ , можно пренебречь. В результате находим

$$\psi^{\text{FSM}} = e^{ipr} \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon} \gamma_4 \gamma \nabla_{\perp}\right) u \exp\left[-i \frac{Z\alpha}{v} \ln \rho(r-z)\right]. \quad (1.7.53)$$

С другой стороны, функция  $\chi_0(r)$ , входящая в эйкональное приближение, в случае потенциала Кулона определяется формулой

$$\chi_0(r) = -\frac{Z\alpha}{v} \ln(r-z) + \text{const.}$$

Таким образом, с точностью до постоянного фазового множителя

$$\Phi^{\text{E}}(r) = \psi^{\text{FSM}}(r).$$

Отметим, что приближение FSM справедливо при любых значениях  $z$ , в то время как эйкональное приближение (E) справедливо при  $|z| < z$ , но в этой области функцию  $\Phi^{\text{E}}(r)$  можно вычислить более точно, чем функцию  $\psi^{\text{FSM}}(r)$ . Подчеркнем также, что приближение FSM относится только к кулоновскому полю, а в то время как эйкональное приближение годится для любого потенциала.

## § 2.1. Квантовая механика фотона

2.1.1. Уравнения Максвелла в форме Майорана. Перейдем теперь к изучению квантовомеханических свойств фотона. В основе описания свойств фотона должны, естественно, лежать уравнения Максвелла для пустоты. Поэтому эти уравнения играют для фотона такую же роль, как уравнение Дирака для свободного электрона, тем более, что уравнение Дирака можно рассматривать не только как уравнение движения отдельного электрона, но и как волновое уравнение, описывающее определенное поле, а именно электронно-позитронное поле.

Первый аспект — одночастичный — казалось бы, отсутствует в уравнениях Максвелла. В действительности, однако, это не так. Дело в том, что как уравнения Максвелла, так и уравнение Дирака (для свободной частицы) представляют собой дифференциальные уравнения первого порядка, и уравнениям Максвелла может быть придана форма уравнения Дирака для безмассовой частицы. Введем с этой целью вместо векторов электрического ( $E$ ) и магнитного ( $H$ ) полей векторы

$$\xi = E + iH, \quad \eta = E - iH.$$

Тогда уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= -\operatorname{rot} E, & \operatorname{div} H &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -\operatorname{rot} H, & \operatorname{div} E &= 0 \end{aligned}$$

примут вид

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \xi}{\partial t} &= s p \xi, & p \xi &= 0, \\ i \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -s p \eta, & p \eta &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где  $s$  — вектор-матрица с компонентами

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.2)$$

или

$$(s_i)_{kl} = -i\varepsilon_{ikl}. \quad (2.1.3)$$

Уравнения (2.1.1) аналогичны уравнениям Вейля (1.2.13) для нейтрино. Впервые в такой форме уравнения Максвелла были представлены Майорана \*) [1]. Вместо спиноров  $\xi$ ,  $\eta$  в них входят векторы  $\xi$ ,  $\eta$ , а роль спиновых матриц  $\sigma/2$  играют матрицы  $s$ . Поэтому естественно интерпретировать  $s$  как оператор спина фотона. Действительно, при бесконечно малом преобразовании Лоренца  $\xi$  и  $\eta$  испытывают преобразование

$$\xi \rightarrow \xi' = (I + is\delta\theta - s\delta\mathbf{v}) \xi, \quad \eta \rightarrow \eta' = (I + is\delta\theta + s\delta\mathbf{v}) \eta,$$

где  $\delta\theta$  и  $\delta\mathbf{v}$  — бесконечно малые угол поворота и скорость движения одной системы отсчета по отношению к другой. Эти формулы аналогичны формулам преобразования биспинора  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$$\xi \rightarrow \xi' = \left( I + i \frac{\sigma}{2} \delta\theta - \frac{\sigma}{2} \delta\mathbf{v} \right) \xi, \quad \eta \rightarrow \eta' = \left( I + i \frac{\sigma}{2} \delta\theta + \frac{\sigma}{2} \delta\mathbf{v} \right) \eta.$$

Отметим также, что при пространственном отражении  $\xi$  и  $\eta$  переходят друг в друга как в одном, так и в другом случае.

Операторы  $s_i$ , как легко видеть, удовлетворяют перестановочным соотношениям квантовомеханического момента

$$s_i s_k - s_k s_i = i\varepsilon_{ikl} s_l.$$

Из (2.1.2) следует, что

$$s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вспоминая, что  $s^2 = s(s+1)I$ , отсюда можно заключить, что спин фотона равен  $s=1$ .

**2.1.2. Волновая функция фотона.** Объединив  $\xi$  и  $\eta$  в единый бивектор

$$\Phi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

мы будем считать  $\Phi$  волновой функцией фотона.

В случае плоских волн  $\xi = \xi_k e^{ikx - i\omega t}$ ,  $\eta = \eta_k e^{ikx - i\omega t}$ ,  $\omega = |\mathbf{k}|$ , уравнения (2.1.1) приобретают вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}s) \xi_k &= \omega \xi_k, & \mathbf{k}\xi_k &= 0, \\ (\mathbf{k}s) \eta_k &= -\omega \eta_k, & \mathbf{k}\eta_k &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Эти уравнения показывают, что  $\xi_k$  описывает фотон с проекцией спина на импульс, т. е. со спиральностью  $+1$ , а  $\eta_k$  — фотон со спиральностью  $-1$ . Состояние со спиральностью нуль у фотона

\*) Неопубликованная рукопись Майорана, написанная между 1928 и 1932 годами, находится в «Доме Галилея» в Пизе.

отсутствует. Можно показать, что спиральность всякой безмассовой частицы может принимать только два значения  $\pm s$ , где  $s$  — спин частицы (фактически это есть определение спина безмассовой частицы).

Волновую функцию  $\Phi$  можно пронормировать согласно условию  $\int d^3k |\Phi|^2 = 1$ . Однако величину  $|\Phi|^2$  нельзя интерпретировать как плотность вероятности нахождения фотона в данной точке пространства. Это связано с тем, что плотность вероятности должна вести себя при преобразованиях Лоренца как временная составляющая 4-вектора, дивергенция которого равна нулю. Между тем из векторов электромагнитного поля нельзя составить билинейной комбинации, образующей 4-вектор, дивергенция которого равнялась бы нулю. (Величины плотности энергии  $\omega = 1/2 (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$  и плотности импульса поля  $\mathbf{s} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ , удовлетворяющие уравнению непрерывности, не образуют 4-вектора!)

Векторы  $\xi$  и  $\eta$ , образующие волновую функцию фотона  $\Phi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ , мы будем теперь считать произвольными комплексными векторами, не связанными между собой, и положим

$$\xi = E_{\xi} + iH_{\xi}, \quad \eta = E_{\eta} - iH_{\eta},$$

где пары  $(E_{\xi}, H_{\xi})$  и  $(E_{\eta}, H_{\eta})$  удовлетворяют уравнениям Максвелла. Определим далее комплексные поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ :

$$1/2 (\xi + \eta) = \mathcal{E}, \quad 1/2 (\xi - \eta) = \mathcal{H},$$

или

$$\mathcal{E} = 1/2 [E_{\xi} + E_{\eta} + i(H_{\xi} - H_{\eta})], \quad \mathcal{H} = 1/2 [H_{\xi} + H_{\eta} - i(E_{\xi} - E_{\eta})].$$

Поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  удовлетворяют, очевидно, уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= -\text{rot } \mathcal{E}, & \text{div } \mathcal{H} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \text{rot } \mathcal{H}, & \text{div } \mathcal{E} &= 0. \end{aligned}$$

Объединив  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  в тензор поля  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = -\mathcal{F}_{\nu\mu}$ ,  $\mathcal{F}_{ik} = \varepsilon_{ikl} \mathcal{H}_l$ ,  $\mathcal{F}_{i4} = -i\delta_i$ , можно переписать уравнения Максвелла в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_{\rho}} \mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \mathcal{F}_{\nu\rho} + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \mathcal{F}_{\rho\mu} = 0.$$

Тензор  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  можно связать с комплексным 4-вектором потенциала:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \mathcal{A}_{\mu}}{\partial x_{\nu}}.$$

Если наложить на  $\mathcal{A}_{\mu}$  условие Лоренца

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0, \tag{2.1.5}$$

то 4-вектор  $\mathcal{A}_\mu$  будет удовлетворять волновому уравнению

$$\square \mathcal{A}_\mu = 0. \quad (2.1.6)$$

4-вектор  $\mathcal{A}_\mu$  можно, очевидно, подвергнуть градиентному преобразованию

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu},$$

не изменяя тензора поля  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , если

$$\square \Lambda = 0.$$

**2.1.3. Плоские волны.** Рассмотрим решение волнового уравнения (2.1.6) в виде плоской волны

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega V}} e^{ikx}, \quad (2.1.7)$$

где  $e_\mu$  — 4-вектор поляризации фотона, удовлетворяющий условиям

$$ek = 0, \quad e^* e = 1, \quad (2.1.8)$$

и  $V$  — объем, занимаемый полем; 4-вектор  $e_\mu$  может быть представлен в виде

$$e_\mu = (e + Ck, iC\omega), \quad (2.1.9)$$

где  $C$  — произвольная постоянная, наличие которой выражает свойство калибровочной инвариантности электромагнитного поля. Соответствующие 4-потенциалу (2.1.7) поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  имеют вид

$$\mathcal{E} = \frac{i\omega e}{\sqrt{2\omega V}} e^{ikx - i\omega t} \quad \mathcal{H} = \frac{i[ke]}{\sqrt{2\omega V}} e^{ikx - i\omega t}.$$

Нормировка 4-потенциала соответствует тому, что в объеме  $V$  содержится один фотон с энергией  $\omega$ . Действительно, энергия поля определяется формулой

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (E_\xi^2 + H_\xi^2 + E_\eta^2 + H_\eta^2) = \int d^3x (|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{H}|^2),$$

но, как легко видеть,  $H = \omega$ . (Мы пользуемся здесь системой единиц Хевисайда.)

Рассмотрим теперь суперпозицию плоских волн

$$\mathcal{A}(x, t) = \frac{-i}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\omega} f_k e^{ikx - i\omega t}, \quad (2.1.10)$$

$$kf_k = 0 \quad (2.1.11)$$

(мы пользуемся калибровкой, где  $\mathcal{A}_0 = 0$ .) Тогда поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  будут выражаться формулами

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int d^3k \sqrt{\omega} f_k e^{ikx - i\omega t}, \quad (2.1.12)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int d^3k \frac{[kf_k]}{\omega} e^{ikx - i\omega t}, \quad (2.1.13)$$

а энергия поля будет равна

$$H \equiv \int d^3x (|\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{H}|^2) = \int d^3k (f_k^* f_k) \omega.$$

Эта формула показывает, что вектор  $f_k$  можно интерпретировать как волновую функцию фотона в импульсном пространстве. Наложив на  $f_k$  условие нормировки

$$\int d^3k f_k^* f_k = 1, \quad (2.1.14)$$

можно сказать, что  $|f_k|^2 d^3k$  есть вероятность того, что фотон обладает импульсом, лежащим в интервале  $d^3k$ .

## § 2.2. Момент импульса фотона

**2.2.1. Оператор момента.** Установим вид оператора момента фотона в состоянии, описываемом волновой функцией  $f(k) \equiv f_k$ . Определим с этой целью изменение волновой функции фотона в точке  $k$  при бесконечно малом повороте на угол  $\delta\theta$ ,  $\delta k = -[\delta\theta k]$ . Так как  $f(k)$  представляет собой вектор, то при бесконечно малом вращении  $k$ -пространства на угол  $\delta\theta$  волновые функции  $f(k)$  преобразуются согласно закону

$$f(k) \rightarrow f'(k + \delta k) = f(k) - [\delta\theta f(k)]. \quad (2.2.1)$$

Отсюда следует, что изменение волновой функции в точке  $k$  равно

$$\delta f(k) = f'(k) - f(k) = -(\delta k \nabla_k) f(k) - [\delta\theta f(k)].$$

Подставляя сюда значение  $\delta k$  и вспоминая определение (2.1.3) оператора  $s$ , перепишем  $\delta f(k)$  в виде

$$\delta f(k) = -i\delta\theta (-i[k\nabla_k] + s) f(k).$$

Входящее сюда выражение в круглых скобках (отличающееся множителем  $-i$  от оператора бесконечно малого поворота) и представляет собой оператор момента импульса фотона  $J$ :

$$J = -i[k\nabla_k] + s. \quad (2.2.2)$$

Мы видим, что оператор момента импульса фотона состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое совпадает с обычным квантовомеханическим оператором орбитального момента импульса в импульсном представлении

$$L = -i[k\nabla_k].$$

Второе слагаемое представляет собой оператор спинового момента (см. (2.1.3)).

Однако разделение момента фотона на орбитальную и спиновую части имеет ограниченный физический смысл. Во-первых, к фотону неприменимо обычное определение спина как момента покоящейся частицы, ибо масса покоя фотона равна нулю. Во-вторых, состояния с определенными значениями орбитального и спинового

моментов, как мы увидим ниже, не удовлетворяют в общем случае условию поперечности. Поэтому физический смысл имеют только определенные суперпозиции таких состояний. Тем не менее с формальной стороны представление момента в виде суммы двух слагаемых весьма полезно. Оно позволяет построить волновые функции состояний фотона с определенным значением момента из более простых собственных функций орбитального момента и спина.

Векторный индекс  $\alpha$  волновой функции фотона  $f_\alpha(\mathbf{k})$  можно рассматривать как независимую переменную, принимающую три значения,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Соответственно этому мы введем обозначение  $f_\alpha(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k}, \alpha)$ . Функция  $f(\mathbf{k}, \alpha)$  представляет собой скаляр в обобщенном пространстве импульсов и спина, объединяющем переменные  $k_1, k_2, k_3, \alpha$ . Различные проекции вектора  $\mathbf{f}_k$  теперь являются значениями скаляра  $f(\mathbf{k}, \alpha)$  в различных точках спинового подпространства. Оператор  $\mathbf{L}$  действует только на переменные  $\mathbf{k}$ , а оператор  $s$ , согласно его определению (2.1.3), — только на переменную  $\alpha$ . Поэтому операторы  $\mathbf{L}$  и  $s$  коммутируют.

Рассмотрим прежде всего оператор  $\mathbf{L}$ . Проекция его удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$L_l L_k - L_k L_l = i \varepsilon_{lki} L_i.$$

Так как квадрат оператора  $\mathbf{L}$  коммутирует с его проекциями, то одновременно можно диагонализировать  $L^2$  и одну из проекций  $L$ , например,  $L_3$ . Собственные значения этих операторов равны соответственно  $l(l+1)$  и  $m$ , где  $l$  — целое положительное число,  $m = -l, -l+1, \dots, l$ .

Собственная функция операторов  $L^2$  и  $L_3$ , соответствующая их собственным значениям  $l(l+1)$  и  $m$ , представляет собой шаровую функцию  $Y_{lm}(\mathbf{v})$ , где  $\mathbf{v} = \mathbf{k}/k$ ,  $L^2 Y_{lm}(\mathbf{v}) = l(l+1) Y_{lm}(\mathbf{v})$ ,  $L_3 Y_{lm}(\mathbf{v}) = m Y_{lm}(\mathbf{v})$ .

Рассмотрим теперь оператор спина фотона и его собственные функции. Обозначим через  $\chi_{s\mu}(\alpha)$  собственную функцию операторов  $s^2$  и  $s_3$ . Аргументом функций  $\chi_{s\mu}(\alpha) = \chi_\mu(\alpha)$  является спиновая переменная  $\alpha$ . Поэтому эту функцию можно представить также в виде вектора  $\chi_\mu$ :

$$\chi_\mu = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix}.$$

Функции  $\chi_\mu(\alpha)$  удовлетворяют уравнениям

$$s^2 \chi_\mu(\alpha) = 2 \chi_\mu(\alpha), \quad s_3 \chi_\mu(\alpha) = \mu \chi_\mu(\alpha).$$

Используя явный вид (2.1.2) матриц  $s_j$ , получим отсюда

$$\chi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Эти функции ортогональны друг к другу, так как они являются собственными функциями эрмитовского оператора  $s_3$ , и нормированы согласно условию

$$\sum_{\alpha} \chi_{\mu}^*(\alpha) \chi_{\mu'}(\alpha) = \delta_{\mu\mu'},$$

или в векторной форме

$$\chi_{\mu}^* \chi_{\mu'} = \delta_{\mu\mu'}.$$

Ортонормированные векторы  $\chi_{\mu}$  могут быть использованы для того, чтобы разлагать по ним произвольный вектор  $f$ :

$$f = \sum_{\mu=-1}^1 f^{\mu} \chi_{\mu}. \quad (2.2.4)$$

Величины  $f^{\mu}$  называются контравариантными составляющими вектора  $f$ . Используя (2.2.3), легко установить связь  $f^{\mu}$  с декартовыми составляющими  $f_x, f_y, f_z$  вектора  $f$ :

$$f^0 = f_z, \quad f^{\pm} = \mp (f_x \mp i f_y). \quad (2.2.5)$$

Наряду с контравариантными можно ввести также ковариантные составляющие вектора  $f$ , определяемые как

$$f_{\mu} = (-1)^{\mu} f^{-\mu}. \quad (2.2.6)$$

Используя это определение, можно представить скалярное произведение двух векторов  $f$  и  $g$  в виде

$$fg = \sum_{\mu} f^{\mu} g_{\mu} = \sum_{\mu} f_{\mu} g^{\mu}.$$

**2.2.2. Собственные функции оператора момента фотона.** Согласно (2.2.2), момент импульса фотона  $J$  складывается из коммутирующих между собой орбитального и спинового моментов. Так как эти моменты удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям, то таким же соотношениям удовлетворяет, очевидно, и полный момент

$$[J_i, J_k] = i e_{ikl} J_l.$$

Отсюда следует, что собственные значения операторов  $J^2$  и  $J_3$  равны соответственно  $j(j+1)$  и  $M$ , где  $2j+1$  — целое положительное число,  $M = -j, -j+1, \dots, j$ . В случае фотона число  $j$  должно быть целым, так как  $l$  — целое число и  $s=1$ .

Оператор момента импульса фотона коммутирует с оператором его энергии. Поэтому возможны состояния фотона с определенными значениями  $\omega, J^2, J_3$  (им соответствуют квантовые числа  $\omega, j, M$ ).

Найдем собственные функции операторов  $J^2$  и  $J_3$ . Мы будем обозначать их через  $Y_{jM}(\mathbf{v})$  и называть векторными шаровыми функциями или шаровыми векторами. Как и выше, мы можем

ввести спиновые переменные  $\alpha$  и пользоваться обозначением  $(Y_{jM}(\mathbf{v}))_{\alpha} = Y_{jM}(\mathbf{v}, \alpha)$ . Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$J^2 Y_{jM}(\mathbf{v}, \alpha) = j(j+1) Y_{jM}(\mathbf{v}, \alpha), \quad J_3 Y_{jM}(\mathbf{v}, \alpha) = M Y_{jM}(\mathbf{v}, \alpha).$$

Так как спин фотона равен единице, то, согласно правилу сложения моментов, полный момент фотона может принимать данное значение  $j$  при следующих значениях орбитального момента:

$$l = j, j \pm 1, \quad j \neq 0; \quad l = 1, \quad j = 0.$$

Таким образом, в общем случае существуют три различные функции  $Y_{jM}$ , соответствующие трем орбитальным состояниям. Мы будем обозначать их через  $Y_{jlm}$ . Чтобы определить  $Y_{jlm}$ , следует воспользоваться общей формулой, связывающей волновую функцию системы  $\Psi_{jm}$  с волновыми функциями  $\psi_{j_1 m_1}$  и  $\psi_{j_2 m_2}$ , составляющих ее подсистем. В интересующем нас случае складываются орбитальный и спиновый моменты фотона, т. е.  $j_1 = l$ ,  $j_2 = 1$ ,  $m_1 = m$ ,  $m_2 = \mu$ , и волновые функции  $Y_{jlm}$  должны иметь вид суперпозиций произведений орбитальных  $Y_{lm}(\mathbf{v})$  и спиновых  $\chi_{\mu}(\alpha)$  волновых функций фотона:

$$Y_{jlm}(\mathbf{v}, \alpha) = \sum_{m, \mu} C_{lm\mu}^{jM} Y_{lm}(\mathbf{v}) \chi_{\mu}(\alpha), \quad m + \mu = M. \quad (2.2.7)$$

Эту формулу можно переписать также в векторной форме:

$$Y_{jlm}(\mathbf{v}) = \sum_{m, \mu} C_{lm\mu}^{jM} Y_{lm}(\mathbf{v}) \chi_{\mu} \quad (m + \mu = M). \quad (2.2.8)$$

Сравнение ее с (2.2.4) показывает, что контравариантные составляющие шарового вектора  $Y_{jlm}(\mathbf{v})$  имеют вид

$$(Y_{jlm}(\mathbf{v}))^{\mu} = C_{lm\mu}^{jM} Y_{lm}(\mathbf{v}). \quad (2.2.9)$$

Ковариантные и декартовые составляющие определяются отсюда по формулам (2.2.5) и (2.2.6).

Шаровые векторы  $Y_{jlm}(\mathbf{v})$  образуют ортогональную систему функций, так как различие в каком-либо из индексов означает принадлежность функции к различным собственным значениям самосопряженных операторов  $J^2$ ,  $J_3$  или  $L^2$ ,

$$\int Y_{jlm}^*(\mathbf{v}) Y_{j'l'm'}(\mathbf{v}) d\Omega = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (2.2.10)$$

Заметим, что  $(Y_{jlm}^*(\mathbf{v}))^{\mu}$  не совпадает с  $(Y_{jlm}(\mathbf{v}))^{\mu*}$ :

$$(Y_{jlm}^*(\mathbf{v}))^{\mu} = (-1)^{\mu} (Y_{jlm}(\mathbf{v}))^{-\mu*} = (Y_{jlm}(\mathbf{v}))_{\mu}^*. \quad (2.2.11)$$

Отсюда следует, что

$$Y_{jlm}^*(\mathbf{v}) = Y_{j, l, -m}(\mathbf{v}) (-1)^{j+l+M+1}. \quad (2.2.12)$$

**2.2.3. Продольный и поперечные шаровые векторы.** Мы найдем систему собственных функций операторов квадрата момента фотона  $J^2$  и его проекции  $J_3$ . Состояние фотона с определенными

значениями  $j$  и  $M$  описывается волновой функцией, являющейся в общем случае линейной комбинацией трех шаровых векторов

$$f_{jM}(\mathbf{k}) = \sum_{l=j-1}^{j+1} a_l Y_{jM}(\mathbf{v}).$$

Однако коэффициенты этой линейной комбинации не независимы, так как волновая функция фотона должна удовлетворять условию поперечности (2.1.11)  $\mathbf{k}f_{jM}(\mathbf{k}) = 0$ . Поэтому имеется не три, а два различных состояния фотона с заданными квантовыми числами  $j$  и  $M$ .

Чтобы условие поперечности выполнялось автоматически, удобно пользоваться не шаровыми векторами  $Y_{jM}(\mathbf{v})$ , а некоторыми их тремя линейными комбинациями  $Y_{jM}^{(\lambda)}(\mathbf{v})$ ,  $\lambda = -1, 0, 1$ , две из которых ( $\lambda = 0, 1$ ) перпендикулярны  $\mathbf{k}$ , а третья ( $\lambda = -1$ ) направлена вдоль  $\mathbf{k}$ . Эти комбинации называются поперечными и продольными шаровыми векторами. Для нахождения их воспользуемся разложением  $\mathbf{v}Y_{jM}(\mathbf{v})$  на шаровые векторы\*

$$\mathbf{v}Y_{jM}(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} Y_{j, j-1, M}(\mathbf{v}) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} Y_{j, j+1, M}(\mathbf{v}). \quad (2.2.13)$$

Эта формула показывает, что мы можем определить продольный шаровой вектор  $Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v})$  как

$$Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}Y_{jM}(\mathbf{v}). \quad (2.2.14)$$

Используя далее разложение (2.2.13) и значения коэффициентов  $C_{jm\mu}^{iM}$ , легко убедиться, что

$$\mathbf{v}Y_{jM}(\mathbf{v}) = \sum_{m,\mu} C_{jm\mu}^{iM} \mathbf{v}_\mu Y_{jm}(\mathbf{v}) = 0, \quad m = M - \mu. \quad (2.2.14')$$

Поэтому  $Y_{jM}(\mathbf{v})$  представляет собой поперечный шаровой вектор, который мы будем обозначать через

$$Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}) = Y_{jM}(\mathbf{v}). \quad (2.2.15)$$

Наконец, второй поперечный шаровой вектор  $Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v})$  мы определим как

$$Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}) = i[Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}), \mathbf{v}]. \quad (2.2.16)$$

Используя (2.2.13) и (2.2.10), можно выразить  $Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v})$  через шаровые векторы  $Y_{jM}(\mathbf{v})$ :

$$Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} Y_{j, j+1, M}(\mathbf{v}) + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} Y_{j, j-1, M}(\mathbf{v}). \quad (2.2.17)$$

\* См., например, [2].

Из (2.2.13) и (2.2.17) следует, что

$$Y_{j, j-1, M}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (\sqrt{j+1} Y_{jM}^{(M)}(\mathbf{v}) + \sqrt{j} Y_{jM}^{(M-1)}(\mathbf{v})),$$

$$Y_{j, j+1, M}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (\sqrt{j} Y_{jM}^{(M)}(\mathbf{v}) - \sqrt{j+1} Y_{jM}^{(M-1)}(\mathbf{v})).$$
(2.2.18)

Шаровые векторы  $Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v})$  и  $Y_{j, -M}^{(0)}(\mathbf{v})$  можно выразить через производные от шаровой функции  $Y_{jM}(\mathbf{v})$ . Для этого следует воспользоваться формулой дифференцирования шаровых функций:

$$k \nabla_k Y_{jM}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (j \sqrt{j+1} Y_{j, j+1, M}(\mathbf{v}) + (j+1) \sqrt{j} Y_{j, j-1, M}(\mathbf{v})).$$

Сравнивая эту формулу с (2.2.17), мы видим, что

$$Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}) = \frac{k}{\sqrt{j(j+1)}} \nabla_k Y_{jM}(\mathbf{v}),$$
(2.2.19)

и, согласно (2.2.16),

$$Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}) = - \frac{[k \nabla_k] Y_{jM}(\mathbf{v})}{\sqrt{j(j+1)}} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} L Y_{jM}(\mathbf{v}),$$
(2.2.20)

где  $L = -i [k \nabla_k]$  — оператор орбитального момента фотона.

Легко видеть, что шаровые векторы удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\int Y_{jM}^{(\lambda)*}(\mathbf{v}) Y_{j'M'}^{(\lambda')}(\mathbf{v}) d\omega = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{j'j} \delta_{M'M}.$$

**2.2.4. Четность состояний фотона.** Образовав линейную комбинацию шаровых векторов  $Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v})$  и  $Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v})$  с произвольными коэффициентами  $a_0$  и  $a_1$  (зависящими от  $\mathbf{k}$  и  $t$ ), мы получим общее выражение для волновой функции фотона  $f_{jM}(\mathbf{k})$  с заданными значениями  $j$  и  $M$ :

$$f_{jM}(\mathbf{k}) = a_0 Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}) + a_1 Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{k}.$$
(2.2.21)

Входящие сюда слагаемые по-разному преобразуются при замене  $\mathbf{k}$  на  $-\mathbf{k}$ :

$$Y_{jM}^{(\lambda)}(-\mathbf{v}) = (-1)^{j+\lambda} Y_{jM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}).$$
(2.2.22)

Поэтому можно различать состояния фотона с заданными  $j$  и  $M$  по их четности. Четностью называются собственные значения  $\eta_P$  оператора отражения  $P$ , который в случае векторного поля определяется как

$$P f(\mathbf{k}) = -f(-\mathbf{k}).$$
(2.2.23)

Так как  $P^2 = 1$ , то  $\eta_P = \pm 1$ .

Из (2.2.22) и (2.2.23) следует, что при данных  $j$  и  $M$  возможны два состояния фотона, отличающиеся четностью  $\eta_P$ :

$$\eta_P = (-1)^{j+\lambda}.$$
(2.2.24)

Мы будем обозначать волновые функции этих состояний через  $f_{jM\lambda}(\mathbf{k}, t)$ :

$$f_{jM\lambda}(\mathbf{k}, t) = a Y_{jM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}), \quad \lambda = 0, 1. \quad (2.2.25)$$

При  $\lambda = 1$  говорят о состояниях фотона электрического типа, а при  $\lambda = 0$  — о состояниях фотона магнитного типа. (Эти названия связаны с тем, что излучение фотона с  $\lambda = 1$  определяется электрическим моментом системы, а фотона с  $\lambda = 0$  — магнитным моментом.)

Если одновременно с моментом и четностью фотон обладает определенной энергией  $\omega$ , то его волновая функция имеет вид

$$f_{\omega j M \lambda}(\mathbf{k}, t) = i \sqrt{\frac{R}{\pi}} \frac{1}{\omega} Y_{jM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}) e^{-i\omega t} \delta_{R\omega}. \quad (2.2.26)$$

(Нормировка этой функции соответствует нахождению одного фотона в сфере радиуса  $R$ .)

Если  $j = 0$ , то по правилу сложения моментов имеется только один шаровой вектор  $Y_{010}(\mathbf{v})$ , совпадающий с продольным шаровым вектором  $Y_{00}^{(1)}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} Y_{00}(\mathbf{v})$ . Отсюда следует, что поперечных шаровых векторов при  $j = 0$  не существует. Этот результат имеет простой смысл. Состояние с моментом нуль представляет собой сферически-симметричное состояние, но сферически-симметричное векторное поле может быть только продольным.

Таким образом, фотон не может находиться в состоянии с моментом, равным нулю.

**2.2.5. Сферические электромагнитные волны.** Зная волновую функцию фотона  $f_{\omega j M \lambda}(\mathbf{k}, t)$ , легко определить электромагнитное поле  $\mathcal{E}_{\omega j M}^{(\lambda)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathcal{H}_{\omega j M}^{(\lambda)}(\mathbf{r}, t)$ , соответствующее состоянию фотона с определенными энергией, моментом и четностью:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\omega j M}^{(\lambda)}(\mathbf{r}, t) &= i \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} \int Y_{jM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{v} e^{-i\omega t}, \\ \mathcal{H}_{\omega j M}^{(\lambda)}(\mathbf{r}, t) &= -i \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} \int Y_{jM}^{(1-\lambda)}(\mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{v} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

(мы учли (2.2.16)).

Для вычисления входящих сюда интегралов воспользуемся известным разложением плоской волны по шаровым функциям

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{lm} g_l(kr) Y_{lm}^*\left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right) Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right), \quad (2.2.27)$$

$$g_l(kr) = (2\pi)^{1/2} i^l J_{l+1/2}(kr) / \sqrt{kr}$$

( $J_{l+1/2}$  — функция Бесселя). Учитывая определение векторных шаровых функций, получим отсюда

$$\int Y_{jM}^{(\lambda)}\left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{v} = g_l(kr) Y_{jM}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

и, следовательно,

$$\int Y_{jM}^{(0)}\left(\frac{k}{k}\right) e^{ikr} do_k = g_j(kr) Y_{jM}^{(0)}\left(\frac{r}{r}\right),$$

$$\int Y_{jM}^{(1)}\left(\frac{k}{k}\right) e^{ikr} do_k = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} g_{j+1}(kr) Y_{j,j+1,M}\left(\frac{r}{r}\right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j,j-1,M}\left(\frac{r}{r}\right).$$

Подставляя эти формулы в выражения для полей  $\mathcal{E}_{\omega jM}^{(\lambda)}$ ,  $\mathcal{H}_{\omega jM}^{(\lambda)}$ , получим

$$\mathcal{E}_{\omega jM}^{(1)}(r, t) = i \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} \left[ \sqrt{\frac{j}{2j+1}} g_{j+1}(kr) Y_{j,j+1,M}\left(\frac{r}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j,j-1,M}\left(\frac{r}{r}\right) \right] e^{-i\omega t},$$

$$\mathcal{H}_{\omega jM}^{(1)}(r, t) = - \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} g_j(kr) Y_{jM}\left(\frac{r}{r}\right) e^{-i\omega t}, \quad (2.2.28)$$

$$\mathcal{E}_{\omega jM}^{(0)}(r, t) = i \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} g_j(kr) Y_{jM}\left(\frac{r}{r}\right) e^{-i\omega t}, \quad (2.2.29)$$

$$\mathcal{H}_{\omega jM}^{(0)}(r, t) = - \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} \left[ \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \times \right.$$

$$\left. \times g_{j+1}(kr) Y_{j,j+1,M}\left(\frac{r}{r}\right) + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j,j-1,M}\left(\frac{r}{r}\right) \right] e^{-i\omega t}.$$

Заметим, что формулы (2.2.28) переходят в формулы (2.2.29); при замене  $\mathcal{E} \rightarrow -i\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} \rightarrow i\mathcal{E}$ , что соответствует инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразования  $H \rightarrow E$ ,  $E \rightarrow -H$ .

Ввиду поперечности шарового вектора  $Y_{jM}^{(0)} \equiv Y_{jM}$ , магнитное поле в состояниях электрического типа и электрическое поле в состояниях магнитного типа поперечны, т. е.  $r\mathcal{H}_{\omega jM}^{(1)}(r, t) = r\mathcal{E}_{\omega jM}^{(0)}(r, t) = 0$ . Электрическое же поле в состояниях электрического типа и магнитное поле в состояниях магнитного типа не поперечны.

Отметим, что в волновой зоне поля определяются следующими асимптотическими формулами:

$$\mathcal{E}_{\omega jM}^{(\lambda)}(r, t) = -i\mathcal{H}_{\omega jM}^{(1-\lambda)}(r, t) = i^{j+1-\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{R}} \frac{\sin(kr - (j-\lambda)\pi/2)}{kr} \times$$

$$\times Y_{jM}^{(\lambda)}\left(\frac{r}{r}\right) e^{-i\omega t}. \quad (2.2.30)$$

Приведем также выражения для потенциалов, соответствующих полям  $\mathcal{E}_{\omega/M}^{(\lambda)}$  и  $\mathcal{H}_{\omega/M}^{(\lambda)}$ :

$$\mathcal{A}_{\omega/M}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega}{R}} g_j(kr) Y_{jM}^{(0)}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) e^{-i\omega t}, \quad (2.2.31)$$

$$\Phi_{\omega/M}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\omega/M}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega}{R}} \left\{ \sqrt{\frac{j}{2j+1}} g_{j+1}(kr) Y_{j,j+1,M}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \right. \\ & + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j,j-1,M}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + C \left[ \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j+1}(kr) Y_{j,j+1,M}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) - \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{\frac{j}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j,j-1,M}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \right] \right\} e^{-i\omega t}, \quad (2.2.32) \end{aligned}$$

$$\Phi_{\omega/M}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{C}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega}{R}} g_j(kr) Y_{jM}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) e^{-i\omega t}$$

( $C$  — произвольная постоянная и  $k = \omega$ ).

Различным выбором постоянной  $C$  можно придать выражениям (2.2.32) различный вид. Так, при  $C = 0$   $\mathcal{A}_{\omega/M}^{(1)}$  отличается только множителем  $1/i\omega$  от  $\mathcal{E}_{\omega/M}^{(1)}$  [3]. При  $C = \sqrt{(j+1)/j}$  выражение для  $\mathcal{A}_{\omega/M}^{(1)}$  становится одночленным и содержит лишь функцию  $g_{j+1}(kr)$ , что дает преимущества в ряде приложений (см. § 4.1):

$$\mathcal{A}_{\omega/M}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega}{R}} \sqrt{\frac{2j+1}{j}} g_{j+1}(kr) Y_{j,j+1,M}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) e^{-i\omega t},$$

$$\Phi_{\omega/M}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega}{R}} \sqrt{\frac{j+1}{j}} g_j(kr) Y_{jM}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) e^{-i\omega t}. \quad (2.2.33)$$

## § 2.3. Квантование электромагнитного поля

**2.3.1. Операторы испускания и поглощения фотона.** Мы построили, исходя из уравнений Максвелла, волновую функцию фотона в импульсном пространстве и изучили квантовые состояния фотона. Однако для общей формулировки теории электромагнитного поля и изучения различных процессов его взаимодействия с электронами удобнее пользоваться другим методом — методом вторичного квантования [4]. Этот метод заключается в том, что 4-потенциал  $A_\mu(x)$  и соответственно поля  $E(x)$  и  $H(x)$  рассматриваются не как обычные величины ( $c$ -числа), а как операторы ( $q$ -числа), подчиняющиеся определенным перестановочным соотношениям.

Эти операторы действуют на вектор состояния  $\Phi$ , описывающий состояние электромагнитного поля как некоторой обобщенной квантовомеханической системы. Вектор состояния  $\Phi$  определяется в пространстве чисел частиц (фотонов) и не зави-

сит от координат, функциями которых являются только операторы поля. Можно определить  $\Phi$  так, чтобы он не зависел и от времени. Тогда  $A_\mu(x)$  (а также  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ) представляют собой операторы полей в гейзенберговском представлении.

Если представить  $A_\mu(x)$  (а также  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ) в виде суперпозиции волн, каждая из которых удовлетворяет уравнениям Максвелла, то операторные, т. е. квантовые, свойства должны нести амплитуды этих волн.

Будем исходить из разложения  $A_\mu(x)$  на плоские волны

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^{(\lambda)} (c_{k\lambda} e^{ikx} + c_{k\lambda}^\dagger e^{-ikx}), \quad (2.3.1)$$

тогда  $q$ -числами будут амплитуды  $c_{k\lambda}$  и  $c_{k\lambda}^\dagger$ . Условия коммутации, накладываемые на амплитуды суперпозируемых волн, должны приводить к правильной корпускулярной картине электромагнитного поля. Это значит, что энергия, импульс и проекция момента импульса электромагнитного поля должны быть равны сумме энергий, импульсов и проекций моментов импульса отдельных частиц, квантов электромагнитного поля — фотонов. Мы покажем, что эти условия будут выполнены, если амплитуды  $c_{k\lambda}$  и  $c_{k\lambda}^\dagger$  удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^\dagger] &= \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \\ [c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}] &= [c_{k\lambda}^\dagger, c_{k'\lambda'}^\dagger] = 0, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

где  $[A, B] = AB - BA$  и в соответствии с вещественностью  $A(x)$  и равенством  $A_0(x) = \frac{1}{i} A_4(x)$  предполагается, что операторы  $c_{kj}$  и  $c_{ki}^\dagger$  ( $j = 1, 2, 3$ ), а также операторы  $c_{k0} = -ic_{k4}$  и  $c_{k0}^\dagger = -ic_{k4}^\dagger$  эрмитово-сопряжены.

Из этих соотношений, представляющих собой условия квантования электромагнитного поля, вытекает прежде всего, что собственными значениями  $N_{kj}$  операторов  $c_{ki}^\dagger c_{kj}$  являются целые положительные числа и нуль. Далее из них легко найти матричные элементы  $c_{kj}$  и  $c_{ki}^\dagger$ :

$$\begin{aligned} \langle N_{k\lambda} - 1 | c_{k\lambda} | N_{k\lambda} \rangle &= \sqrt{N_{k\lambda}}, \\ \langle N_{k\lambda} + 1 | c_{k\lambda}^\dagger | N_{k\lambda} \rangle &= \sqrt{N_{k\lambda} + 1}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Используя эти формулы, легко убедиться, что

$$c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}} = \sqrt{N_{k\lambda}} \Phi_{N_{k\lambda}-1}, \quad c_{k\lambda}^\dagger \Phi_{N_{k\lambda}} = \sqrt{N_{k\lambda} + 1} \Phi_{N_{k\lambda}+1}, \quad (2.3.4)$$

где  $\Phi_{N_{k\lambda}}$  — собственная функция оператора  $c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}$ .

Формулы (2.3.3) и (2.3.4) относятся к  $\lambda = 1, 2, 3$ . При  $\lambda = 4$  первое из квантовых условий (2.3.2) можно переписать в виде  $[c_{k0}^\dagger, c_{k0}] = 1$ , где  $c_{k0} = -ic_{k4}$  и  $c_{k0}^\dagger$  — оператор, эрмитово-сопряженный по отношению к  $c_{k0}$ . Из этого условия следует, что

собственными значениями оператора  $c_{k0}c_{k0}^\dagger$  являются целые положительные числа, включая нуль, а отличные от нуля матричные элементы операторов  $c_{k0}$  и  $c_{k0}^\dagger$  равны

$$\langle N_{k4} + 1 | c_{k0} | N_{k4} \rangle = \sqrt{N_{k4} + 1}, \quad \langle N_{k4} - 1 | c_{k0}^\dagger | N_{k4} \rangle = \sqrt{N_{k4}}.$$

Обратим внимание на то, что при переходе от  $\lambda = 1, 2, 3$  к  $\lambda = 4$  меняется роль операторов  $c_{k\lambda}$  и  $c_{k\lambda}^\dagger$ :  $c_{k0}$  ведет себя не как  $c_{kj}$  ( $j = 1, 2, 3$ ), а как  $c_{k\lambda}^\dagger$ , и  $c_{k0}^\dagger$  — как  $c_{kj}$ .

Перейдем к нахождению возможных значений энергии и импульса электромагнитного поля. Определим операторы, соответствующие этим величинам. В классической электродинамике, используя разложение потенциалов на плоские волны, можно выразить энергию  $H$  и импульс  $P$  поля через амплитуды  $c_{k\lambda}$ ,  $c_{k\lambda}^\dagger$ :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k\lambda} \omega (c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger + c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}),$$

$$P = \frac{1}{2} \sum_{k\lambda} k (c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger + c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}).$$

Представляется естественным считать эти выражения, в которых  $\lambda$  принимает все четыре значения, определениями операторов энергии  $H$  и импульса  $P$  в квантовой электродинамике, понимая под  $c_{k\lambda}$ ,  $c_{k\lambda}^\dagger$  не  $c$ -числа, а операторы, подчиняющиеся перестановочным соотношениям (2.3.2).

Введя в определение операторов энергии и импульса электромагнитного поля амплитуды  $c_{k3}$  и  $c_{k4}$ , соответствующие продольным и скалярным колебаниям, мы должны потребовать, чтобы эти колебания не вносили вклада в возможные значения энергии и импульса поля. В классической электродинамике это достигается дополнительным условием, накладываемым на потенциалы, в квантовой же электродинамике такое условие несовместимо с независимостью операторов  $c_{k3}$  и  $c_{k4}$ .

Дополнительное условие для квантованного поля можно сформулировать в виде условия, накладываемого не на операторы  $c_{k3}$  и  $c_{k4}$ , а на векторы состояний электромагнитного поля  $\Phi$  [5]. Именно, мы будем предполагать допустимыми только такие векторы состояний  $\Phi$ , в применении к которым часть оператора  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)$ , содержащая положительные частоты (члены типа  $e^{ikx}$ ), дает нуль. Обозначая эту часть оператора  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)$  через  $\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)\right)_+$ , запишем дополнительное условие в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)\right)_+ \Phi = 0, \quad (2.3.5)$$

ИЛИ

$$\sum_k \sqrt{\omega} (c_{k3} + ic_{k4}) e^{ikx} \Phi = 0,$$

откуда следует, что функция  $\Phi$  при всех  $k$  должна удовлетворять условиям

$$(c_{k3} + ic_{k4}) \Phi = 0, \quad (2.3.6)$$

а следовательно, и условиям  $\Phi^* (c_{k3}^+ + ic_{k4}^+) = 0$ . Иными словами, функция  $\Phi$  наряду с условием (2.3.5) удовлетворяет условию

$$\Phi^* \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) \right)_- = 0, \quad (2.3.7)$$

где  $\left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) \right)_-$  — часть оператора  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)$ , содержащая отрицательные частоты (члены типа  $e^{-ikhx}$ ).

Умножив скалярно дополнительное условие (2.3.5) слева на  $\Phi^*$ , а сопряженное условие (2.3.7) справа на  $\Phi$ , получим, сложив эти выражения,

$$\left( \Phi, \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) \Phi \right) \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) \right\rangle = 0,$$

где  $\langle L \rangle \equiv (\Phi, L\Phi)$  обозначает среднее значение оператора  $L$  в состоянии  $\Phi$ .

Мы видим, что в квантовой электродинамике обращается в нуль не  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)$ , чего нельзя требовать, а среднее значение оператора  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)$  в состоянии  $\Phi$ .

Из сформулированных условий следует, что

$$(\Phi, (c_{k3}^+ c_{k3} + c_{k4}^+ c_{k4}) \Phi) = \langle c_{k3}^+ c_{k3} \rangle + \langle c_{k4}^+ c_{k4} \rangle = 0.$$

Именно благодаря этому соотношению исчезают средние значения тех частей операторов энергии и импульса, которые связаны с продольными и скалярными колебаниями, и мы можем рассматривать только поперечные колебания. Замечая, что  $c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+ = c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda} + 1$ , и обозначая через  $N_{k\lambda}$  собственные значения оператора  $c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda}$ , найдем возможные значения энергии и импульса электромагнитного поля:

$$\mathcal{E} = \sum_{k; \lambda=1, 2} \omega \left( N_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad \mathcal{P} = \sum_{k; \lambda=1, 2} k \left( N_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.3.8)$$

Мы видим, что если отвлечься от несущественных бесконечных сумм  $\frac{1}{2} \sum_{k; \lambda=1, 2} \omega$  и  $\frac{1}{2} \sum_{k; \lambda=1, 2} k$ , то энергия и импульс поля дей-

ствительно выражаются в виде суммы энергий и импульсов отдельных частиц — фотонов, причем целое число  $N_{k\lambda}$  представляет собой число фотонов с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$  ( $\lambda=1, 2$ ).

Энергия поля имеет наименьшее значение, когда числа фотонов равны нулю. Это наимизшее энергетическое состояние поля называется состоянием вакуума электромагнитного поля.

Пусть электромагнитное поле содержит  $N_{k\lambda}$  фотонов с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$ . Если  $\Phi_{N_{k\lambda}}$  — вектор состояния поля, то, согласно (2.3.4), действие  $c_{k\lambda}^+$  сводится к увеличению числа фотонов  $N_{k\lambda}$  на единицу, а действие  $c_{k\lambda}$  — к уменьшению этого числа на единицу. Поэтому можно сказать, что  $c_{k\lambda}^+$  представляет собой оператор испускания фотона с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ), а  $c_{k\lambda}$  — оператор поглощения такого же фотона. При  $\lambda = 4$  роли  $c_{k\lambda}^+$  и  $c_{k\lambda}$  меняются:  $c_{k0}$  представляет собой оператор испускания, а  $c_{k0}^+$  — оператор поглощения «скалярного фотона».

Можно изменить интерпретацию операторов  $c_{k0} = -ic_{k4}$  и  $c_{k0}^+ = -ic_{k4}^+$  и рассматривать  $c_{k0}$  как оператор поглощения, а  $c_{k0}^+$  — как оператор испускания скалярного фотона, если при описании скалярных колебаний исходить не из обычного, а из обобщенного определения скалярного произведения векторов состояний, допускающего как положительную, так и отрицательную норму [6,7].

Будем по-прежнему исходить из условий квантования

$$[c_{kj}, c_{k'j}^+] = 1, \quad j = 1, 2, 3, \quad [c_{k0}, c_{k0}^+] = -1,$$

где  $c_{k0} = -ic_{k4}$ ,  $c_{k0}^+ = -ic_{k4}^+$  и  $c_{k\lambda}$  — оператор, эрмитово-сопряженный с оператором  $c_{k\lambda}$  в обобщенном смысле. Однако в отличие от предыдущего, будем теперь считать все операторы  $c_{k\lambda}$  операторами поглощения и все операторы  $c_{k\lambda}^+$  — операторами испускания фотонов. Это значит, что мы предполагаем справедливыми соотношения  $c_{k\lambda}\Phi_0 = 0$ ,  $\lambda = 1, 2, 3, 0$ , где  $\Phi_0$  — вектор состояния вакуума электромагнитного поля. Этот вектор предполагается нормированным на единицу,  $(\Phi_0, \Phi_0) = 1$ .

Если на вектор состояния вакуума подействовать оператором  $c_{k\lambda}^+$ , то мы получим состояние поля, в котором содержится только один фотон с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$ :

$$\Phi_{1k\lambda} = c_{k\lambda}^+ \Phi_0. \quad (2.3.9)$$

Легко видеть, что эти соотношения при  $\lambda = 0$  непосредственно приводят к индефинитной метрике для «скалярных фотонов». Действительно, определим норму вектора состояния поля, содержащего один скалярный фотон  $(\Phi_{1k0}, \Phi_{1k0}) = (c_{k0}^+ \Phi_0, c_{k0}^+ \Phi_0)$ . Используя определение эрмитовского сопряжения  $(L^+ \Phi_1, \Phi_2) = (\Phi_1, L \Phi_2)$ , перестановочные соотношения для  $c_{k\lambda}$ ,  $c_{k\lambda}^+$  и условие нормировки  $\Phi_0$ , получим  $(c_{k0}^+ \Phi_0, c_{k0}^+ \Phi_0) = (\Phi_0, c_{k0} c_{k0}^+ \Phi_0) = -1$ .

Таким образом,

$$(\Phi_{1k0}, \Phi_{1k0}) = -1, \quad (2.3.10)$$

т. е. норма вектора  $\Phi_{1k0}$  отрицательна.

Аналогично можно представить вектор состояния поля, содержащего  $N_{k\lambda}$  фотонов с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$ , в виде

$$\Phi_{N_{k\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{N_{k\lambda}!}} (c_{k\lambda}^+)^{N_{k\lambda}} \Phi_0.$$

Эти векторы удовлетворяют, как легко убедиться, условиям нормировки

$$(\Phi_{N_{k\lambda}}, \Phi_{N_{k\lambda}}) = 1, \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad (\Phi_{N_{k0}}, \Phi_{N_{k0}}) = (-1)^{N_{k0}}.$$

Подействовав на  $\Phi_{N_{k\lambda}}$  операторами  $c_{k\lambda}$  и  $c_{k\lambda}^{\dagger}$  и используя перестановочные соотношения для  $c_{k\lambda}$ ,  $c_{k\lambda}^{\dagger}$ , получим

$$\begin{aligned} c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}} &= \sqrt{N_{k\lambda}} \Phi_{N_{k\lambda}-1}, \\ c_{k\lambda}^{\dagger} \Phi_{N_{k\lambda}} &= \sqrt{N_{k\lambda} + 1} \Phi_{N_{k\lambda}+1}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \\ c_{k0} \Phi_{N_{k0}} &= -\sqrt{N_{k0}} \Phi_{N_{k0}-1}, \\ c_{k0}^{\dagger} \Phi_{N_{k0}} &= \sqrt{N_{k0} + 1} \Phi_{N_{k0}+1}. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Мы видим, что  $c_{k\lambda}$  представляют собой операторы поглощения, а  $c_{k\lambda}^{\dagger}$  — операторы испускания фотонов. Отсюда далее следует, что  $c_{k0}^{\dagger} c_{k0} \Phi_{N_{k0}} = -N_{k0} \Phi_{N_{k0}}$ , т. е. собственные значения оператора  $c_{k0}^{\dagger} c_{k0}$  равны 0, -1, -2, ...

Используя разложение (2.3.1) и соотношения (2.2.11), легко определить матричные элементы оператора  $A_{\mu}(x)$ , соответствующие поглощению и испусканию фотона с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \langle 0_{k\lambda} | A_{\mu}(x) | 1_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_{\mu}^{(\lambda)} e^{ikx}, \\ \langle 1_{k\lambda} | A_{\mu}(x) | 0_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_{\mu}^{(\lambda)*} e^{-ikx} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

(во второй формуле над  $e_{\mu}^{(\lambda)}$  поставлен знак комплексного сопряжения, чтобы формулами можно было пользоваться не только в случае линейной, но и в случае круговой поляризации).

2.3.2. Перестановочные соотношения для потенциалов электромагнитного поля. Зная квантовые условия для  $c_{k\lambda}$  и  $c_{k\lambda}^{\dagger}$ , можно, очевидно, установить перестановочные соотношения для операторов потенциалов и компонент поля. Вычислим, например, коммутатор потенциалов  $[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')]$ . Воспользуемся для этого разложением (2.3.1):

$$\begin{aligned} [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] &= \frac{1}{2V} \sum_{k, \lambda, k', \lambda'} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \{ [c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}] e^{i(kx + k'x')} + \\ &+ [c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^{\dagger}] e^{i(kx - k'x')} + [c_{k\lambda}^{\dagger}, c_{k'\lambda'}] e^{-i(kx - k'x')} + \\ &+ [c_{k\lambda}^{\dagger}, c_{k'\lambda'}^{\dagger}] e^{-i(kx + k'x')} \} e_{\mu}^{(\lambda)*} e_{\nu}^{(\lambda')}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (2.3.2) и пользуясь тем, что  $\sum_{\lambda} e_{\mu}^{(\lambda)*} e_{\nu}^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu}$ , получим

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] = \frac{1}{2V} \sum_k \frac{1}{\omega} \{ e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')} \} \delta_{\mu\nu}.$$

Переходя далее от суммирования по  $k$  к интегрированию в  $k$ -пространстве:

$$\sum_k f(k) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int f(k) d^3k,$$

получим окончательно [8, 9]

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -iD_0(x-x') \delta_{\mu\nu}, \quad (2.3.13)$$

$$D_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikr} \frac{\sin \omega t}{\omega} d^3k. \quad (2.3.14)$$

Функция  $D_0$ , очевидно, инвариантна относительно преобразований Лоренца. Действительно, ее можно представить в виде

$$D_0(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} \text{Sgn } k_0 \delta(k^2) d^4k, \quad (2.3.15)$$

где  $d^4k = dk_1 dk_2 dk_3 dk_0$ . Релятивистская инвариантность всех множителей под знаком интеграла, кроме  $\text{Sgn } k_0$ , очевидна. Но  $\text{Sgn } k_0$  также релятивистский инвариант, так как благодаря наличию в (2.3.15)  $\delta$ -функции выполняется условие  $k^2 = 0$ , т. е.  $k_0 = \pm |\mathbf{k}|$ , а знак частоты релятивистски инвариантен. Это свойство функции  $D_0(x)$  показывает, что квантовые условия (2.3.13) инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Из (2.3.14) следует, что

$$D_0(x) \equiv D_0(\mathbf{r}, t) = D_0(-\mathbf{r}, t) = -D_0(\mathbf{r}, -t). \quad (2.3.16)$$

Выполнив в (2.3.14) интегрирование по углу между векторами  $k$  и  $r$ , получим

$$\begin{aligned} D_0(x) &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^\infty \{e^{i\omega(r-t)} + e^{-i\omega(r-t)} - e^{i\omega(r+t)} - e^{-i\omega(r+t)}\} d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi r} \{\delta(r-t) - \delta(r+t)\}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Это выражение показывает, что функция  $D_0(x)$  отлична от нуля только на световом конусе  $r^2 - t^2 = 0$  и имеет на нем  $\delta$ -образную особенность.

Из интегрального представления (2.3.14) следует, что  $D_0(x)$  представляет собой сингулярное решение уравнения  $\square D_0(x) = 0$ , удовлетворяющее условиям

$$D(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} D(x)|_{t=0} = \delta(\mathbf{r}). \quad (2.3.18)$$

Используя (2.3.13), можно найти перестановочные соотношения между компонентами потенциала и их производными по координатам и времени. В частности, дифференцируя (2.3.13) по  $t'$  и полагая затем  $t' = t$ , получим

$$\left[ A_\mu(\mathbf{r}, t), \frac{\partial}{\partial t} A_\nu(\mathbf{r}', t) \right] = i\delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.3.19)$$

**2.3.3. Хронологическое и нормальное произведения операторов электромагнитных потенциалов.** При исследовании взаимодействия электромагнитного поля с электронами существенную роль играют произведения операторов потенциалов, расположенных в определенном порядке.

Различают два типа упорядоченных произведений — хронологические и нормальные произведения. В хронологическом произведении  $A_\mu(x)$  и  $A_\nu(x')$ , которое мы будем обозначать через  $T(A_\mu(x) A_\nu(x'))$ , множители располагаются в хронологическом порядке, а именно: справа стоит множитель, отвечающий меньшему значению времени, а слева — большему,

$$T(A_\mu(x) A_\nu(x')) = \begin{cases} A_\mu(x) A_\nu(x'), & t > t', \\ A_\nu(x') A_\mu(x), & t < t'. \end{cases} \quad (2.3.20)$$

В нормальном произведении  $A_\mu(x)$  и  $A_\nu(x')$ , которое мы будем обозначать через  $N(A_\mu(x) A_\nu(x'))$ , операторы испускания фотонов расположены слева от операторов поглощения. Иными словами, если представить оператор  $A_\mu(x)$  в виде  $A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x)$ , где  $A_\mu^{(+)}(x)$  содержит слагаемые с положительными, а  $A_\mu^{(-)}(x)$  — слагаемые с отрицательными частотами, то

$$N(A_\mu(x) A_\nu(x')) = A_\mu^{(+)}(x) A_\nu^{(+)}(x') + A_\mu^{(-)}(x) A_\nu^{(-)}(x') + \\ + A_\mu^{(-)}(x) A_\nu^{(+)}(x') + A_\nu^{(-)}(x') A_\mu^{(+)}(x). \quad (2.3.21)$$

Легко видеть, что эти определения являются релятивистски инвариантными.

Используя разложение потенциалов (2.3.1) на плоские волны, можно выразить  $N$ - и  $T$ -произведения потенциалов через операторы испускания и поглощения фотонов:

$$N(A_\mu(x) A_\nu(x')) = \frac{1}{2V} \sum_{k, \lambda; k', \lambda'} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \{ c_{k\lambda} c_{k'\lambda'} e^{i(kx + k'x')} + \\ + c_{k'\lambda'}^+ c_{k\lambda} e^{i(kx - k'x')} + c_{k\lambda}^+ c_{k'\lambda'} e^{i(k'x' - kx)} + \\ + c_{k\lambda}^+ c_{k'\lambda'} e^{-i(kx + k'x')} \} e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda')}, \quad (2.3.22)$$

$$T(A_\mu(x) A_\nu(x')) = \frac{1}{2V} \sum_{k, \lambda; k', \lambda'} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \{ c_{k\lambda} c_{k'\lambda'} e^{i(kx + k'x')} + \\ + c_{k\lambda} c_{k'\lambda'}^+ e^{i(kx - k'x')} + c_{k\lambda}^+ c_{k'\lambda'} e^{-i(kx - k'x')} + \\ + c_{k\lambda}^+ c_{k'\lambda'} e^{-i(kx + k'x')} \} e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda')}, \quad t > t'. \quad (2.3.23)$$

Рассмотрим разность между хронологическим и нормальным произведениями операторов потенциалов. Эта разность называется связью операторов и обозначается через  $A_\mu^a(x) A_\nu^a(x')$  (вместо  $a$  может применяться также любая другая буква латинского алфавита):

$$A_\mu^a(x) A_\nu^a(x') \equiv T(A_\mu(x) A_\nu(x')) - N(A_\mu(x) A_\nu(x')). \quad (2.3.24)$$

Из (2.3.22), (2.3.23) и (2.3.2) следует, что  $A_\mu^\alpha A_\nu^\alpha$  не содержит операторов испускания и поглощения фотонов, т. е. является  $c$ -числом:

$$A_\mu^\alpha(x) A_\nu^\alpha(x') = \frac{1}{2V} \sum_k \frac{1}{\omega} e^{ik(x-x') - i\omega|t-t'|} \delta_{\mu\nu}.$$

Переходя от суммы к интегралу, получим отсюда

$$A_\mu^\alpha(x) A_\nu^\alpha(x') = D_c(x-x') \delta_{\mu\nu}, \quad (2.3.25)$$

$$D_c(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{i(kx - \omega|t|)} \frac{d^3k}{\omega}, \quad \omega = |k|. \quad (2.3.26)$$

Легко видеть, что связь операторов  $A_\mu(x)$  и  $A_\nu(x')$  равна среднему значению  $T$ -произведения этих операторов в состоянии вакуума:

$$\langle T(A_\mu(x) A_\nu(x')) \rangle_0 = D_c(x-x') \delta_{\mu\nu}. \quad (2.3.27)$$

Сравнение этой формулы с (2.3.24) показывает, что среднее значение в состоянии вакуума  $N$ -произведения операторов потенциалов равно нулю:

$$\langle N(A_\mu(x) A_\nu(x')) \rangle_0 = 0.$$

Определим еще компоненту Фурье  $D_c(k)$  функции  $D_c(x)$ :

$$D_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D_c(k) e^{ikx} d^4k, \quad (2.3.28)$$

где  $d^4k = dk_1 dk_2 dk_3 dk_0$  (все четыре составляющие вектора  $k$  являются независимыми). Воспользуемся для этого соотношением

$$\frac{e^{-i\omega|t|}}{\omega} = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{e^{-ik_0 t}}{k^2} dk_0, \quad (2.3.29)$$

где  $k^2 = \mathbf{k}^2 - k_0^2 \equiv \omega^2 - k_0^2$  и интегрирование производится в комплексной плоскости  $k_0$  вдоль контура  $C$ , изображенного на рис. 2.1. (Справедливость этого соотношения следует из того, что при  $t > 0$  путь интегрирования можно замкнуть полуокружностью бесконечного радиуса, расположенной в нижней полуплоскости.

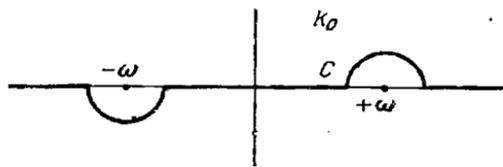


Рис. 2.1.

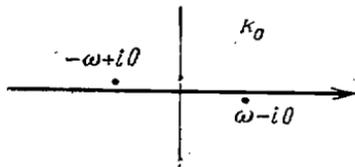


Рис. 2.2.

Тогда интеграл определится вычетом в полюсе  $k_0 = \omega$ . Если же  $t < 0$ , то путь интегрирования должен быть замкнут полуокружностью в верхней полуплоскости. При этом интеграл определится вычетом в точке  $k_0 = -\omega$ . В обоих случаях мы получим равенство (2.3.29.)

Вместо того чтобы интегрировать в (2.3.29) вдоль контура  $C$ , можно интегрировать вдоль вещественной оси  $k_0$ , сместив первый полюс в нижнюю, а второй полюс в верхнюю полуплоскость (рис. 2.2), т. е. следует заменить знаменатель подынтегрального выражения  $k^2$  на  $k^2 - i\eta$ , где  $\eta$  — бесконечно малое положительное число.

Подставляя (2.3.29) в (2.3.26) и сравнивая с (2.3.28), найдем компоненту Фурье  $D_c(k)$ :

$$D_c(k) = \frac{1}{i(k^2 - i0)}. \quad (2.3.30)$$

Так как  $-k^2 D_c(k) = i$ , то  $D_c(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\square D_c(x) = i\delta(x), \quad (2.3.31)$$

т. е.  $D_c(x)$  является функцией Грина волнового уравнения.

Легко выяснить общую структуру сингулярных решений волнового уравнения. Так как компонента Фурье функции  $f(x)$ , удовлетворяющей уравнению  $\square f(x) = -\delta(x)$ , равна

$$f(k) = 1/k^2,$$

то любое сингулярное решение волнового уравнения может быть представлено в виде

$$D(x) = \frac{\alpha}{(2\pi)^4} \int_{C'} e^{ikx} \frac{d^4k}{k^2}, \quad (2.3.32)$$

где  $\alpha$  — постоянная и  $C'$  — контур, вдоль которого производится интегрирование в плоскости комплексного переменного  $k_0$ .

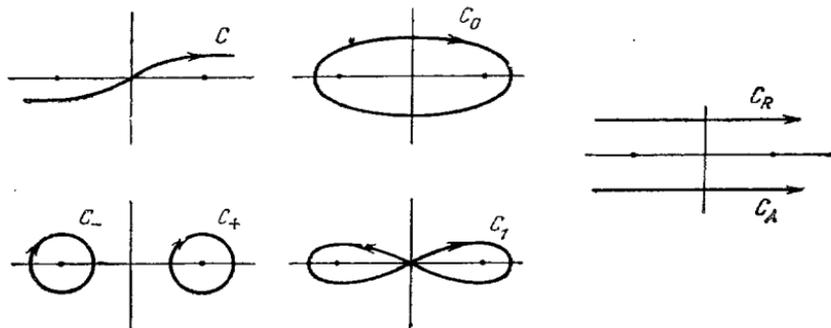


Рис. 2.3.

Можно перечислить все возможные функции вида (2.3.32). Заметим с этой целью, что подынтегральная функция в (2.3.32) имеет только две особые точки в плоскости комплексного переменного  $k_0$ ,  $k_0 = \pm \omega$ , где  $\omega = |k|$ . Поэтому контур  $C'$  можно провести одним из семи способов, указанных на рис. 2.3 (отмечены точки  $k_0 = \pm \omega$ ).

Если контуром является  $C$  и  $\alpha = -i$ , то мы получим, согласно (2.3.29) и (2.3.30), функцию  $D_c(x)$ :

$$D_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_C e^{ikx} \frac{d^4 k}{k^2}. \quad (2.3.33)$$

Контур  $C_0$  и  $\alpha = 1$  соответствует функция  $D_0(x)$ ,

$$D_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} e^{ikx} \frac{d^4 k}{k^2}. \quad (2.3.34)$$

Контурам  $C_R$  и  $C_A$  соответствуют функции Грина волнового уравнения

$$D_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_R} e^{ikx} \frac{d^4 k}{k^2}, \quad D_A(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_A} e^{ikx} \frac{d^4 k}{k^2}. \quad (2.3.35)$$

Действительно, применив к  $D_R(x)$  и  $D_A(x)$  оператор Даламбера и совмещая контуры интегрирования с осью  $k_0$ , получим

$$\square D_{R,A}(x) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} d^4 k = -\delta(x). \quad (2.3.36)$$

Разъясним различие между функциями  $D_R(x)$  и  $D_A(x)$ . Если  $t > 0$ , то контур  $C_R$  можно замкнуть полуокружностью в нижней полуплоскости, и мы получим функцию  $D_0(x)$ . Если же  $t < 0$ , то путь интегрирования можно замкнуть сверху, где у подынтегральной функции нет полюсов, и мы получим нуль. Поэтому

$$D_R(x) = \begin{cases} D_0(x), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.3.37)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$D_A(x) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ -D_0(x), & t < 0. \end{cases} \quad (2.3.38)$$

Мы видим, что функция  $D_R(x)$  обращается в нуль при отрицательных, а функция  $D_A(x)$  — при положительных значениях времени.

Из (2.3.37) и (2.3.38) следует, что решение неоднородного волнового уравнения

$$\square A_\mu(x) = -j_\mu(x),$$

обращающееся в нуль при  $t = -\infty$ , может быть представлено в виде

$$A_\mu(x) = \int D_R(x-x') j_\mu(x') d^4 x'. \quad (2.3.39)$$

Таким образом, функция  $D_R(x)$  является функцией Грина волнового уравнения, приводящей к запаздывающим решениям. Аналогично можно убедиться, что функция Грина  $D_A(x)$  приводит к опережающим решениям.

## § 2.4. Корреляционные функции электромагнитного поля

**2.4.1. Интерференция света.** Развив квантовую механику фотона, мы покажем теперь, как в этой теории описываются интерференционные явления\*).

Как известно, резкая интерференционная картина в интерференционных опытах возникает только при строго определенной разности фаз интерферирующих световых пучков. Поэтому прежде всего нужно разяснить, в каком соотношении находятся фаза волны и число фотонов в ней. Введем с этой целью вместо  $c$  и  $c^+$  новые операторы  $\mathfrak{N}$  и  $e^{\pm i\varphi}$ :

$$c = e^{i\varphi} \sqrt{\mathfrak{N}}, \quad c^+ = \sqrt{\mathfrak{N}} e^{-i\varphi}. \quad (2.4.1)$$

Так как  $c^+c = \mathfrak{N}$ , то  $\mathfrak{N}$  представляет собой оператор числа фотонов, а величины  $e^{\pm i\varphi}$  могут быть названы фазовыми операторами. (Заметим, что  $e^{-i\varphi}e^{i\varphi} = I$ , а  $e^{i\varphi}e^{-i\varphi} \neq I$ . Это связано с тем, что фазовые операторы  $e^{\pm i\varphi}$  не могут быть представлены в виде экспонент от некоторого оператора — оператора фазы, так как такого оператора не существует [11].)

Найдем перестановочное соотношение между фазовым оператором  $e^{i\varphi}$  и оператором числа частиц  $\mathfrak{N}$ . Подставив (2.4.1) в (2.3.2), получим

$$[\mathfrak{N}, e^{i\varphi}] = e^{i\varphi},$$

или

$$[\mathfrak{N}, C] = -iS, \quad [\mathfrak{N}, S] = iC,$$

где  $C$  и  $S$  — операторы косинуса и синуса фазы,  $C \pm iS = e^{\pm i\varphi}$ .

Мы видим, что операторы, соответствующие числу фотонов, и операторы косинуса и синуса фазы, не коммутируют между собой, поэтому неопределенности в этих величинах связаны между собой соотношениями

$$\Delta N \Delta C \sim \Delta S, \quad \Delta N \Delta S \sim \Delta C.$$

Это значит, что электромагнитная волна не может характеризоваться одновременно определенным числом фотонов и определенной фазой.

Как же в таком случае может возникать резкая интерференционная картина в интерференционных опытах? Ответ состоит в том, что мы имеем дело в этих опытах не с одной, а с двумя волнами, разность фаз между которыми может быть строго задана, числа же фотонов в каждой из волн будут при этом не определенными, хотя суммарное число фотонов в обеих волнах также может быть строго задано.

В опыте Юнга, например, фотоны из источника  $\sigma$  (рис.2.4) проходят через два отверстия  $P_1$  и  $P_2$  и, пройдя расстояния

\* ) Изложение этого параграфа основано на работе [10].

$s_1$  и  $s_2$ , попадают в точку  $P$ , где регистрируются счетчиком фотонов. Перемещая счетчик фотонов вдоль экрана  $\Sigma$ , можно наблюдать возникающие на нем интерференционные полосы. Но чтобы возникла интерференционная картина, необходимо, чтобы не производилось опыта, определяющего, по какому пути — 1 или 2 — движется фотон. Всякая попытка определить, по какому из двух путей прошел фотон, уничтожит интерференционную картину. Действительно, в этом случае будет точно выполняться равенство  $\Delta N = 0$  и, следовательно, фаза волн не будет строго определенной.

Регистрирующее устройство в точке  $P(r)$  — счетчик фотонов — поглощает фотоны из поля световой волны.

Если поле характеризуется определенным вектором состояния  $\Phi_i \equiv |i\rangle$ , то в идеальном случае счетчик фотонов реагирует только на электрическую часть  $E^{(+)}(r, t)$  оператора  $E$ , так как вероятность поглощения фотона в точке  $r$  в момент времени  $t$  пропорциональна

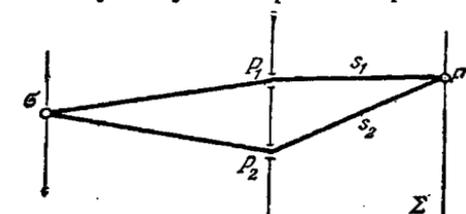


Рис. 2.4.

Если поле характеризуется определенным вектором состояния  $\Phi_i \equiv |i\rangle$ , то в идеальном случае счетчик фотонов реагирует только на электрическую часть  $E^{(+)}(r, t)$  оператора  $E$ , так как вероятность поглощения фотона в точке  $r$  в момент времени  $t$  пропорциональна

$$\omega_{i \rightarrow f} = |\langle f | E^{(+)}(r, t) | i \rangle|^2,$$

где  $|f\rangle$  — конечный вектор состояния поля. Полная вероятность (отнесенная к единице времени)  $w$  получается из этого выражения путем суммирования по  $f$ :

$$w = \sum_f \omega_{i \rightarrow f} = \langle i | E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r, t) | i \rangle, \quad (2.4.2)$$

где  $E^{(-)} = (E^{(+)})^*$  — отрицательно-частотная часть оператора поля  $E$ .

Эта формула справедлива в том случае, когда поле находится в чистом состоянии, характеризуемом определенным вектором состояния. Если же поле находится не в чистом состоянии, а в состоянии смеси, то выражение (2.4.2) должно быть умножено на  $\omega_i$ , где  $\omega_i$  — вероятность нахождения поля в состоянии  $|i\rangle$ , и просуммировано по  $i$ . Вводя матрицу плотности поля

$$\rho = \sum_i |\Phi_i\rangle \omega_i \langle \Phi_i|,$$

мы получим в результате

$$w = \text{Sp} \{ \rho E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r, t) \}. \quad (2.4.3)$$

Этой величине пропорциональна скорость счета идеального счетчика фотонов в точке  $r$  в момент времени  $t$ . Ее можно записать также в виде

$$w = G_{\mu\mu}^{(1)}(x, x), \quad G_{\mu\nu}^{(1)}(x, x') = \text{Sp} \{ \rho E_{\mu}^{(-)}(x) E_{\nu}^{(+)}(x') \}, \quad (2.4.4)$$

где  $x \equiv r, t, x' \equiv r', t'$ . Величина  $G_{\mu\nu}^{(1)}(x, x')$  носит название корреляционной функции поля (точнее — корреляционной функции первого порядка).

Возвращаясь к опыту Юнга, можно утверждать, что поле  $E(r, t)$  в точке  $P$  будет запаздывающей линейной комбинацией полей  $E(r_1, t)$  и  $E(r_2, t)$  в отверстиях  $P_1$  и  $P_2$ . В случае малых и одинаковых отверстий  $E(r, t) = C(E(r_1, t_1) + E(r_2, t_2))$ , где  $t_{1,2} = t - s_{1,2}$  и  $C$  — константа. Поэтому скорость счета счетчика фотонов в точке  $P$  будет пропорциональна

$$\omega(x) = \text{Sp} \{ \rho (E^{(-)}(x_1) + E^{(-)}(x_2)) (E^{(+)}(x_1) + E^{(+)}(x_2)) \}$$

или

$$\omega(x) = G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2) + 2\text{Re} G^{(1)}(x_1, x_2),$$

где  $x_i \equiv (r_i, t_i)$  (у функции  $G^{(1)}$  опущены поляризационные индексы). Вводя фазу корреляционной функции  $\varphi$

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = |G^{(1)}(x_1, x_2)| e^{i\varphi(x_1, x_2)},$$

получим

$$\omega(x) = G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2) + 2|G^{(1)}(x_1, x_2)| \cos \varphi(x_1, x_2).$$

Эта формула показывает, что интерференционная картина обуславливается третьим — осциллирующим — членом, т. е. фазой корреляционной функции.

Интерференционная картина будет наиболее резкой в том случае, когда корреляционная функция факторизуется, т. е. имеет вид

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \mathcal{E}^*(x_1) \mathcal{E}(x_2),$$

где  $\mathcal{E}(x)$  — некоторая комплексная функция  $x$ . В этом случае говорят, что поля в точках  $x_1$  и  $x_2$  когерентны. При этом  $\omega(x)$  принимает вид

$$\omega(x) = |\mathcal{E}(x_1)|^2 + |\mathcal{E}(x_2)|^2 + 2|\mathcal{E}(x_1)||\mathcal{E}(x_2)| \cos \varphi(x_1, x_2)$$

и, если  $\mathcal{E}(x_1) = \mathcal{E}(x_2) = \mathcal{E}$ , то

$$\omega = 2|\mathcal{E}|^2 (1 + \cos \varphi(x_1, x_2)).$$

**2.4.2. Когерентные состояния.** Условие факторизации будет, очевидно, выполняться для таких векторов состояния  $|\rangle$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$E^{(+)}(r, t) |\rangle = \mathbb{E}(r, t) |\rangle, \quad \langle | E^{(-)}(r, t) = \langle | \mathbb{E}^*(r, t). \quad (2.4.5)$$

Эти состояния, являющиеся собственными состояниями положительно-и отрицательно-частотных частей поля, называются когерентными состояниями, функции же  $\mathbb{E}$  представляют собой собственные значения когерентных состояний. Ясно, что они должны удовлетворять классическим уравнениям Максвелла.

Покажем теперь, как могут быть построены векторы когерентных состояний. Будем сперва считать электромагнитное поле свободным и воспользуемся его разложением на плоские волны

$$\mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1,2} i \sqrt{\frac{\omega}{2V}} e^{(\lambda)} \alpha_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t},$$

где  $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}$  — произвольные комплексные  $c$ -числа. Сравнение этого разложения с разложением  $E_{\mu}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  (см. (2.3.1))

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left( \sum_{\lambda=1,2} i \sqrt{\frac{\omega}{2V}} e^{(\lambda)} c_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{i\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega V}} (c_{\mathbf{k}3} + ic_{\mathbf{k}4}) \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$$

дает

$$c_{\mathbf{k}\lambda} | \rangle = \alpha_{\mathbf{k}\lambda} | \rangle, \quad \langle | c_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} = \langle | \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*, \quad \lambda = 1, 2. \quad (2.4.6)$$

Таким образом,  $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}$  представляют собой собственные значения операторов уничтожения фотонов  $c_{\mathbf{k}\lambda}$ .

Из (2.4.6) следует, что

$$| \rangle = \prod_{\mathbf{k}, \lambda} | \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \rangle, \quad (2.4.7)$$

где  $| \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \rangle$  — векторы когерентных состояний для отдельных степеней свободы поля:

$$c_{\mathbf{k}\lambda} | \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = \alpha_{\mathbf{k}\lambda} | \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \rangle, \quad \langle \alpha_{\mathbf{k}\lambda} | c_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger} = \langle \alpha_{\mathbf{k}\lambda} | \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*. \quad (2.4.8)$$

Чтобы найти вектор состояния  $| \alpha_{\mathbf{k}\lambda} \rangle$ , умножим (2.4.8) скалярно на  $\langle n_{\mathbf{k}\lambda} |$ . Учитывая (2.3.4), получим

$$(n+1)^{1/2} \langle n+1 | \alpha \rangle = \alpha \langle n | \alpha \rangle$$

(индексы  $\mathbf{k}$  и  $\lambda$  здесь опущены). Отсюда следует, что

$$\langle n | \alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \langle 0 | \alpha \rangle.$$

Эти величины представляют собой, очевидно, коэффициенты разложения вектора когерентного состояния  $| \alpha \rangle$  по векторам состояний  $| n \rangle$ , соответствующих определенным значениям числа фотонов. Поэтому

$$| \alpha \rangle = \sum_n | n \rangle \langle n | \alpha \rangle = \langle 0 | \alpha \rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} | n \rangle.$$

Чтобы найти  $\langle 0 | \alpha \rangle$ , определим квадрат вектора  $| \alpha \rangle$ :

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0 | \alpha \rangle|^2 \exp |\alpha|^2.$$

Считая, что  $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ , получим

$$\langle 0 | \alpha \rangle = \exp (-|\alpha|^2/2).$$

Итак, вектор когерентного состояния отдельного колебания поля имеет вид

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle. \quad (2.4.9)$$

Отсюда, используя (2.4.7), можно найти вектор когерентного состояния всего поля.

Заметим, что когерентное состояние (2.4.9) может быть представлено также в виде

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha c^\dagger - \alpha^* c} |0\rangle. \quad (2.4.10)$$

Действительно, воспользовавшись соотношением

$$e^{A+B} = e^A e^B \exp\left(-\frac{1}{2}[A, B]\right),$$

справедливым, если  $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$ , получим из (2.4.10)

$$\begin{aligned} e^{\alpha c^\dagger - \alpha^* c} |0\rangle &= e^{\alpha c^\dagger} e^{-\alpha^* c} \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 [c, c^\dagger]\right) |0\rangle = e^{-1/2|\alpha|^2} e^{\alpha c^\dagger} |0\rangle = \\ &= e^{-1/2|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle. \end{aligned}$$

Легко найти среднее число фотонов  $\langle n \rangle$  в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ . Из (2.4.6) следует, что

$$\langle \alpha | c^\dagger c | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \langle \alpha | \alpha \rangle.$$

Но левая часть равенства есть, очевидно, среднее значение  $\langle n \rangle_\alpha$ . Поэтому

$$\langle n \rangle_\alpha = |\alpha|^2. \quad (2.4.11)$$

Векторы различных когерентных состояний не ортогональны между собой. Но набор их является полным (даже сверхполным). Действительно, из (2.4.9) и соотношения

$$\langle \alpha | = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{(n!)^{1/2}} \langle n |$$

с учетом формулы

$$\int (\alpha^*)^n (\alpha)^m e^{-|\alpha|^2} d^2\alpha = \pi n! \delta_{nm},$$

где  $d^2\alpha = d(\operatorname{Re} \alpha) d(\operatorname{Im} \alpha)$ , следует, что

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha | d^2\alpha = \pi \sum_n |n\rangle \langle n|,$$

а, так как  $|n\rangle$  — полный набор ортонормированных векторов состояний, то

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha | d^2\alpha = I.$$

Мы показали, как строятся когерентные состояния поля, предполагая, что поле является свободным. Но когерентные состояния поля могут быть введены и для поля излучения при наличии токов и зарядов. Необходимо лишь, чтобы токи и заряды можно было рассматривать как строго заданные классические величины. В этом случае вектор состояния поля определяется формулой (см. (3.2.27))

$$|\Phi\rangle = \exp\left(i \int d^4x A_\mu(x) j_\mu(x)\right) |0\rangle, \quad (2.4.12)$$

где  $A_\mu$  — оператор поля (2.3.1). Входящая сюда экспонента равна, очевидно,

$$\begin{aligned} \exp\left[i \int d^4x \sum_k \frac{1}{V 2\omega V} e^{i\lambda x} (c_{k\lambda} e^{ikx} + c_{k\lambda}^\dagger e^{-ikx}) j_\mu(x)\right] = \\ = \exp\left\{\sum_k \frac{i}{V 2\omega V} [(e^{i\lambda} j(k)) c_{k\lambda} + (e^{i\lambda} j^*(k)) c_{k\lambda}^\dagger]\right\}, \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

где  $j_\mu(k)$  — фурье-компонента плотности тока:

$$j_\mu(k) = \int d^4x e^{ikx} j_\mu(x), \quad j_\mu(-k) = j_\mu^*(k).$$

Сравнивая (2.4.12) и (2.4.13) с (2.4.10), мы видим, что  $|\Phi\rangle$  действительно представляет собой когерентное состояние

$$|\Phi\rangle = \prod_{k, \lambda} |\alpha_{k\lambda}\rangle,$$

где

$$\alpha_{k\lambda} = \frac{i(e^{i\lambda} j(k))}{V 2\omega V}.$$

Найдем собственное значение положительно-частотной части оператора поля  $A_\mu^{(+)}$ :

$$A_\mu^{(+)}(x) |\Phi\rangle = \mathcal{A}_\mu^{(+)}(x) |\Phi\rangle. \quad (2.4.14)$$

Из (2.4.14) и аналогичной формулы

$$\langle \Phi | A_\mu^{(-)}(x) = \langle \Phi | \mathcal{A}_\mu^{(-)}(x)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \langle \Phi | A_\mu(x) | \Phi \rangle &= \mathcal{A}_\mu^{(-)}(x) + \mathcal{A}_\mu^{(+)}(x) \equiv \mathcal{A}_\mu(x), \\ \mathcal{A}_\mu(x) &= \langle 0 | \exp(-i \int d^4x A_\nu j_\nu) A_\mu(x) \exp(i \int d^4x A_\nu j_\nu) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Используя формулу

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

и соотношения (2.3.13), (2.3.37) и (2.3.38), получим отсюда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu(x) &= \langle 0 | A_\mu(x) + i \int d^4x' [A_\mu(x), A_\nu(x')] j_\nu(x') | 0 \rangle = \\ &= \int d^4x' D_0(x-x') j_\mu(x') = \int d^4x' [D_R(x-x') - D_A(x-x')] j_\mu(x'). \end{aligned}$$

Мы видим, что  $\mathcal{E}_\mu(x)$  представляет собой разность запаздывающих и опережающих потенциалов, создаваемых током  $j_\mu(x)$ .

**2.4.3. Корреляционные функции и когерентность высших порядков.** Входящий в определение корреляционной функции  $G^{(1)}$  оператор  $\rho$  описывает статистические свойства поля как некоторой динамической системы. Поэтому изучение корреляционной функции позволяет, в принципе, получить информацию о статистических свойствах поля. Однако, с этой точки зрения одной функции  $G^{(1)}$  недостаточно и необходимо знание корреляционных функций высших порядков,

$$G_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2n}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \\ = \text{Sp} [\rho E_{\mu_1}^{(-)}(x_1) \dots E_{\mu_n}^{(-)}(x_n) E_{\mu_{n+1}}^{(+)}(x_{n+1}) \dots E_{\mu_{2n}}^{(+)}(x_{2n})]. \quad (2.4.15)$$

Только в простейшей модели статистических свойств поля — для так называемых гауссовых полей — все корреляционные функции высших порядков сводятся к корреляционной функции первого порядка, в общем же случае это не так.

На величину  $G^{(n)}$  реагирует детектор фотонов, состоящий из  $n$  атомов, а именно, если производится регистрация  $n$ -кратных совпадений в поглощении фотонов, то скорость счета детектора, отнесенная к единице времени, будет пропорциональна  $G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1, \dots, \mathbf{r}_n t_n, \mathbf{r}_n t_n, \dots, \mathbf{r}_1 t_1)$ , где  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  — координаты поглощающих фотоны атомов и  $t_1, t_2, \dots, t_n$  — моменты поглощения (поляризационные индексы  $\mu_1, \mu_2, \dots$  опущены).

Статистические свойства поля в конечном счете определяются источниками поля, в которых протекают, вообще говоря, неконтролируемые процессы. Поэтому, как правило, весьма сложный характер имеет и статистический оператор.

Простейшими свойствами обладает идеальный источник поля, каковым является источник с заданным распределением токов и зарядов. В нем, по определению, нет никаких неконтролируемых процессов и, в частности, излучение не оказывает обратной реакции на заряды источника.

Заданный классический ток создает поле, которое, как мы видели, находится в когерентном состоянии (мы будем называть такое поле когерентным). Ясно, что все корреляционные функции когерентного поля обладают свойством факторизации

$$G_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = \prod_{j=1}^n \mathcal{E}_{\mu_j}^*(x_j) \prod_{j=n+1}^{2n} \mathcal{E}_{\mu_j}(x_j), \quad (2.4.16)$$

где  $\mathcal{E}_{\mu_j}(x_j)$  — собственное значение вектора когерентного состояния поля. Эта величина, как уже говорилось, удовлетворяет классическим уравнениям Максвелла с заданным распределением токов.

Напомним, что факторизация корреляционной функции 1-го порядка обеспечивает максимально возможную резкость обычной оптической интерференционной картины, или, выражаясь более точно, картины, регистрируемой одноатомным счетчиком фотонов.

Практически, конечно, невозможно создать источник с абсолютно заданным распределением токов; поэтому не существует и строго когерентных полей. Но могут быть созданы поля, для которых корреляционные функции нескольких первых порядков факторизуются. Если факторизация имеет место при  $n \leq M$  и ее нет при  $n > M$ , то говорят, что поле обладает когерентностью  $M$ -порядка.

Отсутствие полной когерентности (при которой  $M = \infty$ ) связано с тем, что источник никогда не может быть идеальным, и поэтому он не создает поле в чистом когерентном состоянии: практически поле всегда будет находиться в состоянии смеси.

Если бы поле находилось в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ , то статистический оператор имел бы, очевидно, вид

$$\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

(речь идет для простоты об одной степени свободы поля). В случае же смеси  $\rho$  будет определяться формулой

$$\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha, \quad (2.4.17)$$

где  $P(\alpha)$  — некоторая функция  $\alpha$ , называемая весовой функцией. Поле называется гауссовым, если

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle} \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{\langle n \rangle}\right).$$

Здесь  $\langle n \rangle$  представляет собой, очевидно, среднее значение  $|\alpha|^2$ :

$$\langle n \rangle = \int |\alpha|^2 P(\alpha) d^2\alpha.$$

Но, согласно (2.4.10), это есть среднее значение числа фотонов в состоянии  $|\alpha\rangle$ . Поэтому можно сказать, что гауссовы поля характеризуются только средними числами фотонов разных сортов.

Можно показать, что гауссово поле возникает в том случае, когда имеется очень много источников, подобных друг другу, но излучающих независимо друг от друга.

Заметим, что если перейти от когерентных состояний  $|\alpha\rangle$  к состояниям с определенным числом фотонов  $|n\rangle$ , то в соответствии с (2.4.9) статистический оператор будет иметь вид

$$\rho = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \sum_m \left( \frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^m |m\rangle\langle m|.$$

Эта формула становится очевидной для равновесного излучения. Действительно, в этом случае

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

и

$$\rho = (1 - e^{-\hbar\omega/kT}) \sum_m e^{-m\hbar\omega/kT} |m\rangle\langle m|,$$

где  $(1 - e^{-\hbar\omega/kT}) e^{-m\hbar\omega/kT}$  представляет собой вероятность того, что поле содержит  $m$  фотонов.

Определим теперь корреляционные функции в случае гауссова статистического оператора.

Используя общее выражение (2.4.17) для  $\rho$ , можно, очевидно, представить  $G_{\mu\nu}^{(1)}(x, x')$  в виде

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(rt, r't') = \int P(\{\alpha_k\}) \sum_{k, k', \lambda} \frac{1}{2} (\omega\omega')^{1/2} \times \\ \times \alpha_k^* \alpha_{k'} e^{-i(kr - k'r')} e^{i(\omega t - \omega't')} e_{\mu}^{*(\lambda)} e_{\nu}^{(\lambda)} \prod_l d^2\alpha_l,$$

где  $P(\{\alpha_k\})$  — весовая функция. Для гауссовых полей

$$P(\{\alpha_k\}) = \prod_k \frac{1}{\pi \langle n_k \rangle} \exp\left(-\frac{|\alpha_k|^2}{\langle n_k \rangle}\right), \\ \int P(\{\alpha_k\}) \alpha_k^* \alpha_{k'} \prod_l d^2\alpha_l = \langle n_{k'} \rangle \delta_{k'k}.$$

Поэтому

$$G_{\mu\nu}^{(1)}(rt, r't') = \\ = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \sum_{\lambda} e_{\mu}^{*(\lambda)} e_{\nu}^{(\lambda)} \langle n_{k\lambda} \rangle \omega e^{-ik(r-r')} e^{i\omega(t-t')} d^3k. \quad (2.4.18)$$

Поступая аналогично, можно найти корреляционную функцию второго порядка:

$$G_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{(2)}(x_1x_2, x_3x_4) = \\ = G_{\mu_1\mu_3}^{(1)}(x_1, x_3) G_{\mu_2\mu_4}^{(1)}(x_2, x_4) + G_{\mu_1\mu_4}^{(1)}(x_1, x_4) G_{\mu_2\mu_3}^{(1)}(x_2, x_3). \quad (2.4.19)$$

Мы видим, что эта функция полностью выражается через корреляционную функцию первого порядка. Это же утверждение справедливо и для корреляционных функций более высокого порядка:

$$G_{\mu_1\mu_2 \dots \mu_{2n}}(x_1 \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{2n}) = \sum \prod_{j=1}^n G_{\mu_j\nu_j}^{(1)}(x_j, y_j),$$

где индексы  $\nu_j$  и координаты  $y_j$  при  $j=1, \dots, n$  являются перестановками из двух наборов  $\mu_{n+1}, \dots, \mu_{2n}$  и  $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$  соответственно, а суммирование производится по всем  $n!$  перестановкам.

Из этих же формул следует, что для гауссовых полей максимально возможна только когерентность первого порядка. Действительно, если имеет место факторизация функции  $G^{(1)}$ , то условие факторизации (2.4.16) не будет выполняться при  $n \geq 2$ , так как

$$G_{\mu \dots \mu}^{(n)}(x \dots x, x \dots x) = n! [G_{\mu\mu}^{(1)}(x, x)]^n.$$

Проиллюстрируем эту ситуацию на примере волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ . В этом случае  $G^{(1)}$  будет в соответствии

с (2.4.18) определяться формулой

$$G^{(1)}(y_1 t_1, y_2 t_2) = \frac{1}{4\pi L^2} \int \langle n_k \rangle \omega e^{i\omega s} dk_z,$$

или

$$G^{(1)} = \frac{1}{4\pi L^2} \int_0^\infty \langle n_k \rangle \omega e^{i\omega s} d\omega,$$

где  $L$  — нормировочная длина,  $s = (z_1 - z_2) - (t_1 - t_2)$  и  $\omega = |k_z|$ . Предположим теперь, что

$$\langle n_k \rangle \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}.$$

Тогда

$$G^{(1)}(y_1 t_1, y_2 t_2) = \frac{1}{2} U e^{i\omega_0 s - \gamma |s|},$$

где  $U$  — константа. Мы видим, что если  $|s| \ll 1/\gamma$ , то приближенно выполняется условие когерентности первого порядка.

Согласно (2.4.19) можно вычислить корреляционную функцию второго порядка:

$$G^{(2)}(y_1 t_1, y_2 t_2, y_2 t_2, y_1 t_1) = \left(\frac{1}{2} U\right)^2 (1 + e^{-2\gamma |s|}).$$

Присутствие здесь члена  $e^{-2\gamma |s|}$  показывает, что условие когерентности второго порядка никогда не выполняется.

Как мы говорили выше, этим выражением определяется скорость счета задержанных совпадений пар фотонов. Эксперимент подтверждает найденную зависимость этой величины от  $s$  (опыт Хэнбери — Брауна — Твисса) [12].

**2.4.4. Поляризационная матрица плотности.** Корреляционная функция  $G_{\mu\nu}^{(1)}$  определяет также поляризационные свойства электромагнитного поля. Их рассматривают в заданной точке, поэтому в  $G^{(1)}$  нужно положить  $x = x'$ . Если ввести тензор

$$\rho_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu}^{(1)}(x, x)/G_{\mu\mu}^{(1)}(x, x),$$

то он и может служить для описания свойств поляризации поля. Этот тензор называется поляризационной матрицей плотности. Поскольку  $G_{\mu\nu}^{(1)*}(x, x') = G_{\nu\mu}^{(1)}(x', x)$ , то тензор  $\rho_{\mu\nu}(x) \equiv \rho_{\mu\nu}$  эрмитов:  $\rho_{\mu\nu} = \rho_{\nu\mu}^*$ .

Для когерентного поля  $G_{\mu\nu}^{(1)}(x, x')$  факторизуется, поэтому таким же свойством обладает и  $\rho_{\mu\nu}$ :

$$\rho_{\mu\nu} = e_\mu^* e_\nu, \quad (2.4.20)$$

где  $e_\mu$  — единичный вектор вдоль  $E^{(+)}(x)$ . В этом случае говорят о состоянии полной поляризации, если же матрица  $\rho_{\mu\nu}$  не факторизуется, то говорят о состоянии частичной поляризации.

В случае полной поляризации, разложив  $e$  по двум произвольным ортогональным ортам  $e^{(1)}$ ,  $e^{(2)}$ ,

$$e = a_1 e^{(1)} + a_2 e^{(2)},$$

можно сказать, что состояние поляризации определяется парой комплексных чисел  $a_1$  и  $a_2$ . Величины  $|a_1|^2$  и  $|a_2|^2$  представляют собой вероятности определенной линейной поляризации фотона, определяемой ортами  $e^{(1)}$  и  $e^{(2)}$ . Так как  $a_1$  и  $a_2$  связаны условием нормировки

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$$

и, кроме того, общий фазовый множитель  $e$  произволен, то вектор поляризации можно представить в виде

$$\vec{e} = e^{(1)} \cos \alpha + e^{(2)} \sin \alpha e^{i\beta},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — два вещественных параметра.

Если  $e^{(1)}$  и  $e^{(2)}$  направлены вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$ , то случай  $\beta = 0$  означает линейную поляризацию под углом  $\alpha$  к оси  $x_1$ .

Значения  $\beta = \pm \pi/2$ ,  $\alpha = \pi/4$  означают круговые поляризации, произвольные же  $\alpha$  и  $\beta$  соответствуют эллиптической поляризации.

Матрицу  $\rho$  можно записать в виде

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix},$$

где  $\xi_i$  — некоторые вещественные величины (они называются параметрами Стокса). Если состояние полностью поляризовано, то

$$\xi^2 \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1.$$

В случае частично поляризованного состояния  $\xi^2 < 1$ .

Если  $\xi_j = 0$ , то  $\rho = 1/2$ . При этом вероятность любой поляризации равна  $1/2$ . Такое состояние называется полностью неполяризованным.

Матрицу  $\rho$  можно записать также в виде

$$\rho = \frac{1}{2} \left( I + \sum_{j=1}^3 \xi_j \tau_j \right), \quad (2.4.21)$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эти четыре матрицы образуют полную систему линейно-независимых двумерных матриц (матрицы  $\tau_j$  совпадают с матрицами Паули  $\sigma_j$ ).

Величины  $\xi_j$  можно выразить через  $\rho$ :

$$\xi_j = \text{Sp}(\rho \tau_j).$$

Эти величины могут быть непосредственно определены экспериментально. Так, параметр  $\xi_3$  определяется вероятностью поляризации по оси  $x_1$ :

$$\rho_{11} = 1/2 (1 + \xi_3).$$

Для определения  $\xi_1$  необходимо найти вероятность поляризации по оси, составляющей с осью  $x_1$  угол  $\pi/4$ . Действительно, переход к такой оси соответствует преобразованию ортов

$$e^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{(1)'} + e^{(2)'}), \quad e^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{(1)'} - e^{(2)'}).$$

Представив  $e$  в виде  $e = a_1' e^{(1)'} + a_2' e^{(2)'}$  и вводя матрицу плотности  $\rho'$ ,

$$\rho'_{\mu\nu} = \overline{e_{\mu}'^* e_{\nu}'},$$

найдем вероятность линейной поляризации, соответствующей  $e^{(1)'}$ :

$$\rho'_{11} = 1/2 (\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{12} + \rho_{21}) = 1/2 (1 + \xi_1).$$

Наконец, для нахождения  $\xi_2$  необходимо рассмотреть круговую поляризацию, орты которой  $e^{(1)''}$  и  $e^{(2)''}$  связаны с  $e^{(1)}$  и  $e^{(2)}$  соотношениями

$$e^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{(1)''} + e^{(2)''}), \quad e^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}i} (e^{(1)''} - e^{(2)''}).$$

Вероятность поляризации, соответствующей орту  $e^{(1)''}$ , выражается аналогично предыдущему следующим образом:

$$\rho''_{11} = 1/2 [\rho_{11} + \rho_{22} + i(\rho_{12} - \rho_{21})] = 1/2 (1 + \xi_2).$$

Мы видим, что определение поляризации пучка фотонов требует измерения двух линейных (под углом  $\pi/4$  одна к другой) и одной круговой поляризации.

## § 2.5. Квантование электронно-позитронного поля

**2.5.1. Условия квантования.** В главе 1 мы рассматривали уравнение Дирака как квантовомеханическое уравнение движения отдельной частицы. Но его можно рассматривать также и как уравнение поля, которое называется электронно-позитронным (или просто электронным). В этом смысле уравнение Дирака аналогично уравнениям Максвелла для электромагнитного поля.

Электронное поле характеризуется биспинорами  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$ , которые подобно потенциалам  $A_{\mu}(x)$  в теории квантованного электромагнитного поля следует считать операторами, действующими на вектор состояния системы в пространстве чисел частиц и удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям.

Чтобы установить эти соотношения, которые носят название условий квантования электронно-позитронного поля, введем в рассмотрение совокупность стационарных решений уравнений Дирака для электрона в произвольном, но достаточно слабом постоянном внешнем электромагнитном поле,  $\psi_s(x) = \psi_s(\mathbf{r}) e^{-i\omega_s t}$ . В этом случае возможно разделение решений на решения с положительными и отрицательными частотами, причем первым соответствуют электронные, а вторым — позитронные состояния. Функции  $\psi_s(x)$  обра-

зуют ортонормированную систему функций и поэтому произвольное решение уравнений Дирака в рассматриваемом поле может быть представлено в виде суперпозиции  $\psi_s(x)$ :

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{\omega_s > 0} a_s \psi_s(x) + \sum_{\omega_s < 0} b_s^+ \psi_s(x), \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{\omega_s > 0} a_s^+ \bar{\psi}_s(x) + \sum_{\omega_s < 0} b_s \bar{\psi}_s(x),\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

где  $a_s, b_s$  — некоторые постоянные. Эти величины мы будем теперь, так же как и величины  $c_{k\lambda}$  в разложении электромагнитных потенциалов (2.3.1), считать не обычными числами, а операторами, действующими в пространстве чисел частиц — электронов и позитронов.

Чтобы установить свойства этих операторов, определим энергию  $H$  и заряд  $Q$  электронно-позитронного поля, которые определяются формулами

$$H = \frac{1}{2i} \int d^3x \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi^+ \right) \psi - \psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \psi \right), \quad Q = e \int d^3x \psi^+ \psi.\tag{2.5.2}$$

Подставляя сюда разложения (2.5.1) и используя условие ортонормированности функций  $\psi_s(r)$ , получим

$$\begin{aligned}H &= \sum_{\omega_s > 0} \varepsilon_s a_s^+ a_s - \sum_{\omega_s < 0} \varepsilon_s b_s b_s^+, \\ Q &= e \sum_{\omega_s > 0} a_s^+ a_s + e \sum_{\omega_s < 0} b_s b_s^+, \end{aligned}\tag{2.5.3}$$

где  $\varepsilon_s = |\omega_s|$ .

Первые слагаемые здесь связаны с электронными состояниями. Эти слагаемые должны, очевидно, представлять собой суммарные энергию и заряд системы электронов. Поэтому величину  $a_s^+ a_s$  мы должны интерпретировать как оператор числа электронов в квантовомеханическом состоянии  $s$ . Этот оператор мы обозначим через  $n_s^{(+)}$ :

$$n_s^{(+)} = a_s^+ a_s.$$

Согласно принципу Паули, его собственные значения  $n_s^{(+)}$  не должны превышать единицы:

$$n_s^{(+)} = 0, 1.$$

Поэтому операторы  $a_s, a_s^+$  должны удовлетворять таким перестановочным условиям, которые приводили бы только к этим двум собственным значениям  $n_s^{(+)}$ . Мы примем, что  $a_s$  и  $a_s^+$  являются эрмитово-сопряженными операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям:

$$\{a_s, a_{s'}^+\} = \delta_{ss'}, \quad \{a_s, a_{s'}\} = 0, \quad \{a_s^+, a_{s'}^+\} = 0,\tag{2.5.4}$$

где  $\{A, B\} = AB + BA$ . (Эта величина называется антикоммутатором операторов  $A$  и  $B$ .) Ясно, что условия квантования (2.5.4) приводят к принципу Паули. Действительно, замечая, что

$$(n_s^{(+)})^2 = a_s^+ a_s a_s^+ a_s = a_s^+ a_s (1 - a_s a_s^+)$$

и что, согласно (2.5.4),  $a_s^2 = 0$ , получим  $(n_s^{(+)})^2 = a_s^+ a_s = n_s^{(+)}$ , откуда и следует, что собственные значения оператора  $n_s^{(+)}$  равны 0 и 1.

Рассмотрим теперь вторые слагаемые, связанные с решениями с отрицательными частотами. Эти слагаемые должны определять энергию и заряд позитронов. Чтобы такая интерпретация была возможной, мы примем, что  $b_s$  и  $b_s^+$  являются эрмитово-сопряженными операторами, удовлетворяющими тем же перестановочным соотношениям, что и  $a_s$ ,  $a_s^+$ :

$$\{b_s, b_{s'}^+\} = \delta_{ss'}, \quad \{b_s, b_{s'}\} = 0, \quad \{b_s^+, b_{s'}^+\} = 0, \quad (2.5.5)$$

а также соотношениям

$$\{a_s, b_{s'}\} = \{a_s, b_{s'}^+\} = \{a_s^+, b_{s'}\} = \{a_s^+, b_{s'}^+\} = 0, \quad (2.5.6)$$

и будем считать, что число позитронов в состоянии  $s$  есть собственное значение оператора  $n_s^{(-)}$ :

$$n_s^{(-)} = b_s^+ b_s.$$

Ясно, что собственные значения оператора  $n_s^{(-)}$  в силу перестановочных условий (2.5.5), так же как и оператора  $n_s^{(+)}$ , равны 0, 1.

Используя определение оператора  $n_s^{(\pm)}$  и условия квантования (2.5.4), (2.5.5), можно переписать выражения (2.5.3) для суммарных энергии и заряда электронно-позитронного поля в виде

$$H = \sum_s (n_s^{(+)} \epsilon_s^{(+)} + n_s^{(-)} \epsilon_s^{(-)}) + E_0, \quad Q = e \sum_s (n_s^{(+)} - n_s^{(-)}) + Q_0,$$

где  $\epsilon_s^{(\pm)} = |\omega_s|$  и

$$E_0 = - \sum_s \epsilon_s^{(-)}, \quad Q_0 = e \sum_{\omega_s < 0} 1.$$

Мы видим, что условия квантования (2.5.4) и (2.5.5) приводят к правильной корпускулярной картине электронного поля: как и должно быть, каждое занятое электронное состояние вносит в суммарную энергию поля вклад  $\epsilon_s^{(+)}$  и в суммарный заряд — вклад  $e$ , а каждое занятое позитронное состояние вносит в эти величины соответственно вклады  $\epsilon_s^{(-)}$  и  $-e$ .

Константы  $E_0$  и  $Q_0$  представляют собой энергию и заряд в состоянии вакуума, т. е. в состоянии поля с минимальной энергией ( $n_s^{(\pm)} = 0$ ). Они лишены физического смысла и могут быть, как мы сейчас покажем, устранены простым изменением в определениях операторов энергии и заряда электронного поля. Дело в том, что использованное нами определение вектора плотности тока  $j_\mu = ie (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\beta$  базировалось на том, что это — единственная квад-

ратичная форма, построенная из компонент биспиноров  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , представляющая собой вектор и удовлетворяющая уравнению непрерывности. Другая возможная форма  $ie(\gamma_{\mu})_{\alpha\beta}\psi_{\beta}\bar{\psi}_{\alpha}$  отличается только порядком множителей  $\bar{\psi}_{\alpha}$  и  $\psi_{\beta}$  и совпадает с первой, если  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  рассматриваются как обычные числа. Ситуация, однако, существенно меняется, если  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  считаются не обычными числами, а операторами. В этом случае обе формы различаются, и возникает следующая возможность определения оператора плотности электрического тока:

$$j_{\mu} = \frac{ie}{2} (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} (\bar{\psi}_{\alpha}(x)\psi_{\beta}(x) - \psi_{\beta}(x)\bar{\psi}_{\alpha}(x)).$$

Этот вектор по-прежнему удовлетворяет уравнению непрерывности  $\partial j_{\mu}/\partial x_{\mu} = 0$  и приводит, как легко проверить, к полному заряду поля

$$Q = -i \int j_4(x) d^3x = \frac{e}{2} \sum_s ([a_s^{\dagger}, a_s] - [b_s^{\dagger}, b_s]) = e \sum_s (n_s^{(+)} - n_s^{(-)}).$$

Мы видим, что теперь заряд вакуума равен нулю,  $Q_0 = 0$ . Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться именно этим определением оператора плотности тока, которое может быть сокращенно записано в виде

$$j_{\mu}(x) = \frac{ie}{2} [\psi(x), \gamma_{\mu}\psi(x)], \quad (2.5.7)$$

где  $[A, B]$  — коммутатор операторов  $A$  и  $B$ .

Вводя зарядово-сопряженные операторы поля

$$\psi^c(x) = C\bar{\psi}(x), \quad \bar{\psi}^c = C^{-1}\psi(x),$$

можно оператор плотности тока представить в виде

$$j_{\mu}(x) = \frac{ie}{2} (\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x) - \bar{\psi}^c(x)\gamma_{\mu}\psi^c(x)). \quad (2.5.8)$$

Это выражение остается неизменным, если заменить операторы  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  зарядово-сопряженными операторами  $\psi^c$  и  $\bar{\psi}^c$  и изменить при этом знак заряда  $e$ .

Кроме оператора плотности тока, можно формально переопределить оператор энергии поля, понимая под произведением операторов полей в формуле (2.5.2) так называемое нормальное произведение (см. п. 2.5.4). При этом в формуле для  $E$  величина  $b_s b_s^{\dagger}$  заменится на  $-b_s^{\dagger} b_s$  и исчезнет константа  $E_0$ .

Итак, после переопределения операторов плотности тока и энергии электронного поля энергия и заряд поля становятся равными:

$$E = \sum_s (n_s^{(+)}\epsilon_s^{(+)} + n_s^{(-)}\epsilon_s^{(-)}), \quad Q = e \sum_s (n_s^{(+)} - n_s^{(-)}), \quad (2.5.9)$$

в полном соответствии с корпускулярной картиной поля.

**2.5.2. Операторы испускания и поглощения электронов и позитронов.** Выясним теперь физический смысл операторов  $a_s$ ,  $a_s^+$  и  $b_s$ ,  $b_s^+$ .

Обозначая через  $|n_s^{(\pm)}\rangle$  собственный вектор состояния оператора  $n_s^{(\pm)}$ , отвечающий собственному значению  $n_s^{(\pm)}$ , и учитывая, что возможные значения  $n_s^{(\pm)}$  равны 0 и 1, имеем

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_s^+ | 0 \rangle \langle 0 | a_s | 0 \rangle + \langle 0 | a_s^+ | 1 \rangle \langle 1 | a_s | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 1 | a_s^+ | 0 \rangle \langle 0 | a_s | 1 \rangle + \langle 1 | a_s^+ | 1 \rangle \langle 1 | a_s | 1 \rangle &= 1, \end{aligned}$$

а так как операторы  $a_s$  и  $a_s^+$  эрмитово-сопряжены, т. е.  $\langle i | a_s | k \rangle = \langle k | a_s^+ | i \rangle^*$ ;  $i, k = 0, 1$ , то

$$\begin{aligned} |\langle 0 | a_s^+ | 0 \rangle|^2 + |\langle 0 | a_s^+ | 1 \rangle|^2 &= 0, \\ |\langle 1 | a_s^+ | 0 \rangle|^2 + |\langle 1 | a_s^+ | 1 \rangle|^2 &= 1, \end{aligned}$$

и, следовательно,  $\langle 0 | a_s^+ | 0 \rangle = \langle 0 | a_s^+ | 1 \rangle = 0$ . Из условия  $a_s^+ a_s^+ = 0$  легко заключить, что  $\langle 1 | a_s^+ | 1 \rangle = 0$ , и поэтому  $\langle 1 | a_s^+ | 0 \rangle = 1$ .

Итак,

$$\begin{aligned} \langle 1_s^{(+)} | a_s^+ | 0_s^{(+)} \rangle &= 1, & \langle 0_s^{(+)} | a_s | 1_s^{(+)} \rangle &= 1, \\ \langle 1_s^{(+)} | a_s | 0_s^{(+)} \rangle &= 0, & \langle 0_s^{(+)} | a_s^+ | 1_s^{(+)} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Эти формулы показывают, что операторы  $a_s^+$  и  $a_s$  можно интерпретировать как операторы рождения и уничтожения электрона в состоянии  $s$ .

Аналогичный смысл имеют операторы  $b_s^+$  и  $b_s$  для позитрона: они представляют собой операторы рождения и уничтожения позитрона в состоянии  $s$ :

$$\begin{aligned} \langle 1_s^{(-)} | b_s^+ | 0_s^{(-)} \rangle &= 1, & \langle 0_s^{(-)} | b_s | 1_s^{(-)} \rangle &= 1, \\ \langle 1_s^{(-)} | b_s | 0_s^{(-)} \rangle &= 0, & \langle 0_s^{(-)} | b_s^+ | 1_s^{(-)} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

С помощью операторов рождения и уничтожения можно строить векторы различных состояний системы электронов и позитронов. Введем с этой целью вектор состояния вакуума электронно-позитронного поля  $|0\rangle$ , удовлетворяющий уравнениям

$$a_s |0\rangle = 0, \quad b_s |0\rangle = 0. \quad (2.5.12)$$

Построим сперва векторы одночастичных состояний. Подействовав на вектор состояния вакуума операторами рождения частиц, мы получим векторы одночастичных состояний. Например, вектор

$$|1_s^{(+)}\rangle = a_s^+ |0\rangle$$

представляет собой вектор состояния электронного поля с одним электроном, находящимся в состоянии  $s$ . Действительно, этот вектор является собственным вектором оператора числа электронов с квантовыми числами  $s$ , принадлежащим собственному значению  $n_s^{(+)} = 1$ :

$$n_s^{(+)} |1_s^{(+)}\rangle = a_s^+ a_s a_s^+ |0\rangle = a_s^+ |0\rangle - a_s a_s^+ a_s^+ |0\rangle = |1_s^{(+)}\rangle.$$

Аналогично вектор

$$|1_s^{(-)}\rangle = b_s^+ |0\rangle$$

представляет собой вектор состояния электронного поля с одним позитроном, находящимся в состоянии  $s$ .

Учитывая условия нормировки этих векторов

$$\langle 1_s^{(+)} | 1_s^{(+)} \rangle = 1, \quad \langle 1_s^{(-)} | 1_s^{(-)} \rangle = 1,$$

мы получим формулы (2.5.10), (2.5.11) для матричных элементов операторов рождения и уничтожения частиц.

Заметим, что из этих формул вытекают следующие соотношения для средних по состоянию вакуума от произведений операторов рождения и уничтожения частиц:

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_s^+ a_s | 0 \rangle &= 0, & \langle 0 | b_s^+ b_s | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 0 | a_s a_s^+ | 0 \rangle &= 1, & \langle 0 | b_s b_s^+ | 0 \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Построим теперь векторы многочастичных состояний. Для этого нужно подействовать на вектор состояния вакуума не одним, а несколькими (по числу присутствующих частиц) операторами рождения частиц. Например, вектор

$$|1_s^{(+)} 1_{s'}^{(+)}\rangle = a_s^+ a_{s'}^+ |0\rangle$$

представляет собой вектор состояния поля с двумя электронами, обладающими квантовыми числами  $s$  и  $s'$ , а вектор

$$|1_s^{(+)} 1_{s'}^{(-)}\rangle = a_s^+ b_{s'}^+ |0\rangle$$

представляет собой вектор состояния поля с одним электроном, обладающим квантовыми числами  $s$ , и одним позитроном, обладающим квантовыми числами  $s'$ .

Так как  $a_s^+ a_s^+ = 0$ , то  $|1_s^{(+)} 1_s^{(+)}\rangle \equiv |2_s^{(+)}\rangle = 0$ , т. е. не существует состояний поля с двумя электронами, обладающими одинаковыми квантовыми числами.

Возвратимся теперь к разложению (2.5.1). В соответствии со смыслом операторов  $a_s^+$ ,  $a_s$  и  $b_s^+$ ,  $b_s$  можно сказать, что  $\bar{\psi}(x)$  объединяет операторы рождения электронов и уничтожения позитронов, а  $\psi(x)$  — операторы уничтожения электронов и рождения позитронов. Используя формулы (2.5.10) и (2.5.11), можно найти матричные элементы операторов  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , соответствующие рождению и поглощению электронов и позитронов:

$$\begin{aligned} \langle 1_s^{(+)} | \bar{\psi}(x) | 0_s^{(+)} \rangle &= \bar{\psi}_s^{(+)}(x), & \langle 0_s^{(+)} | \psi(x) | 1_s^{(+)} \rangle &= \psi_s^{(+)}(x), \\ \langle 0_s^{(-)} | \bar{\psi}(x) | 1_s^{(-)} \rangle &= \bar{\psi}_s^{(-)}(x), & \langle 1_s^{(-)} | \psi(x) | 0_s^{(-)} \rangle &= \psi_s^{(-)}(x), \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

где  $\psi_s^{(+)}(x) = \psi_s^{(+)}(r) e^{-i\omega_s t}$  и  $\bar{\psi}_s^{(-)}(x) = \bar{\psi}_s^{(-)}(r) e^{i\omega_s t}$  — решения уравнения Дирака для электрона в постоянном внешнем поле, соответствующие положительным и отрицательным частотам.

В этих формулах постоянное внешнее электромагнитное поле может быть произвольным, лишь бы оно было достаточно слабым. Поэтому, в частности, они относятся и к случаю свободных частиц. В этом случае можно ввести состояния частиц с определенным импульсом и определенной поляризацией, т. е. в качестве собственных функций  $\psi_s^{(\pm)}(x)$  взять плоские волны

$$\psi_{\rho\mu}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2V_E}} u^\mu(\pm p) e^{\pm i p x}.$$

При этом разложение (2.5.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\rho, \mu} \frac{1}{\sqrt{2V_E}} [a_{\rho\mu} u^\mu(p) e^{i p x} + b_{\rho\mu}^+ u^\mu(-p) e^{-i p x}], \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{\rho, \mu} \frac{1}{\sqrt{2V_E}} [a_{\rho\mu}^+ \bar{u}^\mu(p) e^{-i p x} + b_{\rho\mu} \bar{u}^\mu(-p) e^{i p x}], \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

где  $a_{\rho\mu}^+$  представляет собой оператор рождения электрона с 4-импульсом  $p$  и поляризацией  $\mu$ ;  $a_{\rho\mu}$  — оператор уничтожения электрона с импульсом  $p$  и поляризацией  $\mu$ ;  $b_{\rho\mu}^+$  — оператор рождения позитрона с импульсом  $p$  и поляризацией  $\mu$  и  $b_{\rho\mu}$  — оператор уничтожения позитрона с импульсом  $p$  и поляризацией  $\mu$ .

Формулы (2.5.14) для матричных элементов полей  $\bar{\psi}(x)$ ,  $\psi(x)$ , соответствующих рождению и уничтожению частиц, приобретают вид

$$\begin{aligned} \langle 1_{\rho\mu}^{(+)} | \bar{\psi}(x) | 0_{\rho\mu}^{(+)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V_E}} \bar{u}^\mu(p) e^{-i p x}, \\ \langle 0_{\rho\mu}^{(+)} | \psi(x) | 1_{\rho\mu}^{(+)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V_E}} u^\mu(p) e^{i p x}, \\ \langle 0_{\rho\mu}^{(-)} | \bar{\psi}(x) | 1_{\rho\mu}^{(-)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V_E}} \bar{u}^\mu(-p) e^{i p x}, \\ \langle 1_{\rho\mu}^{(-)} | \psi(x) | 0_{\rho\mu}^{(-)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V_E}} u^\mu(-p) e^{-i p x}. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Эти формулы аналогичны формулам (2.3.12) для матричных элементов операторов потенциала электромагнитного поля, соответствующих испусканию и поглощению фотона.

**2.5.3. Антискоммуляторы электронного поля.** Зная алгебру операторов рождения и уничтожения частиц (соотношения (2.5.4)—(2.5.6)) и используя разложение (2.5.1), легко установить перестановочные соотношения для операторов электронного поля  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x')$ :

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} &= S_{\alpha\beta}(x, x'), \\ \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} &= 0, \\ \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} &= 0, \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}(x, x') &= S_{\alpha\beta}^+(x, x') + S_{\alpha\beta}^-(x, x'), \\ S_{\alpha\beta}^+(x, x') &= \sum_s \psi_{s\alpha}^{(+)}(x) \overline{\psi}_{s\beta}^{(+)}(x'), \\ S_{\alpha\beta}^-(x, x') &= \sum_s \psi_{s\alpha}^{(-)}(x) \overline{\psi}_{s\beta}^{(-)}(x'). \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Если внешнее электромагнитное поле отсутствует, то функции  $S_{\alpha\beta}^+(x, x')$  и  $S_{\alpha\beta}^-(x, x')$  имеют вид

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^+(x - x') &= \sum_{\nu, \mu} \frac{1}{2V e_p} u_{\alpha}^{\mu}(p) \bar{u}_{\beta}^{\mu}(p) e^{i p(x-x')}, \\ S_{\alpha\beta}^-(x - x') &= \sum_{\nu, \mu} \frac{1}{2V e_p} u_{\alpha}^{\mu}(-p) \bar{u}_{\beta}^{\mu}(-p) e^{-i p(x-x')}, \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

а так как

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} u_{\alpha}^{\mu}(p) \bar{u}_{\beta}^{\mu}(p) &= (m - i\hat{p})_{\alpha\beta}, \\ \sum_{\mu} u_{\alpha}^{\mu}(-p) \bar{u}_{\beta}^{\mu}(-p) &= -(m + i\hat{p})_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

то

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^+(x) &= - \sum_p \frac{1}{2V e_p} (i\hat{p} - m)_{\alpha\beta} e^{i p x} = - \left( \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right)_{\alpha\beta} \sum_p \frac{1}{2V e_p} e^{i p x}, \\ S_{\alpha\beta}^-(x) &= - \sum_p \frac{1}{2V e_p} (i\hat{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-i p x} = \left( \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right)_{\alpha\beta} \sum_p \frac{1}{2V e_p} e^{-i p x}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^+(x) &= - \left( \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right)_{\alpha\beta} \Delta_+(x), \\ S_{\alpha\beta}^-(x) &= \left( \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right)_{\alpha\beta} \Delta_-(x), \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

где

$$\Delta_{\pm}(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{\pm i p x} \frac{d^3 p}{e_p}.$$

Вводя функцию

$$\Delta_0(x) = i(\Delta_+(x) - \Delta_-(x)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i p x} \frac{\sin e_p t}{e_p} d^3 p,$$

получим окончательно

$$S_{\alpha\beta}(x) = i \left( \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right)_{\alpha\beta} \Delta_0(x), \quad (2.5.22)$$

или сокращенно

$$S(x) = i(\hat{i}p - m) \Delta_0(x).$$

**2.5.4. Хронологическое и нормальное произведения операторов электронного поля.** В п. 2.3.3 мы изучали определенным образом упорядоченные — хронологические и нормальные — произ-

ведения операторов потенциалов электромагнитного поля. Аналогичные произведения можно определить также и для операторов электронно-позитронного поля. Рассмотрим сначала хронологическое произведение (или  $T$ -произведение) операторов электронного поля.

Если  $\varphi_1(x_1)$  и  $\varphi_2(x_2)$  — какие-либо две компоненты операторов поля  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , то их хронологическое произведение определяется как

$$T(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)) = \begin{cases} \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2), & t_1 > t_2, \\ -\varphi_2(x_2)\varphi_1(x_1), & t_1 < t_2. \end{cases} \quad (2.5.23)$$

Отметим, что в отличие от хронологического произведения операторов электромагнитного поля это хронологическое произведение меняет знак при перестановке операторов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , что находится в соответствии с разными условиями коммутации электромагнитного и электронного полей.

Хронологическое произведение произвольного числа компонент поля  $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)$  определяется формулой

$$T(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n)) = \delta_P \varphi_{i_1}(x_{i_1})\varphi_{i_2}(x_{i_2})\dots\varphi_{i_n}(x_{i_n}),$$

где операторы  $\varphi_{i_1}(x_{i_1}), \dots, \varphi_{i_n}(x_{i_n})$  расставлены в хронологическом порядке, т. е. так, что  $t_{i_1} > t_{i_2} > \dots > t_{i_n}$ , и  $\delta_P$  равно  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того, является ли перестановка  $(1, 2, \dots, n) \rightarrow (i_1, i_2, \dots, i_n)$  четной или нечетной.

Легко видеть, что определение хронологического произведения операторов поля релятивистски инвариантно.

Рассмотрим теперь нормальное произведение (или  $N$ -произведение) операторов электронного поля, в котором операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения частиц. Если каждый из операторов  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$  содержит только операторы рождения или только операторы уничтожения частиц, то  $N$ -произведение  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$  определяется соотношением

$$N(\chi_1\chi_2\dots\chi_n) = \delta_P \chi_{i_1}\chi_{i_2}\dots\chi_{i_n}, \quad (2.5.24)$$

где операторы  $\chi_{i_1}, \chi_{i_2}, \dots, \chi_{i_n}$  представляют собой те же операторы  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ , только расположенные таким образом, что операторы рождения стоят слева от операторов поглощения частиц, и  $\delta_P$  равно  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того, является ли перестановка  $(1, 2, \dots, n) \rightarrow (i_1, i_2, \dots, i_n)$  четной или нечетной.

В общем случае, когда операторы  $\chi_i$  содержат как операторы рождения, так и операторы уничтожения частиц, для нахождения нормального произведения нужно каждый из операторов  $\chi_i$  представить в виде суммы  $\chi_i = \chi_i^c + \chi_i^a$ , где  $\chi_i^c$  содержит только операторы рождения, а  $\chi_i^a$  — только операторы поглощения, и,

записав  $N$ -произведение в виде суммы

$$N(A\chi_i B) = N(A\chi_i^c B) + N(A\chi_i^a B),$$

воспользоваться далее формулой (2.5.24). Разность между хронологическим и нормальным произведениями операторов электронного поля, которую мы будем называть связью или сверткой этих операторов, не содержит, так же как и в случае электромагнитного поля, операторов поглощения и испускания частиц, т. е. представляет собой  $c$ -число. Легко убедиться, что

$$\psi_\alpha^a(x) \bar{\psi}_\beta^a(x') = -\bar{\psi}_\beta^a(x') \psi_\alpha^a(x) = S_{c\alpha\beta}(x, x'), \quad (2.5.25)$$

где

$$S_{c\alpha\beta}(x, x') = \begin{cases} S_{\alpha\beta}^+(x, x'), & t' < t, \\ -S_{\alpha\beta}^-(x, x'), & t' > t, \end{cases}$$

и  $S_{\alpha\beta}^+(x, x')$  и  $S_{\alpha\beta}^-(x, x')$  — функции, определяемые формулами (2.5.18); остальные связи равны нулю:

$$\psi_\alpha^a(x) \psi_\beta^a(x') = \bar{\psi}_\alpha^a(x) \bar{\psi}_\beta^a(x') = 0.$$

В отсутствие внешнего электромагнитного поля функция  $S_{c\alpha\beta}(x - x')$ , зависящая только от разности аргументов, может быть, согласно (2.5.21), представлена в виде

$$S_{c\alpha\beta}(x) = -\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)_{\alpha\beta} \Delta_c(x),$$

или сокращенно

$$S_c(x) = -(i\hat{p} - m) \Delta_c(x), \quad (2.5.26)$$

где  $\hat{p} = \frac{1}{i} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$  и

$$\Delta_c = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{i(p\mathbf{r} - \varepsilon_p |t|)} \frac{d^3 p}{\varepsilon_p}. \quad (2.5.27)$$

Из сравнения (2.5.19) и (2.5.21) следует, что

$$S_{c\alpha\beta}(x) = \sum_{p, \mu} \frac{1}{2V\varepsilon_p} u_\alpha^\mu(p) \bar{u}_\beta^\mu(p) e^{i(p\mathbf{r} - \varepsilon_p |t|)}. \quad (2.5.28)$$

Применив к уравнению (2.5.26) оператор  $i\hat{p} + m$  и учитывая, что

$$(\square - m^2) \Delta_c(x) = i\delta(x),$$

получим

$$(i\hat{p} + m) S_c(x) = -i\delta(x), \quad (2.5.29)$$

т. е.  $S_c(x)$  является функцией Грина уравнений Дирака для свободного электрона. Таким же свойством обладает функция  $S_{c\alpha\beta}(x, x')$  для уравнений Дирака при наличии постоянного внешнего электромагнитного поля.

Функцию  $\Delta_c(x)$  можно представить в виде, аналогичном (2.3.33):

$$\Delta_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_C \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} d^4p.$$

Отсюда, используя (2.5.26), можно найти аналогичное представление  $S_c$ :

$$S_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C S_c(p) e^{ipx} d^4p, \quad (2.5.30)$$

$$S_c(p) = i \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}, \quad (2.5.31)$$

где интегрирование по  $p_0$  совершается вдоль контура  $C$ , изображенного на рис. 2.1. Контур интегрирования можно совместить с вещественной осью, произведя при этом замену  $m \rightarrow m - i0$ . Учитывая это, мы будем записывать формулу (2.5.30) в виде

$$S_c(p) = \frac{1}{i} \frac{1}{i\hat{p} + m - i0}. \quad (2.5.32)$$

Используя результаты п. 2.5.2, легко убедиться, что среднее значение любого  $N$ -произведения операторов полей в состоянии вакуума равно нулю:

$$\langle 0 | N(\varphi_1 \varphi_2 \dots) | 0 \rangle = 0. \quad (2.5.33)$$

Отсюда следует, что

$$\langle 0 | T(\varphi_1 \varphi_2) | 0 \rangle = \varphi_1^a \varphi_2^a, \quad (2.5.34)$$

т. е. среднее значение хронологического произведения двух операторов полей равно связи между этими операторами.

Легко показать, что оператор плотности электрического тока, определяемый формулой (2.5.7), можно представить в виде нормального произведения

$$j_\mu(x) = ieN(\bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x)). \quad (2.5.35)$$

### § 3.1. Основные уравнения квантовой электродинамики

**3.1.1. Уравнения квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении.** До сих пор мы изучали, главным образом, свойства свободных частиц — электронов и фотонов. Только в §§ 1.5—1.7 рассматривалось движение электронов в электромагнитном поле, но поле это описывалось заданной  $c$ -числовой функцией координат и времени, т. е. речь шла о заданном внешнем электромагнитном поле. Если при этом внешнее поле не зависит от времени, то существуют индивидуальные стационарные состояния электронов, характеризующиеся определенными значениями энергии.

Теперь мы перейдем к изучению взаимодействия между электронами и электромагнитным полем, не считая его заданной  $c$ -числовой функцией, т. е. учитывая квантовую природу поля. Иными словами, мы будем изучать взаимодействие между электронами, позитронами и фотонами. Это взаимодействие приводит в частности к тому, что состояния, считавшиеся стационарными, в действительности не являются таковыми, так как становятся возможными различные переходы между ними, при которых изменяются значения энергии, импульса и момента взаимодействующих частиц. Но, кроме того, могут изменяться сами числа частиц, так как благодаря взаимодействию испускаются и поглощаются фотоны и рождаются и уничтожаются электронно-позитронные пары.

Несохранение числа частиц подсказывает метод описания взаимодействия между частицами: ясно, что необходимо пользоваться понятиями квантованных полей [1] — электромагнитного и электронно-позитронного (для краткости будем говорить просто об электронном поле). Это значит, что 4-потенциал электромагнитного поля и волновая функция электрона должны считаться не только функциями координат и времени, но и некоторыми операторами, действующими в пространстве векторов состояния системы взаимодействующих полей. Основная задача заключается теперь в том, чтобы установить уравнения для этих операторов, которые должны, естественно, учитывать взаимодействие между частицами.

Напомним с этой целью, как описываются состояния физических систем в квантовой механике. Обычно используются два

метода. В первом из них вектор состояния, характеризующий систему, предполагается постоянным, а операторы, соответствующие различным физическим величинам, — изменяющимися со временем. Этот метод называется гейзенберговским представлением квантовой механики [2].

Во втором методе операторы, соответствующие физическим величинам, предполагаются не зависящими от времени, а вектор состояния — изменяющимся со временем. Этот метод называется шредингеровским представлением квантовой механики.

Уравнения движения для операторов в гейзенберговском представлении имеют формально такой же вид, как и уравнения классической механики для соответствующих величин. Поэтому естественно при установлении уравнений для взаимодействующих электронного и электромагнитного полей исходить из гейзенберговского представления и считать, что эти уравнения формально совпадают с уравнением Дирака для волновой функции электрона во внешнем электромагнитном поле и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля, создаваемого электронным током, который определяется волновой функцией электрона. Иными словами, мы примем в качестве основных уравнений квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении для операторов электромагнитного и электронного полей  $A_\mu(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  уравнения

$$\begin{cases} \gamma_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x) \right) + m \psi(x) = 0, \\ \gamma_\mu^\dagger \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu(x) \right) - m \bar{\psi}(x) = 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

$$\square A_\mu(x) = -j_\mu(x),$$

где  $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma_4$  и  $j_\mu(x)$  — 4-плотность электронного тока:

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] = \frac{ie}{2} (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \bar{\psi}^c(x) \gamma_\mu \psi^c(x)) \quad (3.1.2)$$

(зарядово-сопряженные операторы электронного поля  $\psi^c(x) = C\bar{\psi}(x)$ ,  $\bar{\psi}^c(x) = C^{-1}\psi(x)$  удовлетворяют уравнениям (3.1.1), в которых заряд  $e$  заменен на  $-e$ ).

Кроме системы дифференциальных уравнений для операторов полей, должны быть сформулированы еще перестановочные соотношения между этими операторами. Так как изменение операторов со временем определяется уравнениями движения, то перестановочные соотношения могут быть заданы только для определенного начального момента времени. Задание начальных перестановочных соотношений эквивалентно заданию их в совпадающие моменты времени  $t = t'$ . Мы примем в качестве таких соотноше-

ний условия

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), \frac{\partial}{\partial t'} A_\nu(x')]_{t=t'} &= i\delta_{\mu\nu}\delta(r-r'), \quad [A_\mu(x), A_\nu(x')]_{t=t'} = 0, \\ \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(x')\}_{t=t'} &= \delta_{\alpha\beta}\delta(r-r'), \quad \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\}_{t=t'} = 0, \\ [\psi_\alpha(x), A_\mu(x')]_{t=t'} &= 0, \quad [\psi_\alpha(x), \frac{\partial}{\partial t'} A_\mu(x')]_{t=t'} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

В случае свободных полей эти соотношения эквивалентны общим соотношениям для произвольных моментов времени  $t$  и  $t'$ . В случае же взаимодействующих полей общие перестановочные соотношения для произвольных значений  $t \neq t'$  сформулировать заранее невозможно, так как для этого нужно было бы найти общее решение уравнений движения связанных полей.

Операторы полей действуют на векторы состояния  $\Phi$  в пространстве чисел частиц. В гейзенберговском представлении эти векторы не зависят от времени и, так же как в случае свободных полей, ограничены добавочным условием

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)\right)_+ \Phi = 0, \quad (3.1.4)$$

где  $\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)\right)_+$  — часть оператора  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)$ , содержащая положительные частоты. Возможность релятивистски инвариантным образом выделить эту часть связана с тем, что оператор  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)$  при учете взаимодействия полей удовлетворяет в силу непрерывности тока  $\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu(x) = 0\right)$  такому же уравнению  $\square \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) = 0$ , как и в случае свободных полей.

**3.1.2. Лагранжиан и гамильтониан взаимодействующих полей.** Уравнениям для произвольного поля  $\varphi$  может быть придана очень общая — вариационная, или лагранжева, — форма, если принять, что поле как динамическая система характеризуется определенной локальной плотностью функции Лагранжа или лагранжианом  $L$ , зависящим от функций поля  $\varphi$  и их первых производных по координатам и времени  $\partial\varphi/\partial x_\mu \equiv \varphi_{,\mu}$  ( $L$  не может содержать явно координаты и время в силу однородности пространства и времени).

Интеграл от лагранжиана по 4-объему  $\Omega$

$$J = \int_{\Omega} L(\varphi, \varphi_{,\mu}) d^4x, \quad (3.1.5)$$

называемый действием, должен быть экстремальным для действительного движения, т. е. для таких  $\varphi$ , которые удовлетворяют уравнениям поля. Так как эти уравнения должны быть релятивистски инвариантными, то релятивистским инвариантом должна быть и функция  $L$ .

Общая вариация действия, связанная с варьированием как волновой функции поля, так и границы области интегрирования, равна, очевидно,

$$\delta J = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial L}{\partial \varphi, \mu} \delta \varphi, \mu \right) d^4 x + \int_{\Sigma} L \delta x_{\mu} d\sigma_{\mu},$$

где второй интеграл берется по гиперповерхности  $\Sigma$ , ограничивающей  $\Omega$ , и  $\delta x_{\mu}$  обозначает вариацию координат границы. Интегрируя по частям второе слагаемое в объемном интеграле, перепишем  $\delta J$  в виде

$$\delta J = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \varphi, \mu} \right) \delta \varphi d^4 x + \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi, \mu} \delta \varphi + L \delta x_{\mu} \right) d\sigma_{\mu}. \quad (3.1.6)$$

Рассмотрим прежде всего вариацию действия при закрепленных границах, предполагая, что вариация волновых функций на границе равна нулю. При этом второй интеграл обращается в нуль, и мы получим, приравнявая вариацию действия нулю, уравнения Лагранжа для компонент волновой функции поля  $\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \varphi, \mu} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.1.7)$$

Эти уравнения можно рассматривать как уравнения движения поля.

Рассмотрим далее вариацию действия для истинного движения, предполагая, что область интегрирования  $\Omega$  вместе с волновым полем подвергнута как одно целое бесконечно малому смещению либо бесконечно малому повороту. При этом, очевидно, действие не изменится, т. е. вариация действия  $\delta J$  будет равна нулю. В случае бесконечно малого смещения, т. е. бесконечно малого преобразования координат  $x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = x_{\mu} + \varepsilon_{\mu}$  ( $\varepsilon_{\mu}$  — бесконечно малый 4-вектор), волновые функции подвергаются бесконечно малому преобразованию  $\varphi(x_{\mu}) \rightarrow \varphi'(x_{\mu}) = \varphi(x_{\mu} - \varepsilon_{\mu}) = \varphi(x_{\mu}) - \varepsilon_{\mu} \varphi, \mu(x_{\mu})$ , откуда  $\delta \varphi \equiv \varphi'(x_{\mu}) - \varphi(x_{\mu}) = -\varepsilon_{\mu} \varphi, \mu(x_{\mu})$ . Подставляя это значение вариации волновой функции вместе с  $\delta x_{\mu} = \varepsilon_{\mu}$  в поверхностный интеграл (3.1.6), получим

$$\delta J = \int_{\Sigma} \varepsilon_{\mu} T_{\mu\nu} d\sigma_{\nu} = 0, \quad (3.1.8)$$

где

$$T_{\mu\nu} = L \delta_{\mu\nu} - \varphi, \mu \frac{\partial L}{\partial \varphi, \nu}. \quad (3.1.9)$$

Величины  $T_{\mu\nu}$  образуют 4-тензор второго ранга, который называется тензором энергий-импульса поля. Из (3.1.8) следует

$$\int_{\Sigma} T_{\mu\nu} d\sigma_{\nu} = 0.$$

Считая, что объем  $\Omega$  ограничен двумя гиперповерхностями, ортогональными к оси времени, получим отсюда законы сохранения

$$P_{\mu} \equiv -i \int T_{\mu 4} d^3x = \text{const}, \quad (3.1.10)$$

где интегрирование производится по всему объему поля. Величины  $P_{\mu}$  образуют, очевидно, 4-вектор. Он называется 4-вектором энергии-импульса поля. Пространственные компоненты  $P_{\mu}$  определяют импульс поля  $\mathbf{P}$ , а временная компонента — энергию поля  $H$ . Плотность энергии поля равна  $\omega = -T_{44}$ .

Применяя к поверхностному интегралу (3.1.8) теорему Гаусса, получим

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \quad (3.1.11)$$

Таким образом, 4-дивергенция тензора энергии-импульса равна нулю.

Обратимся теперь к основным уравнениям квантовой электродинамики. Они также могут быть получены с помощью вариационного принципа, если в качестве лагранжиана взять оператор

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \bar{\psi} \left[ \gamma_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ieA_{\mu} \right) + m \right] \psi - \\ & - \frac{1}{2} \bar{\psi}^c \left[ \gamma_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ieA_{\mu} \right) + m \right] \psi^c = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \bar{\psi} \left[ \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + m \right] \psi - \\ & - \frac{1}{2} \bar{\psi}^c \left[ \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + m \right] \psi^c + j_{\mu} A_{\mu} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

и при варьировании действия независимыми переменными считать  $A_{\mu}$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  (или  $A_{\mu}$ ,  $\psi^c$ ,  $\bar{\psi}^c$ ). Действительно, замечая, что

$$\bar{\psi}^c \left[ \gamma_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ieA_{\mu} \right) + m \right] \psi^c = \psi \left[ \gamma_{\mu}^{\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ieA_{\mu} \right) - m \right] \bar{\psi},$$

получим, варьируя и отбрасывая несущественные члены, имеющие вид дивергенций,

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{1}{2} \delta A_{\mu} (\square A_{\mu} + j_{\mu}) + \frac{1}{2} (\square A_{\mu} + j_{\mu}) \delta A_{\mu} - \\ & - \frac{1}{2} \delta \bar{\psi} \left[ \gamma_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ieA_{\mu} \right) + m \right] \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \left[ \gamma_{\mu}^{\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ieA_{\mu} \right) + m \right] \delta \bar{\psi} - \\ & - \frac{1}{2} \delta \psi \left[ \gamma_{\mu}^{\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ieA_{\mu} \right) - m \right] \bar{\psi} + \frac{1}{2} \bar{\psi} \left[ \gamma_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ieA_{\mu} \right) - m \right] \delta \psi, \end{aligned}$$

откуда и следуют уравнения (3.1.1). (Предполагая при варьировании  $L$  независимыми переменными  $\psi^c$  и  $\bar{\psi}^c$ , а не  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , получим взамен первых двух уравнений (3.1.1) уравнения для зарядово-сопряженных операторов  $\psi^c$  и  $\bar{\psi}^c$ .)

Имея выражения для лагранжиана  $L$ , можно построить тензор энергии-импульса поля (3.1.9). Подставляя в (3.1.9) лагранжиан

(3.1.12), мы найдем тензор энергии-импульса электромагнитного и электронно-позитронного полей в гейзенберговском представлении:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \right) + \frac{1}{4} \left( \bar{\psi} \gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\nu \psi \right) + \frac{1}{4} \left( \bar{\psi}^c \gamma_\nu \frac{\partial \psi^c}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}^c}{\partial x_\mu} \gamma_\nu \psi^c \right). \quad (3.1.13)$$

Гамильтониан этих полей определяется формулой

$$H = - \int d^3x T_{44}.$$

В формуле (3.1.13) для  $T_{44}$  можно, используя (3.1.1), выразить временные производные от  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  через их пространственные производные. Если вспомнить еще определение (3.1.2) плотности тока, то окончательно мы получим для плотности гамильтониана полей выражение

$$-T_{44} = -T'_{44} - T_{44},$$

где

$$T'_{44} = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_4} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_4} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \right) - \frac{1}{4} \bar{\psi} \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x} + m \right) \psi + \frac{1}{4} \bar{\psi} \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x} - m \right) \psi - \frac{1}{4} \bar{\psi}^c \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x} + m \right) \psi^c + \frac{1}{4} \bar{\psi}^c \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x} - m \right) \psi, \quad (3.1.14)$$

$$T_{44} = j_\mu A_\mu.$$

Поэтому  $H$  приобретает вид

$$H = H_0 + H_I,$$

$$H_0 = - \int T'_{44} d^3x, \quad H_I = - \int T_{44} d^3x = - \int j_\mu A_\mu d^3x. \quad (3.1.15)$$

Величина  $H_0$  представляет собой гамильтониан свободных полей, а  $H_I$  — гамильтониан взаимодействия полей. Величина  $-T_{44}$  совпадает с последним слагаемым в лагранжиане (3.1.12), описывающим взаимодействие между полями. Обозначая ее через

$$L_I = j_\mu A_\mu, \quad (3.1.16)$$

можно представить гамильтониан взаимодействия в виде

$$H_I = - \int L_I(x) d^3x. \quad (3.1.16')$$

Таким образом, гамильтониан взаимодействия представляет собой взятый с обратным знаком пространственный интеграл от лагранжиана взаимодействия.

Гейзенберговские операторы  $F$  в нерелятивистской квантовой механике удовлетворяют уравнению движения

$$\dot{F} = i [H, F],$$

где  $H$  — гамильтониан системы. Аналогичный закон справедлив и для квантованных полей. Поскольку при этом мы имеем дело с операторами, действующими в пространстве чисел заполнения

и зависящими от координат точки в том же смысле, в каком квантовомеханические гейзенберговские операторы зависят от времени, то возникает обобщение уравнения движения и на пространственные координаты. Именно, любой оператор  $\mathbf{F}$ , являющийся произвольной функцией переменных поля, т. е. произвольной функцией операторов  $\mathbf{A}_\mu(x)$ ,  $\Psi(x)$  и  $\bar{\Psi}(x)$ , удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{F}(x) = i[\mathbf{F}(x), \mathbf{P}_\mu], \quad (3.1.17)$$

где  $\mathbf{P}_\mu$  — 4-вектор энергии-импульса полей, определяемый формулами (3.1.10) и (3.1.13). В частности, имеют место уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathbf{A}_\mu(x) = i[\mathbf{A}_\mu(x), \mathbf{P}_\nu], \quad \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Psi_\alpha(x) = i[\Psi_\alpha(x), \mathbf{P}_\nu], \quad (3.1.18)$$

вытекающие также из определения 4-вектора  $\mathbf{P}_\mu$  и перестановочных соотношений (3.1.3).

Легко убедиться, что оператор полного заряда системы

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{i} \int \mathbf{j}_4(x) d^3x = \frac{e}{2} \int (\Psi^+(x) \Psi(x) - \Psi(x) \Psi^+(x)) d^3x$$

коммутирует с каждым из операторов  $\mathbf{P}_\mu$ :

$$[\mathbf{Q}, \mathbf{P}_\mu] = 0.$$

Это означает, что имеет место закон сохранения заряда.

**3.1.3. Представление взаимодействия.** Совершив над гейзенберговскими операторами  $\mathbf{F}$  каноническое преобразование

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^{(s)} = e^{-i\mathbf{H}t} \mathbf{F} e^{i\mathbf{H}t}, \quad (3.1.19)$$

где  $\mathbf{H}$  — гамильтониан системы, мы перейдем к шредингеровскому представлению, в котором операторы не изменяются с течением времени:

$$\dot{\mathbf{F}}^{(s)} = 0$$

(это соотношение немедленно вытекает из (3.1.19)).

Преобразованию операторов (3.1.19) соответствует преобразование вектора состояния

$$\Phi \rightarrow \Psi^{(s)}(t) = e^{-i\mathbf{H}t} \Phi, \quad (3.1.20)$$

где  $\Phi$  — не зависящий от времени вектор состояния в гейзенберговском представлении. Ясно, что вектор состояния в шредингеровском представлении  $\Psi^{(s)}(t)$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(s)}(t) = \mathbf{H}^{(s)} \Psi^{(s)}(t), \quad (3.1.21)$$

где  $\mathbf{H}^{(s)}$  — гамильтониан рассматриваемой динамической системы в шредингеровском представлении, совпадающий, согласно (3.1.19), с гамильтонианом в гейзенберговском представлении,  $\mathbf{H}^{(s)} = \mathbf{H}$ .

Шредингеровским представлением можно пользоваться не только в нерелятивистской квантовой механике, но и в теории квантовых полей. Однако гораздо удобнее пользоваться не шредингеровским и не гейзенберговским, а некоторым промежуточным представлением — представлением взаимодействия, к рассмотрению которого мы теперь и перейдем.

Разобьем гамильтониан системы на два слагаемых:  $\mathbf{H}^{(s)} = \mathbf{H}_0^{(s)} + \mathbf{V}^{(s)}$ , которые будем условно называть свободным гамильтонианом и гамильтонианом взаимодействия, и произведем каноническое преобразование шредингеровских операторов

$$\mathbf{F}^{(s)} \rightarrow \mathbf{F} = e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}t} \mathbf{F}^{(s)} e^{-i\mathbf{H}_0^{(s)}t} \quad (3.1.22)$$

и векторов состояния

$$\Psi^{(s)}(t) \rightarrow \Phi(t) = e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}t} \Psi^{(s)}(t) \quad (3.1.23)$$

(предполагается, что в момент времени  $t=0$  совпадают операторы  $\mathbf{F}^{(s)}$  и  $\mathbf{F}$  и векторы состояний  $\Psi^{(s)}(t)$  и  $\Phi(t)$ ). Будем теперь характеризовать квантовомеханическую систему векторами состояний  $\Phi(t)$  и сопоставлять физическим величинам операторы  $\mathbf{F}$ . Такой метод квантовомеханического описания и называется представлением взаимодействия.

Выясним, как изменяются со временем операторы и векторы состояний в этом представлении. Замечая, что  $\dot{\mathbf{F}}^{(s)} = 0$ , получим из (3.1.22)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F} = i\mathbf{H}_0^{(s)} e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}t} \mathbf{F}^{(s)} e^{-i\mathbf{H}_0^{(s)}t} - i e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}t} \mathbf{F}^{(s)} \mathbf{H}_0^{(s)} e^{-i\mathbf{H}_0^{(s)}t},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F} = i[\mathbf{H}_0, \mathbf{F}], \quad (3.1.24)$$

где, согласно (3.1.22),  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0^{(s)}$ .

Таким образом, в представлении взаимодействия операторы изменяются в соответствии с общим квантовомеханическим законом движения для гейзенберговских операторов, в который, однако, входит не полный гамильтониан системы, а лишь одна его часть — свободный гамильтониан.

Определим далее  $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t)$ . Учитывая (3.1.23), получим

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = -\mathbf{H}_0^{(s)} e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}t} \Psi^{(s)}(t) + e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}t} (\mathbf{H}_0^{(s)} + \mathbf{V}^{(s)}) \Psi^{(s)}(t),$$

а так как  $\Psi^{(s)}(t) = e^{-i\mathbf{H}_0^{(s)}t} \Phi(t)$ , то

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = \mathbf{H}_I(t) \Phi(t), \quad \mathbf{H}_I(t) = e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}t} \mathbf{V}^{(s)} e^{-i\mathbf{H}_0^{(s)}t}. \quad (3.1.25)$$

Таким образом, вектор состояния в представлении взаимодействия удовлетворяет уравнению Шредингера с гамильтонианом  $\mathbf{H}_I(t)$ .

Итак, в представлении взаимодействия изменяются как операторы, так и векторы состояний, причем в закон изменения операторов входит одна часть, а в уравнение Шредингера — другая часть исходного гамильтониана системы.

Полагая в (3.1.23)

$$\Psi^{(s)}(t) = e^{-iH^{(s)}(t-t_0)} \Phi,$$

мы свяжем вектор состояния  $\Phi(t)$  в представлении взаимодействия с вектором состояния  $\Phi$  в гейзенберговском представлении:

$$\Phi(t) = S(t, t_0) \Phi, \quad (3.1.26)$$

где

$$S(t, t_0) = e^{iH_0^{(s)}(t-t_0)} e^{-iH^{(s)}(t-t_0)}$$

(предполагается, что вектор состояния  $\Phi(t)$  совпадает с  $\Phi$  в момент времени  $t=t_0$ ). Так как  $\Phi = \text{const}$ , то оператор  $S(t, t_0)$  удовлетворяет такому же уравнению, как и  $\Phi(t)$ :

$$i \frac{\partial}{\partial t} S(t, t_0) = H_I(t) S(t, t_0), \quad S(t_0, t_0) = 1. \quad (3.1.27)$$

Этот же оператор (мы будем называть его оператором преобразования) связывает операторы, соответствующие различным физическим величинам, в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия. Действительно, подставляя в (3.1.22)

$$F^{(s)} = e^{-iH^{(s)}(t-t_0)} F e^{iH^{(s)}(t-t_0)},$$

получим

$$F = S(t, t_0) F S^{-1}(t, t_0). \quad (3.1.28)$$

Из определения  $S(t, t_0)$  следует, во-первых, что

$$S(t, t_0) = S(t, t_1) S(t_1, t_0) \quad (3.1.29)$$

и, во-вторых, что оператор  $S(t, t_0)$  унитарен,  $S(t, t_0) S^+(t, t_0) = I$ , если только операторы  $H^{(s)}$  и  $H_0^{(s)}$  эрмитовы. Отсюда и из (3.1.27) в свою очередь следует, что

$$H_I(t) = i \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} S^+(t, t_0), \quad H_I^\dagger(t) = H_I(t).$$

Используя это выражение для  $H_I(t)$  и соотношение (3.1.28), легко убедиться, что

$$\frac{\partial F}{\partial t} = S(t, t_0) \frac{\partial F}{\partial t} S^{-1}(t, t_0) + i[F, H_I(t)]. \quad (3.1.30)$$

Заметим, наконец, что при любом выборе момента времени  $t_1$

$$\Phi(t) = S(t, t_1) \Phi(t_1). \quad (3.1.31)$$

В квантовой электродинамике использование представления взаимодействия имеет особые преимущества [3]. Действительно,

разбив гамильтониан системы взаимодействующих полей на два слагаемых — гамильтониан свободных полей и гамильтониан взаимодействия, мы получим в соответствии с законом изменения операторов в представлении взаимодействия для операторов полей уравнения, совпадающие с уравнениями для операторов свободных полей. Это значит, что в представлении взаимодействия можно считать известным явный вид операторов полей, а также перестановочные соотношения между ними в любой момент времени.

Напомним в этой связи, что исходные уравнения квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении, — формально наиболее близком к классической теории — представляют собой сложную систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для операторных функций с известными только в начальный момент времени перестановочными соотношениями. Исключив взаимодействие между полями из уравнений движения для операторов полей, мы переносим его из этих уравнений в уравнение Шредингера для вектора состояния в представлении взаимодействия.

Операторы полей в представлении взаимодействия  $A_\mu(x)$  и  $\psi(x)$  связаны, согласно (3.1.28), с операторами полей  $A_\mu(x)$  и  $\psi(x)$  в гейзенберговском представлении соотношениями

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= S(t, t_0) A_\mu(x) S^{-1}(t, t_0), \\ \psi(x) &= S(t, t_0) \psi(x) S^{-1}(t, t_0), \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

где  $S(t, t_0)$  — оператор преобразования, удовлетворяющий уравнению

$$i \frac{\partial}{\partial t} S(t, t_0) = H_I(t) S(t, t_0),$$

и  $H_I(t)$  — гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия:

$$H_I(t) = S(t, t_0) H_I S^{-1}(t, t_0). \quad (3.1.33)$$

Последнее выражение можно, очевидно, переписать в виде

$$H_I(t) = - \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^3x,$$

где  $j_\mu(x)$  — оператор плотности тока в представлении взаимодействия, выражающийся через  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  так же, как  $j_\mu(x)$  выражается через  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$ :

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= S(t, t_0) j_\mu(x) S^{-1}(t, t_0) = \\ &= \frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] = \frac{ie}{2} (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \bar{\psi}^c(x) \gamma_\mu \psi^c(x)). \end{aligned}$$

Используя (3.1.32), легко убедиться, что гамильтониан свободных полей в представлении взаимодействия  $H_0$  выражается через  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ ,  $A_\mu(x)$  так же, как оператор  $H_0$  выражается через  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ ,  $A_\mu(x)$  (см. (3.1.14), (3.1.15)).

Имея выражение для  $H_0$  и используя (3.1.24), можно установить, как изменяются операторы полей со временем в представлении взаимодействия. Учитывая, что операторы полей в представлении взаимодействия удовлетворяют в совпадающие моменты времени таким же перестановочным соотношениям, как и операторы в гейзенберговском представлении, мы получим, как и следовало ожидать, уравнения, совпадающие с уравнениями для операторов свободных полей в гейзенберговском представлении:

$$\begin{aligned} \left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x} + m \right) \psi(x) = 0, \quad \left( \gamma_\mu^\tau \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \bar{\psi}(x) = 0, \\ \square A_\mu(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Легко показать, что перестановочные соотношения для операторов полей в представлении взаимодействия совпадают с перестановочными соотношениями для операторов свободных полей.

Нам остается сформулировать добавочное условие для вектора состояния в представлении взаимодействия. В гейзенберговском представлении это условие имеет вид

$$\left( \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right)_+ \Phi = 0,$$

а так как вектор состояния  $\Phi(t)$  в представлении взаимодействия связан с вектором состояния  $\Phi$  в гейзенберговском представлении соотношением  $\Phi(t) = S(t, t_0) \Phi$ , то добавочное условие можно записать в виде

$$S(t', t_0) \left( \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right)_+ S^{-1}(t', t_0) \Phi(t') = 0,$$

где  $t'$  произвольно.

## § 3.2. Матрица рассеяния

### 3.2.1. Проблема рассеяния в квантовой электродинамике.

Установив уравнения квантовой электродинамики, мы перейдем к постановке основной ее проблемы — проблемы рассеяния частиц, включающей в себя исследование процессов превращения частиц.

В нерелятивистской квантовой механике при исследовании рассеяния предполагается, что при  $t = -\infty$  частицы являются свободными. Далее частицы взаимодействуют между собой и при  $t = \infty$  расходятся и снова становятся свободными. Вопрос заключается в том, чтобы, задав вектор состояния свободных частиц при  $t = -\infty$ , найти вектор состояния системы частиц при  $t = \infty$ . Разложив затем этот вектор по векторам состояний свободных частиц, мы найдем амплитуды различных процессов рассеяния. Такая постановка вопроса соответствует разделению гамильтониана системы на гамильтониан свободных частиц  $H_0$  и гамильтониан их взаимодействия  $H_I$ ,  $H = H_0 + H_I$  и предположению, что при  $t = \pm \infty$  гамильтониан взаимодействия обращается в нуль,

$\mathbf{H}_i(\pm\infty) = 0$ , и что начальный и конечный векторы состояний  $\Phi_i$  и  $\Phi_f$  являются собственными векторами гамильтониана свободных частиц:  $\mathbf{H}_0\Phi_i = E_i\Phi_i$ ,  $\mathbf{H}_0\Phi_f = E_f\Phi_f$  ( $E_i$  и  $E_f$  — значения энергии системы частиц в начальном и конечном состояниях). Условие  $\mathbf{H}_i(\pm\infty) = 0$  оправдывается тем, что при  $t = \pm\infty$  частицы находятся далеко друг от друга и поэтому не взаимодействуют между собой.

Ситуация, однако, осложняется, когда мы пытаемся перенести эту постановку задачи в квантовую электродинамику. Действительно, как ни удалять друг от друга сталкивающиеся частицы, нельзя считать, что гамильтониан взаимодействия  $\mathbf{H}_I$  — в данном случае гамильтониан взаимодействия между электронным и электромагнитным полями — стремится к нулю, так как всегда имеет место взаимодействие между электронами и электромагнитным полем в состоянии вакуума. Единственная формальная возможность обратить в нуль гамильтониан взаимодействия заключается в том, чтобы одновременно обратить в нуль заряд электрона, играющий роль константы связи между электронным и электромагнитным полями. Но, изменяя заряд электрона, мы изменяем также и его массу. Действительно, масса электрона — это энергия наименьшего состояния взаимодействующих полей, обладающего электрическим зарядом, и нет никаких оснований считать, что эта величина должна совпадать с массой гипотетического электрона, не взаимодействующего с электромагнитным полем (такой электрон мы будем называть в дальнейшем «голым» электроном).

Таким образом, предельный переход  $\mathbf{H}_I \rightarrow 0$  соответствует, строго говоря, переходу от реальных физических частиц к идеальным «голым» частицам, спектр масс которых и другие их свойства отличаются от спектра масс и соответствующих свойств реальных частиц. Векторы состояний «голых» частиц являются собственными векторами гамильтониана  $\mathbf{H}_0$ , что же касается «свободных» реальных частиц, то их векторы состояний не являются собственными векторами этого гамильтониана. Поэтому в рамках изложенной схемы решения задачи о рассеянии частиц мы можем, строго говоря, исследовать только процессы рассеяния «голых», а не реальных частиц. Тем не менее можно, зная вероятности процессов рассеяния «голых» частиц, непосредственно находить вероятности процессов рассеяния реальных частиц. Это достигается благодаря тому, что имеется полное соответствие между состояниями «голых» и реальных частиц, а следовательно, и между процессами рассеяния тех и других. Действительно, если «выключенно» и «включенно» взаимодействия между полями производится достаточно медленно, то можно предполагать, что состояния системы полей будут испытывать лишь адиабатическое изменение, не приводящее к возникновению новых и уничтожению старых состояний.

Переходя теперь к исследованию проблемы рассеяния частиц в квантовой электродинамике, мы не будем вначале принимать

во внимание различия между «голыми» и реальными частицами, и только позже (в § 3.6) вернемся к изучению этого вопроса. Мы будем пользоваться представлением взаимодействия, в котором состояние полей описывается вектором состояния  $\Phi(t)$ , удовлетворяющим уравнению (3.1.25). Наша задача формулируется следующим образом. Задано состояние полей при  $t \rightarrow -\infty$ , когда они предполагаются невзаимодействующими; требуется определить возможные состояния полей при  $t \rightarrow +\infty$ , когда они вновь предполагаются невзаимодействующими.

Как мы видели, формальное решение уравнения (3.1.25) имеет вид  $\Phi(t) = S(t, t_0)\Phi(t_0)$ . Полагая здесь  $t_0 = -\infty$  и  $t = +\infty$ , найдем интересующую нас связь между векторами начального и конечного состояний системы полей,

$$\Phi(\infty) = S(\infty, -\infty)\Phi(-\infty). \quad (3.2.1)$$

Входящий сюда оператор  $S(\infty, -\infty)$ , переводящий вектор начального состояния  $\Phi(-\infty)$  в вектор конечного состояния  $\Phi(\infty)$ , называется матрицей рассеяния и обозначается просто через  $S$ :  $S \equiv S(\infty, -\infty)$ .

Будем обозначать векторы состояний свободных полей через  $\Phi_r$ , где  $r$  — набор квантовых чисел, определяющих энергии, импульсы, поляризации и другие величины отдельных электронов и фотонов. Так как  $\mathbf{H}_I(-\infty) = 0$ , то эти векторы являются векторами состояний в представлении взаимодействия при  $t_0 = -\infty$ . С другой стороны, при  $t_0 = -\infty$  векторы состояний в представлении взаимодействия совпадают с векторами состояний в гейзенберговском представлении. Предполагая, что взаимодействие между полями выключается при  $t = \pm\infty$  достаточно медленно, мы можем характеризовать состояния полей в гейзенберговском представлении теми же наборами квантовых чисел  $r$ , что и в случае свободных полей, и обозначать соответствующие векторы состояний в гейзенберговском представлении через  $\Phi_r$ . Таким образом, предположение о медленности выключения взаимодействия может быть сформулировано в виде равенства  $\Phi_i = \Phi_r$  (адиабатическая гипотеза).

Возвращаясь к формуле (3.2.1), положим в ней  $\Phi(-\infty) = \Phi_i$ , где индекс  $i$  обозначает начальное состояние системы электронов и фотонов. Тогда вектор конечного состояния (при  $t = \infty$ ) будет иметь вид

$$\Phi(\infty) = S\Phi_i. \quad (3.2.2)$$

Его можно, очевидно, представить в виде суперпозиции различных векторов состояния  $\Phi_f$  свободных полей:

$$\Phi(\infty) = \sum_f a_f \Phi_f, \quad (3.2.3)$$

где коэффициенты  $a_f$  в силу ортонормированности системы векторов состояния  $\Phi_f$  (они являются собственными векторами гамиль-

тониана  $H_0$ ) равны  $a_f = (\Phi_f, \Phi(\infty))$ . Подставляя сюда (3.2.2) вместо  $\Phi(\infty)$ , найдем амплитуду вероятности перехода системы электронов и фотонов из состояния  $i$  в состояние  $f$ :

$$a_f = (\Phi_f, S\Phi_i) \equiv \langle f | S | i \rangle. \quad (3.2.4)$$

Мы видим, что амплитуды вероятности различных процессов рассеяния определяются элементами матрицы рассеяния, связывающими соответствующие начальные и конечные состояния.

**3.2.2. Инвариантная теория возмущений.** Чтобы найти матрицу рассеяния, будем исходить из уравнения (3.1.24) для оператора преобразования  $S$

$$i \frac{\partial}{\partial t} S(t, t_0) = H_I(t) S(t, t_0), \quad S(t_0, t_0) = I, \quad (3.2.5)$$

где  $H_I(t)$  — гамильтониан взаимодействия между полями:

$$H_I = - \int L_I(x) d^3x, \quad L_I(x) = j_\mu(x) A_\mu(x). \quad (3.2.6)$$

Входящий в гамильтониан  $H_I$  оператор плотности тока  $j_\mu(x)$  пропорционален электрическому заряду  $e$  электрона, который играет роль константы связи между электронным и электромагнитным полями. Так как эта константа, точнее говоря,

величина  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137,03604}$  мала по сравнению с единицей, то решение (3.2.5) можно искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра  $\alpha$ . Перепишем с этой целью (3.2.5) в виде интегрального уравнения

$$S(t, t_0) = I - i \int_{t_0}^t H_I(t) S(t, t_0) dt,$$

и положим в нем

$$S(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}(t, t_0),$$

где  $S^{(n)}(t, t_0)$  пропорционально  $e^n$ . Легко убедиться, что

$$S^{(n)}(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n).$$

Это выражение можно преобразовать так, чтобы все верхние пределы были равны  $t$ . Действительно, рассмотрим, например,  $S^{(2)}(t, t_0)$ . Областью интегрирования является здесь, очевидно, треугольник, расположенный ниже биссектрисы координатного угла в плоскости  $t_1, t_2$  (рис. 3.1). Поменяв местами переменные  $t_1$  и  $t_2$  и считая по-прежнему  $t_1$  абсциссой, а  $t_2$  ординатой, мы получим

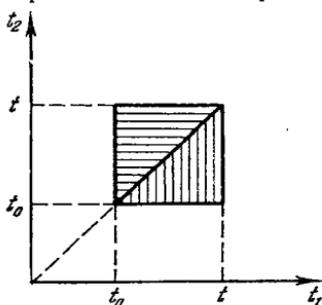


Рис. 3.1.

в качестве области интегрирования треугольник, расположенный выше биссектрисы координатного угла. Если бы операторы  $H_I(t_1)$  и  $H_I(t_2)$  коммутировали между собой, то оба подынтегральных выражения совпадали бы, и  $S^{(2)}(t, t_0)$  можно было бы представить как половину интеграла по всему квадрату. Но это можно сделать и в случае некоммутирующих операторов  $H_I(t_1)$  и  $H_I(t_2)$ , если ввести хронологический оператор

$$T(H_I(t_1)H_I(t_2)) = \begin{cases} H_I(t_1)H_I(t_2), & t_2 < t_1, \\ H_I(t_2)H_I(t_1), & t_1 < t_2, \end{cases}$$

или иначе:

$$T(H_I(t_1)H_I(t_2)) = \theta(t_1 - t_2)H_I(t_1)H_I(t_2) + \theta(t_2 - t_1)H_I(t_2)H_I(t_1), \quad (3.2.7)$$

где  $\theta(x) = 1$  при  $x > 0$  и  $\theta(x) = 0$  при  $x < 0$ . Тогда

$$S^{(2)}(t, t_0) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T(H_I(t_1)H_I(t_2)).$$

Аналогично можно показать, что в общем случае  $S^{(n)}(t, t_0)$  имеет вид

$$S^{(n)}(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n T(H_I(t_1)H_I(t_2) \dots H_I(t_n)),$$

где  $T$  — хронологический оператор, располагающий множители таким образом, чтобы временные аргументы операторов  $H_I(t_k)$  убывали слева направо.

Ряд для  $S(t, t_0)$  можно записать символически в виде

$$S(t, t_0) = T \left( \exp \left( -i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right) \right). \quad (3.2.8)$$

Полагая здесь  $t_0 = -\infty$ ,  $t = \infty$ , получим следующее общее выражение для матрицы рассеяния:

$$S = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(t) dt \right),$$

или (после подстановки вместо  $H_I(t)$  выражения (3.2.6))

$$S = T \exp \left( i \int L_I(x) d^4x \right). \quad (3.2.9)$$

Мы видели, что в случае самосопряженного гамильтониана оператор преобразования  $S(t, t_0)$  будет унитарным, поэтому в этом случае и матрица рассеяния будет унитарной:

$$SS^\dagger = I. \quad (3.2.10)$$

Если  $\Phi^a$  и  $\Phi^b$  — векторы двух физических состояний, то условие унитарности для них может быть записано в виде

$$(\Phi^a, S S^\dagger \Phi^b) = \sum_c (\Phi^a, S \Phi^c) (\Phi^c, S^\dagger \Phi^b) = \delta_{ab},$$

где  $\Phi^c$  — вектор промежуточного состояния  $c$  и суммирование производится по всем состояниям  $c$ . Эти состояния могут содержать произвольное число нефизических скалярных и продольных фотонов, но вклад таких нефизических состояний равен нулю, т. е. в качестве промежуточных состояний могут быть взяты только физические состояния.

**3.2.3. Представление матрицы рассеяния в виде суммы нормальных произведений.** Элементы матрицы рассеяния (для краткости ее называют также  $S$ -матрицей) определяют, как было разъяснено выше, амплитуды вероятности различных процессов рассеяния электронов и фотонов. Наша задача заключается в том, чтобы показать, как находить эти матричные элементы. Разложим с этой целью матрицу рассеяния в ряд по степеням заряда электрона  $e$ :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, \quad (3.2.11)$$

где матрица  $S^{(n)}$ , пропорциональная  $e^n$ , имеет вид

$$S^{(n)} = \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots \int d^4x_n T(L_I(x_1) L_I(x_2) \dots L_I(x_n)) \quad (3.2.12)$$

и интегрирование по каждой переменной  $x_i$  производится по всему 4-пространству. Входящее в (3.2.12) подынтегральное выражение представляет собой произведение операторов электромагнитного поля  $A_\mu(x)$  и операторов электронного поля  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  в представлении взаимодействия, взятых в разных точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Поэтому прежде всего нужно найти матричные элементы этих операторов. Для этого достаточно заметить, что операторы полей в представлении взаимодействия удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям, как и операторы свободных полей. Поэтому мы можем воспользоваться для них теми же разложениями на плоские волны (2.3.1), (2.3.15), что и для свободных полей.

Формулы (3.2.11), (3.2.12), определяющие разложение матрицы рассеяния в ряд по степеням малого параметра  $e$ , вместе с формулами для матричных элементов операторов полей составляют основу теории возмущений в квантовой электродинамике.

Чрезвычайно важной чертой этой теории является ее релятивистская инвариантность, непосредственно вытекающая из того, что лагранжиан взаимодействия между полями  $L_I(x)$  представляет собой релятивистский инвариант, и, кроме того, как было разъяснено в п. 2.5.4, релятивистски инвариантной является операция хронологического упорядочения операторов.

Мы будем говорить, что процесс рассеяния, т. е. взаимодействия между полями, является эффектом  $n$ -го порядка теории возмущения, если элемент  $S$ -матрицы, соответствующий этому процессу, пропорционален  $e^n$ . Очевидно, все процессы  $n$ -го порядка описываются матрицей  $S^{(n)}$ , являющейся  $n$ -м членом в разложении  $S$ -матрицы в ряд по степеням заряда электрона.

До сих пор мы предполагали, что при  $t = \mp \infty$  электроны являются полностью свободными. Но в рамках формализма матрицы рассеяния можно также решать задачи о взаимодействии электронов, движущихся в заданном внешнем электромагнитном поле  $A_\mu^{(e)}(x)$  (которое считается классическим), с квантованным электромагнитным полем  $A_\mu(x)$ . В этом случае следует лишь под  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  понимать разложения по собственным функциям электрона  $\psi_s^{(+)}(x)$ ,  $\psi_r^{(-)}(x)$  во внешнем поле  $A_\mu^{(e)}(x)$  (индексы  $+$  и  $-$  обозначают состояния с положительными и отрицательными частотами):

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_s a_s \psi_s^{(+)}(x) + \sum_r b_r^+ \psi_r^{(-)}(x), \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_s a_s^+ \bar{\psi}_s^{(+)}(x) + \sum_r b_r \bar{\psi}_r^{(-)}(x).\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

Матричные элементы этих операторов, соответствующие поглощению и испусканию электронов и позитронов, определяются формулами

$$\begin{aligned}\langle 0_s^+ | \psi(x) | 1_s^+ \rangle &= \psi_s^{(+)}(x), & \langle 1_s^+ | \bar{\psi}(x) | 0_s^+ \rangle &= \bar{\psi}_s^{(+)}(x), \\ \langle 0_r^- | \bar{\psi}(x) | 1_r^- \rangle &= \bar{\psi}_r^{(-)}(x), & \langle 1_r^- | \psi(x) | 0_r^- \rangle &= \psi_r^{(-)}(x).\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

Во многих случаях внешнее поле является слабым и его можно учитывать с помощью теории возмущений. Для этого следует заменить  $A_\mu(x)$  в выражении для  $L_I(x)$  суммой  $A_\mu(x) + A_\mu^{(e)}(x)$ , где  $A_\mu(x)$  — потенциал квантованного электромагнитного поля, а  $A_\mu^{(e)}(x)$  — потенциал внешнего поля, представляющий собой в отличие от  $A_\mu(x)$   $c$ -число, и далее пользоваться разложением (3.2.12). Что касается вектора плотности тока  $j_\mu(x)$ , то он должен строиться с помощью разложений  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  по собственным функциям свободной частицы.

Возможен также и промежуточный способ учета внешнего поля, когда одну его часть следует учитывать точно с помощью уравнения Дирака для электрона во внешнем поле, а другую часть — приближенно прибавлением ее к потенциалу квантованного поля. Операторы  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  при этом определяются с помощью разложений по собственным функциям уравнения Дирака, содержащего только первую часть внешнего поля.

Так как операторы  $A_\mu$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  представляют собой сумму операторов испускания и поглощения отдельных частиц, то каждый член в разложении (3.2.11) можно представить в виде суммы произведений операторов испускания и поглощения электронов,

позитронов и фотонов в различных состояниях. Задача состоит в том, чтобы выяснить, при каких условиях такого рода произведения имеют отличные от нуля матричные элементы, отвечающие какому-либо интересующему нас процессу  $i \rightarrow f$ . Если, например, в начальном состоянии  $i$  имеется один электрон и ни одного позитрона и фотона, а в конечном состоянии  $f$  — электрон и фотон, то, очевидно, один из операторов поглощения должен «уничтожить» электрон в состоянии  $i$ , два оператора испускания должны «создать» электрон и фотон в состоянии  $f$ , а все остальные операторы должны подразделиться на пары, причем операторы каждой пары «создают» и «уничтожают» одну и ту же частицу. Такого рода виртуальные процессы испускания и последующего поглощения одной и той же частицы сильно усложняют вычисление элементов матрицы рассеяния. Мы преобразуем поэтому матрицу рассеяния таким образом, чтобы эти процессы не нужно было рассматривать. Для этого нужно представить матрицу рассеяния в виде суммы нормальных произведений операторов испускания и поглощения частиц, в которых операторы испускания стоят слева от операторов поглощения. При вычислении матричных элементов таких произведений операторы поглощения будут «уничтожать» только те частицы, которые находятся в начальном состоянии, а операторы испускания будут «создавать» только те частицы, которые должны быть в конечном состоянии. Что же касается виртуальных процессов испускания и поглощения частиц, то явным образом они не будут входить в рассмотрение.

Чтобы представить  $S$ -матрицу в таком виде, учтем, что

$$L_1(x) = j_\mu(x) A_\mu(x) = ieN (\bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x)), \quad \hat{A}(x) = \gamma_\mu A_\mu(x).$$

Поэтому  $n$ -й член в разложении  $S$ -матрицы можно записать в виде

$$S^{(n)} = \frac{(-e)^n}{n!} \int T(N(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1)) \times \\ \times N(\bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2)) \dots N(\bar{\psi}(x_n) \hat{A}(x_n) \psi(x_n))) d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n. \quad (3.2.15)$$

Отдельные множители  $T$ -произведения, входящего в эту формулу, представляют собой  $N$ -произведения операторов полей, относящихся к одному и тому же моменту времени. Такого рода  $T$ -произведение мы будем называть смешанным  $T$ -произведением. Таким образом, нужно представить смешанное  $T$ -произведение в виде суммы  $N$ -произведений. Это может быть сделано с помощью следующих двух правил Вика [4]:

I.  $T$ -произведение операторов полей равно сумме их  $N$ -произведений, в которых операторы связаны всеми возможными связями.

II. Смешанное  $T$ -произведение операторов полей равно сумме их  $N$ -произведений, в которых операторы связаны всеми возмож-

ными связями, за исключением связей между операторами в пределах одного и того же  $N$ -произведения.

Разъясним эти правила. Если  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$  обозначают операторы полей  $A_\mu, \psi, \bar{\psi}$ , то, согласно правилу I,

$$T(\chi_1 \chi_2 \dots \chi_n) \equiv \delta_P \chi_{i_1} \chi_{i_2} \dots \chi_{i_n} = N(\chi_1 \chi_2 \dots \chi_n) + \\ + N(\chi_1^a \chi_2^a \chi_3 \dots \chi_n) + N(\chi_1^b \chi_2 \chi_3^b \dots \chi_n) + \dots, \quad (3.2.16)$$

где первое равенство является определением  $T$ -произведения (операторы  $\chi_{i_1}, \chi_{i_2}, \dots, \chi_{i_n}$  расположены в хронологическом порядке, т. е. так, что время возрастает справа налево;  $\delta_P$  представляет собой четность произведенной при этом перестановки электронно-позитронных операторов), и различные буквы над операторами во втором равенстве обозначают различные связи. При этом для соседних операторов они определяются как

$$\chi_i^a \chi_k^a = T(\chi_i \chi_k) - N(\chi_i \chi_k).$$

Связи между несоседними операторами определяются следующим образом: если связуемые операторы являются фотонными, то их можно просто поставить рядом; если же они являются электронно-позитронными операторами, то их можно поставить рядом, умножив предварительно  $N$ -произведение на четность произведенной перестановки электронно-позитронных операторов. Например, если  $\chi_1, \chi_2, \dots$  — электронно-позитронные операторы, то

$$N(\chi_1^a \chi_2 \chi_3^b \chi_4^b \chi_5^a \chi_6) = -(\chi_1^a \chi_5^a) (\chi_3^b \chi_4^b) N(\chi_2 \chi_6)$$

(так как  $\chi_1^a \chi_5^a$  и  $\chi_3^b \chi_4^b$  представляют собой  $c$ -числа, то они вынесены за знак  $N$ -произведения).

Проиллюстрируем теперь правило II. Если смешанное  $T$ -произведение имеет, например, вид  $T(\chi_1 N(\chi_2 \chi_3 \chi_4))$ , то

$$T(\chi_1 N(\chi_2 \chi_3 \chi_4)) = N(\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4) + N(\chi_1^a \chi_2^a \chi_3 \chi_4) + \\ + N(\chi_1^a \chi_2 \chi_3^a \chi_4) + N(\chi_1^a \chi_2 \chi_3 \chi_4^a). \quad (3.2.17)$$

В эту сумму не входят связи  $\chi_2^a \chi_3^a, \chi_2^a \chi_4^a, \chi_3^a \chi_4^a$ .

Используя эти правила, можно представить  $S^{(n)}$  в виде суммы интегралов, содержащих только  $N$ -произведения операторов полей:

$$S^{(n)} = e^n \sum \int F^{(r, n-r)}(x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}, \dots, x_{i_n}) \times \\ \times N(\bar{\psi}(x_{i_1}) \bar{A}(x_{i_2}) \psi(x_{i_3}) \dots \bar{\psi}(x_{i_{r-2}}) \bar{A}(x_{i_{r-1}}) \psi(x_{i_r})) d^4 x_1 \dots d^4 x_n, \quad (3.2.18)$$

где под знаком  $N$ -произведения стоят операторы в точках  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$  и величины  $F^{(r, n-r)}$  определяются связями между операторами в остальных из  $n$  точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (суммирование распространяется на все возможные разбиения совокупности чисел  $1, 2, \dots, n$  на две совокупности  $i_1, i_2, \dots, i_r$  и  $i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_n$ ). Связи между операторами полей определяются формулами (2.3.27), (2.5.25).

Заметим, что в силу градиентной инвариантности теории к связи между операторами электромагнитного поля  $A_\mu(x)$  и  $A_\nu(x')$  можно прибавить величину  $\partial^2\varphi((x-x')^2)/\partial x_\mu\partial x_\nu$ , где  $\varphi(x^2)$  — произвольная скалярная функция  $x^2$ , и при этом матрица рассеяния не изменится. Связь между операторами  $A_\mu(x)$  и  $A_\nu(x')$  будет определяться формулой

$$A_\mu^\alpha(x) A_\nu^\alpha(x') = D_{\alpha\mu\nu}(x-x'), \quad D_{\alpha\mu\nu}(x) = D_\alpha(x) \delta_{\mu\nu} + \frac{\partial^2\varphi(x^2)}{\partial x_\mu\partial x_\nu}.$$

Преобразование Фурье функции  $D_{\alpha\mu\nu}(x)$  имеет вид

$$D_{\alpha\mu\nu}(k) = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 - i0} \left( \delta_{\mu\nu} + d_l(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (3.2.19)$$

где  $d_l(k^2)$  — произвольная функция от  $k^2$ , связанная с произвольной функцией  $\varphi(x^2)$ .

**3.2.4. Функциональная форма представления матрицы рассеяния в виде  $N$ -упорядоченного оператора.** Покажем, что не только отдельные члены разложения матрицы рассеяния, но и вся она в целом может быть представлена в виде  $N$ -упорядоченного оператора [5]. Рассмотрим прежде всего функционал от операторов электромагнитного поля

$$F\{A\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int K_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) A_{\nu_1}(x_1) \dots A_{\nu_n}(x_n) d^4x_1 \dots d^4x_n, \quad (3.2.20)$$

где  $K_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  — некоторые  $c$ -функции от  $x_1, \dots, x_n$  и суммирование производится, помимо  $n$ , также по всем  $\nu_k$ , пробегающим значения  $\nu_k = 1, 2, 3, 4$ ; тогда нетрудно убедиться, что

$$TF\{A\} = N(e^{\Delta F}\{A\}), \quad (3.2.21)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \int D_\alpha(x-x') \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta}{\delta A_\nu(x')} \delta_{\mu\nu} d^4x d^4x'.$$

Формула, аналогичная (3.2.21), справедлива и для электронно-позитронных операторов, а именно если  $F\{\psi, \bar{\psi}\}$  — функционал от операторов  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x')$  вида

$$F\{\psi, \bar{\psi}\} = \sum_{n_1, n_2} \int K^{(n_1, n_2)}(x_1, \dots, x_{n_1}; x'_1, \dots, x'_{n_2}) \times \\ \times \psi(x_1) \bar{\psi}(x'_1) \dots \psi(x_{n_1}) \bar{\psi}(x'_{n_2}) d^4x_1 \dots d^4x'_{n_2},$$

где суммирование производится, помимо  $n_1$  и  $n_2$ , и по спинорным индексам, от которых зависит  $K^{(n_1, n_2)}$ , то

$$TF\{\psi, \bar{\psi}\} = N(e^{\Sigma F}\{\psi, \bar{\psi}\}), \quad (3.2.22)$$

где

$$\Sigma = \int \frac{\delta}{\delta \psi_\alpha(x)} S_{\alpha\beta}(x-x') \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_\beta(x')} d^4x d^4x',$$

Из (3.2.21) и (3.2.22) следует, что если мы имеем общий функционал  $F\{A, \psi, \bar{\psi}\}$  операторов  $A_\mu(x)$ ,  $\psi_\alpha(x)$ ,  $\bar{\psi}_\beta(x)$ , то

$$TF\{A, \psi, \bar{\psi}\} = N(e^{\Delta + \Sigma} F\{A, \psi, \bar{\psi}\}). \quad (3.2.23)$$

Полагая

$$F\{A, \psi, \bar{\psi}\} = \exp\left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x\right)$$

и вспоминая, что

$$S = TF\{A, \psi, \bar{\psi}\} = T_\psi T_A F\{A, \psi, \bar{\psi}\}$$

( $T_\psi$  и  $T_A$  обозначают  $T$ -упорядочения операторов  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  и  $A$ ), получим следующее общее выражение для матрицы рассеяния в виде  $N$ -упорядоченного оператора:

$$S = N\left(e^{\Delta + \Sigma} \exp\left(i \int j_\mu A_\mu(x) d^4x\right)\right). \quad (3.2.24)$$

Используя соотношение

$$T_A F\{A, \psi, \bar{\psi}\} = N_A\left(e^\Delta \exp\left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x\right)\right)$$

( $N_A$  обозначает  $N$ -упорядочение операторов  $A_\mu$ ) и замечая, что

$$N_A \frac{\delta}{\delta A_\nu(x')} \exp\left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x\right) = i N_A \left( j_\nu(x') \exp\left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x\right) \right),$$

легко убедиться, что

$$\begin{aligned} N_A\left(\Delta \exp\left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x\right)\right) = \\ = -N_A\left(\frac{1}{2} \int D_c(x' - x'') j_\nu(x') j_\nu(x'') d^4x' d^4x'' \exp\left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x\right)\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} T_A F\{A, \psi, \bar{\psi}\} = \\ = \exp\left(-\frac{1}{2} \int j_\nu(x') D_c(x' - x'') j_\nu(x'') d^4x' d^4x''\right) N_A \exp\left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} S = T_\psi \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2} \int j_\mu(x') D_c(x' - x'') j_\mu(x'') d^4x' d^4x''\right) \times \right. \\ \left. \times N_A \exp\left(i \int j_\nu(x) A_\nu(x) d^4x\right) \right\}. \quad (3.2.25) \end{aligned}$$

Для процессов без участия фотонов последний множитель в (3.2.25) равен единице, и матрица рассеяния приобретает вид

$$S = T_\psi \exp\left(-\frac{1}{2} \int j_\mu(x') D_c(x' - x'') j_\mu(x'') d^4x' d^4x''\right). \quad (3.2.26)$$

Если движение электронов можно считать заданным, то плотность тока можно рассматривать как заданную  $c$ -функцию  $j_\mu(x)$ .

Из (3.2.25) следует, что в таком приближении матрица рассеяния приобретает вид

$$S = \exp\left(-\frac{1}{2} \int j_\nu(x') D_\epsilon(x' - x'') j_\nu(x'') d^4x' d^4x''\right) \times \\ \times N_A \exp\left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x\right), \quad (3.2.27)$$

где операторами являются только электромагнитные потенциалы  $A_\mu(x)$ .

### § 3.3. Графическое представление элементов матрицы рассеяния

#### 3.3.1. Графическое представление нормальных произведений.

В п. 3.2.3 было показано, что матрицу рассеяния можно представить в виде суммы нормальных произведений операторов полей, соответствующих различным процессам рассеяния частиц. Каждое такое нормальное произведение, а следовательно, и любой процесс рассеяния, можно изображать графически [6], если условиться сопоставлять 4-векторам  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , по которым производится интегрирование в матрице  $S^{(n)}$ , точки диаграммы, а операторам полей — линии, проходящие через эти точки, называемые вершинами диаграммы. Оператор  $A_\mu(x)$  мы будем изображать пунктирным лучом без определенного направления с началом в вершине  $x$ ; оператор  $\psi(x)$  — направленным сплошным лучом, идущим к вершине  $x$ , и оператор  $\bar{\psi}(x)$  — направленным сплошным лучом, идущим из вершины  $x$ . Все эти лучи, которые называются внешними линиями, предполагаются уходящими за пределы диаграммы.

Так как  $A_\mu(x)$  представляет собой сумму операторов поглощения и испускания фотонов, то пунктирной внешней линией будет изображаться фотон, испущенный или поглощенный в результате процесса рассеяния; кроме того, пунктирной внешней линией мы будем изображать также внешнее электромагнитное поле. Аналогичным образом, поскольку  $\psi(x)$  представляет собой сумму операторов уничтожения электронов и рождения позитронов, то сплошная внешняя линия, направленная к вершине, будет служить для изображения электрона, существовавшего до процесса рассеяния, или позитрона, образовавшегося в результате процесса рассеяния. Наконец, так как  $\bar{\psi}(x)$  представляет собой сумму операторов рождения электронов и уничтожения позитронов, то сплошная внешняя линия, направленная от вершины, будет служить для изображения позитрона, существовавшего до процесса рассеяния, или электрона, образовавшегося в результате процесса рассеяния.

Кроме операторов полей, мы должны графически изображать также связи между операторами. Условимся сопоставлять связям между операторами внутренние линии диаграммы, соединяющие ее вершины, а именно будем изображать связь между фотон-

ными операторами  $\hat{A}_u(x)$  и  $\hat{A}_v(y)$  пунктирной линией (не имеющей определенного направления), соединяющей вершины  $x$  и  $y$ , и связь между электронными операторами  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(y)$  — сплошной линией, соединяющей вершины  $x$  и  $y$  и имеющей направление от вершины  $x$  к вершине  $y$ .

Так как в выражении для  $S^{(n)}$  каждая точка  $x$  является аргументом трех операторов — одного фотонного и двух электронных, то через каждую вершину диаграммы проходит одна фотонная и две электронные линии.

Диаграммы, изображающие отдельные нормальные произведения, входящие в матрицу  $S^{(n)}$ , содержат  $n$  вершин. Мы будем называть их диаграммами  $n$ -го порядка. Они могут служить для изображения эффектов  $n$ -го приближения теории возмущений.

Приведем несколько примеров.

Начнем с эффектов первого порядка. В этом случае имеется, очевидно, только одна диаграмма, представленная на рис. 3.2. Она изображает рассеяние электрона или позитрона во внешнем поле, излучение или поглощение фотона электроном (позитроном), а также образование или поглощение электронно-позитронной пары. (Справа от диаграммы символически указано подынтегральное выражение матричного элемента  $S^{(1)}$  без знака нормального произведения.)

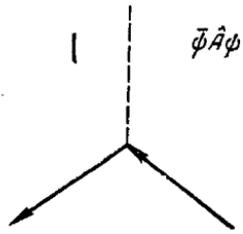


Рис. 3.2.

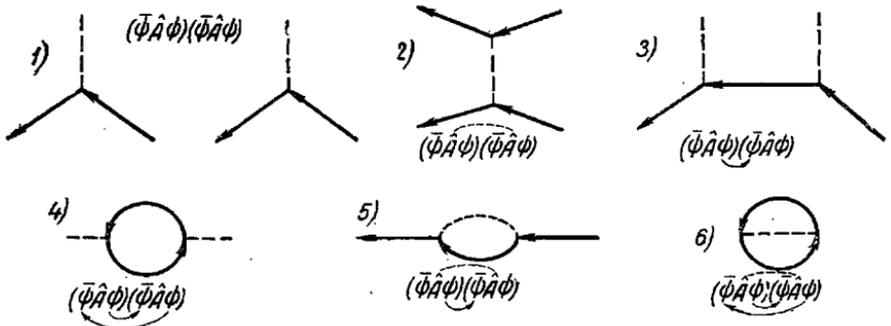


Рис. 3.3.

Рассмотрим далее эффекты второго порядка. В этом случае возможно всего шесть топологически различных диаграмм, изображенных на рис. 3.3. Рядом с диаграммами символически указано подынтегральное выражение элемента матрицы  $S^{(2)}$  (без знака нормального произведения). Линии, соединяющие различные множители  $\hat{A}$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ , служат для обозначения связей между операторами.

Рассмотрим подробнее диаграммы 2 и 3 рис. 3.3. Первой из этих диаграмм соответствует одно нормальное произведение,

$N(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi})$ , а второй диаграмме — два нормальных произведения  $N(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi})$ ,  $N(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi})$ . Оба последних  $N$ -произведения

отличающихся местом наложения одной связи между электронными операторами, после интегрирования по  $d^4x_1$  и  $d^4x_2$  вносят, как легко убедиться, одинаковый вклад в элемент матрицы  $S^{(2)}$ , соответствующий диаграмме 3. Поэтому достаточно рассматривать только одно из этих нормальных произведений и вносимый им вклад в элемент матрицы  $S^{(2)}$  умножить на 2.

Аналогичная ситуация имеет место и для других диаграмм. Каждой из них может соответствовать несколько нормальных произведений, отличающихся только местами наложения связей между операторами полей и вносящих одинаковый вклад в элемент матрицы рассеяния. Они называются эквивалентными нормальными произведениями.

Перейдем к перечислению диаграмм третьего порядка. Легко убедиться, что всего существует 15 топологически различных диаграмм, соответствующих различным эффектам третьего порядка (рис.3.4).

Например, диаграмме 8 рис. 3.4 соответствует шесть эквивалентных  $N$ -произведений:

$$\begin{array}{ll}
 1) N(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi}), & 2) N(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi}), \\
 3) N(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi}), & 4) N(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi}), \\
 5) N(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi}), & 6) N(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi})(\overline{\psi\hat{A}\psi}).
 \end{array}$$

Учитывая, что в  $N$ -произведении можно менять местами электронные операторы, умножая при этом  $N$ -произведение на четность произведенной перестановки и используя (2.3.24) и (2.5.25), легко убедиться, что все шесть  $N$ -произведений вносят одинаковый вклад в элемент матрицы  $S^{(3)}$ , соответствующий изображенному на диаграмме 8 процессу рассеяния.

Заметим, что число эквивалентных  $N$ -произведений, соответствующих данной диаграмме, можно определять следующим простым способом. Нужно, перенумеровав вершины диаграммы числами 1, 2, ...,  $n$ , определить число перестановок этих чисел, не меняющих вида диаграммы. Если это число равно  $g$  ( $g=2$  для диаграммы 2 рис. 3.3 и  $g=1$  для диаграммы 3 рис. 3.3), то число эквивалентных  $N$ -произведений будет  $r = \frac{n!}{g}$ .

Приведенные на рис. 3.3 диаграммы изображают нормальные произведения операторов полей в общем виде и описывают одновременно ряд процессов. Эти операторы представляют собой суммы

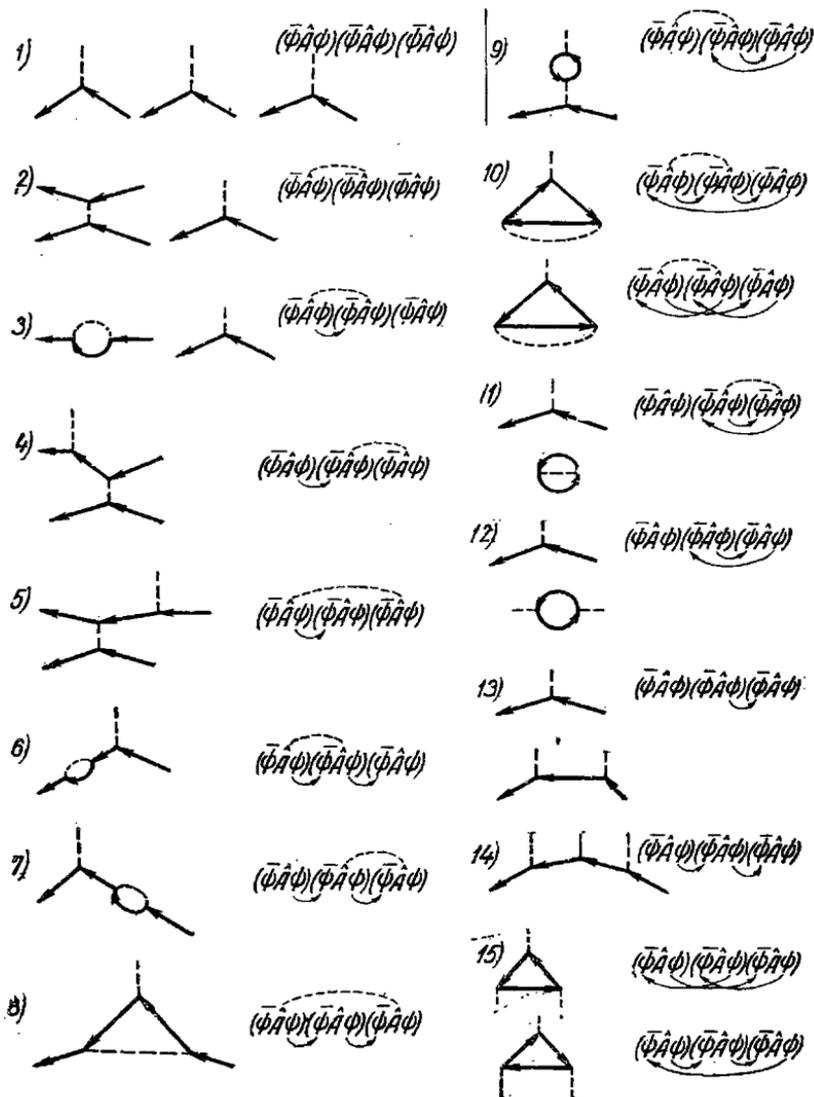


Рис. 3.4.

операторов испускания и поглощения частиц в различных состояниях; поэтому нормальное произведение, отвечающее какому-либо конкретному физическому процессу, может быть представлено в виде суммы нескольких слагаемых, которые содержат произве-

дения операторов испускания и поглощения частиц, участвующих в рассматриваемом процессе, и отличаются друг от друга только порядком расположения операторов. Эти слагаемые можно изображать диаграммами, которые топологически эквивалентны и отличаются друг от друга только порядком расположения электронных и фотонных линий.

Рассмотрим, например, излучение фотона электроном во внешнем поле. Это — процесс второго порядка, и отвечающее ему нормальное произведение в подынтегральном выражении  $S^{(2)}$  имеет

вид  $N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2))$ . Вместо  $\hat{A}(x)$  мы должны подставить

сюда  $\hat{A}(x) = A^{(e)}(x) + \hat{A}_k(x)$ , где  $A^{(e)}$  — внешнее поле и  $\hat{A}_k$  — оператор испускания фотона с 4-импульсом  $k$ . Нормальное произведение разобьется на два члена:

$$N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}^{(e)}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}_k(x_2)\psi(x_2)) + N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}_k(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}^{(e)}(x_2)\psi(x_2)),$$

которым соответствуют две диаграммы (рис. 3.5), отличающиеся друг от друга только порядком расположения фотонных линий, изображающих  $A^{(e)}$  и  $A_k$ .

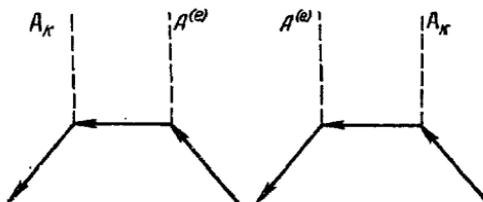


Рис. 3.5.

Если в процессе участвуют  $n$  фотонов, то после разбиения нормального произведения на слагаемые, содержащие операторы поглощения и испускания отдельных фотонов, мы получим  $n!$  членов, которым соответствуют диаграммы, отличающиеся друг от друга только порядком расположения фотонных линий.

Аналогичным образом, если в процессе участвует несколько электронов и позитронов, то нормальное произведение может быть представлено в виде суммы членов, которые содержат одни и те же операторы испускания и поглощения электронов и позитронов и отличаются только порядком расположения этих операторов, а соответствующие этим членам диаграммы отличаются друг от друга только порядком расположения электронных линий.

Например, процессу рассеяния электрона электроном соответствуют две диаграммы (рис. 3.6); на этих диаграммах  $p_1$ ,  $p_2$  и

$p'_1, p'_2$  обозначают 4-импульсы электронов до и после рассеяния,  $k$  и  $k'$  — 4-импульсы виртуальных фотонов, которыми обмениваются оба электрона.

В отличие от процессов с участием нескольких фотонов, для которых отдельным диаграммам соответствуют матричные элементы, имеющие один и тот же знак, для процессов с участием нескольких электронов отдельным диаграммам соответствуют матричные элементы, могущие иметь разные знаки. Это связано с тем, что операторы испускания и поглощения электронов и позитронов, находящихся в различных состояниях, в отличие от коммутирующих операторов испускания и поглощения фотонов не коммутируют между собой.

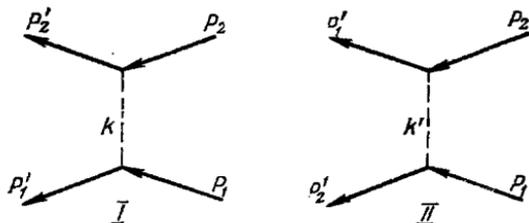


Рис. 3.6.

Например, двум диаграммам рис. 3.6 соответствуют матричные элементы, имеющие разные знаки. Действительно, подынтегральное выражение части матрицы  $\mathbf{S}^{(2)}$ , описывающей рассеяние электрона электроном, равно

$$N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)).$$

Подставляя сюда  $\bar{\psi}(x) = a_{p'_1}^+ \bar{\psi}_{p'_1}(x) + a_{p'_2}^+ \bar{\psi}_{p'_2}(x)$ ,  $\psi(x) = a_{p_1} \psi_{p_1}(x) + a_{p_2} \psi_{p_2}(x)$ , где  $a_p^+$  и  $a_p$  — операторы испускания и поглощения электрона с 4-импульсом  $p$  и  $\psi_p(x)$  — волновая функция электрона с 4-импульсом  $p$ , мы получим четыре отличных от нуля члена:

$$\begin{aligned} & N(a_{p'_1}^+ a_{p_1} a_{p'_2}^+ a_{p_2}) \bar{\psi}_{p'_1}(x_1) \psi_{p_1}(x_1) \bar{\psi}_{p'_2}(x_2) \psi_{p_2}(x_2) + \\ & + N(a_{p'_2}^+ a_{p_2} a_{p'_1}^+ a_{p_1}) \bar{\psi}_{p'_1}(x_2) \psi_{p_1}(x_2) \bar{\psi}_{p'_2}(x_1) \psi_{p_2}(x_1) + \\ & + N(a_{p'_1}^+ a_{p_2} a_{p'_2}^+ a_{p_1}) \bar{\psi}_{p'_1}(x_1) \psi_{p_2}(x_1) \bar{\psi}_{p'_2}(x_2) \psi_{p_1}(x_2) + \\ & + N(a_{p'_2}^+ a_{p_1} a_{p'_1}^+ a_{p_2}) \bar{\psi}_{p'_2}(x_1) \psi_{p_1}(x_1) \bar{\psi}_{p'_1}(x_2) \psi_{p_2}(x_2). \end{aligned}$$

Первые два члена представляют собой два эквивалентных нормальных произведения, соответствующих первой диаграмме рис. 3.6, а вторые два члена — два эквивалентных нормальных произведения, соответствующих второй диаграмме.

Переставляя в третьем члене операторы  $a$  и  $a^\dagger$ , легко убедиться, что  $N(a_{p_1'}^\dagger a_{p_2} a_{p_2'}^\dagger a_{p_1}) = -N(a_{p_1'} a_{p_2} a_{p_2'}^\dagger a_{p_1})$ , поэтому, как и утверждалось, матричные элементы, соответствующие обеим диаграммам, имеют разные знаки.

Этот результат может быть обобщен следующим образом. Пусть в процессе участвует  $z$  электронов, импульсы которых до и после рассеяния равны соответственно  $p_1, p_2, \dots, p_z$  и  $p_1', p_2', \dots, p_z'$ ; тогда процессу будут соответствовать  $z!$  диаграмм, которые отличаются обозначениями электронных линий после рассеяния. Если на двух диаграммах электронные линии после рассеяния (являющиеся продолжением электронных линий до рассеяния) обозначены соответственно через  $p_1', p_2', \dots$  и  $p_{j_1}', p_{j_2}', \dots$ , то относительный знак матричных элементов, отвечающих обеим диаграммам, будет определяться четностью перестановки  $(1, 2, \dots, z) \rightarrow (j_1, j_2, \dots, j_z)$ .

Таким образом, матричный элемент, соответствующий какому-либо физическому процессу, всегда можно после разбиения нормального произведения представить в виде

$$\langle f | S^{(n)} | i \rangle \equiv S_{i \rightarrow f}^{(n)} = \sum \mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}, \quad (3.3.1)$$

где отдельные слагаемые  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$  отличаются друг от друга порядком расположения операторов поглощения и испускания частиц, участвующих в процессе; диаграммы, изображающие эти слагаемые, топологически эквивалентны и отличаются только порядком расположения электронных и фотонных линий.

**3.3.2. Импульсное представление.** Чтобы найти величины  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ , удобно перейти к импульсному пространству. Представим для этого связи между операторами полей  $D_{\text{cuv}}(x)$  и  $S_{\text{cav}}(x)$ , а также 4-потенциал внешнего электромагнитного поля  $A_{\mu}^{(e)}(x)$  в виде интегралов Фурье

$$D_{\text{cuv}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D_{\text{cuv}}(k) e^{ikx} d^4k,$$

$$D_{\text{cuv}}(k) = \frac{1}{i(k^2 - i0)} \left( \delta_{\mu\nu} + d_l \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$

$$S_{\text{cav}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_{\text{cav}}(p) e^{ipx} d^4p, \quad S_{\text{cav}}(p) = i \frac{(i\hat{p} - m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i0},$$

$$A_{\mu}^{(e)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int A_{\mu}^{(e)}(q) e^{iqx} d^4q$$

и подставим их вместе с выражениями для матричных элементов операторов полей

$$\begin{aligned} \langle 0_{k\lambda} | A_\mu(x) | 1_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^{(\lambda)} e^{ikx}, \\ \langle 1_{k\lambda} | A_\mu(x) | 0_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^{(\lambda)*} e^{-ikx}, \\ \langle 0_{\rho\mu}^{(+)} | \psi(x) | 1_{\rho\mu}^{(+)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u^\mu(\rho) e^{ipx}, \\ \langle 1_{\rho\mu}^{(+)} | \bar{\psi}(x) | 0_{\rho\mu}^{(+)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \bar{u}^\mu(\rho) e^{-ipx}, \\ \langle 0_{\rho\mu}^{(-)} | \bar{\psi}(x) | 1_{\rho\mu}^{(-)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \bar{u}^\mu(-\rho) e^{ipx}, \\ \langle 1_{\rho\mu}^{(-)} | \psi(x) | 0_{\rho\mu}^{(-)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u^\mu(-\rho) e^{-ipx} \end{aligned}$$

в то из нормальных произведений под знаком интеграла для  $S^{(n)}$ , которое соответствует  $\mathfrak{M}_i^{(n)}$ . Собирая множители  $e^{ipx_i}$ ,  $e^{ikx_i}$ ,  $e^{iqx_i}$  с определенными  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) и выполняя интегрирование по  $d^4x_1 \dots d^4x_n$ , мы получим произведение  $n$  четырехмерных  $\delta$ -функций  $\delta(\Sigma p)$ , умноженное на  $(2\pi)^{4n}$ , где  $p$  служит для обозначения 4-векторов  $p, k, q$  (число слагаемых под знаком  $\delta$ -функции равно, очевидно, трем — по числу линий, проходящих через каждую вершину диаграммы).

Очевидно, в импульсном представлении каждой линии диаграммы будет соответствовать некоторый четырехмерный вектор  $p$ . Но функции  $D_{\text{св}}(x_j - x_i)$ ,  $S_{\text{св}}(x_j - x_i)$ , связанные с внутренними линиями диаграммы, зависят от разности координат  $x_j, x_i$  концов линии; поэтому в двух  $\delta$ -функциях, возникающих при интегрировании по  $d^4x_j$  и  $d^4x_i$ , 4-вектор  $p$ , связанный с линией  $x_j x_i$ , будет входить с разными знаками. Это дает возможность интерпретировать векторы  $p$ , соответствующие внутренним линиям диаграммы, как четырехмерные импульсы виртуальных «частиц», «испускаемых» в одном конце и «поглощаемых» в другом конце внутренних линий. При этом, очевидно, между временной и пространственной составляющими четырехмерного импульса виртуальной частицы не существует никакой связи,  $p^2 + m^2 \neq 0$ ,  $k^2 \neq 0$ .

Что касается внешних линий диаграммы, то им соответствуют, очевидно, четырехмерные импульсы реальных частиц, участвующих в процессе.

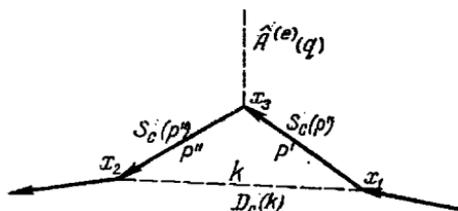


Рис. 3.7.

Чтобы получить окончательное выражение для  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ , необходимо расположить матрицы, действующие на спинорные индексы, в определенном порядке, произвести интегрирование по импульсам виртуальных частиц и переменным  $q$  (происходящим от разложения внешних потенциалов в интеграл Фурье) и просуммировать полученное выражение по поляризациям виртуальных фотонов.

Выясним прежде всего, в каком порядке должны быть расположены спинорные матрицы. Рассмотрим для этого пример — процесс рассеяния электрона во внешнем поле, изображенный на рис. 3.7. Соответствующее этому процессу нормальное произведение (под знаком интеграла в выражении для  $S^{(3)}$ ) равно

$$B = N(\bar{\psi}_\alpha(x_1)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} A_\mu(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_1) \bar{\psi}_\lambda(x_2)(\gamma_\nu)_{\lambda\epsilon} A_\nu(x_2) \bar{\psi}_\epsilon(x_2) \bar{\psi}_\rho(x_3)(\gamma_\delta)_{\rho\sigma} A_\delta^{(e)}(x_3) \psi_\sigma(x_3)).$$

Переставив местами  $\bar{\psi}_\lambda$  и  $\bar{\psi}_\beta$ , а затем  $\bar{\psi}_\lambda$  и  $\bar{\psi}_\alpha$ , что не изменяет знака  $B$ , и используя (2.3.24) и (2.5.25), перепишем  $B$  в виде

$$B = N(\bar{\psi}_\lambda(x_2)(\gamma_\nu)_{\lambda\epsilon} S_{\text{свр}}(x_2 - x_3) A_\delta^{(e)}(x_3)(\gamma_\delta)_{\rho\sigma} S_{\text{свв}}(x_3 - x_1) \times \\ \times (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\beta(x_1) D_{\text{свв}}(x_1 - x_2) = N(\bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu S_c(x_2 - x_3) \hat{A}^{(e)}(x_3) \times \\ \times S_c(x_3 - x_1) \gamma_\mu \psi(x_1)) D_{\text{свв}}(x_1 - x_2)$$

(перестановка операторов  $\psi_\alpha$  и  $\bar{\psi}_\beta$  приводит к дополнительному умножению на  $-1$ ). Это выражение показывает, что внутренней фотонной линии соответствует функция  $D_{\text{свв}}$  и две матрицы  $\gamma_\nu$  и  $\gamma_\mu$ , которые должны быть составлены ее концам (вершинам  $x_2$  и  $x_1$ ). При этом матрицы, действующие на спинорные индексы, т. е. матрицы  $\gamma_\mu$  и  $S_c$ , должны быть расположены в такой последовательности, считая слева направо, в которой они встречаются, если двигаться против направления электронной линии (см. рис. 3.7).

Выяснив, как должны быть расположены спинорные матрицы, мы можем теперь написать следующее общее выражение для  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$  в виде интеграла в импульсном пространстве:

$$\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)} = \delta_p(-1)^{n+l} \xi(2\pi)^{4(n-F)} e^{i\alpha} \int d^4 p_1 \dots d^4 p_F \int d^4 k_1 \dots d^2 k_{F_v} \int d^4 q_1 \dots \\ \dots d^4 q_s \sum \prod_1^n \delta(\sum p) O \left( \prod \left( \frac{u(p_i^+)}{\sqrt{2\epsilon_i^+}} \frac{\bar{u}(-p_i^-)}{\sqrt{2\epsilon_i^-}} \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}} \right) \times \right. \\ \times \prod \left( \frac{\bar{u}(p_j^+)}{\sqrt{2\epsilon_j^+}} \frac{u(-p_j^-)}{\sqrt{2\epsilon_j^-}} \frac{\hat{e}_j}{\sqrt{2\omega_j}} \right) \prod_1^s \frac{\hat{A}^{(e)}(q)}{(2\pi)^4} \prod_1^F \left( i \frac{\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \right) \times \\ \left. \times \prod_1^{F_v} \left( \gamma_\nu \frac{1}{ik^2} (\delta_{\mu\nu} + d_l \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \gamma_\mu \right) \right). \quad (3.3.2)$$

Здесь интегрирование производится по четырехмерным импульсам виртуальных частиц, т. е. по  $4F_e$  переменным  $p_1, p_2, \dots, p_{F_e}$ , происходящим от множителей типа  $S_c(p)$ , и  $4F_\gamma$  переменным  $k_1, k_2, \dots, k_{F_\gamma}$ , происходящим от множителей типа  $D_c(k)$ , а также по  $4s$  переменным  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , происходящим от разложения внешних потенциалов в интеграл Фурье ( $F_e$  и  $F_\gamma$  — числа внутренних электронных и фотонных линий, т. е. числа виртуальных электронов и фотонов,  $F = F_e + F_\gamma$ ;  $s$  — число вершин, в которых действуют внешние потенциалы),  $l$  — число замкнутых электронных петель с четным числом электронных линий,  $\delta_p$  — четность перестановки электронных операторов (см. ниже),  $\xi = r/n!$ .

Кроме интегрирования, в этой формуле производится суммирование по четырем значениям индекса  $\nu$ , обозначающим различные поляризации виртуальных фотонов, причем каждому виртуальному фотону соответствует свой индекс  $\nu$ , принимающий значения  $\nu = 1, 2, 3, 4$ .

Отдельные множители в формуле имеют следующие значения.

Произведение  $\prod \frac{u(p_i^+) \bar{u}(-p_i^-)}{\sqrt{2e_i^+} \sqrt{2e_i^-}} \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}}$  представляет собой произведение биспиноров  $u(p)/\sqrt{2e}$ ,  $\bar{u}(-p)/\sqrt{2e}$  и величин  $\hat{e}/\sqrt{2\omega}$ , описывающих электроны, позитроны и фотоны в начальном состоянии  $i$ ; произведение  $\prod \frac{\bar{u}(p_i^+) u(-p_i^-)}{\sqrt{2e_i^+} \sqrt{2e_i^-}} \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}}$  обозначает аналогичное произведение для конечного состояния  $f$ . Множители  $i \frac{\hat{p} - m}{p^2 + m^2}$  и  $\gamma_\nu \frac{1}{ik^2} (\delta_{\mu\nu} + d_l \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \gamma_\mu$  происходят от связей электронных и фотонных операторов, причем число первых равно  $F_e$ , а вторых —  $F_\gamma$ . Наконец, символ  $O$  служит для обозначения определенного порядка в расположении спинорных матриц, а именно матрицы  $\gamma_\mu$  и  $S_c$ , действующие на спинорные индексы, должны быть расположены, считая справа налево, в такой последовательности, в какой они встречаются, если двигаться по направлению электронной линии диаграммы.

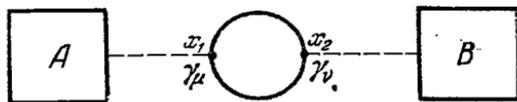


Рис. 3.8.

Специфическая особенность возникает в том случае, если диаграмма содержит замкнутые электронные петли с четным числом электронных линий (при нечетном числе электронных линий, входящих в петлю, матричный элемент равен нулю). В этом случае каждой электронной петле соответствует в выражении  $\mathfrak{M}_i^{(n)}$  взятый со знаком минус след произведения матриц  $\gamma_\mu$  и  $S_c$ , относящихся к петле. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим

часть диаграммы, содержащую замкнутую электронную петлю, изображенную на рис. 3.8 (квадратики  $A$  и  $B$  обозначают произвольные, сколь угодно сложные диаграммы, вид которых не существен). Множитель, связанный с этой петлей, в общем выражении для нормального произведения, соответствующего рис. 3.8, имеет следующий вид:  $B = N (\bar{\Psi}_\alpha^a(x_1) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \Psi_\beta^b(x_1) \bar{\Psi}_\delta^b(x_2) (\gamma_\nu)_{\delta\rho} \Psi_\rho^a(x_2))$ . Используя выражения для связей операторов, получим

$$B = -(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} S_{c\beta\delta}(x_1 - x_2) (\gamma_\nu)_{\delta\rho} S_{c\rho\alpha}(x_2 - x_1) = \\ = -\text{Sp}(\gamma_\mu S_c(x_1 - x_2) \gamma_\nu S_c(x_2 - x_1)),$$

что и утверждалось выше.

Если диаграмма содержит  $l$  замкнутых электронных петель с четным числом линий, то  $\mathfrak{M}_i^{(n)}$  приобретает множитель  $(-1)^l$ , который входит в (3.3.2) наряду с множителем  $(-1)^n \delta_P$ , где  $\delta_P$  определяет относительный знак  $\mathfrak{M}_i^{(n)}$ , в том случае, если в процессе участвует несколько электронов. Как было разъяснено выше,  $\delta_P$  представляет собой четность перестановки индексов электронов

$$P = (1, 2, \dots) \rightarrow (i_1, i_2, \dots),$$

где числа  $1, 2, \dots$  нумеруют на диаграмме импульсы электронов до рассеяния, а числа  $i_1, i_2, \dots$  — после рассеяния.

Легко показать, что диаграммам, содержащим замкнутые внутренние электронные петли, состоящие из нечетного числа отрезков, соответствует суммарный матричный элемент, равный нулю (теорема Фарри) [7].

**3.3.3. Правила Фейнмана.** Сформулируем теперь окончательно общие правила написания матричного элемента, соответствующего любой диаграмме (правила Фейнмана) [6].

1) Каждой внешней электронной линии соответствует биспинор одного из типов  $\frac{u^\mu(p)}{\sqrt{2\varepsilon}}$ ,  $\frac{\bar{u}^\mu(p)}{\sqrt{2\varepsilon}}$ ,  $\frac{u^\mu(-p)}{\sqrt{2\varepsilon}}$ ,  $\frac{\bar{u}^\mu(-p)}{\sqrt{2\varepsilon}}$ , причем  $u^\mu(p)$  и  $\bar{u}^\mu(p)$  соответствуют поглощению и испусканию электронов с импульсом  $p$  и поляризацией  $\mu$ , а  $\bar{u}^\mu(-p)$  и  $u^\mu(-p)$  — поглощению и испусканию позитрона с импульсом  $p$  и поляризацией  $\mu$ .

2) Каждой внешней фотонной линии, изображающей фотон, соответствует матрица  $\frac{\hat{\epsilon}}{\sqrt{2\omega}}$ , где  $\omega$  — частота и  $\epsilon_\mu$  — единичный

4-вектор поляризации фотона. Каждой внешней фотонной линии, изображающей внешнее электромагнитное поле, соответствует матрица

$$\frac{\hat{A}^{(e)}(q)}{(2\pi)^4}.$$

3) Каждой внутренней электронной линии с импульсом  $p$  соответствует матрица  $i \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}$ .

4) Каждой внутренней фотонной линии с импульсом  $k$  соответствует множитель  $\frac{1}{i} \frac{1}{k^2} \left( \delta_{\mu\nu} + d_i(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$ , а ее концам — матрицы

$\gamma_\mu$  и  $\gamma_\nu$ .

5) Каждой вершине соответствует  $\delta$ -функция, содержащая импульсы всех линий, сходящихся в эту вершину, причем импульсы на обоих концах внутренней линии берутся с противоположными знаками.

6) Все матрицы, действующие на спинорные индексы, располагаются справа налево в такой последовательности, в которой они встречаются, если двигаться по направлению электронной линии.

7) Если диаграмма содержит замкнутую электронную петлю с четным числом электронных линий, то в  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow j}^{(n)}$  входит в качестве множителя взятый с обратным знаком след произведения матриц  $i \frac{\hat{p} - m}{p^2 + m^2}$  и  $\gamma_\mu$ , относящихся к отдельным линиям петли и ее вершинам.

Матричные элементы диаграмм, содержащих замкнутые электронные петли с нечетным числом электронных линий, равны нулю.

8) Численный множитель, стоящий в  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow j}^{(n)}$  перед произведением биспиноров  $\frac{u^\mu(\pm p)}{\sqrt{2e}}$  и матриц  $\frac{\hat{e}}{\sqrt{2\omega}}$ ,  $\gamma_\mu$ ,  $S_c$ , равен  $(-1)^{n+l} \times \xi \delta_P (2\pi)^{4(n-F)}$ , где  $F$  — общее число внутренних линий,  $l$  — число электронных петель с четным числом электронных линий,  $\delta_P$  — четность перестановки индексов импульсов электронов  $1, 2, \dots \rightarrow j_1, j_2, \dots$  ( $1, 2, \dots$  нумеруют начальные, а  $j_1, j_2, \dots$  — конечные импульсы электронов),  $\xi = \frac{r}{n!}$  ( $r$  — число эквивалентных нормальных произведений, соответствующих рассматриваемой диаграмме).

9) По четырехмерным импульсам внутренних линий, изображающих виртуальные частицы, и по переменным  $q$ , связанным с внешними потенциалами, производится интегрирование, а по четырехмерным поляризациям виртуальных фотонов — суммирование.

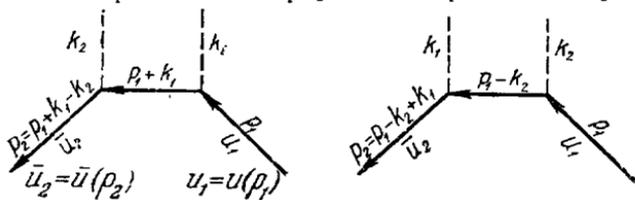


Рис. 3.9.

Рассмотрим в качестве примера рассеяние фотона электроном во втором приближении теории возмущений. Этому процессу (подробно он будет изучен в § 4.2) соответствуют две диаграммы, изображенные на рис. 3.9 и отличающиеся друг от друга только последовательностью действия фотонных операторов.

Элемент матрицы  $S^{(2)}$ , соответствующий процессу рассеяния фотона электроном, может быть сразу написан на основании правил Фейнмана:

$$\langle 1_{p_2}^+ 1_{k_2} | S^{(2)} | 1_{p_1}^+ 1_{k_1} \rangle = \\ = ie^2 (2\pi)^4 \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \left( \frac{\hat{\varepsilon}_2}{\sqrt{2\omega_2}} \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) - m}{(p_1 + k_1)^2 + m^2} \frac{\hat{\varepsilon}_1}{\sqrt{2\omega_1}} + \right. \\ \left. + \frac{\hat{\varepsilon}_1}{\sqrt{2\omega_1}} \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k}_2) - m}{(p_1 + k_2)^2 + m^2} \frac{\hat{\varepsilon}_2}{\sqrt{2\omega_2}} \right) \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \delta(p_2 - p_1 + k_2 - k_1),$$

где  $p_1$  и  $k_1$  — 4-импульсы электрона и фотона до рассеяния,  $p_2$  и  $k_2$  — аналогичные величины после рассеяния,  $e_1$  и  $e_2$  — единичные 4-векторы поляризации фотонов и, наконец,  $u_1 = u(p_1)$ ,  $\bar{u}_2 = \bar{u}(p_2)$ .

Топологически такие же диаграммы соответствуют двухфотонной аннигиляции электронно-позитронной пары (рис. 3.10).

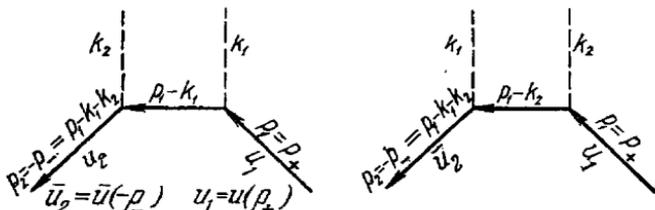


Рис. 3.10.

Элемент матрицы  $S^{(2)}$ , соответствующий этому процессу, равен согласно правилам Фейнмана

$$\langle 1_{k_1} 1_{k_2} | S^{(2)} | 1_{p_1}^+ 1_{p_2}^- \rangle = \\ = ie^2 (2\pi)^4 \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon^-}} \left( \frac{\hat{\varepsilon}_2}{\sqrt{2\omega_2}} \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_1) - m}{(p_1 - k_1)^2 + m^2} \frac{\hat{\varepsilon}_1}{\sqrt{2\omega_1}} + \right. \\ \left. + \frac{\hat{\varepsilon}_1}{\sqrt{2\omega_1}} \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) - m}{(p_1 - k_2)^2 + m^2} \frac{\hat{\varepsilon}_2}{\sqrt{2\omega_2}} \right) \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon^+}} \delta(p_2 - p_1 + k_1 + k_2),$$

где  $p_1 \equiv p_+$  — 4-импульс электрона и  $-p_2 \equiv p_-$  — 4-импульс позитрона.

## § 3.4. Вероятность и эффективное сечение

**3.4.1. Амплитуда рассеяния и вероятность.** В отсутствие взаимодействия, когда состояния частиц не меняются, матрица рассеяния  $S$  совпадает, очевидно, с единичной матрицей  $I$ . Поэтому удобно положить

$$S = I + iT \quad (3.4.1)$$

и связывать вероятности различных процессов  $P_{i \rightarrow j}$  с элементами матрицы  $T$ :

$$P_{i \rightarrow j} = | \langle j | T | i \rangle |^2,$$

где  $i$  и  $f$  служат для обозначения начального и конечного состояний системы взаимодействующих полей (фазовый множитель перед  $T$  может быть выбран произвольно; сделанный в (3.4.1) выбор соответствует выбору фазового множителя в матричных элементах в нерелятивистской квантовомеханической теории рассеяния).

Если в процессе участвуют только свободные частицы, то из матричного элемента  $\langle f | T | i \rangle$  можно выделить  $\delta$ -функцию, содержащую разности 4-импульсов частиц в начальном ( $p_i$ ) и конечном ( $p_f$ ) состояниях,

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 M_{i \rightarrow f} \delta(\sum p_i - \sum p_f)$$

(величину  $M_{i \rightarrow f}$  называют амплитудой рассеяния для соответствующего процесса). Поэтому вероятность процесса  $P_{i \rightarrow f}$  будет пропорциональна квадрату  $\delta(\sum p_i - \sum p_f)$ . Заменяв одну из этих  $\delta$ -функций интегралом

$$\delta(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{iqx}, \quad q = \sum p_i - \sum p_f,$$

мы будем считать область интегрирования в нем ограниченной, т. е. заменим  $\delta$ -функцию на  $V \Delta t / (2\pi)^4$ , где  $\Delta t$  — интервал интегрирования по времени и  $V$  — пространственный объем интегрирования. Таким образом, вероятность процесса  $i \rightarrow f$  пропорциональна времени  $\Delta t$ , и мы можем поэтому ввести вероятность, отнесенную к единице времени,

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{P_{i \rightarrow f}}{\Delta t} = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta(\sum p_i - \sum p_f) \quad (3.4.2)$$

(объем  $V$ , т. е. объем, на который нормированы волновые функции частиц, считаем для простоты равным единице).

Так как в рассматриваемом процессе начальное и конечное состояния частиц относятся к непрерывному спектру, то практический интерес представляет знание вероятности того, что трехмерные импульсы частиц  $p_f$  в конечном состоянии находятся в заданных интервалах  $d^3p_f$ . Чтобы найти эту вероятность, которую мы обозначим через  $dW_{i \rightarrow f}$ , нужно умножить  $W_{i \rightarrow f}$  на  $\prod \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}$ , где  $\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}$  — число состояний частицы с определенной поляризацией, для которой импульс  $p_f$  лежит в интервале  $d^3p_f$ :

$$dW_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta(\sum p_i - \sum p_f) \prod \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}. \quad (3.4.3)$$

Выполнив интегрирование по одному из импульсов  $p_f$ , мы устраним в  $dW_{i \rightarrow f}$  три пространственные  $\delta$ -функции:

$$dW_{i \rightarrow f} = 2\pi |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta(\sum \varepsilon_i - \sum \varepsilon_f) \prod \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}, \quad (3.4.4)$$

где штрих над произведением означает, что из него исключен один из множителей  $d^3 p_j / (2\pi)^3$ ;  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_j$  представляют собой энергии частиц в начальном и конечном состояниях.

Чтобы устранить  $\delta$ -функцию от энергии, представим какой-либо из множителей, входящих в произведение  $\Pi'$ , в виде

$$\frac{d^3 p'_j}{(2\pi)^3} = \frac{|p'_j| e'_j}{(2\pi)^3} d\varepsilon'_j d\omega,$$

где  $d\omega$  — элемент телесного угла, в котором лежит вектор  $p'_j$ . Выполнив интегрирование по  $d\varepsilon'_j$ , получим

$$dw_{i \rightarrow j} = 2\pi |M_{i \rightarrow j}|^2 \rho d\omega \prod'' \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}, \quad (3.4.5)$$

$$\rho = \int \frac{|p'_j| e'_j}{(2\pi)^3} \delta\left(\sum \varepsilon_i - \sum \varepsilon_f\right) d\varepsilon'_j,$$

где  $\Pi''$  обозначает произведение  $\Pi'$  без одного из множителей  $d^3 p'_j / (2\pi)^3$ .

Если в процессе участвуют частицы, находящиеся в постоянном внешнем поле, то импульс не сохраняется, а сохраняется только энергия. В этом случае из  $\langle f | T | i \rangle$  можно выделить только  $\delta$ -функцию, содержащую энергии частиц:

$$\langle f | T | i \rangle = 2\pi M_{i \rightarrow j} \delta(\sum \varepsilon_i - \sum \varepsilon_f).$$

Поступая так же, как и выше, найдем вероятность процесса  $i \rightarrow f$ , отнесенную к единице времени:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{P_{i \rightarrow f}}{\Delta t} = 2\pi |M_{i \rightarrow j}|^2 \delta\left(\sum \varepsilon_i - \sum \varepsilon_f\right). \quad (3.4.6)$$

Наконец, умножив  $W_{i \rightarrow f}$  на  $\prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}$ , получим вероятность того, что импульсы частиц  $p_f$  лежат в интервалах  $d^3 p_f$ :

$$dw_{i \rightarrow f} = 2\pi |M_{i \rightarrow j}|^2 \delta\left(\sum \varepsilon_i - \sum \varepsilon_f\right) \prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (3.4.7)$$

Это выражение, в отличие от (3.4.5), содержит под знаком произведения импульсы всех частиц в конечном состоянии.

**3.4.2. Суммирование по состояниям поляризации электронов и фотонов.** Во многих случаях нас не интересует определенное состояние поляризации возникающих частиц (т. е. ориентации спинов электронов и направления поляризации фотонов). В этих случаях вероятность  $dw_{i \rightarrow f}$  должна быть просуммирована по возможным состояниям поляризации частиц в конечном состоянии. Если, кроме того, в начальном состоянии частицы не поляризованы, то вероятность  $dw_{i \rightarrow f}$  должна быть еще усреднена по поляризациям частиц в начальном состоянии.

Покажем, как производится суммирование и усреднение по поляризациям частиц. Рассмотрим сначала тот случай, когда в начальном и в конечном состояниях имеется только один элек-

трон. Амплитуда рассеяния  $M_{i \rightarrow f}$  имеет тогда вид  $M_{i \rightarrow f} = \bar{u}_f Q u_i$ , где  $u_i \equiv u(p_i)$  и  $u_f \equiv u(p_f)$  — спинорные амплитуды электрона в начальном и конечном состояниях и  $Q$  — некоторая матрица. Нас интересует величина  $\frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |M_{i \rightarrow f}|^2$  ( $\mu_i$  и  $\mu_f$  — проекции спина электрона в начальном и конечном состояниях), которая может быть найдена согласно (1.1.40):

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |\bar{u}_f Q u_i|^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} \{Q(m - i\hat{p}_i) \bar{Q}(m - i\hat{p}_f)\}, \quad (3.4.8)$$

где  $\bar{Q} = \gamma_4 Q^+ \gamma_4$ .

Аналогично, если в начальном и конечном состояниях имеется только один позитрон, то

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{v}_i Q v_f,$$

где  $v_i \equiv u(-p_i)$  и  $v_f \equiv u(-p_f)$  — спинорные амплитуды позитрона в начальном и конечном состояниях ( $p_i$  и  $p_f$  — импульсы позитрона в этих состояниях). В этом случае согласно п. 1.1.6

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |\bar{v}_i Q v_f|^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} \{Q(m + i\hat{p}_f) \bar{Q}(m + i\hat{p}_i)\}. \quad (3.4.9)$$

Наконец, если одно из состояний является электронным, а другое позитронным, то, очевидно,

$$M_{i \rightarrow f} = \begin{cases} \bar{u}_f Q v_f & \text{в случае образования пары,} \\ \bar{v}_i Q u_i & \text{в случае аннигиляции пары,} \end{cases}$$

и соответствующие величины определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |\bar{u}_f Q v_f|^2 &= -\frac{1}{2} \text{Sp} \{Q(m + i\hat{p}^-) \bar{Q}(m - i\hat{p}^+)\}, \\ \frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |\bar{v}_i Q u_i|^2 &= -\frac{1}{2} \text{Sp} \{Q(m - i\hat{p}^+) \bar{Q}(m + i\hat{p}^-)\}, \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

где  $p^+$  и  $p^-$  — 4-импульсы электрона и позитрона.

Аналогичным образом можно производить суммирование по поляризации и в более сложных случаях, когда в процессе участвует несколько электронов и позитронов. При этом нужно пользоваться приведенными формулами, считая, что матрица  $Q$  содержит сама по себе спинорные амплитуды, и производить суммирование по относящимся к ним поляризациям снова по формулам (3.4.8) — (3.4.10).

Покажем теперь, как производить суммирование и усреднение по поляризациям фотонов. Пусть, например, в конечном состоянии имеется фотон с импульсом  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $\lambda$

( $\lambda = 1, 2$ ). Если в состояниях  $i$  и  $f$  имеется электрон, то  $M_{i \rightarrow f}$  можно представить в виде

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{u}_f Q \hat{e}^{(\lambda)} Q' u_i,$$

где  $Q$  и  $Q'$  — некоторые матрицы и  $\hat{e}^{(\lambda)} = e_{\mu}^{(\lambda)} \gamma_{\mu}$  ( $e_{\mu}^{(\lambda)}$  — единичный вектор поляризации фотона). Поэтому

$$\sum_{\lambda=1,2} |M_{i \rightarrow f}|^2 = \sum_{\lambda=1,2} |\bar{u}_f Q \hat{e}^{(\lambda)} Q' u_i|^2 = - \sum_{\lambda=1,2} (\bar{u}_f Q \hat{e}^{(\lambda)} Q' u_i) (\bar{u}_i \bar{Q}' \hat{e}^{(\lambda)} \bar{Q} u_f),$$

где  $\bar{Q} = \gamma_4 Q^+ \gamma_4$ . Суммирование здесь производится по  $\lambda = 1, 2$ , но его можно расширить и считать, что  $\lambda = 1, 2, 3, 4$ , так как продольные и скалярные фотоны, не имеющие физического смысла, не внесут вклада в это выражение. Замечая, что

$$\sum_{\lambda=1}^4 e_{\mu}^{(\lambda)} e_{\nu}^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu},$$

получим окончательно

$$\sum_{\lambda=1,2} |M_{i \rightarrow f}|^2 = - (\bar{u}_f Q \gamma_{\mu} Q' u_i) (\bar{u}_i \bar{Q}' \gamma_{\mu} \bar{Q} u_f). \quad (3.4.11)$$

Это важное соотношение показывает, что суммирование по двум поперечным поляризациям фотона может быть заменено суммированием по четырем поляризациям, включающим поляризации продольного и скалярного фотонов.

Суммирование по четырем поляризациям производится с помощью формул

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu} s \gamma_{\mu} &= 4s, & \gamma_{\mu} \hat{a} \gamma_{\mu} &= -2\hat{a}, \\ \gamma_{\mu} \hat{a} \hat{b} \gamma_{\mu} &= 4ab, & \gamma_{\mu} \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma_{\mu} &= -2\hat{c} \hat{b} \hat{a}, \end{aligned}$$

где  $s$  — скаляр, а  $a, b, c$  — 4-векторы и  $ab = a_{\mu} b_{\mu}$ .

Если выражение (3.4.11) должно быть просуммировано по ориентациям спина электрона, то это может быть сделано с помощью формул (3.4.8) — (3.4.10).

Соотношения, аналогичные (3.4.11), могут быть записаны, очевидно, и для произвольного числа фотонов.

**3.4.3. Эффективное сечение.** До сих пор мы характеризовали процесс рассеяния его вероятностью. Вероятность является физической, реально измеримой характеристикой процесса в том случае, когда начальное состояние является одночастичным. Но легко видеть, что если сталкиваются две свободные частицы, то эта величина будет обратно пропорциональна нормировочному объему  $V$ , который может быть выбран произвольно. Чтобы получить величину, характеризующую процесс рассеяния и не зависящую от  $V$ , нужно разделить дифференциальную вероятность рассеяния  $dw_{i \rightarrow j}$  на плотность потока сталкивающихся частиц  $j$ , которая также обратно пропорциональна  $V$ . Определенная таким образом

величина называется дифференциальным эффективным сечением рассеяния и обозначается через  $d\sigma$ :

$$d\sigma = \frac{dw_{i \rightarrow f}}{j}. \quad (3.4.12)$$

Дадим теперь определение величине плотности потока сталкивающихся частиц. Естественное определение мы имеем в том случае, когда одна из частиц (рассеиватель) до столкновения покоилась. В этом случае  $j^{(0)} = n_1^{(0)}v_1^{(0)}$ ,  $v_2^{(0)} = 0$ , где  $n_1^{(0)}$  и  $v_1^{(0)}$  — плотность и скорость движущихся частиц в системе покоя рассеивателя (значок 0 служит для обозначения этой системы, а индекс 2 — для обозначения величин, относящихся к рассеивателю). Поэтому в системе покоя рассеивателя дифференциальное эффективное сечение рассеяния определяется как

$$d\sigma^{(0)} = \frac{dw_{i \rightarrow f}^{(0)}}{n_1^{(0)}v_1^{(0)}}.$$

В системе отсчета, в которой рассеиватель движется со скоростью  $v_2$ , отличной от нуля (система  $K$ ), определение плотности потока  $j$ , вообще говоря, неоднозначно. Целесообразно считать, что

$$j = n_1 v', \quad v' = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sqrt{(\rho_1 \rho_2)^2 - (m_1 m_2)^2},$$

где  $\rho_{1,2}$ ,  $\varepsilon_{1,2}$ ,  $m_{1,2}$  — 4-импульсы, энергии и массы частиц. Эффективное сечение рассеяния будет тогда релятивистским инвариантом.

Используя эту формулу и определения (3.4.12) и (3.4.3), получим следующее общее выражение для дифференциального эффективного сечения процесса рассеяния  $i \rightarrow f$ :

$$d\sigma = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta\left(\rho_1 + \rho_2 - \sum \rho_f\right) \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{V \sqrt{(\rho_1 \rho_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}, \quad (3.4.13)$$

где индексы 1, 2 относятся к частицам в начальном состоянии и индекс  $f$  — к частицам в конечном состоянии (при вычислении  $M_{i \rightarrow f}$  считается, что  $V = 1$ ).

Выражение для  $d\sigma$  можно переписать так, чтобы оно содержало только инвариантные величины. Выделим с этой целью из  $M_{i \rightarrow f}$  те множители, которые не инвариантны. Эти множители происходят от матричных элементов операторов полей и имеют, согласно (2.3.12) и (2.5.16), вид  $1/\sqrt{2\varepsilon_k}$ , где  $\varepsilon_k$  — энергия фотона или электрона (позитрона). Если поэтому записать  $M_{i \rightarrow f}$  в виде

$$M_{i \rightarrow f} = A_{i \rightarrow f} \prod \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}}, \quad (3.4.14)$$

где произведение распространяется на все частицы как в начальном, так и в конечном состояниях, то величина  $A_{i \rightarrow f}$  будет реля-

тивистским инвариантом. Подставив это выражение в (3.4.13) и используя соотношение

$$\int \frac{d^3 p_f}{e_f} = 2 \int d^4 p_f \delta(p_f^2 + m_f^2) \theta(e_f), \quad (3.4.15)$$

получим

$$d\sigma = (2\pi)^4 |A_{i \rightarrow f}|^2 \frac{\delta(p_1 + p_2 - \Sigma p_f)}{4 V (p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \prod \left( \frac{d^4 p_f \delta(p_f^2 + m_f^2) \theta(e_f)}{(2\pi)^8} \right). \quad (3.4.16)$$

Это и есть релятивистски инвариантная форма эффективного сечения рассеяния.

**3.4.4. Вероятность процессов рассеяния поляризованных частиц.** Покажем, как вычислять вероятности и сечения рассеяния частично поляризованных частиц. Начнем с рассмотрения электронов, причем будем сначала предполагать, что в начальном и конечном состояниях имеется только один электрон. В этом случае амплитуда рассеяния определяется, как мы видели, формулой

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{u}_f Q u_i,$$

и вероятность процесса пропорциональна

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 = (\bar{u}_f Q u_i) (\bar{u}_i \bar{Q} u_f) = u_{i\alpha} \bar{u}_{i\alpha'} \bar{Q}_{\alpha'\beta'} u_{f\beta} \bar{u}_f Q_{\beta\alpha}, \quad (3.4.17)$$

где  $\bar{Q} = \gamma_4 Q^+ \gamma_4$ .

Если начальное состояние поляризовано не полностью, а частично, то в формуле (3.4.17) следует произвести замену

$$u_{i\alpha} \bar{u}_{i\alpha'} \rightarrow (\rho_i)_{\alpha\alpha'},$$

где  $\rho_i$  — матрица плотности электрона в начальном состоянии, определяемая формулой (1.1.40):

$$\rho_i = \frac{1}{2} (m - i\hat{p}) (I + i\gamma_5 \hat{s}_i) \quad (3.4.18)$$

и  $s_i$  — 4-вектор поляризации электрона в начальном состоянии.

Аналогичным образом можно рассмотреть также случаи, когда начальное и конечное состояния являются позитронными либо одно из состояний является электронным, а другое позитронным. Так, в первом из этих случаев соответствующие формулы имеют вид

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{v}_i Q v_f, \quad v_{i\alpha} \bar{v}_{i\alpha'} \rightarrow (\rho_i^{-1})_{\alpha\alpha'}, \quad \rho_i^{-1} = \frac{1}{2} (-m - i\hat{p}) (I + i\gamma_5 \hat{s}). \quad (3.4.19)$$

Используя (1.1.39), легко видеть, что вероятность обнаружить в конечном состоянии полностью поляризованный электрон (позитрон) с 4-вектором поляризации  $a$  будет линейной функцией  $a$ :

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 \equiv A + B a \quad (3.4.20)$$

(черта означает переход от волновых функций частиц в начальном состоянии к соответствующим матрицам плотности).

Поставим теперь вопрос, какова будет матрица плотности электрона (позитрона) в конечном состоянии. Ответ гласит, что матрица плотности определяется формулой (1.1.40), в которой 4-вектор поляризации  $s_f$  имеет вид

$$s_f = [B + p(B\rho)/m^2] A^{-1}. \quad (3.4.21)$$

Действительно, перейдем в систему покоя электрона (позитрона). Тогда выражение (3.4.20) примет вид

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 = A + Bn = A \left(1 + \frac{B}{A} n\right), \quad (3.4.22)$$

где  $n$  — вектор поляризации, определяемый формулой (1.1.29'). С другой стороны, вероятность того, что полностью поляризованная частица, описываемая двухкомпонентным спинором  $v_f$ , будет при измерении обнаружена в состоянии с вектором поляризации  $n$ , равна

$$W(n) = |v^*(n) v_f|^2,$$

где  $v(n)$  — спинор, описывающий полностью поляризованную частицу с вектором поляризации  $n$ . Если спинор  $v_f$  не известен, а известна соответствующая матрица плотности

$$(\rho_f)_{\alpha\beta} = \overline{(v_f)_\alpha} (v_f)_\beta = (I + \xi_f \sigma)_{\alpha\beta}.$$

то

$$W(n) = v^*(n) \rho_f v(n) = \frac{1}{4} \text{Sp} [(I + \xi_f \sigma)(I + n\sigma)] = \frac{1}{2} (1 + \xi_f n). \quad (3.4.23)$$

Сравнивая (3.4.22) и (3.4.23), видим, что

$$\xi_f = B/A. \quad (3.4.24)$$

В произвольной системе отсчета соотношение (3.4.24) приобретает вид (3.4.21).

Отметим, что, согласно (3.4.23), проекция вектора поляризации  $\xi_f$  на произвольное направление  $n$  определяется следующим образом:

$$\xi_f n = \frac{W(+n) - W(-n)}{W(+n) + W(-n)} = \frac{N(+n) - N(-n)}{N(+n) + N(-n)}, \quad (3.4.25)$$

где  $N(+n) + N(-n)$  — полное число частиц, над которыми произведено измерение,  $N(+n)$  и  $N(-n)$  — числа зарегистрированных при измерении полностью поляризованных частиц с векторами поляризации  $+n$  и  $-n$  соответственно. Измеряя проекции вектора поляризации на три линейно-независимых вектора  $n_1, n_2, n_3$ , мы тем самым найдем вектор  $\xi_f$ . Выбирая, в частности, в качестве векторов  $n_1, n_2, n_3$  единичные векторы вдоль осей  $x, y, z$ , мы получим согласно (3.4.25)

$$\begin{aligned} (\xi_f)_x &= \frac{N(+x) - N(-x)}{N(+x) + N(-x)}, & (\xi_f)_y &= \frac{N(+y) - N(-y)}{N(+y) + N(-y)}, \\ (\xi_f)_z &= \frac{N(+z) - N(-z)}{N(+z) + N(-z)}. \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

Перейдем теперь к рассмотрению процессов рассеяния, в которых участвуют частично поляризованные фотоны. Пусть для простоты в начальном и конечном состояниях имеется только по одному фотону. Тогда амплитуда рассеяния будет иметь вид

$$M_{i \rightarrow j} = e_{i\alpha} Q_{\alpha\beta} e_{j\beta}^*,$$

где  $e_i$  и  $e_j$  — векторы поляризаций фотонов в начальном и конечном состояниях и  $Q$  — некоторая матрица. Для нахождения вероятности процесса  $i \rightarrow j$  в случае частичной поляризации фотона в начальном состоянии нужно, вычислив

$$|M_{i \rightarrow j}|^2 = e_{i\alpha} Q_{\alpha\beta} e_{j\beta}^* e_{i\alpha}^* Q_{\alpha'\beta'}^* e_{j\beta'},$$

заменить  $e_{i\alpha} e_{i\alpha}^*$  элементом  $(\rho_i^p)_{\alpha\alpha}$  матрицы плотности фотона в начальном состоянии:

$$e_{i\alpha} e_{i\alpha}^* \rightarrow (\rho_i^p)_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} (I + \xi_i \tau)_{ll'} e_{\alpha}^{(l)} e_{\alpha}^{(l')*},$$

где  $e^{(1)}$  и  $e^{(2)}$  — какие-либо из ортогональных ортов, введенных в п. 2.4.4.

Состояние поляризации фотона в конечном состоянии определяется следующим образом. Согласно (2.4.21) вероятность обнаружить в конечном состоянии полностью поляризованный фотон с параметрами Стокса  $\xi$  пропорциональна

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 = A + B\xi, \quad (3.4.27)$$

где черта означает переход от волновых функций частиц в начальном состоянии к соответствующим матрицам плотности. Аналогично (3.4.24) вектор Стокса фотона в конечном состоянии  $\xi_f$  определяется формулой

$$\xi_f = B/A. \quad (3.4.28)$$

Полученные результаты могут быть просто обобщены на тот случай, когда в начальном и конечном состояниях имеется произвольное число электронов, позитронов и фотонов.

## § 3.5. Структура диаграмм матрицы рассеяния

### 3.5.1. Собственно энергетические и вершинные диаграммы.

Диаграммы матрицы рассеяния в высших приближениях имеют, вообще говоря, сложную структуру. Изучение их облегчается, однако, благодаря тому, что диаграммы, соответствующие самым различным процессам, содержат общие структурные блоки, которые могут быть предварительно выделены и исследованы [8]. Ясно, что, найдя согласно правилам Фейнмана величины, отвечающие этим блокам, мы получим возможность решать широкий круг квантовоэлектродинамических задач.

Наибольшее значение имеют три типа структурных блоков: электронные собственно энергетические диаграммы, фотонные собственно энергетические диаграммы и вершинные диаграммы,

К рассмотрению этих трех типов диаграмм мы теперь и перейдем. Дадим прежде всего их определения.

Электронной собственно энергетической диаграммой (сокращенно ЭСЭД) называется такая часть произвольной диаграммы, которая связана с другими ее частями только двумя электронными линиями. Простейшей ЭСЭД является ЭСЭД второго порядка, изображенная на рис. 3.11, 1. Более сложные ЭСЭД четвертого порядка изображены на рис. 3.11, 2—5.

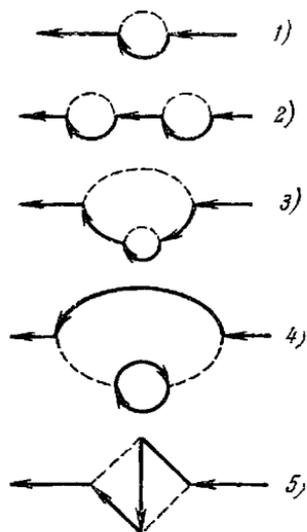


Рис. 3.11.

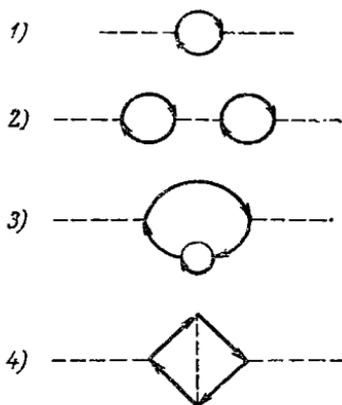


Рис. 3.12.

Фотонной собственно энергетической диаграммой (ФСЭД) называется такая часть некоторой произвольной диаграммы, которая связана с ее остальными частями только двумя фотонными линиями. Простейшей ФСЭД является ФСЭД второго порядка, изображенная на рис. 3.12, 1. Более сложные ФСЭД четвертого порядка изображены на рис. 3.12, 2—4.

Наконец, вершинной диаграммой (ВД) называется такая часть произвольной диаграммы, которая связана с другими ее частями только двумя электронными и одной фотонной линиями. Простейшей ВД является ВД третьего порядка, изображенная на рис. 3.13, 1. Более сложные ВД пятого порядка изображены на рис. 3.13, 2—8.

Следует различать компактные и некомпактные, а также неприводимые и приводимые собственно энергетические и вершинные диаграммы.

Компактной ЭСЭД называется такая ЭСЭД, которую нельзя разбить на части, соединенные только одной электронной линией. В противном случае ЭСЭД называется некомпактной. На рис. 3.11 диаграмма 2 является некомпактной, так как она состоит из двух ЭСЭД, соединенных одной электронной линией, все же остальные диаграммы компактны.

Компактной ФСЭД называется такая ФСЭД, которую нельзя разбить на части, соединенные только одной фотонной линией; в противном случае ФСЭД называется некомпактной. На рис. 3.12 все диаграммы, кроме 2, являются компактными, диаграмма же 2 некомпактна, так как она состоит из двух ФСЭД, соединенных между собой одной фотонной линией.

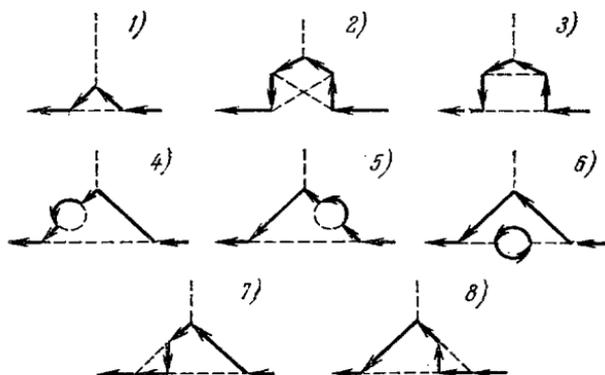


Рис. 3.13.

Наконец, компактной ВД называется такая ВД, которую нельзя разделить на части, соединенные между собой только электронной или фотонной линией; в противном случае ВД называется некомпактной. Изображенные на рис. 3.13 ВД являются, очевидно, компактными. Некомпактная ВД пятого порядка изображена на рис. 3.14.

Определим теперь неприводимые и приводимые диаграммы.

Неприводимой называется такая диаграмма, которая не содержит внутри себя собственно энергетических и вершинных диаграмм; в противном случае она называется приводимой.

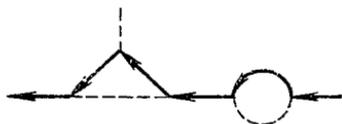


Рис. 3.14.

Существует, очевидно, только одна неприводимая ЭСЭД, а именно ЭСЭД второго порядка, изображенная на рис. 3.11, 1. Легко видеть, например, что остальные диаграммы рис. 3.11

являются приводимыми. Так, диаграмма 2 содержит две ЭСЭД, диаграммы 3 и 4 содержат собственно энергетические диаграммы, а диаграмма 5 содержит вершинную диаграмму.

Аналогично существует только одна неприводимая ФСЭД, а именно ФСЭД второго порядка, изображенная на рис. 3.12, 1.

Неприводимых ВД существует бесконечное множество. Из диаграмм, приведенных на рис. 3.13, неприводимыми являются диаграммы 1 и 2. Пример более сложной неприводимой ВД приведен на рис. 3.15.

3.5.2. **Эффективные линии.** Рассмотрим какую-либо диаграмму, содержащую внутреннюю электронную линию. В высших приближениях появятся, очевидно, диаграммы со всевозможными ЭСЭД, включенными в эту линию. Всю совокупность таких диаграмм (вместе с исходной электронной линией) мы будем графически изображать в виде сплошной жирной линии и называть ее эффективной электронной линией. Величина, соответствующая этой линии, называется электронной функцией Грина и обозначается через  $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$  или  $S'_{\alpha\beta}(p)$ , где  $p$  — 4-импульс электронной линии (величина  $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$  содержит, так же как и  $S_{\alpha\beta}(p)$ , два спиновых индекса  $\alpha, \beta$ , которые мы обычно будем опускать).

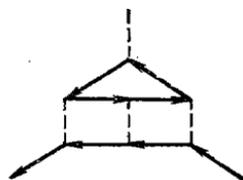


Рис. 3.15.

На рис. 3.16 изображены несколько первых диаграмм, соответствующих эффективной электронной линии. Из этого рисунка следует, очевидно, что

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(p) = S_{\alpha\beta}(p) + S_{\alpha\beta'}(p) K_{\beta'\nu'}^{(2,0)}(p) S_{c\nu\beta}(p) \quad (3.5.1)$$

или сокращенно, опуская спиновые индексы, можно написать

$$G^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) K^{(2,0)}(p) S_c(p),$$

где  $K_{\alpha\beta}^{(2,0)}(p) \equiv K^{(2,0)}(p)$  — сумма величин, соответствующих всем возможным ЭСЭД — как компактным, так и некомпактным — с данным импульсом  $p$ . Эта сумма (представляющая собой спин-тензор второго ранга) называется электронной собственно энергетической функцией.

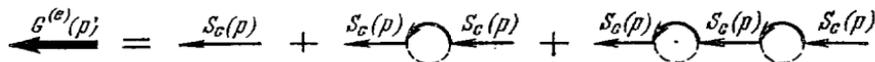


Рис. 3.16.

Аналогичным образом можно определить эффективную фотонную линию как внутреннюю фотонную линию со всевозможными включенными в нее ФСЭД. Мы будем графически изображать ее в виде жирной пунктирной линии. Величина, соответствующая этой линии, называется фотонной функцией Грина и обозначается через  $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k)$  или  $D'_{\mu\nu}(k)$ , где  $k$  — 4-импульс фотонной линии (величина  $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k)$ , так же как и  $D_{\mu\nu}(k)$ , содержит два тензорных индекса  $\mu, \nu$ , которые мы будем часто опускать).

Из рис. 3.17, на котором изображены несколько первых диаграмм, соответствующих эффективной фотонной линии, следует, что

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\nu'}(k) K_{\nu'\nu''}^{(0,2)}(k) D_{c\nu''\nu}(k); \quad (3.5.2)$$

сокращенно, опуская тензорные индексы, запишем эту формулу

в виде

$$G^{(\gamma)}(k) = D_c(k) + D_c(k) K^{(0,2)}(k) D_c(k),$$

где  $K_{\mu\nu}^{(0,2)}(k) \equiv K^{(0,2)}(k)$  — сумма величин, соответствующих всем возможным ФСЭД — как компактным, так и некомпактным — с данным импульсом  $k$ . Эта сумма (представляющая собой тензор второго ранга) называется фотонной собственно энергетической функцией.

$$G^{(2)}(k) = \text{---} \cdot + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \circ \text{---}$$

Рис. 3.17.

Введение эффективных электронных и фотонных линий позволяет, очевидно, не рассматривать некомпактные вершинные диаграммы. Действительно, некомпактные вершинные диаграммы представляют собой совокупности компактных вершинных диаграмм и эффективных электронных и фотонных линий. Поэтому в дальнейшем под вершинными диаграммами всегда будет подразумеваться компактные вершинные диаграммы.

Если образовать сумму величин, соответствующих всем возможным компактным вершинным диаграммам с заданными импульсами  $p_1$ ,  $p_2$  и  $k$  выходящих электронных и фотонной линий, то мы получим вершинную функцию, которую будем обозначать через  $\Gamma_{\mu, \alpha\beta}(p_1, p_2; k)$ , где  $\mu$  — векторный и  $\alpha, \beta$  — спинорные индексы. На диаграммах вершинная функция изображается в виде жирной точки, которая называется эффективной вершиной. Так как в силу законов сохранения 4-импульса  $k = p_1 - p_2$ , то в числе аргументов  $\Gamma_{\mu, \alpha\beta}(p_1, p_2; k)$  может быть опущен импульс фотонной линии (мы будем обычно также опускать спинорные индексы  $\alpha, \beta$ ).

$$\dot{u}(p) = u(p) + S_c(p) \boxed{K^{(2,0)}(p)} u(p)$$

Рис. 3.18.

$$\dot{a}(k) = a(k) + D_c(k) \boxed{K^{(2,0)}(k)} a(k)$$

Рис. 3.19.

Наряду с эффективными внутренними электронными и фотонными линиями мы должны ввести в рассмотрение также эффективные внешние электронные и фотонные линии, представляющие собой внешние электронные и фотонные линии со включенными в них всеми возможными собственно энергетическими диаграммами.

Величину, соответствующую внешней эффективной электронной линии с импульсом  $p$ , мы будем обозначать через  $u_a(p)$ . Эта величина, так же как и  $u_a(p)$ , является биспинором и может быть, согласно рис. 3.18, представлена в виде

$$u(p) = u(p) + S_c(p) K^{(2,0)}(p) u(p)$$

(спинорные индексы опущены).

Аналогичное равенство может быть написано (рис. 3.19) для величины  $a_\mu(k)$ , соответствующей эффективной внешней фотонной линии с импульсом  $k$ :

$$a(k) = a(k) + D_c(k) K^{(0,2)}(k) a(k).$$

Внешние линии служат, как мы знаем, для изображения реальных частиц. Выражаясь более точно, можно сказать, что они служат для изображения матричных элементов операторов полей, связывающих состояние вакуума с состояниями, в которых присутствует один фотон или один электрон (позитрон). Поэтому обычным внешним линиям мы сопоставляли величины  $u(\pm p)e^{\pm ipx}$  и  $a_\mu(k)e^{\pm ikx}$ , являющиеся матричными элементами

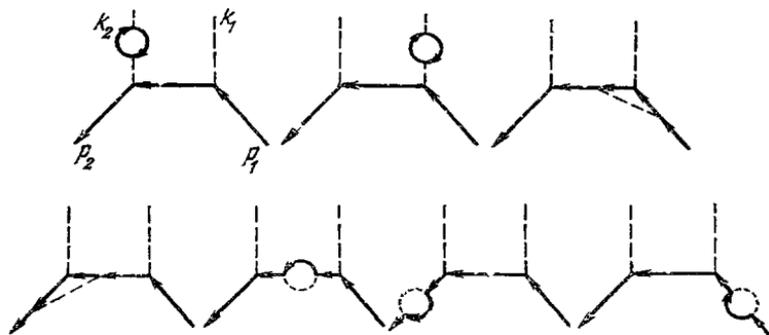


Рис. 3.20.

операторов свободных полей  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и  $A_\mu(x)$ , эффективным же электронной и фотонной линиям мы должны сопоставить матричные элементы операторов взаимодействующих полей  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и  $A_\mu(x)$ . Матричные элементы этих операторов, связывающие состояние вакуума с одночастичными состояниями, только некоторыми множителями  $Z_1^{1/2}$  и  $Z_1^{1/2}$  отличаются от матричных элементов  $u(\pm p)e^{\pm ipx}$  и  $a_\mu(k)e^{\pm ikx}$  для свободных полей:

$$u(\pm p) = Z_1^{1/2} u(\pm p), \quad \bar{u}(\pm p) = Z_1^{1/2} \bar{u}(\pm p),$$

$$a_\mu(k) = Z_1^{1/2} a_\mu(k). \quad (3.5.3)$$

Эти важные соотношения, к которым мы еще вернемся в § 3.6, показывают, что вместо эффективных внешних линий достаточно рассматривать обычные внешние линии (без собственно энергетических вставок), вводя при этом в элемент матрицы рассеяния на каждую внешнюю электронную линию множитель  $Z_1^{1/2}$  и на каждую внешнюю фотонную линию — множитель  $Z_1^{1/2}$ .

Используя понятия эффективных линий и эффективных вершин, можно заменить сложные диаграммы, встречающиеся при рассмотрении высших приближений, эффективными — скелетными

диаграммами, которые представляют собой неприводимые диаграммы с эффективными линиями и эффективными вершинами вместо обычных линий и обычных вершин.

Рассмотрим в качестве примера диаграммы комптон-эффекта, изображенные на рис. 3.20. Совокупность этих диаграмм сводится к одной эффективной скелетной диаграмме, изображенной на рис. 3.21. Этой диаграмме соответствует, очевидно, величина

$$S_{i \rightarrow f} = Z_1 Z e^2 a_\nu(k_1) a_\mu(k_2) \bar{u}(p_2) \times \\ \times \Gamma_\mu(p_2, p_2 + k_2) G^{(\epsilon)}(p_2 + k_2) \times \\ \times \Gamma_\nu(p_1 + k_1, p_1) u(p_1).$$

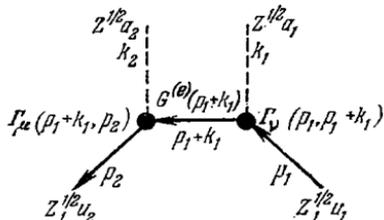


Рис. 3.21.

Если иметь выражения для  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$  и  $G^{(\epsilon)}(p)$  с точностью до членов второго порядка по  $e^2$ , то достаточно подставить их в  $S_{i \rightarrow f}$ , отбросив в произведении члены, содержащие  $e^6$  и  $e^8$ , и мы получим сумму величин, соответствующих диаграммам рис. 3.20.

Мы видим, таким образом, что возникает задача нахождения электронной и фотонной функций Грина  $G^{(\epsilon)}(p)$  и  $G^{(\gamma)}(k)$  и вершинной функции  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ .

**3.5.3. Уравнения Дайсона для функций Грина и графическое уравнение для вершинной функции.** Попробуем с этой целью установить уравнения, которым удовлетворяют электронная и фотонная функции Грина и вершинная функция. Рассмотрим сначала электронную функцию Грина  $G^{(\epsilon)}(p)$ . Согласно (3.5.1) она определяется электронной собственно энергетической функцией  $K_{\alpha\beta}^{(2,0)}(p)$ , которую, как легко видеть, можно выразить через

$$K_{\alpha\beta}^{(2,0)}(p) = \Sigma(p) + \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) + \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) + \dots$$

Рис. 3.22.

сумму величин, соответствующих всем компактным ЭСЭД с данным импульсом  $p$ . Эту сумму мы будем называть массовым оператором и обозначать через  $\Sigma_{\alpha\beta}(p)$ . Графически связь между  $K_{\alpha\beta}^{(2,0)}(p)$  и  $\Sigma_{\alpha\beta}(p)$  изображена на рис. 3.22, на котором прямоугольник служит для обозначения массового оператора. Мы видим, что

$$K^{(2,0)}(p) = \Sigma(p) + \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) + \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) + \dots$$

Суммируя этот бесконечный ряд, мы получим, очевидно,

$$K^{(2,0)}(p) = \Sigma(p) [1 - S_c(p) \Sigma(p)]^{-1}. \quad (3.5.4)$$

Подставляя это выражение в (3.5.1), найдем

$$G^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) \Sigma(p) [1 - S_c(p) \Sigma(p)]^{-1} S_c(p),$$

откуда

$$G^{(e)}(p) = [1 - S_c(p) \Sigma(p)]^{-1} S_c(p), \quad (3.5.5)$$

и, следовательно,

$$G^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) \Sigma(p) G^{(e)}(p). \quad (3.5.6)$$

Это уравнение, связывающее электронную функцию Грина с массовым оператором, называется уравнением Дайсона для электронной функции Грина [8]. Его можно представить также в виде

$$[G^{(e)}(p)]^{-1} = S_c^{-1}(p) - \Sigma(p). \quad (3.5.7)$$

Рассмотрим теперь фотонную функцию Грина  $G^{(\gamma)}(k)$ . Она определяется, согласно (3.5.2), фотонной собственно энергетической функцией  $K^{(0, 2)}(k)$ , которую, как легко убедиться, можно

Рис. 3.23.

выразить через сумму величин, соответствующих всем компактным ФСЭД с данным импульсом  $k$ . Эту сумму мы будем называть поляризационным оператором и обозначать через  $\Pi_{\mu\nu}(k)$ . Графически связь между  $K^{(0, 2)}(k)$  и  $\Pi(k)$  изображена на рис. 3.23, из которого следует, что

$$K^{(0, 2)}(k) = \Pi(k) + \Pi(k) D_c(k) \Pi(k) + \\ + \Pi(k) D_c(k) \Pi(k) D_c(k) \Pi(k) + \dots$$

Суммируя этот бесконечный ряд, получим

$$K^{(0, 2)}(k) = \Pi(k) [1 - D_c(k) \Pi(k)]^{-1}.$$

Подставляя это выражение в (3.5.2), найдем

$$G^{(\gamma)}(k) = D_c(k) + D_c(k) \Pi(k) G^{(\gamma)}(k) \quad (3.5.8)$$

или

$$[G^{(\gamma)}(k)]^{-1} = D_c^{-1}(k) - \Pi(k).$$

Это уравнение, называемое уравнением Дайсона для фотонной функции Грина, связывает фотонную функцию Грина с поляризационным оператором так же, как уравнение (3.5.6) связывает электронную функцию Грина с массовым оператором.

Выясним теперь, как в принципе можно определить массовый и поляризационный операторы. Напомним с этой целью, что существует только одна неприводимая ЭСЭД и одна неприводи-

мая ФСЭД. Поэтому мы имеем только одну скелетную диаграмму, соответствующую массовому оператору  $\Sigma(p)$ , и одну скелетную диаграмму, соответствующую поляризованному оператору  $\Pi(k)$ . Эти диаграммы изображены на рис. 3.24. Обратим внимание на то, что только одной из вершин этих диаграмм должна сопоставляться вершинная функция  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$  (эту вершину мы назвали выше эффективной вершиной), второй же вершине — обычной — должна сопоставляться матрица  $\gamma_\mu$ . Чтобы понять причину этого, рассмотрим, например, ФСЭД, изображенную на рис. 3.25, которая содержит две ВД  $Y_1$  и  $Y_2$ . Эта диаграмма показывает, казалось бы, что эффективными должны быть обе вершины 1 и 2. В действительности, однако, мы можем обе внутренние фотонные

линии отнести к одной — правой эффективной вершине, левую же вершину считать обычной.

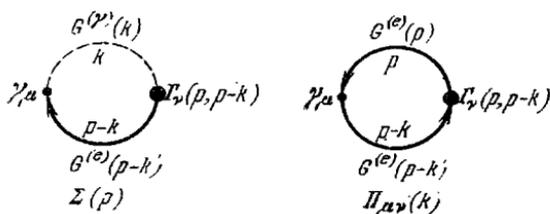


Рис. 3.24.

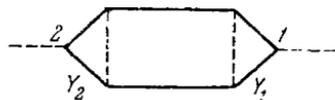


Рис. 3.25.

Применяя правила написания матричных элементов к скелетным диаграммам, соответствующим массовому и поляризованному операторам, получим, очевидно, следующие выражения для  $\Sigma(p)$  и  $\Pi(k)$ :

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_\mu G^{(e)}(p-k) \Gamma_\nu(p, p-k) G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) d^4k, \quad (3.5.9)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int \gamma_\mu G^{(e)}(p) \Gamma_\nu(p, p-k) G^{(e)}(p-k) d^4p.$$

Подставляя далее эти выражения в уравнения Дайсона, получим интегральные уравнения для определения функций Грина  $G^{(e)}(p)$  и  $G^{(\gamma)}(k)$ :

$$G^{(e)}(p) = S_c(p) + \frac{e^2}{(2\pi)^4} S_c(p) \int \gamma_\mu G^{(e)}(p-k) \Gamma_\nu(p, p-k) G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) d^4k G^{(e)}(p),$$

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) = D_{c\mu\nu}(k) - \frac{e^2}{(2\pi)^4} D_{c\mu\nu}(k) \text{Sp} \int \gamma_\lambda G^{(e)}(p) \Gamma_\rho(p, p-k) G^{(e)}(p-k) d^4p G_{\rho\nu}^{(\gamma)}(k). \quad (3.5.10)$$

В эти уравнения входит неизвестная вершинная функция  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ . Поэтому мы должны еще установить уравнение для вершинной функции. Напомним с этой целью, что вершинная функция представляет собой сумму величин, соответствующих всем компактным ВД с заданными импульсами выходящих элек-

тронных и фотонной линий. Поэтому мы должны, так же как и при установлении уравнений для фотонной и электронной функций Грина, рассмотреть неприводимые ВД и заменить в них все линии эффективными линиями и все вершины эффективными вершинами. Но неприводимых ВД, в отличие от неприводимых ЭСЭД и ФСЭД, существует бесчисленное множество (неприводимые ВД 3-го, 5-го и 7-го порядков изображены на рис. 3.13, 1, 2 и 3.15). Поэтому мы получим для  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$  интегральное уравнение, содержащее бесконечное число слагаемых:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p_1, p_2) &\equiv \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2) = \\ &= \gamma_\mu + \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \Gamma_\lambda(p_1, p_1 - k) G^{(e)}(p_1 - k) \Gamma_\mu(p_1 - k, p_2 - k) \times \\ &\quad \times G^{(e)}(p_2 - k) \Gamma_\nu(p_2 - k, p_2) G_{\lambda\nu}^{(\gamma)}(k) d^4k + \dots \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Таким образом, мы не получили для трех функций  $G^{(e)}(p)$ ,  $G^{(\gamma)}(k)$ ,  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ , определяющих точные матричные элементы квантовоэлектродинамических процессов, замкнутой системы интегральных уравнений. Это обстоятельство связано с тем, что, как будет показано в п. 3.5.4, уравнения для  $G^{(e)}(p)$ ,  $G^{(\gamma)}(k)$  и  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$  являются в действительности не интегральными, а функциональными.

Заметим в заключение этого пункта, что, хотя связь между вершинной функцией и электронной и фотонной функциями Грина носит крайне сложный характер, в частном случае, когда аргументы в вершинной функции совпадают, имеет место простое соотношение

$$\Gamma_\mu(p, p) = - \frac{\partial}{\partial p_\mu} (G^{(e)}(p))^{-1}. \quad (3.5.12)$$

Это соотношение, называемое соотношением Уорда [9], в соответствии с (3.5.7) эквивалентно соотношению

$$\Lambda_\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p), \quad (3.5.13)$$

которое легко доказать. Воспользуемся с этой целью тождеством

$$\frac{\partial S_c(p)}{\partial p_\mu} = - S_c(p) \frac{\partial (S_c(p))^{-1}}{\partial p_\mu} S_c(p) = S_c(p) \gamma_\mu S_c(p), \quad (3.5.14)$$

допускающим простую графическую интерпретацию. Действительно, так как функция  $S_c(p)$  изображается электронной линией, а матрица  $\gamma_\mu$  — вершиной диаграммы, то функция  $\partial S_c(p)/\partial p_\mu$  должна изображаться вершинной диаграммой с фотонным импульсом, равным нулю (рис. 3.26).

Отсюда следует, что если мы имеем некоторую компактную ЭСЭД и дифференцируем соответствующую ей величину по импульсу внешней электронной линии (для краткости мы будем говорить просто о дифференцировании ЭСЭД), то этой производной будет соответствовать совокупность диаграмм, каждая из

которых отличается от исходной диаграммы включением в одну из внутренних электронных линий вершины с равным нулю фотонным импульсом. Например, если компактная ЭСЭД  $W(p)$  имеет вид, изображенный на рис. 3.27 слева, то  $\partial W/\partial p_\mu$  будет соответствовать совокупность диаграмм, изображенных на рис. 3.27 справа. Эти диаграммы представляют собой, очевидно, полный набор ВД, которые можно построить, присоединяя фотонные линии к различным электронным линиям, образующим рассматриваемую ЭСЭД.

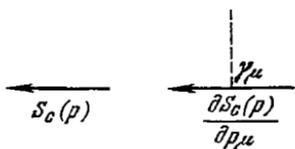


Рис. 3.26.

Если ЭСЭД содержит замкнутую электронную линию, то ее импульсы можно считать не зависящими от импульса внешней электронной линии. Поэтому замкнутая электронная линия не будет участвовать в дифференцировании по импульсу внешней электронной линии. (Это следует также из теоремы Фарри, согласно которой надо учитывать только замкнутые петли с четным числом вершин; дифференцирование же добавляет лишнюю вершину, и поэтому совокупность таких диаграмм можно отбросить.)

Итак, взяв совокупность всех компактных ЭСЭД, мы получим при их дифференцировании по импульсу внешней электронной линии совокупность всех компактных ВД в соответствии с соотношением (3.5.13).

Итак, взяв совокупность всех компактных ЭСЭД, мы получим при их дифференцировании по импульсу внешней электронной линии совокупность всех компактных ВД в соответствии с соотношением (3.5.13).

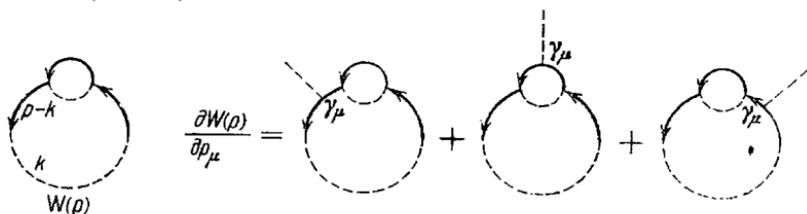


Рис. 3.27.

**3.5.4. Функции Грина как вакуумные средние.** В предыдущем пункте мы определили функции Грина как величины, соответствующие эффективным электронным и фотонным линиям, т. е. линиям со всевозможными собственно энергетическими вставками. Дадим теперь строгие определения функциям Грина, связав их с операторами полей.

Напомним прежде всего, что функции  $D_c(k)$  и  $S_c(p)$ , в которые, согласно (3.5.1) и (3.5.2), переходят функции  $G^{(\nu)}(k)$  и  $G^{(e)}(p)$  в предположении об отсутствии взаимодействия между полями, представляют собой средние значения хронологических произведений операторов свободных полей  $A_\mu(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$ ,  $\psi(x)$  в состоянии вакуума. Поэтому естественно ожидать, что функции  $G^{(\nu)}(k)$  и  $G^{(e)}(p)$ , учитывающие взаимодействие между полями, должны определяться средними от хронологических произведений опера-

торов взаимодействующих полей, т. е. операторов полей  $A_\mu(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  в гейзенберговском представлении. И действительно, как мы далее убедимся, функции  $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k)$  и  $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$  представляют собой компоненты Фурье функций

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x_1, x_2) &= (\Phi_0, T \{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)\} \Phi_0), \\ G_{\alpha\beta}^{(e)}(x_1, x_2) &= (\Phi_0, T \{\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2)\} \Phi_0), \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

где  $\Phi_0$  — вектор состояния вакуума взаимодействующих полей.

Эти функции принадлежат к функциям типа

$$\begin{aligned} G_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\Phi_0, T \{F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n)\} \Phi_0) \equiv \\ &= \langle 0 | T \{F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n)\} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

где  $\Phi_0 \equiv |0\rangle$  и  $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$  — операторы полей в гейзенберговском представлении, носящем общее название квантовоэлектро-динамических функций Грина.

Данное выше определение функции  $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x_1, x_2)$  — фотонной функции Грина — относится к тому случаю, когда отсутствует внешнее электромагнитное поле. Если же такое поле имеется (оно рассматривается не как оператор, а как  $c$ -число), то фотонная функция Грина определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x_1, x_2) &= (\Phi_0, T \{A_\mu(x_1), A_\nu(x_2)\} \Phi_0) - \\ &= (\Phi_0, A_\mu(x_1) \Phi_0) (\Phi_0, A_\nu(x_2) \Phi_0). \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Ясно, что в отсутствие внешнего поля  $(\Phi_0, A_\mu(x) \Phi_0) = 0$ , и мы приходим к определению (3.5.16). В этом случае, очевидно, функции Грина будут зависеть не от координат  $x_1, x_2, \dots$  порознь, а только от их разностей.

Чтобы связать функции Грина с матрицей рассеяния, нужно выразить их через операторы полей в представлении взаимодействия. Для этого служит общая формула

$$\begin{aligned} (\Phi_0, T \{F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n)\} \Phi_0) &= \langle F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \rangle = \\ &= \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T \{F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) S\} \Phi_0), \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

где  $S_{\text{vac}} = (\Phi_0(-\infty), S\Phi_0(-\infty))$  (доказательство ее мы не будем приводить). С помощью нее можно убедиться в эквивалентности двух определений функций Грина — аналитического и графического. Заметим с этой целью, что каждому процессу взаимодействия электронов и фотонов соответствует определенное нормальное произведение операторов полей, и поэтому матрица рассеяния может быть представлена в виде разложения по различным нормальным произведениям операторов полей

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_{\text{vac}}} &= \sum_{n, \nu} \int K^{(2n, \nu)}(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu) \times \\ &\times N(\bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_n) \psi(y_1) \dots \psi(y_n) A(\xi_1) \dots A(\xi_\nu)) d^4x_1 \dots d^4\xi_\nu, \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

где  $K^{(2n, \nu)}$  — некоторый спинор  $2n$ -го ранга и тензор  $\nu$ -го ранга, т. е. величина, содержащая  $2n$  спинорных и  $\nu$  векторных индексов (для краткости они опущены), причем, очевидно,  $K^{(0, 0)} = 1$ .

Такое разложение можно получить из разложения матрицы рассеяния в ряд по степеням заряда электрона, если в каждом из членов этого ряда выделить определенное нормальное произведение и сложить множители, стоящие перед ним, во всех членах ряда. Ясно, что коэффициент  $K^{(2n, \nu)}$  определяет точное значение (с учетом высших приближений теории возмущений) матричного элемента, соответствующего процессу, в котором участвует в начальном и конечном состояниях  $2n$  электронов и позитронов и  $\nu$  фотонов.

Из разложения (3.5.19) и графической интерпретации элементов матрицы рассеяния следует, очевидно, что введенные в п. 3.5.2 электронная и фотонная собственно энергетические функции  $K^{(2, 0)}(p)$  и  $K^{(0, 2)}(k)$  представляют собой компоненты Фурье  $K^{(2, 0)}(x, y)$  и  $K^{(0, 2)}(\xi_1, \xi_2)$  (следует иметь в виду, что в отсутствие внешнего поля аргументы в этих функциях входят не по-разному, а в виде разностей  $x - y$  и  $\xi_1 - \xi_2$ ).

Чтобы убедиться в эквивалентности обоих определений функций Грина, достаточно подставить разложение (3.5.19) в (3.5.18).

Рассмотрим сначала электронную функцию Грина

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x - y) = (\Phi_0, T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \times \\ \times N [ 1 - \int K_{\gamma\delta}^{(2, 0)}(x' - y') \psi_\delta(y') \bar{\psi}_\gamma(x') d^4x' d^4y' + \dots ] \} \Phi_0)$$

(для простоты мы считаем, что внешнее электромагнитное поле отсутствует). Входящие сюда смешанные  $T$ -произведения можно разложить, согласно правилам Вика, по  $N$ -произведениям. Так как среднее от любого  $N$ -произведения по состоянию вакуума равно нулю, то все члены в разложении  $S$  по нормальным произведениям, кроме выписанных здесь, не дадут вклада в  $G^{(e)}(x - y)$ . Используя далее равенства

$$\begin{aligned} (\Phi_0, T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \} \Phi_0) &= S_{\alpha\beta}(x - y), \\ (\Phi_0, T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) N [ \psi_\delta(y') \bar{\psi}_\gamma(x') ] \} \Phi_0) &= \\ &= -S_{\alpha\gamma}(x - x') S_{\delta\beta}(y' - y), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(e)}(x - y) &= \\ &= S_{\alpha\beta}(x - y) + \int S_{\alpha\gamma}(x - x') K_{\gamma\delta}^{(2, 0)}(x' - y') S_{\delta\beta}(y' - y) d^4x' d^4y' \end{aligned}$$

или в импульсном представлении

$$G^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) K^{(2, 0)}(p) S_c(p)$$

(спинорные индексы опущены). Это соотношение совпадает с (3.5.1), откуда и вытекает эквивалентность двух определений электронной функции Грина.

Поступая аналогично с фотонной функцией Грина, получим

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x-y) = D_{c\mu\nu}(x-y) + \int D_{c\mu\lambda}(x-x') K_{\lambda\nu}^{(0,2)}(x'-y') D_{c\nu\gamma}(y'-y) d^4x' d^4y'$$

или в импульсном представлении

$$G^{(\gamma)}(k) = D_c(k) + D_c(k) K^{(0,2)}(k) D_c(k),$$

что совпадает с (3.5.2).

Разъясним в заключение этого пункта понятие вершинной функции. Введем для этого функцию Грина

$$G_{\alpha\beta,\mu}^{(e,\gamma)}(x_1, x_2; x) = (\Phi_0, T \{ \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) A_\mu(x) \} \Phi_0) - \\ - (\Phi_0, T \{ \psi_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_2) \} \Phi_0) (\Phi_0, A_\mu(x) \Phi_0).$$

В отсутствие внешнего электромагнитного поля (мы будем для простоты рассматривать далее этот случай) второе слагаемое обращается в нуль и  $G^{(e,\gamma)}$  становится функцией двух аргументов  $G_{\alpha\beta,\mu}^{(e,\gamma)} = G_{\alpha\beta,\mu}^{(e,\gamma)}(x_1-x, x-x_2)$ . Используя общее выражение (3.5.16) для функций Грина, связывающее их с операторами полей в представлении взаимодействия, и разложение матрицы рассеяния (3.5.19), легко убедиться, что

$$G_{\alpha\beta,\mu}^{(e,\gamma)}(x_1-x, x-x_2) = \int S_{c\alpha\gamma}(x_1-x'_1) K_{\gamma\delta}^{(2,1)}(x'_1-x', x'_2-x') S_{c\delta\beta}(x'_2-x_2) \times \\ \times D_{c\mu\nu}(x'-x) d^4x'_1 d^4x'_2 d^4x'$$

или в компонентах Фурье

$$G_{\mu}^{(e,\gamma)}(p, p') = S_c(p) K_{\nu}^{(2,1)}(p, p') S_c(p') D_{c\nu\mu}(p-p') \quad (3.5.20)$$

(спинорные индексы опущены).

Входящая в эту формулу величина  $K^{(2,1)}(p, p')$  представляет собой, очевидно, сумму величин, соответствующих совокупности всех вершинных диаграмм — как компактных, так и некомпактных. В этом отношении формула (3.5.20) аналогична формулам (3.5.1) и (3.5.2) для функций Грина  $G^{(e)}(p)$  и  $G^{(\gamma)}(k)$ , в которые входят функции  $K^{(2,0)}(p)$  и  $K^{(0,2)}(k)$ , представляющие собой суммы величин, соответствующих всем ЭСЭД и ФСЭД — как компактным, так и некомпактным.

Рассматривая электронную и фотонную функции Грина, мы перешли от функций  $K^{(2,0)}(p)$  и  $K^{(0,2)}(k)$  к массовому и поляризаационному операторам  $\Sigma(p)$  и  $\Pi(k)$ , представляющим собой суммы величин, соответствующих только компактным ЭСЭД и ФСЭД. Подобно этому мы можем перейти от функции  $K^{(2,1)}(p, p')$  к вершинной функции  $\Gamma_{\mu}(p, p')$ , представляющей собой сумму величин, соответствующих только компактным ВД. Формула (3.5.20) примет тогда вид

$$G_{\mu}^{(e,\gamma)}(p, p') = -G^{(e)}(p) e\Gamma_{\nu}(p, p') G^{(e)}(p') G_{\nu\mu}^{(\gamma)}(p-p').$$

Эта формула означает, что функции  $G_{\mu}^{(e, \nu)}(\rho, \rho')$  соответствует блок, содержащий две эффективные электронные линии, одну эффективную фотонную линию и одну эффективную вершину (рис. 3.28).

В п. 3.5.3, исходя из графических определений функций Грина, были выведены уравнения для электронной и фотонной функций Грина. В эти уравнения входит, однако, неизвестная вершинная функция, уравнение для которой содержит бесконечное число интегральных операторов соответственно бесконечному числу неприводимых вершинных диаграмм. Это значит, что уравнение для вершинной функции, а следовательно, и уравнения для электронной и фотонной функций Грина нельзя сформулировать в замкнутом виде, используя только операции дифференцирования и интегрирования по пространственно-временным координатам.

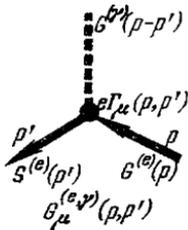


Рис. 3.28.

Однако уравнения для функций Грина могут быть сформулированы в замкнутом виде, если использовать операцию функционального дифференцирования [10]. Для этого следует ввести в рассмотрение, наряду с оператором плотности электронного тока  $j_{\mu}$ ,  $c$ -числовую плотность сторонних токов  $J_{\mu}(x)$  и считать, что гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия имеет вид

$$H_I(t) = - \int A_{\mu}(x) j_{\mu}(x) d^3x - \int A_{\mu}(x) J_{\mu}(x) d^3x.$$

Благодаря включению стороннего тока матрица рассеяния, а следовательно, и квантовоэлектродинамические функции Грина становятся некоторыми функционалами  $J_{\mu}(x)$ . При этом удается связать с помощью функциональной производной вершинную функцию с электронной функцией Грина. Именно, оказываются справедливыми соотношения

$$G_{\mu}^{(e, \nu)}(x) = -i \frac{\delta G^{(e)}}{\delta J_{\mu}(x)}, \quad \Gamma_{\mu}(x) = \frac{\delta (G^{(e)})^{-1}}{e \delta \langle A_{\mu}(x) \rangle} \quad (3.5.21)$$

(спинорные индексы и аргументы  $x_1, x_2$  опущены), а также соотношение

$$\frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x_2)} \langle A_{\nu}(x_1) \rangle = i \langle A_{\nu}(x_1) A_{\mu}(x_2) \rangle - i \langle A_{\nu}(x_1) \rangle \langle A_{\mu}(x_2) \rangle, \quad (3.5.22)$$

где  $\langle A_{\mu}(x) \rangle = (\Phi_0, A_{\mu}(x) \Phi_0)$ .

Установим теперь уравнения для электронной и фотонной функций Грина [10]. Будем для этого исходить из определений (3.5.15)

и (3.5.17) этих функций, в которых операторы полей  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ ,  $A_\mu(x)$  в гейзенберговском представлении удовлетворяют уравнениям

$$\left\{ \gamma_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie A_\mu(x) \right) + m \right\} \psi(x) = 0, \quad \square A_\mu(x) = -j_\mu(x) - J_\mu(x). \quad (3.5.23)$$

Используя первое из этих уравнений и замечая, что  $\frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = \delta(t)$ , имеем

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) G^{(e)}(x, x') = -i\gamma_4 \langle \Phi_0, \{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \} \Phi_0 \rangle \delta(t-t') + \\ + ie\gamma_\mu \langle \Phi_0, T \{ \psi(x) \bar{\psi}(x') A_\mu(x) \} \Phi_0 \rangle;$$

а так как  $\gamma_4 \{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \} \delta(t-t') = \delta(x-x')$ , то

$$\gamma_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie \langle A_\mu(x) \rangle \right) + m \left\{ G^{(e)}(x, x') = \right. \\ \left. = -i\delta(x-x') + ie\gamma_\mu G_\mu^{(e, \nu)}(x, x'; x) \right.$$

Учитывая (3.5.21), получим

$$\gamma_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie \langle A_\mu(x) \rangle \right) + m - e\gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \left\{ \right. \\ \left. \times G^{(e)}(x, x') = -i\delta(x-x'). \quad (3.5.24) \right.$$

Используя снова (3.5.21), можно представить это уравнение в виде

$$\left\{ \gamma_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie \langle A_\mu(x) \rangle \right) + m \right\} G^{(e)}(x, x') + \\ + i \int \sum(x, x_1) G^{(e)}(x_1, x') d^4x_1 = -i\delta(x-x'), \quad (3.5.25)$$

где

$$\sum(x, x') = e^2 \gamma_\mu \int G^{(e)}(x, x_1) \Gamma_\nu(x_1, x'; \xi) G_{\nu\mu}^{(\nu)}(\xi, x) d^4x_1 d^4\xi.$$

Величина  $\sum(x, x')$ , как следует из сравнения с формулой (3.5.9), представляет собой массовый оператор в координатном представлении, уравнение же (3.5.24) по существу совпадает с уравнением (3.5.10) для  $G^{(e)}(x, x')$ , только первое написано в координатном, а второе — в импульсном представлении.

Аналогичным образом можно получить уравнение для фотонной функции Грина

$$\square G_{\mu\nu}^{(\nu)}(x, x') - i \int \Pi_{\mu\lambda}(x, x_1) G_{\lambda\nu}^{(\nu)}(x_1, x') d^4x_1 = \\ = i\delta_{\mu\nu}\delta(x-x'), \quad (3.5.26)$$

где  $\Pi_{\mu\lambda}(x, x_1)$  — поляризационный оператор в координатном представлении. Это уравнение по существу совпадает с уравнением (3.5.10) для  $G^{(\nu)}$ , только написано оно в координатном представлении.

Заметим, что взаимодействие между полями не оказывает влияния на продольную часть фотонной функции Грина, так что имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') = \frac{\partial}{\partial x_\nu} D_{c\mu\nu}(x - x'), \quad (3.5.27)$$

а так как  $D_{c\mu\nu}(x) = D_c(x) \delta_{\mu\nu}$ , то

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') = \frac{\partial}{\partial x_\mu} D_c(x - x').$$

Если внешнее поле отсутствует, то в импульсном представлении соотношение (3.5.27) имеет вид

$$k_\nu G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) = k_\mu D_c(k). \quad (3.5.28)$$

Отсюда вытекает свойство поперечности поляризованного оператора

$$k_\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0, \quad (3.5.29)$$

означающее в свою очередь, что  $\Pi_{\mu\nu}(k)$  имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (3.5.30)$$

где  $\Pi(k)$  — некоторая скалярная функция от  $k^2$ .

Так как продольная часть фотонной функции Грина не затрагивается взаимодействием между полями, то ее можно вовсе не рассматривать, а ограничиться рассмотрением только поперечной части фотонной функции Грина. Эта часть, которую мы будем обозначать через  $G_{\mu\nu}^{(\gamma)'}(k)$ , удовлетворяет условию  $k_\mu G_{\mu\nu}^{(\gamma)'}(k) = 0$  и имеет, очевидно, вид

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)'}(k) = G^{(\gamma)}(k) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$

где  $G^{(\gamma)}(k)$  — некоторая скалярная функция  $k^2$ .

## § 3.6. Перенормировка массы и заряда элект она

### 3.6.1. Перенормировка массы электрона.

При установлении основных уравнений квантовой электродинамики мы исходили из уравнения Дирака для электрона в заданном электромагнитном поле, в которое входили две константы —  $m$  и  $e$ . Эти константы мы интерпретировали как массу и заряд электрона. Однако мы должны теперь внести уточнения в эти понятия. Действительно, по самой идее исходных классических уравнений Дирака и Максвелла константы  $m$  и  $e$  представляют собой массу и заряд «свободного» электрона, т. е. электрона, полностью изолированного от воздействий электромагнитного поля. Иными словами,  $m$  и  $e$  являются характеристиками некоторого гипотетического объекта (будем называть его «голым» электроном), не взаимодействующего

с электромагнитным полем. Взаимодействие же между полями должно приводить к отличию энергетического спектра взаимодействующих полей от энергетического спектра свободных полей. Поэтому масса «голового» электрона должна отличаться от массы реального электрона. Заряд гипотетического «голового» электрона также должен отличаться от заряда реального электрона [11]. Поэтому возникает важнейшая задача о выяснении связи между массой и зарядом голого электрона  $m$  и  $e$  и массой и зарядом реального, физического электрона, которые мы будем обозначать в этом параграфе через  $m_R$  и  $e_R$ .

Заметим с этой целью, что функция  $S_c(p)$  имеет полюс при  $p^2 + m^2 = 0$ , поэтому естественно предположить, что электронная функция Грина  $G^{(e)}(p)$  имеет полюс при  $p^2 + m_R^2 = 0$ . В соответствии с определением  $G^{(e)}$  и соотношением (3.5.3) мы можем считать, что при  $\hat{p} \sim im_R$

$$-[G^{(e)}(p)]^{-1} \approx Z_1^{-1}(\hat{p} - im_R), \quad (3.6.1)$$

где  $Z_1$  — та же константа, которая связывает  $\mathbf{u}$  и  $u$  в (3.5.3). С другой стороны,

$$-[G^{(e)}(p)]^{-1} = \hat{p} - im + \Sigma(p), \quad (3.6.2)$$

где  $\Sigma(p)$  — массовый оператор, который можно рассматривать как функцию матрицы  $\hat{p}$ . Поэтому

$$-[G^{(e)}(p)]^{-1} = \hat{p} - im + \Sigma(im_R) + (\hat{p} - im_R) \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=im_R} + \dots \quad (3.6.3)$$

Сравнение этой формулы с (3.6.1) дает

$$m_R = m + i\Sigma(im_R), \quad Z_1^{-1} = 1 + \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p}=im_R}. \quad (3.6.4)$$

Разность масс реального и гипотетического «голового» электронов  $\delta m = m_R - m$ , обусловленную взаимодействием электрона с электромагнитным полем, мы будем называть электромагнитной массой электрона, а величину  $m$  — массой «голового» электрона. Вводя биспинор  $u_R(p)$ , удовлетворяющий уравнению Дирака

$$(i\hat{p} + m_R) u_R(p) = 0, \quad \bar{u}_R(p) u_R(p) = 2m_R$$

для реального электрона, можно, очевидно, представить электромагнитную массу электрона в виде

$$\delta m = i \frac{\bar{u}_R(p) \Sigma(p) u_R(p)}{\bar{u}_R(p) u_R(p)}, \quad p^2 + m_R^2 = 0. \quad (3.6.5)$$

Так как электромагнитная масса  $\delta m$  обусловлена взаимодействием между полями, то естественно рассматривать ее вместе с другими процессами, обусловленными этим взаимодействием, теорию же взаимодействующих полей строить с самого начала таким образом, чтобы в нее входила не фиктивная масса «голового»

Заметим, что взаимодействие между полями не оказывает влияния на продольную часть фотонной функции Грина, так что имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') = \frac{\partial}{\partial x_\nu} D_{c\mu\nu}(x - x'), \quad (3.5.27)$$

а так как  $D_{c\mu\nu}(x) = D_c(x) \delta_{\mu\nu}$ , то

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') = \frac{\partial}{\partial x_\mu} D_c(x - x').$$

Если внешнее поле отсутствует, то в импульсном представлении соотношение (3.5.27) имеет вид

$$k_\nu G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) = k_\mu D_c(k). \quad (3.5.28)$$

Отсюда вытекает свойство поперечности поляризаационного оператора

$$k_\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0, \quad (3.5.29)$$

означающее в свою очередь, что  $\Pi_{\mu\nu}(k)$  имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (3.5.30)$$

где  $\Pi(k)$  — некоторая скалярная функция от  $k^2$ .

Так как продольная часть фотонной функции Грина не затрагивается взаимодействием между полями, то ее можно вовсе не рассматривать, а ограничиться рассмотрением только поперечной части фотонной функции Грина. Эта часть, которую мы будем обозначать через  $G_{\mu\nu}^{(\gamma)'}(k)$ , удовлетворяет условию  $k_\mu G_{\mu\nu}^{(\gamma)'}(k) = 0$  и имеет, очевидно, вид

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)'}(k) = G^{(\gamma)}(k) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$

где  $G^{(\gamma)}(k)$  — некоторая скалярная функция  $k^2$ .

## § 3.6. Перенормировка массы и заряда электрона

### 3.6.1. Перенормировка массы электрона.

При установлении основных уравнений квантовой электродинамики мы исходили из уравнения Дирака для электрона в заданном электромагнитном поле, в которое входили две константы —  $m$  и  $e$ . Эти константы мы интерпретировали как массу и заряд электрона. Однако мы должны теперь внести уточнения в эти понятия. Действительно, по самой идее исходных классических уравнений Дирака и Максвелла константы  $m$  и  $e$  представляют собой массу и заряд «свободного» электрона, т. е. электрона, полностью изолированного от воздействий электромагнитного поля. Иными словами,  $m$  и  $e$  являются характеристиками некоторого гипотетического объекта (будем называть его «голым» электроном), не взаимодействующего

с электромагнитным полем. Взаимодействие же между полями должно приводить к отличию энергетического спектра взаимодействующих полей от энергетического спектра свободных полей. Поэтому масса «голого» электрона должна отличаться от массы реального электрона. Заряд гипотетического «голого» электрона также должен отличаться от заряда реального электрона [11]. Поэтому возникает важнейшая задача о выяснении связи между массой и зарядом голого электрона  $m$  и  $e$  и массой и зарядом реального, физического электрона, которые мы будем обозначать в этом параграфе через  $m_R$  и  $e_R$ .

Заметим с этой целью, что функция  $S_c(p)$  имеет полюс при  $p^2 + m^2 = 0$ , поэтому естественно предположить, что электронная функция Грина  $G^{(e)}(p)$  имеет полюс при  $p^2 + m_R^2 = 0$ . В соответствии с определением  $G^{(e)}$  и соотношением (3.5.3) мы можем считать, что при  $\hat{p} \sim im_R$

$$-[G^{(e)}(p)]^{-1} \approx Z_1^{-1}(\hat{p} - im_R), \quad (3.6.1)$$

где  $Z_1$  — та же константа, которая связывает  $\mathbf{u}$  и  $u$  в (3.5.3). С другой стороны,

$$-[G^{(e)}(p)]^{-1} = \hat{p} - im + \Sigma(p), \quad (3.6.2)$$

где  $\Sigma(p)$  — массовый оператор, который можно рассматривать как функцию матрицы  $\hat{p}$ . Поэтому

$$-[G^{(e)}(p)]^{-1} = \hat{p} - im + \Sigma(im_R) + (\hat{p} - im_R) \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p} = im_R} + \dots \quad (3.6.3)$$

Сравнение этой формулы с (3.6.1) дает

$$m_R = m + i\Sigma(im_R), \quad Z_1^{-1} = 1 + \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p} = im_R}. \quad (3.6.4)$$

Разность масс реального и гипотетического «голого» электронов  $\delta m = m_R - m$ , обусловленную взаимодействием электрона с электромагнитным полем, мы будем называть электромагнитной массой электрона, а величину  $m$  — массой «голого» электрона. Вводя биспинор  $u_R(p)$ , удовлетворяющий уравнению Дирака

$$(i\hat{p} + m_R) u_R(p) = 0, \quad \bar{u}_R(p) u_R(p) = 2m_R$$

для реального электрона, можно, очевидно, представить электромагнитную массу электрона в виде

$$\delta m = i \frac{\bar{u}_R(p) \Sigma(p) u_R(p)}{\bar{u}_R(p) u_R(p)}, \quad p^2 + m_R^2 = 0. \quad (3.6.5)$$

Так как электромагнитная масса  $\delta m$  обусловлена взаимодействием между полями, то естественно рассматривать ее вместе с другими процессами, обусловленными этим взаимодействием, теорию же взаимодействующих полей строить с самого начала таким образом, чтобы в нее входила не фиктивная масса «голого»

электрона, а истинная масса реального электрона. Рассмотрим с этой целью гамильтониан системы полей в представлении взаимодействия

$$H = H_0 \{m\} - \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^3x,$$

где  $H_0 \{m\}$  — гамильтониан свободных полей, в который входит масса «голого» электрона (выражение для  $H_0 \{m\}$  приведено в п. 3.1.2). Заменяя в  $H_0 \{m\}$  массу голого электрона на  $m_R = \delta m$ , перепишем гамильтониан  $H$  в виде

$$H = H_0 \{m_R\} - \int (j_\mu(x) A_\mu(x) + \bar{\psi}(x) \psi(x) \delta m) d^3x$$

и будем интерпретировать  $H_0 \{m_R\}$  (а не  $H_0 \{m\}$ ) как гамильтониан свободных полей и

$$H_I(t) = - \int (j_\mu(x) A_\mu(x) + \bar{\psi}(x) \psi(x) \delta m) d^3x \quad (3.6.6)$$

(а не  $-\int j_\mu(x) A_\mu(x) d^3x$ ) как гамильтониан взаимодействия. Эта процедура носит название перенормировки массы электрона.

Изменив гамильтониан взаимодействия, мы изменим также матрицу рассеяния, которая принимает теперь вид

$$S = T \left\{ \exp \left( i \int (j_\mu(x) A_\mu(x) + \bar{\psi}(x) \psi(x) \delta m) d^4x \right) \right\}. \quad (3.6.7)$$

Благодаря дополнительному слагаемому  $\bar{\psi}(x) \psi(x) \delta m$  в гамильтониане взаимодействия при графическом представлении элементов  $S$ -матрицы возникают новые — двухлучевые вершины, в которых сходятся две электронные линии. Эти вершины приводят к дополнительным ЭСЭД, причем существует только одна неприводимая дополнительная ЭСЭД (рис. 3.29; двухлучевая вершина обозначена крестиком). Всякая диаграмма, содержащая неприводимую ЭСЭД, дополняется теперь такой же диаграммой, в которой неприводимая ЭСЭД заменена диаграммой рис. 3.29.



Рис. 3.29.

Очевидно, совокупности двух диаграмм — неприводимой ЭСЭД и диаграммы рис. 3.29 — соответствует величина  $\bar{\Sigma}^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) + i \delta m^{(2)}$ , где  $\delta m^{(2)}$  — электромагнитная масса электрона во втором приближении теории возмущений. Отсюда следует, что вместо того, чтобы вводить двухлучевые вершины, можно сопоставлять всем внутренним неприводимым ЭСЭД в любой компактной ЭСЭД функцию  $\bar{\Sigma}^{(2)}(p)$ , а не функцию  $\Sigma^{(2)}(p)$  (кроме того, необходимо дополнить всю компактную ЭСЭД в целом диаграммой рис. 3.29).

Мы видим, таким образом, что перенормировка массы электрона означает замену массового оператора  $\Sigma(p)$  перенормированным по массе массовым оператором

$$\bar{\Sigma}(p) = \Sigma(p) + i \delta m. \quad (3.6.8)$$

Согласно (3.6.3) и (3.6.4)

$$\bar{\Sigma}(\rho) = (\hat{p} - im_R) \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p} = im_R} + \dots = (Z_1^{-1} - 1) (\hat{p} - im_R) + \dots \quad (3.6.9)$$

Отсюда следует, что если  $u_R(\rho)$  — биспинор, удовлетворяющий уравнению Дирака с массой реального электрона, то

$$\bar{u}_R(\rho) \bar{\Sigma}(\rho) u_R(\rho) = 0, \quad \rho^2 = -m_R^2.$$

Перенормированный по массе массовый оператор можно выразить через функцию

$$\Lambda_\mu(\rho) = \Gamma_\mu(\rho, \rho) - \gamma_\mu,$$

связанную, согласно (3.5.13), с  $\Sigma(\rho)$  соотношением

$$\Lambda_\mu(\rho) = \frac{\partial \Sigma(\rho)}{\partial p_\mu}.$$

Из этого соотношения и (3.6.9) следует, очевидно, что

$$\bar{\Sigma}(\rho) = \int_{p_0}^{\rho} \Lambda_\mu(q) dq_\mu + \bar{\Sigma}(\rho_0), \quad (3.6.10)$$

где  $p_0$  — 4-импульс свободного электрона,  $p_0^2 = -m_R^2$ .

**3.6.2. Физический заряд электрона.** В предыдущем пункте мы разъяснили, что благодаря взаимодействию электрона с электромагнитным полем масса электрона  $m_R$  не совпадает с постоянной  $m$ , входящей в уравнения квантовой электродинамики. Теперь мы покажем, что и постоянная  $e$ , входящая в уравнения квантовой электродинамики в матрицу рассеяния, не есть в действительности заряд электрона, и установим соотношение между постоянной  $e$  и зарядом реального электрона.

Физический заряд электрона можно определить с помощью исследования рассеяния электромагнитных волн малой частоты на покоящемся электроне. Этот процесс является чисто классическим, и никакие квантовые поправки не должны иметь места в предельном случае  $k \rightarrow 0$ . Поэтому естественно определить физический заряд электрона  $e_R$  как коэффициент, входящий в формулу Томсона для эффективного сечения рассеяния фотона при  $k = 0$ :

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e_R^2}{4\pi m_R c^2} \right)^2.$$

Мы покажем, что точное решение этой задачи в квантовой электродинамике приводит к формуле Томсона со следующим значением заряда  $e_R$ , выраженного через постоянную  $e$ :

$$e_R = Z^{1/2} e. \quad (3.6.11)$$

Для доказательства [12] этого фундаментального положения рассмотрим всевозможные диаграммы, описывающие рассеяние

фотона электроном. Разделим такие диаграммы на три класса (рис. 3.30): 1) диаграммы, которые могут быть сведены к скелетной диаграмме рис. 3.21; 2) диаграммы, представляющие собой компактные ЭСЭД, к электронным линиям которых присоединены две внешние фотонные линии; 3) диаграммы, в которых внешние фотонные линии присоединены к замкнутым электронным петлям

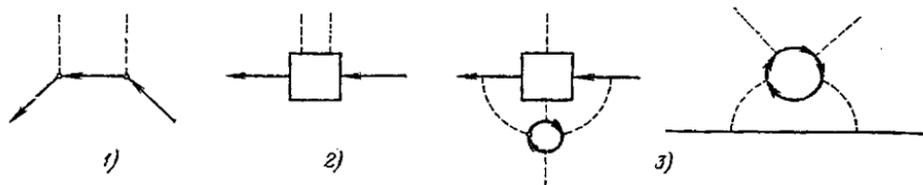


Рис. 3.30.

Диаграммы последнего типа не дают вклада в матричный элемент. Действительно, те из диаграмм, которые содержат петли с нечетным числом вершин, можно не рассматривать на основании теоремы Фарри. Диаграммы же этого типа, содержащие четное число вершин (см., например, рис. 3.30, 3), при  $k=0$  связаны соотношением (3.5.14) с диаграммами, содержащими петли с нечетным числом вершин, и также не дают вклада в матричный элемент.

Матричный элемент, соответствующий диаграмме первого типа, может быть, очевидно, представлен в виде

$$\mathfrak{M}_1 = ZZ_1 e^2 \bar{u}_2 (\Gamma_\mu G^{(e)} \Gamma_\nu + \Gamma_\nu G^{(e)} \Gamma_\mu) u_1 a_{1\mu} a_{2\nu},$$

причем, так как мы рассматриваем рассеяние фотона нулевой частоты покоящимся электроном, то в этом выражении нужно положить

$$G^{(e)} = G^{(c)}(p), \quad \Gamma_\mu = \Gamma_\mu(p, p), \quad u_1 = u(p), \quad \bar{u}_2 = \bar{u}(p),$$

где  $p \equiv (0, im_R)$ ; выбирая скалярный потенциал равным нулю, мы можем считать, что  $a_{1\mu} p_\mu = a_{2\nu} p_\nu = 0$ .

Рассмотрим теперь матричный элемент, соответствующий диаграмме второго типа. Используя тождество Уорда, его можно представить в виде

$$\mathfrak{M}_2 = ZZ_1 e^2 \bar{u}_2 \frac{\partial^2 \Sigma(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} u_1 a_{1\mu} a_{2\nu},$$

где согласно (3.5.12) и (3.5.13)

$$\frac{\partial^2 \Sigma(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = - \frac{\partial^2 (G^{(e)}(p))^{-1}}{\partial p_\mu \partial p_\nu}.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial G^{(e)}(p)}{\partial p_\mu} = G^{(e)}(p) \Gamma_\mu(p, p) G^{(e)}(p),$$

имеем

$$\frac{\partial^2 G^{(e)}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = G^{(e)} \Gamma_\nu G^{(e)} \Gamma_\mu G^{(e)} + G^{(e)} \Gamma_\mu G^{(e)} \Gamma_\nu G^{(e)} - G^{(e)} \frac{\partial^2 (G^{(e)})^{-1}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} G^{(e)}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_\mu \partial p_\nu} + \Gamma_\mu G^{(e)} \Gamma_\nu + \Gamma_\nu G^{(e)} \Gamma_\mu = (G^{(e)})^{-1} \frac{\partial^2 G^{(e)}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} (G^{(e)})^{-1}.$$

Таким образом, сумма матричных элементов  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{M}_2$  равна

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = Z Z_1 e^2 \bar{u}_2 (G^{(e)})^{-1} \frac{\partial^2 G^{(e)}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} (G^{(e)})^{-1} u_1 a_{1\mu} a_{2\nu}.$$

Подставим теперь сюда

$$G^{(e)}(p) = Z_1 S_c(p) \{1 + C_1(-p^2) + \hat{p} C_2(-p^2)\},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — две скалярные функции  $p^2$ , исчезающие, согласно (3.6.1), при  $p^2 = -m_R^2$  (в  $S_c(p)$  в качестве массы входит  $m_R$ , а не  $m$ ). В результате мы получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = Z e^2 \bar{u}_2 S_c^{-1} \frac{\partial^2 S_c}{\partial p_\mu \partial p_\nu} S_c^{-1} u_1 a_{1\mu} a_{2\nu} + \\ + 2Z e^2 C_1(m_R^2) \bar{u}_2 (\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu p_\mu) u_1 a_{1\mu} a_{2\nu}. \end{aligned}$$

Так как  $a_{1\mu} p_\mu = a_{2\nu} p_\nu$ , то второе слагаемое исчезает, первое же может быть, очевидно, переписано в виде

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = Z e^2 \bar{u}_2 (\gamma_\mu S_c \gamma_\nu + \gamma_\nu S_c \gamma_\mu) u_1 a_{1\mu} a_{2\nu}.$$

Это выражение только множителем  $Z$  отличается от элемента  $S$ -матрицы, соответствующего рассеянию фотона нулевой частоты покоящимся электроном в первом приближении теории возмущений (см. § 4.2). С другой стороны, в первом приближении теории возмущений мы получим для сечения рассеяния фотона нулевой частоты формулу Томсона, в которую входит заряд  $e$ . Поэтому, как и утверждалось, если учитывать высшие приближения, то для сечения рассеяния фотонов нулевой частоты покоящимся электроном мы получим формулу Томсона, в которую, однако, будет входить в качестве заряда не  $e$ , а  $e_R$ .

**3.6.3. Перенормировка функций Грина и вершинной функции.** Выяснив смысл постоянной  $Z$ , мы должны будем доказать, что в выражении для элементов  $S$ -матрицы, соответствующих любым квантовоэлектродинамическим процессам с учетом высших приближений теории возмущений,  $Z$  всегда входит только в комбинации  $Z e^2$  [8], где  $Z$  — константа, связывающая  $a$  и  $a$  в (3.5.3).

Введем с этой целью перенормированные функции Грина и перенормированную вершинную функцию

$$G_R^{(e)} = Z_1^{-1} G^{(e)}, \quad G_R^{(\gamma)} = Z^{-1} G^{(\gamma)}, \quad \Gamma_{R\mu} = Z_1 \Gamma_\mu, \quad (3.6.12)$$

а также функции

$$\Lambda_{1\mu} = Z_1 \Lambda_\mu, \quad \Lambda_\mu = \Gamma_\mu - \gamma_{1\mu}. \quad (3.6.13)$$

Легко показать, что

$$\Gamma_{R\mu}(\rho_1, \rho_2) = \gamma_\mu + \Lambda_{R\mu}(\rho_1, \rho_2), \quad (3.6.14)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{R\mu}(\rho_1, \rho_2) &= \Lambda_{1\mu}(\rho_1, \rho_2) - \Lambda_{1\mu}(\rho_0, \rho_0), \\ \Lambda_{1\mu}(\rho_0, \rho_0) &\equiv \Lambda_{1\mu}(\rho, \rho) \Big|_{\hat{p}=im_R}. \end{aligned}$$

Действительно, используя (3.5.12), имеем

$$\Gamma_\mu(\rho_0, \rho_0) = Z_1^{-1} \gamma_\mu. \quad (3.6.15)$$

Поэтому

$$\Lambda_{1\mu}(\rho_0, \rho_0) = Z_1(\Gamma_\mu(\rho_0, \rho_0) - \gamma_\mu) = (1 - Z_1) \gamma_\mu,$$

и, следовательно, формула (3.6.14) приобретает вид

$$\Gamma_{R\mu}(\rho_1, \rho_2) = \gamma_\mu + \Lambda_{1\mu}(\rho_1, \rho_2) + (Z_1 - 1) \gamma_\mu = Z_1 \gamma_\mu + \Lambda_{1\mu}(\rho_1, \rho_2).$$

Подставляя сюда  $\Lambda_1 = Z_1 \Lambda$ , мы приходим к формуле (3.6.13) для  $\Gamma_\mu$ , что и подтверждает справедливость (3.6.14).

Докажем далее, что перенормированная электронная функция Грина удовлетворяет уравнению

$$G_R^{(e)}(\rho) = S_c(\rho) + S_c(\rho) \Sigma_R(\rho) G_R^{(e)}(\rho), \quad (3.6.16)$$

где  $\Sigma_R(\rho)$  — регуляризованный массовый оператор, определяемый формулой

$$\Sigma_R(\rho) = Z_1 \left\{ \bar{\Sigma}(\rho) - \bar{\Sigma}(im_R) - (\hat{p} - im_R) \left( \frac{\partial \bar{\Sigma}(\rho)}{\partial \hat{p}} \right) \Big|_{\hat{p}=im_R} \right\}, \quad (3.6.17)$$

(для более симметричной формы записи мы сохранили здесь величину  $\bar{\Sigma}(im_R)$ , равную нулю). Заметим, что это выражение можно представить также в виде

$$\Sigma_R(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \Lambda_{R\mu}(q, q) dq_\mu + \Sigma_R(\rho_0). \quad (3.6.18)$$

Чтобы доказать (3.6.16), воспользуемся уравнением (3.5.7) для электронной функции Грина, в котором, однако, произведем перенормировку массы электрона, т. е. заменим массовый оператор  $\Sigma(\rho)$  перенормированным по массе оператором  $\bar{\Sigma}(\rho)$  и под  $S_c(\rho)$  будем понимать

$$S_c(\rho) = \frac{1}{i} \frac{1}{i\hat{p} + m_R - i0}.$$

Такое перенормированное по массе уравнение для  $G^{(e)}(\rho)$  имеет вид

$$G^{(e)}(\rho) = S_c(\rho) + S_c(\rho) \bar{\Sigma}(\rho) G^{(e)}(\rho). \quad (3.6.19)$$

Перепишав это уравнение в форме

$$Z_1^{-1} G^{(e)}(\rho) = S_c(\rho) + S_c(\rho) \bar{\Sigma}(\rho) G^{(e)}(\rho) + (1 - Z_1) Z_1^{-1} G^{(e)}(\rho)$$

и вспоминая (3.6.12), получим

$$G_R^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) \Sigma_R(p) G_R^{(e)}(p),$$

где

$$\Sigma_R(p) \equiv Z_1 \bar{\Sigma}(p) + (1 - Z_1) S_c^{-1}(p).$$

Но последняя величина в силу (3.6.4) совпадает с величиной (3.6.17).

Докажем, наконец, что перенормированная поперечная фотонная функция Грина  $G_R^{(\gamma)}(k)$  удовлетворяет уравнению

$$G_R^{(\gamma)}(k) = D_c(k) + D_c(k) \Pi_R(k^2) G_R^{(\gamma)}(k), \quad (3.6.20)$$

где  $\Pi_R(k^2)$  — регуляризованный поляризационный оператор — определяется формулой

$$\Pi_R(k^2) = Z \left\{ \Pi(k^2) - \Pi(0) - k^2 \left( \frac{d\Pi(k^2)}{dk^2} \right)_{k^2=0} \right\} \quad (3.6.21)$$

(напомним, что величина  $\Pi(k^2)$  связана с поляризационным оператором  $\Pi_{\mu\nu}(k)$  соотношением  $\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k^2) \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$ ). Для доказательства (3.6.20) воспользуемся уравнением (3.5.8) для поперечной части фотонной функции Грина  $G^{(\gamma)}(k)$ :

$$\frac{1}{G^{(\gamma)}(k)} = ik^2 - \Pi(k^2). \quad (3.6.22)$$

Функция  $D_c(k)$  имеет полюс при  $k^2 = 0$ , поэтому естественно предположить, что и функция  $G^{(\gamma)}(k)$  также имеет полюс при  $k^2 = 0$ :

$$\frac{1}{G^{(\gamma)}(k)} \approx \frac{1}{Z} ik^2,$$

где  $Z$  — та же константа, которая связывает  $\alpha$  и  $a$  в (3.5.3).

С другой стороны, формула (3.6.22) дает при  $k^2 \rightarrow 0$

$$\frac{1}{G^{(\gamma)}(k)} = ik^2 - \Pi(0) - k^2 \Pi'(0).$$

Поэтому должны выполняться равенства

$$\Pi(0) = 0, \quad \frac{1}{Z} = 1 + i\Pi'(0). \quad (3.6.23)$$

Следует подчеркнуть, что если бы первое из этих равенств не выполнялось, то фотонная функция Грина имела бы полюс не при  $k^2 = 0$ , а при  $k^2 = \frac{-i\Pi(0)}{1+i\Pi'(0)}$ , что означало бы ненулевую массу фотона.

Подставляя (3.6.21) в (3.6.20) и переходя к перенормированной фотонной функции Грина, получим

$$\frac{1}{Z} G^{(\gamma)}(k) = D_c(k) + D_c(k) Z \left\{ \Pi(k^2) + ik^2 \left( \frac{1}{Z} - 1 \right) \right\} \frac{1}{Z} G^{(\gamma)}(k).$$

Но  $D_c(k)k^2 = -1$ , поэтому это равенство совпадает с исходным уравнением (3.5.8).

Регуляризованный поляризационный оператор удобно представить в виде [11]

$$\Pi_R(k^2) = - \int_0^k V_{R\mu}(q) dq_\mu, \quad V_{R\mu}(q) = V_{1\mu}(q) - q_\nu \left( \frac{\partial V_{1\mu}(q)}{\partial q_\nu} \right)_{q=0}, \quad (3.6.24)$$

где

$$V_{1\mu}(q) = ZV_\mu(q), \quad V_\mu(q) = - \frac{\partial}{\partial q_\mu} \Pi(q^2). \quad (3.6.25)$$

Функция  $V_\mu(q)$  аналогична функции

$$\Lambda_\mu(p) \equiv \Gamma_\mu(p, p) - \gamma_\mu = \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu}$$

и допускает простую графическую интерпретацию. Именно, она представляет собой сумму величин, соответствующих компактным трехфотонным вершинным диаграммам, т. е. диаграммам, заканчивающимся тремя фотонными линиями и происходящим от всех компактных ФСЭД. (Напомним, что при вычислении элементов  $S$ -матрицы трехфотонные вершинные диаграммы можно не рассматривать, так как вклады в  $S$ -матрицу от двух трехфотонных вершинных диаграмм, отличающихся только направлением замкнутых электронных петель, взаимно компенсируются в силу теоремы Фарри.)

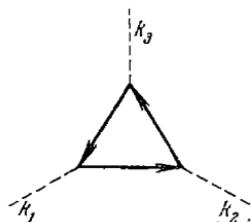


Рис. 3.31.

Простейшая трехфотонная вершинная диаграмма — трехфотонная вершинная диаграмма третьего порядка — изображена на рис. 3.31. Соответствующая ей величина  $V_{\mu\nu\lambda}^{(3)}(k_1, k_2, k_3)$ , где  $k_1, k_2, k_3$  — 4-импульсы фотонных линий, сумма которых равна нулю, просто связана с величиной  $\Pi_{\nu\lambda}^{(2)}(k) = \Pi^{(2)}(k^2) (\delta_{\nu\lambda} - k_\nu k_\lambda / k^2)$ , соответствующей ФСЭД 2-го порядка (см. рис. 3.12, I). Действительно, считая, что  $k_1 = -k_2 = k, k_3 = 0$ , и используя соотношение (3.5.14), легко убедиться, что

$$V_\mu^{(3)}(k) = \frac{1}{3} V_{\mu\nu\nu}^{(3)}(k, -k, 0) = - \frac{\partial \Pi^{(2)}(k^2)}{\partial k_\mu}. \quad (3.6.26)$$

Это соотношение может быть обобщено на произвольные компактные ФСЭД и соответствующие им трехфотонные вершинные диаграммы.

Таким образом, каждой компактной ФСЭД  $Y$  можно сопоставить совокупность трехфотонных вершинных диаграмм. Если  $V_{\mu\nu\lambda}^Y(k_1, k_2, k_3)$  обозначает сумму величин, соответствующих этим

трехфотонным диаграммам, то величина

$$V_{\mu}(k) = \frac{1}{3} \sum_{\gamma} V_{\mu\nu\gamma}^{\gamma}(k, -k, 0)$$

будет связана с поляризационным оператором  $\Pi(k^2)$  соотношением

$$V_{\mu}(k) = -\frac{\partial \Pi(k^2)}{\partial k_{\mu}}$$

в соответствии с (3.6.25). По аналогии с  $\Gamma_{\mu}(p, p, 0)$  можно ввести трехфотонную вершинную функцию

$$\Delta_{\mu}(k) = 2ik_{\mu} + V_{\mu}(k) \quad (3.6.27)$$

и перенормированную трехфотонную вершинную функцию

$$\Delta_{R\mu}(k) = Z\Delta_{\mu}(k) = 2ik_{\mu} + V_{R\mu}(k). \quad (3.6.28)$$

**3.6.4. Перенормировка элементов матрицы рассеяния.** В § 3.5 мы показали, что для учета высших приближений теории возмущений внутренним линиям и внутренним вершинам неприводимых диаграмм нужно сопоставлять функции Грина  $G^{(e)}(p)$ ,  $G^{(\gamma)}(k)$  и вершинную функцию  $\Gamma_{\mu}(p_1, p_2)$ , а внешним линиям — амплитуды  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{u}$ . Иными словами, если рассматривается некоторая неприводимая диаграмма  $n$ -го порядка, то соответствующий ей элемент  $S$ -матрицы может быть схематически представлен в виде

$$\mathfrak{M} \sim e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{F_e} (G^{(\gamma)})^{F_{\gamma}} (\mathbf{u})^{N_e} (\mathbf{a})^{N_{\gamma}}, \quad (3.6.29)$$

где  $F_e$  и  $F_{\gamma}$  — числа внутренних электронных и фотонных линий,  $N_e$  и  $N_{\gamma}$  — числа внешних электронных и фотонных линий и  $(\Gamma)^n$  служит для обозначения того, что величина типа  $\Gamma$  входит под знаком интеграла  $n$  раз.

Матричный элемент  $\mathfrak{M}$  выражен через перенормированные величины. Посмотрим теперь, какой вид будет иметь  $\mathfrak{M}$ , если перейти к перенормированным величинам  $e = Z^{-1/2}e_R$ ,  $G^{(e)} = Z_1 G_R^{(e)}$ ,  $G^{(\gamma)} = Z G_R^{(\gamma)}$ ,  $\Gamma = Z_1^{-1} \Gamma_R$ ,  $\mathbf{u} = Z_1^{1/2} \mathbf{u}_R$ ,  $\mathbf{a} = Z^{1/2} \mathbf{a}_R$ . Здесь  $\mathbf{u}_R$  и  $\mathbf{a}_R$  соответствуют перенормированным величинам (подчеркнем, что в перенормированные величины входит масса реального, а не «голового» электрона).

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \sim Z_1^{-n + F_e + \frac{1}{2} N_e} Z^{-\frac{n}{2} + F_{\gamma} + \frac{1}{2} N_{\gamma}} \times \\ \times e_R^n \int (\Gamma_R)^n (G_R^{(e)})^{F_e} (G_R^{(\gamma)})^{F_{\gamma}} (\mathbf{u}_R)^{N_e} (\mathbf{a}_R)^{N_{\gamma}}. \end{aligned} \quad (3.6.30)$$

Но в каждой вершине сходятся две электронные и одна фотонная линии, причем внутренняя линия входит в две вершины, а внешняя линия — в одну вершину. Поэтому

$$n = F_e + \frac{1}{2} N_e = 2F_{\gamma} + N_{\gamma}, \quad (3.6.31)$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{M} \sim e_R^n \int (\Gamma_R)^n (G_R^{(e)})^F e (G_R^{(y)})^F \gamma (u_R)^{N_e} (a_R)^{N_\gamma}. \quad (3.6.32)$$

Таким образом, матричные элементы выражаются одинаково как через неперенормированные величины  $e$ ,  $m$ ,  $G^{(e)}$ ,  $G^{(y)}$ ,  $\Gamma$ , так и через перенормированные величины  $e_R$ ,  $m_R$ ,  $G_R^{(e)}$ ,  $G_R^{(y)}$ ,  $\Gamma_R$ . Это фундаментальное свойство  $S$ -матрицы носит название перенормируемости квантовой электродинамики [8]. Оно, очевидно, базируется на соотношении (3.6.31), связывающем числа вершин и линий в неприводимых диаграммах.

Так как постоянные  $Z$  и  $Z_1$  не входят в выражение (3.6.32) для перенормированного матричного элемента  $\mathfrak{M}$ , то его можно вычислять по тем же правилам, что и исходный матричный элемент (выраженный через неперенормированные величины). При этом желательно с самого начала пользоваться перенормированными величинами  $\Gamma_R$ ,  $G_R^{(e)}$ ,  $G_R^{(y)}$ . Эти величины, как мы видели в п. 3.6.3, определяются величинами  $\Sigma_R$  и  $\Pi_R$ , которые в свою очередь определяются величинами  $\Lambda_1 = Z_1 \Lambda$ ,  $V_1 = ZV$ ; последние же выражаются через перенормированные величины так же, как величины  $\Lambda$  и  $V$  выражаются через неперенормированные величины. Действительно, рассмотрим, например, неприводимую диаграмму  $n$ -го порядка для величины  $\Lambda$  (диаграммы 3-го и 5-го порядков изображены на рис. 3.13). Соответствующая ей величина может быть схематически записана в виде

$$\Lambda^{(n)} \sim e^{n-1} \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{n-1} (G^{(y)})^{\frac{n-1}{2}}. \quad (3.6.33)$$

Переходя к перенормированным величинам, получим

$$\Lambda_1^{(n)} \sim e_R^{n-1} \int (\Gamma_R)^n (G_R^{(e)})^{n-1} (G_R^{(y)})^{\frac{n-1}{2}}. \quad (3.6.34)$$

Таким образом,  $\Lambda_1$  можно вычислять по тем же правилам, что и  $\Lambda$ , заменив исходные функции  $\Gamma$ ,  $G^{(e)}$ ,  $G^{(y)}$  и величины  $m$  и  $e$  перенормированными функциями  $\Gamma_R$ ,  $G_R^{(e)}$ ,  $G_R^{(y)}$  и истинными массой и зарядом электрона  $m_R$  и  $e_R$ .

Аналогичное заключение можно сделать и о функции  $V_1$ , рассматривая неприводимые скелетные диаграммы для трехфотонной вершинной функции. Функция  $V_1$  выражается через  $e_R$ ,  $m_R$ ,  $\Gamma_R$ ,  $G_R^{(e)}$ ,  $G_R^{(y)}$  так же, как функция  $V$  выражается через  $e$ ,  $m$ ,  $\Gamma$ ,  $G^{(e)}$ ,  $G^{(y)}$ .

Такой же вывод справедлив и для функции  $\Sigma(p)$  (при этом только одной из вершин в неприводимой диаграмме должна сопоставляться функция  $\Gamma$ ),

$$\Sigma(e, \Gamma, G^{(e)}, G^{(y)}) = \Sigma(e_R, \Gamma_R, G_R^{(e)}, G_R^{(y)}).$$

Что же касается функции  $\Pi(k)$ , то для нее справедливо соотношение

$$Z\Pi(e, \Gamma, G^{(e)}) = \Pi(e_R, \Gamma_R, G_R^{(e)}).$$

Используя соотношение (3.6.34) для  $\Lambda_1^{(n)}$  и аналогичное соотношение для  $V_1^{(n)}$ , можно, в принципе, получить разложения функций  $\Gamma_R$ ,  $G_R^{(e)}$  и  $G_R^{(v)}$  в ряды по степеням истинного заряда электрона  $e_R$ . Подстановка этих рядов в выражение (3.6.32) для перенормированного матричного элемента  $\mathcal{M}$  даст также ряд по степеням  $e_R$ . Таким образом может быть построена теория возмущений, содержащая ряды по степеням заряда реального, а не «голого» электрона.

### § 3.7. Расходимости в матрице рассеяния и их устранение

**3.7.1. Расходимости в интегральных выражениях для неприводимых диаграмм.** При вычислении элементов матрицы рассеяния в высших приближениях мы встречаемся с принципиальной трудностью, заставившей в течение многих лет думать, что применение квантовой электродинамики вообще ограничена первым приближением. Эта трудность заключается в том, что выражения для матричных элементов в высших приближениях содержат интегралы, расходящиеся в области больших импульсов виртуальных частиц.

Чтобы разъяснить возникновение расходимости, рассмотрим некоторую неприводимую диаграмму. Ей соответствует в общем случае многократный интеграл по импульсам виртуальных частиц

$$J = \int \mathcal{F}(p_1, \dots, p_n) d^4p_1 \dots d^4p_n,$$

где  $\mathcal{F}(p_1, \dots, p_n)$  — некоторая рациональная функция, представляющая собой отношение двух полиномов. Так как каждой внутренней электронной линии диаграммы соответствует множитель  $S_c(p)$ , содержащий импульс в степени  $-1$ , а каждой внутренней фотонной линии — множитель  $D_c(p)$ , содержащий импульс в степени  $-2$ , то разность степеней полиномов, стоящих в числителе и знаменателе  $\mathcal{F}$ , будет равна  $-(F_e + 2F_\gamma)$ , где  $F_e$  и  $F_\gamma$  — числа внутренних электронных и фотонных линий. Вопрос заключается в том, сходится или расходится интеграл  $J$ . Для решения этого вопроса напомним сперва, что интегрирование по четвертой компоненте каждого из 4-векторов  $p_i$  происходит в соответствии с правилом обхода полюсов, т. е. вдоль контура  $C$ , изображенного на рис. А.1. Этот контур целесообразно повернуть на угол  $\pi/2$ , что, очевидно, можно сделать. При этом компонента  $p_4$  каждого из 4-векторов  $p_i$  заменится на  $p_0$  и  $p^2 = p^2 + p_4^2$  перейдет в  $p^2 + p_0^2$ , где  $p_0$  — вещественная величина.

Таким образом, поворот пути интегрирования  $C$  на  $\pi/2$  соответствует переходу в  $p$ -пространстве к обычной евклидовой метрике, в которой квадрат длины равен сумме квадратов всех четырех координат с вещественной четвертой координатой.

После перехода к евклидовой метрике легко решить вопрос о сходимости интеграла  $J$ . Для этого достаточно подсчитать число

переменных интегрирования в  $J$ . Число различных импульсов равно числу внутренних линий, т. е.  $F_e + F_\gamma$ . Но они не независимы, так как три импульса линий, сходящихся в каждой из  $n$  вершин диаграммы, связаны законом сохранения. Один из законов сохранения можно отнести к внешним линиям, поэтому всего число независимых импульсов, по которым производится интегрирование, равно  $F_e + F_\gamma - n + 1$ . Если записать интеграл схематически в виде

$$J \sim \int \frac{(d^4 p)^{K_1}}{(p)^{K_2}},$$

то, используя приведенный подсчет и соотношения (3.6.31), мы получим

$$K_1 = 1/2 n + 1 - 1/2 N_e - 1/2 N_\gamma, \quad K_2 = 2n - 1/2 N_e - N_\gamma,$$

где  $N_e$  и  $N_\gamma$  — числа внешних электронных и фотонных линий.

Поскольку мы рассматриваем неприводимую диаграмму, то подынтегральная функция не распадается на множители, содержащие независимые переменные. Поэтому сходимость интеграла определяется просто разностью

$$K = K_2 - 4K_1 = 3/2 N_e + N_\gamma - 4. \quad (3.7.1)$$

При  $K > 0$  интеграл сходится, при  $K \leq 0$  — расходится. Замечательно, что величина  $K$  зависит только от числа внешних линий.

Из (3.7.1) следует, что имеется ограниченное число типов расходящихся интегралов, соответствующих следующим значениям чисел  $N_e$  и  $N_\gamma$  [8]:

$$\begin{aligned} 1) N_e = 2, N_\gamma = 1, K = 0; & \quad 5) N_e = 0, N_\gamma = 2, K = -2; \\ 2) N_e = 2, N_\gamma = 0, K = -1; & \quad 6) N_e = 0, N_\gamma = 1, K = -3; \\ 3) N_e = 0, N_\gamma = 4, K = 0; & \quad 7) N_e = 0, N_\gamma = 0, K = -4. \\ 4) N_e = 0, N_\gamma = 3, K = -1; & \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

На рис. 3.32 изображены простейшие неприводимые диаграммы, соответствующие этим расходимостям. Не все из них, однако, вносят вклад в матричные элементы. Ясно, что диаграмму 7, представляющую собой вакуумную петлю, можно вовсе не принимать во внимание. Можно также, согласно теореме Фарри, не рассматривать диаграмм 4 и 6, представляющих собой замкнутые электронные петли с нечетным числом вершин. (Мы сохраним, однако, диаграмму 4 с одним направлением обхода электронной петли, так как она определяет трехфотонную вершинную функцию  $V$ .)

Таким образом, основными неприводимыми диаграммами, приводящими к расходимостям в матрице рассеяния, является ЭСЭД и ФСЭД 2-го порядка, ВД любого порядка и диаграмма рассеяния света светом (диаграмма 3 на рис. 3.32). Первой из них соответствует  $K = -1$ , второй  $-K = -2$  и остальным  $-K = 0$ .

**3.7.2. Введение граничного импульса.** Появление расходящихся в матрице рассеяния указывает на неудовлетворительность теории. Ясно, что ряд теории возмущений, строго говоря, не имеет смысла, если второй член ряда бесконечен. Таким образом, возникает следующая проблема важнейшего принципиального значения. С одной стороны, результаты применения теории возмущений в первом приближении прекрасно подтверждаются опытом. С другой стороны, для того чтобы первое приближение имело какой-либо теоретический смысл, следующие приближения должны приводить лишь к малым поправкам.

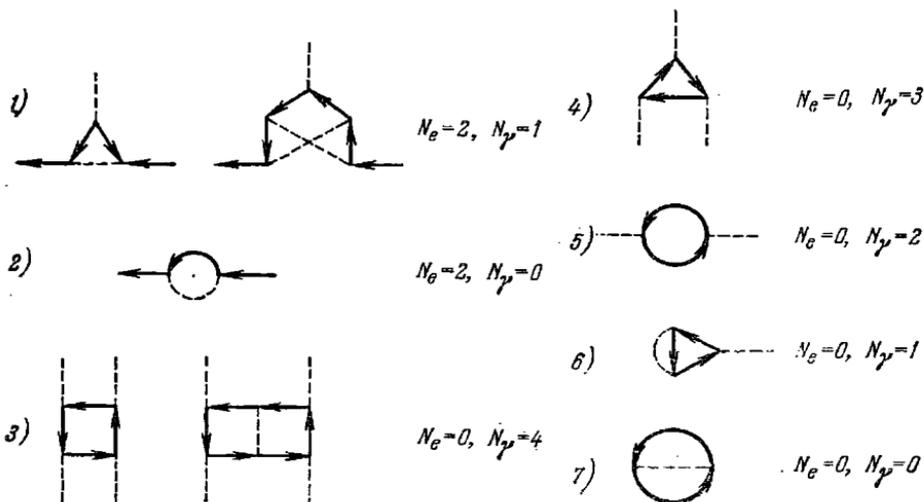


Рис. 3.32.

Идея выхода из этого противоречия подсказывается уже классической электродинамикой. Как хорошо известно, классическая электродинамика не является логически замкнутой теорией. Последовательное ее применение приводит к противоречиям, проявляющимся, например, в бесконечной электромагнитной массе электрона. Смысл этих противоречий сводится к неприменимости уравнений классической электродинамики на расстояниях, меньших классического радиуса электрона  $e^2/mc^2$  (фактически классическая электродинамика из-за квантовых эффектов неприменима уже при расстояниях порядка  $\hbar/mc$ ).

Квантовая электродинамика правильно описывает взаимодействие между электронами и фотонами в области достаточно больших пространственно-временных интервалов или соответственно в области достаточно малых импульсов частиц, но в области малых пространственно-временных интервалов, т. е. больших импульсов, становится неприменимой. Не рассматривая здесь вопроса о том, связано ли это ограничение с пороком основных идей и уравнений

квантовой электродинамики или с неприменимостью теории возмущений, можно, однако, утверждать, что если рассматривать процессы, в которых частицы обмениваются импульсами, малыми по сравнению с некоторым граничным импульсом  $L$ , то область импульсов виртуальных частиц, превосходящих  $L$ , не будет играть практически никакой роли. В этих условиях величина граничного импульса не должна входить в выражения для элементов  $S$ -матрицы. Поэтому, хотя мы точно и не знаем  $L$ , тем не менее мы можем варьировать эту величину и выбрать ее таким образом, чтобы, с одной стороны, выполнялось условие  $\Delta p \ll L$ , где  $\Delta p$  — величина, характеризующая изменение импульса частиц при столкновениях, а с другой стороны, была применимой теория возмущений.

Введение граничного импульса математически означает, что при вычислении интегральных величин, сопоставляемых диаграммам Фейнмана, мы будем производить интегрирование не по бесконечной, а по некоторой конечной области 4-импульсного пространства, которая должна быть, естественно, инвариантной относительно преобразований Лоренца (подробно этот вопрос будет рассмотрен в Приложении).

**3.7.3. Регуляризация функций, соответствующих неприводимым диаграммам.** Мы покажем теперь, что последовательно применяя процедуру перенормировки массы и заряда электрона, можно сделать элементы  $S$ -матрицы не зависящими от величины граничного импульса  $L$ , т. е. устранить все встречающиеся в матричных элементах расходимости.

Начнем с исследования расходимостей у функций, соответствующих неприводимым ВД (будем называть эти функции вершинными функциями соответствующих порядков). Простейшей неприводимой ВД 3-го порядка (рис. 3.13) соответствует функция

$$\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = \int_{\Omega_m} R_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2; q) d^4q, \quad (3.7.3)$$

где

$$R_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2; q) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \gamma_{\nu} S_c(p_1 - q) \gamma_{\mu} S_c(p_2 - q) \gamma_{\nu} D_c(q),$$

и интегрирование совершается по 4-объему  $\Omega_m$ , определяемому граничным импульсом  $L$ . При  $L \rightarrow \infty$  интеграл (3.7.3), очевидно, расходится логарифмически.

Регуляризованная функция  $\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$  (будем называть ее регуляризованной вершинной функцией 3-го порядка) определяется, согласно (3.6.14), формулой

$$\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = \Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2) - \Lambda_{\mu}^{(3)}(p_0, p_0), \quad (3.7.4)$$

где  $p_0$  — 4-импульс свободного реального электрона,  $p_0^2 = -m_e^2$ . Покажем, что функция  $\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$  не содержит расходимостей, т. е. в выражении для  $\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$  можно произвести предельный переход  $L \rightarrow \infty$ .

Заметим с этой целью, что

$$R_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2; q) - R_{\mu}^{(3)}(p_0, p_0; q) = \\ = (p_1 - p_0)_\nu \left( \frac{\partial R_{\mu}^{(3)}}{\partial p_{1\nu}} \right)_{p_1=p'_1, p_2=p'_2} + (p_2 - p_0)_\nu \left( \frac{\partial R_{\mu}^{(3)}}{\partial p_{2\nu}} \right)_{p_1=p'_1, p_2=p'_2},$$

где  $p'_{1\nu}$  и  $p'_{2\nu}$  — некоторые величины, лежащие соответственно между  $p_{1\nu}$  и  $p_{0\nu}$  и  $p_{2\nu}$  и  $p_{0\nu}$ . При  $|q^2| \rightarrow \infty$  функция  $R_{\mu}^{(3)}$  ведет себя, очевидно, как  $(q)^{-4}$ , а так как  $q$  входит в  $R_{\mu}^{(3)}$  только в комбинациях  $p_1 - q$  и  $p_2 - q$ , то  $\frac{\partial R_{\mu}^{(3)}}{\partial p_{1\nu}}$  и  $\frac{\partial R_{\mu}^{(3)}}{\partial p_{2\nu}}$  будут вести себя при  $|q^2| \rightarrow \infty$  не как  $(q)^{-4}$ , а как  $(q)^{-5}$ , благодаря чему интеграл, определяющий функцию  $\Lambda_{R_{\mu}}^{(3)}(p_1, p_2)$ , будет сходиться при  $L \rightarrow \infty$ . Это обстоятельство и оправдывает введение термина регуляризованная функция (под регуляризацией обычно понимают процедуру устранения расходимостей).

Ясно, что приведенное доказательство сходимости интеграла, определяющего  $\Lambda_{R_{\mu}}^{(3)}(p_1, p_2)$ , немедленно обобщается на произвольные неприводимые ВД. Действительно, рассмотрим вершинную функцию  $\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ , соответствующую неприводимой ВД  $(2n+1)$ -го порядка

$$\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2) = \int_{\Omega_m} R_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2; q_1, q_2, \dots, q_n) d^4 q_1 d^4 q_2 \dots d^4 q_n,$$

где  $R_{\mu}^{(2n+1)}$  — отношение двух полиномов, которое ведет себя при  $|q_i^2| \rightarrow \infty$  как  $(q)^{-4n}$  ( $i=1, \dots, n$ ) и  $\Omega_m$  — некоторая конечная область интегрирования, определяющаяся граничным импульсом  $L$  (при  $L \rightarrow \infty$  интеграл  $\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2)$  расходится логарифмически).

Образовав разность

$$R_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2; q_1, \dots, q_n) - R_{\mu}^{(2n+1)}(p_0, p_0; q_1, \dots, q_n) = \\ = (p_1 - p_0)_\nu \left( \frac{\partial R_{\mu}^{(2n+1)}}{\partial p_{1\nu}} \right)_{p_1=p'_1, p_2=p'_2} + (p_2 - p_0)_\nu \left( \frac{\partial R_{\mu}^{(2n+1)}}{\partial p_{2\nu}} \right)_{p_1=p'_1, p_2=p'_2},$$

интеграл от которой дает  $\Lambda_{R_{\mu}}^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ , и замечая, что  $p_1$  и  $p_2$  входят в  $R_{\mu}^{(2n+1)}$  в линейных комбинациях с  $q_i$ , легко заключить, что эта разность ведет себя при  $|q_i^2| \rightarrow \infty$  как  $(q)^{-(4n+1)}$ , что и обеспечивает сходимость выражения для  $\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2)$  при  $L \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим теперь функции, соответствующие неприводимым трехфотонным диаграммам (будем называть их трехфотонными вершинными функциями соответствующего порядка). Простейшей трехфотонной вершинной диаграмме 3-го порядка соответствует функция

$$V_{\mu}^{(3)}(k) = \int_{\Omega_m} Q_{\mu}^{(3)}(k; q) d^4 q, \quad (3.7.5)$$

где

$$Q_{\mu}^{(3)}(k; q) = \frac{e^2}{3(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma_\nu S_c(q-k) \gamma_\mu S_c(q-k) \gamma_\nu S_c(q).$$

Интеграл (3.7.5) расходится, очевидно, линейно при  $L \rightarrow \infty$ . Однако ввиду инвариантности области интегрирования  $\Omega_m$  члены, пропорциональные  $L$ , должны обратиться в нуль. Действительно, для исследования расходящейся части  $V_{\mu}^{(3)}(k)$  можно считать, что  $k_{\mu} \ll q_{\mu}$ . Если положить  $k_{\mu} = 0$ , то после интегрирования и вычисления шпура не останется векторного параметра, через который могла бы быть выражена векторная величина  $V_{\mu}^{(3)}$ , т. е.  $V_{\mu}^{(3)}(0) = \int_{\Omega_m} Q_{\mu}^{(3)}(0; q) d^4q = 0$ . Поэтому отличный от нуля результат могут

дать только линейные по  $k_{\mu}$  члены в  $Q_{\mu}^{(3)}$ , но они будут приводить не к линейной, а к логарифмической расходимости.

Покажем, что регуляризованная трехфотонная вершинная функция 3-го порядка

$$V_{R\mu}^{(3)}(k) = V_{\mu}^{(3)}(k) - k_{\nu} \left( \frac{\partial V_{\mu}^{(3)}(k)}{\partial k_{\nu}} \right)_{k=0} \quad (3.7.6)$$

не зависит от величины граничного импульса, т. е. не содержит расходимостей. Так как  $V_{\mu}^{(3)}(0) = 0$ , то  $V_{R\mu}^{(3)}(k)$  можно представить в виде

$$V_{R\mu}^{(3)}(k) = \int_{\Omega_m} \left\{ Q_{\mu}^{(3)}(k; q) - Q_{\mu}^{(3)}(0; q) - k_{\nu} \left( \frac{\partial Q_{\mu}^{(3)}(k; q)}{\partial k_{\nu}} \right)_{k_{\nu}=0} \right\} d^4q.$$

Замечая, что

$$Q_{\mu}^{(3)}(k; q) = Q_{\mu}^{(3)}(0; q) + k_{\nu} \left( \frac{\partial Q_{\mu}^{(3)}(k; q)}{\partial k_{\nu}} \right)_{k_{\nu}=0} + \frac{1}{2} k_{\nu} k_{\lambda} \left( \frac{\partial^2 Q_{\mu}^{(3)}(k; q)}{\partial k_{\nu} \partial k_{\lambda}} \right)_{k_{\nu}=k'_{\nu}, 0 < k'_{\nu} < k_{\nu}},$$

и учитывая, что величины  $k_{\nu}$  и  $q_{\nu}$  входят в  $Q_{\mu}^{(3)}(k; q)$  не порознь, а в виде линейной комбинации, легко убедиться, что интеграл, определяющий  $V_{R\mu}^{(3)}(k)$ , сходится при  $L \rightarrow \infty$ . Действительно, подынтегральное выражение в  $V_{R\mu}^{(3)}(k)$  при  $|q^2| \rightarrow \infty$  ведет себя как  $(q)^{-5}$ , что и обеспечивает сходимость интеграла.

Аналогичным образом можно убедиться в отсутствии расходимостей у трехфотонных вершинных функций, соответствующих другим неприводимым трехвершинным диаграммам.

Перейдем к рассмотрению функций  $\Sigma^{(2)}(p)$  и  $\Pi^{(2)}(k^2)$ , соответствующих неприводимым ЭСЭД и ФСЭД (эти функции называются массовым и поляризационным операторами 2-го порядка). Регуляризованные функции  $\Sigma_{R}^{(2)}(p)$  и  $\Pi_{R}^{(2)}(k^2)$  можно найти с помощью формул (3.6.18) и (3.6.24), подставляя в последние вместо  $\Lambda_{R\mu}(q, q)$  и  $V_{R\mu}(q)$  функции  $\Lambda_{R\mu}^{(2)}(q, q)$  и  $V_{R\mu}^{(2)}(q)$ . Ясно, что полученные таким образом функции  $\Sigma_{R}^{(2)}(p)$  и  $\Pi_{R}^{(2)}(k^2)$  не будут содержать расходимостей. Но можно производить регуляризацию массового и поляризационного операторов 2-го порядка, исходя непосредственно из выражений для  $\Sigma^{(2)}(p)$  и  $\Pi^{(2)}(k^2)$  в виде интегралов по 4-объему  $\Omega_m$ , определяемому граничным импульсом  $L$ . Согласно

результатам п. 3.6.3 регуляризованные значения этих величин определяются формулами

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(im_R) - (\hat{p} - im_R) \left( \frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p}=im_R}, \quad (3.7.7)$$

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \Pi^{(2)}(k^2) - \Pi^{(2)}(0) - k^2 \Pi^{(2)'}(0).$$

Эти формулы (вместе с формулами (3.7.4) и (3.7.6)) отчетливо разъясняют математическую процедуру регуляризации. Мы видим, что она состоит в вычитании из регуляризуемой функции нескольких первых членов ее разложения в ряд Тейлора по степеням  $\hat{p} - im_R$  или  $k^2$ . Количество отнимаемых членов должно быть минимальным для обеспечения сходимости остатка; тот же факт, что остаток не будет содержать расходящихся слагаемых, следует из того, что регуляризуемая функция представляет собой интеграл, в котором в случае неприводимых диаграмм внешние импульсы входят в виде линейной комбинации с переменными интегрирования, и поэтому каждое дифференцирование увеличивает степень полинома, стоящего в знаменателе подынтегральной функции, на единицу.

Физический смысл этой «вычитательной» процедуры заключается, как следует из предыдущего анализа, в том, что она эквивалентна перенормировке констант  $e$  и  $m$  — заряда и массы электрона.

Нам остается показать, как производится регуляризация матричного элемента, соответствующего рассеянию света светом (диаграмма 3 на рис. 3.33). Согласно результатам п. 3.7.1 этот матричный элемент

$$\mathfrak{M}^{(\gamma\gamma)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \int_{\Omega_m} G(k_1, k_2, k_3, k_4; q_1, \dots, q_n) d^4q_1 \dots d^4q_n, \quad (3.7.8)$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_4$  — 4-импульсы фотонов и  $G$  — некоторая функция, определяемая правилами Фейнмана, расходится логарифмически при  $L \rightarrow \infty$ . В частности, логарифмически расходящаяся константа представляет собой величина  $\mathfrak{M}^{(\gamma\gamma)}(0, 0, 0, 0)$ . Но из соображений калибровочной инвариантности эта величина должна, очевидно, равняться нулю. Тот факт, что мы получили величину, отличную от нуля, связан с тем, что введение конечного граничного импульса  $L$  нарушает калибровочную инвариантность теории. Для восстановления калибровочной инвариантности мы должны заменить функцию  $G(k_1, k_2, k_3, k_4; q_1, \dots, q_n)$  под знаком интеграла (3.7.8) функцией

$$G(k_1, k_2, k_3, k_4; q_1, \dots, q_n) - G(0, 0, 0, 0; q_1, \dots, q_n).$$

Таким образом, мы получим следующее выражение для регуляризованного матричного элемента рассеяния света светом:

$$\mathfrak{M}_R^{(\gamma\gamma)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \int \{ G(k_1, k_2, k_3, k_4; q_1, \dots, q_n) - G(0, 0, 0, 0; q_1, \dots, q_n) \} d^4q_1 \dots d^4q_n. \quad (3.7.9)$$

Ясно, что это выражение не будет содержать расходястей (подробно вопрос о рассеянии фотона фотоном рассматривается в § 5.6).

**3.7.4. Регуляризация функций, соответствующих приводимым диаграммам.** В предыдущих пунктах мы показали, что процедура перенормировки массы и заряда электрона позволяет однозначным образом устранить расходясти в функциях, соответствующих неприводимым диаграммам.

Мы покажем теперь, что эта же процедура позволяет однозначно регуляризовать функции, соответствующие приводимым диаграммам.

В этом случае задача сильно усложняется. Действительно, рассмотрим, например, приводимую ВД 11-го порядка, изображенную на рис. 3.33. Ясно, что интегральное выражение  $\Lambda_{\mu}^{(11)}(p_1, p_2)$ ,

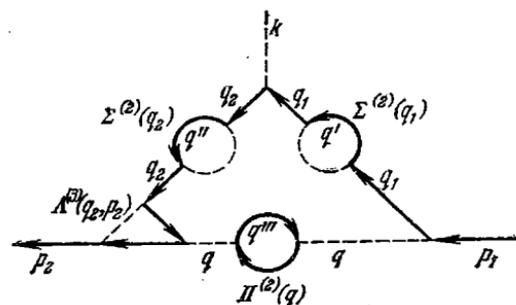


Рис. 3.33.

соответствующее этой ВД, расходится при  $L \rightarrow \infty$  как при интегрировании по переменным  $q_1, q_2$ , относящимся к диаграмме как к целому, так и при интегрировании по переменным  $q', q'', q'''$ , относящимся к внутренним частям диаграммы, т. е. к функциям  $\Sigma^{(2)}(q_1), \Sigma^{(2)}(q_2), \Pi^{(2)}(q), \Lambda^{(3)}(q_2, p_2)$ .

Чтобы регуляризовать функцию  $\Lambda^{(11)}(p_1, p_2)$ , мы

вначале произведем регуляризацию функций, соответствующих внутренним частям диаграммы, т. е. заменим в интеграле, определяющем  $\Lambda^{(11)}(p_1, p_2)$ , величины  $\Sigma^{(2)}(q_1), \Sigma^{(2)}(q_2), \Pi^{(2)}(q), \Lambda^{(3)}(q_2, p_2)$  их регуляризованными значениями  $\Sigma_R^{(2)}(q_1), \Sigma_R^{(2)}(q_2), \Pi_R^{(2)}(q), \Lambda_R^{(3)}(q_2, p_2)$ . Интеграл по остающимся переменным  $q_1, q_2$ , относящимся к диаграмме как к целому (функции  $\Sigma_R^{(2)}(q), \Pi_R^{(2)}(q), \Lambda_R^{(3)}(q, p)$  предполагаются при этом известными), будет по-прежнему расходящимся, и вопрос сводится к тому, каков характер этой расходимости. Мы покажем, что расходимость будет такой же, как и расходимость вершинной функции третьего порядка  $\Lambda^{(3)}(p_1, p_2)$ , т. е. логарифмической. Благодаря этому замечательному обстоятельству регуляризация «внутренних» функций не ухудшает расходимости интеграла, определяющего  $\Lambda^{(11)}(p_1, p_2)$ , и последний (после регуляризации «внутренних» функций) может быть регуляризован, так же как и функция  $\Lambda^{(3)}(p_1, p_2)$ , путем вычитания из  $\Lambda^{(11)}(p_1, p_2)$  величины  $\Lambda^{(11)}(p_0, p_0)$ :

$$\Lambda_R^{(11)}(p_1, p_2) = \Lambda^{(11)}(p_1, p_2) - \Lambda^{(11)}(p_0, p_0).$$

Чтобы убедиться в справедливости сделанного утверждения, выясним характер асимптотики регуляризованных функций  $\Sigma_R^{(2)}(p), \Pi_R^{(2)}(k^2), \Lambda_R^{(3)}(p_1, p_2)$  в области больших значений аргументов

(полностью задача о нахождении вида этих функций будет решена в § 5.1). Рассмотрим сначала вершинную функцию  $\Lambda^{(3)}(q, p)$ . В интересующей нас области  $|q^2| \rightarrow \infty$  можно, очевидно, считать функцию  $\Lambda^{(3)}(q, p)$  зависящей только от  $q^2$ . С другой стороны, интеграл, определяющий  $\Lambda^{(3)}$ , расходится при  $L \rightarrow \infty$  логарифмически. Поэтому из соображений размерности можно заключить, что  $\Lambda^{(3)}(q, 0) \sim \ln \frac{L^2}{q^2}$ ,  $|q^2| \rightarrow \infty$ , и, следовательно, регуляризованная функция  $\Lambda_R^{(3)}(q, 0)$  при  $|q^2| \rightarrow \infty$  ведет себя как

$$\Lambda_R^{(3)}(q, 0) \sim \ln \frac{q^2}{m_R^2}, \quad |q^2| \rightarrow \infty. \quad (3.7.10)$$

Имея это выражение и используя соотношение

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = \int_{p_0}^p \Lambda_{R\mu}^{(3)}(q, q) dq_\mu,$$

легко заключить, что при  $|p^2| \rightarrow \infty$  функция  $\Sigma_R^{(2)}(p)$  ведет себя как

$$\Sigma_R^{(2)}(p) \sim \hat{p} \ln \frac{p^2}{m_R^2}, \quad |p^2| \rightarrow \infty. \quad (3.7.11)$$

Выясним, наконец, характер асимптотики функции  $\Pi_R^{(3)}(k^2)$ . Напомним с этой целью, что трехфотонная вершинная функция  $V_\mu^{(3)}(k)$  логарифмически расходится при  $L \rightarrow \infty$ . Поэтому из соображений размерности следует, что в области больших импульсов  $V_\mu^{(3)}(k) \sim k_\mu \ln \frac{L^2}{k^2}$ ,  $|k^2| \rightarrow \infty$ , и, следовательно, регуляризованная функция  $V_{R\mu}^{(3)}(k)$  имеет вид

$$V_{R\mu}^{(3)}(k) \sim k_\mu \ln \frac{k^2}{m_R^2}, \quad |k^2| \rightarrow \infty. \quad (3.7.12)$$

Отсюда, используя соотношение (3.6.24)

$$\Pi_R^{(3)}(k) = - \int_0^k V_{R\mu}^{(3)}(q) dq_\mu,$$

можно найти  $\Pi_R^{(3)}(k)$  при  $|k^2| \rightarrow \infty$ :

$$\Pi_R^{(3)}(k) \sim k^2 \ln \frac{k^2}{m_R^2}. \quad (3.7.13)$$

Полученные формулы показывают, что если перейти от диаграммы рис. 3.33 к скелетной диаграмме рис. 3.28 с эффективной вершиной и эффективными электронными и фотонной линиями, то соответствующие им величины будут вести себя в области больших импульсов как

$$\Gamma \sim \ln \frac{q^2}{m_R^2}, \quad G^{(e)} \sim \frac{1}{q} \ln \frac{q^2}{m_R^2}, \quad G^{(\nu)} \sim \frac{1}{q^2} \ln \frac{q^2}{m_R^2}, \quad |q^2| \rightarrow \infty.$$

Поэтому, как и утверждалось, интеграл, соответствующий скелетной диаграмме в целом:

$$\Lambda^{(11)}(p_1, p_2) \sim e_R^2 \int_{\Omega_m} \Gamma(G^{(e)})^2 G^{(\gamma)} d^4 q,$$

будет расходиться при  $L \rightarrow \infty$  так же, как и  $\Lambda^{(3)}(p_1, p_2)$ , т. е. логарифмически, и для его регуляризации достаточно из  $\Lambda^{(11)}(p_1, p_2)$  вычесть  $\Lambda^{(11)}(p_0, p_0)$ :

$$\Lambda_R^{(11)}(p_1, p_2) \sim e_R^2 \int \{ \Gamma(G^{(e)})^2 G^{(\gamma)} - [\Gamma(G^{(e)})^2 G^{(\gamma)}]_{p=p_0} \} d^4 q.$$

Нам остается показать, что изложенный метод постепенного устранения расходимостей — от внутренних неприводимых диаграмм к охватывающим их ЭСЭД, ФСЭД и ВД и от последних ко всей диаграмме в целом — применим в случае сколь угодно сложной приводимой диаграммы.

Так как массовый и поляризационный операторы различных порядков  $\Sigma^{(n)}(p)$  и  $\Pi^{(n)}(k^2)$  выражаются через вершинные и трехфотонные вершинные функции  $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$  и  $V^{(2n+1)}(q)$ , то достаточно, очевидно, ограничиться рассмотрением функций  $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$  и  $V^{(2n+1)}(q)$ , соответствующих различным приводимым диаграммам.

Переходя от этих приводимых диаграмм к соответствующим неприводимым скелетным диаграммам с эффективными линиями и эффективными вершинами, мы получим для  $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$  и  $V^{(2n+1)}(q)$  интегралы, в которые будут входить регуляризованные функции  $\Lambda_R^{(2n'+1)}(p_1, p_2)$  и  $V_R^{(2n'+1)}(q)$  более низких порядков,  $n' < n$ . Но, как можно убедиться, повторяя рассуждения, приводящие к (3.7.10) — (3.7.13), функции  $\Lambda_R^{(2n'+1)}$ ,  $V_R^{(2n'+1)}$ ,  $\Sigma_R^{(n')}$ ,  $\Pi_R^{(n')}$  в области больших импульсов  $q$  только множителями типа  $\ln(q^2/m_R^2)^N$ , где  $N$  — некоторое целое число, будут отличаться от функций  $\Lambda_R^{(2)}$ ,  $V_R^{(2)}$ ,  $\Sigma_R^{(2)}$ ,  $\Pi_R^{(2)}$ . Поэтому характер расходимости интегралов, определяющих функции  $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$  и  $V^{(2n+1)}(q)$  (с регуляризованными «внутренними» частями), будет таким же, как и в случае простейших неприводимых диаграмм, т. е. логарифмическим. Иными словами, после регуляризации «внутренних» частей мы не приходим к расходимостям новых типов и сможем произвести окончательную регуляризацию функций  $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$  и  $V^{(2n+1)}(q)$  так же, как и функций  $\Lambda^{(3)}(p_1, p_2)$  и  $V^{(3)}(q)$ , т. е. путем вычитания из  $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$  величины  $\Lambda^{(2n+1)}(p_0, p_0)$  и вычитания из  $V^{(2n+1)}(q)$  величины  $k_\nu \left( \frac{\partial V^{(2n+1)}}{\partial k_\nu} \right)_{k=0}$ .

Зная регуляризованные функции  $\Lambda_R(p_1, p_2)$  и  $V_R(q)$ , можно по формулам (3.6.18), (3.6.24) найти регуляризованные массовый и поляризационный операторы  $\Sigma_R(p)$  и  $\Pi_R(k)$ , а зная последние, по формулам (3.6.16), (3.6.20) определить перенормированные функции Грина. Существенно подчеркнуть, что по самой идее изложенного метода постепенного устранения расходимостей, базирующегося на последовательном применении процедуры пере-

нормировки массы и заряда электрона, мы получим для всех перенормированных и регуляризованных функций не замкнутые выражения, а ряды по степеням перенормированного заряда электрона  $e_R$ .

Имея выражения для перенормированных функций Грина и вершинной функции, можно определить регуляризованное значение матричного элемента, соответствующего произвольной приводимой диаграмме. Действительно, согласно п. 3.6.4, матричный элемент сохраняет свой вид при переходе к перенормированным величинам

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^F e (G^{(\gamma)})^F \gamma (u)^{N_e} (a)^{N_\gamma} = \\ &= e_R^n \int (\Gamma_R)^n (G_R^{(e)})^F e (G_R^{(\gamma)})^F \gamma (u_R)^{N_e} (a_R)^{N_\gamma}, \quad (3.7.14) \end{aligned}$$

а так как перенормированные функции  $\Gamma_R$ ,  $G_R^{(e)}$  и  $G_R^{(\gamma)}$  не содержат расходимостей, то регуляризация  $\mathfrak{M}$  необходима только в том случае, когда интеграл (3.7.14) расходится. С другой стороны, в области больших импульсов  $q$  функции  $\Gamma_{R\mu}$ ,  $G_R^{(e)}$ ,  $G_R^{(\gamma)}$  ведут себя с точностью до множителя типа  $\text{In}(q^2/m_e^2)^N$  так же, как и функции  $\gamma_\mu$ ,  $S_c$ ,  $D_c$  (речь идет каждый раз о диаграммах сколь угодно большого, но конечного порядка!). Поэтому матричные элементы  $\mathfrak{M}$  могут обладать расходимостями только тех типов, которые свойственны величинам, соответствующим неприводимым диаграммам, и, следовательно, применяя к интегралу (3.7.14) в целом процедуру регуляризации величин, соответствующих неприводимым диаграммам, мы однозначным образом устраним встречающиеся расходимости в  $\mathfrak{M}$ .

## § 3.8. Асимптотические свойства функций Грина

### 3.8.1. Структура функций Грина в области больших импульсов.

Выше мы показали, что матричный элемент, соответствующий какому-либо процессу, с учетом высших приближений теории возмущений сохраняет свой вид при переходе от перенормированных к перенормированным величинам:

$$\begin{aligned} e \rightarrow e_R = Z_1^{1/2} e, \quad u \rightarrow u = Z_1^{-1/2} u, \quad a \rightarrow a = Z_1^{1/2} a, \\ G^{(e)} \rightarrow G_R^{(e)} = Z_1^{-1} G^{(e)}, \quad G_1^{(\gamma)} \rightarrow G_R^{(\gamma)} = Z^{-1} G^{(\gamma)}, \quad \Gamma \rightarrow \Gamma_R = Z_1 \Gamma \quad (3.8.1) \end{aligned}$$

( $u \equiv u_R$ ,  $a \equiv a_R$ ). Это важнейшее свойство электромагнитного взаимодействия электронов и фотонов, называемое перенормируемостью, было использовано нами в предыдущем параграфе для установления правил регуляризации различных квантовоэлектродинамических величин.

Теперь мы покажем, что, используя свойство перенормируемости, можно выяснить структуру и получить асимптотические представления функций Грина в области больших импульсов [13, 14]. Рассмотрим прежде всего фотонную функцию Грина. Предполагая

Выполненной перенормировку массы электрона, запишем  $G^{(\nu)}(k^2)$  в виде

$$G^{(\nu)}(k^2) = D_c(k^2) d,$$

где  $d$  — некоторая функция квадрата 4-импульса  $k^2$ , граничного импульса  $L$  и перенормированного заряда электрона,

$$d \equiv d\left(\frac{L^2}{k^2}, \frac{m_R^2}{k^2}, e^2\right).$$

Перенормированная функция  $d$ , которую мы будем обозначать через  $d_R$  и которая является функцией  $k^2/m_R^2$  и  $e_R^2$ :

$$d_R \equiv d\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right),$$

связана, согласно (3.8.1), с перенормированной функцией  $d$  соотношением

$$d\left(\frac{L^2}{k^2}, \frac{m_R^2}{k^2}, e^2\right) = Z d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right), \quad (3.8.2)$$

где  $Z$  является некоторой функцией  $L^2/m_R^2$  и  $e_R^2$ ,  $Z \equiv Z(L^2/m_R^2, e_R^2)$ , и  $e^2$  и  $e_R^2$  связаны между собой соотношением  $e^2 = Z^{-1}e_R^2$ . Отсюда следует, что

$$e^2 d\left(\frac{L^2}{k^2}, \frac{m_R^2}{k^2}, e^2\right) = e_R^2 d_R\left(\frac{k^2}{m^2}, e_R^2\right). \quad (3.8.3)$$

Как видно из структуры выражений, сопоставляемых различным фейнмановским диаграммам, они допускают предельный переход  $m \rightarrow 0$  (речь идет о перенормированных выражениях). Предельный переход к нулевой массе возможен и после перенормировки массы (но не после перенормировки заряда!). Этот предельный переход соответствует рассмотрению области больших импульсов,  $k^2 \gg m_R^2$ . Поэтому, интересуясь поведением функций Грина в области больших импульсов, мы можем в перенормированной (по заряду) функции  $d$  вычеркнуть второй из аргументов,

$$e^2 d\left(\frac{L^2}{k^2}, e^2\right) = e_R^2 d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right) \equiv e_k^2. \quad (3.8.4)$$

Величина  $e_k$  носит название инвариантного заряда. Покажем, что инвариантный заряд удовлетворяет уравнению

$$\left[ m_R^2 \frac{\partial}{\partial m_R^2} + e_R^2 \beta(e_R^2) \frac{\partial}{\partial e_R^2} \right] e_R^2 d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right) = 0, \quad (3.8.5)$$

где

$$\beta(e_R^2) = -\frac{1}{e_R^2} \frac{\left( m_R^2 \frac{\partial}{\partial m_R^2} e^2 \right) e_R^2}{\left( \frac{\partial}{\partial e_R^2} e^2 \right) m_R^2}.$$

Продифференцируем с этой целью (3.8.4) по  $e_R$  и  $m_R$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial e_R^2} e_R^2 d_R \left( \frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) \right)_{m_R} &= \left( \frac{\partial e^2}{\partial e_R^2} \right)_{m_R} \frac{\partial}{\partial e^2} \left[ e^2 d \left( \frac{L^2}{k^2}, e^2 \right) \right], \\ \left( m_R^2 \frac{\partial}{\partial m_R^2} e_R^2 d_R \left( \frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) \right)_{e_R} &= \left( m_R^2 \frac{\partial}{\partial m_R^2} \right)_{e_R} \frac{\partial}{\partial e^2} \left[ e^2 d \left( \frac{L^2}{k^2}, e^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

Исключая отсюда  $\partial/\partial e^2 (e^2 d)$ , мы и придем к уравнению (3.8.5). Оно называется уравнением Овсянникова — Келлена — Симанчика [15 — 17].

Функция  $\beta$  может быть, очевидно, выражена как через константу перенормировки  $Z$ , так и через фотонную функцию  $d_R$ :

$$\beta(e_R^2) = \frac{m_R^2 \frac{\partial}{\partial m_R^2} Z}{Z - e_R^2 \frac{\partial}{\partial e_R^2} Z} = \frac{-m_R^2 \frac{\partial}{\partial m_R^2} d_R \left( \frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right)}{\frac{\partial}{\partial e_R^2} \left[ e_R^2 d_R \left( \frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) \right]}. \quad (3.8.7)$$

Отсюда можно получить уравнение типа (3.8.5) для константы перенормировки  $Z$  (рассматриваемой как функция параметров  $e_R^2$  и  $L^2/m_R^2$ ):

$$\left[ m_R^2 \frac{\partial}{\partial m_R^2} + \beta(e_R^2) \left( e_R^2 \frac{\partial}{\partial e_R^2} - 1 \right) \right] Z \left( \frac{L^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) = 0. \quad (3.8.8)$$

Заметим, что так как  $e_R^2 d_R$  не зависит от  $L^2$ , то и функция  $\beta$  не зависит от граничного импульса  $L^2$ , а так как  $Z$  не зависит от  $k^2$ , то  $\beta$  не зависит и от  $k^2$ .

Общее решение уравнений (3.8.5) и (3.8.8) имеет, очевидно, следующий вид:

$$\begin{aligned} e_R^2 d_R \left( \frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) &= \Phi \left( \varphi(e_R^2) \frac{k^2}{m_R^2} \right), \\ \text{In } \varphi(e_R^2) &= \int_{e_R^2}^{\infty} \frac{dy}{y\beta(y)}, \quad |k^2| \gg m_R^2, \\ Z \left( \frac{L^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) &= e_R^2 C \left( \varphi(e_R^2) \frac{L^2}{m_R^2} \right), \end{aligned} \quad (3.8.9)$$

где  $\Phi$  и  $C$  — некоторые неизвестные функции одного аргумента.

Мы видим, что в области больших импульсов величина  $e_R^2 d_R \left( \frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right)$  является функцией не двух, а только одного аргумента  $\varphi(e_R^2) \frac{k^2}{m_R^2}$ . Отсюда можно получить важное следствие, касающееся эффективной плотности заряда в облаке электронно-позитронных пар, окружающих в вакууме какой-либо пробный заряд. Внешний потенциал  $A_\mu^{(e)}(x)$  и порождающий его ток  $J_\nu(x)$  связаны между собой в вакууме согласно (3.5.22) соотношением

$$A_\mu^{(e)}(x) = i \int G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') J_\nu(x') d^4x'. \quad (3.8.10)$$

В случае покоящегося пробного заряда  $J_v(x) = iQ\delta_{v4}\delta(\mathbf{r})$ , и, следовательно, потенциал, порождаемый зарядом  $Q$  в вакууме, имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = iQ \int_{-\infty}^{\infty} G_R^{(y)}(x) dt, \quad (3.8.11)$$

или

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{iQ}{(2\pi)^3} \int G_R^{(y)}(k) \Big|_{k_4=0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k, \quad (3.8.12)$$

откуда следует, что плотность заряда в облаке электронно-позитронных пар, окружающих пробный заряд, определяется формулой

$$\rho(\mathbf{r}) = -\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{iQ}{(2\pi)^3} \int d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k. \quad (3.8.13)$$

Мы видим, что функция  $d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right)$  имеет наглядный физический смысл: с точностью до постоянного множителя она представляет собой компоненту Фурье плотности заряда в облаке пар, окружающих «точечный» заряд  $Q$ . Иначе можно сказать, что  $d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right)$  представляет собой формфактор «точечного» заряда.

На очень малых расстояниях от пробного заряда ( $r \ll \frac{\hbar}{m_R c}$ ) в (3.8.13) можно подставить вместо функции  $d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right)$  ее асимптотическое представление (3.8.9)

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{iQ}{(2\pi)^3 e_R^2} \int \Phi\left(\Phi(e_R^2) \frac{k^2}{m_R^2}\right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k.$$

Сделав здесь замену переменной  $\sqrt{\Phi(e_R^2)} \frac{k}{m_R} = k'$  и вводя обозначение

$$f(\mathbf{r}) = \int \Phi(k'^2) e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} d^3k',$$

получим

$$\rho(\mathbf{r}) = f\left(r \frac{m_R}{\sqrt{\Phi(e_R^2)}}\right).$$

Эта формула показывает, что на расстояниях, меньших чем  $\hbar/m_R c$ , форма распределения заряда не зависит от постоянной связи  $e_R^2$ , которая входит лишь в масштабный множитель  $\Phi(e_R^2)$ .

Поведение функции  $\Phi(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  тесно связано с величиной заряда «голого» электрона или, как мы будем говорить, первичного заряда  $e$ . Если  $\Phi(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ , то сингулярность в центре распределения заряда будет более сильной, чем  $\delta$ -образная, и, следовательно, первичный заряд будет бесконечным,  $e = \infty$ . Если же при  $x \rightarrow \infty$  функция  $\Phi(x)$  стремится к конечному пре-

делу  $\Phi(x)$ , то и первичный заряд будет конечным, причем его величина, определяемая этим пределом, не будет зависеть от  $e_R$ .

Подчеркнем, что все эти выводы, так же как и соотношение (3.8.9), определяющее структуру фотонной функции Грина в области больших импульсов или малых расстояний, основаны только на свойстве перенормируемости и существовании у перенормированных матричных элементов конечных пределов при  $m \rightarrow 0$ .

Соотношения, аналогичные (3.8.9), могут быть получены также для перенормированных вершинных функций  $G_R^{(e)}$  и  $\Gamma_R$ . Для этого удобно предварительно выразить  $G_R^{(e)}(p)$  и  $\Gamma_R(p_1, p_2)$  через различные скалярные функции и величины типа  $\gamma_\mu p_\mu \equiv \hat{p}$ , которые можно построить с помощью 4-векторов  $p, p_1, p_2$ . Например,  $G_R^{(e)}(p)$  может быть представлена в виде

$$G_R^{(e)}(p) = \frac{s_1(p^2)\hat{p} + s_2(p^2)m_R}{p^2 + m_R^2},$$

где  $s_1(p^2)$  и  $s_2(p^2)$  — некоторые функции  $p^2$ , не имеющие полюсов при конечных значениях  $p^2$ . Аналогичное, но более сложное выражение может быть написано и для перенормированной вершинной функции. Скаляры  $s_1$  и  $s_2$  и аналогичные скаляры для вершинной функции зависят не только от 4-импульсов  $p$  и перенормированного заряда  $e_R$ , но еще и от так называемой «массы фотона»  $\lambda$ , вводимой для устранения инфракрасной расходимости, возникающей в результате регуляризации функций (подробно вопрос о «массе» фотона обсуждается в § 4.4). Таким образом, скалярные функции, входящие в  $G_R^{(e)}(p)$ , зависят от трех переменных  $p^2/m_R^2, e_R^2$  и  $\lambda^2/m_R^2$ , а скалярные функции  $\gamma^{(i)}$ , входящие в  $\Gamma_R(p_1, p_2)$  — от пяти переменных  $p_1^2/m_R^2, p_2^2/m_R^2, p_1 p_2/m_R^2, e_R^2$  и  $\lambda^2/m_R^2$ .

Упрощения наступают в области больших импульсов. Поступая так же, как и при выводе (3.8.9), можно показать, что в области больших импульсов функции  $s_i$  имеют следующую структуру:

$$s_i\left(\frac{p^2}{m_R^2}, e_R^2, \frac{\lambda^2}{m_R^2}\right) = r\left(\frac{\lambda^2}{m_R^2}, e_R^2\right) H_i\left(\Phi(e_R^2) \frac{p^2}{m_R^2}\right) B_i(e_R^2), \quad (3.8.14)$$

где  $\Phi(e_R^2)$  — та же функция, которая входит в (3.8.9),  $H_i, B_i$  и  $r$  — некоторые функции одного и двух аргументов. Эти соотношения, так же как и соотношение (3.8.9), основываются на свойстве перенормируемости и существовании конечного предела у матричных элементов при  $m \rightarrow 0$ .

Из перенормируемости вытекает также существование некоторой группы преобразований, по отношению к которым инвариантны матричные элементы. Именно, если обозначить перенормированный заряд и перенормированные функции Грина и вершинную функцию соответственно через  $e_1, G_1^{(e)}, G_1^{(\gamma)}, \Gamma_1$  и перейти от этих величин

к величинам  $e_2$ ,  $G_2^{(e)}$ ,  $G_2^{(\nu)}$ ,  $\Gamma_2$ , связанным с  $e_1$ ,  $G_1^{(e)}$ ,  $G_1^{(\nu)}$ ,  $\Gamma_1$  соотношениями

$$e_2 = Z^{1/2} e_1, \quad G_2^{(e)} = Z_1^{-1} G_1^{(e)}, \quad G_2^{(\nu)} = Z^{-1} G_1^{(\nu)}, \quad \Gamma_2 = Z_1 \Gamma_1, \quad (3.8.15)$$

где  $Z$  и  $Z_1$  — произвольные величины, то матричные элементы  $\mathfrak{M}$ , вычисленные с помощью первой и второй систем величин, будут одинаковы:  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$ . Такие преобразования образуют, очевидно, группу, которая носит название ренормализационной группы [18]. Изучение ренормализационной группы также позволяет выяснить асимптотические свойства функций Грина [19, 20].

**3.8.2. Асимптотические выражения для функций Грина.** До сих пор мы конкретно не пользовались теорией возмущений (если не считать того обстоятельства, что в самой перенормируемости мы убеждались из анализа структуры элементов  $S$ -матрицы). Теперь же мы предположим, что функция  $d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right)$  разложима в ряд по степеням перенормированного заряда электрона

$$d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e_R^{2n} d_n(z), \quad (3.8.16)$$

где  $d_0(z) = 1$  и вместо  $k$  введена новая переменная  $z = \ln(k^2/m_R^2)$ .

Выясним, какой вид имеет этот ряд в асимптотической области больших импульсов  $z \gg 1$ . Подставим для этого разложение (3.8.16) во вторую из формул (3.8.7):

$$\beta(e_R^2) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e_R^{2n} d'_n(z)}{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{2n} d_n(z)}. \quad (3.8.17)$$

Величина  $\beta(e_R^2)$  не должна зависеть от  $z$  при больших  $z$ . Легко видеть, что это будет иметь место, если

$$d_n(z) = (az)^n + O(z^{n-1}), \quad (3.8.18)$$

где  $a$  — константа; при этом  $\beta(e_R^2) = ae_R^2$ . Выражение (3.8.18) показывает, что параметром разложения (3.8.16) при  $z \gg 1$  является в действительности не  $e_R^2$ , а  $e_R^2 z$ , т. е. величина  $e_R^2 \ln(k^2/m_R^2)$ . Аналогичная ситуация имеет место и в разложениях других величин в области больших импульсов.

Подставляя (3.8.18) в (3.8.16), мы получим для  $d_R(k^2/m_R^2, e_R^2)$  ряд вида геометрической прогрессии. Если  $ae_R^2 \ln(k^2/m_R^2) < 1$ , то этот ряд сходится, и его сумма равна

$$d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right) = \frac{1}{1 - ae_R^2 \ln(k^2/m_R^2)}.$$

Чтобы найти входящую сюда численную константу  $a$ , достаточно найти фотонную функцию Грина во втором приближении теории возмущений. Эта задача будет решена в п. 5.1.2, где мы покажем, что  $a = 1/12\pi^2$ . Поэтому окончательно  $d_R$  имеет вид [14]

$$d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right) = \left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{k^2}{m_R^2}\right)^{-1}. \quad (3.8.19)$$

Это асимптотическое выражение для  $d_R$  справедливо при выполнении двух условий

$$\frac{k^2}{m_R^2} \gg 1, \quad \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{k^2}{m_R^2} < 1. \quad (3.8.20)$$

Мы считали, что  $d_n \sim z^n$  и, соответственно,  $\beta = e_R^2 a$ . В действительности  $d_n$  содержит члены  $\sim z^{n-1}$ ,  $z^{n-2}$ , ..., а  $\beta$  — члены  $\sim e_R$ ,  $e_R^2$ , .... Поправки к  $d_n \sim z^{n-1}$  и, соответственно, поправки к  $\beta \sim e_R$  приводят к следующему выражению для функции  $d_R$  [20]:

$$d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right) = \left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{k^2}{m_R^2}\right)^{-1} \left[1 - \frac{\frac{5}{36} + \frac{3}{16} \ln\left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{k^2}{m_R^2}\right)}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{k^2}{m_R^2}}\right]. \quad (3.8.21)$$

Аналогичным образом, повторяя рассуждения, приводящие к (3.8.19), можно получить следующий результат для константы перенормировки  $Z$ :

$$Z\left(\frac{L^2}{m_R^2}, e_R^2\right) = 1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{m_R^2}, \quad (3.8.22)$$

причем

$$\frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{m_R^2} < 1.$$

На основании соотношения (3.8.22) мы можем найти теперь связь между перенормированным и неперенормированным зарядами

$$e^2 = e_R^2 \left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{m_R^2}\right)^{-1}, \quad e_R^2 = e^2 \left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{m_R^2}\right)^{-1}. \quad (3.8.23)$$

Мы видим, что  $e^2 > e_R^2$ . Это неравенство имеет простой физический смысл. Заряд реального электрона меньше заряда «голого» электрона, так как последний окружен облаком электронно-позитронных пар, экранирующих первичный заряд  $e$ ; внешний же наблюдатель воспринимает действие экранированного заряда.

В п. 3.8.1 мы показали, что  $d_R(k^2/m_R^2, e_R^2)$  представляет собой формфактор «точечного» заряда, т. е. фурье-образ пространственного распределения заряда «точечного» электрона. Согласно (3.8.19) этот формфактор превосходит единицу при  $|\mathbf{k}| > m_R$ , т. е. на

расстояниях от «центра» электрона, меньших  $\hbar/mc$ . С уменьшением расстояния формфактор увеличивается. На расстояниях порядка  $\hbar/mc$  формфактор практически не отличается от единицы, иными словами, на этих и больших расстояниях уже не чувствуется экранирование первичного заряда.

С учетом более высоких приближений можно получить следующее выражение для  $Z$ :

$$Z\left(\frac{L^2}{m_R^2}, e_R^2\right) = 1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{m_R^2} + \frac{3e_R^2}{16\pi^2} \ln \left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{m_R^2}\right) + \frac{e_R^2}{72\pi^2}. \quad (3.8.24)$$

Выясним теперь, как ведет себя в области больших импульсов электронная функция Грина. Согласно (3.8.14) зависимость  $s_i\left(\frac{p^2}{m_R^2}, e_R^2, \frac{\lambda^2}{m_R^2}\right)$  от  $p^2$  при  $p^2 \gg m_R^2$  определяется функцией одного аргумента  $H_i\left(\varphi\left(e_R^2\right) \frac{p^2}{m_R^2}\right)$ . Предполагая, что функция  $s_i\left(\frac{p^2}{m_R^2}, e_R^2, \frac{\lambda^2}{m_R^2}\right)$  разложима в ряд по степеням  $e_R^2$ , и поступая так же, как и при выводе (3.8.19), можно показать [21], что

$$\begin{aligned} H_1\left(\varphi\left(e_R^2\right) \frac{p^2}{m_R^2}\right) B_1\left(e_R^2\right) &= 1 - c_1 \frac{e_R^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{p^2}{m_R^2}\right)^{-1}, \\ H_2\left(\varphi\left(e_R^2\right) \frac{p^2}{m_R^2}\right) B_2\left(e_R^2\right) &= \\ &= \left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{p^2}{m_R^2}\right)^{9/4} \left[1 + \frac{\frac{27}{64} \frac{e_R^2}{\pi^2} \ln \left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{p^2}{m_R^2}\right) + c_2 \frac{e_R^2}{\pi^2}}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{p^2}{m_R^2}}\right], \end{aligned} \quad (3.8.25)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые численные константы, которые могут быть найдены из сравнения (3.8.25) с результатом вычисления во втором приближении теории возмущений:  $c_1 = 21/2^7$ ,  $c_2 = 59/2^6$ .

В отличие от фотонной и электронной функций Грина, вершинная функция в области больших импульсов зависит, как можно показать, не от одного, а от трех аргументов  $\varphi\left(e_R^2\right) \frac{p_1^2}{m_R^2}$ ,  $\varphi\left(e_R^2\right) \frac{p_2^2}{m_R^2}$ ,  $\varphi\left(e_R^2\right) \frac{p_1 p_2}{m_R^2}$ . Поэтому, не делая определенных предположений об этих инвариантах, из одного только предположения о разложимости функций  $\gamma^{(i)}$  в ряд по степеням  $e_R^2$ , нельзя получить соотношений, аналогичных (3.8.19) и (3.8.25). В дальнейшем (п. 5.1.3) мы еще вернемся к вопросу об асимптотике вершинной функции.

**3.8.3. Асимптотический характер регуляризованных разложений матрицы рассеяния и проблема замкнутости квантовой электродинамики.** Изложенный в § 3.7 метод регуляризации устраняет расходимости в отдельных матричных элементах, т. е. в отдельных членах разложения матрицы рассеяния в ряд по степеням заряда

электрона, а не сразу во всей матрице рассеяния. Возникает поэтому вопрос, будет ли сходящимся полученный таким образом ряд теории возмущений, состоящий из регуляризованных слагаемых.

Можно высказать соображения, указывающие на расходимость этого ряда, который является, по-видимому, асимптотическим. Эти соображения заключаются в следующем [22].

Взаимодействие между двумя электронами, не связанное с процессами излучения и поглощения фотонов, определяется функцией  $e_R^2 D_c(x)$ . Вычислив с помощью этой функции некоторую физическую величину  $F(p; e_R^2)$ , мы получим бесконечный ряд по степеням  $e_R^2$

$$F(p; e_R^2) = \sum_{n=0}^{\infty} e_R^{2n} f_n(p), \quad (3.8.26)$$

где  $f_n(p)$  — некоторые функции 4-импульсов частиц. Допустим, что этот ряд, отдельные члены которого регуляризованы, согласно методу § 3.7 сходится при некотором значении  $e_R^2$ . Тогда  $F(p; e_R^2) \equiv F(e_R^2)$  будет аналитической функцией  $e_R^2$  при  $e_R^2 \sim 0$ , а следовательно, и  $F(-e_R^2)$  при достаточно малых значениях заряда также будет аналитической функцией, представимой в виде степенного ряда. Но  $F(-e_R^2)$  допускает простую физическую интерпретацию. Именно,  $F(-e_R^2)$  представляла бы собой изучаемую нами величину  $F$  в том случае, если бы взаимодействие двух зарядов определялось функцией  $-e_R^2 D_c(x)$ , а не  $e_R^2 D_c(x)$ , иными словами, если бы одноименные заряды притягивались, а не отталкивались.

Легко видеть, что при этом обычное определение вакуума не соответствует состоянию с наименьшей энергией. Действительно, представим себе, что образовано  $N$  электронно-позитронных пар и что все электроны сосредоточены в одной области пространства, а позитроны — в другой. Если эти области достаточно малы и достаточно отдалены друг от друга, то при большом  $N$  отрицательная кулоновская энергия притягивающихся одноименных зарядов будет больше энергии покоя частиц и их кинетической энергии. Назовем такие состояния «патологическими».

Предполагая, что взаимодействие между зарядами определяется функцией  $-e_R^2 D_c(x)$ , рассмотрим некоторое обычное состояние, характеризующееся наличием нескольких частиц. Это состояние отделено потенциальным барьером от «патологического» состояния с такой же энергией, причем высота барьера определяется энергией, необходимой для создания  $N$  пар, т. е. энергией покоя  $2N$  частиц.

В силу туннельного эффекта существует конечная вероятность перехода из обычного в «патологическое» состояние. Это значит, что каждое физическое состояние является неустойчивым по отношению к спонтанному рождению большого числа частиц.

«Патологическое» состояние, в которое перейдет система, не будет стационарным, так как в нем будет образовываться все большее и большее число частиц, т. е. будет происходить как бы дезинтеграция вакуума. В силу этих эффектов нельзя предполагать, чтобы квантовая электродинамика с функцией взаимодействия  $-e\hat{k}D_c(x)$  приводила к вполне определенным аналитическим функциям. Скорее следует считать, что функция  $F(-e\hat{k})$  не может быть аналитической и что поэтому ряд (3.8.26) не сходится при  $e\hat{k} \neq 0$ .

В связи с этим возникает естественный вопрос — какой же смысл имеет ряд (3.8.26) и почему квантовая электродинамика, оперирующая с такими рядами, находится в соответствии с экспериментальными данными? Ответ на этот вопрос заключается в том, что ряд (3.8.26) является асимптотическим рядом. Как известно, такие ряды в некоторых условиях могут быть использованы для описания поведения функций, которые они представляют, с очень большой, но всегда конечной точностью. В отличие от сходящихся рядов члены асимптотического ряда  $e\hat{k}^{2n} f_n(\rho)$  сначала с ростом номера  $n$  падают, а затем, начиная с некоторого значения  $n$ , которое мы обозначим через  $n_0$ , начинают расти и, вообще говоря, расти неограниченно. При этом максимальная точность, с которой асимптотический ряд может аппроксимировать функцию  $F$ , определяется величиной  $f_{n_0}$ . Чем величина  $f_{n_0}$  меньше, тем точность больше. В случае квантовой электродинамики есть основания предполагать, что в ряде (3.8.26) величины  $f_n$  будут падать вплоть до  $n$  порядка  $n_0 \approx \hbar c/e\hat{k} = 137$ . Так как это значение  $n_0$  велико, то точность, с которой в квантовой электродинамике ряд (3.8.26) должен соответствовать реальности, очень велика. По всей вероятности, неточность ряда (3.8.26) порядка  $\exp(-\hbar c/e\hat{k})$ , что является ничтожно малой величиной. Для практических целей квантовой электродинамики такая точность более чем достаточна. Для устранения расходимостей в матрице рассеяния мы вводили граничный импульс  $L$  и предполагали, что область импульсов  $p > L$  не играет роли, если изменения импульсов реальных частиц малы по сравнению с  $L$ . Получаемые при этом выводы и предсказания квантовой электродинамики находятся в прекрасном согласии с экспериментальными данными.

Однако ясно, что строгий смысл имеет лишь предельный случай  $L \rightarrow \infty$ , который не может быть рассмотрен в рамках квантовой электродинамики.

## § 4.1. Излучение фотона

4.1.1. Амплитуда излучения. Приступим теперь к последовательному изучению различных конкретных процессов, обусловленных электромагнитным взаимодействием. Мы будем пользоваться теорией возмущений, причем в этой главе будем производить вычисления только в первом, приводящем к отличному от нуля результату, приближении (поправки, связанные с высшими приближениями, будут рассмотрены в главе 5).

Начнем с процессов 1-го порядка, которые описываются матрицей рассеяния 1-го порядка

$$S^{(1)} = i \int j_{\mu}(x) A_{\mu}(x) d^4x. \quad (4.1.1)$$

Если  $A_{\mu}(x)$  — потенциал внешнего электромагнитного поля, то матричные элементы  $S^{(1)}$  будут определять рассеяние электрона в этом поле в борновском приближении. Если же  $A_{\mu}(x)$  — оператор квантованного электромагнитного поля, то матричные элементы  $S^{(1)}$  будут определять испускание и поглощение фотона, так как оператор  $A_{\mu}(x)$  входит в  $S^{(1)}$  линейно, а матричные элементы  $A_{\mu}$ , отличные от нуля, соответствуют излучению и поглощению фотона.

Нетрудно однако убедиться в том, что свободный электрон не может излучать. Действительно, матричный элемент  $S^{(1)}$  отличен от нуля только при условии выполнения законов сохранения энергии и импульса  $p_1 - k = p_2$ , где  $p_1, p_2$  — начальный и конечный 4-импульсы электрона, а  $k$  — 4-импульс фотона. Возводя это равенство в квадрат и учитывая, что  $p_1^2 = p_2^2 = -m^2$ ,  $k^2 = 0$ , мы приходим к соотношению  $p_1 k = 0$ , или в системе покоя электрона  $m\omega = 0$ , где  $\omega$  — энергия фотона.

Аналогично, легко убедиться в том, что свободный электрон не может поглотить фотон и что невозможно превращение пары электрон — позитрон в один фотон или обратное превращение. Более того, электрон не может излучить два или большее число фотонов. Излучение или поглощение фотона электроном может произойти лишь в результате «тройного столкновения», в котором существенную роль играет взаимодействие электрона с «третьим телом». В ряде важных случаев это взаимодействие может быть

описано с помощью понятия внешнего поля, входящего в гамильтониан электрона. Оператор электронно-позитронного поля может быть разложен, как мы знаем, по собственным функциям этого гамильтониана (см. (2.5.1)), и понятие состояния электрона при этом уже само по себе учитывает взаимодействие электрона с другими телами. При таком подходе становится возможным изучение процессов излучения и поглощения фотона с помощью матрицы рассеяния первого порядка.

Переходя теперь к определению вероятности испускания и поглощения фотона электроном в стационарном внешнем поле, выпишем общее выражение для матричного элемента  $\langle f | S^{(1)} | i \rangle$ , определяющего излучение фотона. Пусть  $\psi_1(x) = \psi_1(\mathbf{r}) e^{-ie_1 t}$  и  $\psi_2(x) = \psi_2(\mathbf{r}) e^{-ie_2 t}$  — волновые функции начального и конечного состояний,  $\mathcal{A}_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$  — потенциал электромагнитного поля, соответствующий определенному состоянию фотона:  $\langle 1 | A_\mu(x) | 0 \rangle = \mathcal{A}_\mu^*(x)$ , и  $j_\mu(x)$  — ток перехода

$$j_\mu(x) = j_\mu(\mathbf{r}) e^{i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)t} = \langle 2 | j_\mu(x) | 1 \rangle = ie \bar{\psi}_2(x) \gamma_\mu \psi_1(x). \quad (4.1.2)$$

Тогда матричный элемент оператора  $S^{(1)}$  может быть представлен в виде

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = 2\pi i U \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega), \quad U = \int j_\mu(\mathbf{r}) \mathcal{A}_\mu^*(\mathbf{r}) d^3x. \quad (4.1.3)$$

Величину  $U$  мы будем называть амплитудой излучения.

Если рассматривается излучение фотона с определенным импульсом  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $\mathbf{e}$ , то амплитуда излучения имеет вид

$$U = \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int \psi_2^*(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} e^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_1(\mathbf{r}) d^3x, \quad (4.1.4)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}$  — матрица Дирака.

#### 4.1.2. Излучение электрического и магнитного мультиполей.

Если начальное и конечное состояния электрона являются связанными и при этом длина волны испускаемого фотона  $\lambda$  велика по сравнению с размерами области  $a$ , в которой происходит движение электрона, то вероятность излучения простым образом связана с электрическим или магнитным мультипольным моментом электрона; поэтому излучение в этом случае называется мультипольным излучением.

Определим вероятность излучения фотона, обладающего определенным моментом количества движения  $L$ , проекцией момента  $M$  и четностью  $P = (-1)^{L+\lambda+1}$  ( $\lambda = 0, 1$ ; напомним, что  $\lambda = 1$  соответствует состояниям электрического типа, а  $\lambda = 0$  — состояниям магнитного типа). Поэтому переходы с испусканием такого фотона при  $\lambda = 1$  называются электрическими  $2^L$ -польными или  $EL$ -переходами, а при  $\lambda = 0$  — магнитными  $2^L$ -польными или  $ML$ -переходами.

Начнем с рассмотрения излучения фотона электрического типа. Потенциал, соответствующий фотону в состоянии электрического типа, определяется формулой (2.2.33). Так как размеры

системы предполагаются малыми по сравнению с длиной волны, то в интеграле (4.1.4) главную роль играет область малых  $r$ , для которых  $\omega r \ll 1$ . Поэтому можно ограничиться первым членом в разложении входящей в выражение для потенциала функции  $g_L(\omega r)$  по степеням  $\omega r$ .

Выберем калибровку потенциалов в виде (2.2.33), тогда скалярный потенциал  $\Phi(r)$  будет содержать  $\omega r$  в степени  $L$ , а векторный  $A(r)$  — в степени  $L+1$ , т. е.  $A(r)$  будет малым по сравнению с  $\Phi(r)$ . Таким образом, мы можем подставить в (4.1.3)

$$A(r) = 0, \quad \Phi(r) = -\sqrt{\frac{L+1}{L}} \frac{(i\omega r)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{\omega}{R}} Y_{LM}(n), \quad n = \frac{r}{R}, \quad (4.1.5)$$

что дает

$$U = (-i)^L \sqrt{\frac{L+1}{LR}} \frac{\omega^{L+1/2}}{(2L+1)!!} \int \rho(r) r^L Y_{LM}^*(n) d^3x, \quad (4.1.6)$$

где  $\rho(r)$  — плотность заряда перехода,  $\rho(r) = e\psi_2^*(r)\psi_1(r)$ .

Вводя электрический мультипольный момент перехода

$$Q_{LM}^e = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \int \rho(r) r^L Y_{LM}^*(n) d^3x, \quad (4.1.7)$$

представим амплитуду излучения в виде

$$U = \frac{(-i)^L}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{L+1}{L}} \frac{\sqrt{2L+1}}{(2L+1)!!} \omega^{L+1/2} Q_{LM}^e, \quad (4.1.8)$$

где  $R$  — радиус нормировочной сферы. При  $M=0$

$$Q_{L0}^e = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(r) r^L P_L(\cos\vartheta) d^3x,$$

где  $P_L$  — полином Лежандра. Если  $L=1, 2$ , то

$$Q_{10}^e = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(r) z d^3x, \quad Q_{20}^e = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{1}{2} \rho(r) (3z^2 - r^2) d^3x.$$

Эти формулы совпадают с обычными определениями дипольного и квадрупольного моментов.

Найдем вероятность излучения  $\omega$ . Для этого (см. п. 3.4.1) надо умножить  $|U|^2$  на  $2\pi\rho_f d\omega$ , где  $\rho_f$  — число состояний фотона с данным моментом в единичном интервале энергии:  $\rho_f = R/\pi$ . Таким образом,

$$\omega = 2\pi |U|^2 \frac{R}{\pi}. \quad (4.1.9)$$

Подставив сюда выражение (4.1.8) для  $U$ , найдем вероятность излучения в единицу времени фотона с моментом  $L$ , проекцией момента  $M$  и четностью  $(-1)^L$ :

$$\omega_{LM}^e = \frac{2(L+1)(2L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \omega^{2L+1} |Q_{LM}^e|^2. \quad (4.1.10)$$

В частности, при  $L=1, 2$  мы получим отсюда формулы для вероятности дипольного и квадрупольного излучения

$$\omega_{1M}^e = \frac{4}{3} \omega^3 |Q_{1M}^e|^2, \quad \omega_{2M}^e = \frac{1}{15} \omega^5 |Q_{2M}^e|^2.$$

Определим теперь вероятность излучения фотона в состоянии магнитного типа. Потенциалы определяются в этом случае формулой (2.2.31). Если использовать приближенное выражение для  $g_L(\omega r)$  и выражение (2.2.20) для шарового вектора, то потенциал  $A(\mathbf{r})$  примет вид

$$A(\mathbf{r}) = \frac{[i^{L+1} \omega^{L+1/2} r^L [\nabla Y(\mathbf{n}) \mathbf{r}]]}{\sqrt{R} \sqrt{L(L+1)} (2L+1)!!}. \quad (4.1.11)$$

Подставив это выражение в (4.1.3), получим амплитуду излучения

$$U = \frac{(-i)^{L+1}}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{L+1}{L} \frac{\sqrt{2L+1}}{(2L+1)!!}} Q_{LM}^m, \quad (4.1.12)$$

где

$$Q_{LM}^m = \frac{1}{(L+1) \sqrt{2L+1}} \int [r \mathbf{j}(\mathbf{r})] r^L \nabla Y_{LM}^*(\mathbf{n}) d^3x.$$

Величину  $Q^m$  мы будем называть магнитным мультипольным моментом перехода.

Заметим, что амплитуда (4.1.12) имеет такую же форму, как и амплитуда (4.1.8), отличаясь заменой  $Q_{LM}^e \rightarrow -iQ_{LM}^m$ .

При  $L=1, M=0$  момент перехода (магнитный дипольный) имеет вид

$$Q_{10}^m = \int \mu_z(\mathbf{r}) d^3x, \quad \mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{r} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{\sqrt{4\pi}} \right],$$

где величина  $\mu(\mathbf{r})$  представляет собой плотность «магнитного момента перехода».

Вероятность излучения фотона магнитного типа будет выражаться аналогично (4.1.10):

$$\omega_{LM}^m = \frac{2(L+1)(2L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \omega^{2L+1} |Q_{LM}^m|^2. \quad (4.1.13)$$

Для электрона, движущегося в атоме, условие  $\lambda \gg a$  эквивалентно условию  $v \ll 1$ , так как  $\omega a \sim v$ . Поэтому при вычислении матричных элементов мультипольных моментов можно пользоваться волновыми функциями нерелятивистского приближения. Это позволяет получить простое выражение для магнитного мультипольного момента. Действительно, записав плотность тока перехода в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = e (\varphi_2^*(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \chi_1(\mathbf{r}) + \chi_2^*(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \varphi_1(\mathbf{r})),$$

где  $\varphi$  и  $\chi$  — спиноры, образующие волновую функцию  $\psi$ , получим

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{-ie}{2m} (\varphi_2^*(\mathbf{r}) \nabla \varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_1(\mathbf{r}) \nabla \varphi_2^*(\mathbf{r})) + \text{rot} (\varphi_2^*(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \varphi_1(\mathbf{r})).$$

Подставляя это выражение в (4.1.12) и интегрируя по частям, найдем

$$Q_{LM}^m = \int \varphi_2^*(\mathbf{r}) \mathfrak{M}_{\varphi_1}(\mathbf{r}) d^3x,$$

$$\mathfrak{M} = \frac{e}{m\sqrt{2L+1}} \nabla (r^L Y_{LM}^*(\mathbf{n})) \left( \frac{\mathbf{L}}{L+1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \quad (4.1.14)$$

( $\mathbf{L}$  — оператор орбитального момента).

Таким образом, магнитный мультипольный момент в нерелятивистском приближении состоит из двух слагаемых: орбитального и спинового. Если  $L=1$ ,  $M=0$ , то

$$\mathfrak{M} = \frac{e}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{2m} (L_z + \sigma_z).$$

**4.1.3. Излучение ядер. Правила отбора.** Полученные формулы для амплитуд и вероятностей излучения пригодны для описания излучения произвольной системой, а не только электроном, если только выполняется условие  $a \ll \lambda$ . Действительно, общие определения мультипольных моментов (4.1.7), (4.1.14) содержат лишь токи перехода, т. е. матричные элементы оператора 4-вектора плотности тока:  $j_\mu(\mathbf{r}) = \langle 2 | j_\mu(\mathbf{r}) | 1 \rangle$ , состояниями же 1 и 2 могут быть не только одноэлектронные состояния, но и состояния многоэлектронных систем, а также адронных систем: ядер и элементарных частиц.

В общем случае, конечно, невозможно реально вычислить матричные элементы мультипольных моментов, но определяющие их формулы позволяют сделать грубую оценку:

$$Q_{LM}^e \sim ea^L, \quad Q_{LM}^m \sim eva^L, \quad (4.1.15)$$

где  $a$  — размеры системы, а  $v$  — скорость излучающих частиц. Для атомных систем  $\omega a \sim v$ , и поэтому вероятность  $ML$ -перехода имеет тот же порядок величины, что и вероятность  $EL'$ -перехода при  $L' = L + 1$ . Для ядерных систем  $v$  не находится в определенной связи с  $\omega a$ .

Для того чтобы матричный элемент соответствующего мультипольного момента был отличен от нуля, необходимо выполнение некоторых условий, вытекающих из законов сохранения момента и четности. Эти условия называются правилами отбора и сводятся к следующему. Если  $j_1$  и  $j_2$  — моменты количества движения излучающей системы и  $m_1$  и  $m_2$  — проекции моментов в начальном и конечном состояниях, то должны выполняться соотношения

$$m_1 - m_2 = M, \quad |j_1 - j_2| \leq L \leq |j_1 + j_2|, \quad (4.1.16)$$

где  $L$  — момент количества движения фотона и  $M$  — его проекция. Кроме того, должно выполняться условие

$$P = P_1 \cdot P_2, \quad (4.1.17)$$

где  $P_1$  и  $P_2$  — четности начального и конечного состояний электрона и  $P$  — четность состояния фотона:

$$P = (-1)^{L+\lambda+1}$$

( $\lambda=0$  соответствует состояниям магнитного и  $\lambda=1$  — состояниям электрического типа).

Если соотношения (4.1.16) и (4.1.17) не выполняются, то матричный элемент соответствующего мультипольного момента обращается в нуль.

Легко видеть, что при заданных  $j_1$  и  $j_2$  с наибольшей вероятностью излучается фотон с моментом  $L = |j_1 - j_2|$ , если только это совместимо с правилом отбора для четности (4.1.17). Действительно, так как матричные элементы  $Q_{LM}$  содержат под знаком интеграла  $(\omega r)^L$ , причем  $\omega r \ll 1$ , то наибольшее значение  $Q_{LM}$  будет соответствовать наименьшему возможному значению  $L$ , равному  $|j_1 - j_2|$ .

Вероятность излучения  $w_{2L+1}$  содержит, согласно (4.1.10) и (4.1.14), множитель  $(\omega a)^{2L+1}$ . Поэтому, если разность моментов начального и конечного состояний  $|j_1 - j_2|$  велика, то вероятность излучения может оказаться очень малой, а продолжительность пребывания излучающей системы в возбужденном состоянии — большой. Такие долгоживущие возбужденные состояния называются метастабильными.

Оценки мультипольных моментов ядер, согласно (4.1.15), приводят к правильному порядку величины времени жизни метастабильных состояний ядер, которое при  $L=3-5$  может быть порядка нескольких минут, часов и более.

**4.1.4. Фотоэффект.** Матрица рассеяния 1-го порядка (4.1.1) определяет также поглощение фотона. Амплитуда поглощения имеет вид, отличающийся от (4.1.3) только заменой  $\mathcal{A}_\mu^*(\mathbf{r})$  на  $\mathcal{A}_\mu(\mathbf{r})$ .

Рассмотрим поглощение фотона атомным электроном в том случае, когда энергия фотона превосходит энергию ионизации атома и электрон переходит в непрерывный спектр. Это явление называется фотоэффектом. Ток перехода в этом случае определяется формулой

$$j_\mu(\mathbf{r}) = ie\bar{\psi}_2(\mathbf{r}) \gamma_\mu \psi_1(\mathbf{r}),$$

где  $\psi_1(\mathbf{r})$  и  $\psi_2(\mathbf{r})$  — начальная и конечная волновые функции электрона. Записав амплитуду  $U$  фотоэффекта в виде (4.1.4)

$$U = \frac{e}{\sqrt{2\omega}} M, \quad M = \int \psi_2^*(\mathbf{r}) a e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \psi_1(\mathbf{r}) d^3x, \quad (4.1.18)$$

получим следующее выражение для дифференциального эффективного сечения фотоэффекта:

$$d\sigma = \frac{e^2}{(2\pi)^2 \omega} \sum_{\mu_i, \mu_f} |M|^2 \delta(\varepsilon_1 + \omega - \varepsilon_2) d^3p, \quad (4.1.19)$$

где  $p$  — импульс вылетающего электрона,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — энергии электрона в начальном и конечном состояниях и суммирование производится по различным ориентациям спина электрона в начальном и конечном состояниях.

Ограничимся здесь вычислением сечения фотоэффекта на  $K$ -оболочке атома (формула (4.1.19) написана с учетом двух электронов в  $K$ -оболочке).

Начнем с нерелятивистского случая, когда энергия фотона мало отличается от энергии ионизации атома  $I$  [1]. Предполагая, что длина волны фотона  $\lambda$  значительно больше размеров атома  $a$ , мы можем заменить в (4.1.18) величину  $e^{ihr}$  единицей. Замечая далее, что в нерелятивистской области матрице  $\alpha$  соответствует оператор скорости электрона  $\mathbf{v}$ , получим

$$M = e \langle 2 | \mathbf{v} | 1 \rangle = -i\omega e \langle 2 | \mathbf{r} | 1 \rangle, \quad (4.1.20)$$

$$\langle 2 | \mathbf{r} | 1 \rangle = \int \psi_2^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi_1(\mathbf{r}) d^3x.$$

Таким образом, вопрос сводится к вычислению матричного элемента проекции радиуса-вектора электрона на вектор поляризации фотона.

В качестве волновой функции начального состояния в (4.1.18) входит волновая функция  $K$ -электрона. Эта функция имеет вид

$$\psi_1(\mathbf{r}) = N e^{-\eta r}, \quad \eta = \frac{Z}{a_0}, \quad a_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{me^2} = \frac{1}{m\alpha}, \quad N = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}}.$$

Что касается волновой функции конечного состояния, то в качестве нее следует взять волновую функцию электрона в кулоновском поле ядра, относящуюся к непрерывному спектру. Так как в конечном состоянии возникает электрон, то  $\psi_2(\mathbf{r})$  должна при  $r \rightarrow \infty$  иметь вид суперпозиции плоской и сходящейся сферической волн (см. п. 4.3.8). Функция с такой асимптотикой имеет вид

$$\psi_2(\mathbf{r}) = e^{\frac{\pi}{2}\zeta} \Gamma(1 + i\zeta) \mathcal{F}(-i\zeta, 1, -i(\mathbf{p}\mathbf{r} + \mathbf{p}\mathbf{r})) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad \zeta = \frac{\alpha Z}{v}.$$

Подстановка функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в (4.1.20) дает

$$M = i\omega e M,$$

$$M = e^{\frac{\pi}{2}\zeta} \Gamma(1 - i\zeta) N \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r} - \eta r} \mathbf{r} \mathcal{F}(i\zeta, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + \mathbf{p}\mathbf{r})) d^3x \equiv$$

$$\equiv e^{\frac{\pi}{2}\zeta} \Gamma(1 - i\zeta) N J.$$

Замечая, что

$$J = \left\{ i \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial \eta} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\mathbf{p}\mathbf{r} - \eta r} \mathcal{F}(i\zeta, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + \mathbf{p}\mathbf{r})) \frac{d^3x}{r} \right\}_{q=0},$$

и используя формулу

$$\int e^{i(q-p)r - nr} \mathcal{F}(i\zeta, 1, i(pr + pr)) \frac{d^3x}{r} = \\ = 2\pi \left[ \frac{1}{2} (q-p)^2 + \frac{1}{2} \eta^2 \right]^{i\zeta-1} \left[ \frac{1}{2} (q-p)^2 + \frac{1}{2} \eta^2 + p(q-p) - i\eta p \right]^{-i\zeta},$$

получим

$$J = 16\pi i \eta (i\zeta - 1) \frac{p}{(p^2 + \eta^2)^3} \left( \frac{\eta + ip}{\eta - ip} \right)^{i\zeta} = 16\pi i \frac{p}{\rho^6} \frac{\zeta (i\zeta - 1)}{(\zeta^2 + 1)^3} e^{-2\zeta \operatorname{arccctg} \zeta}$$

и

$$M = -16 \sqrt{\pi} \omega e^{\frac{\pi}{2}\zeta} \Gamma(1 - i\zeta) \frac{\zeta^{5/2} p^{3/2} (i\zeta - 1)}{(\zeta^2 + 1)^3} e^{-2\zeta \operatorname{arccctg} \zeta} \frac{ep}{\rho^5}. \quad (4.1.21)$$

Подставляя это выражение в (4.1.19), найдем дифференциальное сечение фотоэффекта для неполяризованного фотона:

$$d\sigma = \frac{2^7 \alpha \omega}{\zeta^4} \left( \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} \right)^5 \frac{e^{-4\zeta \operatorname{arccctg} \zeta}}{1 - e^{-2\pi\zeta}} \frac{1}{2} \sum (\mathbf{pe})^2 \delta(\varepsilon_1 + \omega - \varepsilon_2) \frac{d^3p}{p^2},$$

где суммирование производится по поляризациям фотона. Оно может быть выполнено с помощью формулы

$$\sum (\mathbf{pe})^2 = p^2 - \frac{1}{\omega^2} (\mathbf{pk})^2 = p^2 \sin^2 \vartheta,$$

где  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$ . Устраняя  $\delta$ -функцию интегрированием по энергии вылетающего электрона, получим

$$d\sigma = 2^4 \frac{\alpha \omega}{m \zeta^4} \left( \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + 1} \right)^5 \frac{e^{-4\zeta \operatorname{arccctg} \zeta}}{1 - e^{-2\pi\zeta}} \frac{\sin^2 \vartheta}{I - \omega} d\omega, \quad (4.1.22)$$

где  $I$  — энергия ионизации,  $d\omega$  — элемент телесного угла, в котором движется электрон.

Для получения сечения фотоэффекта в случае поляризованных фотонов нужно сделать в этой формуле замену  $\sin^2 \vartheta \rightarrow \cos^2 \theta = \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi$ , где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{p}$ ,  $\varphi$  — угол между плоскостями  $\mathbf{p}, \mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}, \mathbf{e}$ , и, кроме того, опустить множитель  $1/2$  перед  $\sum$ , соответствующий усреднению для неполяризованных фотонов.

Таким образом, угловая зависимость фотоэффекта в нерелятивистской области определяется множителем  $\cos^2 \theta = \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi$ . Мы видим, что большинство фотоэлектронов вылетает в направлении поляризации падающего фотона.

Интегрируя (4.1.22) по  $d\omega$ , получим полное сечение фотоэффекта на  $K$ -оболочке

$$\sigma_K = \frac{128\pi}{3} \frac{\alpha}{m} \frac{I^3}{\omega^4} \frac{e^{-4\zeta \operatorname{arccctg} \zeta}}{1 - e^{-2\pi\zeta}}. \quad (4.1.23)$$

В борновском приближении, когда  $\zeta \ll 1$ , эта формула приобретает вид

$$\sigma_K = \frac{64}{3} \frac{\alpha}{mI} \left( \frac{I}{\omega} \right)^{7/2}. \quad (4.1.24)$$

Аналогично может быть рассмотрен фотоэффект на  $L$ -оболочке. Сечение фотоэффекта определяется при этом следующими формулами: для  $L_I$ -оболочки (поглощение двумя  $2s$ -электронами)

$$\sigma_{L_I} = \frac{2^{10} \pi^2 \alpha}{3m} \frac{I_2^2}{\omega^4} \left( 1 + \frac{3I_2}{\omega} \right) \frac{e^{-4\zeta \operatorname{arccotg} \zeta / 2}}{1 - e^{-2\pi\zeta}} \quad (4.1.25)$$

и для  $L_{II}$ - и  $L_{III}$ -оболочек (поглощение шестью  $2p$ -электронами)

$$\sigma_{L_{II}} + \sigma_{L_{III}} = \frac{2^{11} \pi^2 \alpha}{3m} \frac{I_2^4}{\omega^5} \left( 3 + 8 \frac{I_2}{\omega} \right) \frac{e^{-4\zeta \operatorname{arccotg} \zeta / 2}}{1 - e^{-2\pi\zeta}}, \quad (4.1.26)$$

где  $I_2$  — потенциал ионизации  $L$ -электронов.

Рассмотрим теперь фотоэффект в релятивистской области, когда энергия фотона велика по сравнению с энергией  $K$ -электрона [1, 2]. В этом случае мы должны в качестве волновых функций электрона пользоваться решениями уравнения Дирака в кулоновском поле ядра. Что касается функции  $\bar{\psi}_2(\mathbf{r})$ , то в качестве нее мы возьмем волновую функцию, введенную в п. 1.7.1:

$$\bar{\psi}_2(\mathbf{r}) = N_2 \bar{u}(p) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \left( 1 + \frac{1}{2\varepsilon} \gamma_4 \mathbf{V} \right) \mathcal{F} [i\zeta, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + pr)], \quad (4.1.27)$$

$$N_2 = \left( \frac{2\pi\zeta}{1 - e^{-2\pi\zeta}} \right)^{1/2}.$$

Волновая функция  $K$ -электрона ( $j = 1/2$ ,  $l = 0$ ,  $\kappa = -1$ ) в случае  $\alpha Z \ll 1$  имеет вид

$$\psi_K(\mathbf{r}) = N_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha Z \gamma_4 \mathbf{V} \right) e^{-\eta r} u_0, \quad (4.1.28)$$

где

$$u_{0\sigma n = 1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{0\sigma n = -1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \eta = \frac{Z}{a_0}, \quad N_1 = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi \alpha_0^3}}.$$

Подставляя это выражение и выражение (4.1.27) для  $\bar{\psi}_2(\mathbf{r})$  в (4.1.18), получим

$$eM = N_1 N_2 \bar{u}(p) \{ (e\boldsymbol{\gamma}) J_0 + (e\boldsymbol{\gamma}) \gamma_4 (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{J}_1) + (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{J}_2) \gamma_4 (e\boldsymbol{\gamma}) \} u_0,$$

$$J_0 = \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\mathbf{r} - \eta r} \mathcal{F} [i\zeta, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + pr)] d^3x,$$

$$\mathbf{J}_1 = -\frac{1}{2} \alpha Z \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\mathbf{r} - \eta r} \frac{\mathbf{r}}{r} \mathcal{F} [i\zeta, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + pr)] d^3x,$$

$$\mathbf{J}_2 = -\frac{1}{2\varepsilon} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\mathbf{r} - \eta r} \nabla \mathcal{F} [i\zeta, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + pr)] d^3x.$$

Опуская выкладки, мы приведем лишь окончательное выражение для дифференциального сечения фотоэффекта, справедливое при  $\alpha Z \ll 1$  и скорости вылетающих электронов  $v \sim 1$ :

$$d\sigma = \frac{2\alpha^4 Z^5}{m^2} A \frac{\sin^2 \vartheta}{(1-v \cos \vartheta)^4} \left\{ \frac{(1-\sqrt{1-v^2})^2}{(1-v^2)^{3/2}} (1-v \cos \vartheta) - \right. \\ \left. - \frac{2}{1-v^2} (1-\sqrt{1-v^2})(1-v \cos \vartheta) \cos^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi \right\} d\varphi, \quad (4.1.29)$$

где

$$A = \frac{v^3 (1-v^2)^3}{(1-\sqrt{1-v^2})^5}, \quad \sqrt{1-v^2} = \frac{m}{\omega+m}.$$

Интегральное сечение фотоэффекта на  $K$ -оболочке при  $\omega \gg I$ ,  $\alpha Z \ll 1$  равно

$$\sigma = 4\pi\alpha^4 Z^5 r_0^2 \left(\frac{m}{\omega}\right)^5 (\gamma^2 - 1)^{3/2} \times \\ \times \left\{ \frac{4}{3} + \frac{\gamma(\gamma-2)}{\gamma+1} \left( 1 - \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2-1}} \ln \frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}} \right) \right\}, \quad (4.1.30)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\omega+m}{m}, \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi m}.$$

В крайне релятивистском случае ( $\omega \gg m$ ) эта формула принимает вид

$$\sigma = 4\pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \frac{m}{\omega}. \quad (4.1.31)$$

## § 4.2. Рассеяние фотона электроном

**4.2.1. Матричный элемент рассеяния.** В предыдущем параграфе мы видели, что свободный электрон не может излучать и поглощать фотоны, т. е. что для свободного электрона невозможны процессы первого порядка. Поэтому простейшие процессы взаимодействия фотонов и свободных электронов описываются матрицей рассеяния второго порядка, которая, согласно (3.2.15), имеет следующий вид:

$$S^{(2)} = \frac{e^2}{2} \int T \{ N[\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1)] N[\bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2)] \} d^4x_1 d^4x_2.$$

Так как матрица  $S^{(2)}$  содержит оператор  $A_\mu(x)$  билинейно, то ее элементы описывают такие процессы, в которых общее число фотонных состояний равно либо двум, либо нулю. Последний случай относится к взаимодействию электронов без участия фотонов и будет рассмотрен в § 4.6.

Матричные элементы  $S^{(2)}$  с участием двух фотонных состояний можно разделить на три типа соответственно общему числу электронов в начальном и конечном состояниях. Это число может равняться четырем, двум или нулю. Матричные элементы с четырьмя

электронными состояниями представляют собой просто произведения матричных элементов первого порядка  $S^{(1)}$  (см. рис. 3.3, 1). Матричный элемент, не содержащий электронных состояний, определяет поляризационный оператор (рис. 3.3, 2, 4) и будет исследован в п. 5.1.2.

Наибольший физический интерес представляют матричные элементы с двумя электронными состояниями. Процессами, в которых участвуют два фотонных и два электронных состояния, являются тормозное излучение, рассеяние фотона электроном, образование и аннигиляция электронно-позитронных пар. Они описываются матрицей рассеяния второго порядка:

$$S^{(2)} = e^2 N \int \bar{\psi}(x_2) \bar{A}(x_2) S_c(x_2 - x_1) \bar{A}(x_1) \psi(x_1) d^4x_1 d^4x_2, \quad (4.2.1)$$

где функция  $S_c(x)$  определяется формулами (2.5.30), (2.5.31).

Простейшим процессом, описываемым матрицей (4.2.1), является рассеяние фотона свободным электроном, к рассмотрению которого мы и перейдем.

Обозначим через  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  волновые функции начального и конечного состояний электрона и через  $\mathcal{A}_1(x)$  и  $\mathcal{A}_2(x)$  потенциалы начального и конечного фотонных состояний. Мы получим элемент матрицы  $S^{(2)}$ , соответствующий рассеянию фотона электроном, если заменим в (4.2.1) операторы  $\bar{\psi}(x_2)$  и  $\psi(x_1)$  функциями  $\bar{\psi}_2(x_2)$  и  $\psi_1(x_1)$ , а оператор  $\bar{A}(x_2) \bar{A}(x_1)$  — функцией  $\mathcal{A}_2^*(x_2) \mathcal{A}_1(x_1) + \mathcal{A}_1(x_2) \mathcal{A}_2^*(x_1)$ :

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = e^2 \int \bar{\psi}_2(x_2) \{ \mathcal{A}_2^*(x_2) S_c(x_2 - x_1) \mathcal{A}_1(x_1) + \mathcal{A}_1(x_2) S_c(x_2 - x_1) \mathcal{A}_2^*(x_1) \} \psi_1(x_1) d^4x_1 d^4x_2. \quad (4.2.2)$$

Функции  $\psi(x)$  и  $\mathcal{A}_\mu(x)$  мы выберем в виде плоских волн, нормированных на единичный объем (см. (1.1.23), (2.1.7))

$$\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_a e^{i p x}, \quad \mathcal{A}_b(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_b e^{i k x} \quad (a, b = 1, 2),$$

где  $p$  и  $k$  — 4-импульсы электрона и фотона,  $\varepsilon$  и  $\omega$  — их энергии,  $u = u(p)$  и  $e_\mu$  — биспинорная и 4-векторная амплитуды, удовлетворяющие условиям нормировки  $\bar{u}u = 2m$ ,  $e^*e = 1$ . Подставив эти выражения и выражение (2.5.31) для  $S_c(x)$  в (4.2.2), получим

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{ie^2}{4V\omega_1\omega_2\varepsilon_1\varepsilon_2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \times \\ \times \bar{u}_2 \left\{ \varepsilon_2^* \frac{f_1 - m}{f_1^2 + m^2} \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \frac{f_2 - m}{f_2^2 + m^2} \varepsilon_2^* \right\} u_1, \quad (4.2.3)$$

где  $f_1 = p_1 + k_1 = p_2 + k_2$ ,  $f_2 = p_1 - k_2 = p_2 - k_1$ . На рис. 4.1 изображены две диаграммы, соответствующие двум слагаемым в матричном элементе  $\langle f | S^{(2)} | i \rangle$ .

Матричный элемент (4.2.3) отличен от нуля только при выполнении закона сохранения 4-импульса

$$p_1 + k_1 = p_2 + k_2. \quad (4.2.4)$$

Этот закон позволяет при заданных импульсах  $p_1$  и  $k_1$  определить четыре из шести составляющих импульсов конечного состояния; если, кроме того, задать направление  $k_2$  или  $p_2$ , то можно полностью определить  $k_2$  и  $p_2$ .

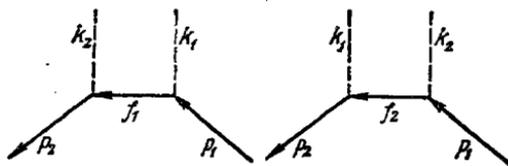


Рис. 4.1.

Найдем зависимость частоты рассеянного фотона  $\omega_2$  от направления его импульса. Возводя (4.2.4) в квадрат и замечая, что  $p_1^2 = p_2^2 = -m^2$ ,  $k_1^2 = k_2^2 = 0$ , найдем  $p_1 k_1 = p_2 k_2 = p_1 k_2 + k_1 p_2$ , откуда

$$\omega_1 (1 - v_1 \cos \vartheta_1) = \omega_2 (1 - v_1 \cos \vartheta_2) + \frac{\omega_1 \omega_2}{\varepsilon_1} (1 - \cos \vartheta), \quad (4.2.5)$$

где  $v_1$  — начальная скорость электрона,  $\varepsilon_1$  — его начальная энергия,  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  — углы, образованные импульсами первичного и рассеянного фотонов с начальным импульсом электрона,  $\vartheta$  — угол между  $k_1$  и  $k_2$ . Для рассеяния фотона на покоящемся электроном ( $v_1 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = m$ ) мы получим отсюда известную формулу Комптона

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{1 + \frac{\omega_1}{m} (1 - \cos \vartheta)}. \quad (4.2.6)$$

Величины  $f_1$  и  $f_2$ , входящие в (4.2.3), представляют собой четырехмерные импульсы виртуальных электронов, для которых не выполняется обычное соотношение между энергией и импульсом. Отличие виртуального электронного состояния от реального можно характеризовать величиной

$$\kappa_i = \frac{f_i^2 + m^2}{m^2}, \quad i = 1, 2, \quad (4.2.7)$$

обращающейся в нуль для реального состояния. Легко видеть, что

$$m^2 \kappa_1 = 2p_1 k_1 = 2p_2 k_2, \quad m^2 \kappa_2 = -2p_1 k_2 = -2p_2 k_1. \quad (4.2.8)$$

В системе отсчета, в которой электрон до столкновения покоится,  $\kappa_1 = -2\omega_1/m$ ,  $\kappa_2 = 2\omega_2/m$ . В системе центра инерции сталкивающихся частиц (с. ц. и.)

$$m^2 \kappa_1 = -2\varepsilon\omega (1 + v) = -2\omega (\varepsilon + \omega), \quad m^2 \kappa_2 = 2\varepsilon\omega (1 + v \cos \vartheta). \quad (4.2.9)$$

4.2.2. Дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных частиц. Зная матричный элемент рассеяния, можно, согласно п. 3.4.3, найти дифференциальное сечение рассеяния фотона электроном:

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} |\bar{u}_2 Q u_1|^2 \frac{d^3 p_2 d^3 k_2}{16 J \varepsilon_2 \omega_2} \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2), \quad (4.2.10)$$

где

$$Q = \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{\varepsilon}_2^* (i\hat{f}_1 - m) \hat{\varepsilon}_1 + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \hat{\varepsilon}_1 (i\hat{f}_2 - m) \hat{\varepsilon}_3^*, \quad (4.2.11)$$

$J = |p_1 k_1| = \frac{1}{2} m^2 |\kappa_1|$ . Наличие в  $d\sigma$   $\delta$ -функций дает возможность произвести интегрирование по  $d^3 p_2$  и  $d\omega_2$ . Для этого достаточно сделать замены

$$\delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) d^3 p_2 \rightarrow 1,$$

$$\delta(\varepsilon_1 + \omega_1 - \varepsilon_2 - \omega_2) d^3 k_2 \rightarrow \omega_2^2 \left| \frac{\partial}{\partial \omega_2} (\omega_2 + \varepsilon_2) \right|^{-1} d\omega_2,$$

где  $d\omega_2$  — элемент телесного угла, в котором лежит вектор  $k_2$ . В последнем соотношении  $\varepsilon_2$  является функцией  $\omega_2$ , так как импульс  $p_2$  связан с  $k_2$  законом сохранения  $\varepsilon_2^2 = m^2 + (p_1 + k_1 - k_2)^2$ , откуда

$$\frac{\partial}{\partial \omega_2} (\omega_2 + \varepsilon_2) = -\frac{m^2 \kappa_1}{2\varepsilon_2 \omega_2},$$

и поэтому

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega_2^2 d\omega_2}{m^2 \kappa_1^2} |\bar{u}_2 Q u_1|^2, \quad (4.2.12)$$

где  $r_0 = \alpha/m$  — классический «радиус» электрона,  $\alpha = e^2/4\pi$ .

Если начальное состояние электрона не поляризовано и нас не интересует поляризация электрона в конечном состоянии, то мы должны просуммировать выражение (4.2.12) по конечным и усреднить по начальным значениям проекции спина электрона.

Эту величину, т. е.  $\frac{1}{2} \sum_{\mu_1, \mu_2} d\sigma$ , где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — значения проекций

спина электрона в начальном и конечном состояниях, мы будем для краткости по-прежнему обозначать через  $d\sigma$ . Согласно (3.4.9) такое усредненное значение дифференциального сечения равно

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{m^2 \kappa_1^2} \text{Sp} \{ Q (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q} (i\hat{p}_2 - m) \} d\omega_2, \quad \bar{Q} = \gamma_4 Q^+ \gamma_4. \quad (4.2.13)$$

Подставляя сюда выражение для  $Q$  и замечая, что  $\bar{q} = -\hat{q}$ , найдем

$$Q (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q} (i\hat{p}_2 - m) =$$

$$= \left\{ \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{\varepsilon}_2^* (i\hat{f}_1 - m) \hat{\varepsilon}_1 + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \hat{\varepsilon}_1 (i\hat{f}_2 - m) \hat{\varepsilon}_3^* \right\} (i\hat{p}_1 - m) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{\varepsilon}_1^* (i\hat{f}_1 - m) \hat{\varepsilon}_3 + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \hat{\varepsilon}_2 (i\hat{f}_2 - m) \hat{\varepsilon}_1^* \right\} (i\hat{p}_2 - m). \quad (4.2.14)$$

Если первичный фотон также не поляризован, то мы получим сечение рассеяния безотносительно к поляризации рассеянного фотона, просуммировав (4.2.12) по конечным и усреднив по начальным состояниям поляризации фотонов. Эту величину, т. е.  $\frac{1}{2} \sum_{\nu_1, \nu_2} d\sigma$ , где  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — поляризации фотонов, мы также будем обозначать через  $d\sigma$ . Вычисление этого усредненного сечения значительно упрощается, так как суммирование можно производить не по двум, а по четырем поляризациям фотонов, включая как «продольную», так и «скалярную» поляризации (см. п. 3.4.2). При этом следует лишь в выражении (4.2.14) заменить  $\hat{e}_1$  на  $\gamma_\nu$ ,  $\hat{e}_2$  на  $\gamma_\mu$  и просуммировать по  $\nu$  и  $\mu$  ( $\nu, \mu = 1, 2, 3, 4$ ). Таким образом, мы получим

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega_2^2 d\omega_2}{m^2 \kappa_1^2} \frac{1}{4} \text{Sp} F, \quad (4.2.15)$$

где

$$F = \frac{1}{m^2 \kappa_1} \left[ \frac{1}{m^2 \kappa_1} \gamma_\mu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\nu + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \gamma_\nu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\mu \right] \times \\ \times (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_2 - m) + \\ + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \left[ \frac{1}{m^2 \kappa_1} \gamma_\mu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\nu + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \gamma_\nu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\mu \right] \times \\ \times (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\mu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m).$$

Легко видеть, что второе слагаемое в этом выражении получается из первого путем замены  $k_1 \rightarrow -k_2$ , которой соответствует также замена  $\hat{f}_1 \rightarrow \hat{f}_2$ ,  $\kappa_1 \rightarrow \kappa_2$ . Каждое из слагаемых представляет собой, очевидно, функцию только от двух инвариантов  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Поэтому мы можем представить  $\text{Sp} F$  в виде

$$\text{Sp} F = P(\kappa_1, \kappa_2) + P(\kappa_2, \kappa_1), \quad P(\kappa_1, \kappa_2) = h_1(\kappa_1, \kappa_2) + h_2(\kappa_1, \kappa_2),$$

где

$$h_1(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{m^4 \kappa_1^2} \text{Sp} \{ \gamma_\mu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\nu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_2 - m) \},$$

$$h_2(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{m^4 \kappa_1 \kappa_2} \text{Sp} \{ \gamma_\nu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_2 - m) \}.$$

Выполнив здесь с помощью (1.2.18) суммирование по  $\mu$  и  $\nu$  и отбросив члены с нечетным числом матриц  $\gamma_\mu$ , получим

$$h_1(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{4}{m^4 \kappa_1^2} \text{Sp} \{ \hat{1} \hat{p}_1 \hat{1} \hat{p}_2 + 4m^2 (\hat{f}_1 \hat{p}_1 + \hat{f}_1 \hat{p}_2 - \hat{f}_1^2) - m^2 \hat{p}_1 \hat{p}_2 + 4m^4 \}.$$

Отсюда легко получить

$$h_1(\kappa_1, \kappa_2) = 8 \frac{4 - 2\kappa_1 - \kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1^2}, \quad h_2(\kappa_1, \kappa_2) = 8 \frac{4 - \kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{8} \text{Sp} F \equiv U_0 = 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right),$$

и окончательно мы получим следующее выражение для усредненного сечения:

$$d\sigma = r_0^2 \frac{2\omega_2^2 d\omega_2}{m^2 \kappa^2} U_0. \quad (4.2.16)$$

Если электрон вначале покоился, т. е.  $p_1 = 0$ , то, используя (4.2.6) и (4.2.8), получим

$$U_0 = \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2 \vartheta,$$

и сечение рассеяния приобретет вид [3, 4]

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \sin^2 \vartheta \right) d\omega_2. \quad (4.2.17)$$

Отметим, что сечение рассеяния фотона содержит в знаменателе массу рассеивателя  $m$ . Поэтому при  $m \rightarrow \infty$  рассеяния не происходило бы. Этот вывод, однако, неточен, так как он получен только из рассмотрения матрицы рассеяния второго порядка. Но уже матрица рассеяния четвертого порядка содержит элементы, отвечающие рассеянию фотона на бесконечно тяжелом заряде. Соответствующее этим матричным элементам явление когерентного рассеяния фотона на ядре будет рассмотрено в § 4.6.

**4.2.3. Угловое распределение рассеянных фотонов и полное сечение.** Воспользовавшись соотношением (4.2.6), определяющим  $\omega_2$  как функцию  $\omega_1$  и  $\vartheta$ , можно выразить дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных фотонов покоящимися неполяризованными электронами через частоту падающего фотона и угол рассеяния фотона:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\left[ 1 + \frac{\omega_1}{m} (1 - \cos \vartheta) \right]^2} \times \left( 1 + \frac{\frac{\omega_1^2}{m^2} (1 - \cos \vartheta)^2}{(1 + \cos^2 \vartheta) \left[ 1 + \frac{\omega_1}{m} (1 - \cos \vartheta) \right]} \right) d\omega_2. \quad (4.2.18)$$

Угловое распределение, даваемое этой формулой, изображено на рис. 4.2 для различных значений параметра  $\gamma = \omega_1/m$ .

При малых энергиях фотона ( $\omega_1 \ll m$ ) формула (4.2.18) переходит в классическую формулу Томсона

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) d\omega_2. \quad (4.2.19)$$

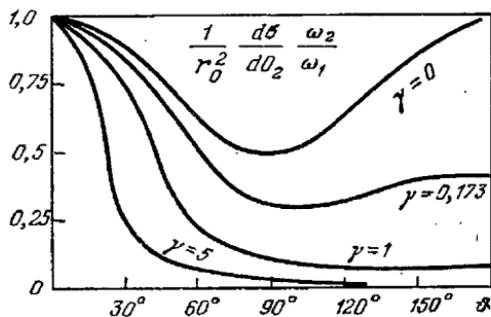


Рис. 4.2.

Если энергия первичного фотона велика по сравнению с энергией покоя электрона,  $\omega_1 \gg m$ , то из (4.2.18) можно получить простые выражения для двух предельных случаев: когда  $\vartheta \ll \sqrt{m/\omega_1}$  и когда  $\vartheta \gg \sqrt{m/\omega_1}$ :

$$d\sigma = r_0^2 d\omega_2, \quad \vartheta \ll \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}; \quad d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \frac{m}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{1 - \cos \vartheta}, \quad \vartheta \gg \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}.$$

В предельном случае больших энергий угловое распределение имеет особенно простой вид в с. ц. и. сталкивающихся частиц:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} d\omega_2, \quad \pi - \vartheta \ll \frac{m}{\omega}.$$

В области углов, не близких к  $180^\circ$ , дифференциальное сечение существенно меньше:

$$d\sigma \sim r_0^2 \frac{m^2}{\omega^2} d\omega_2.$$

Дифференциальное сечение рассеяния покоящимся электроном может быть выражено с помощью (4.2.6) через энергию  $\omega_2$  рассеянного фотона. После интегрирования по азимутальному углу получим

$$d\sigma = \pi r_0^2 \frac{m d\omega_2}{\omega_1^2} \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + \left( \frac{m}{\omega_2} - \frac{m}{\omega_1} \right)^2 - 2m \left( \frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1} \right) \right\}, \quad (4.2.20)$$

где  $\omega_2$ , согласно (4.2.6), изменяется в пределах

$$\omega_1 / (1 + 2\omega_1/m) \leq \omega_2 \leq \omega_1.$$

Для получения полного сечения нужно проинтегрировать (4.2.18) по углу  $\vartheta$ :

$$\sigma = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+\gamma}{\gamma^3} \left[ \frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \ln(1+2\gamma) \right] + \frac{\ln(1+2\gamma)}{2\gamma} - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2} \right\}, \quad (4.2.21)$$

где  $\gamma = \omega_1/m$ . Заметим, что сечение является релятивистским инвариантом, поэтому  $\gamma$  также можно выразить через инвариантную величину  $\kappa_1$ :  $\gamma = -\kappa_1/2$ . В с.ц.и. согласно (4.2.9)

$$\gamma = \omega(\varepsilon + \omega)/m^2.$$

При  $\omega_1 \ll m$  разложение (4.2.21) по  $\gamma$  дает

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 (1 - 2\gamma + \dots), \quad (4.2.22)$$

т. е. в нерелятивистской области сечение рассеяния почти не зависит от энергии фотона. В крайне релятивистской области выражение для сечения сильно упрощается:

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{m}{\omega_1} \left( \ln \frac{2\omega_1}{m} + \frac{1}{2} \right), \quad \omega_1 \gg m.$$

В этой области сечение убывает почти обратно пропорционально энергии фотона.

Таким образом, в области больших энергий число рассеянных фотонов сильно уменьшается, благодаря чему проникающая способность  $\gamma$ -излучения возрастает с увеличением их энергии.

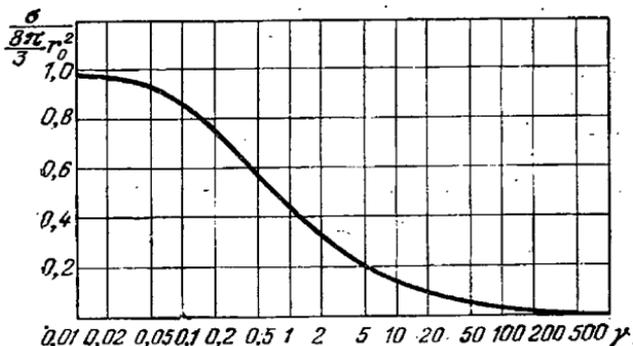


Рис. 4.3.

На рис. 4.3 представлена зависимость сечения от энергии первичного фотона.

В результате столкновения с фотоном покоящийся вначале электрон приобретает энергию

$$\varepsilon - m = \frac{\omega_1^2 (1 - \cos \vartheta)}{m + \omega_1 (1 - \cos \vartheta)}. \quad (4.2.23)$$

Угол  $\beta$  между импульсом рассеянного электрона и импульсом первичного фотона связан с углом  $\vartheta$  соотношением

$$\cos \beta = (1 + \gamma) \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2 + \gamma (\gamma + 2) (1 - \cos \vartheta)}}. \quad (4.2.24)$$

Воспользовавшись этим соотношением, можно выразить  $d\sigma$  через  $\beta$ . Мы получим, таким образом, угловое распределение электронов отдачи

$$d\sigma = 4r_0^2 \frac{(1 + \gamma)^2 \cos \beta \, d\omega_e}{(1 + 2\gamma + \gamma^2 \sin^2 \beta)^2} \times \left\{ 1 + \frac{2\gamma^2 \cos^4 \beta}{(1 + 2\gamma + \gamma^2 \sin^2 \beta) [1 + \gamma (\gamma + 2) \sin^2 \beta]} - \frac{2(1 + \gamma)^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}{[1 + \gamma (\gamma + 2) \sin^2 \beta]^2} \right\}, \quad (4.2.25)$$

где  $d\omega_e$  — элемент телесного угла, в котором лежит импульс рассеянного электрона.

В крайне релятивистском случае ( $\gamma \gg 1$ ) эта формула дает

$$\begin{aligned} d\sigma &= r_0^2 \frac{\gamma d\omega_e}{\gamma^2 \beta^2 + 1}, & \gamma \beta^2 &\ll 1, \\ d\sigma &= 4r_0^2 \frac{\cos \beta d\omega_e}{\gamma^2 \sin^4 \beta}, & \gamma \sin^2 \beta &\gg 1. \end{aligned}$$

**4.2.4. Поляризационные эффекты.** Перейдем теперь к рассмотрению зависимости сечения от поляризаций частиц в начальном и конечном состояниях. Согласно общим правилам для этого нужно возвести в квадрат матричный элемент (4.2.3), заменив в нем билинейные относительно амплитуд частиц величины соответствующими матрицами плотности:

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega_2^2 d\omega_2}{m^2 \kappa_1^2} \text{Sp } Q_{ab} \rho^{(1)} \rho_{aa'}^{(1)} \bar{Q}_{a'b'} \rho_{b''b''}^{(2)}, \quad (4.2.26)$$

где  $\rho^{(1)}$  и  $\rho_{aa'}^{(1)}$  — матрицы плотности электрона и фотона в начальных состояниях (они определяются формулами (1.1.40) и (2.4.21)),  $\rho^{(2)}$  и  $\rho_{b''b''}^{(2)}$  — матрицы плотности конечных состояний электрона и фотона; наконец,

$$Q_{ab} = \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{e}_b^{(2)} (i\hat{f}_1 - m) \hat{e}_a^{(1)} + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \hat{e}_a^{(1)} (i\hat{f}_2 - m) \hat{e}_b^{(2)},$$

и  $e_a^{(1)}$  ( $a=1, 2$ ) — пространственноподобные единичные 4-векторы, ортогональные  $k_1$ , и  $e_a^{(2)}$  — такие же векторы, ортогональные  $k_2$ ; мы их выберем в виде трехмерных векторов

$$e_1^{(1)} = \frac{[k_1 k_2]}{|[k_1 k_2]|}, \quad e_2^{(1)} = \frac{[k_1 e_1^{(1)}]}{\omega_1}, \quad e_1^{(2)} = e_1^{(1)}, \quad e_2^{(2)} = \frac{[k_2 e_1^{(2)}]}{\omega_2}.$$

Так как матрицу  $\rho$  можно выразить через вектор поляризации электрона в его системе покоя  $\zeta$ , а матрицу  $\rho_{ab}$  — через параметры Стокса фотона  $\xi_i$  (см. (1.1.40), (2.4.21)), то дифференциальное сечение  $d\sigma$  является функцией от  $k_1, k_2, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(2)}$ . Из выражения (4.2.26) легко видеть, что зависимость  $d\sigma$  от каждого из параметров  $\zeta$  и  $\xi$  линейна. Поэтому можно установить общую структуру выражения для  $d\sigma$ :

$$\begin{aligned} d\sigma &= r_0^2 \frac{\omega_2^2 d\omega_2}{2m^2 \kappa_1^2} \{ F_0 + F_i \xi_i^{(1)} + F'_i \xi_i^{(2)} + G \zeta^{(1)} + G' \zeta^{(2)} + \\ &+ F_{ik} \xi_i^{(1)} \xi_k^{(2)} + G_{\alpha\beta} \zeta_\alpha^{(1)} \zeta_\beta^{(2)} + f_i \xi_i^{(1)} \zeta^{(1)} + g'_i \xi_i^{(2)} \zeta^{(2)} + \\ &+ g_i \xi_i^{(1)} \zeta^{(2)} + f'_i \xi_i^{(2)} \zeta^{(1)} + h_{ik} \xi_i^{(1)} \xi_k^{(2)} \zeta^{(1)} + \dots \}. \quad (4.2.27) \end{aligned}$$

(Здесь выписаны только члены, зависящие от одного и двух поляризационных параметров, и один из членов, содержащих три параметра.)

Приведем значения коэффициентов, входящих в (4.2.27), для случая рассеяния на покоящемся электроне [5—7]:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2 \vartheta, & F'_i &= F_i, & F_1 &= F_2 = 0, & F_3 &= \sin^2 \vartheta, \\
 \mathbf{G} &= \mathbf{G}' = 0, & F_{33} &= 1 + \cos^2 \vartheta, & F_{11} &= 2 \cos \vartheta, \\
 F_{22} &= \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \cos \vartheta, & F_{ik} &= 0 \quad (i \neq k), \\
 f_1 &= f_3 = 0, & f_2 &= -\frac{1}{m} (1 - \cos \vartheta) (\mathbf{k}_1 \cos \vartheta + \mathbf{k}_2), & f'_i &= f'_3 = 0, \\
 f'_2 &= -\frac{1}{m} (1 - \cos \vartheta) (\mathbf{k}_2 \cos \vartheta + \mathbf{k}_1), & \mathbf{g}_1 &= \mathbf{g}_3 = 0, \\
 \mathbf{g}_2 &= -\frac{1}{m} (1 - \cos \vartheta) \left[ \mathbf{k}_1 \cos \vartheta + \mathbf{k}_2 - (1 + \cos \vartheta) \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2 + 2m} \times \right. \\
 & & & & & & \left. \times (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \right], \\
 \mathbf{g}'_1 &= \mathbf{g}'_3 = 0, \\
 \mathbf{g}'_2 &= -\frac{1}{m} (1 - \cos \vartheta) \left[ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \cos \vartheta - (1 + \cos \vartheta) \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2 + 2m} \times \right. \\
 & & & & & & \left. \times (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \right].
 \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

**4.2.5. Рассеяние поляризованных фотонов неполяризованными электронами.** Используя приведенные значения величин  $F_i$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{f}$  и др., можно проанализировать ряд частных случаев. Пусть прежде всего  $\xi_i^{(2)} = 0$ ,  $\xi^{(2)} = 0$ ,  $\xi^{(1)} = 0$ . Тогда формула (4.2.27) (учетверенная, что отвечает суммированию по поляризациям конечных частиц) будет определять сечение рассеяния поляризованных фотонов на неполяризованных электронах. Обозначим его через  $d\sigma(\xi^{(1)})$ :

$$d\sigma(\xi^{(1)}) = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega_2^3}{\omega_1^2} F d\omega_2, \tag{4.2.29}$$

где

$$F = F_0 + F_3 \xi_3^{(1)} = \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - (1 - \xi_3^{(1)}) \sin^2 \vartheta.$$

Мы видим, что фотоны, поляризованные перпендикулярно плоскости рассеяния ( $\xi_3^{(1)} = 1$ ), рассеиваются сильнее фотонов, поляризованных в плоскости рассеяния ( $\xi_3^{(1)} = -1$ ). От циркулярной же поляризации сечение не зависит. При отсутствии линейной поляризации относительно осей  $e_1^{(1)}$  и  $e_2^{(1)}$  ( $\xi_3^{(1)} = 0$ ) сечение (4.2.29) совпадает с сечением для неполяризованных фотонов (4.2.17).

Аналогичными свойствами обладает сечение рассеяния неполяризованных фотонов с образованием поляризованного фотона. Это сечение, которое мы обозначим через  $d\sigma(\xi^{(2)})$ , можно получить из сечения (4.2.27), если в последнем положить равными нулю все параметры, за исключением  $\xi_i^{(2)}$  (и удвоить результат

соответственно суммированию по поляризациям конечного электрона):

$$d\sigma(\xi^{(2)}) = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} F' d\omega_2, \quad F' = F_0 + F_3 \xi_3^{(2)} = \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - (1 - \xi_3^{(2)}) \sin^2 \theta.$$

Сечение рассеяния поляризованного фотона с образованием поляризованного фотона имеет вид

$$d\sigma(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} d\omega_2 \{ F_0 + F_3 (\xi_3^{(1)} + \xi_3^{(2)}) + F_{11} \xi_1^{(1)} \xi_1^{(2)} + F_{22} \xi_2^{(1)} \xi_2^{(2)} + F_{33} \xi_3^{(1)} \xi_3^{(2)} \}. \quad (4.2.30)$$

Из этого выражения можно найти параметры Стокса вторичного фотона. Они равны отношению коэффициентов при  $\xi_i^{(2)}$  к члену, не содержащему  $\xi_i^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \xi_1^{(2)} &= \frac{1}{F} 2 \cos \theta \xi_1^{(1)}, \quad \xi_2^{(2)} = \frac{1}{F} \cos \theta \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \xi_2^{(1)}, \\ \xi_3^{(2)} &= \frac{1}{F} [\sin^2 \theta + (1 + \cos^2 \theta) \xi_3^{(1)}]. \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Из этих формул, в частности, видно, что неполяризованный фотон в результате рассеяния частично поляризуется. Действительно, полагая в (4.2.31)  $\xi_1^{(1)} = 0$ , получим

$$\xi_2^{(2)} = \frac{\sin^2 \theta}{\omega_1/\omega_2 + \omega_2/\omega_1 - \sin^2 \theta}, \quad \xi_1^{(2)} = \xi_3^{(2)} = 0. \quad (4.2.32)$$

Так как  $\xi_2^{(2)} > 0$ , то фотон будет поляризован перпендикулярно к плоскости рассеяния.

Циркулярно поляризованный фотон образуется только в том случае, когда и первичный фотон циркулярно поляризован.

Рассмотрим далее тот случай, когда падающий фотон полностью поляризован линейно ( $(\xi_1^{(1)})^2 + (\xi_2^{(1)})^2 = 1$ ,  $\xi_3^{(1)} = 0$ ), и найдем дифференциальное сечение рассеяния, при котором рассеянный фотон также обладает линейной поляризацией. Используя (4.2.30), (4.2.27) и выражая параметры  $\xi_i^{(1)}$  и  $\xi_i^{(2)}$  через проекции векторов поляризации фотонов, которые мы обозначим через  $e^{(1)}$  и  $e^{(2)}$ , получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния поляризованного фотона на покоящемся электроне:

$$d\sigma = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - 2 + 4 \cos^2 \theta \right) d\omega, \quad (4.2.33)$$

где  $\theta$  — угол между поляризациями первичного и рассеянного фотонов.

Сечение рассеяния как функция  $\theta$  достигает максимума при совпадающих направлениях поляризации первичного и рассеянного фотонов.

При фиксированном  $e^{(1)}$  можно рассмотреть два случая поляризации рассеянного фотона, когда вектор  $e^{(2)}$  перпендикулярен  $e^{(1)}$  ( $\cos \theta = 0$ ) и когда  $e^{(2)}$  лежит в плоскости  $k_2, e^{(1)}$ ,  $\cos^2 \theta =$

$= 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между плоскостями  $k_1, k_2$  и  $k_2, e^{(1)}$ . Если  $d\sigma^{(1)}$  и  $d\sigma^{(2)}$  — сечения рассеяния, соответствующие этим поляризациям, то полное сечение рассеяния будет равно  $d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$ . Если падающий фотон не поляризован, то сумма  $d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$ , усредненная по углу  $\varphi$ , даст сечение рассеяния неполяризованного фотона (4.2.17).

При  $\omega_1 \ll m$  имеем

$$d\sigma^{(1)} = 0, \quad d\sigma^{(2)} = r_0^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) do_2.$$

При  $\omega_1 \gg m$  следует различать области малых и больших углов рассеяния. Если  $\vartheta \ll \sqrt{m/\omega_1}$ , то  $d\sigma^{(1)} = 0$ ;  $d\sigma^{(2)} = r_0^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) do_2$ . Если  $\vartheta \gg \sqrt{m/\omega_1}$ , то  $d\sigma^{(1)} = d\sigma^{(2)} = \frac{r_0^2}{4} \frac{m}{\omega_1} \frac{do_2}{1 - \cos \vartheta}$ .

Мы видим, что если первичный фотон линейно поляризован, то в крайне релятивистской области при малых  $\vartheta$  рассеяние происходит так же, как и в нерелятивистской области. При больших энергиях и больших углах рассеяния рассеянный фотон неполяризован, независимо от характера линейной поляризации первичного фотона.

**4.2.6. Дисперсионная формула.** Изучив рассеяние фотонов свободными электронами, мы перейдем к изучению рассеяния фотонов связанными электронами. Для определения сечения рассеяния в этом случае можно по-прежнему пользоваться частью матрицы рассеяния  $S^{(2)}$ , определяемой общей формулой (4.2.1), но теперь взамен функции  $S_2(x_2 - x_1)$  в выражение  $S^{(2)}$  должна входить функция Грина уравнения Дирака  $S_c^{(e)}$  для электрона во внешнем поле,

$$S^{(2)} = e^2 \int N \{ \bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) S_c^{(e)}(x_1, x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \} d^4x_1 d^4x_2. \quad (4.2.34)$$

Функция  $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$  определяется в соответствии с (2.5.25), (2.5.18) следующим образом:

$$S_{\alpha\beta}^{(e)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \sum_s \psi_{s\alpha}^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_{s\beta}^{(+)}(x_2), & t_1 > t_2, \\ - \sum_s \psi_{s\alpha}^{(-)}(x_1) \bar{\psi}_{s\beta}^{(-)}(x_2), & t_1 < t_2, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_s^{(+)}(x) &= \psi_s^{(+)}(\mathbf{r}) e^{-iE_s^{(+)}t}, & E_s^{(+)} > 0; \\ \psi_s^{(-)}(x) &= \psi_s^{(-)}(\mathbf{r}) e^{-iE_s^{(-)}t}, & E_s^{(-)} < 0 \end{aligned}$$

— решения уравнений Дирака с положительными и отрицательными частотами во внешнем поле. Замечая, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega + a(1-i0)} d\omega = \begin{cases} 0, & at < 0, \\ e^{-iat}, & a > 0, \quad t > 0, \\ -e^{-iat}, & a < 0, \quad t < 0, \end{cases}$$

представим  $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$  в виде

$$S_c^{(e)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t_1 - t_2)} \sum_s \frac{\Psi_s(r_1) \bar{\Psi}_s(r_2)}{E_s(1-i0) + \omega}. \quad (4.2.35)$$

Из этой формулы и из уравнения Дирака следует, что  $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \gamma_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu^{(e)}(x) \right) + m \right\} S_c^{(e)}(x, x') = -i\delta(x - x'),$$

а так как  $S_c(x)$  удовлетворяет уравнению  $\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) S_c(x) = -i\delta(x)$ , то функция  $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$S_c^{(e)}(x_1, x_2) = S_c(x_1 - x_2) - e \int S_c(x_1 - x') \hat{A}^{(e)}(x') S_c^{(e)}(x', x_2) dx_2. \quad (4.2.36)$$

Рассмотрим рассеяние фотона с частотой  $\omega_1$ , волновым вектором  $k_1$  и поляризацией  $e_1$  электроном, находящимся в состоянии  $\psi_1(x) = \psi_1(r) e^{-iE_1 t}$ . В результате рассеяния возникает фотон с частотой  $\omega_2$ , волновым вектором  $k_2$ , поляризацией  $e_2$ , а электрон переходит в состояние  $\psi_2(x) = \psi_2(r) e^{-iE_2 t}$ . Частота рассеянного фотона  $\omega_2$  может при этом либо совпадать с частотой первичного фотона  $\omega_1$ , либо отличаться от нее (в последнем случае говорят о комбинационном рассеянии). Матричный элемент рассеяния фотона электроном определяется формулой

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= \frac{e^2}{2V\omega_1\omega_2} \int \{ \bar{\Psi}_2(r_2) e^{-ik_2 r_2} \hat{\epsilon}_2 S_c^{(e)}(x_2, x_1) \hat{\epsilon}_1 e^{ik_1 r_1} \times \\ &\times \psi_1(r_1) e^{it_1(E_2 + \omega_2) - it_1(E_1 + \omega_1)} + \bar{\Psi}_2(r_2) e^{ik_2 r_2} \hat{\epsilon}_2 S_c^{(e)}(x_2, x_1) \hat{\epsilon}_2 \times \\ &\times e^{-ik_2 r_1} \psi_1(r_1) e^{it_2(E_2 - \omega_1) - it_2(E_1 - \omega_2)} \} d^4x_1 d^4x_2. \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

Подставив в (4.2.37) выражение (4.2.35) для  $S_c^{(e)}$  и выполнив интегрирование по  $t_1, t_2$  и  $\omega$ , получим

$$U = -\frac{2\pi\alpha}{V\omega_1\omega_2} \sum_s \left\{ \frac{1}{E_s - E_1 - \omega_1} \langle 2 | \hat{\epsilon}_2 e^{-ik_2 r} | s \rangle \langle s | \hat{\epsilon}_1 e^{ik_1 r} | 1 \rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{E_s - E_2 + \omega_2} \langle 2 | \hat{\epsilon}_1 e^{ik_1 r} | s \rangle \langle s | \hat{\epsilon}_2 e^{-ik_2 r} | 1 \rangle \right\}, \quad (4.2.38)$$

где

$$\langle n | e^{ikr} \hat{\epsilon} | s \rangle = \int \bar{\Psi}_n(r) \hat{\epsilon} e^{ikr} \Psi_s(r) d^3x$$

и суммирование производится по всем состояниям  $s$ , соответствующим как положительным, так и отрицательным частотам.

Важнейшим применением этой формулы является рассеяние фотона атомной системой. Рассмотрим нерелятивистский случай,

когда энергии фотонов малы по сравнению с энергией покоя электрона и значения энергии электрона в начальном и конечном состояниях  $E_1$  и  $E_2$  мало отличаются от  $m$ ,  $|E_1 - m| \ll m$ ,  $|E_2 - m| \ll m$ . Кроме того, будем предполагать, что в сумме (4.2.38) играют существенную роль только такие состояния  $s$  («промежуточные» состояния), энергии которых также являются нерелятивистскими, т. е.  $||E_s| - m| \ll m$ . Эти предположения позволяют значительно упростить ту часть суммы (4.2.38), которая относится к отрицательным частотам. Прежде всего, в каждом члене этой части суммы, которую мы будем обозначать через  $U^{(-)}$ , можно заменить выражение, стоящее в знаменателе, на  $2m$ , после чего можно преобразовать  $U^{(-)}$  в сумму по всем состояниям, включающим не только отрицательные, но и положительные частоты. Для этого следует сделать в выражении матричного элемента  $\langle 2 | \hat{e} e^{ikr} | s \rangle$  замену

$$\psi_s^{(-)}(r) \rightarrow \frac{m - H}{m - E_s^{(-)}} \psi_s^{(-)}(r) \approx \frac{m - H}{2m} \psi_s^{(-)}(r),$$

где  $H$  — гамильтониан электрона. В интересующем нас приближении  $H \approx m\gamma_4$ ,  $H\psi^{(\pm)}(r) = \pm m\psi^{(\pm)}(r)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{m - H}{2m} \psi_s^{(-)}(r) &= \psi_s^{(-)}(r), & \frac{m - H}{2m} \psi_s^{(+)}(r) &= 0, \\ U^{(-)} &= \frac{\pi\alpha}{2m\sqrt{\omega_1\omega_2}} \sum_s \{ \langle 2 | \hat{e}_2 (1 - \gamma_4) e^{-ik_2 r} | s \rangle \langle s | \hat{e}_1 e^{ik_1 r} | 1 \rangle + \\ &+ \langle 2 | \hat{e}_1 (1 - \gamma_4) e^{ik_1 r} | s \rangle \langle s | \hat{e}_2 e^{-ik_2 r} | 1 \rangle \}, \end{aligned}$$

где сумма распространяется на оба знака частоты. Воспользовавшись правилом умножения матриц, можно переписать это выражение в виде

$$U^{(-)} = \frac{\pi\alpha}{2m\sqrt{\omega_1\omega_2}} \langle 2 | \{ \hat{e}_2 (\gamma_4 - 1) e^{-i(k_1 - k_2) r} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 (\gamma_4 - 1) \times \\ \times e^{-i(k_2 - k_1) r} \hat{e}_2 \} | 1 \rangle.$$

Замечая, наконец, что, выбрав  $e_4 = 0$ , можно заменить  $\hat{e}$  на  $\gamma e$  и что в нашем приближении  $\gamma_4 \psi_1 \approx \psi_1$ , получим окончательно

$$U^{(-)} = -\frac{2\pi\alpha}{m\sqrt{\omega_1\omega_2}} (e_1 e_2) \int \psi_2^*(r) \psi_1(r) e^{i(k_1 - k_2) r} d^3x. \quad (4.2.39)$$

Рассмотрим теперь часть суммы (4.2.38), относящуюся к положительным частотам. В нерелятивистском приближении в числителях дробей, входящих в эту часть  $U$ , можно заменить  $\alpha A$  на  $\frac{1}{m} \mathbf{A} p + \mu \text{rot } A$  и  $\alpha e$  на  $\frac{1}{m} e p + i\mu [ke]$ , где  $\mu$  — спиновый магнит-

ный момент электрона. Сделав эту замену и воспользовавшись формулой (4.2.39) для  $U^{(-)}$ , получим следующее выражение для  $U$ :

$$U = -\frac{4\pi\alpha}{m} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{s(E_s > 0)} \left( \frac{\langle 2 | \mathbf{p}' A_2^* | s \rangle \langle s | \mathbf{p}' A_1 | 1 \rangle}{E_1 - E_s + \omega_1} + \frac{\langle 2 | \mathbf{p}' A_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{p}' A_2^* | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right) + \langle 2 | A_2^* A_1 | 1 \rangle \right\}, \quad (4.2.40)$$

где  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + m[\mu\nabla]$  (матричные элементы в этом выражении вычисляются с нерелятивистскими волновыми функциями).

Если длина волны рассеиваемого фотона велика по сравнению с размерами атома, то  $A_1(\mathbf{r})$  и  $A_2(\mathbf{r})$  можно считать постоянными, так как  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \approx e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}$  ( $\mathbf{R}$  — радиус-вектор центра атома). В этом случае формула (4.2.40) принимает вид

$$U = -\frac{2\pi\alpha}{m\sqrt{\omega_1\omega_2}} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{R}} \left\{ \frac{1}{m} \sum_s \left( \frac{\langle 2 | \mathbf{p}e_2 | s \rangle \langle s | \mathbf{p}e_1 | 1 \rangle}{E_1 - E_s + \omega_1} + \frac{\langle 2 | \mathbf{p}e_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{p}e_2 | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right) + (e_1 e_2) \delta_{12} \right\}. \quad (4.2.41)$$

Последний член здесь отличается от нуля только для когерентного рассеяния, когда  $\psi_1 = \psi_2$ .

Эту формулу, определяющую закон дисперсии, т. е. зависимость рассеивающей способности атома от частоты света, можно представить в несколько ином виде, а именно так, чтобы в нее вместо матричных элементов импульса входили матричные элементы дипольного момента атома. Для этого нужно воспользоваться соотношением

$$\langle n | \mathbf{p} | s \rangle = im(E_n - E_s) \langle n | \mathbf{r} | s \rangle,$$

а также условиями коммутации между операторами импульса и координаты, из которых следует:

$$e_1 e_2 = i \langle 2 | \{(\mathbf{p}e_1)(\mathbf{r}e_2) - (\mathbf{r}e_1)(\mathbf{p}e_2)\} | 1 \rangle = i \sum_s \{ \langle 2 | \mathbf{p}e_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{r}e_2 | 1 \rangle - \langle 2 | \mathbf{r}e_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{p}e_2 | 1 \rangle \}.$$

Прибавляя далее в фигурной скобке в (4.2.41) равное нулю слагаемое

$$\omega_2 \sum_s \{ \langle 2 | \mathbf{r}e_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{r}e_2 | 1 \rangle - \langle 2 | \mathbf{r}e_2 | s \rangle \langle s | \mathbf{r}e_1 | 1 \rangle \} = 0,$$

получим окончательно [8]

$$\dot{U} = -2\pi\alpha e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{R}} \sqrt{\omega_1\omega_2} \times \sum_s \left\{ \frac{\langle 2 | \mathbf{r}e_2 | s \rangle \langle s | \mathbf{r}e_1 | 1 \rangle}{E_1 - E_s + \omega_1} + \frac{\langle 2 | \mathbf{r}e_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{r}e_2 | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right\}. \quad (4.2.42)$$

Дифференциальное сечение рассеяния связано с  $U$  соотношением

$$d\sigma = 2\pi |U|^2 \delta(E_1 + \omega_1 - E_2 - \omega_2) \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}.$$

Устраняя  $\delta$ -функцию интегрированием по  $d\omega_2$ , найдем

$$d\sigma = \omega_1 \omega_2^2 d\omega_2 \left| \sum_s \left\{ \frac{\langle 2 | Q e_2 | s \rangle \langle s | Q e_1 | 1 \rangle}{E_1 - E_s + \omega_1} + \frac{\langle 2 | Q e_1 | s \rangle \langle s | Q e_2 | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right\} \right|^2, \quad (4.2.43)$$

где  $Q$  — дипольный момент атома.

Если рассеивающая система содержит не один, а несколько электронов, то под  $Q$  следует понимать суммарный дипольный момент системы. Формула (4.2.42) справедлива, если длина волны фотона велика по сравнению с размерами атома  $a$ ,  $\lambda \gg a$ .

В дисперсионную формулу (4.2.42) входит сумма по всем возбужденным состояниям атома. Если частота фотона  $\omega_1$  равна разности энергий одного из возбужденных состояний и основного состояния атома, т. е.  $\omega_1 = E_s - E_1$ , то сечение рассеяния обращается в бесконечность, что указывает на неприменимость полученной формулы при  $\omega_1 = E_s - E_1$ . Этот случай называется резонансом.

Мы не будем развивать здесь строгую теорию резонанса, а ограничимся лишь разъяснением физической причины неприменимости формулы (4.2.42) вблизи резонанса и укажем приближенный метод рассмотрения явления резонанса. (Последовательное рассмотрение резонансного рассеяния, использующее общую теорию радиационных поправок, будет дано в п. 5.3.4.)

Причина неприменимости формулы (4.2.42) вблизи резонанса заключается в том, что мы рассматривали  $\psi_s(x)$  как волновые функции стационарных состояний, содержащих время в виде  $e^{-iE_s t}$ . Между тем возбужденные состояния являются лишь приближенно стационарными, так как благодаря взаимодействию с электромагнитным полем существует конечная вероятность перехода атома в основное состояние (эта вероятность была определена в § 4.1).

Приближенно стационарные состояния можно описывать как состояния с комплексной энергией, волновые функции которых содержат время в виде

$$\psi_s \sim e^{-i(E_s - \frac{i}{2}\Gamma_s)t},$$

где  $\Gamma_s$  — вещественная положительная величина. Вероятность нахождения атома в возбужденном состоянии, пропорциональная  $|\psi_s|^2$ , убывает при этом по закону  $e^{-\Gamma_s t}$ . Это показывает, что  $\Gamma_s = \omega_s$ , где  $\omega_s$  — вероятность излучения, определяемая формулами (4.1.10), (4.1.13).

При частотах, близких к резонансной, можно в формуле (4.2.42) отбросить все слагаемые, кроме резонансного, и заменить в нем  $E_s$

на  $E_s - \frac{i}{2} \Gamma_s$ . Таким образом, мы получим следующее выражение для амплитуды рассеяния [8—10]:

$$U = 2\pi\alpha \sqrt{\omega_1\omega_2} \frac{\Sigma \langle 2 | re_2 | s \rangle \langle s | re_1 | 1 \rangle}{E_s - E_1 - \omega_1 - \frac{i}{2} \Gamma_s},$$

где сумма распространяется на все состояния с энергией  $s$ . Соответственно дифференциальное сечение рассеяния будет

$$d\sigma = \omega_1\omega_2^3 d\omega_2 \frac{|\Sigma \langle 2 | Qe_2 | s \rangle \langle s | Qe_1 | 1 \rangle|^2}{(E_s - E_1 - \omega_1)^2 + 1/4\Gamma_s^2}. \quad (4.2.44)$$

Чтобы найти полное сечение рассеяния, нужно проинтегрировать выражение (4.2.44) по углам, усреднить по поляризациям падающего фотона и проекциям момента начального состояния и просуммировать по поляризациям рассеянного фотона и проекциям момента конечного состояния. Такое сечение определяется, помимо  $E_1$ ,  $E_s$  и  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , только шириной уровня  $s$  и значениями моментов. В случае рассеяния без изменения частоты полное сечение равно

$$\sigma = \frac{2j_s + 1}{2(2j_1 + 1)} \frac{4\pi}{\omega^2} \frac{\Gamma_s^2}{(E_s - E_1 - \omega)^2 + 1/4\Gamma_s^2}, \quad (4.2.45)$$

где  $j_s$  и  $j_1$  — моменты системы в состояниях  $s$  и 1,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Эта формула сохраняет свой вид и в том случае, когда состояние  $s$  произвольным образом отличается от состояния 1 по моменту и четности. При этом под  $\Gamma_s = \omega_s$  следует понимать вероятность излучения соответствующего мультиполя.

## § 4.3. Тормозное излучение

**4.3.1. Сечение тормозного излучения в борновском приближении.** В § 4.1 мы изучали излучение электрона, находящегося в дискретном состоянии. Теперь мы перейдем к изучению излучения электрона, находящегося в состоянии непрерывного спектра. Оно называется тормозным излучением и происходит, например, при столкновении электрона с какой-либо заряженной частицей. Если столкновение электрона происходит с тяжелой частицей (ядром, атомом), то действие последней может учитываться как действие внешнего поля. В этом случае тормозное излучение описывается элементом матрицы рассеяния первого порядка (4.1.1), в котором начальное состояние относится к непрерывному, а конечное — либо к непрерывному, либо к дискретному спектру.

Если внешнее поле таково, что его можно учитывать методами теории возмущений, то для определения вероятности тормозного излучения достаточно вычислить соответствующий элемент матрицы рассеяния второго порядка  $S^{(2)}$ , определяемой формулой (4.2.1). Критерий применимости такого рассмотрения совпадает, очевидно,

с критерием применимости борновского приближения для кулоновского поля  $Z\alpha/v \ll 1$ , где  $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ ,  $Z|e|$  — заряд ядра и  $v$  — скорость электрона. Мы рассмотрим сперва этот относительно простой случай, охватывающий весьма широкую область применений.

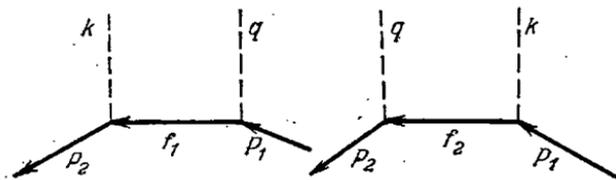


Рис. 4.4.

Матричный элемент, определяющий процесс тормозного излучения, может быть написан на основании правил Фейнмана. Соответствующие диаграммы изображены на рис. 4.4; они отличаются от диаграмм, изображающих эффект Комптона, только тем, что первичному фотону с 4-импульсом  $k_1$  соответствует здесь «псевдофотон» с 4-импульсом  $q$ , т. е.  $q$ -компонента Фурье внешнего потенциала, а рассеянному фотону с 4-импульсом  $k_2$  — излучаемый фотон с 4-импульсом  $k$  и поляризацией  $e$ . Соответственно этому матричный элемент тормозного излучения отличается от матричного элемента эффекта Комптона заменой  $k_1 \rightarrow q$ ,  $k_2 \rightarrow k$ ,  $e_1 \rightarrow A^{(e)}(q)$ ,  $e_2 \rightarrow e$  и имеет следующий вид:

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{ie^2}{2\sqrt{2\omega e_1 e_2}} \bar{u}_2 \left\{ \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{e} (i\hat{f}_1 - m) \hat{A}^{(e)}(q) + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \hat{A}^{(e)}(q) (i\hat{f}_2 - m) \hat{e} \right\} u_1, \quad (4.3.1)$$

где  $f_1 = p_2 + k$ ,  $f_2 = p_1 - k$ ,  $q = p_2 + k - p_1$ ,  $m^2 \kappa_1 = 2p_2 k$ ,  $m^2 \kappa_2 = -2p_1 k$ .

Из законов сохранения энергии и импульса следует, что взятый с обратным знаком 4-импульс «псевдофотона»  $q$  равен 4-импульсу, получаемому ядром в результате процесса тормозного излучения:  $-q = p_1 - p_2 - k$ . Таким образом,  $-q$  представляет собой трехмерный импульс отдачи ядра, а  $-q_0$  — энергию, передаваемую ядру.

Если внешнее поле не зависит от времени и описывается статическим потенциалом  $A_0^{(e)}(r)$ , что имеет место для неподвижного ядра, то

$$\hat{A}^{(e)}(q) = 2\pi i \delta(q_0) \gamma_4 A_0^{(e)}(q), \quad A_0^{(e)}(q) = \int A_0^{(e)}(r) e^{-iqr} d^3x.$$

Выражение для матричного элемента (4.3.1) можно получить также, исходя из матрицы рассеяния первого порядка  $S^{(1)}$ , если воспользоваться в качестве волновых функций начального и ко-

нечного состояний волновыми функциями электрона в первом борновском приближении:

$$\begin{aligned}\psi_1(\mathbf{r}) &= \left[ 1 + \frac{e}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{i\hat{p}_1 + i\mathbf{q}\boldsymbol{\gamma} - m}{2p_1q + q^2} \gamma_4 A_0^{(e)}(\mathbf{q}) \right] u_1 e^{i p_1 r}, \\ \bar{\psi}_2(\mathbf{r}) &= \bar{u}_2 \left[ 1 + \frac{e}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} A_0^{(e)}(\mathbf{q}) \gamma_4 \frac{i\hat{p}_2 - i\mathbf{q}\boldsymbol{\gamma} - m}{-2p_2q + q^2} \right] e^{-i p_2 r}.\end{aligned}\quad (4.3.2)$$

Действительно, записав матричный элемент оператора  $S^{(1)}$  в виде

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = \frac{\pi e}{V 2\omega \varepsilon_1 \varepsilon_2} M \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega), \quad (4.3.3)$$

где

$$M = \int d^3x \bar{\psi}_2(\mathbf{r}) \hat{e} \psi_1(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

и  $\psi_1(\mathbf{r})$  и  $\psi_2(\mathbf{r})$  — точные волновые функции электрона во внешнем поле, и подставив вместо  $\psi_1(\mathbf{r})$  и  $\psi_2(\mathbf{r})$  волновые функции (4.3.2), мы получим матричный элемент (4.3.1).

Зная матричный элемент и используя правила п. 3.4.3, можно определить дифференциальное сечение тормозного излучения:

$$d\sigma = \frac{e^4}{8\omega \varepsilon_1 \varepsilon_2} |A_0^{(e)}(\mathbf{q})|^2 |\bar{u}_2 Q u_1|^2 \frac{d^3p_2}{(2\pi)^5} \frac{d^3k}{v_1} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega), \quad (4.3.4)$$

где

$$Q = \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{e} (i\hat{f}_1 - m) \gamma_4 + \frac{1}{m^2 \kappa_1} \gamma_4 (i\hat{f}_2 - m) \hat{e},$$

$v_1$  — скорость электрона в начальном состоянии.

Найдем прежде всего сечение тормозного излучения, усредненное по ориентациям спина падающего электрона и просуммированное по ориентациям спина рассеянного электрона и по поляризациям излученного фотона. Такое усреднение и суммирование по поляризациям частиц сводится, согласно п. 3.4.2, к следующей замене в (4.3.4):

$$\begin{aligned}|\bar{u}_2 Q u_1|^2 &\rightarrow \frac{1}{2} \text{Sp } F, \quad F = Q_\mu (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_\mu (i\hat{p}_2 - m), \\ Q_\mu &= \frac{1}{m^2 \kappa_1} \gamma_\mu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_4 + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \gamma_4 (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\mu, \quad \bar{Q}_\mu = \gamma_4 Q_\mu^+ \gamma_4.\end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned}\text{Sp } F &= F_1 + F_2, \\ F_1 &= \text{Sp } Q_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_4 \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \gamma_\mu (i\hat{p}_2 - m), \\ F_2 &= \text{Sp } Q_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\mu \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2 \kappa_2} \gamma_4 (i\hat{p}_2 - m)\end{aligned}$$

и замечая, что при замене  $p_1 \rightarrow p_2$ ,  $q \rightarrow -q$ ,  $k \rightarrow -k$  величины  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , так же как  $F_1$  и  $F_2$ , меняются местами:  $\kappa_1 \rightarrow \kappa_2$ ,  $F_1 \rightarrow F_2$ ,

получим  $F_2(\kappa_1, \kappa_2, q^2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = F_1(\kappa_2, \kappa_1, q^2, \varepsilon_2, \varepsilon_1)$ . Поэтому для нахождения  $\text{Sp} F$  достаточно вычислить  $F_1$ :

$$\frac{1}{4} F_1 = \frac{1}{\kappa_1^2} \left[ \left( \kappa_1 \kappa_2 + 2 \frac{q^2}{m^2} \right) - \frac{4\varepsilon_1^2}{m^2} (\kappa_1 + 2) + \frac{4\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m^2} \kappa_1 \right] + \\ + \frac{1}{\kappa_1 \kappa_2} \left[ -\frac{q^2}{m^2} (\kappa_1 + \kappa_2 - \frac{q^2}{m^2} - 2) + \frac{2\varepsilon_1^2}{m^2} (\kappa_2 - \frac{q^2}{m^2}) + \right. \\ \left. + \frac{2\varepsilon_2^2}{m^2} (\kappa_1 - \frac{q^2}{m^2}) - \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m^2} (\kappa_1 + \kappa_2 + 4) \right].$$

Подставив выражения для  $F_1$  и  $F_2$  в сечение излучения (4.3.4), получим [11, 12]

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{p}_2|}{|\mathbf{p}_1|} \frac{\omega d\omega d\theta_1 d\theta_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2} |A_0^{(e)}(q)|^2 \times \\ \times \left\{ -2\kappa_1 \kappa_2 \frac{q^2}{m^2} \left[ \frac{2}{m^2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \kappa_1 + \kappa_2 - \frac{q^2}{m^2} - 2 \right] + \right. \\ \left. + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \left( \kappa_1 \kappa_2 + 2 \frac{q^2}{m^2} \right) - \frac{8}{m^2} (\kappa_1 \varepsilon_2 + \kappa_2 \varepsilon_1)^2 \right\}, \quad (4.3.5)$$

где  $d\theta_1$  и  $d\theta_2$  — элементы телесных углов, в которых лежат векторы  $\mathbf{p}_2$  и  $\mathbf{k}$ .

Учитывая соотношения

$$m^2 \kappa_1 = 2(\mathbf{p}_2 \mathbf{k} - \varepsilon_2 \omega) = -2\omega(\varepsilon_2 - p_2 \cos \vartheta_2), \\ m^2 \kappa_2 = -2(\mathbf{p}_1 \mathbf{k} - \varepsilon_1 \omega) = 2\omega(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1), \\ q^2 = m^2(\kappa_1 + \kappa_2 - 2) + 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - p_1 p_2),$$

где  $p_1 = |\mathbf{p}_1|$ ,  $p_2 = |\mathbf{p}_2|$ , а  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — углы между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}_2$ , можно переписать  $d\sigma$  в виде

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{4\pi^3} \frac{p_2}{p_1} \frac{d\omega d\theta_1 d\theta_2}{\omega m^4} |A_0^{(e)}(q)|^2 \left\{ 4 \left[ \mathbf{k} \left( \frac{\varepsilon_1 p_2}{\kappa_1} + \frac{\varepsilon_2 p_1}{\kappa_2} \right) \right]^2 - \right. \\ \left. - q^2 \left[ \mathbf{k} \left( \frac{p_2}{\kappa_1} + \frac{p_1}{\kappa_2} \right) \right]^2 - \frac{2\omega^2}{\kappa_1 \kappa_2} [\mathbf{k}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)]^2 \right\}, \quad (4.3.6)$$

или

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{16\pi^3} \frac{p_2}{p_1} \frac{d\omega}{\omega} d\theta_1 d\theta_2 |A_0^{(e)}(q)|^2 \left[ \frac{p_2^2 \sin^2 \vartheta_2}{(\varepsilon_2 - p_2 \cos \vartheta_2)^2} (4\varepsilon_1^2 - q^2) + \right. \\ + \frac{p_1^2 \sin^2 \vartheta_1}{(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} (4\varepsilon_2^2 - q^2) + 2\omega^2 \frac{p_1^2 \sin^2 \vartheta_1 + p_2^2 \sin^2 \vartheta_2}{(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)(\varepsilon_2 - p_2 \cos \vartheta_2)} - \\ \left. - \frac{2p_1 p_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi}{(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)(\varepsilon_2 - p_2 \cos \vartheta_2)} (4\varepsilon_1 \varepsilon_2 - q^2 + 2\omega^2) \right], \quad (4.3.7)$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостями  $\mathbf{k}, \mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{k}, \mathbf{p}_2$ . Квадрат переданного ядру импульса  $q^2$  связан с углами  $\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi$  соотношением

$$q^2 = p_1^2 + p_2^2 + \omega^2 - 2p_1 \omega \cos \vartheta_1 + 2p_2 \omega \cos \vartheta_2 - \\ - 2p_1 p_2 (\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi).$$

Из (4.3.7) следует, что  $d\sigma$  обращается в нуль при  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ .

Формула (4.3.7) сильно упрощается в предельных случаях малых и больших энергий электрона. В предельном случае малых

энергий, соответствующем задаче о спектре рентгеновских лучей, импульс фотона мал по сравнению с импульсом электрона, так как  $\omega = \frac{1}{2m} (p_1^2 - p_2^2) \ll p_1$ . Поэтому  $q^2 = (p_1 - p_2)^2$ . Замечая далее, что в нерелятивистском случае  $m^2 \kappa_2 = -m^2 \kappa_1 = 2m\omega$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = m$ , и сохраняя в фигурных скобках (4.3.6) только первый член, получим

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{4\pi^3} \frac{p_2}{p_1} \frac{d\omega}{\omega^3} d\omega_2 [k(p_1 - p_2)]^2 |A_0^{(e)}(q)|^2, \quad p_1 \ll m. \quad (4.3.8)$$

Так как  $p_2$  мало отличается от  $p_1$ , то в этом выражении можно выделить множитель

$$d\sigma_S = \frac{m^2 \alpha}{\pi} |A_0^{(e)}(q)|^2 d\omega_2, \quad (4.3.9)$$

который представляет собой борновское сечение упругого рассеяния электронов. Мы можем поэтому сказать, что в нерелятивистском случае сечение тормозного излучения равняется произведению сечения упругого рассеяния электрона  $d\sigma_S$  на вероятность излучения фотона  $dw_\gamma$ :

$$d\sigma = d\sigma_S dw_\gamma, \quad dw_\gamma = \frac{\alpha}{4\pi^2} \left[ \frac{k}{\omega} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \right]^2 \frac{d\omega}{\omega} d\omega. \quad (4.3.10)$$

Интенсивность излучения достигает максимума в направлении, перпендикулярном к плоскости движения электрона  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ .

Полученное выражение для вероятности излучения находится в соответствии с классической теорией излучения, а именно  $dw_\gamma$  представляет собой отношение интенсивности дипольного излучения при малых частотах к энергии фотона, т. е. определенное классически среднее число фотонов, излучаемых в единицу времени.

Так как в (4.3.7) входят множители  $(1 - v_1 \cos \vartheta_1)^{-1}$  и  $(1 - v_2 \cos \vartheta_2)^{-1}$ , то в случае больших энергий  $\varepsilon_1 \gg m$ ,  $\varepsilon_2 \gg m$ ; когда  $v_1 \sim 1$  и  $v_2 \sim 1$ , сечение тормозного излучения имеет резкий максимум вблизи направления импульса падающего электрона. Излучение сосредоточено при этом, в основном, в узком конусе около этого направления с углом раствора порядка  $\vartheta_1 \sim m/\varepsilon_1$ ; в этом же конусе лежит импульс рассеянного электрона. Дифференциальное сечение излучения (4.3.7) в этом случае можно представить в виде

$$d\sigma = \frac{2\alpha^2 m^2 \varepsilon_2}{\pi^2 \varepsilon_1} \frac{d\omega}{\omega} |A_0^{(e)}(q)|^2 u du \omega d\omega d\varphi \times \\ \times \left[ \frac{u^2}{(1+u^2)^2} + \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{u^2 + \omega^2}{(1+u^2)(1+\omega^2)} - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \frac{u\omega \cos \varphi}{(1+u^2)(1+\omega^2)} \right], \quad (4.3.11)$$

где

$$u = \varepsilon_1 \vartheta_1 / m, \quad \omega = \varepsilon_2 \vartheta_2 / m,$$

$$q^2 = m^2 (u^2 + \omega^2 - 2u\omega \cos \varphi) + m^4 \left( \frac{1+u^2}{2\varepsilon_1} - \frac{1+\omega^2}{2\varepsilon_2} \right)^2.$$

4.3.2. Тормозное излучение в высокоэнергетическом приближении. Перейдем теперь к вычислению сечения тормозного излучения в высокоэнергетическом приближении, когда волновые функции электронов в начальном и в конечном состояниях определяются формулами (см. § 1.3) [13]

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{r}_1) = & \left[ 1 + \frac{i\gamma_4 \gamma \mathbf{V}_\perp \gamma_1}{2\varepsilon_1} - \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_{-\infty}^{z_1} d\xi_1 (\mathbf{V}_\perp^2 \chi_1) \right] u_1 \times \\ & \times \exp \left( i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_1 + i\chi_1 - \frac{i}{2\varepsilon_1} \int_{-\infty}^{z_1} d\xi_1 (\mathbf{V}_\perp \chi_1)^2 \right), \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2(\mathbf{r}_2) = & \bar{u}_2 \left[ 1 - \frac{i\gamma_4 \gamma \mathbf{V}_\perp \chi'_2}{2\varepsilon_2} + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_{z_2}^{\infty} d\xi_2 (\mathbf{V}_\perp^2 \chi') \right] \times \\ & \times \exp \left( -i\mathbf{p}_2 \mathbf{r}_2 - i\chi'_2 - \frac{i}{2\varepsilon_2} \int_{z_2}^{\infty} d\xi_2 (\mathbf{V}_\perp \chi'_2)^2 \right), \end{aligned}$$

где

$$\chi_1 = \chi_1(\rho_1, z_1) = - \int_{-\infty}^{z_1} d\xi_1 U(\rho_1, \xi_1), \quad \chi'_2 = \chi'_2(\rho_2, z_2) = \int_{z_2}^{\infty} d\xi_2 U(\rho_2, \xi_2),$$

причем в выражении для  $\chi_1$  ось  $z_1$  направлена вдоль  $\mathbf{p}_1$ , а в выражении для  $\chi_2$  ось  $z_2$  направлена вдоль  $\mathbf{p}_2$ ; соответственно векторы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ортогональны  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ . Если перейти от координат  $\rho_2, z_2$  к координатам  $\rho_1, z_1$ , то функция  $\bar{\psi}_2(\mathbf{r}_2)$  приобретет вид

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2(\mathbf{r}_1) = & \bar{u}_2 \left[ 1 - \frac{i\gamma_4 \gamma \mathbf{V}_\perp \chi_2}{2\varepsilon_2} + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_{z_1}^{\infty} d\xi_1 (\mathbf{V}_\perp^2 \chi_2) \right] \times \\ & \times \exp \left[ -i\mathbf{p}_2 \mathbf{r}_1 - i\chi_2 - i \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{V}_\perp}{\varepsilon_2} \int_{z_1}^{\infty} \chi_2 d\xi_1 - \frac{i}{2\varepsilon_2} \int_{z_1}^{\infty} d\xi_1 (\mathbf{V}_\perp \chi_2)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

$$\chi_2 = \chi_2(\rho_1, z_1) = \int_{z_1}^{\infty} d\xi_1 U(\rho_1, \xi_1).$$

Волновые функции (4.3.12) и (4.3.13) справедливы в пространственной области  $|z_1| \lesssim \bar{z}$  и  $\rho_1 \gtrsim \bar{\rho}$ , где  $\bar{z}$  и  $\bar{\rho}$  удовлетворяют неравенствам  $\bar{z} \ll \varepsilon_1 z \bar{\rho}^2$ ,  $\bar{z} \rho_{2\perp} \ll \varepsilon_2 \bar{\rho}$ .

При данном значении переданного импульса  $\mathbf{q}$  интеграл в правой части (4.3.3) определяет эффективную область изменения пространственных переменных:  $\rho_{\text{eff}} \sim q_\perp^{-1}$  и  $z_{\text{eff}} \sim q_z^{-1}$ , где  $q_z$  — компонента вектора  $\mathbf{q}$ , параллельная  $\mathbf{p}_1$ . Очевидно, мы можем применять для вычисления матричного элемента (4.3.3) волновые функции (4.3.12) и (4.3.13), если  $z_{\text{eff}} \lesssim \bar{z}$  и  $\rho_{\text{eff}} \gtrsim \bar{\rho}$ . Отсюда следуют ограничения на область переданных импульсов, в которой

матричный элемент тормозного излучения может быть вычислен с помощью волновых функций (4.3.12) и (4.3.13):

$$\frac{q_{\perp}^2}{\varepsilon_1 q_z} \ll 1, \quad \frac{p_{2\perp} q_{\perp}}{\varepsilon_1 q_z} \ll 1. \quad (4.3.14)$$

Подставляя волновые функции (4.3.12) и (4.3.13) в (4.3.3), получим (с точностью до членов порядка  $q_{\perp}^2/\varepsilon_1 q_z$  и  $p_{2\perp} q_{\perp}/\varepsilon_1 q_z$ ) следующее выражение для матричного элемента:

$$M = i \int d^2\rho dz \exp(iq_{\perp}\rho + iq_z z + i\chi(\rho)) \times \\ \times \bar{u}_2 \left[ \frac{\gamma_{\perp} \nabla_{\perp} \chi_2(\rho) \gamma_4 \hat{e}}{2\varepsilon_2} + \frac{\hat{e} \gamma_4 \gamma_{\perp} \nabla_{\perp} \chi_1(\rho)}{2\varepsilon_1} - \hat{e} \frac{p_{2\perp} \nabla_{\perp}}{\varepsilon_2} \int_z^{\infty} d\xi \chi_2(\rho, \xi) \right] u_1, \quad (4.3.15)$$

где  $\chi(\rho) = - \int_{-\infty}^{\infty} dz U(\rho, z)$  (индекс у переменных  $\rho_1$  и  $z_1$  опущен). Выполнив в (4.3.15) интегрирование по  $z$  по частям и интегрирование по азимутальному углу вектора  $\rho$ , получим

$$M = \frac{2\pi i}{q_z} \bar{u}_2 \left( \frac{q_{\perp} \gamma_{\perp} \gamma_4 \hat{e}}{2\varepsilon_2} + \frac{\hat{e} \gamma_4 q_{\perp} \gamma_{\perp}}{2\varepsilon_1} + i\hat{e} \frac{p_{2\perp} q_{\perp}}{\varepsilon_2 q_z} \right) u_1 B(q_{\perp}, q_z), \quad (4.3.16)$$

$$B(q_{\perp}, q_z) = \frac{1}{q_{\perp}} \int_0^{\infty} \rho d\rho J_1(q_{\perp} \rho) e^{i\chi(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} U(\rho, z). \quad (4.3.17)$$

Так как  $M$  является функцией  $q_z$  и  $q_{\perp}$ , то удобно выразить произведение дифференциалов  $do do_2$  через переменные  $q$  и  $\vartheta_1$ , где  $\vartheta_1$  — угол между  $p_1$  и  $k$ . Используя законы сохранения  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \omega$ ,  $p_1 = p_2 + k + q$  и учитывая, что в области больших энергий основной вклад в излучение вносят углы  $\vartheta_1 \sim m/\varepsilon_1$ ,  $\vartheta \sim m/\varepsilon_2$ , получим с точностью до членов порядка  $m^2/\varepsilon_1^2$

$$q_z = \delta + \frac{\omega \vartheta_1^2}{2} + \frac{\varepsilon_2 \vartheta^2}{2}, \quad q_{\perp}^2 = (\omega \vartheta_1)^2 + (\varepsilon_2 \vartheta)^2 + 2\omega \varepsilon_2 \vartheta_1 \vartheta \cos \varphi,$$

где  $\vartheta$  — угол между  $p_1$  и  $p_2$  и  $\delta = \omega m^2/2\varepsilon_1 \varepsilon_2$ . Отсюда легко найти якобиан перехода

$$\left| \frac{\partial(\vartheta^2, \varphi)}{\partial(q_z, q_{\perp}^2)} \right| = \frac{2\varepsilon_1}{m^2 \varepsilon_2 \omega} \left\{ a - \left[ \left( \frac{\varepsilon_1 \vartheta_1}{m} \right)^2 - b \right]^2 \right\}^{-1/2}, \\ a = \frac{4q_{\perp}^2}{m^2 \delta} \left( q_z - \delta - \frac{q_{\perp}^2}{2\varepsilon_1} \right), \quad b = \frac{1}{\delta} \left( q_z - \delta - \frac{q_{\perp}^2}{2\varepsilon_1} + \frac{q_{\perp}^2 \delta}{m^2} \right),$$

Из положительности радикала следует, что  $q_z \geq \delta + q_{\perp}^2/2\varepsilon_1$ .

Вводя далее вместо  $\vartheta_1$  новую переменную  $y$ :

$$\left( \frac{\varepsilon_1 \vartheta_1}{m} \right)^2 = b + y \sqrt{a}, \quad -1 \leq y \leq 1,$$

получим

$$\left| \frac{\partial(\vartheta^2, \varphi)}{\partial(q_z, q_{\perp}^2)} \right| = \frac{2\varepsilon_1}{m^2 \varepsilon_2 \omega} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

и, следовательно,

$$d\omega d\omega_2 \approx \vartheta_1 d\vartheta_1 \vartheta d\vartheta d\varphi d\varphi_1 = \frac{2\delta}{m^2\omega} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} d^3q,$$

где  $d^3q = dq_z q_\perp dq_\perp d\psi$  ( $\varphi_1$  и  $\psi$  — азимутальные углы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}$ ). Заметим, что угол  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , а якобиан перехода одинаков для интервалов  $(0, \pi)$  и  $(\pi, 2\pi)$ , поэтому в формуле для сечения  $d\sigma$  выражение  $dy d^3q$  необходимо умножить на два. Окончательная формула для  $d\sigma$  имеет вид

$$d\sigma = \frac{\alpha}{16\pi^4} \frac{e_2}{e_1} |M|^2 \frac{\delta}{m^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} d^3q. \quad (4.3.18)$$

Из (4.3.16) и (4.3.18) следует, что основной вклад в спектр излучения вносят значения импульса  $q_z$ , по порядку величины равные  $q_z \sim q_{z \min} = \delta + q_\perp^2/2e_1$ . Подставляя это значение  $q_z$  в (4.3.14), придем к следующим ограничениям на область переданных импульсов  $q_\perp$ , в которой справедлива формула (4.3.16):

$$\frac{\varepsilon}{\omega} \frac{q_\perp^2}{m^2} \ll 1, \quad \frac{\varepsilon}{\omega} \frac{p_{2\perp}}{m} \frac{q_\perp}{m} \ll 1.$$

В рассматриваемом приближении  $p_2 q_\perp \approx -y q_\perp m \sqrt{(q_z - \delta)/\delta}$ , поэтому после усреднения по поляризациям и интегрирования по  $y$  мы получим

$$d\sigma = \frac{e^2}{\pi} \frac{e_2}{e_1} \frac{q_\perp^2}{q_z^2} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} - 2 \frac{\delta}{q_z} \left( 1 - \frac{\delta}{q_z} \right) \right] |B(q_\perp, q_z)|^2 \frac{\delta}{m^2} \frac{d\omega}{\omega} d^3q. \quad (4.3.19)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи (4.3.19). Если  $|\chi| \ll 1$ , т. е. если справедливо борновское приближение, то входящую в  $B(q_\perp, q_z)$  экспоненту  $\exp(i\chi(\rho))$  можно разложить в ряд. При этом в первом приближении  $B = (2\pi)^{-1} U(\mathbf{q})$ , где  $U(\mathbf{q})$  — фурье-компоненты потенциала, и

$$d\sigma = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{e_2}{e_1} \frac{q_\perp^2}{q_z^2} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} - 2 \frac{\delta}{q_z} \left( 1 - \frac{\delta}{q_z} \right) \right] |U(\mathbf{q})|^2 \frac{d\omega}{\omega} d^3q. \quad (4.3.20)$$

Если  $z \ll \delta^{-1}$ , т. е. если характерная длина вдоль импульса частицы, на которой на частицу действует внешнее поле, мала по сравнению с характерной для излучения длиной  $q_z^{-1} \sim \delta^{-1}$ , то входящую в  $B(q_\perp, q_z)$  экспоненту  $\exp(iq_z z)$  можно заменить на единицу:

$$\begin{aligned} B(q_\perp, q_z) &= \\ &= -\frac{1}{q_\perp} \int_0^\infty \rho d\rho J_1(q_\perp \rho) e^{i\chi(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \chi(\rho) = i \int_0^\infty \rho d\rho J_0(q_\perp \rho) (1 - e^{i\chi(\rho)}). \end{aligned}$$

Дифференциальное сечение излучения в этом случае после интегрирования по  $q_z$  приобретает вид

$$d\sigma = d\omega(q_\perp) d\sigma_S(q_\perp), \quad (4.3.21)$$

где  $d\sigma_S(q_{\perp})$  — сечение упругого рассеяния (1.7.40) и  $d\omega(q_{\perp})$  — вероятность излучения

$$d\omega(q_{\perp}) = \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{e_2}{\varepsilon_1} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) \frac{q_{\perp}^2}{m^2} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (4.3.22)$$

Мы рассмотрели случай малых переданных импульсов. Но с помощью волновых функций (4.3.12) и (4.3.13) можно также определить матричный элемент тормозного излучения и в том случае, когда  $q_{\perp} \sim m$ . Мы приведем здесь только окончательное выражение [13] для  $M$ , справедливое при  $\bar{z}q_z \ll 1$ :

$$M = i\bar{u}_2 \left[ \hat{e} \frac{i\hat{p}_1 - m - iq\gamma}{\varepsilon_1^2 - (p_1 - q)^2 - m^2} \gamma_4 + \gamma_4 \frac{i\hat{p}_2 - m + iq\gamma}{\varepsilon_2^2 - (p_2 + q)^2 - m^2} \hat{e} \right] u_1 (1 - e^{i\chi(\rho)})$$

( $\bar{z}$  — длина, на которой на частицу действует поле).

Сечение тормозного излучения теперь имеет вид

$$d\sigma(q, y) = d\omega(q, y) d\sigma_S(q_{\perp}), \quad (4.3.23)$$

где  $d\sigma_S(q_{\perp})$  — сечение упругого рассеяния (1.7.40) и  $d\omega(q, y)$  — вероятность излучения

$$d\omega(q, y) = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{e_2}{\varepsilon_1} \left| \bar{u}_2 \left( \hat{e} \frac{i\hat{p}_2 + i\hat{k} + m}{2(p_2 k)} \gamma_4 - \gamma_4 \frac{i\hat{p}_1 - i\hat{k} - m}{2(p_1 k)} \hat{e} \right) \right|^2 \frac{\delta}{m^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} dq_z.$$

Выполнив суммирование по поляризациям всех частиц и интегрирование по  $y$  и  $q_z$ , получим

$$d\sigma(q_{\perp}) = d\omega(q_{\perp}) d\sigma_S(q_{\perp}), \quad (4.3.24)$$

$$d\omega(q_{\perp}) = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{e_2}{\varepsilon_1} \left[ \frac{2\xi^2 \left( 1 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) + 1}{\xi \sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right] \frac{d\omega}{\omega}, \quad (4.3.25)$$

где  $\xi = q_{\perp}/2m$ . Если  $\xi \ll 1$ , то формула (4.3.25) переходит в (4.3.22); если же  $\xi \gg 1$ , то

$$d\omega(q_{\perp}) = \frac{4\alpha}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{e_2}{\varepsilon_1} \left( 1 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) \ln 2\xi.$$

При  $|\chi| \ll 1$  в выражении для сечения упругого рассеяния  $d\sigma_S(q_{\perp})$  можно выполнить разложение  $\exp(i\chi(\rho))$ . В первом приближении формула (4.3.24) дает при этом результат первого борновского приближения для сечения тормозного излучения.

Если  $|\chi| \gg 1$ , то, согласно (1.7.48),  $d\sigma_S = 2\pi\rho d\rho$  и

$$d\sigma = d\omega(q_{\perp}) \Big|_{q_{\perp} = \frac{\partial\chi(\rho)}{\partial\rho}} \cdot 2\pi\rho d\rho. \quad (4.3.26)$$

Помножив  $d\sigma$  на  $\omega$ , получим интенсивность излучения  $dI = \omega d\sigma$ . При  $|\chi| \gg \hbar$  и  $\hbar\omega \ll \varepsilon_1$ , т. е. в классическом пределе,

$$dI = dI_{cl} = \frac{e^2}{\pi} \left[ \frac{2\xi^2 + 1}{\xi \sqrt{\xi^2 + 1}} \ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) - 1 \right] d\omega \rho d\rho, \quad (4.3.27)$$

где  $\xi = q_{\perp}(\rho)/2m$ ,  $q_{\perp}(\rho) = \partial\chi(\rho)/\partial\rho$ .

4.3.3. Сечение тормозного излучения в кулоновском поле ядра в борновском приближении. С помощью полученных в предыдущих разделах формул можно определить сечение тормозного излучения электрона в кулоновском поле ядра. Для этого нужно вместо  $U(r)$  и  $U(q)$  подставить в (4.3.7), (4.3.17) и (4.3.24)

$$U(r) = -\frac{Z\alpha}{r}, \quad U(q) = -\frac{4\pi Z\alpha}{q^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (4.3.28)$$

Рассмотрим сперва борновское приближение, справедливое при  $Z\alpha/v \ll 1$ . Проинтегрировав (4.3.7) по  $do_2$ , получим дифференциальное сечение  $d\sigma_\gamma$ , описывающее распределение фотонов по углам и частотам, независимо от угла рассеяния электронов:

$$\begin{aligned} d\sigma_\gamma = & \frac{Z^2\alpha^3}{8\pi} \frac{d\omega}{\omega} d\theta \frac{p_2}{p_1} \left\{ \frac{8 \sin^2 \vartheta_1 (2\varepsilon_1^2 + m^2) m^2}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^4} - \right. \\ & - \frac{2(5\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 3m^2)}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} - \frac{2(p_1^2 - \omega^2)}{(p_1 k) (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} + \frac{4\varepsilon}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)} + \\ & + \frac{1}{p_1 p_2} \ln \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + p_1 p_2 - m^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - p_1 p_2 - m^2} \left[ \frac{4\varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_1 (3\omega m^2 - p_1^2 \varepsilon_2) m^2}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^4} + \frac{4\varepsilon_1^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} + \right. \\ & + \left. \frac{(2m^2 - 2(7\varepsilon_1^2 - 3\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2))^2}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} + \frac{2\omega (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 - m^2)}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} \right] - \\ & - 4 \ln \frac{\varepsilon_2 + p_2}{\varepsilon_2 - p_2} \frac{1}{p_2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)} + \frac{1}{m^2} \ln \frac{\sqrt{p_1 k} + p_2}{\sqrt{p_1 k} - p_2} \times \\ & \times \left[ \frac{4m^2}{(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} - \frac{6\omega}{\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1} - \frac{2\omega (p_1^2 - \omega^2)}{(p_1 k) (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)} \right]. \quad (4.3.29) \end{aligned}$$

В случае больших энергий ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \gg m$ ) и малых углов  $\vartheta$  эта формула принимает вид

$$\begin{aligned} d\sigma_\gamma = & \frac{2Z^2}{\pi} \alpha r_0^3 \frac{d\omega}{\omega} d\theta \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{m^2} \vartheta_1^2\right)^2} \left[ \frac{16\varepsilon_1^2 \varepsilon_2}{m^4} \frac{\vartheta_1^2}{\left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{m^2} \vartheta_1^2\right)^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{m^2} + 2 \ln \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m\omega} \left[ \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{m^2} - \frac{4\varepsilon_1^2 \varepsilon_2}{m^4} \frac{\vartheta_1^2}{\left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{m^2} \vartheta_1^2\right)^2} \right] \right\}. \quad (4.3.30) \end{aligned}$$

Проинтегрировав выражение (4.3.7) по углам, мы получим дифференциальное сечение излучения  $d\sigma_\omega$  в интервале частот  $\omega, \omega + d\omega$ , независимо от направления импульсов фотона и электрона  $k$  и  $p_2$ :

$$\begin{aligned} d\sigma_\omega = & \overline{\Phi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{p_2}{p_1} \left\{ \frac{4}{3} - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1^2 p_2^2} + \right. \\ & + m^2 \left( \frac{\eta_1 \varepsilon_2}{p_1^2} + \frac{\eta_2 \varepsilon_1}{p_2^2} - \frac{\eta_1 \eta_2}{p_1 p_2} \right) + L \left[ \frac{8}{3} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{p_1 p_2} + \frac{\omega^2}{p_1^2 p_2^2} (\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + p_1^2 p_2^2) + \right. \\ & \left. + \frac{m^2 \omega}{2 p_1 p_2} \left( \eta_1 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + p_1^2}{p_1^2} - \eta_2 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + p_2^2}{p_2^2} + \frac{2\omega \varepsilon_1 \varepsilon_2}{p_1^2 p_2^2} \right) \right], \quad (4.3.31) \end{aligned}$$

где

$$\bar{\Phi} = r_0^2 Z^2 \alpha, \quad L = \ln \frac{\rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 - \varepsilon_1 \omega}{\rho_1^2 - \rho_1 \rho_2 - \varepsilon_1 \omega} = 2 \ln \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \rho_1 \rho_2 - m^2}{m \omega},$$

$$\eta_1 = \ln \frac{\varepsilon_1 + \rho_1}{\varepsilon_1 - \rho_1} = 2 \ln \frac{\varepsilon_1 + \rho_1}{m}, \quad \eta_2 = 2 \ln \frac{\varepsilon_2 + \rho_2}{m}, \quad \rho_{1,2} = |\mathbf{p}_{1,2}|.$$

При малых энергиях,  $\rho_1 \ll m$ , это выражение сильно упрощается:

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3} \bar{\Phi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{m^2}{\rho_1^2} \ln \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} =$$

$$= \frac{8}{3} \bar{\Phi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{m}{T_1} \ln \frac{(V T_1 + V T_1 - \omega)^2}{\omega}, \quad T_1 = \frac{\rho_1^2}{2m}. \quad (4.3.32)$$

Мы видим, что в нерелятивистской области сечение излучения приблизительно обратно пропорционально частоте фотона. При максимально возможной частоте,  $\omega = T_1$ , сечение обращается в нуль. При  $\omega \rightarrow 0$  интенсивность излучения  $\omega d\sigma_\omega$  логарифмически расходится. Эта расходимость связана с расходимостью резерфордского сечения при малых углах и характерна для чисто кулоновского поля. Учет экранирования поля ядра атомными электронами, как мы увидим далее, так же как и в случае упругого рассеяния, устраняет эту расходимость.

В крайне релятивистской области при  $\varepsilon_1 \gg m$ ,  $\varepsilon_2 \gg m$  сечение излучения принимает вид

$$d\sigma_\omega = 4\bar{\Phi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{2}{3} \right) \left( \ln \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m\omega} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 4\bar{\Phi} \frac{d\omega}{\omega} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\omega}{\varepsilon_1} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{\omega}{\varepsilon_1} \right) \right] \left[ \ln \left( \frac{2\varepsilon_1}{m} \frac{(\varepsilon_1 - \omega)}{\omega} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (4.3.33)$$

Мы видим, что вероятность излучения электроном определенной части своей энергии, т. е. вероятность излучения при заданном отношении  $\omega/\varepsilon_1$ , растет приблизительно пропорционально логарифму отношения  $\varepsilon_1/m$ .

Интенсивность излучения, т. е. произведение частоты на сечение,  $\omega d\sigma_\omega$ , в релятивистском, так же как и в нерелятивистском случае, логарифмически расходится при  $\omega \rightarrow 0$ .

**4.3.4. Экранирование.** При вычислении сечения тормозного излучения мы считали поле ядра чисто кулоновским. Такое предположение является правильным для расстояний от ядра меньших, чем радиус  $K$ -оболочки атома. На больших расстояниях поле ядра частично или полностью экранируется полем атомных электронов, благодаря чему происходит уменьшение сечения тормозного излучения. Поэтому, для того чтобы выяснить, насколько правильны наши результаты, следует оценить ту область расстояний от ядра, которая является существенной в процессе тормозного излучения. Из вида интеграла, определяю-

щего компоненту Фурье кулоновского потенциала, следует, что главный вклад в интеграл вносят расстояния порядка

$$R_0 \sim \frac{1}{q}, \quad q = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}|. \quad (4.3.34)$$

Действительно, большие  $r$  несут существенны из-за сильно осциллирующей функции  $\exp(-iqr)$ , а малые — из-за малости соответствующего объема  $4\pi^2 r^2 dr$ . Поэтому можно считать, что  $R_0$  определяет по порядку величины наиболее существенные значения прицельного параметра. С другой стороны, как показывает формула (4.3.7), дифференциальное сечение тормозного излучения особенно велико при малых  $q$ , которым, согласно (4.3.34), соответствуют большие значения прицельного параметра. Очевидно, эффект экранирования не будет играть роли, если максимальное значение  $R_0$ , соответствующее минимальному значению  $q$ , будет значительно меньше эффективных размеров атома  $a$ . Напротив, при выполнении неравенства  $R_{0\max} \gg a$  должно иметь место полное экранирование кулоновского поля ядра.

Минимальное значение  $q$  равно, очевидно,  $q_{\min} = p_1 - p_2 - \omega$ , где  $p_1$  и  $p_2$  связаны соотношением  $\sqrt{m^2 + p_1^2} = \omega + \sqrt{m^2 + p_2^2}$ .

При малых энергиях и малых частотах

$$q_{\min} = p_1 - p_2 - \omega \approx \frac{m\omega}{p_1} - \omega \approx \frac{m\omega}{p_1}, \quad p_1 \ll m, \quad \omega \ll p_1.$$

В крайне релятивистской области

$$q_{\min} = \sqrt{\varepsilon_1^2 - m^2} - \sqrt{\varepsilon_2^2 - m^2} - \omega \approx \frac{m^2\omega}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_1 \gg m, \quad \varepsilon_2 \gg m.$$

Таким образом, максимальное значение  $R_0$  определяется формулами

$$R_{0\max} \sim \begin{cases} \frac{p_1}{m\omega}, & p_1 \ll m, \quad \omega \ll p_1, \\ \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{m^2\omega}, & \varepsilon_1 \gg m, \quad \varepsilon_2 \gg m, \end{cases} \quad (4.3.35)$$

из которых следует, что при достаточно малых частотах  $R_{0\max}$  может превышать размеры атома. Иначе говоря, при  $\omega \rightarrow 0$  всегда наступает полное экранирование, приводящее к значительному уменьшению сечения тормозного излучения. В частности, при  $\omega \rightarrow 0$  величина  $\omega d\sigma_\omega$  будет конечной, в отличие от случая чисто кулоновского поля, когда эта величина логарифмически расходится.

В релятивистской области  $R_{0\max}$  может быть большим и при частотах порядка первичной энергии электрона. Действительно, если  $\omega \sim \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 \gg m$ , то  $R_{0\max} \sim \varepsilon_1/m^2$ .

Если пользоваться моделью атома Томаса — Ферми и считать эффективный радиус атома равным  $a = a_0 Z^{-1/3}$ , где  $a_0$  — радиус атома водорода, то при энергии электрона, превосходящей  $\varepsilon_0 =$

$= 137m/Z^{1/3}$ , величина  $R_{0\max}$  будет больше  $a$ . Поэтому в области больших энергий всегда необходим учет экранирования.

Чтобы учесть экранирование поля ядра внешними электронами, нужно определить компоненту Фурье суммарного потенциала, создаваемого как зарядом ядра, так и зарядом электронов. Этот потенциал удовлетворяет уравнению

$$\Delta A_0^{(e)} = -\rho,$$

где  $\rho$  — плотность заряда,  $\rho = -Ze\delta(\mathbf{r}) + en(\mathbf{r})$  и  $n(\mathbf{r})$  — плотность электронов в атоме. Переходя к компонентам Фурье, получим, очевидно,

$$A_{(e)}^0(q) = -\frac{e[Z - F(q)]}{q^2}, \quad (4.3.36)$$

где  $F(q)$  — атомный форм-фактор;

$$F(q) = \int d^3x n(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}.$$

Мы видим, таким образом, что для учета экранирования нужно заменить  $Z$  на  $Z - F(q)$ . В модели Томаса — Ферми

$$F(q) = Zf(qZ^{-1/3}), \quad (4.3.37)$$

где  $f(x)$  — некоторая универсальная функция, одинаковая для всех атомов, значения которой могут быть определены с помощью численного интегрирования. Вводя атомный форм-фактор в модели Томаса — Ферми, можно представить спектр излучения в релятивистской области в следующем виде [11]:

$$d\sigma_\omega = Z^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega \varepsilon_1^2} \left\{ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \left[ \Phi_1(\xi) - \frac{4}{3} \ln Z \right] - \frac{2}{3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \Phi_2(\xi) - \frac{4}{3} \ln Z \right] \right\}, \quad (4.3.38)$$

где

$$\xi = 200\alpha \frac{a}{R_{0\max}} = 100 \frac{m\omega}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 Z^{1/3}},$$

$\Phi_1(\xi)$  и  $\Phi_2(\xi)$  — функции от  $\xi$ , изображенные на рис. 4.5. Величина  $\xi$  определяет эффект экранирования. Малые  $\xi$  соответствуют большому экранированию, а большие  $\xi$  — малому экранированию. Если  $\xi = 0$ , то можно говорить о полном экранировании; в этом случае

$$\Phi_1(0) = 4 \ln 183, \quad \Phi_2(0) = 4 \ln 183 - 2/3$$

и сечение (4.3.38) приобретает вид

$$d\sigma_{\omega} = Z^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{4}{e_1^2} \left\{ \left( \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \frac{2}{3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) \ln \left( 183 Z^{-1/3} \right) + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{9} \right\} \quad (4.3.39)$$

$$\left( \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m\omega} \gg 137 Z^{-1/3}, \quad \varepsilon_1 \gg 137 m Z^{-1/3} \right).$$

Сечение тормозного излучения в этих условиях при заданном отношении  $\omega/\varepsilon_1$  не зависит от первичной энергии электрона  $\varepsilon_1$ . При больших  $\zeta$  этот вывод становится неправильным.

При  $\zeta \gg 1$  эффект экранирования не играет роли. Малая поправка, вносимая им, может быть учтена, если заменить в формуле (4.3.33) в последней скобке слагаемое  $1/2$  на  $1/2 + c(\zeta)$ , значения  $c(\zeta)$  приведены в таблице.

| $\zeta$    | 2    | 2,5  | 3    | 4    | 5     | 6    | 8    | 10   | 15   |
|------------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|
| $c(\zeta)$ | 0,21 | 0,16 | 0,13 | 0,09 | 0,065 | 0,05 | 0,03 | 0,02 | 0,01 |

На рис. 4.6 представлена зависимость интенсивности тормозного излучения от отношения энергии фотона к кинетической

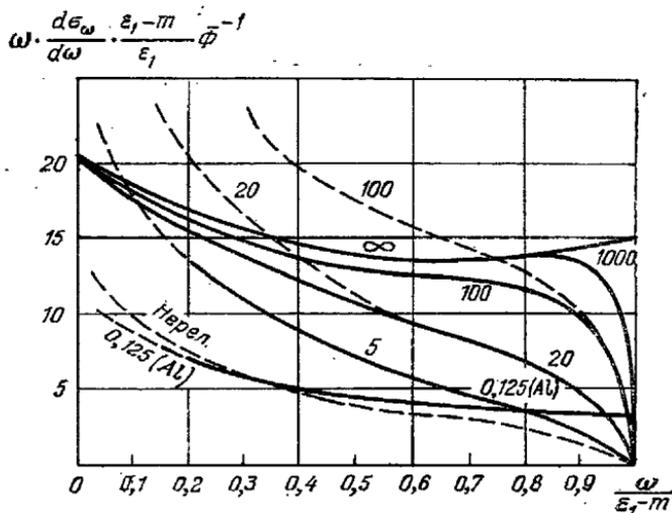


Рис. 4.6.

энергии электрона  $\omega/(\varepsilon_1 - m)$  [11]. Пунктирные кривые не учитывают экранирования и справедливы для всех элементов (заряд ядра  $Ze$  содержится только в величине  $\bar{\Phi}$ ). Рядом с кривыми указаны начальные энергии  $\varepsilon_1 - m$  в единицах  $m$ . Сплошные

кривые учитывают экранирование и относятся к свинцу,  $Z = 82$  (кроме сплошной кривой  $(\varepsilon_1 - m)/m = 0,125$ , которая относится к алюминию). Они приближаются в области малых частот к кривой  $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ , относящейся к случаю полного экранирования. Нерелятивистская кривая для алюминия построена с учетом точных волновых функций электрона для сплошного спектра (см. п. 4.3.7). Мы видим, что для легких элементов в нерелятивистской области экранирование мало существенно.

Заметим, что применение борновского приближения, которым мы пользовались, может привести к ошибке в случае больших  $Z$  не только в нерелятивистской области. Это связано с тем, что параметр  $Z\alpha/v$  в области больших энергий и больших  $Z$  не мал, а равен  $Z/137$ . Отклонение от борновского приближения в релятивистской области заметно только при больших значениях  $q$ , для которых экранирование не играет роли. Поэтому поправки к сечению тормозного излучения, обусловленные отклонением от борновского приближения и эффектом экранирования, просто складываются (см. п. 4.3.6).

**4.3.5. Потеря энергии на излучение.** Зная сечение тормозного излучения, можно определить среднюю потерю энергии электрона при его движении через вещество. Эта величина, отнесенная к единице пути электрона, равна, очевидно,

$$-\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)_r = N \int_0^{\varepsilon_1 - m} \sigma_\omega \omega d\omega,$$

где  $N$  — число атомов в единице объема вещества и  $\sigma_\omega = d\sigma_\omega/d\omega$ . Если определить сечение  $\Phi_r$  потери энергии на излучение в виде

$$\Phi_r = \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_1 - m} \omega \sigma_\omega d\omega, \quad (4.3.40)$$

то потеря энергии равна

$$-\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)_r = N\varepsilon_1\Phi_r. \quad (4.3.41)$$

Используя (4.3.31), можно вычислить  $\Phi_r$ :

$$\Phi_r = \bar{\Phi} \left\{ \frac{12\varepsilon_1^2 + 4m^2}{3\varepsilon_1\rho_1} \ln \frac{\varepsilon_1 + \rho_1}{m} - \frac{(8\varepsilon_1 + 6\rho_1)m^2}{3\varepsilon_1\rho_1^2} \left( \ln \frac{\varepsilon_1 + \rho_1}{m} \right)^2 - \frac{4}{3} + \frac{2m^2}{\varepsilon_1\rho_1} F \left( \frac{2\rho_1(\varepsilon_1 + \rho_1)}{m^2} \right) \right\},$$

где  $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy$ . Замечая, что

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{(\ln x)^2}{2} - F\left(\frac{1}{x}\right)$$

и что при малых  $x$  справедливо разложение

$$F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \dots,$$

можно определить  $\Phi_r$  в двух предельных случаях, малых и больших энергий:

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \frac{16}{3} \bar{\Phi}, & \varepsilon_1 &\ll m, \\ \Phi_r &= 4 \left( \ln \frac{2\varepsilon_1}{m} - \frac{1}{3} \right) \bar{\Phi}, & \varepsilon_1 &\gg m. \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

Мы видим, что в нерелятивистской области отношение излученной энергии к начальной энергии электрона не зависит от начальной энергии; в релятивистском же случае  $\Phi_r$  логарифмически растет с  $\varepsilon_1$ . Этот результат справедлив, однако, только в пренебрежении эффектом экранирования. Если учитывать экранирование, то взамен второй формулы (4.3.42) мы получим постоянное сечение

$$\Phi_r = \bar{\Phi} (4 \ln (183Z^{-1/3}) + 2/9), \quad \varepsilon_1 \gg 137mZ^{-1/3}. \quad (4.3.43)$$

Значения  $\Phi_r/\bar{\Phi}$  для различных энергий приведены в таблице.

| $\frac{\varepsilon_1 - m}{m}$                | 0    | 1   | 2   | 5    | 10   | 20   | 50   | 100  | 200  | 1000 | $\infty$ |
|----------------------------------------------|------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $\frac{\Phi_r}{\bar{\Phi}}$ H <sub>2</sub> O | 5,33 | 5,5 | 6,5 | 9,1  | 11,2 | 12,9 | 14,6 | 15,6 | 16,4 | 17,5 | 18,3     |
| $\frac{\Phi_r}{\bar{\Phi}}$ Рь               | 5,33 | 5,5 | 6,5 | 8,75 | 10,3 | 11,4 | 12,6 | 13,6 | 13,8 | 14,5 | 15,2     |

Потеря энергии электрона на единице пути, обусловленная его неупругими столкновениями с атомами, определяется формулой [14]

$$-\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)_i = 2\pi r_0^2 m N Z \ln \frac{\varepsilon_1^2}{2mI^2}, \quad (4.3.44)$$

где  $I$  — средний потенциал ионизации, равный приближенно  $I = 13,5Z$  эВ. Отношение потерь на излучение к потерям на столкновения приближенно равно

$$\frac{-(d\varepsilon_1/dx)_r}{-(d\varepsilon_1/dx)_i} = \frac{1}{1600} \frac{\varepsilon_1 Z}{m} \quad (4.3.45)$$

(предполагается, что логарифмический член в обеих формулах (4.3.42) и (4.3.44) имеет примерно одно и то же значение).

Из формулы (4.3.45) следует, что потери на столкновения и излучение становятся одинаковыми при энергии, равной  $\varepsilon_0 = 1600m/Z$ . При больших энергиях потери на излучение превосходят потери на столкновения ( $\varepsilon_0$  равно 10 МэВ для свинца, 55 МэВ для меди, 200 МэВ для воздуха).

4.3.6. Тормозное излучение в кулоновском поле ядра в высокоэнергетическом приближении. Борновское приближение, которое мы до сих пор использовали, справедливо только при достаточно малых  $Z$ . Для тяжелых ядер оно неприменимо. Однако при больших энергиях в этом случае может быть использовано высокоэнергетическое приближение. Переходя к рассмотрению этого вопроса, заметим, что основной вклад в сечение излучения в кулоновском поле ядра вносят переданные импульсы  $q_z \sim \delta$  и  $q_{\perp}$ , лежащие в интервале  $m \gg q_{\perp} \gg \delta$ . Если ввести величину  $q_0$  таким образом, что  $m^2 \omega / \varepsilon_1 \gg q_0^2 \gg \delta^2$ , то в области  $q_{\perp} \geq q_0$  можно будет для вычисления сечения тормозного излучения  $d\sigma$  пользоваться формулой (4.3.24), а в области  $q_{\perp} \leq q_0$  — формулой (4.3.17). Вычислим сперва  $d\sigma$  в области  $q_{\perp} \geq q_0$ . Считая, что потенциальная энергия  $U(r)$  имеет вид  $U(r) = (Z\alpha/r) \exp(-r/R)$ , где  $R$  — достаточно большая величина ( $R \rightarrow \infty$ ), найдем

$$\chi(\rho) = 2Z\alpha \ln \rho/R.$$

Поэтому, согласно (1.7.40), сечение упругого рассеяния имеет вид

$$d\sigma_S(q_{\perp}) = \frac{8\pi(Z\alpha)^2}{q_{\perp}^3} dq_{\perp}$$

и сечение тормозного излучения, согласно (4.3.24), совпадает с борновским сечением

$$d\sigma = 8\pi(Z\alpha)^2 dw(q_{\perp}) \frac{dq_{\perp}}{q_{\perp}^3}, \quad (4.3.46)$$

где  $dw(q_{\perp})$  определяется формулой (4.3.25). При  $q_{\perp} \ll m$  эта формула приобретает вид

$$d\sigma(q_{\perp}) = \frac{16\alpha(Z\alpha)^2}{3m^2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right) \frac{dq_{\perp}}{q_{\perp}} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (4.3.47)$$

Вычислим теперь сечение тормозного излучения при  $q_{\perp} \leq q_0$ . Подставляя найденное значение  $\chi(\rho)$  в выражение (4.3.17) для  $B(q_{\perp}, q_z)$ , получим

$$B(q_{\perp}, q_z) = -\frac{2\xi}{q_z^2} \left(\frac{2}{R}\right)^{2i\xi} \Gamma(2+i\xi) \Gamma(1+i\xi) \mathcal{F}\left(2+i\xi, 1+i\xi; 2; -\frac{q_{\perp}^2}{q_z^2}\right),$$

где  $\mathcal{F}(2+i\xi, 1+i\xi; 2; -q_{\perp}^2/q_z^2)$  — гипергеометрическая функция и  $\xi = Z\alpha$ . Так как (см. [15])

$$\mathcal{F}(2+i\xi; 1+i\xi; 2; z) = (1-z)^{-(1+i\xi)} \mathcal{F}\left(-i\xi, 1+i\xi; 2; \frac{z}{z-1}\right),$$

то

$$B(q_{\perp}, q_z) = -\frac{2\xi}{q_z^2} \left(\frac{2}{Rq}\right)^{2i\xi} (1+i\xi) \Gamma^2(1+i\xi) \mathcal{F}\left(-i\xi, 1+i\xi; 2; \frac{q_{\perp}^2}{q^2}\right),$$

где  $q^2 = q_1^2 + q_z^2$ . Замечая далее, что (см. [16])

$$(1 + i\xi) \mathcal{F}(-i\xi, 1 + i\xi; 2; 1 - x) = V(x) + i\alpha x W(x),$$

где

$$V(x) = V^*(x) = \mathcal{F}(-i\xi, i\xi; 1; 1 - x), \quad W(x) = \frac{1}{\xi^2} \frac{dV(x)}{dx},$$

найдем

$$|B(q_1, q_z)|^2 = \frac{2\alpha^2}{q^2} \Phi(x), \quad \Phi(x) = \frac{V^2(x) + \alpha^2 x^2 W^2(x)}{V^2(0)},$$

$$x = \frac{q_z^2}{q^2}, \quad V^2(0) = \frac{\text{sh}^2 \pi\alpha}{(\pi\alpha)^2}.$$

Таким образом, в области  $q_1 \leq q_0$

$$d\sigma = d\sigma^B(q_1, q_z)|_{q_1 \leq q_0} \Phi(x), \quad (4.3.48)$$

где  $d\sigma^B(q_1, q_z)|_{q_1 \leq q_0}$  — борновское сечение тормозного излучения

$$d\sigma^B(q_1, q_z)|_{q_1 \leq q_0} = \frac{4\alpha(Z\alpha)^2 \varepsilon_2}{\pi^3 m^2 \varepsilon_1} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} - 2 \frac{\delta}{q_z} \left( 1 - \frac{\delta}{q_z} \right) \right] \frac{q_1^2}{q_z^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{q_1 dq_1 dq_z}{q^2}.$$

Если  $q_1 \gg q_z$ , то  $x \ll 1$  и  $\Phi(x) \approx 1$ , поэтому  $d\sigma(q_1, q_z) \approx d\sigma^B(q_1, q_z)$ . Интегрируя это выражение по  $q_1$ , получим формулу (4.3.47), т. е. при  $q_1 \sim q_0$  формулы (4.3.46) и (4.3.48) приводят к одинаковым сечениям.

Таким образом, при всех переданных импульсах справедливо соотношение [17–19]

$$d\sigma(q_1, q_z) = d\sigma^B(q_1, q_z) \Phi(x), \quad (4.3.49)$$

где  $d\sigma^B(q_1, q_z)$  — сечение тормозного излучения, вычисленное в борновском приближении (см. (4.3.11)).

Выполнив в (4.3.49) интегрирование по  $q_z$  и  $q_1$ , получим

$$d\sigma = \frac{16\alpha(Z\alpha)^2 \varepsilon_2}{3m^2 \varepsilon_1} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) \left[ \ln \frac{m}{\delta} - \frac{1}{2} - f(\xi) \right] \frac{d\omega}{\omega}, \quad (4.3.50)$$

где

$$f(\xi) = \xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + \xi^2)}. \quad (4.3.51)$$

Мы видим, что сечение тормозного излучения меньше того значения, которое получается для него в борновском приближении. Форма тормозного спектра практически не отличается от формы спектра в борновском приближении.

**4.3.7. Точная теория тормозного излучения в нерелятивистской области.** Матричный элемент (4.3.3), определяющий сечение тормозного излучения, в кулоновском поле ядра может быть

точно вычислен в нерелятивистской области [1]. В этом случае формула (4.1.5) приобретает вид

$$U = -\frac{ie\omega}{\sqrt{2\omega}} \int d^3x \psi_2^*(r) e r \psi_1(r) \quad (4.3.52)$$

(см. формулу (4.1.10) для мультипольного излучения). Поэтому вопрос сводится к вычислению матричного элемента координаты с волновыми функциями непрерывного спектра в кулоновском поле.

Волновые функции непрерывного спектра требуют для своего полного определения задания асимптотического поведения на бесконечности, которое может быть двояким, так как на бесконечности функция  $\psi$  может иметь вид либо суммы плоской волны, соответствующей определенному импульсу, и расходящейся сферической волны, либо суммы плоской волны и сходящейся сферической волны. Волновая функция, описывающая начальное состояние электрона, должна обладать асимптотикой первого вида, а волновая функция конечного состояния — асимптотикой второго вида.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что элемент матрицы рассеяния, определяющий тормозное излучение, можно представить, во-первых, в виде

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = ie \int \bar{\psi}_2^{(1)}(x) \hat{A}^*(x) \psi_1^{(1)}(x) d^4x, \quad (4.3.53)$$

где  $\psi_{1,2}^{(1)}(x)$  — волновые функции электрона во внешнем поле в первом приближении по внешнему полю, и, во-вторых, в виде

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = e^2 \int \bar{\psi}_2^{(0)}(x_2) \{ \hat{A}^*(x_2) S_c(x_2 - x_1) \hat{A}^{(e)}(x_1) + \hat{A}^{(e)}(x_2) S_c(x_2 - x_1) \hat{A}^*(x_1) \} \psi_1^{(0)}(x_1) d^4x_1 d^4x_2, \quad (4.3.54)$$

где  $\psi_{1,2}^{(0)}(x)$  — волновые функции свободного электрона. Сравнивая оба эти выражения и учитывая, что при подстановке волновых функций свободного электрона, т. е.  $\psi^{(0)}(x)$  вместо  $\psi^{(1)}(x)$ , выражение (4.3.53) обращается в нуль, получим

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)}(x) &= \psi_1^{(0)}(x) - e \int S_c(x - x') \hat{A}^{(e)}(x') \psi_1^{(0)}(x') d^4x', \\ \bar{\psi}_2^{(1)}(x) &= \bar{\psi}_2^{(0)}(x) - e \int \bar{\psi}_2^{(0)}(x') \hat{A}^{(e)}(x') S_c(x' - x) d^4x'. \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

Эти формулы имеют наглядный смысл: так как  $S_c(x)$  является функцией Грина уравнения Дирака, то, интерпретируя  $\hat{A}^{(e)}(x) \psi^{(0)}(x)$  как плотность источников, можно сказать, что вторые слагаемые в (4.3.55) представляют собой рассеянную электронную волну, получающуюся в результате суперпозиции волн, рассеянных в различных элементах четырехмерного объема  $d^4x$ .

Суммирование получающихся в теории возмущений рядов должно в принципе приводить к точным решениям уравнений Дирака.

Подстановка в (4.3.55) вместо  $\psi^{(0)}(x)$  плоских волн  $\psi^{(0)}(x) = ue^{ipx}$  дает

$$\begin{aligned}\psi_1^{(1)}(x) &= u_1 e^{ip_1 x} - \frac{ie}{(2\pi)^4} \int \frac{if-m}{f^2+m^2} \hat{A}^{(e)}(f-p_1) u_1 e^{ifx} d^4f, \\ \bar{\psi}_2^{(1)}(x) &= \bar{u}_2 e^{-ip_2 x} - \frac{ie}{(2\pi)^4} \int \bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(p_2-f) \frac{if-m}{f^2+m^2} e^{-ifx} d^4f,\end{aligned}\quad (4.3.56)$$

где  $A^{(e)}(q)$  — фурье-компонента внешнего потенциала. В электростатическом поле  $A_0^{(e)}(q) = A_0^{(e)}(q) 2\pi\delta(q_0)$ ,  $A^{(e)}(q) = 0$

$$\begin{aligned}\psi_1^{(1)} &= u_1 e^{ip_1 x} + \frac{e}{(2\pi)^3} \int \frac{if-m}{f^2-p^2} A_0^{(e)}(f-p_1) \gamma_4 u_1 e^{ifx} d^3f, \\ \bar{\psi}_2^{(1)} &= \bar{u}_2 e^{-ip_2 x} + \frac{e}{(2\pi)^3} \int \bar{u}_2 \gamma_4 A_0^{(e)}(p_2-f) \frac{if-m}{f^2-p^2} e^{-ifx} d^3f.\end{aligned}\quad (4.3.57)$$

Легко теперь убедиться, используя правило обхода полюсов функции  $S_c(p)$ , что функции  $\psi^{(1)}(x)$  содержат при  $r \rightarrow \infty$ , кроме плоской волны, только расходящиеся волны и не содержат сходящихся волн. Это утверждение справедливо не только для первого приближения, но и для всех последующих приближений. Поэтому и точные волновые функции электрона во внешнем поле, относящиеся к непрерывному спектру, должны отличаться этим же свойством, т. е. функция начального состояния  $\psi_1(x)$  должна иметь вид суммы плоской и расходящейся сферической волн:

$$\psi_1(r) \sim e^{ipr} + \frac{C}{r} e^{ipr}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.3.58)$$

Такой же вид должна иметь и функция  $\bar{\psi}_2(r)$ , т. е. функция, комплексно-сопряженная волновой функции конечного состояния. Поэтому волновая функция конечного состояния должна иметь вид суммы плоской и сходящейся сферической волн:

$$\bar{\psi}_2(r) \sim e^{ipr} + \frac{C}{r} e^{-ipr}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.3.59)$$

В кулоновском поле в нерелятивистском приближении волновые функции с нужной асимптотикой имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\psi_1(r) &= N_1 e^{ip_1 r} \mathcal{F}(i\xi_1, 1, i(p_1 r - p_1 r)), \\ \psi_2(r) &= N_2 e^{ip_2 r} \mathcal{F}(-i\xi_2, 1, -i(p_2 r - p_2 r)),\end{aligned}\quad (4.3.60)$$

где  $\mathcal{F}$  — вырожденная гипергеометрическая функция,  $p_1$  и  $p_2$  — импульсы электронов в начальном и конечном состояниях,  $\xi = \alpha Z/v$  ( $v$  — скорость электрона) и  $N_1 = \Gamma(1 - i\xi_1) \exp(\pi\xi_1/2)$ ,  $N_2 = \Gamma(1 + i\xi_2) \exp(\pi\xi_2/2)$ .

Согласно общим правилам п. 3.4.3 дифференциальное сечение излучения фотона с частотой  $\omega$  и поляризацией  $e$  в телесном угле  $do_\nu$  равно

$$d\sigma = \frac{e^2 \omega^3 d\omega}{2(2\pi)^4} \frac{p_2}{p_1} |eD|^2 do_\nu do_2, \quad D = \int \bar{\psi}_2^*(r) r \psi_1(r) d^3x$$

( $d\omega_2$  — элемент телесного угла, в котором лежит импульс электрона после рассеяния).

Просуммированное по двум поляризациям фотона дифференциальное сечение тормозного излучения имеет вид

$$d\sigma = \frac{e^2 \omega^2 d\omega p_2}{2(2\pi)^4 p_1} \left( |D|^2 - \frac{(kD)^2}{k^2} \right). \quad (4.3.61)$$

Для вычисления  $D$  воспользуемся следующей общей формулой [17]:

$$J \equiv \int dx e^{-\lambda r} \frac{e^{iqr}}{r} \mathcal{F}(i\xi_1, 1, ip_1 r - ip_1 r) \mathcal{F}(i\xi_2, 1, ip_2 r + ip_2 r) = \\ = \frac{2\pi}{\alpha} e^{-\pi\xi_1} \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^{i\xi_1} \left( \frac{\alpha + \delta}{\gamma} \right)^{-i\xi_2} \mathcal{F}\left(1 - i\xi_1, i\xi_2, 1, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha(\gamma + \delta)}\right),$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}(q^2 + \lambda^2), \quad \beta = p_2 q - i\lambda p_2, \\ \gamma = p_1 q + i\lambda p_1 - \alpha, \quad \delta = p_1 p_2 - p_1 p_2 - \beta.$$

Ясно, что

$$D = N_1 N_2 \frac{\partial^2 J}{\partial \lambda \partial q} \Big|_{\lambda=0, q=p_1-p_2}.$$

Используя найденное таким образом значение  $D$ , можно получить следующее выражение для дифференциального сечения тормозного излучения, проинтегрированного по углам [1]:

$$d\sigma_\omega = \frac{16\pi^2 Z^2 \alpha^3}{3 p_1^2} \frac{1}{(1 - e^{-2\pi\xi_2})(e^{2\pi\xi_1} - 1)} \frac{d\omega}{\omega} x_0 \frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2, \quad (4.3.62)$$

где  $F(x_0) \equiv \mathcal{F}(i\xi_1, i\xi_2, 1, x_0)$ ,  $x_0 = -4\xi_1 \xi_2 / (\xi_1 - \xi_2)^2$ . Отсюда следует, что при  $\xi_1 \ll 1$ ,  $\xi_2 \ll 1$  справедлива формула

$$d\sigma_\omega = \frac{16 Z^2 \alpha^3}{3 p_1^2} \frac{4\pi^2 \xi_1 \xi_2}{(e^{2\pi\xi_1} - 1)(1 - e^{-2\pi\xi_2})} \frac{d\omega}{\omega} \ln \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \right). \quad (4.3.63)$$

Заменяя здесь  $\frac{(2\pi)^2 \xi_1 \xi_2}{(e^{2\pi\xi_1} - 1)(1 - e^{-2\pi\xi_2})}$  единицей, мы получим формулу (4.3.32) для сечения тормозного излучения в нерелятивистской области в борновском приближении.

Однако формула (4.3.63) имеет более широкую область применимости, чем формула (4.3.32), а именно, она применима при единственном условии:  $\xi_1 \ll 1$ ; что же касается  $\xi_2$ , то эта величина может быть произвольной.

## § 4.4. Излучение длинноволновых фотонов

### 4.4.1. «Инфракрасная катастрофа».

В предыдущем параграфе мы видели, что вероятность излучения фотона в области малых энергий обратно пропорциональна частоте:  $d\omega \sim d\omega/\omega$ , полная же вероятность излучения логарифмически расходится при  $\omega \rightarrow 0$ .

Эта расходимость в области малых энергий фотона носит название «инфракрасной катастрофы». Она обусловлена незаконностью применения обычной теории возмущений, основанной на разложении матрицы рассеяния в ряд по степеням  $e$ , к тем процессам, в которых участвуют длинноволновые, или мягкие, фотоны. Действительно, легко убедиться, что если вероятность  $\omega_1$  излучения электроном с энергией  $\varepsilon$  одного длинноволнового фотона с энергией, большей  $\omega$ , пропорциональна  $e^2 \ln(\varepsilon/\omega)$ , то вероятность излучения этим же электроном двух фотонов  $\omega_2$  с суммарной энергией, большей  $\omega$ , будет пропорциональна  $(e^2 \ln(\varepsilon/\omega))^2$ . Поэтому отношение вероятностей по порядку величины равно  $\xi \equiv \omega_2/\omega_1 \sim \sim e^2 \ln(\varepsilon/\omega)$ . Это отношение, а не величина  $e^2$ , как мы предполагали до сих пор, представляет собой параметр разложения теории возмущений в применении к процессам взаимодействия электрона с длинноволновыми фотонами. Так как параметр  $\xi$  при  $\omega \rightarrow 0$  не мал по сравнению с единицей, то теория возмущений в этих случаях, строго говоря, неприменима.

Неприменимость обычной теории возмущений связана с тем, что число фотонов, излучаемых электроном в единичном интервале энергии, стремится при  $\omega \rightarrow 0$  к бесконечности, в то время как в теории возмущений предполагается, что излучение одного фотона всегда более вероятно, чем излучение двух или большего числа фотонов.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, заметим, что если энергия  $\omega$  и импульс  $k$  фотона значительно меньше энергии  $\varepsilon$  и изменения импульса  $\Delta p$  электрона,

$$\frac{\omega}{\varepsilon} \ll 1, \quad \frac{k}{\Delta p} \ll 1, \quad (4.4.1)$$

и, кроме того, длина волны фотона  $\lambda$  значительно больше классического «радиуса» электрона  $r_0$ ,  $\lambda \gg r_0$ , то можно считать заданным движение электрона и пользоваться классической электродинамикой. Предполагая сначала для простоты, что скорость электрона мала по сравнению со скоростью света, мы можем исходить из формулы для интенсивности дипольного излучения  $d\mathcal{E}_\omega$  в интервале частот  $d\omega$ :

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8\pi}{3} |\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 d\omega, \quad \ddot{\mathbf{d}}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int \ddot{\mathbf{d}} e^{i\omega t} dt,$$

где  $\mathbf{d}$  — дипольный момент системы. При  $\omega \rightarrow 0$ , очевидно,  $(\ddot{\mathbf{d}}_\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{1}{2\pi} (\dot{\mathbf{d}}_2 - \dot{\mathbf{d}}_1)$ , где  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  — значения дипольного момента до и после излучения. В интересующем нас случае  $\dot{\mathbf{d}} = e\mathbf{v}$  и  $(\ddot{\mathbf{d}}_\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{e}{2\pi} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$  ( $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  — скорости электрона до и после излучения). Таким образом,

$$(d\mathcal{E}_\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2e^2}{3\pi} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 d\omega. \quad (4.4.2)$$

Мы видим, что интенсивность излучения в единичном интервале частот  $d\mathcal{E}_\omega/d\omega$  стремится при  $\omega \rightarrow 0$  к конечному и отличному от нуля пределу. Отсюда следует, что среднее число излучаемых электроном фотонов частоты  $\omega$ , равное  $\frac{1}{\omega} \frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega}$ , стремится при  $\omega \rightarrow 0$  к бесконечности, как и утверждалось.

Так как вероятность перехода электрона из состояния с импульсом  $p_1$  в состояние с импульсом  $p_2$  всегда конечна, то вероятность одновременного излучения бесконечного числа фотонов с бесконечно малой частотой также конечна и отлична от нуля. Поэтому вероятность излучения одного или конечного числа фотонов с  $\omega \rightarrow 0$  равняется в действительности нулю, а не бесконечности, как следует из теории возмущений.

Определим теперь вероятность  $\omega(n)$  того, что электрон излучит некоторое произвольное число  $n$  мягких фотонов, удовлетворяющих условиям (4.4.1). При выполнении этих условий излучение фотонов не влияет на движение электрона и процессы последовательного излучения фотонов будут статистически независимыми. Поэтому вероятность излучения фотонов будет определяться формулой Пуассона

$$\omega(n) = (\bar{n})^n \frac{e^{-\bar{n}}}{n!}, \quad (4.4.3)$$

где  $\bar{n}$  — среднее число излучаемых фотонов, частота которых лежит в заданном интервале  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ . Эта величина может быть определена согласно классической электродинамике. Именно, если  $dJ \equiv I d\omega d\Omega$  — классическая интенсивность излучения в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  и в телесном угле  $d\Omega$ , то

$$\bar{n} = \int d\Omega \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\omega} I. \quad (4.4.4)$$

Чтобы найти  $dJ$ , напомним, что компоненты Фурье векторного и скалярного потенциалов на расстоянии  $R$  равны

$$A_\omega = \frac{e}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) e^{i\omega t - ikr(t)} dt, \quad \varphi_\omega = \frac{e}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t - ikr(t)} dt,$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  — уравнение траектории электрона,  $\mathbf{v}(t)$  — скорость электрона и  $\mathbf{k}$  — волновой вектор фотона. Замечая, что  $\mathbf{k}A_\omega - \omega\varphi_\omega = 0$ , получим

$$\begin{aligned} dJ &= |H_\omega|^2 R^2 d\omega d\Omega = R^2 k^2 (|A_\omega|^2 - |\varphi_\omega|^2) d\omega d\Omega = \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' (\mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t') - 1) e^{i\omega(t-t') - ik[r(t) - r(t')]} \right\} d\omega d\Omega, \quad (4.4.5) \end{aligned}$$

где  $H_{\omega} = i[kA_{\omega}]$  — компонента Фурье магнитного поля в точке  $R$ .

Если частота  $\omega$  удовлетворяет условию  $\omega\tau \ll 1$ , где  $\tau$  — продолжительность времени, в течение которого происходит рассеяние электрона, то можно принять

$$\begin{aligned} r(t) &\approx v_1 t + a, & -\infty < t \leq 0; \\ r(t) &= v_2 t + b, & 0 \leq t < \infty, \end{aligned}$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости электрона до и после излучения ( $a$  и  $b$  — константы). Выполнив интегрирование, получим

$$dJ = \frac{e^2}{4\pi^2} \left\{ \left( \frac{v_2}{1-nv_2} - \frac{v_1}{1-nv_1} \right)^2 - \left( \frac{nv_2}{1-nv_2} - \frac{nv_1}{1-nv_1} \right)^2 \right\} d\omega d\Omega \quad (4.4.6)$$

( $n$  — единичный вектор в направлении излучения). Если  $v_1$  и  $v_2$  значительно меньше скорости света, то эта формула переходит в формулу (4.4.2).

Выражая скорость электрона  $v$  через его импульс  $p$ , можно переписать (4.4.6) в виде

$$dJ = \frac{e^2}{4\pi^2} \omega^2 \left\{ (j(k))^2 - \left( \frac{k}{\omega} j(k) \right)^2 \right\} d\omega d\Omega, \quad (4.4.7)$$

$$j_{\mu}(k) = e \sqrt{4\pi} \left( \frac{p_{2\mu}}{-kp_2} - \frac{p_{1\mu}}{-kp_1} \right)$$

( $p_1$  и  $p_2$  — 4-импульсы электрона до и после рассеяния). Величину  $j_{\mu}(k)$  можно назвать 4-током перехода; она удовлетворяет, очевидно, уравнению непрерывности  $k_{\mu} j_{\mu}(k) = 0$ . Поэтому  $dJ$  можно представить также в виде

$$dJ = |j_{\mu}(k)|^2 \frac{d^3k}{2(2\pi)^3}. \quad (4.4.8)$$

Подставляя это выражение в (4.4.4), получим следующую формулу для среднего числа излучаемых электроном мягких фотонов, частота которых лежит в интервале  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ :

$$\bar{n} = \int |j_{\mu}(k)|^2 \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3}. \quad (4.4.9)$$

Определим теперь вероятность процесса рассеяния электрона во внешнем поле, сопровождающегося излучением  $n$  мягких фотонов. Предполагая выполненными условия (4.4.1), можно, очевидно, представить эту вероятность в виде

$$d\omega = \omega(n) d\omega_s, \quad (4.4.10)$$

где  $d\omega_s$  — вероятность упругого рассеяния электрона во внешнем поле и  $\omega(n)$  — распределение Пуассона (4.4.3). Если  $\omega_1 = 0$ , то  $n$ , согласно (4.4.9), будет равно бесконечности и, следовательно,  $\omega(n)$  обратится в нуль. Иными словами, вероятность рассеяния

электрона с излучением конечного числа длинноволновых фотонов равна нулю. В частности, равняется нулю вероятность чисто упругого рассеяния электрона. Так как, с другой стороны,

$$\sum_{n=0}^{\infty} w(n) = 1, \text{ то}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} dw = dw_s. \quad (4.4.11)$$

Поэтому можно сказать, что найденная в § 1.7 вероятность упругого рассеяния электрона  $dw_s$ , не учитывающая взаимодействия электрона с полем излучения, представляет собой полную вероятность рассеяния электрона независимо от числа испущенных им мягких фотонов. Эта вероятность, как мы видим, может определяться в случае достаточно слабого внешнего поля с помощью теории возмущений в отличие от вероятности рассеяния, сопровождающегося излучением одного или конечного числа фотонов с  $\omega \rightarrow 0$ : согласно теории возмущений эта вероятность равна бесконечности, тогда как в действительности она равна нулю.

Средняя энергия излучаемых мягких фотонов в интервале частот  $\omega$ ,  $\omega + d\omega$  в телесном угле  $do$  при рассеянии электрона может быть, согласно (4.4.3), представлена в виде

$$d\bar{\mathcal{E}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\omega e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!} dw_s = \omega \bar{n} dw_s = dJ dw_s. \quad (4.4.12)$$

Эта величина равна, как и следовало ожидать, произведению вероятности  $dw_s$  упругого рассеяния электрона на классическое выражение  $dJ$  для излучаемой энергии. К такому же результату приводит и обычная теория возмущений в области малых частот. Мы видим, таким образом, что среднюю излучаемую энергию и полную вероятность рассеяния электрона (независимо от числа испущенных мягких фотонов) можно определять с помощью обычной теории возмущений как в области больших, так и в области малых частот, хотя вероятность рассеяния электрона, сопровождающегося испусканием конечного числа фотонов с  $\omega \rightarrow 0$ , дается теорией возмущений неверно.

Вероятность излучения фотонов, энергия которых не предельно мала, может определяться с помощью обычной теории возмущений, т. е. разложением матричных элементов в ряд по степеням заряда электрона, но определенную таким образом вероятность излучения одного фотона следует интерпретировать не как вероятность того, что был испущен только один этот фотон, а как вероятность излучения наряду с этим фотоном произвольного числа длинноволновых фотонов с частотой  $\omega \rightarrow 0$ .

**4.4.2. Сечение рассеяния электрона с излучением мягкого фотона.** Поскольку теория возмущений приводит к неправильному значению вероятностей различных процессов взаимодействия

электрона с длинноволновыми фотонами, мы в дальнейшем, пользуясь теорией возмущений, выделим область малых частот, т. е. будем считать, что частота фотона превосходит некоторое минимальное значение  $\omega_{\min}$ . Эта величина должна быть исключена, для чего должно быть произведено специальное исследование взаимодействия электрона с длинноволновыми фотонами. Практически удобнее, однако, пользоваться несколько иным условием, эквивалентным условию  $\omega > \omega_{\min}$ , а именно, не накладывая ограничений на частоту фотонов, считать, что фотон обладает некоторой малой массой  $\lambda$ , отличной от нуля. Введение этой массы, являющейся релятивистски инвариантной величиной в отличие от неинвариантной величины  $\omega_{\min}$ , сильно упрощает расчеты.

Покажем, как найти связь между «массой» фотона  $\lambda$  и минимальной частотой  $\omega_{\min}$ . Рассмотрим излучение фотона электроном в некотором постоянном внешнем поле  $A_u^{(e)}(x)$ . Согласно (4.1.1), матричный элемент, определяющий излучение фотона с энергией  $k_0$  и вектором поляризации, направленным вдоль оси  $\mu$ , равен

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = ie^2 \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \left\{ \frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2k_0}} \frac{i(\hat{p}_2 + \hat{k}) - m}{(\rho_2 + k)^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(q) + \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(\rho_1 - k)^2 + m^2} \frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2k_0}} \right\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \quad (4.4.13)$$

( $p_1$  и  $p_2$  — 4-импульсы электрона до и после рассеяния). Так как нас интересует область малых частот, то мы можем пренебречь в числителях величиной  $\hat{k}$ . Вводя далее «массу» фотона  $\lambda$  согласно соотношению  $k^2 + \lambda^2 = 0$ , перепишем  $\langle f | S^{(2)} | i \rangle$  в виде

$$\tilde{f} \langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{-ie^2}{\sqrt{2k_0}} \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \times \times \left\{ \gamma_\mu \frac{i\hat{p}_2 - m}{\lambda^2 - 2\rho_2 k} \hat{A}^{(e)}(q) + \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i\hat{p}_1 - m}{\lambda^2 + 2\rho_1 k} \gamma_\mu \right\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}},$$

где  $k_0 = \sqrt{k^2 + \lambda^2}$ . Так как  $(i\hat{p}_1 + m)u_1 = 0$ , то

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\mu u_1 &= \\ &= i\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) (\hat{p}_1 \gamma_\mu + \gamma_\mu \hat{p}_1) u_1 = 2i\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) u_1 \rho_{1\mu}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\bar{u}_2 \gamma_\mu (i\hat{p}_2 - m) \hat{A}^{(e)}(q) u_1 = 2iu_2 \hat{A}^{(e)}(q) u_1 \rho_{2\mu}.$$

Поэтому

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{e^2}{\sqrt{8k_0\varepsilon_1\varepsilon_2}} (\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) u_1) \left( \frac{\rho_{2\mu}}{\lambda^2/2 - \rho_2 k} + \frac{\rho_{1\mu}}{\lambda^2/2 + \rho_1 k} \right). \quad (4.4.14)$$

Предполагая, что  $\varepsilon \gg \lambda$ , мы можем пренебречь  $\lambda^2$ , так как  $\rho k$  содержит слагаемое  $\varepsilon \sqrt{k^2 + \lambda^2}$ , которое значительно больше  $\lambda^2$ .

Определим теперь сечение рассеяния электрона, сопровождающееся испусканием фотона, энергия которого не превосходит  $\Delta\varepsilon$ . Относительно величины  $\Delta\varepsilon$  мы будем предполагать, что она значительно меньше энергии электрона  $\varepsilon$  и значительно больше массы фотона  $\lambda$ :  $\lambda \ll \Delta\varepsilon \ll \varepsilon$ . Дифференциальное сечение этого процесса, просуммированное и усредненное по ориентациям спина электрона в начальном и конечном состояниях, равно

$$d\sigma' = \frac{2\pi}{v_1} \frac{e^4}{4} \sum_{\mu_1, \mu_2} |\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) u_1|^2 \frac{B}{(2\pi)^3} \rho_f d\omega, \quad (4.4.15)$$

где

$$B = \sum_{\mu=1}^4 \int_{k_0 \leq \Delta\varepsilon} \left( \frac{\rho_{2\mu}}{\rho_2 k} - \frac{\rho_{1\mu}}{\rho_1 k} \right)^2 \frac{d^3k}{k_0},$$

$d\omega$  — элемент телесного угла, в котором лежит импульс электрона  $p_2$  после рассеяния,  $v_1$  — начальная скорость электронов и  $\rho_f$  — число конечных состояний электрона, отнесенное к единичному интервалу энергии и единичному телесному углу,  $\rho_f = |p_2| \varepsilon_f (2\pi)^3$ .

В случае кулоновского поля ядра

$$\begin{aligned} \hat{A}^{(e)}(q) &= -i\gamma_4 \frac{Ze}{q^2}, \quad \sum_{\mu_1, \mu_2} \left| \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \hat{A}^{(e)}(q) \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \right|^2 = \\ &= 2 \frac{(Ze)^2}{(q^2)^2} \left( 1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 8\pi\alpha \frac{Z^2}{q^4} \left( 1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

( $\theta$  — угол рассеяния). Чтобы установить интересующую нас связь между массой фотона  $\lambda$  и минимальной частотой  $\omega_{\min}$ , мы вычислим входящую в (4.4.15) величину  $B$  двумя способами [20]: сначала предполагая, что  $\lambda \neq 0$  и  $k_0$  изменяется от  $k_0 = \lambda$  до  $k_0 = \Delta\varepsilon$ , а затем считая, что  $\lambda = 0$  и  $k_0$  изменяется от  $k_0 = \omega_{\min}$  до  $k_0 = \Delta\varepsilon$ . Сравнивая оба выражения для  $B$ , обозначаемые далее через  $B_\lambda$  и  $B_{\omega_{\min}}$ , мы найдем соотношение между  $\lambda$  и  $\omega_{\min}$ . Замечая, что  $p_{1,2}^2 + m^2 = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} B_\lambda &= - \int_{|\mathbf{k}|=0}^{|\mathbf{k}|=\Delta\varepsilon} \frac{k^2 d|\mathbf{k}| d\omega_\gamma}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \left\{ \frac{m^2}{(\varepsilon_2 \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p_2 k)^2} + \frac{m^2}{(\varepsilon_1 \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p_1 k)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2p_1 p_2}{(\varepsilon_2 \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p_2 k)(\varepsilon_1 \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p_1 k)} \right\}, \quad (4.4.16) \\ B_{\omega_{\min}} &= - \int_{|\mathbf{k}|=\omega_{\min}}^{|\mathbf{k}|=\Delta\varepsilon} |k| d|\mathbf{k}| d\omega_\gamma \left\{ \frac{m^2}{(\varepsilon_2 |k| - p_2 k)^2} + \frac{m^2}{(\varepsilon_1 |k| - p_1 k)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2p_1 p_2}{(\varepsilon_2 |k| - p_2 k)(\varepsilon_1 |k| - p_1 k)} \right\}, \end{aligned}$$

где  $d\omega_\gamma$  — элемент телесного угла, в котором лежит импульс фотона  $k$ .

Вспользуемся далее тождеством

$$\frac{1}{(\varepsilon_2 \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p_2 k) (\varepsilon_1 \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p_1 k)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{(\varepsilon_z \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p_z k)^2},$$

где

$$p_z = \frac{1}{2} (1+z) p_1 + \frac{1}{2} (1-z) p_2, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{2} (1+z) \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (1-z) \varepsilon_2.$$

Тогда

$$B_\lambda = - \int_{|k|=0}^{|k|=\Delta\varepsilon} \frac{k^2 d|k| do_\gamma}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \times \\ \times \left\{ \frac{m^2}{(\varepsilon_1 \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p_1 k)^2} + \frac{m^2}{(\varepsilon_2 \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p_2 k)^2} + p_1 p_2 \int_{-1}^1 \frac{dz}{(\varepsilon_z \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p_z k)^2} \right\}.$$

Так как

$$\int \frac{do_\gamma}{(\varepsilon \sqrt{k^2 + \lambda^2} - p k)^2} = \frac{4\pi}{k^2 (\varepsilon^2 - p^2) + \lambda^2 \varepsilon^2},$$

то

$$B_\lambda = -4\pi \int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{k^2 d|k|}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \left\{ \frac{m^2}{k^2 (\varepsilon_1^2 - p_1^2) + \lambda^2 \varepsilon_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{k^2 (\varepsilon_2^2 - p_2^2) + \lambda^2 \varepsilon_2^2} + p_1 p_2 \int_{-1}^1 \frac{dz}{k^2 (\varepsilon_z^2 - p_z^2) + \lambda^2 \varepsilon_z^2} \right\}. \quad (4.4.17)$$

Легко видеть, что

$$\int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{k^2 d|k|}{[k^2 (\varepsilon^2 - p^2) + \lambda^2 \varepsilon^2] \sqrt{k^2 + \lambda^2}} = \\ = \frac{1}{\varepsilon^2 - p^2} \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{\varepsilon}{2|p|} \frac{1}{\varepsilon^2 - p^2} \ln \frac{\varepsilon + |p|}{\varepsilon - |p|}.$$

Поэтому

$$B_\lambda = 4\pi \left\{ - \left[ 2 + (p_1 p_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \int_{-1}^1 \frac{dz}{\varepsilon_z^2 - p_z^2} \right] \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \frac{\varepsilon_1}{|p_1|} \ln \frac{\varepsilon_1 + |p_1|}{\varepsilon_1 - |p_1|} + \frac{\varepsilon_2}{|p_2|} \ln \frac{\varepsilon_2 + |p_2|}{\varepsilon_2 - |p_2|} + \right. \right. \\ \left. \left. + (p_1 p_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \int_{-1}^1 \frac{dz}{\varepsilon_z^2 - p_z^2} \frac{\varepsilon_z}{|p_z|} \ln \frac{\varepsilon_z + |p_z|}{\varepsilon_z - |p_z|} \right] \right\}. \quad (4.4.18)$$

Вводя вместо  $z$  новую переменную интегрирования  $\zeta$

$$\zeta = \frac{|p_z|}{\varepsilon \varepsilon_z} = \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} + z^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

представим  $B_\lambda$  в виде

$$B_\lambda = 4\pi \left\{ 2(2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi - 1) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} - \frac{1-v^2}{v \sin \frac{\vartheta}{2}} \operatorname{ch} 2\Phi \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \ln \frac{1+v\zeta}{1-v\zeta} \frac{d\zeta}{(1-v^2\zeta^2) \sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} \right\}, \quad (4.4.19)$$

где величина  $\Phi$  связана с  $q$  соотношением  $q^2 = 4m^2 \operatorname{sh}^2 \Phi$ . Так как  $q_4 = 0$ , то  $q^3 = q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ ,  $\operatorname{sh} \Phi = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \sin \frac{\vartheta}{2}$ .

Полагая в (4.4.17)  $\lambda = 0$  и интегрируя по  $|k|$  в пределах от  $|k| = \omega_{\min}$  до  $|k| = \Delta\varepsilon$ , найдем  $B_{\omega_{\min}}$ :

$$B_{\omega_{\min}} = -4\pi \left\{ 2 + (p_1 p_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \int_{-1}^1 \frac{dz}{\varepsilon_2^2 - p_z^2} \right\} \int_{\omega_{\min}}^{\Delta\varepsilon} \frac{d|k|}{|k|} = 8\pi (2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi - 1) \ln \frac{\Delta\varepsilon}{\omega_{\min}}. \quad (4.4.20)$$

Сравнивая (4.4.19) и (4.4.20), найдем искомую связь между  $\lambda$  и  $\omega_{\min}$ :

$$2(1 - 2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi) \ln \frac{2\omega_{\min}}{\lambda} = \frac{1}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} - \frac{1-v^2}{v \sin \frac{\vartheta}{2}} \operatorname{ch} 2\Phi \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \ln \frac{1+v\zeta}{1-v\zeta} \frac{d\zeta}{(1-v^2\zeta^2) \sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}}.$$

В предельном случае малых энергий электрона,  $v \ll 1$ , эта формула приводит к соотношению

$$\ln 2\omega_{\min} = \ln \lambda + 5/6. \quad (4.4.21)$$

Подставляя (4.4.19) в (4.4.15), получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния электрона в кулоновском поле ядра с излучением фотона, энергия которого не превосходит  $\Delta\varepsilon$  ( $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$ ):

$$d\sigma' = \left( \frac{Z\alpha}{2m v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 (1-v^2) \left( 1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \frac{\alpha}{\pi} \times \left\{ 2(2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi - 1) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} - \frac{1-v^2}{v \sin \frac{\vartheta}{2}} \operatorname{ch} 2\Phi G(v, \vartheta) \right\} d\vartheta, \quad (4.4.22)$$

где

$$G(v, \theta) = \int_{\cos \frac{\theta}{2}}^1 \ln \frac{1+v\zeta}{1-v\zeta} \frac{d\zeta}{(1-v^2\zeta^2) \sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

Если  $p_1 = 0$ , то

$$B_\lambda = 4\pi \left\{ 2(2y \cdot \text{cth } 2y - 1) \left[ \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{2} \right] + 4y \text{cth } 2y [1 - h(2y)] \right\}, \quad (4.4.23)$$

где  $\text{th } 2y = \frac{p_2}{\varepsilon_2}$ ,  $h(y) = \int_0^y u \text{cth } u \, du$ .

Приведем в заключение этого пункта выражения для сечений излучения мягкого фотона в процессах  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  в области высоких энергий. В с. ц. и. сечения имеют вид

$$d\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma) = d\sigma_0(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 4 \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} \left[ 1 - \rho + \ln \frac{1-\chi}{\chi} \right] - \rho^2 + 2\rho - \frac{2\pi^2}{3} + 2 \int_{1-\chi}^{\chi} \frac{dt}{t} \ln(1-t) + \ln^2 \chi - \ln^2(1-\chi) \right\}, \quad (4.4.24)$$

$$d\sigma(e^-e^- \rightarrow e^-e^- \gamma) = d\sigma_0(e^-e^- \rightarrow e^-e^-) \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 4 \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} [1 - \rho - \ln[\chi(1-\chi)]] - \rho^2 + 2\rho - \frac{\pi^2}{3} + \ln^2 \frac{\chi}{1-\chi} \right\},$$

где  $\rho = \ln(4\varepsilon^2/m^2)$ ,  $\chi = \sin^2(\theta/2)$ ,  $\theta$  — угол рассеяния электрона и  $d\sigma_0$  — сечение основного процесса:

$$d\sigma_0(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = \frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2} \left[ \frac{1-\chi+\chi^2}{\chi(1-\chi)} \right]^2, \quad d\sigma_0(e^-e^- \rightarrow e^-e^-) = \frac{\alpha^2}{8\varepsilon^2} \frac{1-\chi+\chi^2}{\chi}.$$

В системе покоя одной из сталкивающихся частиц сечения определяются формулами:

$$d\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma) = d\sigma_0(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) \frac{\alpha}{\pi} \times \\ \times \left[ 4 \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} \left( 1 - \tilde{\rho} + \ln \frac{1-\tilde{\chi}}{\tilde{\chi}} \right) - \frac{5}{2} \tilde{\rho}^2 + 3\tilde{\rho} + 1 - \frac{\pi^2}{3} - \tilde{\rho} \ln \frac{\tilde{\chi}^2}{1-\tilde{\chi}} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\tilde{\chi}}{1-\tilde{\chi}} + \ln \tilde{\chi} (1-\tilde{\chi}) \right],$$

$p_+ = 0$ ,  $\tilde{\rho} = \ln \frac{2\varepsilon_-}{m}$ ,  $\tilde{\chi} = \sin^2(\tilde{\nu}/2)$ ,  $\tilde{\nu}$  — угол между  $p_-$  и  $p'_-$ .

$$d\sigma(e^-e^- \rightarrow e^-e^- \gamma) = d\sigma_0(e^-e^- \rightarrow e^-e^-) \frac{\alpha}{\pi} \times \\ \times \left\{ 4 \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} [1 - \tilde{\rho} - \ln \tilde{\chi} (1-\tilde{\chi})] - \frac{5}{2} \tilde{\rho}^2 + 3\tilde{\rho} - 3\tilde{\rho} \ln \tilde{\chi} (1-\tilde{\chi}) - \frac{1}{2} \ln^2 \tilde{\chi} (1-\tilde{\chi}) + \ln \tilde{\chi} (1-\tilde{\chi}) - 2 \ln \tilde{\chi} \ln(1-\tilde{\chi}) + 1 - \frac{\pi^2}{3} \right\}, \quad (4.4.25)$$

$p_1 = 0$ .

**4.4.3. Исследование расходимости в области малых частот.** Покажем, что распределение Пуассона для вероятности излучения длинноволновых фотонов может быть получено с помощью матрицы рассеяния [21], если только выполняются условия (4.4.1), означающие, что излучение оказывает малое влияние на движение электрона, которое можно поэтому считать заданным. В этих условиях плотность тока можно считать не оператором, а  $c$ -числом и воспользоваться выражением (3.2.27) для матрицы рассеяния.

Разлагая плотность тока в интеграл Фурье

$$j_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int j_{\mu}(k) e^{ikx} d^4k, \quad j_{\mu}^*(k) = j_{\mu}(-k)$$

и используя разложение операторов потенциалов электромагнитного поля на плоские волны, представим матрицу рассеяния  $S$  в виде

$$S = \exp \left\{ \frac{-1}{2(2\pi)^4} \int j_{\nu}^*(k) D_c(k) j_{\nu}(k) d^4k \right\} \times \\ \times N \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [j_{\mu}^*(k) c_{k\lambda} + j_{\mu}(k) c_{k\lambda}^+] e_{\lambda\mu} \right\}.$$

В интеграле, входящем в первую экспоненту,

$$\frac{1}{2} \int j_{\nu}^*(k) D_c(k) j_{\nu}(k) d^4k = \frac{-i}{2} \int j_{\nu}^*(\mathbf{k}, k_0) j_{\nu}(\mathbf{k}, k_0) \frac{d^3k dk_0}{k^2 - k_0^2} \equiv K,$$

можно в соответствии с правилом обхода полюсов в подынтегральной функции (полюсами являются точки  $k_0 = \pm \sqrt{k^2 - i0}$ ) выполнить интегрирование по  $k_0$ :

$$K = \pi \int j_{\nu}^*(\mathbf{k}) j_{\nu}(\mathbf{k}) \frac{d^3k}{2\omega},$$

где  $\omega = |\mathbf{k}|$  и  $j_{\nu}(\mathbf{k}) \equiv j_{\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ . Поэтому  $S$ -матрица может быть представлена в виде

$$S = AN \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{k, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [j_{\nu}^*(\mathbf{k}) c_{k\lambda} + j_{\nu}(\mathbf{k}) c_{k\lambda}^+] e_{\lambda\nu} \right\}, \quad (4.4.26)$$

где  $A = \exp \left\{ -\frac{K}{(2\pi)^4} \right\} = \exp \left\{ \frac{-1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|j_{\mu}(\mathbf{k})|^2}{2\omega} \right\}$ .

Вычислим элемент матрицы  $S$ , связывающий состояние вакуума с состоянием, в котором находится  $n$  фотонов различных сортов,  $n = \sum_k n_k$  ( $n_k$  — число фотонов с импульсом  $\mathbf{k}$ ). Рассмотрим для этого  $n$ -й член в разложении  $S$ -матрицы  $S^{(n)}$  и найдем матричный элемент

$$\langle n | S^{(n)} | 0 \rangle = A \langle n | \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{k, \lambda} j_{\mu}(\mathbf{k}) c_{k\lambda}^+ e_{\lambda\mu} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \right)^n | 0 \rangle.$$

Легко видеть, что

$$\langle n | S^{(n)} | 0 \rangle = A \left( \frac{i}{\sqrt{V}} \right)^n \prod_{k, \lambda} \frac{1}{\sqrt{n_{k\lambda}}} \left( j_{\mu}(k) e_{\lambda\mu} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \right)^{n_{k\lambda}}. \quad (4.4.27)$$

Найдем теперь вероятность излучения  $n = \sum_k n_k$  фотонов с различными импульсами. Эта вероятность, которую мы обозначим через  $P_n$ , равна, очевидно, квадрату модуля  $\langle n | S^{(n)} | 0 \rangle$ , просуммированному по  $\lambda$  и  $k$ , причем сумма  $\sum_{\lambda=1}^2 n_{k\lambda}$  должна быть равна заданному числу  $n_k$ . Так как  $j_{\mu} e_{\lambda\mu} = j_{\lambda}$ , то

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{A^2}{V^n} \sum_{n_{k1} + n_{k2} = n_k} \prod_k \frac{1}{n_{k1}!} \left( \frac{1}{2\omega} |j_1(k)|^2 \right)^{n_{k1}} \frac{1}{n_{k2}!} \left( \frac{1}{2\omega} |j_2(k)|^2 \right)^{n_{k2}} = \\ &= \frac{A^2}{V^n} \prod_k \left( \frac{1}{2\omega} \right)^{n_k} \frac{1}{n_k!} (|j_1(k)|^2 + |j_2(k)|^2)^{n_k}. \end{aligned}$$

Сумма квадратов модулей поперечных составляющих плотности тока  $|j_1(k)|^2 + |j_2(k)|^2$  равна в силу уравнения непрерывности  $k_{\mu} j_{\mu}(k) = 0$  квадрату модуля 4-вектора плотности тока  $|j_{\mu}(k)|^2$ . Поэтому окончательно  $P_n$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_k \exp \left\{ -\frac{|j_{\mu}(k)|^2}{2\omega V} \right\} \prod_k \frac{1}{n_k!} \left( \frac{|j_{\mu}(k)|^2}{2\omega V} \right)^{n_k} = \\ &= \prod_k e^{-\bar{n}_k} \frac{(\bar{n}_k)^{n_k}}{n_k!}, \quad \bar{n}_k = \frac{|j_{\mu}(k)|^2}{2\omega V}. \quad (4.4.27') \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили для вероятности излучения длинноволновых фотонов распределение Пуассона. Ясно, что  $n_k$  представляет собой среднее число фотонов с импульсом  $k$ . Для суммарного среднего числа излученных длинноволновых фотонов мы получим выражение

$$\bar{n} = \sum_k \bar{n}_k = \int |j_{\mu}(k)|^2 \frac{d^3k}{2(2\pi)^3 \omega},$$

совпадающее с найденным классическим выражением (4.4.9).

Как было разъяснено выше, всякий процесс столкновения заряженных частиц сопровождается длинноволновым излучением. Найдем вектор состояния этого излучения  $\Phi$ ,  $\Phi = S | 0 \rangle$ , где  $S$  — оператор (3.2.27) [21]. Из (4.4.24) следует, что  $S$  представляет собой произведение операторов, отвечающих каждой степени свободы поля, характеризуемой волновым 4-вектором  $k$  и поляризацией  $\lambda$ :  $S = \prod_{k, \lambda} S_{k\lambda}$ . Поэтому  $\Phi = \prod_{k, \lambda} \Phi_{k\lambda}$ , где  $\Phi_{k\lambda}$  — вектор состояния данной степени свободы поля.

Разложим далее  $\Phi_{k\lambda}$  по состояниям с определенным числом фотонов  $\Phi_n \equiv |n\rangle$ :

$$\Phi_{k\lambda} = \sum_n |n\rangle \langle n | S_{k\lambda} | 0 \rangle.$$

Согласно (4.4.27)

$$\langle n | S_{k\lambda} | 0 \rangle = \langle n | S_{k\lambda}^{(n)} | 0 \rangle = e^{-\frac{1}{2} |\alpha_{k\lambda}|^2} \frac{\alpha_{k\lambda}^n}{\sqrt{n!}}, \quad (4.4.28)$$

$$\alpha_{k\lambda} = \frac{i}{\sqrt{2\omega V}} (e^{(\lambda)j}(k)).$$

Таким образом,

$$\Phi = \prod_{k, \lambda} e^{-\frac{1}{2} |\alpha_{k\lambda}|^2} \sum_n \frac{\alpha_{k\lambda}^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.4.29)$$

Для выяснения свойств этого состояния рассмотрим действие оператора поглощения фотона  $c_{k\lambda}$  на вектор состояния  $\Phi_{k\lambda}$ . Согласно (4.4.28)

$$c_{k\lambda} \Phi_{k\lambda} = e^{-\frac{1}{2} |\alpha_{k\lambda}|^2} \sum_n \frac{\alpha_{k\lambda}^n}{\sqrt{n!}} c_{k\lambda} |n\rangle,$$

а так как  $c_{k\lambda} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$ , то

$$c_{k\lambda} \Phi_{k\lambda} = \alpha_{k\lambda} \Phi_{k\lambda}, \quad (4.4.30)$$

т. е.  $\Phi_{k\lambda}$  является собственным вектором оператора  $c_{k\lambda}$ , а  $\alpha_{k\lambda}$  — соответствующим собственным значением. Заметим в связи с этим, что согласно (4.4.27)  $|\alpha_{k\lambda}|^2$  является средним числом фотонов в состоянии  $\Phi_{k\lambda}$ .

Аналогично вектор состояния  $\Phi$  является собственным вектором оператора

$$A_{\mu}^{(+)}(x) = \sum_{k, \lambda} \frac{e_{\mu}^{(\lambda)}}{\sqrt{2\omega V}} c_{k\lambda} e^{ikx}, \quad (4.4.31)$$

представляющего собой положительно-частотную часть оператора потенциала  $A_{\mu}(x)$ . Действительно, из (4.4.30) и (4.4.31) следует:

$$A_{\mu}^{(+)}(x) \Phi = \mathcal{A}_{\mu}(x) \Phi,$$

где  $\mathcal{A}_{\mu}(x)$  определяется формулой (4.4.31), в которой операторы  $c_{k\lambda}$  заменены параметрами  $\alpha_{k\lambda}$ :

$$\mathcal{A}_{\mu}(x) = \sum_{k, \lambda} \frac{ie_{\mu}^{(\lambda)}}{2\omega V} (j(k) e^{(\lambda)}) e^{ikx} = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{(e^{(\lambda)j}(k))}{2\omega} e_{\mu}^{(\lambda)} e^{ikx} d^3k.$$

Нетрудно убедиться, что  $A_{\mu}(x) = \mathcal{A}_{\mu}(x) + \mathcal{A}_{\mu}^*(x)$  представляет собой классическое поле, удовлетворяющее уравнению Даламбера  $\square A_{\mu}(x) = -j_{\mu}(x)$ .

Вспоминая результаты § 2.4, можно сказать, что  $\Phi_{k\lambda}$  и  $\Phi$  являются когерентными состояниями поля излучения.

Подчеркнем, что  $\Phi_{k\lambda}$  и  $\Phi$  являются состояниями с неопределенной энергией. Эта неопределенность соответствует тому, что в задаче об излучении мы пренебрегали изменением энергии излучающей частицы в процессе излучения.

**4.4.4. Излучение мягких фотонов при произвольных столкновениях.** В п. 4.3.1 отмечалось, что в нерелятивистском случае дифференциальное сечение тормозного излучения представляет собой произведение сечения упругого рассеяния  $d\sigma_s$  и вероятности излучения  $d\omega_\nu$ ,  $d\sigma = d\sigma_s \cdot d\omega_\nu$ . Покажем, что такое же соотношение имеет место для излучения, сопровождающего произвольный процесс столкновения, если только энергия излучаемого фотона достаточно мала, т. е. при выполнении условий (4.4.1). При этом мы будем считать, что соблюдено условие применимости теории возмущений ( $e^2 \ln \frac{e}{\omega} \ll 1$ ).

Рассмотрим сначала излучение мягкого фотона во внешнем поле. Тогда согласно (4.4.14)

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{i}{2V\sqrt{2\omega e_1 e_2}} M, \quad M = ie(\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) u_1) j_\mu e_\mu, \quad (4.4.32)$$

$$j_\mu = e \left( \frac{p_{2\mu}}{p_2 k} - \frac{p_{1\mu}}{p_1 k} \right).$$

Мы видим, что матричный элемент  $M$  содержит два множителя: первый множитель представляет собой амплитуду упругого рассеяния, а второй — ток перехода  $j_\mu$ . Выражение для  $j_\mu$  имеет полюс при  $\omega=0$ , что и является причиной «инфракрасной катастрофы».

Аналогичную структуру имеют токи перехода для любых рассеивающих заряженных частиц при  $k \rightarrow 0$ , так как выражение (4.4.32) — это единственный тип выражения, удовлетворяющего уравнению непрерывности  $kj=0$  и имеющего полюс при  $k=0$ . Руководствуясь этим, можно обобщить выражение для матричного элемента (4.4.32) на случай излучения мягких фотонов при любых столкновениях.

Рассмотрим, например, упругое столкновение заряженной частицы  $a$  с нейтральной частицей  $b$ , вызванное сильным взаимодействием (диаграмма этого процесса изображена на рис. 4.7;  $p_1$  и  $p_2$  обозначают 4-импульсы частицы  $a$  до и после рассеяния,  $p'_1$  и  $p'_2$  — аналогичные величины для частицы  $b$ ). Этот процесс, амплитуду которого мы обозначим через  $M_s$ , будет сопровождаться излучением мягкого фотона (рассеяние с излучением соответствуют диаграммы рис. 4.8). Для амплитуды рассеяния с излучением может быть написано выражение, аналогичное (4.4.32):

$$M_\nu = M_s j_\mu e_\mu, \quad (4.4.33)$$

где  $j_\mu$  определяется формулой (4.4.32), в которую вместо  $e$  должен входить заряд  $e_a$  частицы  $a$ ,

Это выражение можно получить, исходя из диаграмм рис. 4.8, если сопоставить вершине величину  $2p_{\mu}$  (такой вид имеет при  $k \rightarrow 0$  вершинная функция для любых заряженных частиц).

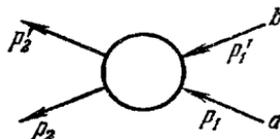


Рис. 4.7.

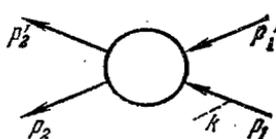
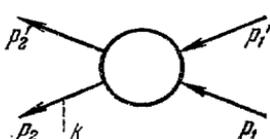


Рис. 4.8.

Формулу (4.4.33) можно применить к излучению мягкого фотона при произвольном столкновении, если под  $M_s$  понимать амплитуду соответствующего процесса без излучения, а под током перехода  $i_{\mu}$  — величину

$$i_{\mu} = \sum_f \frac{e_f p_{f\mu}}{p_f k} - \sum_i \frac{e_i p_{i\mu}}{p_i k}, \quad (4.4.34)$$

где  $e_i$  и  $p_i$  — заряды и импульсы начальных частиц и  $e_f$  и  $p_f$  — аналогичные величины для конечных частиц.

Кроме главной «инфракрасной» части амплитуды излучения  $M_{\gamma}$  (пропорциональной  $1/\omega$ ), можно найти столь же общее выражение для поправки к ней, не содержащей  $\omega$  [22]. Вернемся с этой целью к процессу, изображенному на рис. 4.8. Легко видеть, что поправочные члены могут быть трех типов. Во-первых, дополнительные члены появятся в числителях выражения для тока перехода (4.4.34), т. е. дополнительные члены возникнут в вершинах диаграмм рис. 4.8, причем они должны быть пропорциональны  $k$ . Эти члены определяются магнитными моментами частиц; в случае частиц со спином нуль они отсутствуют.

Во-вторых, такие члены появятся, если учесть, что амплитуды рассеяния  $M_s$ , отвечающие двум диаграммам рис. 4.8, относятся к разным энергиям рассеивающейся частицы. Если энергия частицы  $a$  в системе покоя частицы  $b$  равна  $\varepsilon$  на первой диаграмме, то на второй диаграмме она будет равна  $\varepsilon - \omega$ . Вводя вместо  $\varepsilon$  и  $\omega$  инвариантные переменные  $\nu = p_1 p_1' = m_b \varepsilon$  и  $k p_1' = m_b \omega$ , где  $m_b$  — масса частицы  $b$ , мы можем записать  $M_{\gamma}$  в виде

$$\begin{aligned} M_{\gamma} &= e_{\mu} \left( \frac{p_{2\mu}}{p_2 k} M_s(\nu) - \frac{p_{1\mu}}{p_1 k} M_s(\nu - k p_1') \right) = \\ &= M_s(\nu) \left( \frac{p_{2\mu}}{p_2 k} - \frac{p_{1\mu}}{p_1 k} \right) e_{\mu} + M^{(1)}, \quad (4.4.35) \end{aligned}$$

$$M^{(1)} = e_a \frac{\partial M_s}{\partial \nu} \frac{p_{1\mu} e_{1\mu}}{p_1 k} p_1' k = \frac{\partial M_s}{\partial \nu} e_a j_{\mu}^{(1)}, \quad j_{\mu}^{(1)} = e_a \frac{k p_1'}{k p_1} p_{1\mu}$$

(для краткости мы не указываем других аргументов, от которых зависит  $M_s$ ).

Наконец, интересующие нас члены могут содержаться во «внутреннем» излучении, описываемом диаграммами типа рис. 4.9. Это излучение определяется током перехода  $\langle p_2 p'_2 | j | p_1 p'_1 \rangle$ , о котором мы мало что знаем, так как он существенно зависит от сильных взаимодействий. Однако замечательно, что можно найти первый член его разложения по  $\omega$ , так как он определяется только требованием сохранения тока. Для этого достаточно заметить, что амплитуда  $M^{(1)}$  не удовлетворяет требованиям калибровочной инвариантности. Действительно, согласно (4.4.35)

$$k_\mu j_\mu^{(1)} = e_a k p'_1 \neq 0. \quad (4.4.36)$$

Очевидно, что «внутренний» ток  $j_\mu^{(1)}$ , соответствующий диаграмме рис. 4.9, должен компенсировать этот дефект тока  $j_\mu^{(1)}$ . Поскольку ток  $j_\mu^{(0)}$  не должен в рассматриваемом приближении зависеть от  $k$ , то он однозначно определяется соотношением (4.4.36),  $j_\mu^{(0)} = -e_a p'_1 \mu$ .

Таким образом, окончательно мы получим следующее выражение для амплитуды излучения мягкого фотона с учетом членов, остающихся конечными при  $\omega \rightarrow 0$ :

$$M_\gamma = e_\mu \left\{ M_s j_\mu + \frac{\partial M_s}{\partial v} (j_\mu^{(1)} + j_\mu^{(0)}) \right\},$$

$$j_\mu^{(1)} + j_\mu^{(0)} = e_a \frac{(k p'_1) p_{1\mu} - (k p_1) p'_{1\mu}}{(p_1 k)}. \quad (4.4.37)$$

(Заметим, что несимметричная форма этого выражения относительно начальных и конечных импульсов частиц связана только с несимметричным выбором переменной  $v$ .)

## § 4.5. Образование и аннигиляция электронно-позитронных пар

### 4.5.1. Образование электронно-позитронной пары фотоном в поле ядра.

Для возможности процесса образования электронно-позитронных пар необходима, очевидно, энергия, не меньшая чем  $2m$ . Один фотон, обладающий достаточной энергией, не может, однако, образовать пары, так как при этом не могут одновременно выполняться законы сохранения энергии и импульса. Для образования пары одним фотоном необходимо присутствие посторонней частицы, например ядра.

Электронно-позитронные пары могут образовываться также при столкновении двух заряженных частиц или фотонов, обладающих достаточной энергией. Мы прежде всего рассмотрим образование пары фотоном в поле ядра. Этому процессу соответствуют две диаграммы, изображенные на рис. 4.10 ( $p_-$  и  $p_+$  обозначают 4-импульсы электрона и позитрона, а  $k$  — 4-импульс фотона).

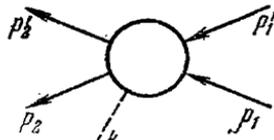


Рис. 4.9.

Матричный элемент, определяющий образование пары, согласно правилам Фейнмана имеет вид

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{ie^2}{2V\sqrt{2\omega\varepsilon_1\varepsilon_2}} \bar{u}(p_-) \left\{ \hat{e} \frac{i\hat{f}_1 - m}{f_1^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(q) + \right. \\ \left. + \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i\hat{f}_2 - m}{f_2^2 + m^2} \hat{e} \right\} u(-p_+), \quad (4.5.1)$$

где  $A^{(e)}(q)$  — компонента Фурье поля ядра,  $u(p_-)$  и  $u(-p_+)$  — спинорные амплитуды электрона и позитрона и  $f_1 = p_- - k = -p_+ + q$ ,  $f_2 = -p_+ + k = p_- - q$ . Диаграммы эквивалентны, очевидно, диаграммам рис. 4.4, соответствующим тормозному излучению в поле ядра. Отличие заключается в интерпретации диаграмм: теперь правая (входящая) сплошная линия на каждой из двух диаграмм

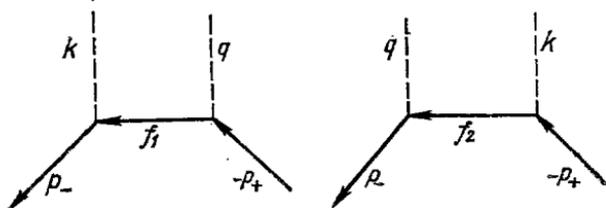


Рис. 4.10.

отвечает не начальному электрону, а конечному позитрону, и одна из пунктирных линий изображает не испущенный, а поглощенный фотон. Соответственно этому матричный элемент (4.5.1) можно получить из матричного элемента (4.1.1), если сделать в последней замену:  $p_1 \rightarrow -p_+$ ,  $p_2 \rightarrow p_-$ ,  $k \rightarrow -k$ . Поэтому мы можем не вычислять заново сечения образования пары, а воспользуемся готовыми результатами для сечения тормозного излучения. Следует лишь иметь в виду, что в отличие от процесса тормозного излучения, где плотность потока падающих частиц равняется скорости электрона, теперь плотность потока падающих частиц — фотонов — равняется скорости света. Кроме того, изменяется число конечных состояний, которое теперь равняется  $\rho_f = d^3p_- d^3p_+ / (2\pi)^6$ .

Учитывая эти изменения, получим следующее выражение для дифференциального сечения образования пары фотоном в кулоновском поле ядра [11]:

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha^3}{(2\pi)^2} \frac{|p_+||p_-|}{\omega^3} \frac{d\varepsilon_+ d\omega_+ d\omega_-}{q^4} \frac{4}{m^4} \left\{ -4 \left[ k \left( \frac{\varepsilon_+ p_-}{\kappa_1} + \frac{\varepsilon_- p_+}{\kappa_2} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. + q^2 \left[ k \left( \frac{p_-}{\kappa_1} - \frac{p_+}{\kappa_2} \right) \right]^2 + \frac{2\omega^2}{\kappa_1 \kappa_2} [k(p_- + p_+)]^2 \right\}, \quad (4.5.2)$$

$$m^2 \kappa_1 = f_1^2 + m^2 = -2p_- k; \quad m^2 \kappa_2 = f_2^2 + m^2 = -2p_+ k;$$

где  $d\omega_+$  и  $d\omega_-$  — элементы телесных углов, в которых лежат импульсы  $p_+$  и  $p_-$  позитрона и электрона, и  $\varepsilon_+$  и  $\varepsilon_-$  — энергии обеих частиц. Они связаны, очевидно, соотношением  $\varepsilon_+ + \varepsilon_- = \omega$ .

Формулу (4.5.2) можно переписать также в виде

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3}{2\pi} \frac{\rho_+ \rho_- d\varepsilon_+}{\omega^3} \frac{\sin \theta_+ \sin \theta_- d\theta_+ d\theta_- d\varphi}{q^4} \times \\ \times \left\{ \frac{\rho_+^2 \sin^2 \theta_+}{(\varepsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+)^2} (4\varepsilon_+^2 - q^2) + \frac{\rho_-^2 \sin^2 \theta_-}{(\varepsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)^2} (4\varepsilon_-^2 - q^2) + \right. \\ \left. + \frac{2\rho_+ \rho_- \sin \theta_+ \sin \theta_- \cos \varphi}{(\varepsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)(\varepsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+)} (4\varepsilon_+ \varepsilon_- + q^2 - 2\omega^2) - \right. \\ \left. - 2\omega^2 \frac{\rho_+^2 \sin^2 \theta_+ + \rho_-^2 \sin^2 \theta_-}{(\varepsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)(\varepsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+)} \right\}, \quad (4.5.3)$$

где  $\theta_{\pm}$  — углы между  $\mathbf{p}_{\pm}$  и  $\mathbf{k}$ ,  $\varphi$  — угол между плоскостями  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}_+$  и  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}_-$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+$ ,  $\rho_{\pm} = |\mathbf{p}_{\pm}|$ ,  $q = |\mathbf{q}|$ .

Определяемое формулой (4.5.3) угловое распределение имеет довольно сложный характер. Оно сильно упрощается только в крайне релятивистской области, когда главную роль играют малые углы  $\theta_{\pm}$ . В этом случае электрон и позитрон испускаются преимущественно вперед, т. е. в узком конусе около направления движения фотона; эффективный угол раствора этого конуса равен по порядку величины  $\theta_{\pm} \sim m/\omega$ . Заменяя в формуле (4.5.3)  $\sin \theta_{\pm}$  на  $\theta_{\pm}$ , а  $\cos \theta_{\pm}$  на  $1 - \frac{1}{2}\theta_{\pm}^2$ , получим следующую формулу, определяющую угловое распределение в области малых углов:

$$d\sigma = 4 \frac{Z^2 \alpha^3}{\pi m^2} \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_-}{\omega^2 q^4} [\omega^2 (u^2 + v^2) \xi \eta - 2\varepsilon_- \varepsilon_+ (u^2 \xi^2 + v^2 \eta^2) + \\ + 2(\varepsilon_-^2 + \varepsilon_+^2) uv \xi \eta \cos \varphi] d\varepsilon_+ d\theta_- d\theta_+ d\varphi,$$

где

$$u = \frac{\rho_- \theta_-}{m}, \quad v = \frac{\rho_+ \theta_+}{m}, \quad \xi = \frac{1}{1+u^2}, \quad \eta = \frac{1}{1+v^2}.$$

Интегрирование (4.5.3) по углам дает дифференциальное сечение образования пары с энергией позитрона в интервале  $\varepsilon_+$ ,  $\varepsilon_+ + d\varepsilon_+$ :

$$d\sigma = \bar{\Phi} \frac{|\mathbf{p}_+||\mathbf{p}_-|}{\omega^3} d\varepsilon_+ \left\{ -\frac{4}{3} - 2\varepsilon_+ \varepsilon_- \frac{\rho_+^2 + \rho_-^2}{\rho_+^2 \rho_-^2} + \right. \\ \left. + m^2 \left( \frac{\varepsilon_+ \zeta_-}{|\rho_+|^3} + \frac{\varepsilon_- \zeta_+}{|\rho_-|^3} - \frac{\zeta_+ \zeta_-}{|\rho_+||\rho_-|} \right) + L \left[ \frac{\omega^3}{|\rho_+|^3 |\rho_-|^3} (\varepsilon_+^2 \varepsilon_-^2 + \rho_+^2 \rho_-^2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{8}{3} \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_-}{|\rho_+||\rho_-|} - \frac{m^2 \omega}{2|\rho_+||\rho_-|} \left( \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- - \rho_-^2}{|\rho_+|^3} \zeta_- + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- - \rho_+^2}{|\rho_-|^3} \zeta_+ + \frac{2\omega \varepsilon_+ \varepsilon_-}{\rho_+^2 \rho_-^2} \right) \right] \right\}, \quad (4.5.4)$$

где

$$\bar{\Phi} = r_0^2 Z^2 \alpha^3, \quad \zeta_{\pm} = 2 \ln \frac{\varepsilon_{\pm} + |\mathbf{p}_{\pm}|}{m}, \quad L = 2 \ln \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- + |\mathbf{p}_+||\mathbf{p}_-| + m^2}{m\omega}.$$

В крайне релятивистской области, когда все энергии значительно больше  $m$  ( $\omega$ ,  $\varepsilon_{\pm} \gg m$ ), это выражение сильно упрощается:

$$d\sigma = 4\bar{\Phi} \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left( \varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3} \varepsilon_+ \varepsilon_- \right) \left( \ln \frac{2\varepsilon_+ \varepsilon_-}{m\omega} - \frac{1}{2} \right). \quad (4.5.5)$$

Формулы (4.5.4), (4.5.5) не учитывают экранирования поля ядра. Поэтому они справедливы, согласно п. 4.3.4, если  $(2\varepsilon_+\varepsilon_-/m\omega) \ll \ll 137Z^{-1/2}$ .

Учет экранирования может быть произведен таким же образом, как и в случае тормозного излучения. В крайне релятивистской области ( $\omega, \varepsilon_{\pm} \gg m$ ) мы получим для сечения образования пар формулу

$$d\sigma = \bar{\Phi} \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left\{ (\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2) (\Phi_1(\zeta) - \frac{4}{3} \ln Z) + \frac{2}{3} \varepsilon_+\varepsilon_- (\Phi_2(\zeta) - \frac{4}{3} \ln Z) \right\},$$

$$\zeta = \frac{100m\omega}{Z^{1/2}\varepsilon_+\varepsilon_-}, \quad (4.5.6)$$

где  $\Phi_1(\zeta)$  и  $\Phi_2(\zeta)$  — те же функции, которые входят в (4.3.38).

В случае полного экранирования, когда  $(2\varepsilon_+\varepsilon_-/m\omega) \gg 137Z^{-1/2}$ , последняя формула приобретает вид

$$d\sigma = 4\bar{\Phi} \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left\{ (\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3} \varepsilon_+\varepsilon_-) \ln(183Z^{-1/2}) - \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{9} \right\}. \quad (4.5.7)$$

Чтобы найти полное сечение образования пары, нужно проинтегрировать выражение (4.5.4) по энергии позитрона. Непосредственное интегрирование, однако, невозможно. Его удается выполнить в замкнутом виде только в крайне релятивистском случае, используя формулу (4.5.5):

$$\sigma = \bar{\Phi} \left( \frac{28}{9} \ln \frac{2\omega}{m} - \frac{218}{27} \right), \quad \omega \gg m. \quad (4.5.8)$$

(Эта формула не учитывает экранирования.)

Интегрируя (4.5.7) по  $\varepsilon_+$ , найдем сечение образования пары в случае полного экранирования

$$\sigma = \bar{\Phi} \left( \frac{28}{9} \ln 183Z^{-1/2} - \frac{2}{27} \right). \quad (4.5.9)$$

В п. 5.6.6 мы установим связь между интегральным сечением образования пары фотоном и сечением рассеяния фотона в поле ядра на нулевой угол. Используя эту связь, можно показать, что сечение образования пары без учета экранирования определяется следующей формулой [23]:

$$\sigma(\omega) = \bar{\Phi} \frac{1}{\eta^2} \left\{ 4 \int_1^{\eta} \frac{L(x)}{x} dx - 2L(\eta) + \frac{2}{27} \left[ - (64 + 109\eta^2) E \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} \right) + \left( 125 + \frac{6}{\eta^2} + 42\eta^2 \right) F \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} \right) \right] \right\}, \quad \eta = \frac{\omega}{2m}.$$

Здесь

$$L(x) = \int_1^{x^2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{x - \sqrt{x^2 - y}} \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)}}$$

и  $F(x)$  и  $E(x)$  — эллиптические интегралы:

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi, \quad E(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi.$$

В крайне релятивистской области эта формула переходит в формулу (4.5.8).

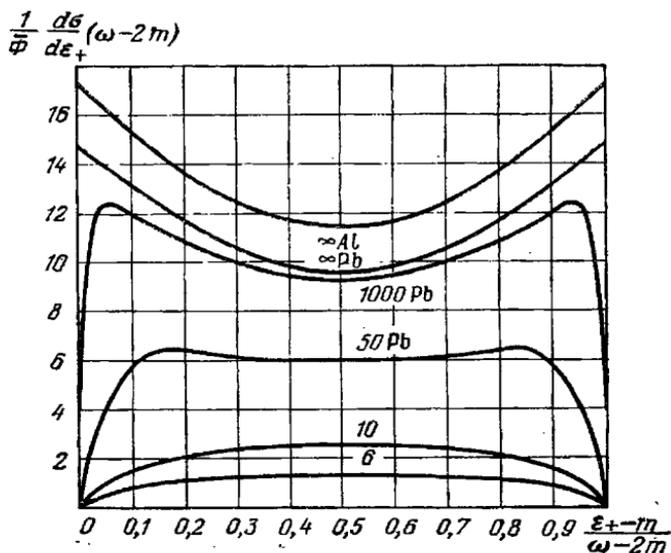


Рис. 4.11.

На рис. 4.11 изображено энергетическое распределение частиц пары, определяемое формулами (4.5.4) и (4.5.6). По оси абсцисс отложено отношение кинетической энергии позитрона  $\epsilon_+ - m$  к суммарной кинетической энергии пары  $\omega - 2m$ , а по оси ординат — величина  $\frac{\omega - 2m}{\Phi} \frac{d\sigma}{d\epsilon_+}$ . Различные кривые относятся к различным значениям  $\omega/m$ , которые указаны у кривых. Кривые для  $\omega/m=6$  и  $\omega/m=10$  справедливы при всех  $Z$ , так как при этих значениях энергии фотона можно пренебречь экранированием. Остальные кривые учитывают экранирование и относятся к свинцу и алюминию. Кривая  $\omega/m = \infty$  соответствует полному экранированию.

При малых значениях энергии фотона кривые имеют один нерезкий максимум, соответствующий одинаковым энергиям электрона и позитрона. При больших энергиях кривые имеют два одинаковых симметрично расположенных максимума, из которых один соответствует максимуму энергии позитрона и минимуму энергии электрона, а другой, наоборот, — минимуму энергии позитрона и максимуму энергии электрона.

На рис. 4.12 изображена зависимость интегрального сечения образования пары от энергии фотона для свинца и алюминия.

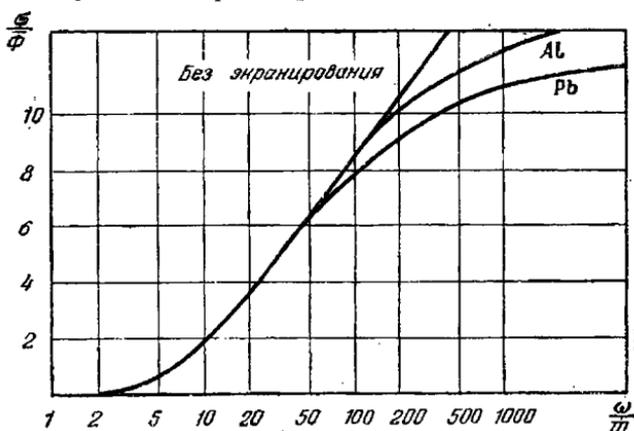


Рис. 4.12.

**4.5.2. Точная теория образования пары фотоном в поле ядра вблизи порога.** Поправка к сечению образования пары фотоном в поле ядра в борновском приближении при крайне релятивистских энергиях. Полученные выше формулы для сечений образования пары справедливы в борновском приближении, когда  $\xi_{\pm} \equiv Z\alpha/v_{\pm} \ll 1$  ( $v_{-}$  и  $v_{+}$  — скорости электрона и позитрона).

В нерелятивистском случае ( $v_{\pm} \ll 1$ ) возможно точное вычисление сечений образования пары, основанное на использовании точных волновых функций электрона и позитрона в кулоновском поле. Это вычисление производится аналогично вычислению сечения тормозного излучения. Матричный элемент, определяющий образование пары, может быть представлен в виде

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = 2\pi i \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int \psi^{(+)*}(r) e\alpha\psi^{(-)}(r) e^{ikr} d^3x \delta(\omega - \varepsilon_{+} - \varepsilon_{-}), \quad (4.5.10)$$

где  $\psi^{(+)}(r)$  и  $\psi^{(-)}(r)$  — волновые функции электрона в кулоновском поле ядра с положительной и отрицательной частотами. Так как в рассматриваемом процессе обе частицы образуются, то асимптотика функций  $\psi^{(e)} = \psi^{(+)}$  и  $\psi^{(n)} = C\psi^{(-)}$  при больших  $r$  должна быть одинаковой, а именно, эти функции должны при  $r \rightarrow \infty$  иметь вид сумм плоских и сходящихся сферических волн. В этом заключается различие между матричными элементами, определяющими образование пары и тормозное излучение: в последнем процессе только волновая функция электрона в конечном состоянии имеет такую асимптотику, волновая же функция электрона в начальном состоянии имеет при  $r \rightarrow \infty$  вид суммы пло-

ской и расходящейся сферической волн. В нерелятивистском случае функции  $\psi^{(+)}(r)$  и  $\psi^{(-)}(r)$  имеют вид

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(r) &= N_- e^{i\rho-r} u(\rho_-) \mathcal{F}[-i\xi_-, 1, -i(\rho_- r + |\rho_-| r)], \\ \psi^{(-)}(r) &= N_+ e^{-i\rho+r} u(-\rho_+) \mathcal{F}[-i\xi_+, 1, i(\rho_+ r + |\rho_+| r)],\end{aligned}\quad (4.5.11)$$

где  $u(\rho_-)$  и  $u(-\rho_+)$  — единичные биспинорные амплитуды и  $N_-$  и  $N_+$  — нормировочные множители, которые мы выберем равными

$$N_- = e^{\frac{\pi}{2} \xi_-} \Gamma(1 + i\xi_-), \quad N_+ = e^{-\frac{\pi}{2} \xi_+} \Gamma(1 + i\xi_+),$$

что соответствует единичной амплитуде волновых функций на бесконечности. Вычисления, которые мы здесь опустим, приводят к следующему выражению для распределения позитронов по энергиям вблизи порога реакции [24]:

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{Z^2 \alpha}{12\pi} r_0^2 \frac{4\pi^2 \xi_- \xi_+}{(1 - e^{-2\pi \xi_-})(e^{2\pi \xi_+} - 1)} [\omega - 2m + \alpha^2 Z^2 (\omega - m)] \times \\ &\quad \times \{(\epsilon_+ - m) [\omega - 2m - (\epsilon_+ - m)]\}^{1/2} \frac{d\epsilon_+}{m^3}.\end{aligned}\quad (4.5.12)$$

Остановимся в заключение этого пункта на вопросе о точном вычислении матричного элемента (4.5.10), определяющего процесс образования пар фотоном в кулоновском поле ядра в крайне релятивистском случае. Так как в интеграле (4.5.10) главную роль играют расстояния  $r \gtrsim 1/m$ , то в области больших энергий электрона и позитрона,  $\epsilon_{\pm} \gtrsim (\alpha Z)^2 m/2$ , в качестве волновых функций могут быть взяты в соответствии с (1.7.6) функции

$$\psi^{(+)}(r) = N_- e^{i\rho-r} \left[1 - \frac{i\alpha V}{2\epsilon_-}\right] u(\rho_-) \mathcal{F}[-i\xi_-, 1, -i(\rho_- r + |\rho_-| r)],$$

$$\psi^{(-)}(r) = N_+ e^{-i\rho+r} \left[1 + \frac{i\alpha V}{2\epsilon_+}\right] u(-\rho_+) \mathcal{F}[-i\xi_+, 1, i(\rho_+ r + |\rho_+| r)],$$

$$\text{где } \xi_{\pm} = \frac{Z\alpha\epsilon_{\pm}}{|\rho_{\pm}|}.$$

Мы приведем здесь только окончательный результат для дифференциального сечения образования пары:

$$\begin{aligned}d\sigma &= -\alpha \left(\frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha}\right)^2 \frac{a^2}{2\pi} \frac{1}{m^2} \frac{\rho_+ \rho_-}{\omega^3} d\epsilon_+ \sin \theta_- \sin \theta_+ d\theta_- d\theta_+ d\varphi \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{V^2(x)}{q^4} \left[ \frac{\rho_-^2 \sin^2 \theta_- (4\epsilon_-^2 - q^2)}{(\epsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)^2} + \frac{\rho_+^2 \sin^2 \theta_+ (4\epsilon_+^2 - q^2)}{(\epsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(4\epsilon_- \epsilon_+ + q^2 - 2\omega^2) 2\rho_+ \rho_- \sin \theta_- \sin \theta_+ \cos \varphi}{(\epsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)(\epsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+)} - \frac{2\omega^2 (\rho_-^2 \sin^2 \theta_- + \rho_+^2 \sin^2 \theta_+)}{(\epsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)(\epsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 [\omega^2 - (\rho_- + \rho_+)^2]^2 W^2(x)}{[4\omega^2 (\epsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)(\epsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+)]^2} \left[ \frac{\rho_-^2 \sin^2 \theta_- (4\epsilon_-^2 - q^2)}{(\epsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\rho_+^2 \sin^2 \theta_+ (4\epsilon_+^2 - q^2)}{(\epsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+)^2} - \frac{(4\epsilon_- \epsilon_+ + q^2 - 2\omega^2) 2\rho_+ \rho_- \sin \theta_- \sin \theta_+ \cos \varphi}{(\epsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)(\epsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\omega^2 (\rho_-^2 \sin^2 \theta_- + \rho_+^2 \sin^2 \theta_+)}{(\epsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+)(\epsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)} - 4\omega^2 (\epsilon_- \epsilon_+ + \rho_- \rho_+ \cos \theta_- \cos \theta_+) \right] \right\},\end{aligned}\quad (4.5.13)$$

где функции  $V(x)$  и  $W(x)$  определены в п. 4.3.6,  $a = \alpha Z$  и

$$x = 1 - \frac{q^2 [\omega^2 - (\rho_+ - \rho_-)^2]}{4\omega^2 (\varepsilon_+ - \rho_+ \cos \theta_+) (\varepsilon_- - \rho_- \cos \theta_-)}, \quad \rho_{\pm} \equiv |\mathbf{p}_{\pm}|$$

(остальные обозначения — такие же, как в п. 4.3.6).

Проинтегрированное по углам сечение образования пары имеет вид

$$d\sigma = 2 \frac{Z^2 \alpha^3}{m^2} \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left( \varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3} \varepsilon_+ \varepsilon_- \right) \left[ 2 \ln \frac{2\varepsilon_+ \varepsilon_-}{m\omega} - 1 + 2f(Z) \right], \quad (4.5.14)$$

где функция  $f(Z)$  определяется формулой (4.3.51).

С учетом экранирования сечение равно

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3}{m^2} \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left\{ (\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2) \left[ \Phi_1(\gamma) - \frac{4}{3} \ln Z - 4f(Z) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \varepsilon_+ \varepsilon_- \left[ \Phi_2(\gamma) - \frac{4}{3} \ln Z - 4f(Z) \right] \right\},$$

где  $\Phi_1(\gamma)$  и  $\Phi_2(\gamma)$  — те же функции, которые входят в (4.3.38),  $\gamma = 100 (m\omega/\varepsilon_+ \varepsilon_-) Z^{-1/3}$ .

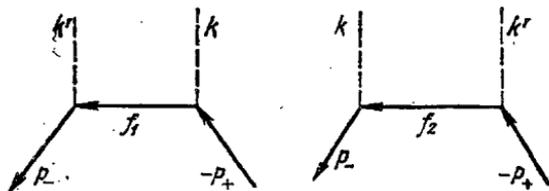


Рис. 4.13.

Полное сечение образования пары без учета экранирования равно

$$\sigma = \frac{28}{9} \frac{Z^2 r_0^2}{137} \left[ \ln \frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42} - f(Z) \right],$$

а в случае полного экранирования

$$\sigma = \frac{28}{9} \frac{Z^2 r_0^2}{137} \left[ \ln (183Z^{-1/3}) - \frac{1}{42} - f(Z) \right].$$

Мы видим, что поправка к сечению образования пар, вычисленному в борновском приближении, равна

$$\Delta\sigma = -\frac{28}{9} \frac{Z^2 r_0^2}{137} f(Z).$$

Для свинца относительная поправка составляет около 10 %.

4.5.3. Образование пары двумя фотонами. Перейдем к рассмотрению процесса образования пары двумя фотонами [25]. Этот

процесс изображается двумя диаграммами на рис. 4.13. Матричный элемент, определяющий процесс, равен

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{ie^2}{2\sqrt{\omega\omega'}} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_+\varepsilon_-}} \bar{u}(p_-) \left\{ \hat{e}' \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \hat{e} + \hat{e} \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2\kappa_2} \hat{e}' \right\} u(-p_+) (2\pi)^4 \delta(k+k'-p_+-p_-), \quad (4.5.15)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= -p_+ + k = p_- - k', & \hat{f}_2 &= -p_+ + k' = p_- - k, \\ m^2\kappa_1 &= \hat{f}_1^2 + m^2 = -2p_+k = -2p_-k', & m^2\kappa_2 &= \hat{f}_2^2 + m^2 = -2p_+k' = -2p_-k, \end{aligned}$$

$k$  и  $k'$  — 4-импульсы фотонов,  $e$  и  $e'$  — их поляризации.

Отсюда может быть найдено дифференциальное сечение образования пары:

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} |\bar{u}Qv|^2 \frac{d^3p_+ d^3p_-}{4\varepsilon_+\varepsilon_-4J} \delta(k+k'-p_+-p_-) \delta(\omega+\omega'-\varepsilon_+-\varepsilon_-) \quad (4.5.16)$$

$$(J = kk', \text{ а } u = u(p_-), \text{ } v = u(-p_+)),$$

$$Q = \hat{e}' \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \hat{e} + \hat{e} \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2\kappa_2} \hat{e}'. \quad (4.5.17)$$

Вычисления входящих сюда шпуров произведений дираковских матриц можно не производить, так как диаграммы, определяющие образование пары двумя фотонами, топологически совпадают с диаграммами, определяющими комптон-эффект. Произведя в последних замену

$$p_1 \rightarrow -p_+, \quad p_2 \rightarrow p_-, \quad k_1 \rightarrow k, \quad k_2 \rightarrow -k',$$

мы получим диаграммы, определяющие образование пары двумя фотонами. Этой заменой отличается и матрица  $Q$  в (4.5.17) от соответствующей матрицы в (4.2.11). Поэтому можно воспользоваться результатами п. 4.2.2 и сразу написать следующее выражение для величины  $|\bar{u}Qv|^2$ , просуммированной по проекциям спинов электрона и позитрона и усредненной по поляризациям фотонов:

$$|\bar{u}Qv|^2 = \frac{1}{4} \text{Sp } F, \quad F = Q(m - i\hat{p}_-) \bar{Q}(m + i\hat{p}_+),$$

где  $Q$  определяется формулой (4.5.17), в которой  $\hat{e}$  и  $\hat{e}'$  должны быть заменены соответственно на  $\gamma_\mu$  и  $\gamma_\nu$ . Выражение для  $\text{Sp } F$  отличается только знаком от аналогичного выражения (4.2.14):

$$-\frac{1}{8} \text{Sp } F = 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right). \quad (4.5.18)$$

Дальнейшие вычисления удобно производить в с. ч. и. сталкивающихся фотонов, в которой

$$k' = -k, \quad p_+ = -p_-, \quad \omega = \omega' = \omega_0, \quad \varepsilon_+ = \varepsilon_- = \omega_0, \quad J = 2\omega_0^2.$$

Устранив в (4.5.16)  $\delta$ -функции интегрированием по  $d^3p_-$  и  $d\varepsilon_+$ :

$$\delta(k + k' - p_+ - p_-) d^3p_- \rightarrow 1,$$

$$\delta(\omega + \omega' - \varepsilon_+ - \varepsilon_-) d^3p_+ \rightarrow \frac{|p_+| \varepsilon_+ d\omega_+}{2},$$

где  $d\omega_+$  — элемент телесного угла, в котором движется позитрон, получим следующую формулу для сечения образования пары двумя фотонами:

$$d\sigma = -\frac{r_0^2}{8} m^2 \frac{\sqrt{\omega_0^2 - m^2}}{\omega_0^3} d\omega_+ \left[ 4 \left( \frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right) - \left( \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \right) \right]. \quad (4.5.19)$$

Подставляя сюда

$$m^2 \varkappa_1 = -2p_+ k = -2\mathbf{p}_+ \mathbf{k} + 2\varepsilon_+ \omega = 2\omega_0 (\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - m^2} \cos \theta),$$

$$m^2 \varkappa_2 = -2p_- k = -2\mathbf{p}_- \mathbf{k} + 2\varepsilon_- \omega = 2\mathbf{p}_+ \mathbf{k} + 2\varepsilon_+ \omega =$$

$$= 2\omega_0 (\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - m^2} \cos \theta),$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}_+$ , представим  $d\sigma$  в виде

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{4} \frac{m^2 \sqrt{\omega_0^2 - m^2}}{\omega_0^3} \left[ \frac{2\omega_0^2 - m^2 + (\omega_0^2 - m^2) \sin^2 \theta}{m^2 \cos^2 \theta + \omega_0^2 \sin^2 \theta} - \frac{2(\omega_0^2 - m^2)^2 \sin^4 \theta}{(m^2 \cos^2 \theta + \omega_0^2 \sin^2 \theta)^2} \right] 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Полное сечение образования пары двумя фотонами равно

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2 m^2}{\omega_0^3} \left[ \left( 2 + \frac{2m^2}{\omega_0^2} - \frac{m^4}{\omega_0^4} \right) \ln \left( \frac{\omega_0}{m} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{m^2} - 1} \right) - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_0^2}} \left( 1 + \frac{m^2}{\omega_0^2} \right) \right]. \quad (4.5.20)$$

Эта величина представляет собой релятивистский инвариант. Если  $k$  и  $k'$  — 4-импульсы фотонов в произвольной системе отсчета, то вместо  $\omega_0^2$  сюда следует подставить  $\omega_0^2 = -(k + k')^2/4$ .

**4.5.4. Аннигиляция пары в два и три фотона.** Наряду с образованием электронно-позитронных пар фотонами возможны про-

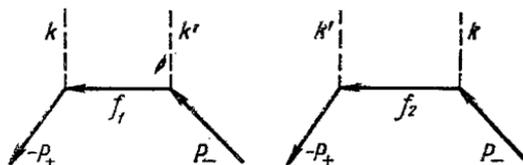


Рис. 4.14.

цессы превращения пар в фотоны. Эти процессы называются аннигиляцией пары. Если электрон и позитрон являются свободными, то аннигиляция с испусканием одного фотона невозможна, так как этот про-

цесс не допускается законами сохранения энергии и импульса.

Наиболее важным является процесс, при котором сталкивающиеся свободные позитрон и электрон превращаются в два фотона [25, 26]. Двухфотонной аннигиляции пары соответствуют две диаграммы на рис. 4.14. Они совпадают с диаграммами,

изображающими рождение пары двумя фотонами, — процесс, обратный двухфотонной аннигиляции.

Матричный элемент, определяющий двухфотонную аннигиляцию, может быть, согласно правилам п. 3.4.4, записан в виде

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{ie^2}{2\sqrt{\omega\omega'}} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_-\varepsilon_+}} \bar{u}(-p_+) \times \\ \times \left\{ \hat{\varepsilon} \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \hat{\varepsilon}' + \hat{\varepsilon}' \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2\kappa_2} \hat{\varepsilon} \right\} u(p_-) (2\pi)^4 \delta(p_+ + p_- - k - k'), \quad (4.5.21)$$

где использованы те же обозначения, что и в (4.5.15).

Дифференциальное сечение аннигиляции равно

$$d\sigma = \frac{e^4}{4\omega\omega'} |\bar{v}Qu|^2 \times \\ \times \frac{d^3k d^3k'}{4J (2\pi)^2} \delta(p_+ + p_- - k - k') \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega - \omega'), \quad (4.5.22)$$

где

$$J = \sqrt{(p_- p_+)^2 - m^4}, \quad v = u(-p_+), \quad Q = \hat{\varepsilon} \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \hat{\varepsilon}' + \hat{\varepsilon}' \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2\kappa_2} \hat{\varepsilon}.$$

Структура матрицы  $Q$  совпадает, очевидно, со структурой соответствующей матрицы в комптон-эффекте: сделав в последней замену

$$p_1 \rightarrow p_-, \quad k_1 \rightarrow -k', \quad e_1 \rightarrow e', \quad p_2 \rightarrow -p_+, \quad k_2 \rightarrow k, \quad e_2 \rightarrow e,$$

мы получим  $Q$ . Поэтому можно сразу воспользоваться готовыми результатами § 4.2 и написать следующее выражение для просуммированной и усредненной по поляризациям частиц величины  $\frac{1}{8} |\bar{v}Qu|^2$ :

$$\frac{1}{8} |\bar{v}Qu|^2 = - \left[ 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \right].$$

Дальнейшие вычисления удобно производить в с. ц. и. пары, в которой

$$p_+ = -p_- = -p_0, \quad \varepsilon_+ = \varepsilon_- = \varepsilon_0, \quad k' = -k, \\ \omega = \omega', \quad J = 2\varepsilon_0 p_0 = 2\varepsilon_0^2 v_0$$

( $p_0 = |p_0|$ ,  $v_0$  — скорость частиц в с. ц. и.).

Устраняя  $\delta$ -функции интегрированием по  $d^3k'$  и  $d\omega$ , получим

$$d\sigma = - \frac{r_0^2 m^2}{8\rho_0^2 v_0} \left[ 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \right] d\omega, \quad (4.5.23) \\ m^2 \kappa_1 = -2p_+ k = 2p_0 k + 2\varepsilon_0 \omega = 2\varepsilon_0 (\varepsilon_0 + p_0 \cos \theta), \\ m^2 \kappa_2 = -2p_- k = -2p_0 k + 2\varepsilon_0 \omega = 2\varepsilon_0 (\varepsilon_0 - p_0 \cos \theta),$$

где  $d\theta$  — элемент телесного угла, в котором заключен импульс фотона  $k$ , и  $\theta$  — угол между  $p_0$  и  $k$ . Таким образом,

$$d\sigma = r_0^2 \frac{m^2}{4p_0\epsilon_0} \left[ \frac{\epsilon_0^2 + p_0^2 + p_0^2 \sin^2 \theta}{\epsilon_0^2 - p_0^2 \cos^2 \theta} - \frac{2p_0^4 \sin^4 \theta}{(\epsilon_0^2 - p_0^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{m^2}{v_0\epsilon_0^3} [1 + 2v_0^2 \sin^2 \theta - v_0^4 (1 + \sin^4 \theta)] \frac{d\theta}{(1 - v_0^2 \cos^2 \theta)^2}.$$

Чтобы найти интегральное сечение аннигиляции пары, нужно проинтегрировать  $d\sigma$  по  $\theta$  от 0 до  $\pi$  и по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  (такие пределы соответствуют тому обстоятельству, что возникающие в конечном состоянии частицы — фотоны — неразличимы). В результате мы получим

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{m^2}{4v_0\epsilon_0^3} \left[ \frac{3 - v_0^4}{v_0} \ln \frac{1 + v_0}{1 - v_0} + 2(v_0^2 - 2) \right]. \quad (4.5.24)$$

Так как эта величина представляет собой релятивистский инвариант, то для перехода в другую систему достаточно выразить  $\epsilon_0$  и  $p_0$  через энергию частиц в этой системе.

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда аннигиляция происходит в результате столкновения позитрона с покоящимся электроном. Подставляя в (4.5.24)

$$\epsilon_0^2 = \frac{m(m + \epsilon_+^0)}{2}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_+^0 - m}{\epsilon_+^0 + m}},$$

где  $\epsilon_+^0$  — энергия позитрона в системе покоя электрона, получим

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{\gamma + 1} \left[ \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right], \quad (4.5.25)$$

где  $\gamma = \epsilon_+^0/m$ . При малых энергиях позитрона сечение обратно пропорционально скорости позитрона:

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{v_+}, \quad (4.5.26)$$

а вероятность аннигиляции  $\omega$  не зависит от скорости:

$$\omega = Z n v_+ \sigma = Z n \pi r_0^2, \quad (4.5.27)$$

где  $n$  — число атомов в единице объема. Время жизни медленного позитрона равно  $\tau = 1/\omega$ ; для свинца  $\tau \approx 10^{-10}$  с. При больших энергиях позитрона ( $\epsilon_+^0 \gg m$ )

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{m}{\epsilon_+^0} \left( \ln \frac{2\epsilon_+^0}{m} - 1 \right). \quad (4.5.28)$$

Приведем теперь выражение для сечения трехфотонной аннигиляции пары (см. диаграмму рис. 4.16), ограничиваясь случаем больших энергий, в с. ц. и.

$$d\sigma = \frac{\alpha r_0^2}{2\pi} \left( \frac{m}{s} \right)^2 R_\gamma \delta(p_+ + p_- - k_1 - k_2 - k_3) \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{4\pi^2 \epsilon^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3}, \quad (4.5.29)$$

где

$$R_V = 4\epsilon^4 \frac{\chi_1 \chi'_1 (\chi_1^2 + \chi_1'^2) + \chi_2 \chi'_2 (\chi_2^2 + \chi_2'^2) + \chi_3 \chi'_3 (\chi_3^2 + \chi_3'^2)}{\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi'_1 \chi'_2 \chi'_3} - \\ - 2m^2 \epsilon^2 \left\{ \frac{\chi_1'^2 + \chi_2'^2}{\chi_3^2 \chi_1 \chi_2} + \frac{\chi_1^2 + \chi_2^2}{\chi_3'^2 \chi_1 \chi_2} + \frac{\chi_1'^2 + \chi_3'^2}{\chi_2^2 \chi_1 \chi_3} + \frac{\chi_1^2 + \chi_3^2}{\chi_2'^2 \chi_1 \chi_3} + \frac{\chi_2'^2 + \chi_3'^2}{\chi_1^2 \chi_2 \chi_3} + \frac{\chi_2^2 + \chi_3^2}{\chi_1'^2 \chi_2 \chi_3} \right\},$$

$\chi_i = k_i p_-$ ,  $\chi'_i = k_i p_+$  ( $\epsilon$  — энергия позитрона).

**4.5.5. Поляризационные эффекты при двухфотонной аннигиляции пар.** Выше были получены выражения для сечения двухфотонной аннигиляции пары, усредненные по поляризациям электронов и фотонов. Сечение аннигиляции поляризованных частиц и поляризация возникающих при этом фотонов могут быть исследованы общими методами, изложенными в п. 3.4.4. Мы приведем здесь только некоторые окончательные результаты \*).

1. Корреляция поляризации фотонов. Дифференциальное сечение аннигиляции неполяризованных частиц с образованием двух линейно поляризованных фотонов имеет следующий вид:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{8} \frac{m^2}{v_0 \epsilon_0^2} \left\{ \frac{1}{1 - v_0^2 \cos^2 \theta} [1 - (1 - v_0^2 \cos^2 \theta) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 + \right. \\ \left. + 4 (\mathbf{v}_0 \mathbf{e}_1) (\mathbf{v}_0 \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)] - \frac{4 (\mathbf{v}_0 \mathbf{e}_1)^2 (\mathbf{v}_0 \mathbf{e}_2)^2}{(1 - v_0^2 \cos^2 \theta)^2} \right\} d\theta, \quad (4.5.30)$$

где  $\epsilon_0$  и  $\mathbf{v}_0$  — энергия и скорость позитрона и  $\theta$  — угол между направлениями импульсов позитрона и фотона в системе центра инерции. При малых скоростях отсюда следуют формулы

$$d\sigma^{(1,1)} = d\sigma^{(2,2)} = 0, \quad d\sigma^{(1,2)} = \frac{r_0^2}{8v_0} d\theta, \quad (4.5.31)$$

где  $d\sigma^{(l, k)}$  — сечение, соответствующее образованию фотонов, поляризованных в направлениях  $\mathbf{e}_l$ ,  $\mathbf{e}_k$ , причем  $\mathbf{e}_1$  лежит в плоскости  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{k}$ , а  $\mathbf{e}_2$  — перпендикулярно к этой плоскости.

Мы видим, что при  $v_0 \rightarrow 0$  образуются фотоны, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях. Этот результат имеет простой смысл. Он следует из закона сохранения четности. В пределе малых скоростей аннигиляция происходит в основном в  $s$ -состоянии, которое является нечетным, система же двух фотонов является нечетной только в том случае, когда поляризации их взаимно перпендикулярны.

2. Аннигиляция продольно поляризованной пары. Если векторы поляризации электрона и позитрона имеют отличные от нуля составляющие только по направлению их относительной

\* ) Более подробные данные о поляризационных эффектах при аннигиляции пар см. в обзоре Мак-Мастера [7].

скорости (мы обозначим их через  $\zeta_3^{(-)}$  и  $\zeta_3^{(+)}$ ), то дифференциальное сечение аннигиляции такой пары определяется формулой [27]

$$d\sigma = d\sigma_0 (1 + \zeta_3^{(+)} \cdot \zeta_3^{(-)} f), \quad (4.5.32)$$

где  $d\sigma_0$  — сечение аннигиляции неполяризованной пары (см. (4.5.23)) и

$$f = \frac{v_0^2 (1 - \cos^4 \theta) - 1 + v_0^4 - v_0^2 (1 - v_0^2) \sin^2 \theta}{v_0^2 (1 - \cos^4 \theta) + 1 - v_0^4 + v_0^2 (1 - v_0^2) \sin^2 \theta}$$

( $v_0$  и  $\theta$  — скорость позитрона и угол между импульсами позитрона и фотона в системе центра инерции). Проинтегрировав (4.5.32) по углам, получим

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \zeta_3^{(-)} \zeta_3^{(+)} F),$$

где  $\sigma_0$  — полное сечение аннигиляции неполяризованных частиц (см. (4.5.25)) и

$$F = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad \sigma_1 = \frac{3 + v_0^4}{2v_0^2} \ln \frac{1 + v_0}{1 - v_0} - \frac{3 + v_0^2}{v_0^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{v_0^2} (3 - 3v_0^2 + 2v_0^4) + \frac{1 - v_0^2}{2v_0^2} (2v_0^4 + 3v_0^2 - 3) \ln \frac{1 + v_0}{1 - v_0}.$$

На рис. 4.15 представлена зависимость  $F$  от энергии в лабораторной системе (т. е. в системе, где электрон покоится).

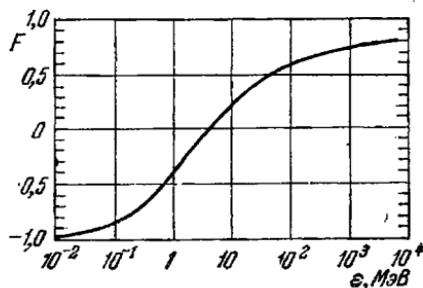


Рис. 4.15.

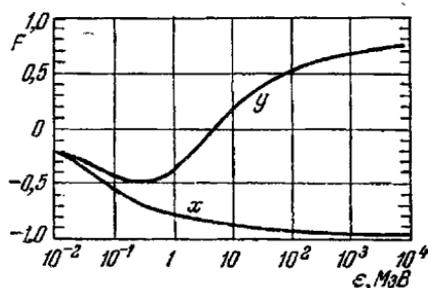


Рис. 4.16.

Если только одна из аннигилирующих частиц продольно поляризована, то сечение аннигиляции не зависит от степени поляризации,  $d\sigma = d\sigma_0$ . Образующиеся фотоны при этом оказываются циркулярно поляризованными:

$$\xi_2 = \xi_3 \frac{2v_0 - 2v_0^2 \frac{e_0^2}{m^2} \sin^2 \theta \cos \theta}{1 + v_0^2 + v_0^2 \frac{e_0^2}{m^2} \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) + v_0^2 \sin^2 \theta}, \quad (4.5.33)$$

где  $\xi_2$  — параметр Стокса фотона,  $\xi_3$  — продольная поляризация позитрона или электрона.

Интегрируя числитель и знаменатель этого выражения по  $\theta$  в пределах от  $\pi/2$  до  $\pi$ , мы получим круговую поляризацию  $\chi$

того из двух фотонов, который обладает большей энергией в лабораторной системе (в случае аннигиляции поляризованных позитронов на неполяризованной мишени). Интегрируя же числитель и знаменатель (4.5.33) по  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi/2$ , мы получим круговую поляризацию  $y$  фотона, также обладающего большей энергией в лабораторной системе (для случая аннигиляции неполяризованных позитронов на поляризованной мишени). Зависимости этих поляризаций от кинетической энергии позитрона в лабораторной системе представлены на рис. 4.16.

В заключение этого пункта приведем выражение для сечения аннигиляции поперечно поляризованных электрона и позитрона в пару неполяризованных фотонов в с.ц.и. в случае больших энергий:

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{4e^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} [1 - |S_+| |S_-| \sin^2 \theta \cos(\varphi_0 + 2\varphi)] d\theta, \quad (4.5.34)$$

где  $\theta$  — угол между направлениями импульсов электрона и фотона,  $\epsilon$  — энергия электрона,  $S_-$ ,  $S_+$  — векторы поляризаций электрона и позитрона,  $\varphi_0 = \widehat{S_- S_+}$ ,  $\varphi = \widehat{S_- p_-}$ .

**4.5.6. Распад позитрония.** Полученные выше результаты можно применить к задаче о распаде позитрония, т. е. связанной системы, состоящей из электрона и позитрона.

Основным состоянием позитрония является, очевидно,  $S$ -состояние. При этом следует различать синглетное состояние позитрония, в котором суммарный спин частиц равен нулю, и триплетное состояние, в котором суммарный спин частиц равен единице. Эти состояния мы будем обозначать соответственно через  $^1S$  и  $^3S$ . Позитроний, находящийся в состоянии  $^1S$ , называется парапозитронием, а позитроний, находящийся в состоянии  $^3S$ , — ортопозитронием.

Система, состоящая из двух фотонов, не может иметь состояний с моментом, равным единице. Поэтому ортопозитроний не может распадаться на два фотона. Более того, так как состояние  $^3S$  позитрония является зарядово-нечетным, то можно утверждать, что вообще невозможен распад ортопозитрония на любое четное число фотонов. Напротив, парапозитроний представляет собой зарядово-четную систему, поэтому невозможен его распад на любое нечетное число фотонов.

Основными процессами, определяющими время жизни позитрония, являются двухфотонная аннигиляция в случае парапозитрония и трехфотонная аннигиляция в случае ортопозитрония [28].

Вероятность распада позитрония можно связать с вероятностью аннигиляции свободной пары. Действительно, рассмотрим волновую функцию позитрония в  $S$ -состоянии

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}},$$

где  $a$  — радиус позитрония, равный удвоенному радиусу первой борховской орбиты водорода,  $a = 2a_0 = 2\hbar^2/me^2$ . Компонента Фурье волновой функции  $\psi(r)$

$$\psi_p = \int \psi(r) e^{-ipr} d^3x = \frac{8\sqrt{\pi a^3}}{(1+a^2p^2)^2} \quad (4.5.35)$$

определяет, очевидно, амплитуду вероятности того, что в позитронии электрон имеет импульс  $p$ , а позитрон — импульс  $-p$ . Эта формула показывает, что наиболее вероятны импульсы порядка  $p \sim 1/a$ , которые значительно меньше  $m$ . Поэтому распад позитрония можно приближенно рассматривать как аннигиляцию свободного позитрона и свободного электрона с импульсами, равными нулю, но с определенными ориентациями спинов.

Обозначим через  $\omega_1$  и  $\omega_0$  вероятности распада орто- и парапозитрония. Пусть далее  $\bar{\omega}$  обозначает вероятность распада свободной пары с нулевыми импульсами частиц, усредненную по ориентациям их спинов и вычисленную в предположении, что плотность частиц равна плотности частиц в позитронии (т. е. равна  $|\psi(0)|^2 = 1/\pi a^3$ , а не  $1/V$ , где  $V$  — нормировочный объем, как это предполагается при вычислении вероятности аннигиляции свободной пары). Так как относительные веса состояний со спинами 1 и 0 равны соответственно  $3/4$  и  $1/4$ , то, очевидно,

$$\bar{\omega} = 3/4\omega_1 + 1/4\omega_0. \quad (4.5.36)$$

Величину  $\bar{\omega}$  можно представить в виде  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{2\gamma} + \bar{\omega}_{3\gamma} + \dots$ , где  $\bar{\omega}_{n\gamma}$  — усредненная по ориентациям спинов вероятность превращения пары в  $n$  фотонов. Так как парапозитроний может распадаться только на четное, а ортопозитроний только на нечетное число фотонов, то из (4.5.36) следует, что  $1/4\omega_0 = \bar{\omega}_{2\gamma} + \bar{\omega}_{4\gamma} + \dots$ ;  $3/4\omega_1 = \bar{\omega}_{3\gamma} + \bar{\omega}_{5\gamma} + \dots$ , т. е.

$$\omega_0 \approx 4\bar{\omega}_{2\gamma}, \quad \omega_1 \approx 4/3\bar{\omega}_{3\gamma}. \quad (4.5.37)$$

Используя формулу (4.5.26) для сечения двухфотонной аннигиляции пары при малых скоростях позитрона, мы получим отсюда

$$\omega_0 = 4|\psi(0)|^2 (v_+\sigma)_{v_+ \rightarrow 0} = 1/2\alpha^5 m = 0,8 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}. \quad (4.5.38)$$

Определим теперь вероятность трехфотонного распада ортопозитрония. Этот процесс представляет собой процесс третьего порядка теории возмущений. Он изображается шестью диаграммами, одна из которых представлена на рис. 4.17 (остальные диаграммы отличаются от приведенной только перестановками импульсов фотонов  $k_1, k_2, k_3$ ). Написав матричный элемент, соответствующий этим диаграммам, можно найти дифференциальную вероятность

трехфотонной аннигиляции пары. Для случая  $\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_- = 0$  усредненная по спиновым состояниям частиц она определяется формулой [29]

$$d\omega_{3\gamma} = \frac{\alpha^3 d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3}{4\omega_1\omega_2\omega_3 (2\pi)^3 m^4 a_0^3} [(1 - \mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)^2 + (1 - \mathbf{n}_2\mathbf{n}_3)^2 + (1 - \mathbf{n}_1\mathbf{n}_3)^2] \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m), \quad (4.5.39)$$

где  $\mathbf{n}_i$  — единичный вектор в направлении импульса фотона  $\mathbf{k}_i$ .

Интегрирование по  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и углам (с учетом тождественности фотонов) дает полную вероятность трехфотонной аннигиляции пары при  $\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_- = 0$

$$\bar{\omega}_{3\gamma} = \int_0^m F(\omega_1) d\omega_1, \quad F(\omega_1) = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{r_0}{a_0}\right)^3 \left[ \frac{\omega_1(m - \omega_1)}{(2m - \omega_1)^2} - 2m \frac{(m - \omega_1)^2}{(2m - \omega_1)^3} \ln \frac{m - \omega_1}{m} + \frac{2m - \omega_1}{\omega_1} + \frac{2(m - \omega_1)m}{\omega_1^2} \ln \frac{m - \omega_1}{m} \right]. \quad (4.5.40)$$

Функция  $F(\omega)$ , определяющая спектр фотонов распада, изображена на рис. 4.18.

Выполнив интегрирование по  $\omega_1$ , получим

$$\bar{\omega}_{3\gamma} = \frac{1}{6\pi} (\pi^2 - 9) \alpha \frac{r_0^3}{a_0^3}. \quad (4.5.41)$$

Воспользовавшись далее соотношениями (4.5.37), найдем отсюда вероятность распада ортопозитрония

$$\omega_1 = \frac{2}{9\pi} (\pi^2 - 9) \alpha \frac{r_0^3}{a_0^3} = 0,71 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}. \quad (4.5.42)$$

**4.5.7. Превращение пары в один фотон.** При столкновении позитрона с несвободным электроном обе частицы могут превратиться в один фотон [30]. Такой процесс определяется матричным элементом первого порядка

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = \frac{2\pi i e}{V 2\omega} \int \bar{\psi}_-(\mathbf{r}) \hat{e} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_+(\mathbf{r}) d^3x \cdot \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega), \quad (4.5.43)$$

где  $\bar{\psi}_-(\mathbf{r})$  и  $\psi_+(\mathbf{r})$  — волновые функции электрона в поле, соответствующие отрицательной и положительной частотам и описывающие позитрон с энергией  $\varepsilon_+$  и электрон с энергией  $\varepsilon_-$ .

Если электроном является атомный  $K$ -электрон и при этом  $\alpha Z \ll 1$ , то в качестве  $\psi_+(\mathbf{r})$  может быть взята функция (4.1.28). В качестве же  $\bar{\psi}_-(\mathbf{r})$  следует взять функцию

$$\bar{\psi}_-(\mathbf{r}) = \bar{u}(-p) e^{-\frac{\pi\xi_+}{2}} \Gamma(1 + i\xi_+) \left(1 + \frac{\gamma_4 \gamma \mathbf{V}}{2\varepsilon_+}\right) \times \\ \times \mathcal{F}[-i\xi_+, 1, i(p_+r - p_+r)] e^{i\mathbf{p}r},$$

где  $\xi_+ = \alpha Z \varepsilon_+ / p_+$ . Сравнение формул (4.1.18) и (4.5.43) показывает, что если в матричном элементе, определяющем фотоэффект, про-

извести замену

$$\omega \rightarrow -\omega, \quad \varepsilon \rightarrow -\varepsilon_+, \quad k \rightarrow -k; \quad p \rightarrow -p_+, \quad (4.5.44)$$

то этот матричный элемент перейдет в матричный элемент, определяющий однофотонную аннигиляцию. Поэтому мы можем не производить здесь вычислений квадрата модуля матричного эле-

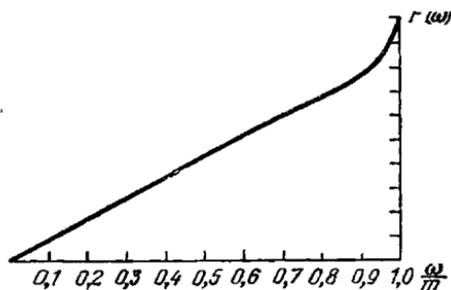


Рис. 4.18

мента, а воспользоваться сразу результатами п.4.1.5. В отличие от фотоэффекта плотность конечных состояний будет теперь не  $\rho \varepsilon d\omega_e/(2\pi)^3$ , а  $\omega^2 d\omega_\nu/(2\pi)^3$ , где  $d\omega_e$  и  $d\omega_\nu$  — элементы телесных углов, в которых лежат импульсы электрона и фотона. Кроме того, при определении сечения однофотонной аннигиляции пары следует учитывать, что плотность потока падающих частиц будет равна

скорости позитронов  $v_+$ , а не скорости света, как это было в случае фотоэффекта. Учитывая эти изменения, можно получить следующую формулу для сечения однофотонной аннигиляции позитрона на  $K$ -слое (отнесенную к двум  $K$ -электронам):

$$\sigma = 4\pi r_0^2 \frac{Z^5}{(137)^4} \frac{m^3}{p_+(e_+ + m)^2} \left( \frac{e_+^2}{m^2} + \frac{2}{3} \frac{e_+}{m} + \frac{4}{3} - \frac{e_+ + 2m}{p_+} \ln \frac{e_+ + p_+}{m} \right). \quad (4.5.45)$$

Эта формула, так же как и формула (4.1.30) для сечения фотоэффекта, справедлива, если  $(Z\alpha/v_+) \ll 1$ .

В нерелятивистском и крайне релятивистском случаях формула (4.5.45) приобретает вид

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4\pi}{3} r_0^2 \frac{Z^5}{(137)^4} \frac{p_+}{m}, & v_+ &\ll 1, \\ \sigma &= 4\pi r_0^2 \frac{Z^5}{(137)^4} \frac{m}{e_+}, & e_+ &\gg m. \end{aligned} \quad (4.5.46)$$

Мы видим, что сечение однофотонной аннигиляции позитрона при малых энергиях пропорционально скорости позитрона в отличие от сечения двухфотонной аннигиляции, которое обратно пропорционально  $v_+$ . Поэтому при малых энергиях позитрона однофотонная аннигиляция значительно менее вероятна, чем двухфотонная аннигиляция. Отношение сечений однофотонной и двухфотонной аннигиляций максимально при  $e_+ \sim 10m$  и составляет около 0,2 для свинца.

## § 4.6. Рассеяние электрона и позитрона электроном

**4.6.1. Рассеяние электрона электроном.** Перейдем к рассмотрению процессов взаимодействия двух заряженных частиц, не связанных с излучением или поглощением фотонов.

Так как матрица рассеяния  $S^{(1)}$  первого порядка содержит лишь элементы, соответствующие испусканию или поглощению фотона, то следует рассмотреть матрицу рассеяния второго порядка  $S^{(2)}$ .

Простейшим процессом интересующего нас типа является рассеяние двух электронов [31]. Оно описывается двумя диаграммами, изображенными на рис. 4.19. Согласно общим правилам п. 3.3.4 матричный элемент рассматриваемого процесса имеет вид

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{-ie^2 (2\pi)^4}{4 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon'_1 \varepsilon'_2}} M \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2), \quad (4.6.1)$$

$$M = \frac{(\bar{u}'_1 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}'_2 \gamma_\nu u_2)}{(p'_1 - p_1)^2} - \frac{(\bar{u}'_2 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}'_1 \gamma_\nu u_2)}{(p'_2 - p_1)^2};$$

здесь  $p_1$  и  $p_2$  — 4-импульсы электронов в начальном состоянии,  $p'_1$  и  $p'_2$  — 4-импульсы электронов в конечном состоянии и  $u_1, u_2, u'_1, u'_2$  — соответствующие этим состояниям нормированные, согласно (1.1.25), биспинорные амплитуды ( $u_1 \equiv u(p_1), \dots, u'_2 \equiv u(p'_2)$ ), нормировочный объем принят за единицу. Дифференциальное сечение рассеяния, согласно правилам п. 3.4.3, определяется формулой

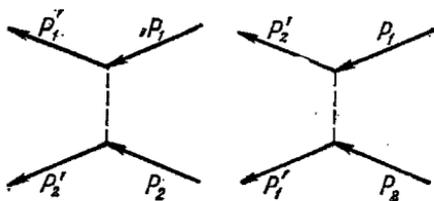


Рис. 4.19.

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} \frac{1}{4} |M|^2 d^3 p'_1 d^3 p'_2 \frac{1}{J} \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2), \quad (4.6.2)$$

где  $J = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m^4}$ .

В с. п. и. электронов ( $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 = 0$ )  $J = 2\varepsilon |p_1|$ , и выражение для  $d\sigma$  после исключения  $\delta$ -функций приобретает вид

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{64\varepsilon^2} |M|^2 d\Omega. \quad (4.6.3)$$

В случае неполяризованных частиц мы должны усреднить это выражение по поляризациям начального состояния и просуммировать по поляризациям конечного состояния, т. е. произвести замену

$$|M|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(p'_1 - p_1)^4} \text{Sp } \gamma_\mu (m - i\hat{p}_1) \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}'_1) \text{Sp } \gamma_\mu (m - i\hat{p}_2) \times \right.$$

$$\times \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}'_2) + \frac{1}{(p'_2 - p_1)^4} \text{Sp } \gamma_\mu (m - i\hat{p}_1) \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}'_2) \text{Sp } \gamma_\mu (m - i\hat{p}_2) \times$$

$$\times \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}'_1) - \frac{2}{(p'_1 - p_1)^2 (p'_2 - p_1)^2} \text{Sp } \gamma_\mu (m - i\hat{p}_1) \bar{\gamma}_\nu \times$$

$$\left. \times (m - i\hat{p}'_2) \gamma_\mu (m - i\hat{p}_2) \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}'_1) \right\},$$

где  $\bar{\gamma}_\mu = \gamma_4 \gamma_\mu \gamma_4$ , и просуммировать написанное выражение по  $\mu, \nu$  от  $\mu, \nu = 1$  до  $\mu, \nu = 4$ . При этом можно, очевидно, заменить  $\bar{\gamma}_\mu$  на  $\gamma_\mu$ , так как  $\bar{\gamma}_\mu = -\gamma_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) и  $\bar{\gamma}_4 = \gamma_4$ . Далее для упроще-

ния выражения для  $|M|^2$  следует воспользоваться соотношениями (1.2.18), после чего мы получим сумму членов, каждый из которых содержит следы от произведений не более четырех матриц  $\gamma_\mu$ . Окончательное выражение для сечения имеет вид

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{2\varepsilon^2} d\Omega \left[ \frac{(\rho_1 \rho_2)^2 + (\rho_1 \rho_2')^2 + 2m^2 \rho_1 \rho_2 - 2m^2 \rho_1 \rho_2'}{(\rho_1' - \rho_1)^4} + \frac{(\rho_1 \rho_2)^2 + (\rho_1 \rho_2')^2 + 2m^2 \rho_1 \rho_2 - 2m^2 \rho_1 \rho_1'}{(\rho_2' - \rho_1)^4} + 2 \frac{(\rho_1 \rho_2)^2 + 2m^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1' - \rho_1)^2 (\rho - \rho_1)^2} \right],$$

или

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\left(2 \frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right)^2}{2v^4 (\varepsilon/m)^2} \left[ \frac{4}{\sin^4 \vartheta} - \frac{3}{\sin^2 \vartheta} + \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right)^2 \left(1 + \frac{4}{\sin^2 \vartheta}\right) \right] d\Omega, \quad (4.6.4)$$

где  $v$ ,  $\varepsilon$  и  $\vartheta$  — скорость, энергия и угол рассеяния электрона в системе центра инерции,  $r_0 = \alpha/m$  — классический радиус электрона.

В нерелятивистском пределе  $v \ll 1$ ,  $\varepsilon/m \approx 1$  и формула (4.6.4) переходит в формулу Резерфорда с учетом обмена (в борновском приближении)

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{16v^4} \left( \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \right) d\Omega. \quad (4.6.5)$$

Выразив в (4.6.4) величины  $v$  и  $\varepsilon$  через скорость  $v_1$  и энергию  $\varepsilon_1$  падающего электрона в той системе отсчета, в которой один из электронов до столкновения покоился ( $v_2 = 0$ ), получим

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\varepsilon_1/m + 1}{v_1^4 (\varepsilon_1/m)^2} \left[ \frac{4}{\sin^4 \vartheta} - \frac{3}{\sin^2 \vartheta} + \frac{(\varepsilon_1/m - 1)^2}{4 (\varepsilon_1/m)^2} \left(1 + \frac{4}{\sin^2 \vartheta}\right) \right] d\Omega, \quad (4.6.6)$$

где  $\vartheta$  — угол рассеяния, отнесенный по-прежнему к системе центра инерции. Он связан с углом рассеяния  $\theta$  в лабораторной системе соотношением

$$\cos \vartheta = \frac{2 - (\varepsilon_1/m + 3) \sin^2 \theta}{2 + (\varepsilon_1/m - 1) \sin^2 \theta}.$$

В нерелятивистском пределе  $\vartheta = 2\theta$  и

$$d\sigma = 4 \left(\frac{r_0}{v_1^2}\right)^2 \left( \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \right) \cos \theta d\Omega. \quad (4.6.7)$$

В ультрарелятивистском пределе сечение рассеяния электрона электроном в с. ц. и. принимает вид

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2} \left( \frac{3 + \cos^2 \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} \right)^2 d\Omega. \quad (4.6.8)$$

С углом рассеяния в с. ц. и. однозначно связана потеря энергии электрона в результате столкновения с покоящимся электроном. Обозначим через  $\Delta$  отношение энергии, переданной одним электроном другому, первоначально покоящемуся, к кинетической энергии первого электрона,  $\Delta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1'}{\varepsilon_1 - m} = \frac{\varepsilon_2' - m}{\varepsilon_1 - m}$ . Из законов сохранения

энергии и импульса следует, что  $\Delta = 1/2(1 - \cos \vartheta)$ . Подставляя это выражение в (4.6.6), получим

$$d\sigma = \frac{2\pi r_0^2}{v_1^3(x-1)} \frac{d\Delta}{\Delta^2(1-\Delta)^2} \left\{ 1 - \left[ 3 - \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 \right] \Delta(1-\Delta) + \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 \Delta^2(1-\Delta)^2 \right\}, \quad (4.6.9)$$

где  $x = \varepsilon_1/m$ . Эта формула определяет распределение по энергиям вторичных электронов, возникающих при прохождении быстрого электрона через вещество.

При малых  $\Delta$

$$d\sigma = \frac{2\pi r_0^2}{v_1^3(x-1)} \frac{d\Delta}{\Delta^2}. \quad (4.6.10)$$

**4.6.2. Сечение рассеяния позитрона электроном.** Рассмотрим рассеяние позитрона электроном [32]. Произведя в (4.6.1) замену

$$u_2 \rightarrow v_1', \quad u_2' \rightarrow v_1, \quad p_2 \rightarrow -p_1^{(n)}, \quad p_2' \rightarrow -p_1^{(n)},$$

где  $p_1^{(n)}$  и  $p_1'^{(n)}$  — начальный и конечный 4-импульсы позитрона и  $v_1 = u(-p_1^{(n)})$ ,  $v_1' = u(-p_1'^{(n)})$ , получим матричный элемент рассеяния позитрона электроном:

$$M = \frac{(\bar{u}_1' \gamma_\mu u_1)(\bar{v}_1 \gamma_\mu v_1')}{(p_1' - p_1)^2} - \frac{(\bar{v}_1 \gamma_\mu u_1)(\bar{u}_1' \gamma_\mu v_1')}{(p_1^{(n)} + p_1)^2}. \quad (4.6.11)$$

Диаграммы, описывающие рассеяние позитрона электроном, изображены на рис. 4.20. Диаграмма рис. 4.20, а описывает

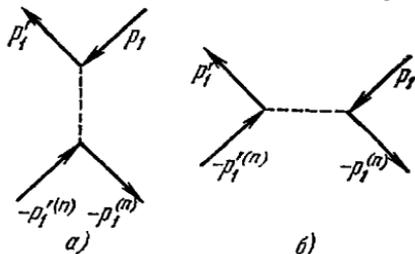


Рис. 4.20.

виртуальную аннигиляцию пары с импульсами  $p_1$  и  $p_1^{(n)}$ . Эта пара превращается в виртуальный фотон с импульсом  $k = p_1 + p_1^{(n)}$ , который вновь образует пару с импульсами  $p_1'$  и  $p_1'^{(n)}$ .

Вычисление  $|M|^2$  может быть проведено так же, как и в случае рассеяния электрона электроном. Мы приведем здесь только результат:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{16 \left( \frac{\varepsilon}{m} \right)^2} \left\{ \frac{1}{\left[ \left( \frac{\varepsilon}{m} \right)^2 - 1 \right]^2} \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \left[ 1 + 4 \left( \frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1 \right) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + 2 \left( \frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1 \right)^2 \left( 1 + \cos^4 \frac{\vartheta}{2} \right) \right] + \left( \frac{m}{\varepsilon} \right)^4 \left[ 3 + 4 \left( \frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1 \right) + \left( \frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1 \right)^2 \left( 1 + \cos^2 \vartheta \right) \right] - \frac{m^4}{\varepsilon^2 (\varepsilon^2 - m^2) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \times \right. \\ \left. \times \left[ 3 + 4 \left( \frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1 \right) \left( 1 + \cos \vartheta \right) + \left( \frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1 \right)^2 \left( 1 + \cos \vartheta \right)^2 \right] \right\} d\vartheta \quad (4.6.12)$$

( $\varepsilon$  и  $\vartheta$  — энергия и угол рассеяния в с. ц. и.).

В нерелятивистском случае эта формула переходит в формулу Резерфорда без обмена. Вклад обменной (т. е. аннигиляционной) диаграммы (рис. 4.20, б) в нерелятивистском случае очень мал.

В ультрарелятивистском пределе сечение рассеяния электрона позитроном в с. ц. и. имеет вид

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{16\epsilon^2} \left( \frac{3 + \cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} \right)^2 do.$$

Распределение по энергиям вторичных электронов определяется формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Delta} = 2\pi r_0^2 \frac{x}{(x-1)^2 \Delta^2} F(x, \Delta), \quad (4.6.13)$$

$$F(x, \Delta) = \frac{1}{x(x+1)} \left\{ \left[ 1 + 2(x-1)(1-\Delta) + (x-1)^2 \left( 1 - \Delta + \frac{\Delta^2}{2} \right) \right]^2 + \frac{(x-1)^2 \Delta^2}{(x+1)^2} \left[ 3 + 2(x-1) + (x-1)^2 \left( \frac{1}{2} - \Delta + \Delta^2 \right) \right]^2 - \frac{(x-1)\Delta}{x+1} [3 + 4(x-1)(1-\Delta) + (x-1)^2(1-\Delta)^2] \right\},$$

где  $x = \epsilon_1^{(n)}/m$ ,  $\Delta = (\epsilon_1' - m)/(\epsilon_1^{(n)} - m)$  (электрон до столкновения покоился). При  $\Delta \ll 1$  мы получаем формулу (4.6.10).

**4.6.3. Рассеяние поляризованных электронов.** Перейдем к рассмотрению рассеяния поляризованных частиц, отличие сечений рассеяния которых от сечений рассеяния неполяризованных частиц может быть использовано для измерения степени поляризации частиц.

Мы видели (см. п. 1.7.4), что при рассеянии неполяризованных электронов во внешнем поле в борновском приближении не возникает эффекта поляризации. Аналогично и при рассеянии электрона или позитрона на электроне поляризация неполяризованного пучка возникает лишь в том случае, если мишень поляризована, а отличие сечений рассеяния от сечений для неполяризованных частиц будет иметь место только тогда, когда пучок и мишень поляризованы.

Сечение рассеяния поляризованных частиц может быть определено по общим формулам п. 3.4.4. Мы приведем здесь только результат для случая рассеяния электрона на электроне, когда электроны в начальном состоянии поляризованы, а рассеянные электроны неполяризованы, причем векторы поляризации электронов  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$  перпендикулярны к их 3-импульсам в с. ц. и. В пределе больших энергий

$$d\sigma^{e^-e^-} = \frac{\alpha^2}{4\epsilon^2} \left( \frac{3 + \cos^2 \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} \right)^2 \left[ 1 + \frac{\sin^4 \vartheta}{(3 + \cos^2 \vartheta)^2} |\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2| \times \right. \\ \left. \times \cos(\varphi_0 + 2\varphi) \right] do, \quad (4.6.14)$$

где  $\varphi_0 = \widehat{\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2}$ ,  $\varphi = \widehat{\mathbf{s}_1 \mathbf{p}_2}$ .

Для рассеяния электрона позитроном в аналогичных условиях имеем

$$d\sigma^{e^+e^-} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{16e^2} \left( \frac{3 + \cos^2 \vartheta}{1 - \cos \vartheta} \right)^2 \left[ 1 - \frac{\sin^4 \vartheta}{(3 + \cos^2 \vartheta)^2} |s_+| |s_-| \cos(\varphi_0 + 2\varphi) \right] do. \quad (4.6.15)$$

**4.6.4. Рассеяние мюона электроном. Превращение электронной пары в мюонную пару.** Рассмотрим рассеяние мюона электроном [33]. Эта задача аналогична задаче о рассеянии электрона электроном, но проще ее. Так как гамильтониан взаимодействия частиц с электромагнитным полем содержит электронный и мюонный ток в виде отдельных слагаемых, то на диаграммах Фейнмана нет вершин, в которых происходило бы превращение мюона в электрон или аннигиляция мюона с позитроном. Каждая сплошная цепочка линий диаграммы (от входа до выхода или вся замкнутая петля) может быть либо электронной, либо мюонной. «Обменных» диаграмм нет. Поэтому рассеяние мюона электроном описывается во втором приближении теории возмущений только первой из двух диаграмм рис. 4.19 (она изображена на рис. 4.21), и матричный элемент определяется первым из двух членов формулы (4.6.1)

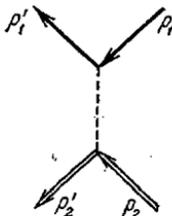


Рис. 4.21.

$$M = \frac{(\bar{u}'_1 \gamma_\alpha u_1) (\bar{\mu}'_2 \gamma_\alpha \mu_2)}{q^2}, \quad (4.6.16)$$

где  $q = p_1 - p'_1$ ,  $p_1, p'_1$  — 4-импульсы,  $u_1, u'_1$  — биспинорные амплитуды электрона в начальном и конечном состояниях и  $p_2, p'_2$  и  $u_2, u'_2$  — аналогичные величины для мюона.

Дифференциальное сечение рассеяния мюона электроном определяется формулой, аналогичной формуле (4.6.2):

$$d\sigma = \alpha^2 \frac{do}{4\omega^2} |M|^2,$$

где  $do$  и  $\omega = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  — элемент телесного угла и полная энергия в системе центра инерции. В случае неполяризованных частиц

$$|M|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \frac{1}{q^4} \text{Sp } \gamma_\alpha (m - i\hat{p}_1) \gamma_\beta (m - i\hat{p}'_1) \text{Sp } \gamma_\alpha (\mu - i\hat{p}_2) \gamma_\beta (\mu - i\hat{p}'_2)$$

( $m$  — масса электрона,  $\mu$  — масса мюона) и сечение имеет вид

$$d\sigma = 2\alpha^2 \frac{do}{\omega^2} \frac{1}{q^4} \left[ (p_1 p_2)^2 + (p_1 p'_2)^2 - \frac{m^2 + \mu^2}{2} q^2 \right]. \quad (4.6.17)$$

Выразив входящие сюда инварианты через энергии  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , угол рассеяния  $\vartheta$  и импульс  $p \equiv |p|$  в с. ц. и., получим

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 do}{8\omega^2 p^4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \left[ (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + p^2)^2 + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + p^2 \cos \vartheta)^2 - 2(m^2 + \mu^2) p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right].$$

$$(4.6.18)$$

Легко видеть, что при  $\epsilon \ll \mu$  эта формула переходит в формулу для сечения рассеяния электрона во внешнем поле.

Переходя в (4.6.17) к величинам в системе покоя электрона, найдем распределение по энергиям электронов отдачи. Обозначая переданную электрону энергию через  $T = \epsilon'_1 - m$  и замечая, что

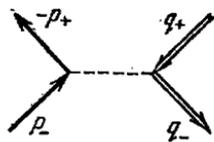


Рис. 4.22.

$$q^2 = 2mT, \quad p^2 \omega^2 = m^2 \rho_0^2, \quad \frac{d\sigma}{\omega^2} = \frac{2\pi dT}{m\rho_0^2},$$

где  $\rho_0 = \sqrt{\epsilon_0^2 - \mu^2}$  — импульс мюона в начальном состоянии, получим

$$d\sigma = 2\pi r_0^2 \frac{m}{v_0^2} \frac{dT}{T^2} \left( 1 - v_0^2 \frac{T}{T_{\max}} + \frac{1}{2} \frac{T^2}{\epsilon_2} \right), \quad (4.6.19)$$

где  $v_0$  — скорость падающего мюона и  $T_{\max}$  — максимальное значение  $T$ ,

$$T_{\max} = 2m\rho_0^2 / (m^2 + \mu^2 + 2m\epsilon_2)$$

(оно соответствует углу рассеяния  $\theta = \pi$ ).

Приведем выражение для сечения рассеяния поляризованного электрона на поляризованном мюоне [34]:

$$d\sigma = 2\alpha^2 \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{1}{q^4} \left\{ (\rho_1 \rho_2)^2 + (\rho_1 \rho_2')^2 - \frac{m^2 + \mu^2}{2} q^2 - m\mu [q^2 (s_1 s_2) - (s_1 q) (s_2 q)] \right\}, \quad (4.6.20)$$

где  $s_1$  и  $s_2$  — 4-векторы поляризации электрона и мюона в начальном состоянии.

Электрон и позитрон могут аннигилировать, превращаясь в пару мюонов. Диаграмма, описывающая этот процесс, изображена на рис. 4.22. Сечение процесса определяется формулой

$$d\sigma (e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{\alpha^2}{8e^2} \left( \frac{e^2 - \mu^2}{e^2 - m^2} \right)^{1/2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{m^2 + \mu^2}{2e^2} - 2 \cos \theta \left( -\frac{1}{4} + \frac{m^2 + \mu^2}{4e^2} - \frac{m^2 \mu^2}{4e^4} \right) \right] d\omega, \quad (4.6.21)$$

где  $e$  — энергия позитрона в с. ц. и.,  $\theta$  — угол между направлениями электрона и  $\mu$ -мезона,  $d\omega$  — элемент телесного угла  $\mu^-$ -мезона.

Полное сечение равно

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{3} \left( \frac{m}{e} \right)^2 \left( 1 + \frac{\mu^2}{2e^2} \right) \left( 1 - \frac{\mu^2}{e^2} \right)^{1/2}. \quad (4.6.22)$$

Максимального значения это сечение достигает при  $e = 1,3\mu$ ; оно примерно в 20 раз меньше сечения двухфотонной аннигиляции при этой же энергии.

В случае поперечно поляризованных электрона и позитрона в ультрарелятивистском пределе сечение имеет вид

$$d\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{16e^2} (1 + \cos^2\theta) \left[ 1 - |\mathbf{s}_+||\mathbf{s}_-| \frac{\sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta} \cos(\varphi_0 + 2\varphi) \right], \quad (4.6.23)$$

где  $\varphi_0 = \widehat{\mathbf{s}_- \mathbf{s}_+}$ ,  $\varphi = \widehat{\mathbf{s}_- \mathbf{q}_-}$  ( $\mathbf{s}_+$ ,  $\mathbf{s}_-$  — векторы поляризаций электрона и позитрона),  $\mathbf{q}_\pm$  — импульсы мюонов.

4.6.5. Излучение фотона при рассеянии электрона электроном и электрона позитроном и при превращении  $e^+e^-$  в  $\mu^+\mu^-$ . В предыдущем пункте этого параграфа мы рассмотрели чисто упругое рассеяние электрона электроном и электрона позитроном, а также превращение  $e^+e^-$ -пары в пару  $\mu^+\mu^-$ . В этом пункте мы приведем выражения для сечений этих процессов, сопровождающихся излучением жесткого фотона [35].

В системе с. ц. и. сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$  в области высоких энергий имеет вид

$$d\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma) = \frac{\alpha r_0^2}{2\pi} \left(\frac{m}{e}\right)^2 R(e^+e^-) \frac{d^3p'_1 d^3p'_2 d^3k}{4\pi e^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega} \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 - k), \quad (4.6.24)$$

$$R(e^+e^-) = -m^2 e^2 \left[ \frac{1}{\chi_2^2} \left( \frac{t}{u} + \frac{u}{t} + 1 \right)^2 + \frac{1}{\chi_1^2} \left( \frac{t_1}{u_1} + \frac{u_1}{t_1} + 1 \right)^2 + \frac{1}{\chi_2'^2} \left( \frac{t}{u_1} + \frac{u_1}{t} + 1 \right)^2 + \frac{1}{\chi_1'^2} \left( \frac{t_1}{u} + \frac{u}{t_1} + 1 \right)^2 \right] + \frac{e^2 \omega'}{16} [ss_1(s^2 + s_1^2) + tt_1(t^2 + t_1^2) + uu_1(u^2 + u_1^2)] (\chi_1 \chi_2 \chi_1' \chi_2' t t_1 u u_1)^{-1},$$

где

$$\omega' = s(tu + u_1 t_1) + s_1(tu_1 + ut_1) + 2ss_1(t + t_1) + 2tt_1(s + s_1),$$

$$\chi_{1,2} = -kp_{1,2}, \quad \chi'_{1,2} = -kp'_{1,2}, \quad s = -(p_1 + p_2)^2, \quad s_1 = -(p'_1 + p'_2)^2, \\ t = -(p_1 - p'_1)^2, \quad t_1 = -(p_2 - p'_2)^2, \quad u = -(p_1 - p'_2)^2, \quad u_1 = -(p_2 - p'_1)^2$$

и  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$  — энергии рассеянных электронов и фотона.

Сечение рассеяния электрона позитроном с излучением фотона в с. ц. и. определяется формулой

$$d\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma) = \frac{\alpha r_0^2}{2\pi} \left(\frac{m}{e}\right)^2 R(e^+e^-) \frac{d^3p'_+ d^3p'_- d^3k}{4\pi e^2 \varepsilon_+ \varepsilon_- \omega} \delta(p_+ + p_- - p'_+ - p'_- - k), \quad (4.6.25)$$

$$R(e^+e^-) = -m^2 e^2 \left[ \frac{1}{\chi_2^2} \left( \frac{s_1}{t_1} + \frac{t_1}{s_1} + 1 \right)^2 + \frac{1}{\chi_1^2} \left( \frac{s_1}{t} + \frac{t}{s_1} + 1 \right)^2 + \frac{1}{\chi_2'^2} \left( \frac{s}{t} + \frac{t}{s} + 1 \right)^2 + \frac{1}{\chi_1'^2} \left( \frac{s}{t_1} + \frac{t_1}{s} + 1 \right)^2 \right] + \frac{e^2 \omega}{16} [ss_1(s^2 + s_1^2) + tt_1(t^2 + t_1^2) + uu_1(u^2 + u_1^2)] (\chi_+ \chi_- \chi'_+ \chi'_- ss_1 tt_1)^{-1},$$

где

$$w = u(st + s_1 t_1) + u_1(st_1 + s_1 t) + 2ss_1(t + t_1) + 2tt_1(s + s_1),$$

$$s = -(p_+ + p_-)^2, \quad s_1 = -(p'_+ + p'_-)^2,$$

$$t = -(p_- - p'_-)^2, \quad t_1 = -(p_+ - p'_+)^2,$$

$$u = -(p_- - p'_-)^2, \quad u_1 = -(p_+ - p'_+)^2, \quad \chi'_\pm = -kp_\pm, \quad \chi'_\pm = -kp'_\pm.$$

Приведем, наконец, формулу для сечения образования мюонной пары и фотона при столкновении электрона с позитроном в области высоких энергий в системе с. ц. и.

$$d\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma) =$$

$$= \frac{\alpha r_0^2}{2\pi} \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2 R(\mu^+\mu^-) \frac{d^3q_+ d^3q_- d^3k}{4\pi\varepsilon^2\varepsilon_+ \varepsilon_- \omega} \delta(p_+ + p_- - q_+ - q_- - k), \quad (4.6.26)$$

$$R(\mu^+\mu^-) = -\frac{m^2\varepsilon^2}{2s_1^2} \left(\frac{t^2 + u^2}{\chi_\mp^2} + \frac{t_1^2 + u_1^2}{\chi_\mp^2}\right) - \frac{\mu^2\varepsilon^2}{2s^2} \left(\frac{t_1^2 + u^2}{\chi_\mp^2} + \frac{t^2 + u_1^2}{\chi_\mp^2}\right) + \\ + \frac{\varepsilon^2\omega}{16} (t^2 + t_1^2 + u^2 + u_1^2) (\chi_+\chi_- \chi'_+\chi'_- ss_1)^{-1},$$

где  $q_+$ ,  $q_-$  — 4-импульсы мюонов и величина  $w$  совпадает с аналогичным выражением для процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ . Инварианты, входящие в определение сечения, получаются из соответствующих инвариантов для процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$  путем замены  $p'_+$ ,  $p'_- \rightarrow q_+$ ,  $q_-$ .

## § 4.7. Запаздывающее взаимодействие зарядов

**4.7.1. Функция взаимодействия двух зарядов.** В предыдущем параграфе мы определили матричный элемент рассеяния электрона электроном и вычислили сечение этого процесса. С другой стороны, в § 1.7 мы определили матричный элемент рассеяния электрона во внешнем поле, в частности в кулоновском поле точечного заряда, и с помощью этого матричного элемента нашли сечение рассеяния электрона. Но как видно из (1.7.50) и (4.6.4), сечения в обоих случаях получаются различными. Это значит, что рассеяние электрона электроном нельзя трактовать как рассеяние одного электрона в кулоновском поле, создаваемом другим электроном. Причина этого заключается в том, что взаимодействие двух электронов является запаздывающим и не сводится к мгновенному кулоновскому взаимодействию. Действительно, в электродинамике не существует потенциальной энергии взаимодействия, зависящей от координат взаимодействующих частиц, взятых в один и тот же момент времени, так как электроны взаимодействуют посредством электромагнитного поля.

Оператор энергии взаимодействия заменяет в первом приближении играющая аналогичную роль матрица рассеяния  $S^{(2)}$ :

$$S^{(2)} = -\frac{1}{2} T_\Phi \int j_\mu(x) D_c(x-x') j_\mu(x') d^4x d^4x'. \quad (4.7.1)$$

Она представляет собой первый член разложения матрицы рассеяния (3.2.26), описывающей процесс рассеяния без участия фотонов,

Подынтегральное выражение в (4.7.1) содержит координаты (включая однако и временную координату) только зарядов, электромагнитное же поле в этой формуле исключено. Поэтому функцию  $D_c(x-x')$  можно назвать функцией взаимодействия двух зарядов. Как мы увидим далее, в нерелятивистском приближении функция взаимодействия приводит к энергии взаимодействия двух зарядов, т. е. к закону Кулона и к поправкам к нему.

Два оператора тока, входящие в (4.7.1), могут относиться либо к различным полям (например, один к электронному, другой к мюонному или адронному), либо к одинаковым (например, к электронному). В первом случае токи, очевидно, коммутируют между собой, и оператор  $T_\psi$  может считаться равным единице. Аналогичная ситуация имеет место и в случае одинаковых полей. Действительно, оператор  $j_\mu(x) j_\mu(x')$  содержит произведения четырех операторов испускания или поглощения электронов (позитронов), но мы будем интересоваться теми матричными элементами  $S^{(2)}$ , которым соответствуют две частицы в начальном и две частицы в конечном состояниях. В этом случае вклад в матричный элемент будут вносить только те члены оператора  $j_\mu(x) j_\mu(x')$ , которые содержат два оператора испускания и два оператора поглощения, причем все они будут относиться к различным индивидуальным состояниям электронов. Поэтому все четыре сомножителя антикоммутируют друг с другом, а их попарные произведения коммутируют. Следовательно, символ  $T_\psi$  может быть опущен и в этом случае.

Интересуясь возможностью введения энергии взаимодействия частиц, напишем выражение для матричного элемента оператора  $S^{(2)}$  в координатном представлении. Пусть сначала обе частицы являются электронами. Если 1 и 2 обозначают совокупности квантовых чисел начальных состояний, 1' и 2' — конечных состояний электронов, то в операторе  $j_\mu(x) j_\mu(x')$  отличные от нуля значения дадут лишь следующие члены:

$$j_\mu(x) j_\mu(x') \rightarrow a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 j_{1'1\mu}(x) j_{2'2\mu}(x) + \\ + a_2^\dagger a_2 a_1^\dagger a_1 j_{1'1\mu}(x') j_{2'2\mu}(x) + a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 j_{1'2\mu}(x) j_{2'1\mu}(x') + \\ + a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2 j_{2'1\mu}(x) j_{1'2\mu}(x'),$$

где  $a_1^\dagger$  и  $a_1$  — операторы испускания и поглощения электрона в состоянии 1,  $j_{1'1\mu}(x) = ie\bar{\psi}_{1'}(x) \gamma_\mu \psi_1(x)$  — плотность тока перехода электрона из состояния 1 в состояние 1',  $\psi(x)$  — соответствующие решения уравнения Дирака. Используя антикоммутативность  $a_1^\dagger$  и  $a_1$ , получим следующее выражение для матричного элемента:

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \\ = - \int \{ j_{2'2\mu}(x') D_c(x'-x) j_{1'1\mu}(x) - j_{1'2\mu}(x') D_c(x'-x) j_{2'1\mu}(x) \} \times \\ \times d^4x d^4x'. \quad (4.7.2)$$

Двум слагаемым здесь соответствуют две диаграммы на рис. 4.23: они различаются местами индексов конечных состояний.

Поэтому второй член в (4.7.2) и вторая диаграмма называются обменными по отношению к первым. Знак минус у обменного члена в (4.7.2) соответствует тому, что волновая функция двух электронов в конфигурационном пространстве является антисимметричной.

Эти же диаграммы описывают взаимодействие двух позитронов. Если начальные состояния позитронов обозначить через  $1'$  и  $2'$ , а конечные состояния позитронов через  $1$  и  $2$ , то матричный элемент  $\langle f | S^{(2)} | i \rangle$  будет иметь вид

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = - \int \{ j_{22\mu}^{(n)}(x') D_c(x' - x) j_{11\mu}^{(n)}(x) - j_{12\mu}^{(n)}(x') D_c(x' - x) \times \\ \times j_{21\mu}^{(n)}(x) \} d^4x d^4x', \quad (4.7.3)$$

где  $j_{11\mu}^{(n)}(x) = -ie\bar{\Psi}_1^{(n)}(x) \gamma_\mu \psi_1^{(n)}(x)$  — ток перехода позитрона из состояния  $1'$  в состояние  $1$ ,  $\psi_1^{(n)}$  — волновые функции позитрона.

Наконец, матричный элемент взаимодействия электрона с позитроном определяется формулой

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \\ = \int \{ j_{1'1\mu}(x) D_c(x' - x) j_{2'2\mu}(x) - j_{2'1\mu}(x') D_c(x' - x) j_{1'2\mu}(x) \} d^4x d^4x'. \quad (4.7.4)$$

Первые члены в (4.7.4) и (4.7.2) различаются знаком, что соответствует противоположным знакам зарядов электрона и позитрона.

Обменный член в (4.7.4) (вторая диаграмма на рис. 4.23 с начальным состоянием  $1' 2'$ ) теперь соответствует виртуальному поглощению и образованию вновь электронно-позитронной пары.

Как уже указывалось, (4.7.1) можно применять для описания

взаимодействия электрона с другой частицей, например, мюоном. В этом случае под  $j_\mu(x)$  следует понимать электронный ток, а под  $j_\mu(x')$  — мюонный. В матричных элементах будут теперь отсутствовать обменные члены. Если состояния  $1$  и  $1'$  относятся к одной частице, а  $2$  и  $2'$  — к другой, то матричный элемент  $\langle f | S^{(2)} | i \rangle$  будет иметь вид

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = - \int j_{1'1\mu}(x') D_c(x' - x) j_{2'2\mu}(x) d^4x d^4x'. \quad (4.7.5)$$

Этот матричный элемент можно представить в виде, допускающем простое физическое истолкование, если ввести запаздывающие потенциалы частиц. Будем рассматривать с этой целью стационарные состояния  $\psi_i(x) = \psi_i(\mathbf{r}) e^{-i\omega_i t}$ ,  $i = 1, 1', 2, 2'$ ; тогда  $j_{1'1\mu}(x) = j_{1'1\mu}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{1'} t}$ ,  $j_{2'2\mu}(x) = j_{2'2\mu}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{2'} t}$ , где  $\omega_{1'} = \omega_{1'} - \omega_1$ ,  $\omega_{2'} = \omega_{2'} - \omega_2$ . Используя формулу

$$D_c(x) = - \frac{i}{8\pi^2 |r|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + i\omega |r|} d\omega,$$

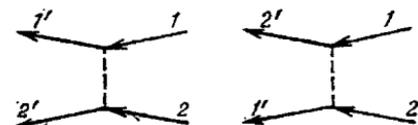


Рис. 4.23.

получим

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= \\ &= \frac{i}{2} \int j_{1'1\mu}(\mathbf{r}_1) \frac{e^{i|\omega_{22'}||\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} j_{2'2\mu}(\mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \delta(\omega_{11'} + \omega_{22'}). \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

От матрицы рассеяния  $S^{(2)}$  удобно перейти к матрице эффективной энергии взаимодействия  $V$ , согласно формуле

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = -2\pi i \langle f | V | i \rangle \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{1'} - \omega_{2'}),$$

откуда

$$\langle f | V | i \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int j_{1'1\mu}(\mathbf{r}_1) j_{2'2\mu}(\mathbf{r}_2) \frac{e^{i|\omega_{11'}||\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2. \quad (4.7.7)$$

Эту формулу можно записать также в виде

$$\langle f | V | i \rangle = -\int j_{2'2\mu}(\mathbf{r}_2) A_{1'1\mu}(\mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_2,$$

где

$$A_{1'1\mu}(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j_{1'1\mu}(\mathbf{r}_1) e^{i\omega_{11'}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3\mathbf{r}_1.$$

Последняя величина представляет собой запаздывающий потенциал, создаваемый током перехода  $j_{1'1\mu}$ . Действительно,  $A_{1'1\mu}(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению классической электродинамики для монохроматических полей

$$\Delta A_{1'1\mu}(\mathbf{r}) + \omega_{11'}^2 A_{1'1\mu}(\mathbf{r}) = -j_{1'1\mu}(\mathbf{r}).$$

Если учесть зависимости  $A_{1'1\mu}$  от  $\mathbf{r}$  и от  $t$ , то мы получим

$$A_{1'1\mu}(\mathbf{r}_2, t) = \frac{1}{4\pi} \int j_{1'1\mu}(\mathbf{r}_1, t) \frac{e^{-i\omega_{11'}t + i\omega_{11'}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3\mathbf{r}_1$$

или

$$A_{1'1\mu}(\mathbf{r}_2, t) = \frac{1}{4\pi} \int j_{1'1\mu}(\mathbf{r}_1, t - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3\mathbf{r}_1. \quad (4.7.8)$$

Таким образом, матрица  $V$  определяется взаимодействием тока перехода одной частицы с потенциалом, порождаемым током перехода другой частицы.

**4.7.2. Энергия взаимодействия двух электронов с точностью до  $v^2/c^2$ .** В (4.7.7) токи переходов можно выразить через волновые функции электронов

$$\begin{aligned} \langle f | V | i \rangle &= \\ &= \alpha \int \Psi_{1'}^*(\mathbf{r}_1) \Psi_2^*(\mathbf{r}_2) \frac{1 - \alpha_1 \alpha_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{i|\omega_{11'}||\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \Psi_1(\mathbf{r}_1) \Psi_2(\mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2, \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — матрицы Дирака, действующие соответственно на  $\Psi_1(\mathbf{r}_1)$  и  $\Psi_2(\mathbf{r}_2)$ . В подынтегральное выражение входит наряду с

оператором  $\frac{1 - \alpha_1 \alpha_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$ , зависящим от координат и спиновых переменных обеих частиц, также и фактор запаздывания  $\exp(i\omega_{11'}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ . Наличие этого фактора, зависящего явно от начальной и конечной энергий системы, не позволяет в общем случае ввести гамильтониан взаимодействия двух электронов, т. е. оператор  $V$ , для которого выполнялось бы соотношение

$$\langle f | V | i \rangle = \int \psi_{1'}^*(\mathbf{r}_1) \psi_2^*(\mathbf{r}_2) V \psi_1(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2. \quad (4.7.10)$$

Однако при малых скоростях,  $v/c \ll 1$ , такой оператор можно построить. С этой целью разложим матричный элемент  $\langle f | V | i \rangle$  по степеням  $v/c$  с точностью до  $v^2/c^2$ , введя предварительно явно скорость света. Для фактора запаздывания такое разложение с точностью до членов порядка  $1/c^2$  имеет вид

$$\frac{e^{i|\omega_1 - \omega_{1'}||\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/c}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + i \frac{|\omega_1 - \omega_{1'}|}{c} - \frac{|\omega_1 - \omega_{1'}|^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{2c^2}. \quad (4.7.11)$$

Матричные элементы, содержащие  $\alpha$ , по порядку величины равны  $v/c$ . Поэтому в членах, содержащих  $\alpha_1 \alpha_2$ , достаточно сохранить лишь первый член в разложении (4.7.11). Второй член в (4.7.11) после подстановки в интеграл (4.7.9) обратится в нуль в силу ортогональности функций  $\psi_{1'}$  и  $\psi_1$ . Третий член можно преобразовать к симметричному виду, воспользовавшись тем, что  $\omega_{1'} - \omega_1 = \omega_2 - \omega_{2'}$ , и поэтому

$$-(\omega_1 - \omega_{1'})^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = (\omega_1 - \omega_{1'}) (\omega_2 - \omega_{2'}) |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

Далее можно исключить из выражения для матричного элемента частоты, используя уравнение Дирака  $H_1 \psi_1(\mathbf{r}_1) = \omega_1 \psi_1(\mathbf{r}_1)$ . Имея в виду, что выражение (4.7.11) умножается справа на  $\psi_{1'}^*(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_2)$ , а слева на  $\psi_{1'}^*(\mathbf{r}_1) \psi_2^*(\mathbf{r}_2)$  и интегрируется по  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , мы можем заменить в нем частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  операторами  $H_1$  и  $H_2$ , расположенными справа от  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ , а частоты  $\omega_{1'}$  и  $\omega_{2'}$  — операторами  $H_1$  и  $H_2$ , расположенными слева от  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ :

$$(\omega_1 - \omega_{1'}) (\omega_2 - \omega_{2'}) |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| H_1 H_2 + H_1 H_2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - H_1 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| H_2 - H_2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| H_1 = [H_1, [H_2, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|]]$$

(квадратные скобки обозначают коммутаторы соответствующих величин). Так как оператор Гамильтона электрона имеет вид  $H = \alpha \mathbf{p} + \beta m c^2 + e A_0^{(e)}$ , где  $A_0^{(e)}$  — внешнее поле, то не коммутирующим с  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  является только один член в  $H$ , а именно  $\alpha \mathbf{p}$ . Вычислив коммутатор  $c^2 [\alpha_1 p_1, [\alpha_2 p_2, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|]]$ , легко убедиться, что после подстановки (4.7.11) в (4.7.9) можно произвести замену

$$-\frac{(\omega_1 - \omega_{1'})^2}{c^2} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \frac{\alpha_1 \alpha_2 - (\alpha_1 n) (\alpha_2 n)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|},$$

где  $n = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ .

Таким образом, величина  $\langle f|V|i\rangle$  действительно может быть представлена в виде (4.7.10), где оператор  $V$  определяется формулой [36]

$$V = \frac{\alpha}{|r_1 - r_2|} - \frac{\alpha}{2} \frac{\alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 n) (\alpha_2 n)}{|r_1 - r_2|}. \quad (4.7.12)$$

Первый член в этой формуле определяет кулоновское взаимодействие зарядов, а второе слагаемое — поправки к кулоновскому взаимодействию, обусловленные наличием спинов.

Так как выражение для  $V$  имеет смысл только с точностью до членов порядка  $v^2/c^2$ , то волновые функции электронов следует брать с той же точностью. Обозначим соответствующие двухкомпонентные волновые функции, нормированные на единицу, через  $\Phi(r)$ ,  $\int |\Phi(r)|^2 d^3r = 1$ . Тогда

$$\varphi = \left(1 - \frac{p^2}{8m^2}\right) \Phi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\sigma p}{2m} \varphi \end{pmatrix}.$$

При этом матричный элемент  $\langle 1'2' | V | 12 \rangle$  приобретает вид

$$\langle 1'2' | V | 12 \rangle = \int \Phi_{1'}^*(r_1) \Phi_{2'}^*(r_2) V^{ee} \Phi_1(r_1) \Phi_2(r_2) d^3r_1 d^3r_2, \quad (4.7.13)$$

где  $V^{ee}$  — некоторый оператор, который может быть назван оператором энергии взаимодействия двух электронов с точностью до  $v^2/c^2$ . Выражение для него можно получить из (4.7.12):

$$\begin{aligned} V^{ee}(r) = & \frac{\alpha}{r} - \pi \frac{\alpha}{m^2 c^2} \delta(r) - \frac{\alpha}{4m^2 c^2} \frac{1}{r^3} \left( [rp_1] \sigma_1 - [rp_2] \sigma_2 + \right. \\ & \left. + 2[rp_1] \sigma_2 - 2[rp_2] \sigma_1 \right) - \frac{\alpha}{2m^2 c^2} \left( \frac{1}{r} p_1 p_2 + \frac{1}{r^3} (rp_2)(rp_1) \right) + \\ & \left. + \frac{\alpha}{4m^2 c^2} \left( \frac{\sigma_1 \sigma_2}{r^3} - \frac{3(\sigma_1 r)(\sigma_2 r)}{r^5} - \frac{8\pi}{3} \sigma_1 \sigma_2 \delta(r) \right), \quad r = r_1 - r_2. \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

Заметим, что наличие здесь  $\delta$ -функций не означает сильного взаимодействия. Те члены, в которые входят  $\delta$ -функции, содержат в коэффициентах  $1/c^2$  и поэтому должны по смыслу проводившегося разложения рассматриваться как малые по сравнению с первым членом, соответствующим кулоновскому взаимодействию.

Выражение для оператора энергии взаимодействия двух электронов можно получить также иначе, если воспользоваться выражением для матричного элемента энергии взаимодействия в импульсном представлении. Запишем с этой целью  $\langle f|V|i\rangle$  в виде

$$\langle f|V|i\rangle = (2\pi)^3 \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \frac{M}{4V \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon'_1 \epsilon'_2},$$

где  $M$  — амплитуда, соответствующая первой диаграмме на рис. 4.23:

$$M = e^2 \frac{\bar{u}(p'_1) \gamma_{\mu\nu} u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma_{\mu\nu} u(p_2)}{q^2}.$$

В нерелятивистском приближении биспинор  $u$  можно записать в виде (включая члены порядка  $p^2/m^2$ )

$$u = \sqrt{2m} \left( 1 + \frac{p^2}{8m^2} \right) \begin{pmatrix} \sigma p^w \\ w \end{pmatrix}, \quad w^* w = 1.$$

При этом матричный элемент  $\langle f | V | i \rangle$  будет иметь следующую структуру:

$$\langle f | V | i \rangle = (2\pi)^3 \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \omega_1^* \omega_2^* V^{ee}(q) \omega_1 \omega_2, \quad (4.7.15)$$

где  $V^{ee}(q)$  — импульсное представление энергии взаимодействия двух электронов. Действительно, эта формула может быть получена путем преобразования Фурье из формулы (4.7.13), если в последней перейти к нормированным плоским волнам  $\Phi(r) = w e^{i p r}$  (нормировочный объем принят равным единице) и учесть, что энергия взаимодействия двух частиц является функцией разности их координат. Замечая еще, что в нерелятивистском приближении

$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{4m^2} + \frac{(q p_1)(q p_2)}{m^2 (q^2)^2},$$

легко убедиться, что

$$V^{ee}(q) = e^2 \left\{ \frac{1}{q^2} - \frac{1}{4m^2} + \frac{i}{4q^2 m^2} ([q p_1] \sigma_1 - [q p_2] \sigma_2 + 2 [q p_1] \sigma_2 - 2 [q p_2] \sigma_1) + \frac{(q p_1)(q p_2)}{m^2 (q^2)^2} - \frac{p_1 p_2}{m^2 q^2} + \frac{(q \sigma_1)(q \sigma_2)}{4m^2 q^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4m^2} \right\}. \quad (4.7.16)$$

Эта величина, как и следовало ожидать, является  $q$ -представлением энергии взаимодействия (4.7.14):

$$V^{ee}(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i q r} V^{ee}(q) d^3 q.$$

В задаче о взаимодействии двух электронов необходимо естественно рассматривать кроме матричного элемента (4.7.13) еще обменный матричный элемент

$$\langle 2' 1' | V | 12 \rangle = \int \Phi_2^*(r_1) \Phi_1^*(r_2) V^{ee} \Phi_1(r_1) \Phi_2(r_2) d^3 r_1 d^3 r_2,$$

где  $V^{ee}$  — тот же оператор (4.7.14). Вводя антисимметризованные волновые функции двух электронов

$$\Phi_{12}(r_1 \lambda_1; r_2 \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_1(r_1 \lambda_1) \Phi_2(r_2 \lambda_2) - \Phi_2(r_1 \lambda_1) \Phi_1(r_2 \lambda_2)]$$

( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — спиновые переменные частиц) и аналогичные функции для других пар состояний, можно представить суммарный матричный элемент в виде

$$\langle f | V | i \rangle = \int \Phi_{1' 2'}^* V^{ee} \Phi_{12} d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (4.7.17)$$

Если 1 и 2 — произвольные стационарные состояния электрона во внешнем поле, то волновые функции  $\Phi_{12}$  будут образовывать полную систему антисимметризованных собственных функций оператора  $H_1(r_1) + H_2(r_2)$ , где  $H_{1,2}$  — оператор Гамильтона электрона во внешнем поле.

**4.7.3. Взаимодействие электрона с позитроном и позитроний.** Перейдем к определению энергии взаимодействия электрона с позитроном с точностью до членов  $v^2/c^2$ . Представим для этого матричный элемент энергии взаимодействия в виде суммы двух членов — «прямого» и «обменного»:

$$\langle f | V^{e+e-} | i \rangle = \langle f | V^{e+e-} | i \rangle_{\text{пр}} + \langle f | V^{e+e-} | i \rangle_{\text{обм.}}$$

Ясно, что

$$\langle f | V^{e+e-} | i \rangle_{\text{пр}} = - \int \Phi_1^*(r_1) \Phi_2^{*(n)}(r_2) V^{ee} \Phi_1(r_1) \times \\ \times \Phi_2^{(n)}(r_2) d^3r_1 d^3r_2, \quad (4.7.18)$$

где  $V^{ee}$  — оператор (4.7.14),  $\Phi^{(n)}(r)$  — волновая функция позитрона (знак минус связан с различием знаков зарядов электрона и позитрона).

Часть энергии взаимодействия, соответствующую обменному матричному элементу, проще всего найти в импульсном представлении. Этому матричному элементу отвечает диаграмма рис. 4.24 и амплитуда

$$M = \frac{e^2}{-(p_1 + p_n)^2} \bar{u}(p'_1) \gamma_\mu v(p'_n) \bar{v}(p_n) \gamma_\mu u(p_1).$$

В нерелятивистском приближении

$$-(p_1 + p_n)^2 = 4m^2, \quad v(p_n) = \sqrt{2m} \left( 1 + \frac{p_n^2}{8m^2} \right) \begin{pmatrix} \sigma p_n \\ \omega_n \end{pmatrix}, \quad \omega_n^* \omega_n = 1.$$

Поэтому, записав обменный матричный элемент в виде

$$\langle f | V^{e+e-} | i \rangle_{\text{обм.}} = (2\pi)^3 \delta(p_1 + p_n - p'_1 - p'_n) \omega_n^* \omega_1^* V_{\text{обм.}}^{ee}(q) \omega'_n \omega_1,$$

получим

$$V_{\text{обм.}}^{ee}(q) = \frac{e^2}{8\pi m^2} (3 + \sigma_1 \sigma_2),$$

откуда в координатном представлении [37]

$$V_{\text{обм.}}^{ee}(r) = \frac{\pi\alpha}{2m^2} (3 + \sigma_1 \sigma_2) \delta(r_1 - r_2).$$

Суммарный матричный элемент  $\langle f | V^{e+e-} | i \rangle$  можно записать в виде

$$\langle f | V^{e+e-} | i \rangle = \int \Phi_1^* V^{e+e-} \Phi_{12} d^3r_1 d^3r_2, \quad V^{e+e-} = -V^{ee} + V_{\text{обм.}}^{ee},$$

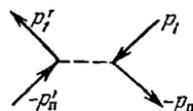


Рис. 4.24.

где

$$\Phi_{1'2'}(\mathbf{r}_1, \lambda_1; \mathbf{r}_2, \lambda_2) = \Phi_1(\mathbf{r}_1, \lambda_1) \Phi_2^{(n)}(\mathbf{r}_2, \lambda_2), \quad (4.7.19)$$

$$\Phi_{1'2}(\mathbf{r}_1, \lambda_1; \mathbf{r}_2, \lambda_2) = \Phi_{1'}(\mathbf{r}_1, \lambda_1) \Phi_2^{(n)}(\mathbf{r}_2, \lambda_2).$$

Оператор  $V^{e^+e^-}$  представляет собой оператор энергии взаимодействия электрона с позитроном. Функции  $\Phi_{1'2}$  (1 и 2' — квантовые числа произвольных состояний электрона и позитрона в заданном внешнем поле) образуют полную систему собственных функций оператора  $H^{(-)} + H^{(+)}$ , где  $H^{(-)}$  — гамильтониан электрона и  $H^{(+)}$  — гамильтониан позитрона (при наличии внешнего поля они различаются знаком заряда).

Волновая функция  $\Phi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  стационарного состояния системы электрон — позитрон удовлетворяет уравнению Шредингера

$$(H^{(+)}(\mathbf{r}_2) + H^{(-)}(\mathbf{r}_1) + V^{e^+e^-}) \Phi_n = E_n \Phi_n, \quad (4.7.20)$$

причем она не ограничена никакими требованиями симметрии: электрон и позитрон фигурируют в этом уравнении как нетождественные частицы.

Это уравнение можно применить к задаче о позитронии, т. е. о связанных состояниях системы электрон — позитрон. Оператор Гамильтона этой системы состоит из различных по порядку величины членов. Запишем его в виде

$$H = H^{(0)} + H^{(1)},$$

где в  $H^{(0)}$  включены члены, не содержащие  $1/c^2$ :

$$H^{(0)} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) - \frac{\alpha}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|},$$

а  $H^{(1)}$  пропорционален  $1/c^2$ .

Задача об энергетических уровнях позитрония может быть решена методом теории возмущений, при этом оператор  $H^{(0)}$  следует рассматривать как невозмущенный гамильтониан, а  $H^{(1)}$  — как возмущение. Невозмущенная задача чрезвычайно проста; она приводится к задаче об атоме водорода в нерелятивистской квантовой механике. Действительно, воспользуемся системой координат, в которой центр инерции позитрония покоится; тогда  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$ , где  $\mathbf{p}$  — оператор импульса, соответствующий относительному радиусу-вектору  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Невозмущенное уравнение Шредингера имеет вид

$$\mathbf{p}^2 \Phi = m \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) \Phi.$$

Оно совпадает с уравнением движения электрона в атоме водорода, если заменить массу электрона на приведенную массу двух электронов, равную  $m/2$ . Поэтому значения энергии позитрония вдвое меньше по абсолютной величине соответствующих значений энергии атома водорода, а радиусы орбит — вдвое больше. Невозмущенные уровни, как хорошо известно,

зависят только от главного квантового числа  $n$  и не зависят от квантовых чисел  $j$  и  $l$ , определяющих полный и орбитальный моменты.

Такая структура уровней позитрония, т. е. их смещение и расщепление вызывается энергией возмущения  $H^{(1)}$  [38]:

$$H^{(1)} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5,$$

где  $V_1$  представляет собой поправку порядка  $1/c^2$  к кинетической энергии частиц  $V_1 = -\mathbf{p}^4/(4m^3c^2)$ , а остальные слагаемые содержат в гамильтониане взаимодействия  $V^{e^+e^-}$ .

Оператор  $V_2$  объединяет те члены гамильтониана взаимодействия, которые не содержат спиновых операторов (орбитальное взаимодействие):

$$V_2 = -\frac{\alpha}{m^2c^2} \left( \pi \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{r} \mathbf{p}^2 - \frac{i}{r^3} (\mathbf{r}\mathbf{p}) + \frac{1}{2r^3} \mathbf{L}^2 \right), \quad (4.7.21)$$

где  $\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$  — оператор орбитального момента. В операторе  $V_3$  собраны те члены, которые содержат как оператор импульса, так и спиновые операторы (спин-орбитальное взаимодействие):

$$V_3 = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{m^2c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{L}\mathbf{S}, \quad (4.7.22)$$

где  $\mathbf{S}$  — оператор полного спина,  $\mathbf{S} = 1/2(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$ . Оператор  $V_4$  описывает взаимодействие спиновых магнитных моментов электрона и позитрона:

$$V_4 = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{m^2c^2} \frac{1}{r^3} \left[ \frac{(\mathbf{S}\mathbf{r})}{r^2} - \frac{1}{3} \mathbf{S}^2 \right] + \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha}{m^2c^3} (2\mathbf{S}^2 - 3) \delta(\mathbf{r}). \quad (4.7.23)$$

Наконец, через  $V_5$  обозначен оператор обменного взаимодействия

$$V_5 = V_{\text{обм}}^{e^+e^-} = \pi \frac{\alpha}{m^2c^3} \mathbf{S}^2 \delta(\mathbf{r}). \quad (4.7.24)$$

Весьма существенным является то обстоятельство, что гамильтониан возмущения  $H^{(1)}$  содержит операторы, действующие на спиновые переменные частиц только в виде суммы операторов спинов частиц. Поэтому уровни позитрония могут быть разделены на синглетные, или уровни парапозитрония ( $S=0$ ), и триплетные, или уровни ортопозитрония ( $S=1$ ).

Вычислив матричные элементы оператора  $H^{(1)}$ , можно найти тонкую структуру энергетических уровней позитрония. Мы не будем приводить здесь вычислений, а отметим лишь, что операторы  $V_1$  и  $V_2$  диагональны по отношению к орбитальному квантовому числу  $l$  и не зависят от спиновых переменных. Поэтому описываемое этими операторами взаимодействие снимает вырождение по  $l$ . Для определения поправки к энергии уровня нужно вычислить средние значения этих операторов  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$  в невозмущенных состояниях. При этом для вычисления различных

средних значений можно пользоваться известными формулами для атома водорода (с учетом приведенной массы):

$$E = -\frac{\epsilon_0}{4n^2}, \quad \bar{\delta}(r) = \Phi^2(0) = \delta_{l0} \frac{1}{8\pi a_0^3 n^3}, \quad r^{-1} = \frac{1}{2a_0 n^2},$$

$$r^{-2} = \frac{1}{2a_0^2 n^3 (2l+1)}, \quad r^{-3} = \frac{1}{4a_0^3 n^3 l(l+1)(2l+1)},$$

где  $a_0$  — борковский (водородный) радиус. Используя эти формулы, получим

$$\bar{V}_1 = -\frac{1}{4\pi c^2} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 = -\alpha^2 \epsilon_0 \frac{1}{8n^3} \left( \frac{1}{2l+1} - \frac{3}{8n} \right),$$

где  $\epsilon_0$  — удвоенная энергия ионизации атома водорода. Аналогичным образом

$$\bar{V}_2 = \alpha^2 \epsilon_0 \left[ \frac{1}{4n^3} \delta_{l0} - \frac{1}{8n^3} \left( \frac{3}{2l+1} - \frac{1}{n} \right) \right].$$

Оператор  $V_3$  также диагонален относительно  $l$  и  $S$ . Его собственные значения равны нулю в синглетных состояниях и зависят от значения полного момента  $j$  в триплетных состояниях.

Воспользовавшись тем, что

$$2LS = j(j+1) - l(l+1) - S(S+1),$$

можно сразу написать

$$\bar{V}_3 = \begin{cases} \frac{3}{16} \alpha^2 \epsilon_0 \frac{j(j+1) - l(l+1) - S(S+1)}{n^3 l(l+1)(2l+1)}, & S=1, \quad l \neq 0, \\ 0, & S=0, \quad l=0. \end{cases}$$

В операторе  $V_4$  второе слагаемое диагонально относительно  $S$  и отлично от нуля только при  $l=0$ :

$$\bar{V}_4 = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{m^2 c^2} \frac{1}{4} [2S(S+1) - 3] \Phi^2(0), \quad l=0.$$

Первый член в  $V_4$  имеет матричные элементы, отличные от нуля только при  $l \neq 0$ ,  $S=1$ , причем как диагональные, так и недиагональные относительно  $l$ . Из законов сохранения полного момента, спинового момента и четности легко заключить, что отличные от нуля недиагональные элементы  $V_4$  связывают состояния с  $l=j \pm 1$  при  $S=1$  и данным  $j$ . Матричные элементы  $\langle l_2 | V_4 | l_1 \rangle$  (при данном  $j$  и  $S=1$ ) имеют вид

$$\langle l | V_4 | l \rangle = \frac{\alpha^2 \epsilon_0}{8l(l+1)(2l+1)n^3} \begin{cases} 1, & l=j, \\ -\frac{l}{2l+3}, & l=j-1, \\ -\frac{l+1}{2l-1}, & l=j+1; \end{cases}$$

$$\langle j+1 | V_4 | j-1 \rangle = \alpha^2 \epsilon_0 \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} \langle j+1 | r^{-3} | j-1 \rangle \quad (l \neq 0, S=1).$$

Наконец, среднее значение  $V_5$  отлично от нуля лишь при  $l=0$ ,  $S=1$ :

$$\bar{V}_5 = \begin{cases} 0, & S=0, \\ \frac{\alpha}{4n^3} \varepsilon_0 \delta_{l0}, & S=1. \end{cases}$$

Таким образом, из всех членов, входящих в  $H^{(1)}$ , только  $V_4$  содержит недиагональные элементы, относящиеся к случаю  $l = j+1$ ,  $l' = j-1$ ,  $S=1$ . Поэтому состояния, для которых  $l=j$  (четность  $(-1)^l$ ), как синглетные, так и триплетные, можно классифицировать по их орбитальному моменту.

Обозначим смещение уровня каждого такого состояния по отношению к его невозмущенному значению через  $W^{(2s+1)l_j}$  (в скобках указан спектроскопический символ термина). Тогда

$$W^{(1j_1)} = \alpha^2 \varepsilon_0 \frac{1}{2n^3} \left( \frac{1}{2j+1} - \frac{11}{32n} \right),$$

$$W^{(3j_j)} = W^{(1j_j)} - \frac{\alpha^2 \varepsilon_0}{8n^3 j(j+1)(2j+1)}.$$

Термы с четностью  $(-1)^{j+1}$  являются суперпозицией невозмущенных термов, для которых  $l = j \pm 1$ . Для них

$$W = \frac{\bar{V}_+ - \bar{V}_-}{2} \pm \left[ \frac{(\bar{V}_+ + \bar{V}_-)^2}{2} + \langle j+1 | V_4 | j-1 \rangle^2 \right]^{1/2},$$

$$\bar{V}_- \equiv \bar{V}^{(3(j-1)_j)} \equiv W^{(1(j-1)_{j-1})} +$$

$$+ \alpha^2 \varepsilon_0 \left[ \frac{2}{3n^3} \delta_{j-1,0} + \frac{1}{4n^3 j(2j-1)} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2j+1} \right) \right],$$

$$\bar{V}_+ \equiv \bar{V}^{(3(j+1)_j)} \equiv W^{(1(j+1)_{j+1})} - \frac{\alpha^2 \varepsilon_0}{4n^3 (j+1)(2j+3)} \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2j+1} \right).$$

Полученные формулы позволяют определить разность энергий основных состояний орто- и парапозитрония. Зависимость энергии от  $S$  при  $l=1$  содержится лишь в формулах для  $\bar{V}_4$  и  $\bar{V}_5$ . Из этих формул следует, что основной уровень ортопозитрония лежит выше основного уровня парапозитрония, причем разность уровней равна

$$\Delta = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \alpha^2 \left( \frac{4}{3} + 1 \right) = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ [эВ]}. \quad (4.7.25)$$

## § 4.8. Метод эквивалентных фотонов

### 4.8.1. Связь между сечениями процессов с участием виртуальных и реальных фотонов.

Как уже отмечалось, матричные элементы тормозного излучения и комптоновского рассеяния имеют сходную структуру. Эта аналогия не случайна, а является проявлением глубокой связи между процессами с участием виртуальных и реальных фотонов, обусловленной, в свою очередь, тем, что электромагнитное поле быстрой равномерно движущейся заряженной частицы близко по своим свойствам к полю световой волны.

Для выяснения этой связи рассмотрим процесс образования совокупности частиц (струи) в результате обмена виртуальным фотоном между двумя электронами или электроном и другой заряженной частицей. Процессу соответствует диаграмма рис. 4.25, а, на которой  $q_1, q_2, \dots, q_n$  обозначают 4-импульсы частиц струи (с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ),  $p_1$  — импульс электрона или другой заряженной частицы (частица 1), перешедшей в струю,  $p_2$  и

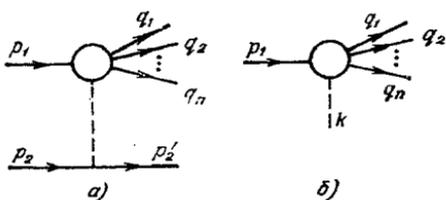


Рис. 4.25.

$p_2'$  — 4-импульсы второго электрона до и после столкновения,  $k$  — 4-импульс виртуального фотона.

Инвариантную амплитуду процесса можно представить в виде

$$M = \frac{1}{k^2} j_\mu(k) J_\mu(-k), \quad (4.8.1)$$

где  $j_\mu(k) = ie\bar{u}(p_2') \gamma_{\mu i} u(p_2)$  — ток перехода электрона из состояния с импульсом  $p_2$  в состояние с импульсом  $p_2'$  и  $J_\mu(-k)$  — ток перехода частицы 1 с импульсом  $p_1$  в струю с суммарным импульсом  $p_1' = \sum_i^n q_i$ . Для  $J_\mu(-k)$  мы не будем пользоваться здесь ка-

ким-либо конкретным выражением, аналогичным выражению для электронного тока  $j_\mu(k)$ . Ясно, однако, что 4-вектор  $J_\mu$  должен строиться с помощью 4-векторов  $p_1$  и  $q_i$  и должен удовлетворять условию поперечности  $k_\mu J_\mu = 0$ . Считая в дальнейшем величину  $s = -2p_1 p_2$  большой по сравнению с квадратами масс всех частиц, включая виртуальный фотон, а также по сравнению с квадратом инвариантной массы частиц струи, можно утверждать, что скалярное произведение 4-векторов  $J$  и  $p_2$  будет пропорционально большой величине  $s$ .

Дифференциальное сечение рассматриваемого процесса согласно (3.4.16) имеет вид

$$d\sigma = \frac{1}{2s} \frac{1}{4} \sum |M|^2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \frac{d^4 p_2'}{(2\pi)^3} \delta(p_2'^2 + m^2) \theta(\varepsilon_2') d\Gamma, \quad (4.8.2)$$

где  $d\Gamma$  — элемент фазового объема частиц струи

$$d\Gamma = \prod_{i=1}^n d^4 q_i \delta(q_i^2 + m_i^2) \theta(q_{i0}),$$

$2\tilde{s}$  — плотность потока начальных частиц и знак суммы означает суммирование по спиновым состояниям всех частиц (для определенности мы считаем, что частица 1 может находиться только в двух различных поляризационных состояниях). Легко видеть,

что

$$\begin{aligned} \sum |M|^2 &= -\frac{e^2}{k^4} \sum_{\lambda} \text{Sp} (-i\hat{p}_2 + m) \hat{J}^{(\lambda)} (-i\hat{p}'_2 + m) \hat{J}^{(\lambda)+} = \\ &= \frac{e^2}{k^4} \sum_{\lambda} \{8|p_2 J^{(\lambda)}|^2 - 2k^2 |J^{(\lambda)}|^2\}, \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

где  $\lambda$  — совокупность спиновых индексов частицы 1 и всех частиц струи. Так как предполагается, что  $s \gg m^2$ ,  $m_i^2$ ,  $k^2$ , то вторым слагаемым в (4.8.3) можно пренебречь.

Нас будет интересовать сечение, проинтегрированное по состояниям конечного электрона с импульсом  $p'_2$ . Это интегрирование можно заменить интегрированием по  $k$ . С этой целью удобно ввести новые переменные — проекции  $k$  на векторы

$$\bar{p}_1 = p - \frac{p_1^2}{2p_1 p_2} p_2, \quad \bar{p}_2 = p_2 - \frac{p_2^2}{2p_1 p_2} p_1.$$

т. е. представить  $k$  в виде [39]

$$k = u\bar{p}_2 + v\bar{p}_1 + k_{\perp}, \quad (4.8.4)$$

где  $u$  и  $v$  — некоторые скалярные величины и 4-вектор  $k_{\perp}$  ортогонален  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$ ,  $k_{\perp}\bar{p}_1 = k_{\perp}\bar{p}_2 = 0$ . Легко определить  $u$  и  $v$ . Подставляя для этого (4.8.4) в соотношение  $p_2'^2 = (p_2 - k)^2 = -m^2$ , получим

$$v = \frac{-k_{\perp}^2 - m^2 u}{s(1-u)}. \quad (4.8.5)$$

Умножая далее  $k$  на  $p_1$  и используя (4.8.5), найдем

$$u = s_1/s, \quad (4.8.6)$$

где  $s_1 = -2kp_1$ . Эта величина связана с инвариантной массой частиц струи соотношением

$$s_1 = -\left(\sum q_i\right)^2 + p_1^2 + k^2. \quad (4.8.7)$$

Поскольку  $s \gg s_1$ , то величины  $u$  и  $v$  будут малы по сравнению с единицей, причем  $su v \ll 1$ .

Выразим теперь величины  $p_2 J^{(\lambda)}$  и  $k^2$ , входящие в инвариантную амплитуду  $M$ , через  $u$ ,  $v$  и  $k_{\perp}$ . Используя условие сохранения тока  $J^{(\lambda)}$ , имеем  $k J^{(\lambda)} = u\bar{p}_2 J^{(\lambda)} + v\bar{p}_1 J^{(\lambda)} + J^{(\lambda)} k_{\perp} = 0$ , а так как  $\bar{p}_2 J^{(\lambda)} \sim s$ ,  $\bar{p}_1 J^{(\lambda)} \sim m^{*2}$  ( $m^*$  — характерная масса частиц струи), то в последнем равенстве можно опустить слагаемое  $v\bar{p}_1 J^{(\lambda)}$ , и мы получим с точностью до членов порядка  $m^{*2}/s$

$$p_2 J^{(\lambda)} = -\frac{k_{\perp} J^{(\lambda)}}{u} = \frac{s}{s_1} |k_{\perp}| (n_{\perp} J^{(\lambda)}), \quad n_{\perp} = \frac{k_{\perp}}{|k_{\perp}|}. \quad (4.8.8)$$

Используя (4.8.4) и (4.8.5), имеем далее

$$k^2 = k_{\perp}^2 - suv = k_{\perp}^2 + \left(\frac{s_1}{s}\right)^2 m^2. \quad (4.8.9)$$

Наконец, из (4.8.4) следует, что

$$d^4k = \frac{s}{2} du dv d^2k_{\perp}. \quad (4.8.10)$$

Переходя к интегрированию (4.8.2) по  $k$ , заметим, что интегрирование по  $v$  сводится к взятию вычета за счет  $\delta$ -функции, соответствующей реальности конечного электрона. Поэтому проинтегрированное по  $k$  дифференциальное сечение процесса приобретает вид

$$d\sigma = \frac{\alpha}{\pi} \int ds_1 \int \frac{d^2k_{\perp}/\pi}{[k_{\perp}^2 + (s_1/s)^2 m^2]^2} \frac{\sqrt{s_1^2 + 4m^2 k_{\perp}^2}}{s_1} d\sigma_{\gamma^*}(s_1, k_{\perp}), \quad (4.8.11)$$

где

$$d\sigma_{\gamma^*}(s_1, k_{\perp}) = \frac{1}{2} (s_1^2 + 4m^2 k_{\perp}^2)^{-1/2} (2\pi)^4 \delta\left(p_1 + k - \sum_i q_i\right) \times \\ \times \frac{1}{2} \sum_{\lambda} |J^{(\lambda)} n_{\perp}|^2 d\Gamma. \quad (4.8.11')$$

Величина  $d\sigma_{\gamma^*}$  представляет собой дифференциальное сечение образования струи при взаимодействии заряженной частицы с импульсом  $p_1$  и виртуального фотона с массой  $-k^2 = -k_{\perp}^2$  и поляризацией  $n_{\perp} = k_{\perp}/|k_{\perp}|$ . Обратим внимание на то, что при  $k_{\perp}^2 = 0$  величина  $d\sigma_{\gamma^*}(s_1, k_{\perp})$  переходит в сечение образования струи при взаимодействии реального фотона с заряженной частицей с импульсом  $p_1$  (см. диаграмму рис. 4.25, б).

При  $s \gg s_1$  основной вклад в сечение  $d\sigma$ , пропорциональный  $\ln \frac{s}{m^2}$ , вносят малые значения  $k_{\perp}^2$ , лежащие в интервале  $(s_1/s)^2 m^2 \ll k_{\perp}^2 \ll m^2$ . Поэтому в выражении для  $d\sigma_{\gamma^*}$  можно положить  $k_{\perp}^2 = 0$ , т. е. заменить сечение образования струи виртуальным фотоном  $d\sigma_{\gamma^*}(s_1, k_{\perp})$  сечением образования струи реальным фотоном  $d\sigma_{\gamma}(s_1)$ . В результате мы получим следующее выражение для сечения  $d\sigma$ :

$$d\sigma = \int ds_1 n(s_1) d\sigma_{\gamma}(s_1), \quad (4.8.12) \\ n(s_1) ds_1 = \frac{\alpha}{\pi} \frac{ds_1}{s_1} \int \frac{k_{\perp}^2 d^2k_{\perp}/\pi}{[k_{\perp}^2 + (s_1/s)^2 m^2]^2}.$$

Выполнив интегрирование по  $k_{\perp}$  в выражении для  $n(s_1)$ , получим

$$n(s_1) ds_1 = \frac{ds_1}{s_1} \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{s}{s_1}, \quad (4.8.12')$$

и, следовательно, окончательно  $d\sigma$  запишется в виде

$$d\sigma = \frac{2\alpha}{\pi} \int_{s_{1\min}}^{s_{1\max}} \ln \frac{s}{s_1} d\sigma_\nu(s_1) \frac{ds_1}{s_1}, \quad s_{1\max} = s, \quad s_{1\min} = \left(\sum m_i\right)^2 + p_1^2. \quad (4.8.13)$$

Эта формула связывает сечение образования струи при столкновении двух заряженных частиц, обменивающихся виртуальным фотоном, с сечением образования струи реальным фотоном (см. диаграммы на рис. 4.25, а, б).

Если  $d\sigma_\nu(s_1)$  при  $s_1 \gg m^{*2}$  убывает с ростом  $s_1$  степенным образом, то в формуле (4.8.13) важен только нижний предел интегрирования. Если же  $d\sigma_\nu(s_1)$  постоянно при больших  $s_1$  или растет с  $s_1$  логарифмически, то в (4.8.13) существен только верхний предел интегрирования.

Формула (4.8.13) справедлива, если  $\ln(s/m^{*2}) \gg 1$ . (Сечение  $d\sigma$ , так же как и сечение  $d\sigma_\nu(s_1)$ , зависит, вообще говоря, от  $3n-4$  переменных, характеризующих струю; для простоты, однако, эти переменные не выписаны.)

Мы видим, что действие ультрарелятивистского электрона эквивалентно действию спектра реальных фотонов, число которых в интервале  $ds_1$  переменной  $s_1$  равно  $n(s_1) ds_1$ . В системе отсчета, где  $p_1 = 0$ ,  $s_1 = 2m\omega$  и спектр эквивалентных фотонов приобретает вид

$$n(s_1) ds_1 = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{s}{2m\omega}. \quad (4.8.14)$$

Метод расчета сечения  $d\sigma$  с помощью формулы (4.8.13) носит название метода эквивалентных фотонов или метода Вайцзеккера — Вильямса [40].

Покажем, что формулу (4.8.14) можно получить из классического рассмотрения электромагнитного поля быстро движущейся частицы. Обратимся для этого к уравнениям

$$\square A = -e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad \square A_0 = -e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \quad (4.8.15)$$

для 4-потенциала поля, создаваемого равномерно движущейся заряженной частицей ( $\mathbf{v}$  — скорость частицы). Раскладывая 4-потенциал в интеграл Фурье, легко найти электрическое и магнитное поля, создаваемые частицей, движущейся вдоль оси  $x$ :

$$E(\mathbf{r}, t) = -\frac{ie}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathbf{k} - \mathbf{v}(k\mathbf{v})}{R} e^{ik_\perp r + ik_x(x - v_x t)} d^3k, \quad (4.8.15')$$

$$H(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{v}, E(\mathbf{r}, t)], \quad R = k_\perp^2 + k_x^2(1 - v^2).$$

(Учитывая, что  $s = -2p_1 p_2 = 2m\varepsilon$ ,  $s_1 = -2kp_1 = 2mk_x$ , величину  $R$  можно представить также в виде  $R = k_\perp^2 + (s_1/s)^2 m^2$ .) Из (4.8.15') следует, что компонента поля  $E_\perp$ , перпендикулярная скорости  $\mathbf{v}$ , в  $\varepsilon^2/m^2 = 1/(1 - v^2) \gg 1$  раз больше параллельной компоненты  $E_\parallel$ ,

т. е. поле быстрой заряженной частицы является практически поперечным, как поле световой волны.

Чтобы найти число эквивалентных фотонов, соответствующих полю частицы, найдем полный поток электромагнитной энергии вдоль направления  $\vartheta$ :

$$\Pi = \int d^2r_{\perp} \int dt [E, H]_x = \int d^2r_{\perp} dt E_{\perp}^2. \quad (4.8.16)$$

Подставляя сюда разложение Фурье для  $E_{\perp}$ , получим

$$\Pi = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{\max}} \frac{k_{\perp}^2 d^2k_{\perp} d\omega}{[k_{\perp}^2 + (s_1/s)^2 m^2]^2}, \quad s_1 = 2m\omega, \quad s = 2m\varepsilon$$

(верхний предел здесь порядка  $m$ ). С другой стороны, эта величина может быть выражена через спектр эквивалентных фотонов  $n(\omega) d\omega$ :

$$\Pi = \int \hbar\omega n(\omega) d\omega.$$

Сравнение этих формул приводит к выражению (4.8.12) для  $n(\omega) d\omega$ .

**4.8.2. Тормозное излучение в процессах рассеяния электрона ядром и электрона электроном.** Покажем теперь, как пользоваться методом эквивалентных фотонов. Найдем прежде всего сечение тормозного излучения при столкновении быстрого электрона с ядром. Этот процесс в системе  $K^*$ , в которой до столкновения электрон покоился, можно рассматривать как комптоновское рассеяние эквивалентных фотонов поля ядра электроном.

Сечение рассеяния фотона электроном  $d\sigma_s^*$  в системе  $K^*$  определяется формулой (4.2.17)

$$d\sigma_s^* = \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{\omega_2^*}{\omega_1^*} \right)^2 \left( \frac{\omega_1^*}{\omega_2^*} + \frac{\omega_2^*}{\omega_1^*} - \sin^2 \vartheta^* \right) d\omega^*,$$

где  $\omega_1^*$  и  $\omega_2^*$  — частоты первичного и рассеянного фотонов в системе  $K^*$ , связанные между собой соотношением

$$\omega_2^* = \frac{\omega_1^*}{1 + (\omega_1^*/m)(1 - \cos \vartheta^*)}$$

( $\vartheta^*$  — угол рассеяния). Сечение тормозного излучения  $d\sigma_r^*$  в системе  $K^*$  связано с сечением рассеяния  $d\sigma_s^*$  формулой (4.8.12), в которой  $s_1 = 2m\omega_1^*$ :

$$d\sigma_r^*(\omega_2^*) = \int_{\omega_1^* \min}^{\omega_1^* \max} n(\omega_1^*) d\omega_1^* d\sigma_s^*(\omega_1^*, \omega_2^*), \quad (4.8.17)$$

где  $\omega_1^* \min$  и  $\omega_1^* \max$  — минимальная и максимальная частоты первичного фотона, соответствующие заданной частоте  $\omega_2^*$  рассеянного фотона.

Так как сечение рассеяния представляет собой релятивистский инвариант, то для определения  $d\sigma_r$  в системе покоя ядра  $K$

нужно сечение, определяемое формулой (4.8.17), выразить через частоту  $\omega_2$  в системе  $K$ , соответствующую частоте  $\omega_2^*$  в системе  $K^*$ . Связь между частотами дается формулой Доплера

$$\omega_2 = \omega_2^* (1 - v \cos \vartheta^*) \frac{\varepsilon_1}{m}, \quad \left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2 = (1 - v^2)^{-1}.$$

Введем обозначения  $\xi_1 = \omega_1^*/m$ ,  $\xi_2 = \omega_2/\varepsilon_1$ . Тогда

$$\cos \vartheta^* = [1 - \xi_2 (1 - \xi_1^{-1})]/(v - \xi_2),$$

$$d\sigma_s = \pi r_0^2 \frac{d\xi_2}{\xi_1} \left\{ 1 - \xi_2 + \frac{1}{(1 - \xi_2)} + \frac{\xi_2}{\xi_1 (1 - \xi_2)} \left[ \frac{\xi_2}{\xi_1 (1 - \xi_2)} - 2 \right] \right\}.$$

Учитывая далее, что

$$n(\omega_1^*) d\omega_1^* = \frac{2Z^2\alpha}{\pi} \ln \frac{\varepsilon_1}{m} \frac{d\xi_1}{\xi_1},$$

перепишем  $d\sigma_s$  в виде

$$d\sigma_r(\omega_2) = 2r_0^2 Z^2 \alpha d\xi_2 \ln \frac{\xi_1}{m} \int_{\xi_2/[2(1-\xi_2)]}^{2\xi_2(\varepsilon_1/m)^2} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \times$$

$$\times \{1 - \xi_2 + (1 - \xi_2)^{-1} + \xi_2 [\xi_1 (1 - \xi_2)]^{-1} [\xi_2 (\xi_1 (1 - \xi_2))^{-1} - 2]\}, \quad (4.8.18)$$

где верхний и нижний пределы интегрирования по  $\xi_1$  соответствуют  $\vartheta^* = 0$  и  $\vartheta^* = \pi$ . Главный вклад в интеграл (4.8.18) вносит область  $\xi_1$  вблизи нижнего предела. Вычислив интеграл на нижнем пределе, получим

$$d\sigma_r(\omega_2) = 4r_0^2 Z^2 \alpha \frac{d\omega_2}{\omega_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{2}{3} \right) \ln \frac{\varepsilon_1}{m}, \quad (4.8.19)$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — значения энергии электрона в начальном и конечном состояниях.

Если быстрый электрон  $f$  сталкивается с покоящимся электроном  $r$ , то для определения сечения происходящего при этом тормозного излучения методом эквивалентных фотонов нужно, во-первых, рассмотреть рассеяние эквивалентных фотонов поля быстрого электрона  $f$  на покоящемся электроне  $r$  и, во-вторых, перейдя в систему отсчета, связанную с электроном  $f$ , рассмотреть рассеяние эквивалентных фотонов поля электрона  $r$  на электроне  $f$ .

Эти процессы дают одинаковый вклад в сечение, который получается из (4.8.18) при  $Z = 1$ , так что

$$d\sigma_r(\omega_2) = 8r_0^2 \alpha \frac{d\omega_2}{\omega_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{2}{3} \right) \ln \frac{\varepsilon_1}{m}. \quad (4.8.20)$$

**4.8.3. Образование пар фотоном в поле ядра и при столкновении двух быстрых заряженных частиц.** Определим теперь сечение образования пары фотоном в поле ядра. Перейдем в систему центра инерции образованной пары. В этой системе действие

поля ядра мы заменим действием реальных фотонов, спектр которых согласно (4.8.12') определяется формулой

$$n(\omega_0) d\omega_0 = \frac{4}{\pi} \alpha Z^2 \frac{d\omega_0}{\omega_0} \ln \frac{\omega}{m},$$

где  $\omega_0 = \sqrt{s_1}/2$  — энергия фотонов в с. ц. и.  $e^+e^-$ -пары,  $\omega$  — энергия начального фотона в лабораторной системе. Согласно методу эквивалентных фотонов процесс образования пары фотоном в поле ядра можно рассматривать как образование пары начальным фотоном и фотонами этого спектра. Иными словами, сечение образования пары фотоном в поле ядра равно

$$\sigma = \int n(\omega_0) d\omega_0 \sigma_{\gamma\gamma}(\omega_0), \quad (4.8.21)$$

где  $\sigma_{\gamma\gamma}(\omega_0)$  — сечение образования пары двумя фотонами, определяемое формулой (4.5.20). В качестве нижнего предела интегрирования в (4.8.21) нужно взять  $m$ , а верхний предел можно считать равным  $\infty$ . Вводя вместо  $\omega_0$  переменную  $x = (1 - m^2/\omega_0^2)^{1/2}$ , перепишем (4.8.21) в виде

$$\sigma = 2r_0^2 \alpha Z^2 \ln \frac{\omega}{m} \int_0^1 dx x \left[ (3 - x^4) \ln \frac{1+x}{1-x} + 2x(x^2 - 2) \right],$$

откуда

$$\sigma = \frac{28}{9} \alpha Z^2 r_0^2 \ln \frac{\omega}{m}. \quad (4.8.22)$$

Рассмотрим, наконец, образование пары при столкновении двух быстрых заряженных частиц [41]. Относительную скорость частиц  $v$  будем считать достаточно большой, так что  $\xi = 1/\sqrt{1-v^2} \gg 1$ . В системе отсчета  $K_1$ , в которой одна из частиц ( $A_1$ ) покоится, распределение фотонов, представляющих поле второй частицы ( $A_2$ ), определяется формулой

$$n_2(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} \alpha Z_2^2 \ln \frac{\xi m}{\omega} \frac{d\omega}{\omega},$$

где  $Z_2 e$  — заряд частицы  $A_2$ . Процесс рождения пары при столкновении частиц  $A_1$  и  $A_2$  можно рассматривать как образование пары при взаимодействии фотонов этого спектра с покоящейся частицей  $A_1$ . Сечение рождения пары при столкновении фотона с частицей  $A_1$  равно согласно (4.8.22)

$$\sigma_{\gamma}(\omega) = \frac{28}{9} r_0^2 \alpha Z_1^2 \ln \frac{\omega}{m},$$

где  $\omega$  — энергия фотона и  $Z_1 e$  — заряд частицы  $A_1$ . Поэтому интересующее нас сечение рождения пары при столкновении частиц  $A_1$  и  $A_2$  можно представить в виде

$$\sigma = \int n_2(\omega) \sigma_{\gamma}(\omega) d\omega.$$

Поскольку  $\sigma_\nu(\omega)$  в этой формуле растет логарифмически при увеличении  $\omega$ , то существенным является только верхний предел интегрирования. Максимальная частота фотонов поля частицы равна по порядку величины  $\xi m$ , поэтому

$$\sigma = \int_0^{\xi m} \frac{2}{\pi} \alpha Z_3^2 \ln \frac{\xi m}{\omega} \frac{d\omega}{\omega} \frac{28}{9} r_0^2 \alpha Z_1^2 \ln \frac{\omega}{m} = \frac{28}{27\pi} \alpha^2 r_0^2 Z_1^2 Z_3^2 \ln^3 \xi. \quad (4.8.23)$$

**4.8.4. Сечение двуструйного процесса.** В п. 4.8.1 мы вычислили сечение образования струи при столкновении двух быстрых электронов, обменивающихся виртуальным фотоном. Основываясь теперь на этом же механизме, мы вычислим сечение образования двух струй при взаимодействии двух частиц (для определенности будем говорить об электронах, хотя все выводы справедливы и для взаимодействия фотона с электроном и фотона с фотоном).

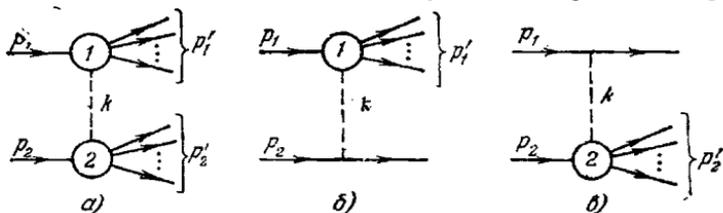


Рис. 4.26.

Соответствующая диаграмма изображена на рис. 4.26, а, где  $p_1$  и  $p_2$  — 4-импульсы начальных электронов,  $p_1'$  и  $p_2'$  — суммарные 4-импульсы струй и  $k$  — 4-импульс виртуального фотона. Так же как и в (4.8.1), будем считать, что  $s = -2p_1 p_2 \gg -p_1'^2, -p_2'^2$ .

Инвариантная амплитуда процесса может быть записана в виде, аналогичном (4.8.1):

$$M = \frac{1}{k^2} J_{1\mu}(k) J_{2\nu}(-k) \delta_{\mu\nu},$$

где  $J_{1\mu}$  и  $J_{2\nu}$  — токи перехода электронов с импульсами  $p_1$  и  $p_2$  в струи с импульсами  $p_1'$  и  $p_2'$ . Замечая, что  $\delta_{\mu\nu} = -\frac{2}{s}(p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu}) + \delta_{\mu\nu}^\perp$ , и учитывая, что  $J_2 p_1$  и  $J_1 p_2$  пропорциональны большой величине  $s$ , перепишем  $M$  в виде

$$M = -\frac{2}{s} \frac{1}{k^2} [J_1(k) p_2][J_2(-k) p_1] + o\left(\frac{m^2}{s}\right).$$

Используя далее (4.8.8), получим

$$\sum |M|^2 = \frac{4s^2}{k^4} k_\perp^4 \frac{1}{s_1^2} \sum_{\lambda_1} |J_1^{(\lambda_1)} n_\perp|^2 \frac{1}{s_2^2} \sum_{\lambda_2} |J_2^{(\lambda_2)} n_\perp|^2, \quad (4.8.24)$$

где  $s_1 = -2k p_1$ ,  $s_2 = 2k p_2$ . Обозначая через  $d\sigma_i(s_i, k_\perp)$  сечение образования  $i$ -й струи виртуальным фотоном с 4-импульсом  $k$ ,

усредненное по всем азимутальным углам частиц в струе (ср. (4.8.11')), можно представить усредненное по азимутальным углам дифференциальное сечение процесса образования двух струй в виде

$$d\sigma = \frac{dk_{\perp}^2 \cdot k_{\perp}^4}{4\pi^3} \int \frac{1}{k^4} d\sigma_1(s_1, k_{\perp}) \frac{\sqrt{s_1^2 + 4k_{\perp}^2 m^2}}{s_1^2} ds_1 \times \\ \times d\sigma_2(s_2, k_{\perp}) \frac{\sqrt{s_2^2 + 4k_{\perp}^2 m^2}}{s_2^2} ds_2, \quad (4.8.25)$$

где интегрирование совершается по  $s_1$  и  $s_2$  (при заданных значениях  $k_{\perp}^2$  и других величин, от которых могут зависеть  $d\sigma_1$  и  $d\sigma_2$ ). Так как  $k^2 \approx k_{\perp}^2 + s_1 s_2 / s \approx k_{\perp}^2$ , то

$$d\sigma = \frac{dk_{\perp}^2}{4\pi^3} \int d\sigma_1(s_1, k_{\perp}) \frac{\sqrt{s_1^2 + 4m^2 k_{\perp}^2}}{s_1^2} ds_1 \int d\sigma_2(s_2, k_{\perp}) \frac{\sqrt{s_2^2 + 4m^2 k_{\perp}^2}}{s_2^2} ds_2. \quad (4.8.26)$$

Сравним эту формулу с дифференциальным сечением одноструйного процесса в области  $k_{\perp}^2 \sim m^2$ . Последнее определяется формулой (4.8.11), в которой надо опустить член  $(s_1/s)^2 m^2$  в знаменателе подынтегрального выражения:

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{dk_{\perp}^2} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{k_{\perp}^2} \int d\sigma_1(s_1, k_{\perp}) \frac{\sqrt{s_1^2 + 4m^2 k_{\perp}^2}}{s_1} ds_1. \quad (4.8.27)$$

Из (4.8.27) и (4.8.26) следует, что дифференциальное сечение двуструйного процесса можно выразить через дифференциальные сечения соответствующих одноструйных процессов (см. диаграммы на рис. 4.26, б, в) [42]:

$$\frac{d\sigma}{dk_{\perp}^2} = \frac{k_{\perp}^4}{4\pi\alpha^2} \frac{d\sigma^{(1)}}{dk_{\perp}^2} \frac{d\sigma^{(2)}}{dk_{\perp}^2}. \quad (4.8.28)$$

Рассмотрим в качестве примера двуструйный процесс, соответствующий диаграмме на рис. 4.27, а, т. е. процесс двойного

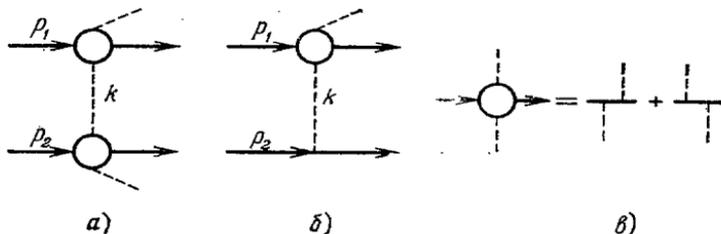


Рис. 4.27.

тормозного излучения при столкновении двух электронов. Дифференциальное сечение соответствующего одноструйного процесса (диаграмма рис. 4.27, б) определяется формулой [43]

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{dx dk_{\perp}^2} = \frac{4\alpha r_0^3 m^2}{k_{\perp}^4} \left[ 2 \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \psi_2(k_{\perp}^2) + \left( x - 2 + \frac{2}{x} \right) \psi_1(k_{\perp}^2) \right],$$

где

$$x = \frac{\omega}{\varepsilon_1}, \quad \psi_1 = \frac{1}{z} \ln \frac{z+1}{z-1}, \quad \psi_2 = 1 - \frac{1-z^2}{2} \psi_1, \quad z = \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k_{\perp}^2}}$$

( $\varepsilon_1$  и  $\omega$  — энергии начального электрона с импульсом  $p_1$  и тор-мозного фотона). Используя эту формулу, получим согласно (4.8.28)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx_1 dx_2 dk_{\perp}^2} = \frac{4\alpha^2 r_0^2 m^2}{\pi k_{\perp}^4} \left\{ 4 \left(1 - \frac{1}{x_1}\right) \left(1 - \frac{1}{x_2}\right) \psi_2^2(k_{\perp}^2) + \right. \\ \left. + \left(x_1 - 2 + \frac{2}{x_1}\right) \left(x_2 - 2 + \frac{2}{x_2}\right) \psi_1^2(k_{\perp}^2) + \left[ \left(1 - \frac{1}{x_1}\right) \left(x_2 - 2 + \frac{2}{x_2}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{1}{x_2}\right) \left(x_1 - 2 + \frac{2}{x_1}\right) \right] 2\psi_1(k_{\perp}^2) \psi_2(k_{\perp}^2) \right\}, \quad (4.8.29) \end{aligned}$$

где  $x_i = \omega_i/\varepsilon$  ( $\varepsilon$  — энергия электрона в с. п. и.).

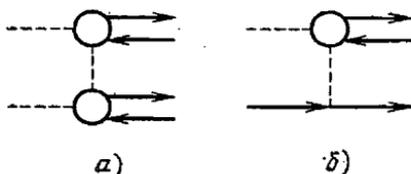


Рис. 4.28.

Рассмотрим еще процесс образования двух  $e^+e^-$ -пар при взаимодействии двух жестких фотонов (диаграмма рис. 4.28, а). В этом случае сечение одноструйного процесса (диаграмма рис. 4.28, б) равно [43]

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{dy dk_{\perp}^2} = \frac{4\alpha r_0^2 m^2}{k_{\perp}^4} \{ 2y(1-y) \psi_2(k_{\perp}^2) + [1 - 2y(1-y)] \psi_1(k_{\perp}^2) \},$$

где  $y = \varepsilon_+/ \omega$ . Поэтому в соответствии с формулой (4.8.28)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dy_1 dy_2 dk_{\perp}^2} = \frac{4\alpha^2 r_0^2 m^2}{\pi k_{\perp}^4} \{ 4y_1 y_2 (1-y_1)(1-y_2) \psi_2^2(k_{\perp}^2) + \\ + [1 - 2y_1(1-y_1)] [1 - 2y_2(1-y_2)] \psi_1^2(k_{\perp}^2) + \\ + [y_1(1-y_1)(1-2y_2(1-y_2)) + y_2(1-y_2)(1-2y_1(1-y_1))] \times \\ \times 2\psi_1(k_{\perp}^2) \psi_2(k_{\perp}^2) \}, \quad (4.8.30) \end{aligned}$$

где  $y_i = \varepsilon_i/\omega_0$  ( $\omega_0$  — энергия фотона в с. п. и.). Интегрируя это выражение по  $y_1$ ,  $y_2$  и  $k_{\perp}^2$ , получим интегральное сечение образования двух пар двумя жесткими фотонами [44]

$$\sigma = \frac{4\alpha^2 r_0^2}{\pi} \left[ \frac{175}{144} \zeta(3) - \frac{19}{72} \right]$$

( $\zeta(z)$  — дзета-функция Римана).

## § 5.1. Радиационные поправки к электродинамическим функциям Грина

5.1.1. Массовый оператор второго порядка. Изучив квантово-электродинамические процессы в первом неисчезающем приближении теории возмущений, мы перейдем к определению поправок к элементам матрицы рассеяния, которые вносят высшие приближения теории возмущений. Эти поправки называются радиационными поправками.

Начнем с вычисления массового оператора второго порядка [1]. Эта величина, которой соответствует диаграмма рис. 3.11, определяется, согласно правилам Фейнмана, формулой

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} \gamma_{\mu} S_c(p+k) \gamma_{\mu} D_c(k) d^4k. \quad (5.1.1)$$

При регуляризации массового оператора возникает, как мы увидим, расходимость в области малых  $k^2$ . Эта так называемая инфракрасная расходимость уже обсуждалась в § 4.4; мы вернемся к ней еще в п. 5.4.4. Для ее устранения можно формально ввести в  $D_c(k)$  отличную от нуля «массу фотона»  $\lambda$ , считая, что  $D_c(k)$  определяется формулой

$$D_c(k) = \frac{-i}{k^2 + \lambda^2}, \quad \lambda^2 > 0. \quad (5.1.2)$$

Подставляя в (5.1.1) это выражение для  $D_c(k)$  и выражение (2.5.32) для  $S_c(p)$ , получим

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_{\mu} \frac{i(\hat{p} + \hat{k}) - m}{(p+k)^2 + m^2} \gamma_{\mu} \frac{d^4k}{k^2 + \lambda^2} = -\frac{\alpha}{2\pi^3} \int \frac{i(\hat{p} + \hat{k}) + 2m}{(p+k)^2 + m^2} \frac{d^4k}{k^2 + \lambda^2}.$$

Используя далее формулу (A.1.3), представим  $\Sigma^{(2)}(p)$  в виде

$$\Sigma^{(2)}(p) = -\frac{\alpha}{2\pi^3} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{i(\hat{p} + \hat{k}) + 2m}{[k^2 + (2kp + p^2 + m^2 - \lambda^2)x + \lambda^2]^2}.$$

Воспользовавшись, наконец, формулой (A.1.16), получим

$$\Sigma^{(2)}(\rho) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left\{ [\hat{\rho}(1-x) - 2im] \ln \frac{L^2}{\rho^2 x(1-x) + m^2 x + \lambda^2(1-x)} + \right. \\ \left. + \left( \frac{3}{2} x - 1 \right) \hat{\rho} + 2im \right\}. \quad (5.1.3)$$

Это выражение должно быть теперь регуляризовано. Для этого нужно, согласно (3.7.7), отнять от  $\Sigma^{(2)}(\rho)$  два первых члена разложения  $\Sigma^{(2)}(\rho)$  в ряд Тейлора по степеням  $(\hat{\rho} - im_R)$ :

$$\Sigma_R^{(2)}(\rho) = \Sigma^{(2)}(\rho) - \Sigma^{(2)}(im_R) - (\hat{\rho} - im_R) \left( \frac{\partial \Sigma^{(2)}(\rho)}{\partial \hat{\rho}} \right)_{\hat{\rho} = im_R}. \quad (5.1.4)$$

Величина  $\left( \frac{\partial \Sigma^{(2)}(\rho)}{\partial \hat{\rho}} \right)_{\hat{\rho} = im_R} = \Sigma_1^{(2)}$  связана, согласно (3.6.18), с константой  $Z_1$  (во втором приближении теории возмущений) соотношением

$$\Sigma_1^{(2)} = Z_1^{-1} - 1. \quad (5.1.5)$$

Итак,

$$\Sigma_R^{(2)}(\rho) = \Sigma^{(2)}(\rho) - \Sigma_0^{(2)} - (\hat{\rho} - im_R) \Sigma_1^{(2)}, \quad \Sigma_0^{(2)} \equiv \Sigma^{(2)}(\rho_0). \quad (5.1.6)$$

Напомним, что, согласно (3.6.5), величина  $\Sigma_0^{(2)}$  с точностью до множителя  $-i$  совпадает с электромагнитной массой электрона  $\delta m^{(2)}$  (во втором приближении теории возмущений):  $\Sigma_0^{(2)} = -i\delta m^{(2)}$ . Из (5.1.3) следует

$$\delta m^{(2)} = i\Sigma_0^{(2)} = \\ = i \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -im_R(1+x) \ln \frac{L^2}{m_R^2 x^2 + \lambda^2(1-x)} + im_R \left( \frac{3}{2} x + 1 \right) \right]. \quad (5.1.7)$$

Выполняя интегрирование и пренебрегая величиной  $\lambda$  по сравнению с  $m_R$ , получим следующее выражение для электромагнитной массы электрона во втором приближении теории возмущений:

$$\delta m^{(2)} = \frac{3\alpha}{4\pi} m_R \left( \ln \frac{L^2}{m_R^2} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.1.8)$$

Эта величина, как мы видим, логарифмически зависит от предельного импульса  $L$ .

Дифференцируя (5.1.3), получим

$$\Sigma_1^{(2)} = \left( \frac{\partial \Sigma^{(2)}(\rho)}{\partial \hat{\rho}} \right)_{\hat{\rho} = im_R} = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{L^2}{m_R^2} + \frac{9}{4} + \ln \frac{\lambda^2}{m_R^2} \right]. \quad (5.1.9)$$

Наконец, подставляя полученные выражения для  $\Sigma_0^{(2)}$  и  $\Sigma_1^{(2)}$  и формулы (5.1.3) и (5.1.5), получим следующее выражение для

регуляризованного массового оператора во втором приближении теории возмущений:

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left\{ [\hat{p}(1-x) - 2im_R] \ln \frac{m_R^2 x^2 + \lambda^2(1-x)}{\rho^2 x(1-x) + m_R^2 x + \lambda^2(1-x)} + (\hat{p} - im_R) \frac{2m^2 x(1-x^2)}{m^2 x^2 + \lambda^2(1-x)} \right\}. \quad (5.1.10)$$

Это выражение имеет нуль второго порядка при  $\hat{p} = im_R$ .

Обратим внимание на то обстоятельство, что в выражение для регуляризованного массового оператора  $\Sigma_R^{(2)}(p)$  входит «масса фотона»  $\lambda$ , в то время как в исходное выражение для  $\Sigma^{(2)}(p)$  величина  $\lambda$  не входила. Таким образом, зависимость от  $\lambda$  возникает в результате регуляризации. Величина  $\lambda$  входит также в  $Z_1$ , но не входит в  $\delta m^{(2)}$ .

Общее выражение (5.1.10) для  $\Sigma_R^{(2)}(p)$  сильно упрощается в области больших импульсов:

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = -\frac{\alpha}{4\pi} \hat{p} \ln \frac{p^2}{m_R^2}, \quad p^2 \gg m_R^2. \quad (5.1.11)$$

Можно показать, что если  $p^2 + m_R^2 \gg \lambda^2$ , то

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = i \frac{-\alpha}{2\pi m_R} (\hat{p} - im_R)^2 \left\{ \frac{1}{2(1-\rho)} \left( 1 - \frac{2-3\rho}{1-\rho} \ln \rho \right) + \frac{i\hat{p} - m_R}{m_R} \left[ \frac{1}{2\rho(1-\rho)} \left( 2 - \rho + \frac{-4+4\rho+\rho^2}{1-\rho} \ln \rho \right) + \frac{i}{\rho} + \frac{1}{\rho} \ln \frac{\lambda^2}{m_R^2} \right] \right\}, \quad (5.1.12)$$

где  $\rho = (p^2 + m_R^2)/m_R^2$ . Используя это выражение, можно согласно (3.5.7) найти электронную функцию Грина во втором приближении.

**5.1.2. Поляризационный оператор второго порядка.** Перейдем к вычислению поляризационного оператора 2-го порядка  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ :

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int \gamma_\mu \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p-k)^2 + m^2} d^4 p.$$

Вычислив след произведения матриц, получим

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{\delta_{\mu\nu}(p^2 + m^2 - pk) - 2p_\mu p_\nu + (p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu)}{(p^2 + m^2)[(p-k)^2 + m^2]} d^4 p. \quad (5.1.13)$$

Нас будет интересовать только поперечная часть этого тензора (пропорциональная  $\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2$ ), так как только она имеет физический смысл. Поэтому мы запишем  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$  в виде

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Pi^{(2)}(k^2) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Pi_l^{(2)}(k^2), \quad (5.1.14)$$

где

$$\Pi^{(2)}(k^2) = \frac{1}{3} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k), \quad \Pi_I^{(2)}(k^2) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k).$$

Чтобы найти  $\Pi^{(2)}(k^2)$ , достаточно выделить в  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$  часть, пропорциональную  $\delta_{\mu\nu}$ . Кроме первого слагаемого в числителе подынтегрального выражения в (5.1.13), вклад в интересующую нас часть  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$  дает также второе слагаемое, так как

$$\int_{\Omega} \frac{p_\mu p_\nu d^4 p}{(p^2 + m^2) [(p-k)^2 + m^2]} = i\pi^2 \int_0^1 dx \left\{ \left( \ln \frac{L}{l_x - k_x^2} - \frac{11}{6} \right) k_{x\mu} k_{x\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \left[ (l_x - k_x^2) \ln \frac{L}{l_x - k_x^2} + \frac{5k_x^2 - 3l_x}{6} - \frac{L^2}{2} \right] \right\},$$

где  $l_x = k^2 x + m^2$ ,  $k_x = kx$  (третье слагаемое вклада, пропорционального  $\delta_{\mu\nu}$ , не дает).

Используя полученные выражения и формулы

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p-k)^2 + m^2} = i\pi^2 \left( L^2 - m^2 \ln \frac{L^2}{m^2} - \frac{1}{2} k^2 \right),$$

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 + m^2) [(p-k)^2 + m^2]} = i\pi^2 \int_0^1 dx \left\{ \ln \frac{L^2}{m^2} - \ln \left[ 1 + \frac{k^2}{m^2} x(1-x) \right] - 1 \right\},$$

получим следующее выражение для  $\Pi^{(2)}(k^2)$ :

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(k^2) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{L^2 - m^2}{2} + \frac{k^2}{3} \left( \frac{5}{6} - \ln \frac{L^2}{m^2} \right) + \right. \\ &\left. + \int_0^1 dx \left[ \frac{1}{2} k^2 - m^2 - k^2 x(1-x) \right] \ln \left[ 1 + \frac{k^2}{m^2} x(1-x) \right] \right\}. \quad (5.1.15) \end{aligned}$$

Это выражение мы должны теперь регуляризовать. Для этого нужно, в соответствии с правилами п. 3.7.1, вычесть из  $\Pi^{(2)}(k^2)$  два первых члена в разложении этих выражений по степеням  $k^2$ :

$$\begin{aligned} \Pi_R^{(2)}(k^2) &= \Pi^{(2)}(k^2) - \Pi^{(2)}(0) - k^2 \left( \frac{\partial \Pi^{(2)}(k^2)}{\partial k^2} \right)_{k^2=0} = \\ &= \frac{i\alpha}{\pi} \left\{ \frac{k^2}{6} + \int_0^1 dx \left[ \frac{k^2}{2} - k^2 x(1-x) - m_R^2 \right] \ln \left[ 1 + \frac{k^2}{m_R^2} x(1-x) \right] \right\} = \\ &= \frac{i\alpha}{4\pi} k^2 \int_{-1}^1 (1 - \eta^2) \ln \left[ 1 + \frac{k^2}{4m_R^2} (1 - \eta^2) \right] d\eta, \quad (5.1.16) \end{aligned}$$

где  $\eta = 2x - 1$ .

Выполнив интегрирование, получим

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{9} - \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 \theta \right) (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \right] k^2, \quad (5.1.17)$$

где  $\sin^2 \theta = -k^2/4m_R^2$ .

Для пространственноподобного вектора (канал рассеяния),  $k^2 > 0$ , нужно положить

$$k^2 = 4m_R^2 \operatorname{sh}^2 \varphi,$$

что эквивалентно замене в (5.1.17)  $\theta \rightarrow i\varphi$ . При этом  $\Pi_R^{(2)}(k^2)$  приобретает вид

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{\pi} k^2 \left[ \frac{1}{9} - \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \varphi\right) (1 - \varphi \operatorname{cth} \varphi) \right], \quad (5.1.18)$$

где  $\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{a+1}{a-1}$ ,  $\operatorname{cth} \varphi = a$ ,  $a = \sqrt{1 + 4m_R^2/k^2}$ .

Для случая  $-k^2 > 4m_R^2$  (канал аннигиляции) в выражении (5.1.17) следует написать

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \ln \frac{1-a}{1+a}, \quad \operatorname{ctg} \theta = -ia, \quad a = \sqrt{1 + 4m_R^2/k^2}.$$

При этом мы получим

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{\pi} k^2 \left[ \frac{1}{9} - \left(1 - \frac{1}{3} a^2\right) \left(1 + \frac{1}{2} a \ln b + ia \frac{\pi^2}{2}\right) \right],$$

$$b = \frac{1-a}{1+a}. \quad (5.1.19)$$

В пределе, когда  $|k^2| \ll m_R^2$ ,

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = i \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^4}{m_R^2},$$

а в случае  $|k^2| \gg m_R^2$

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{\pi} k^2 \left[ -\frac{5}{9} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{k^2}{m_R^2} \right| - i \frac{\pi}{3} \right], \quad -k^2 \gg m_R^2,$$

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{\pi} k^2 \left[ -\frac{5}{9} + \frac{1}{3} \ln \frac{k^2}{m_R^2} \right], \quad k^2 \gg m_R^2.$$

Зная  $\Pi_R^{(2)}(k^2)$ , можно, согласно (3.6.20), определить перенормированную фотонную функцию Грина во втором приближении теории возмущений:

$$G_R^{(Y)}(k) = [D_c^{-1}(k) - \Pi_R^{(2)}(k^2)]^{-1}.$$

Используя (5.1.16) и (5.1.17), получим

$$G_R^{(Y)} = -\frac{i}{k^2} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \ln \left[ 1 + \frac{k^2}{m_R^2} x(1-x) \right] dx \right\} =$$

$$= -\frac{i}{k^2} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{9} - (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 \theta \right) \right] \right\}. \quad (5.1.20)$$

В п. 3.5.2 мы определили величину

$$A_\mu(q) = A_\mu^{(e)}(q) + D_{\alpha\nu}(q) K_{\nu\nu'}^{(0,2)}(q) A_{\nu'}^{(e)}(q),$$

которая должна сопоставляться внешней фотонной линии. Эта величина представляет собой сумму заданного внешнего электромагнитного поля  $A_{\mu}^{(e)}(q)$  и добавки к нему

$$\delta A_{\mu}^{(e)}(q) = D_{\mu\nu}(q) K_{\nu\nu'}^{(0,2)}(q) A_{\nu'}^{(e)}(q),$$

которую можно интерпретировать как электромагнитное поле, обусловленное поляризацией вакуума электронно-позитронного поля при включении поля  $A_{\mu}^{(e)}(q)$ .

Во втором приближении теории возмущений мы должны вместо  $K_{\mu\nu}^{(0,2)}(q)$  подставить  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q)$  и регуляризовать последнее выражение. В результате мы получим следующее выражение для добавки к потенциалу внешнего электромагнитного поля, обусловленной поляризацией вакуума электронно-позитронного поля:

$$\delta A_{\mu}^{(e)}(q) = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{q^2} \right) \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{9} - \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 \theta \right) (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \right] A_{\nu}^{(e)}(q),$$

$$\sin^2 \theta = - \frac{q^2}{m_R^2}. \quad (5.1.21)$$

При  $q^2 = 0$  мы имеем, очевидно, поле фотона. В этом случае добавки к полю не должно возникать, и, действительно,  $\delta A_{\mu}^{(e)}(q)$  при  $q^2 = 0$  обращается в нуль.

Потенциал внешнего поля  $A_{\mu}^{(e)}(x)$  связан с током  $J_{\mu}(x)$ , создающим это поле, соотношением

$$\square A_{\mu}^{(e)}(x) = - J_{\mu}^{(e)}(x), \quad (5.1.22)$$

или в компонентах Фурье  $J_{\mu}^{(e)}(q) = q^2 A_{\mu}^{(e)}(q)$ . При этом, так как  $\partial J_{\mu}^{(e)}(x)/\partial x_{\mu} = 0$ , то  $q_{\mu} J_{\mu}^{(e)}(q) = 0$ .

Изменение поля будет приводить к изменению тока. Используя соотношения (5.1.21) и (5.1.22), легко убедиться, что добавка к току, обусловленная поляризацией вакуума электронно-позитронного поля, определяется формулой

$$\delta J_{\mu}^{(e)}(q) = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{9} - \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 \theta \right) (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \right] J_{\mu}^{(e)}(q). \quad (5.1.23)$$

Разлагая величину, стоящую в квадратных скобках, в ряд по степеням  $q^2$  и ограничиваясь членами 1-го порядка, получим

$$\delta J_{\mu}^{(e)}(q) = \frac{\alpha}{15\pi m_R^2} q^2 J_{\mu}^{(e)}(q).$$

Переходя от компонент Фурье к функциям координат и времени, найдем [2]

$$\delta J_{\mu}^{(e)}(x) = - \frac{\alpha}{15\pi m_R^2} \square J_{\mu}^{(e)}(x).$$

5.1.3. **Вершинная функция третьего порядка.** Рассмотрим теперь вершинную функцию 3-го порядка  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ :

$$\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_{\nu} S_c(p_2 - k) \gamma_{\mu} S_c(p_1 - k) \gamma_{\nu} D_c(k) d^4k. \quad (5.1.24)$$

После регуляризации величина  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ , так же как и  $\Sigma_{\mu}^{(2)}(p)$ , будет содержать инфракрасную расходимость (если  $p_1$  и  $p_2$  — импульсы свободного электрона, то  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$  содержит инфракрасную расходимость и до регуляризации). Поэтому при вычислении  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$  мы будем пользоваться выражением (5.1.2) для функции  $D_c(k)$ .

Подставляя это выражение для  $D_c(k)$  и выражение (2.5.32) для  $S_c(p)$  в (5.1.24), получим

$$\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \{ \gamma_{\nu} (i\hat{p}_2 - m) \gamma_{\mu} (i\hat{p}_1 - m) \gamma_{\nu} J_1 - i [ \gamma_{\nu} (i\hat{p}_2 - m) \gamma_{\mu} \gamma_{\sigma} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} (i\hat{p}_1 - m) \gamma_{\nu} ] J_{\sigma} - \gamma_{\nu} \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} \gamma_{\tau} \gamma_{\nu} J_{\sigma\tau} \}, \quad (5.1.25)$$

где

$$J_{(1; \sigma; \sigma\tau)} = \int_{\Omega} \frac{(1; k_{\sigma}; k_{\sigma}k_{\tau})}{(k^2 - 2p_1k + p_1^2 + m^2)(k^2 - 2p_2k + p_2^2 + m^2)(k^2 + \lambda^2)} d^4k \quad (5.1.26)$$

(в скобке  $(1; k_{\sigma}; k_{\sigma}k_{\tau})$  нужно сохранить 1 в случае интеграла  $J_1$ ,  $k_{\sigma}$  — в случае интеграла  $J_{\sigma}$  и  $k_{\sigma}k_{\tau}$  — в случае интеграла  $J_{\sigma\tau}$ ).

Из всех интегралов при больших  $|k^2|$  расходится, и притом логарифмически, только третий интеграл. В области малых  $k$  (при  $\lambda=0$ ) может расходиться первый интеграл (если  $p_1$  и  $p_2$  представляют собой импульсы свободного электрона). По этой причине при вычислении интегралов  $J_{\sigma}$  и  $J_{\sigma\tau}$  можно положить  $\lambda=0$ .

Рассмотрим прежде всего тот случай, когда  $p_1$  и  $p_2$  представляют собой импульсы свободного электрона,  $p_1^2 = -m_R^2$ ,  $p_2^2 = -m_R^2$ . Используя формулы

$$\frac{1}{(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_2k)} = \int_0^1 \frac{dy}{(k^2 - 2p_yk)^2},$$

$$\frac{1}{(k^2 - 2p_yk)^2(k^2 + \lambda^2)} = \int_0^1 \frac{2x dx}{(k^2 - 2p_xk + l_x)^3},$$

где  $p_y = yp_1 + (1-y)p_2$ ,  $p_x = xp_y$ ,  $l_x = (1-x)\lambda^2$ , представим  $J_1$ ,  $J_{\sigma}$ ,  $J_{\sigma\tau}$  в виде

$$J_1 = \int_0^1 dy \int_0^1 2x dx \int_{\Omega} \frac{d^4k}{(k^2 - 2p_xk + l_x)^3},$$

$$J_{(\sigma; \sigma\tau)} = \int_0^1 dy \int_0^1 2x dx \int_{\Omega} \frac{(k_{\sigma}; k_{\sigma}k_{\tau})}{(k^2 - 2p_xk)^3} d^4k.$$

Входящие сюда интегралы по  $k$  определяются формулами приложения (А.1.16).

Выполнив интегрирование по  $x$ , получим

$$J_1 = -i\pi^2 \int_0^1 \frac{dy}{p_y^2} (\ln \sqrt{-p_y^2} - \ln \lambda), \quad J_\sigma = -i\pi^2 \int_0^1 \frac{dy p_{y\sigma}}{p_y^2},$$

$$J_{\sigma\tau} = -\frac{i\pi^2}{4} \int_0^1 dy \left[ \delta_{\sigma\tau} \left( -\ln \frac{L^2}{-p_y^2} + \frac{1}{2} \right) + 2 \frac{p_{y\sigma} p_{y\tau}}{p_y^2} \right].$$

Для вычисления этих интегралов заметим, что

$$-p_y^2 = -[p_1 + q(1-y)]^2 = m^2 + q^2 y(1-y) = m^2 [1 - 4y(1-y) \sin^2 \theta], \quad (5.1.27)$$

где  $q = p_2 - p_1$  и  $\theta$  связано с  $q$  соотношением

$$-q^2 = 4m^2 \sin^2 \theta. \quad (5.1.28)$$

Введем далее вместо  $y$  новую переменную  $\xi$ :  $2y - 1 = \operatorname{tg} \xi / \operatorname{tg} \theta$ . Тогда

$$-p_y^2 = m^2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \xi}, \quad p_{y\sigma} = \frac{\operatorname{tg} \xi}{2 \operatorname{tg} \theta} (p_{1\sigma} - p_{2\sigma}) + \frac{1}{2} (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}) \quad (5.1.29)$$

и интеграл  $J_1$  приобретает вид

$$J_1 = \frac{2i\pi^2}{m^2 \sin 2\theta} \left\{ - \int_0^\theta \ln \frac{\cos \xi}{\cos \theta} d\xi - \int_0^\theta \ln \frac{\lambda}{m} d\xi \right\} =$$

$$= -\frac{2i\pi^2}{m^2 \sin 2\theta} \left\{ \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi + \theta \ln \frac{\lambda}{m} \right\}. \quad (5.1.30)$$

Интегралы  $J_\sigma$  и  $J_{\sigma\tau}$  после подстановки в них (5.1.28) и (5.1.29) вычисляются немедленно:

$$J_\sigma = \frac{i\pi^2}{m^2} \frac{\theta}{\sin 2\theta} (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}),$$

$$J_{\sigma\tau} = \frac{i\pi^2}{2} \left[ \delta_{\sigma\tau} \left( \ln \frac{L}{m} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\theta (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}) (p_{1\tau} + p_{2\tau})}{2m^2 \sin 2\theta} + \right.$$

$$\left. + \left( \delta_{\sigma\tau} + \frac{q_\sigma q_\tau}{-q^2} \right) (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \right]. \quad (5.1.31)$$

Вернемся теперь к формуле (5.1.25), определяющей  $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ , и упростим коэффициенты, стоящие перед интегралами  $J_1$ ,  $J_\sigma$ ,  $J_{\sigma\tau}$ . Рассмотрим прежде всего выражение, стоящее перед  $J_1$ :

$$\gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu =$$

$$= 2\hat{p}_1 \gamma_\mu \hat{p}_2 - 2im (\gamma_\mu \hat{p}_2 + \hat{p}_2 \gamma_\mu) - 2im (\gamma_\mu \hat{p}_1 + \hat{p}_1 \gamma_\mu) - 2m^2 \gamma_\mu.$$

Так как при вычислениях матричных элементов величина  $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$  всегда умножается слева на  $\bar{u}_2$ , а справа — на  $u_1$ , где  $u_2$  и  $u_1$  —

биспинорные амплитуды электрона с импульсами  $p_2$  и  $p_1$ , то в последнем выражении матрицу  $i\hat{p}_1$ , стоящую справа, и матрицу  $i\hat{p}_2$ , стоящую слева, можно заменить на  $-m$  (если слева стоит матрица  $i\hat{p}_1$ , а не матрица  $i\hat{p}_2$ , или справа матрица  $i\hat{p}_2$ , а не  $i\hat{p}_1$ , то прежде чем выполнить эту замену, следует сделать подстановку  $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 - \hat{q}$ ,  $\hat{p}_2 = \hat{p}_1 + \hat{q}$ ). После таких преобразований множитель перед  $J_1$  приобретает вид

$$\gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu = 4m^2 \gamma_\mu - 2\hat{q} \gamma_\mu \hat{q}.$$

Последнее слагаемое в правой части этого соотношения может быть заменено на  $2q^2 \gamma_\mu$ . Действительно, замечая, что  $\gamma_\mu \hat{q} = -\hat{q} \gamma_\mu + 2q_\mu$ , и умножая это равенство слева на  $\hat{q}$ , получим  $\hat{q} \gamma_\mu \hat{q} = -q^2 \gamma_\mu + 2q_\mu \hat{q}$ . Последнее слагаемое не дает вклада при вычислении матричных элементов, так как  $\bar{u}_2 \hat{q} u_1 = \hat{u}_2 (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) u_1 = 0$ . В результате коэффициент, стоящий в  $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$  перед  $J_1$  может быть представлен в виде

$$\gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu = 4m^2 \gamma_\mu + 2q^2 \gamma_\mu.$$

Аналогичным образом могут быть преобразованы множители, стоящие перед интегралами  $J_\sigma$  и  $J_{\sigma\tau}$ :

$$\begin{aligned} \gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m) \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu &= -4m\delta_{\sigma\mu} + 2i(\hat{q} \gamma_\mu \gamma_\sigma - \gamma_\sigma \gamma_\mu \hat{q}), \\ \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\tau \gamma_\nu &= -2\gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\sigma. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения и значения интегралов (5.1.30), (5.1.31) в (5.1.25), получим следующее выражение для  $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \{ (4m^2 + 2q^2) \gamma_\mu J_1 + [4im(p_1 + p_2)_\mu - \\ &- 2(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) \gamma_\mu \hat{q} + 2\hat{q} \gamma_\mu (\hat{p}_1 + \hat{p}_2) + \frac{1}{2}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)] K_1 + \\ &+ 2\hat{q} \gamma_\mu \hat{q} K_2 - 4\gamma_\mu K_3 \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{i\pi^2}{m^2} \frac{\theta}{\sin 2\theta}, \quad K_2 = -\frac{i\pi^2}{2q^2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta), \\ K_3 &= \frac{i\pi^2}{2} \left( 1 - \theta \operatorname{ctg} \theta + \ln \frac{L}{m} - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

В этом выражении можно заменить матрицу  $i\hat{p}_1$ , стоящую справа, и матрицу  $i\hat{p}_2$ , стоящую слева, на  $-m$ . В результате мы получим

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) &= -\frac{e^2 \gamma_\mu}{(2\pi)^2} \left[ \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \left( \ln \frac{m}{\lambda} - 1 \right) - \frac{2}{\operatorname{tg} 2\theta} \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi - \right. \\ &\left. - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \ln \frac{L^2}{m^2} \right] + \frac{ie^2}{32\pi^2 m} (\gamma_\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma_\mu) \frac{2\theta}{\sin 2\theta}. \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

Нам остается регуляризовать  $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ . Для этого нужно вычесть из  $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$  величину  $\Lambda_\mu^{(3)}(p_0, p_0)$ , где  $p_0$  — импульс

свободного электрона,  $p_0^2 = -m_k^2$ . Так как в рассматриваемом случае  $p_1$  и  $p_2$  представляют собой импульсы свободного электрона, то, очевидно,

$$\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_0, p_0) = \Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)_{q=0} = -\gamma_{\mu} \frac{e^2}{(2\pi)^2} \left( -\frac{1}{4} \ln \frac{L^2}{m^2} - \frac{9}{8} + \ln \frac{m}{\lambda} \right) \equiv \gamma_{\mu} L^{(3)}, \quad (5.1.33)$$

где величина  $L^{(3)}$  связана, согласно (3.6.15), с  $Z_1$  соотношением

$$Z_1^{-1} = 1 + L^{(3)} \quad (5.1.34)$$

и  $Z_1^{-1}$  в рассматриваемом приближении определяется формулой (5.1.9). Заметим, что имеет место равенство

$$\Sigma_1^{(2)} = L^{(3)}. \quad (5.1.35)$$

Регуляризованное значение  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2) &= \Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2) - \Lambda_{\mu}^{(3)}(p_0, p_0) = \\ &= -\frac{\alpha}{\pi} \gamma_{\mu} \left[ \left( \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} - 1 \right) \left( \ln \frac{m_R}{\lambda} - 1 \right) - \frac{2}{\operatorname{tg} 2\theta} \int_0^{\theta} \zeta \operatorname{tg} \zeta d\zeta - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \theta \right] + \\ &+ \frac{i\alpha}{8\pi m_R} (\gamma_{\mu} \hat{q} - \hat{q} \gamma_{\mu}) \frac{2\theta}{\sin 2\theta}. \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

Для пространственноподобных  $q$  (канал рассеяния)

$$\begin{aligned} \Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2) &= \frac{\alpha}{\pi} \gamma_{\mu} \left\{ \left( \ln \frac{m_R}{\lambda} - 1 \right) \left( \frac{1+a^2}{2a} \ln b + 1 \right) + \frac{1}{4a} \ln b - \right. \\ &- \frac{1+a^2}{4a} \left[ -\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 b - 2 \ln b \ln(1+b) + 2 \int_0^b \frac{dx}{x} \ln(1+x) \right] \left. \right\} - \\ &- \frac{i\alpha}{8\pi m_R} (\gamma_{\mu} \hat{q} - \hat{q} \gamma_{\mu}) \frac{a^2-1}{2a} \ln b, \end{aligned} \quad (5.1.37)$$

где  $a = \sqrt{1 + 4m_R^2/q^2}$ ,  $b = (a-1)/(a+1)$ ,  $q^2 > 0$ .

В случае времениподобного  $q$ ,  $-q^2 > 4m_k^2$  (канал аннигиляции)

$$\begin{aligned} \Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2) &= \frac{\alpha}{\pi} \gamma_{\mu} \left\{ \left( \ln \frac{m_R}{\lambda} - 1 \right) \left( \frac{1+a^2}{2a} \ln b + 1 \right) + \right. \\ &+ \frac{1+a^2}{2a} \left[ -\int_0^b \frac{dx}{x} \ln(1-x) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{4} \ln^2 b + \ln b \ln(1-b) + \frac{\ln b}{4a} \right] + \\ &+ i\pi \left[ \frac{1}{4a} + \frac{1+a^2}{2a} \left( \ln \frac{m_R}{\lambda} - 1 \right) + \frac{1+a^2}{4a} \ln \frac{(1-b)^2}{b} \right] \left. \right\} - \\ &- \frac{i\alpha}{8\pi m_R} (\gamma_{\mu} \hat{q} - \hat{q} \gamma_{\mu}) \left[ \frac{1-a^2}{2a} \ln b + \frac{i\pi}{2a} (1-a^2) \right], \end{aligned} \quad (5.1.38)$$

где  $a = \sqrt{1 + 4m_R^2/q^2}$ ,  $b = (1-a)/(1+a)$ .

В пределе  $|q^2| \gg m_R^2$  имеем

$$\Lambda_{R\mu}^{(3)} = \frac{\alpha}{\pi} \gamma_\mu \left[ (1-\rho) \left( \ln \frac{m_R}{\lambda} - 1 \right) - \frac{1}{4} \rho (1+\rho) + \frac{\pi^2}{12} \right],$$

$$\rho = \ln \frac{q^2}{m_R^2}, \quad q^2 \gg m_R^2;$$

$$\Lambda_{R\mu}^{(3)} = \frac{\alpha}{\pi} \gamma_\mu \left\{ (1-\rho) \left( \ln \frac{m_R}{\lambda} - 1 \right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{4} \rho (1+\rho) + \right.$$

$$\left. + i\pi \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \rho + \ln \frac{m_R}{\lambda} - 1 \right] \right\},$$

$$\rho = \ln \frac{-q^2}{m_R^2}, \quad -q^2 \gg m_R^2.$$

Аналогичным образом может быть найдена вершинная функция 3-го порядка в том случае, когда только одна электронная линия соответствует свободному электрону, фотонная же линия соответствует реальному фотону. Мы не будем приводить здесь подробных вычислений, а приведем только окончательный результат для регуляризованной функции  $\Lambda_\mu^{(3)}(\rho, \rho+q)$  при  $\rho^2 = -m_R^2$  и  $q^2 = 0$ :

$$\Lambda_{R\mu}^{(3)}(\rho, \rho+q) = \frac{\alpha}{2\pi} \left( A\gamma_\mu + iB \hat{q}\gamma_\mu + iC \frac{p_\mu}{m_R} + D \frac{\hat{q}p_\mu}{m_R^2} \right), \quad (5.1.39)$$

где

$$A = -\ln \frac{\lambda^2}{m_R^2} - 2 + \frac{\kappa-2}{2(\kappa-1)} \ln |\kappa| + \frac{1}{\kappa} [F(\kappa-1) - F(-1)],$$

$$B = \frac{\ln |\kappa|}{\kappa-1}, \quad C = -\frac{1}{\kappa-1} + \frac{3\kappa-2}{(\kappa-1)^2} \ln |\kappa|,$$

$$D = -\frac{1}{\kappa-1} + \frac{2}{\kappa} - \frac{(\kappa-2)(2\kappa-1)}{\kappa(\kappa-1)^2} \ln |\kappa| - \frac{2}{\kappa^2} [F(\kappa-1) - F(-1)],$$

$$\kappa = \frac{2\rho q}{m_R^2}, \quad F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+u) du}{u}, \quad F(-1) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Мы получили формулы для вершинной функции в 3-м порядке теории возмущений. Ясно, что с учетом высших приближений функция  $\Lambda_\mu$  должна иметь следующий вид:

$$\Lambda_\mu = F_1(q^2) \gamma_\mu - \frac{i}{4m_R} (\gamma_\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma_\mu) F_2(q^2),$$

где  $F_1, F_2$  — некоторые функции инварианта  $q^2$ . Их можно представить в виде разложения по степеням  $\alpha$ :

$$F_{1,2} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^\alpha F_{1,2}^{(\alpha n)}(q^2).$$

Величины  $F_{1,2}$  называются электронными форм-факторами. Зависимость форм-факторов от  $q^2$  определена аналитически с точностью

до членов, пропорциональных  $\alpha^3$  [3]. Для малых  $q^2$  форм-фактор  $F_1^{(4)}(q^2)$  определяется формулой

$$F_1^{(4)}(q^2) \approx q^2 F_1^{(4)'}(0) + O(q^4),$$

$$m_R^2 F_1^{(4)'}(0) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[ -\frac{4819}{5184} - \frac{49}{72} \zeta(2) + 3\zeta(2) \ln 2 - \frac{3}{4} \zeta(3) \right].$$

Для случая больших времениподобных  $q^2$ ,  $-q^2 \gg m_R^2$ ,

$$F_1^{(4)} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left\{ \frac{1}{32} (\rho - i\pi)^4 - \frac{31}{144} (\rho - i\pi)^3 + \left[ \frac{299}{288} - \frac{1}{8} \zeta(2) \right] (\rho - i\pi)^2 + \right. \\ \left. + \left( -\frac{1627}{864} + \frac{3}{2} \zeta(3) - \frac{13}{24} \zeta(2) \right) (\rho - i\pi) \right\}, \quad \rho = \ln \frac{-q^2}{m_R^2},$$

а для больших пространственноподобных  $q^2$ ,  $q^2 \gg m_R^2$ :

$$F_1^{(4)} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \left\{ \left[ (\rho - 1) \ln \frac{\lambda}{m} - \frac{1}{4} \rho^2 + \frac{3}{4} \rho \right]^2 - \frac{1}{36} \rho^3 \right\}, \quad \rho = \ln \frac{q^2}{m_R^2}.$$

## § 5.2. Модификация закона Кулона. Аномальный магнитный момент электрона

**5.2.1. Модификация закона Кулона.** Найдя радиационные поправки к функциям Грина и к вершинной функции, мы можем перейти теперь к исследованию тех физических эффектов, которые связаны с этими поправками. Простейшими из них являются модификация закона Кулона для вакуума и наличие аномального магнитного момента у электрона и мюона.

Остановимся прежде всего на законе Кулона. Если задан внешний ток  $J_\mu(x)$ , то создаваемое им поле  $\mathcal{A}_\mu(x)$  можно, согласно (3.5.22), найти по формуле

$$\mathcal{A}_\mu(x) = i \int G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x-x') J_\nu(x') d^4x', \quad (5.2.1)$$

где  $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x)$  — фотонная функция Грина.

Мы хотим определить поле, создаваемое покоящимся точечным зарядом  $Q$ . В этом случае

$$J_\mu(x) = iQ \delta_{\mu 4} \delta(\mathbf{r})$$

(заряд предполагается находящимся в начале координат), и формула (5.2.1) для скалярного потенциала  $\varphi(\mathbf{r})$  принимает вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = iQ \int_{-\infty}^{\infty} G_R^{(\gamma)}(x) dt = \frac{iQ}{(2\pi)^3} \int G_R^{(\gamma)}(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k. \quad (5.2.2)$$

Подставляя сюда вместо  $G_R^{(\gamma)}(\mathbf{k})$  первое выражение (5.1.20), получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \ln \left[ 1 + \frac{k^2}{m^2} x(1-x) \right] dx \right\} d^3k = \\ = \frac{Q}{4\pi r} + \frac{Qe^2}{(2\pi)^5} \int_0^1 \frac{v^2(1-1/3v^2)}{1-v^2} dv \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + 4m^2/(1-v^2)} d^3k,$$

где  $v = 2x - 1$ . Используя, наконец, соотношение

$$\int \frac{e^{ikr}}{k^2 + 4m^2/(1-v^2)} d^3k = \frac{2\pi^2}{r} \exp\left(-\frac{2mr}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

и вводя вместо  $v$  новую переменную  $\xi = (1-v^2)^{-1/2}$ , получим окончательно следующую общую формулу для  $\varphi(r)$  с учетом поправок порядка  $\alpha$  [4]:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi r} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty e^{-2mr\xi} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi^2} d\xi \right\}. \quad (5.2.3)$$

Входящий сюда интеграл может быть вычислен в двух предельных случаях, когда  $mr \ll 1$  и когда  $mr \gg 1$ :

$$\int_1^\infty e^{-2mr\xi} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi^2} d\xi = \begin{cases} -\frac{5}{6} - \gamma - \ln mr, & mr \ll 1, \\ \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}, & mr \gg 1, \end{cases} \quad (5.2.4)$$

где  $\gamma = 0,577$  — постоянная Эйлера.

Таким образом, потенциал  $Q$  на малых и больших расстояниях (по сравнению с  $\hbar/mc$ ) имеет следующий вид:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left[ -\frac{5}{3} - 2\gamma + \ln \frac{1}{(mr)^2} \right] \right\}, & mr \ll 1, \\ \frac{Q}{4\pi r} \left[ 1 + \frac{\alpha}{4\pi^{1/2}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} \right], & mr \gg 1. \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Формулу (5.2.3) мы получили, используя выражение для поляризационного оператора во втором порядке теории возмущений. Учет высших приближений теории возмущений приводит к изменению асимптотики  $\varphi(r)$  на больших расстояниях. Вместо поправки, убывающей экспоненциально, возникает поправка, убывающая с увеличением расстояния степенным образом [5]:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi r} \left[ 1 - \frac{2Z\alpha^3}{225\pi} \left(\frac{1}{mr}\right)^4 + O((mr)^{-6}) \right]. \quad (5.2.6)$$

Мы получим эту формулу в п. 5.6.3.

**5.2.2. Аномальный магнитный момент электрона и мюона.** Рассмотрим теперь вопрос о магнитном моменте электрона. Если нерелятивистскую частицу, обладающую магнитным моментом  $\mu$ , поместить в магнитное поле  $H$ , то она приобретет энергию  $U_m = -\mu H$ . Поэтому, чтобы определить магнитный момент электрона, нужно исследовать взаимодействие электрона с постоянным или медленно меняющимся электромагнитным полем и выделить в энергии этого взаимодействия член, пропорциональный магнитному полю.

Согласно результатам п. 3.5.2, взаимодействие электрона с внешним полем  $A_\mu^{(e)}(x)$  описывается диаграммой рис. 5.1, на которой

жирной вершине соответствует вершинная функция  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$  ( $p_1$  и  $p_2$  — 4-импульсы электрона до и после взаимодействия с полем) и фотонной линии — эффективное поле  $\mathfrak{A}_\mu(q)$ , равное сумме исходного внешнего поля  $A_\mu^{(e)}(q)$  и радиационной поправки к нему  $\delta A_\mu^{(e)}(q)$ , обусловленной поляризацией вакуума,  $\mathfrak{A}_\mu(q) = A_\mu^{(e)}(q) + \delta A_\mu^{(e)}(q)$ ,  $q = p_2 - p_1$ .

Этой диаграмме соответствует, очевидно, матричный элемент

$$M = e\bar{u}_2 \Gamma_\mu(p_1, p_2) \mathfrak{A}_\mu(q) u_1 = M_0 + \delta_{\Gamma} M + \delta_{\Pi} M,$$

$$M_0 = eu_2 \hat{A}^{(e)} u_1, \quad \delta_{\Gamma} M = eA_\mu^{(e)} \bar{u}_2 \Lambda_\mu(p_1, p_2) u_1, \quad \delta_{\Pi} M = e\bar{u}_2 \delta \hat{A}^{(e)} u_1.$$

В предыдущем параграфе мы вычислили  $\Lambda_\mu(p_1, p_2)$  и  $\delta A_\mu^{(e)}(q)$  с точностью до членов, пропорциональных  $\alpha$ . Из (5.1.36) и (5.1.21) следует, что при малых  $q_\mu$  (малые  $q_\mu$  соответствуют медленно изменяющемуся полю) только величина  $\Lambda_R^{(3)}(p_1, p_2)$  содержит слагаемые, линейные относительно  $q$ , величина же  $\delta A_\mu^{(e)}(q)$  (так же как и  $\Pi_R^{(3)}(q)$ ) пропорциональна  $q^2$ . Поэтому только величина  $\delta_{\Gamma} M$  содержит интересующие нас члены, линейные относительно магнитного поля, или, точнее говоря, относительно тензора электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}(q) = i(q_\mu A_\nu^{(e)}(q) - q_\nu A_\mu^{(e)}(q))$ . Сумма этих членов (с точностью до слагаемых порядка  $\alpha$ ) равна согласно (5.1.36)

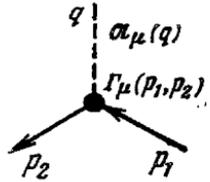


Рис. 5.1.

$$\delta_{\Gamma} M = -\frac{ie}{4\pi} \bar{u}_2 \frac{\alpha}{2m} (\hat{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}) A_\mu^{(e)}(q) u_1 = -\frac{i\alpha}{8\pi m} e\bar{u}_2 \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}(q) u_1$$

(мы пользуемся здесь вместо  $e_R$  и  $m_R$  обозначениями  $e$  и  $m$ ).

Вспоминая, что матрицы спина электрона  $\sum_i$  связаны с матрицами  $\gamma_\mu$  соотношениями  $\sum_1 = \frac{1}{i} \gamma_2 \gamma_3$ ,  $\sum_2 = \frac{1}{i} \gamma_3 \gamma_1$ ,  $\sum_3 = \frac{1}{i} \gamma_1 \gamma_2$ , можно переписать  $\delta_{\Gamma} M$  в виде

$$\delta_{\Gamma} M = -\delta^{(1)} \mu \bar{u}_2 (\Sigma H - \alpha E) u_1, \quad (5.2.7)$$

где [6]

$$\delta^{(1)} \mu = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \quad (5.2.8)$$

и  $\mu_0$  — магнетон Бора,  $\mu_0 = e\hbar/2mc$ . Это выражение соответствует, очевидно, взаимодействию с электромагнитным полем  $F_{\mu\nu}$  частицы, обладающей магнитным моментом  $\delta^{(1)} \mu$ . Мы видим, таким образом, что кроме «нормального»  $\mu_0$  (т. е. следующего из уравнений Дирака) магнитного момента электрон обладает еще дополнительным магнитным моментом  $\delta^{(1)} \mu$ . Этот момент называется аномальным магнитным моментом.

Формула (5.2.8) определяет аномальный магнитный момент электрона с точностью до членов порядка  $\alpha^2$ . Но можно найти и следующие радиационные поправки к магнитному моменту электрона. Для этого нужно, очевидно, выделить в  $\Lambda_{R\mu}(p_1, p_2)$  члены, про-

порциональные  $q$ . Они будут иметь следующий вид:  $e\Lambda_{R\mu}(p_1, p_2) \sim -\frac{i}{2} \mu' (\hat{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu\hat{q})$ , где  $\mu'$  и представляет собой аномальный магнитный момент электрона.

Обратим внимание на то обстоятельство, что аномальный магнитный момент непосредственно связан с вершинной функцией. Поэтому при вычислении поправок к магнитному моменту достаточно рассматривать только вершинные диаграммы. Например, для вычисления магнитного момента электрона с точностью до членов порядка  $\alpha^3$  нужно рассмотреть диаграммы рис. 5.2.

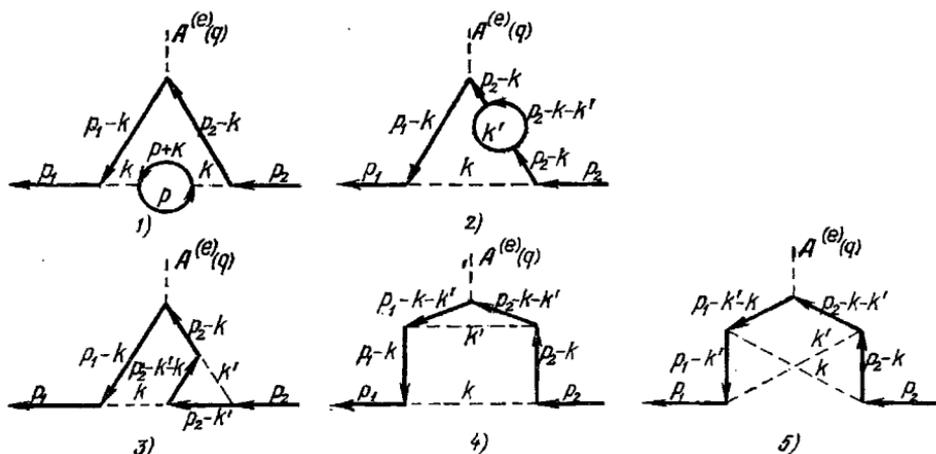


Рис. 5.2.

Мы приведем здесь только результат вычислений  $\delta^{(2)}\mu$  [7]:

$$\delta^{(2)}\mu = \frac{\alpha^2}{\pi^2} \mu_0 \left( \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{3}{4} \zeta(3) - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 \right) \approx -0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \mu_0. \quad (5.2.9)$$

Магнитный момент электрона с точностью до членов порядка  $\alpha^4$  равен

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} + 1,49 \frac{\alpha^3}{\pi^3} \right). \quad (5.2.10)$$

Перейдем теперь к рассмотрению аномального магнитного момента мюона. Первая поправка  $\delta^{(1)}\mu$  к магнитному моменту мюона будет, очевидно, иметь тот же вид, что и соответствующая поправка к магнитному моменту электрона:

$$\delta^{(1)}\mu = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0,$$

где  $\mu_0 = e\hbar/2m_\mu c$  — нормальный магнитный момент мюона ( $m_\mu$  — масса мюона). Однако вторая поправка будет существенно отличаться от второй поправки в случае электрона. Это отличие связано с тем, что в выражение для амплитуды, соответствующей диаграмме рис. 5.2, 1, входит поляризационный оператор  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ ,

который в случае электрона определяется виртуальными электронно-позитронными парами, а в случае мюона — как виртуальными  $\mu_+\mu_-$ -парами, так и виртуальными электронно-позитронными парами, причем вклад последних благодаря меньшей массе электрона превосходит вклад от  $\mu_+\mu_-$ -пар. Магнитный момент мюона с учетом первых двух поправок имеет вид [8]

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0,766 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right). \quad (5.2.11)$$

Заметим, что точное измерение аномального магнитного момента мюона может иметь большое значение для проверки справедливости квантовой электродинамики в области больших импульсов. Действительно, в то время как при вычислении поправок к магнитному моменту электрона в интегралах по 4-импульсам  $p$  виртуальных частиц основную роль играет область  $p^2 \sim m^2$ , в соответствующих поправках к магнитному моменту мюона основную роль играет область  $p^2 \sim m_\mu^2$ . Так как масса мюона близка к массе  $\pi$ -мезона, являющегося сильновзаимодействующей частицей, то в этой области импульсов должны играть важную роль сильные взаимодействия.

### § 5.3. Радиационное смещение атомных уровней

**5.3.1. Уравнение Дирака с массовым оператором.** Перейдем теперь к учету высших приближений теории возмущений в задаче о стационарных состояниях атомов. Этот учет позволяет объяснить смещение уровней изолированного атома (по сравнению с системой уровней, даваемой уравнениями Дирака) и наличие у уровней так называемой естественной ширины.

Обратимся для этого к уравнению (3.5.25) для электронной функции Грина. Опуская в правой его части  $\delta$ -функцию, мы получим уравнение

$$\left\{ \gamma_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie\mathcal{A}_\mu(x) \right) + m \right\} \psi(x) + i \int \Sigma(x, x') \psi(x') d^4x' = 0 \quad (5.3.1)$$

для волновой функции электрона  $\psi(x)$  во внешнем поле  $A_\mu^{(e)}(x)$  с учетом эффектов высших приближений; здесь  $\mathcal{A}_\mu(x) \equiv \langle A_\mu(x) \rangle$  — сумма исходного внешнего поля  $A_\mu^{(e)}(x)$  и радиационной поправки к нему  $\delta A_\mu^{(e)}(x)$  и  $\Sigma(x, x')$  — массовый оператор. Мы будем далее предполагать, что  $\Sigma(x, x')$  определяется формулой

$$\Sigma(x, x') = e^2 D_c(x - x') \gamma_\mu S_c^{(e)}(x, x') \gamma_\mu, \quad (5.3.2)$$

где  $S_c^{(e)}(x, x')$  — функция Грина уравнения Дирака для электрона в поле  $\mathcal{A}_\mu(x)$ . Согласно (4.2.36) она удовлетворяет интегральному уравнению

$$S_c^{(e)}(x, x') = S_c(x - x') - \int S_c(x - x'') e\mathcal{A}(x'') S_c^{(e)}(x'', x') d^4x''. \quad (5.3.3)$$

При подстановке этого выражения в (5.3.2) можно, очевидно, после перенормировки массы не учитывать первого слагаемого. Заменяя далее в (5.3.3)  $\mathcal{A}_\nu(x'')$  на  $A_\nu^{(e)}(x)$  и  $S_c^{(e)}(x'', x')$  на  $S_c(x'' - x')$ , получим следующее выражение для массового оператора, справедливое с точностью до членов, пропорциональных  $e^3$ :

$$\Sigma(x, x') = -e^3 \int D_c(x - x'') \gamma_\mu S_c(x' - x'') \gamma_\nu A_\nu^{(e)}(x'') S_c(x'' - x') \gamma_\mu d^4 x''. \quad (5.3.4)$$

В импульсном представлении массовый оператор определяется формулой

$$\Sigma(p_1, p_2) = e \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) A_\mu^{(e)}(q), \quad q = p_2 - p_1.$$

Прибавив к  $\Sigma(p_1, p_2)$  произведение  $\gamma_\mu$  на  $e \delta A_\mu^{(e)}(q)$ , мы получим величину

$$\delta U(q) = e [\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) A_\mu^{(e)}(q) + \gamma_\mu \delta A_\mu^{(e)}(q)], \quad (5.3.5)$$

которая описывает взаимодействие электрона с внешним полем с точностью до членов порядка  $e^3$ . Действительно, взаимодействие электрона с полем описывается в уравнениях Дирака величиной

$U(x) = e \gamma_\mu A_\mu^{(e)}(x)$ ; уравнение же (5.3.5) означает, что для учета радиационных поправок к величине  $U(x)$  нужно добавить  $\delta U(x)$ . Графически это очевидно, так как величине  $\delta U(q)$  соответствует совокупность двух диаграмм (рис. 5.3), которыми исчерпываются возможные в рассматриваемом случае эффекты взаимодействия третьего порядка.

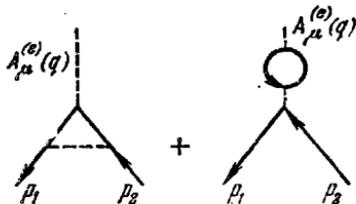


Рис. 5.3.

Используя выражения (5.1.36) и (5.1.21) для  $\Lambda_{R\mu}^3(p_1, p_2)$  и  $\delta A_\mu^{(e)}(q)$ , получим

$$\delta U(q) = F_\mu(q) A_\mu^{(e)}(q), \quad (5.3.6)$$

где

$$F_\mu(q) = -\frac{e^3}{(2\pi)^2} \left\{ \gamma_\mu \left[ \left( \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} - 1 \right) \left( \ln \frac{m}{\lambda} - 1 \right) - \frac{\theta}{2} \text{tg } \theta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{\text{tg } 2\theta} \int_0^\theta \xi \text{tg } \xi d\xi \right] + \frac{i}{8m} (\hat{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}) \frac{2\theta}{\sin 2\theta} - \right. \\ \left. - \gamma_\nu \frac{1}{q^2} (q_\mu q_\nu - q^2 \delta_{\mu\nu}) \left[ \left( 1 + \frac{1}{3} \text{ctg}^2 \theta \right) (1 - \theta \text{ctg } \theta) - \frac{1}{9} \right] \right\}.$$

Первые два члена в разложении  $F_\mu(q)$  по степеням  $q_\nu$  имеют вид

$$F_\mu(q) = -\frac{e^3}{(4\pi)^2} \left[ \frac{4}{3m_R} q^2 \left( \ln \frac{m_R}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \gamma_\mu + \frac{i}{2m_R} (\hat{q}\gamma_\nu - \gamma_\nu \hat{q}) \right].$$

Заменив здесь  $q_\mu$  на  $\frac{\gamma}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ , мы перейдем к координатному представлению функции  $\delta U(x)$ :

$$\begin{aligned} \delta U(x) &= \\ &= \frac{e^3}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{4}{3m_R^2} \frac{1}{i} \left( \ln \frac{m_R}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \gamma_\mu \square A_\mu^{(e)}(x) - \frac{1}{2im_R} \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}(x) \right\} = \\ &= \frac{-e^3}{(4\pi)^2 m_R} (\Sigma H - i\alpha E) + \frac{e^3}{(4\pi)^2 3m_R^2} \left( \ln \frac{m_R}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) (\beta \square \varphi - \alpha \square A), \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

где  $E(x)$  и  $H(x)$  — электрическое и магнитное поля,  $\varphi(x)$  и  $A(x)$  — соответствующие им скалярный и векторный потенциалы и  $\alpha$  и  $\beta$  — матрицы Дирака.

**5.3.2. Радиационное смещение и естественная ширина атомных уровней.** Подставляя в (5.3.2) выражение (4.2.35) для  $S_2^{(e)}(x, x')$ , в котором под  $\psi_n^0$  мы будем понимать «стационарные» волновые функции электрона, удовлетворяющие уравнению Дирака без массового оператора, но с радиационной поправкой к потенциалу внешнего поля:

$$\left\{ \gamma_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie\mathcal{A}_\mu(x) \right) + m \right\} \psi_n^0(x) = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \Sigma(x, x') &= \frac{-e^2}{(2\pi)^5} \int \frac{d^4k}{k^2 - i0} \gamma_\mu \sum_n e^{ikr} \psi_n^0(r) \bar{\psi}_n^0(r') e^{-ikr'} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega - k_0)(t-t')}}{E_n^0(1-i0) - \omega} d\omega \gamma_\mu. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Полагая далее в (5.3.1)  $\psi(x) = \psi_E e^{-iEt}$ , получим следующее уравнение для определения возможных значений  $E$ :

$$H^{(0)}\psi(r) + i \int \gamma_4 \Sigma_E(r, r') \psi(r') d^3x' = E\psi(r), \quad (5.3.9)$$

где  $H^{(0)}$  — «невозмущенный» гамильтониан, соответствующий уравнениям Дирака без массового оператора (но с радиационной поправкой к внешнему полю):

$$H^{(0)}\psi_n^0(r) = E_n^0\psi_n^0(r), \quad (5.3.9')$$

и  $\Sigma_E(r, r')$  — компонента Фурье массового оператора  $\Sigma(x, x')$  по времени:

$$\Sigma_E(r, r') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iE(t-t')} \Sigma(x, x') dt \quad (5.3.10)$$

(внешнее поле предполагается не зависящим от времени, поэтому в  $\Sigma(x, x')$  времена  $t$  и  $t'$  входят только в виде разности  $t - t'$ ).

Сокращенно уравнение (5.3.9) можно записать в виде

$$H_E \psi(r) = E \psi(r), \quad H_E = H^{(0)} + i\gamma_4 \Sigma_E.$$

Так как оператор  $i\gamma_4 \Sigma_E$  пропорционален малому параметру  $\alpha$ , то решение этого уравнения можно искать по методу обычной теории возмущений. Ограничиваясь первым ее приближением, получим для смещения  $n$ -го уровня выражение

$$\langle n | i\Sigma_E | n \rangle \equiv i \int \psi_n^0(r) \Sigma_E \psi_n^0(r) dr = i \int \bar{\psi}_n^0(r) \Sigma_E(r, r') \psi_n^0(r') d^3x d^3x'.$$

Используя формулы (5.3.2) и (5.3.10), можно представить  $\langle n | i\Sigma_E | n \rangle$  в виде [9]

$$\begin{aligned} \langle n | i\Sigma_E | n \rangle &= \frac{e^2}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4k}{k^2 - i0} \sum_{n'} \frac{\langle n | \gamma_\mu e^{ikr} | n' \rangle \langle n' | \gamma_\mu e^{-ikr} | n \rangle}{(1-i0) E_{n'}^0 - E_n^0 + k_0} = \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4 i} \sum_{n'} \int d^3k Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|) \langle n | \gamma_\mu e^{ikr} | n' \rangle \langle n' | \gamma_\mu e^{-ikr} | n \rangle, \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

где

$$\begin{aligned} Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{[(1-i0) E_{n'}^0 - E_n^0 + k_0] (k^2 - k_0^2 - i0)}, \\ \langle n | \gamma_\mu e^{ikr} | n' \rangle &= \int \bar{\psi}_n^0(r) \gamma_\mu e^{ikr} \psi_{n'}^0(r) d^3x. \end{aligned}$$

Величина  $Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|)$  может быть непосредственно вычислена:

$$Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|) = \frac{\pi i}{|\mathbf{k}|} \frac{1}{E_n^0 - E_{n'}^0 (1-i0) - |\mathbf{k}| \frac{E_n^0}{|E_n^0|}}.$$

Замечая, что  $\frac{1}{x-i0} = \pi i \delta(x) + P \frac{1}{x}$ , можно переписать  $Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|)$  в виде

$$\begin{aligned} Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|) &= \\ &= \frac{\pi^2}{|\mathbf{k}|} \text{Sgn } E_n^0 \delta\left(E_n^0 - E_{n'}^0 - |\mathbf{k}| \frac{E_n^0}{|E_n^0|}\right) + \frac{\pi i}{|\mathbf{k}|} P \frac{1}{E_n^0 - E_{n'}^0 - |\mathbf{k}| \frac{E_n^0}{|E_n^0|}}. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Подстановка этого выражения в (5.3.11) показывает, что величина  $\langle n | i\Sigma_E | n \rangle$  является комплексной,

$$\langle n | i\Sigma_E | n \rangle = \delta E_n - \frac{i}{2} \Gamma_n,$$

где

$$\delta E_n = \frac{e^2}{16\pi^3} P \int \frac{d^3k}{|k|} \sum_{n'} \frac{\langle n | \gamma_\mu e^{ikr} | n' \rangle \langle n' | \gamma_\mu e^{-ikr} | n \rangle}{E_n^0 - E_{n'}^0 - \frac{E_{n'}^0}{|E_{n'}^0|} |k|},$$

$$\Gamma_n = \frac{e^2}{8\pi^2} \int \frac{d^3k}{|k|} \sum_{n'} \text{Sgn } E_{n'}^0 \langle n | \gamma_\mu e^{ikr} | n' \rangle \times$$

$$\times \langle n' | \gamma_\mu e^{-ikr} | n \rangle \delta \left( E_n^0 - E_{n'}^0 - |k| \frac{E_{n'}^0}{|E_{n'}^0|} \right).$$
(5.3.13)

Вещественная часть  $\langle n | i\Sigma_E | n \rangle$  определяет собственно радиационное смещение уровня, а мнимая часть — естественную его ширину, обусловленную взаимодействием электрона с электромагнитным полем ( $\Gamma_n$  представляет собой суммарную вероятность перехода электрона из исходного состояния, связанную с излучением фотона).

**5.3.3. Радиационное смещение уровней атома водорода.** Общие формулы (5.3.13) наглядно показывают, что радиационное смещение уровней обусловлено взаимодействием электрона с виртуальными фотонами, однако конкретное вычисление величины радиационного смещения по этим формулам очень сложно. Более удобным является следующий прием. Разобьем область интегрирования в (5.3.13) на две части, в первой из которых энергия фотона меньше некоторого значения  $K$ , а во второй — больше этого значения, и выберем величину  $K$  таким образом, чтобы она была значительно больше всех разностей атомных уровней  $K \gg |E_n^0 - E_{n'}^0|$ , и одновременно значительно меньше  $m$ ,  $K \ll m$ . Тогда в области  $|k| > K$ , очевидно, не имеет смысла пользоваться точным выражением (4.2.39) для функции  $S_c^{(e)}(x, x')$ , напротив, при  $|k| > K$  можно пренебречь влиянием связи электронов в атоме, т. е. можно заменить под знаком интеграла в (5.3.3)  $S_c^{(e)}(x'', x')$  на  $S_c(x'' - x')$ . Иными словами, при  $|k| > K$  можно пользоваться для  $\Sigma$  выражением (5.3.4) и, следовательно, можно находить вклад, вносимый в радиационное смещение «коротковолновыми» фотонами ( $|k| > K$ ), рассматривая величину  $\delta U(x)$ , определяемую формулой (5.3.7), как энергии возмущения.

В области  $|k| < K$  необходимо, вообще говоря, пользоваться точной формулой (5.3.13). Она значительно упрощается при  $|k| < K \ll m$ , когда законно нерелятивистское приближение. Мы будем далее пользоваться этим приближением для определения вклада в радиационное смещение, вносимого «длинноволновыми» фотонами ( $|k| \ll m$ ) [10], и покажем, что границы областей «коротковолновых» и «длинноволновых» фотонов входят в радиационное смещение под знаком логарифма (с одинаковым коэффициентом перед логарифмом). Это значит, что области «коротковолновых» и «длинноволновых» фотонов «сшиваются», т. е. приме-

жуточная область  $|\mathbf{k}| \sim K$  не вносит существенного вклада в радиационное смещение.

Перейдем к определению вкладов, вносимых в радиационное смещение атомных уровней «коротковолновыми» и «длинноволновыми» фотонами.

Рассматривая  $\delta U(x)$  (см. формулу (5.3.7)) как возмущение и пренебрегая магнитным взаимодействием между электронами, получим следующее выражение для вклада в радиационное смещение  $n$ -го уровня атома, вносимого «коротковолновыми» фотонами:

$$\delta E_n' = \alpha \frac{e}{4\pi} \left[ \frac{4}{3m^2} \left( \ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) (\psi_n^0, \Delta \varphi \psi_n^0) + \frac{i}{m} (\psi_n^0, \gamma_4 \alpha E \psi_n^0) \right], \quad (5.3.14)$$

где  $\psi_n^0(\mathbf{r})$  — нерелятивистские волновые функции атома, вычисленные без учета радиационной поправки к полю, создаваемому ядром и атомными электронами,  $\varphi = -iA_4^{(e)}$  — потенциал внешнего поля и  $(\psi_n^0, L\psi_n^0) \equiv \int \psi_n^0 * L\psi_n^0 d^3x$ . Это выражение содержит «массу фотона»  $\lambda$ , что и указывает на то, что формула (5.3.14) не учитывает вклада в радиационное смещение, вносимого «длинноволновыми» фотонами. Последний в нерелятивистском приближении определяется формулой

$$\Delta E_n = \sum_{n', k, e} \frac{|\langle n | V | n' \rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0 - \omega},$$

где  $\langle n | V | n' \rangle$  — матричный элемент энергии взаимодействия электрона с фотоном:

$$\langle n | V | n' \rangle = \frac{-e}{\sqrt{2\omega}} \langle n | \mathbf{e} \mathbf{v} | n' \rangle$$

( $\mathbf{v} = \frac{1}{im} \nabla$  — оператор скорости электрона и  $\mathbf{e}$  — вектор поляризации фотона с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и частотой  $\omega$ ). Замечая, что

$$\sum_e |\langle n | \mathbf{e} \mathbf{v} | n' \rangle|^2 = \frac{2}{3} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2,$$

и переходя от суммирования по  $\mathbf{k}$  к интегрированию, представим  $\Delta E_n$  в виде

$$\Delta E_n = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^K d\omega \omega \sum_{n'} \frac{|\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0 - \omega}, \quad (5.3.15)$$

где верхним пределом мы считаем величину  $K$  (учитывая логарифмическую зависимость результата от  $K$ ).

В этом выражении нужно произвести теперь перенормировку массы. Для свободного электрона  $\Delta E$  равно его электромагнитной массе  $\delta m$  (точнее, той части  $\delta m$ , которая обусловлена взаимодействием электрона с фотонами, энергия которых меньше  $K$ ). Но мы

уже включили  $\delta m$  в массу электрона  $m$  и под энергией уровня  $n$  понимаем полную энергию за вычетом  $m$ . Поэтому мы должны вычесть из (5.3.15) соответствующее выражение для свободного электрона. Так как для свободного электрона отличны от нуля только диагональные элементы скорости, то в этом случае формула (5.3.15) приобретает вид

$$\Delta E = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^K d\omega \omega \cdot \frac{1}{\omega} \langle n | \mathbf{v}^2 | n \rangle.$$

Отнимая это выражение от (5.3.15) и замечая, что  $\sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 = \langle n | \mathbf{v}^2 | n \rangle$ , получим следующую формулу для радиационного смещения уровня  $E_n$ , обусловленного взаимодействием электрона с фотонами, энергия которых не превосходит  $K$ :

$$\delta E_n^r = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^K d\omega \sum_{n'} \frac{|\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0 - \omega} (E_n^0 - E_{n'}^0). \quad (5.3.16)$$

Выполнив интегрирование по  $\omega$  с учетом  $K \gg |E_n^0 - E_{n'}^0|$ , получим

$$\delta E_n^r = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 (E_{n'}^0 - E_n^0) \ln \frac{K}{|E_{n'}^0 - E_n^0|}. \quad (5.3.17)$$

Вводя далее величину  $\varepsilon_0$ , определяемую формулой

$$\ln \varepsilon_0 = \frac{\sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 (E_{n'}^0 - E_n^0) \ln |E_{n'}^0 - E_n^0|}{\sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 (E_{n'}^0 - E_n^0)}, \quad (5.3.18)$$

перепишем  $\delta E_n^r$  в виде

$$\delta E_n^r = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 (E_{n'}^0 - E_n^0) \ln \frac{K}{\varepsilon_0}. \quad (5.3.19)$$

Входящая сюда сумма равна

$$\begin{aligned} \sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 (E_{n'}^0 - E_n^0) &= \\ &= -\frac{e}{m^2} \int \psi_n^*(r) \nabla \Phi(r) \nabla \psi_n^0(r) d^3x = \frac{e}{2m^2} \int \Delta \Phi(r) |\psi_n^0(r)|^2 d^3x. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно

$$\delta E_n^r = \frac{\alpha e}{\pi m^2} (\psi_n^0, \Delta \Phi \psi_n^0) \ln \frac{K}{\varepsilon_0}. \quad (5.3.20)$$

Мы не делали пока никаких предположений о величине  $K$ . Выберем теперь  $K$  таким образом, чтобы минимальная энергия фотонов, взаимодействие с которыми еще учитывается формулой

(5.3.14), была равна  $K$ . При этом, согласно (4.4.21),  $\ln \lambda = \ln 2K - 5/6$  и сумма  $\delta E'_n$  и  $\delta E''_n$ , определяющая общее радиационное смещение уровня  $E_n$ , не будет содержать ни  $\lambda$ , ни  $K$  [10, 11]:

$$\delta E_n = \delta E'_n + \delta E''_n = \frac{\alpha e}{4\pi} \left\{ \frac{4}{3m^2} \left( \ln \frac{m}{2\varepsilon_0} - \frac{3}{8} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right) (\psi_n^0, \Delta \varphi \psi_n^0) + \frac{i}{m} (\psi_n^0, \beta \alpha E \psi_n^0) \right\}. \quad (5.3.21)$$

В случае водородоподобного атома  $e\varphi = -Ze^2/r$ ,

$$\begin{aligned} (\psi_n^0, e \Delta \varphi \psi_n^0) &= 4\pi e^2 Z |\psi_n^0(0)|^2, \\ |\psi_n^0(0)|^2 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{Z}{na} \right)^3, \quad l=0, \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

$$\frac{e\hbar}{mc} (\psi_n^0, i\beta \alpha E \psi_n^0) = \begin{cases} -4\alpha^2 \frac{Z^4}{n^3} \frac{Ry}{(l+1)(2l+1)}, & j=l+\frac{1}{2}, \\ 4\alpha^2 \frac{Z^4}{n^3} \frac{Ry}{l(2l+1)}, & j=l-\frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.3.23)$$

( $n$  и  $l$  — главное и орбитальное квантовые числа и  $a = \hbar^2/me^2$ ,  $Ry = 1/2\alpha^2 mc^2$ ). Поэтому радиационное смещение уровней водородоподобного атома в  $s$ -состояниях определяется формулой [10]

$$\delta E(n, 0) = \frac{8Z^4 \alpha^3}{n^3 3\pi} Ry \left( \ln \frac{m}{2\varepsilon_0} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right), \quad (5.3.24)$$

а в состояниях с  $l \neq 0$  — формулой

$$\delta E(n, l) = \frac{8Z^4 \alpha^3}{n^3 3\pi} Ry \left( \ln \frac{Ry}{\varepsilon_0} + \frac{3}{8} \frac{C_{lj}}{2l+1} \right), \quad (5.3.25)$$

где  $C_{lj} = 1/(l+1)$  при  $j = l + 1/2$  и  $C_{lj} = -1/l$  при  $j = l - 1/2$ .

Мы видим, что радиационное смещение уровней водородоподобного атома составляет по порядку величины  $Z^2 \alpha^3 E_0$ , где  $E_0$  — энергия основного состояния или  $\alpha \Delta E$ , где  $\Delta E \sim Z^2 \alpha^2 E_0$  — расщепление уровня, соответствующее тонкой структуре.

Для уровней водорода  $2s$  и  $2p$  радиационные смещения (в МГц) составляют

$$\Delta\nu(2s_{1/2}) = 1034, \quad \Delta\nu(2p_{1/2}) = -17, \quad \Delta\nu(2p_{3/2}) = 8.$$

Как известно, несмещенные состояния  $2s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$  обладают одинаковой энергией, радиационные же смещения этих уровней различны, и уровень  $2s_{1/2}$  оказывается лежащим выше уровня  $2p_{1/2}$  примерно на 1051 МГц.

Приведенные формулы определяют радиационное смещение уровня порядка  $\alpha^3 E_0$ . Можно показать, что в следующем приближении теории возмущений мы получим смещение уровня водородоподобного атома, равное [12]

$$\delta E_n^{(2)} = \frac{Z^5 \alpha^4}{n^3} Ry \left( 1 + \frac{11}{128} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5}{192} \right). \quad (5.3.26)$$

При  $n=2$  и  $Z=1$  это дает 7 МГц. Разность энергий уровней  $2s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$  для водорода получается с учетом этой поправки равной 1057,19 МГц, тогда как экспериментальное значение этой величины равно  $1057,77 \pm 0,1$  МГц [13].

**5.3.4. Рассеяние фотона вблизи резонанса.** В п. 4.2.7 при рассмотрении рассеяния фотона связанным электроном мы видели, что в случае резонанса теория первого приближения становится неприменимой. Обычный метод учета радиационных поправок здесь также неприменим, так как он базируется на разложении матрицы рассеяния в ряд по степеням  $\alpha$ , тогда как в рассматриваемом случае, как нетрудно видеть, разложение в ряд производится по степеням величины  $\alpha/(E_n^0 - E_n^0 - \omega)$ , которая обращается при резонансе в бесконечность. Поэтому мы должны учесть радиационные поправки на более ранней стадии вычислений, которой в упрощенном выводе формулы (4.2.44) соответствует введение комплексных частот.

Из вывода формулы (4.2.43) для сечения рассеяния фотона легко заключить, что резонансный знаменатель в матричном элементе связан со структурой функции  $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$ , содержащей, согласно (4.2.44), в знаменателе  $E_n^0 + \omega$ . Поэтому следует ожидать, в чем мы и убедимся, что замена функции  $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$  точной функцией Грина электрона  $G^{(e)}(x_1, x_2)$ , удовлетворяющей уравнению

$$G^{(e)}(x, x') = S_c^{(e)}(x, x') + \int S_c^{(e)}(x, x'') \Sigma(x'', x''') G^{(e)}(x''', x') d^4x'' d^4x''', \quad (5.3.27)$$

должна приводить к конечным результатам.

Разложим функцию  $G^{(e)}(x, x')$  в ряд по полной системе функций  $\psi_n^0(\mathbf{r})$ , представляющих собой пространственные части волновых функций электрона в поле  $\mathfrak{A}_\mu(x)$  (см. (5.3.9')). Коэффициенты разложения, являющиеся функциями времени, мы разложим в интеграл Фурье. Такое комбинированное разложение  $G^{(e)}(x_1, x_2)$  имеет вид

$$G^{(e)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \sum_n \int d\omega e^{i\omega(t_1 - t_2)} f_{nn}(\omega) \psi_n^0(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}_2) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \neq n'} \int d\omega e^{i\omega(t_1 - t_2)} f_{nn'}(\omega) \psi_n^0(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}_{n'}^0(\mathbf{r}_2). \quad (5.3.28)$$

Установим уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты разложения  $f_{nn'}(\omega)$ . Подставим для этого разложение (5.3.28) в интегральное уравнение (5.3.27). Замечая, что

$$\begin{aligned} \int \psi_n^0(\mathbf{r}_1) \beta S_c^{(e)}(x_1, x_2) d^3x_1 &= \int \psi_n^{0*}(\mathbf{r}_1) S_c^{(e)}(x_1, x_2) d^3x_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t_1 - t_2)}}{E_n^0(1 - i0) + \omega} d\omega \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}_2), \end{aligned}$$

получим следующую систему уравнений для  $f_{nn'}(\omega)$ :

$$f_{nn}(\omega) = \frac{1}{E_n^0(1-i0) + \omega} \times$$

$$\times \left[ 1 - H_{nn}(-\omega) f_{nn}(\omega) - \sum_{n'' \neq n} H_{nn''}(-\omega) f_{n''n}(\omega) \right],$$

$$f_{nn'}(\omega) = \frac{1}{E_n^0(1-i0) + \omega} \times$$

$$\times \left[ -H_{nn'}(-\omega) f_{n'n'}(\omega) - \sum_{n'' \neq n'} H_{nn''}(-\omega) f_{n''n'}(\omega) \right],$$
(5.3.29)

где

$$H_{nn'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{nn'}(t) e^{i\omega t} dt,$$

$$H_{nn'}(t) = i \int \bar{\Psi}_n^0(\mathbf{r}_3) \Sigma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; t) \Psi_{n'}^0(\mathbf{r}_4) d^3x_3 d^3x_4.$$

Вводя обозначения

$$\frac{1}{f_{nn}(\omega)} = Q_{nn}, \quad \frac{f_{nn'}(\omega)}{f_{nn}(\omega)} = R_{nn'}, \quad n \neq n',$$

перепишем уравнения (5.3.29) в виде

$$R_{nn'} = \frac{H_{nn'}(-\omega)}{E_n^0 + \omega} + \sum_{n'' \neq n'} \frac{H_{nn''}(-\omega) R_{n''n'}}{E_n^0 + \omega},$$

$$Q_{nn} = E_n^0 + \omega + H_{nn}(-\omega) + \sum_{n'' \neq n} H_{nn''}(-\omega) R_{n''n}.$$
(5.3.30)

Считая величину  $H_{nn'}(-\omega)$  малой и пользуясь методом последовательных приближений, получим

$$R_{nn'} = \frac{-1}{E_n^0 + \omega} \left[ H_{nn'}(-\omega) + \sum_{n'' \neq n'} \frac{H_{nn''}(-\omega) H_{n''n'}(-\omega)}{-\omega - E_{n''}^0} + \dots \right],$$

$$Q_{nn} = \omega + E_n^0 + H_{nn}(-\omega) + \sum_{n'' \neq n} \frac{H_{nn''}(-\omega) H_{n''n}(-\omega)}{-\omega - E_{n''}^0} + \dots$$
(5.3.31)

В первом приближении

$$Q_{nn} \approx \omega + E_n^0 + H_{nn}(-\omega), \quad R_{nn'} \approx -\frac{H_{nn'}(-\omega)}{\omega + E_n^0 + H_{nn}(-\omega)},$$
(5.3.32)

откуда

$$f_{nn} = \frac{1}{\omega + E_n^0 + H_{nn}(-\omega)},$$

$$f_{nn'} = \frac{-H_{nn'}(-\omega)}{[\omega + E_n^0 + H_{nn}(-\omega)][\omega + E_{n'}^0 + H_{n'n'}(-\omega)]}.$$
(5.3.33)

Мы видим, что  $|f_{nn'}| \ll |f_{nn}|$ ; поэтому, в дальнейшем можно пренебречь недиагональными элементами  $f_{nn'}$ .

Найдем теперь  $G^{(e)}(x_1, x_2)$ . Подставляя (5.3.33) в (5.3.27) и пренебрегая величинами  $f_{nn'}$ , получим

$$G^{(e)}(x_1, x_2) \approx \frac{1}{2\pi i} \sum_n \Psi_n^0(r_1) \bar{\Psi}_n^0(r_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t_1 - t_2)}}{E_n^0 + \omega + H_{nn}(-\omega)} d\omega. \quad (5.3.34)$$

Это выражение отличается от выражения (4.2.35) для функции  $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$  знаменателями дробей, стоящих под знаком интеграла. Величина  $H_{nn}(-\omega)$ , входящая в  $G^{(e)}(x_1, x_2)$ , совпадает, очевидно, с величиной  $\langle n | i\Sigma_\omega | n \rangle$ , определяющей радиационное смещение и ширину уровня (см. (5.3.13)):

$$H_{nn}(-\omega) = \delta E_n - \frac{i}{2} \Gamma_n.$$

Так как эта величина комплексная, то знаменатели дробей в (5.3.34) не могут обратиться в нуль. Подставив выражение (5.3.34) вместо  $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$  в формулу (4.2.37), мы получим сечение рассеяния фотона, имеющее вид (4.2.35).

## § 5.4. Радиационные поправки к сечениям рассеяния электрона во внешнем поле и рассеяния электрона электроном

### 5.4.1. Дифференциальное сечение рассеяния электрона в кулоновском поле ядра с учетом радиационных поправок порядка $\alpha$ .

Перейдем к определению радиационных поправок к сечениям различных процессов рассеяния электрона. Начнем с рассеяния электрона в кулоновском поле ядра [6].

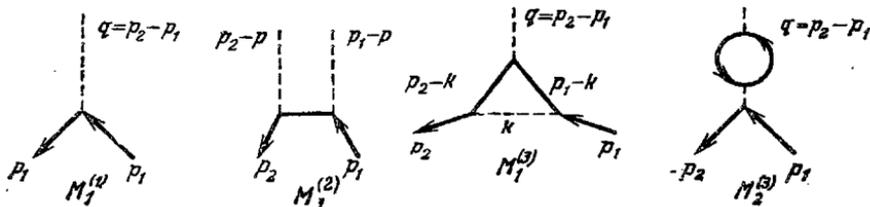


Рис. 5.4.

Диаграммы, изображающие процесс рассеяния во внешнем поле в первом приближении и радиационные поправки к нему в третьем приближении теории возмущений, представлены на рис. 5.4.

В случае кулоновского поля ядра с зарядом  $Ze$  величина  $M_1^{(1)}$  равна

$$M_1^{(1)} = \frac{Ze^2}{q^2} 2\pi i \left( \frac{\not{n}_2}{\sqrt{2e_2}} \gamma_4 \frac{\not{u}_1}{\sqrt{2e_1}} \right) \delta(e_1 - e_2). \quad (5.4.1)$$

Используя формулу (5.3.5) для величины  $\delta U(q)$ , описывающей взаимодействие электрона с внешним полем, можно представить  $M_1^{(2)} + M_2^{(2)}$  в виде

$$M_1^{(2)} + M_2^{(2)} = -i \frac{e^2 Z e}{8\pi q^2} \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \gamma_4 \left\{ 4 \left[ (1 - 2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi) \left( 1 + \ln \frac{\lambda}{m} \right) + \frac{\varphi}{2} \operatorname{th} \varphi + 2 \operatorname{cth} 2\varphi \int_0^\varphi u \operatorname{th} u du \right] + 4 (1 - \varphi \operatorname{cth} \varphi) \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \varphi \right) - \frac{4}{9} - \frac{i}{m} \hat{q} \frac{2\varphi}{\operatorname{sh} 2\varphi} \right\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad (5.4.2)$$

где  $\varphi$  связано с изменением импульса  $q$  и углом рассеяния  $\theta$  соотношениями

$$q^2 = |q|^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 4m^2 \operatorname{sh}^2 \varphi, \quad |p_1| = |p_2| = |p|.$$

Для получения сечения рассеяния с учетом радиационных поправок нужно еще учесть второе борновское приближение для амплитуды рассеяния. Соответствующая величина  $M_1^{(2)}$  равна

$$M_1^{(2)} = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \left\{ \int \hat{A}^{(e)}(p_2 - p) \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(p_1 - p) d^4 p \right\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}}. \quad (5.4.3)$$

Легко убедиться, что входящий сюда интеграл расходится для чисто кулоновского поля, поэтому мы будем производить вычисления, считая кулоновское поле ядра экранированным  $\varphi(r) = \frac{Ze}{4\pi r} e^{-\eta r}$ , где  $\eta$  — некоторая положительная константа. При этом

$$A^{(e)}(q) = i\gamma_4 \frac{Ze}{q^2 + \eta^2} 2\pi \delta(q_0),$$

$$M_1^{(2)} = 4iZ^2\alpha^2 \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \left\{ \int \frac{\gamma_4}{(p_2 - p)^2 + \eta^2} \cdot \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \cdot \frac{\gamma_4}{(p - p_1)^2 + \eta^2} d^4 p \right\} \times \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Вводя обозначения

$$\int \frac{d^3 s}{[(p_2 - s)^2 + \eta^2][(p_1 - s)^2 + \eta^2](p_1^2 - s^2)} = I_1, \\ \int \frac{s d^3 s}{[(p_2 - s)^2 + \eta^2][(p_1 - s)^2 + \eta^2](p_1^2 - s^2)} = \frac{p_1 + p_2}{2} I_2,$$

представим  $M_1^{(2)}$  в виде

$$M_1^{(2)} = -4iZ^2\alpha^2 \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} [m(I_1 - I_2) + \gamma_4 \varepsilon (I_1 + I_2)] \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (5.4.4)$$

Эта формула в пределе  $\eta \rightarrow 0$  определяет поправку к амплитуде рассеяния во втором борновском приближении.

Вычислим входящие в (5.4.4) интегралы  $I_1$  и  $I_2$ . Рассмотрим сначала интеграл

$$L \equiv \int \frac{d^3s}{[(P-s)^2 + \Lambda^2](p^2 - s^2 + i0)} = 2\pi \int_0^\pi d\chi \int_0^\infty \frac{ds \cdot s^2 \sin \chi}{(P^2 - 2Ps \cos \chi + s^2 + \Lambda^2)(p^2 - s^2 + i0)}.$$

Вводя новую переменную  $t = \cos \chi$  и замечая, что подынтегральное выражение не меняется при замене  $s \rightarrow -s$ ,  $t \rightarrow -t$ , перепишем  $L$  в виде

$$L = \pi \int_{-1}^1 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2 ds}{(P^2 - 2Pst + s^2 + \Lambda^2)(p^2 - s^2 + i0)}.$$

Выполнив интегрирование по  $s$  с помощью теоремы о вычетах, получим

$$L = \frac{i\pi^2}{P} \ln \frac{p-P+i\Lambda}{p+P+i\Lambda}.$$

Интегралы  $I_1$  и  $I_2$  связаны простыми соотношениями с производными от  $L$  по  $\Lambda$  и  $P$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3s}{[(s-P)^2 + \Lambda^2]^2 (p^2 - s^2 + i0)} &= -\frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial L}{\partial \Lambda} = \\ &= \frac{\pi^2}{\Lambda (p^2 - P^2 + \Lambda^2 + 2i p \Lambda)}, \\ \int \frac{s_r ds}{[(s-P)^2 + \Lambda^2] (p^2 - s^2 + i0)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial P_r} - \frac{P_r}{2\Lambda} \frac{\partial L}{\partial \Lambda} = \\ &= -\pi^2 P_r \left[ -\frac{1}{\Lambda (p+P+i\Lambda)(p-P+i\Lambda)} + \frac{i}{2P^3} \ln \frac{p-P+i\Lambda}{p+P+i\Lambda} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2P^3} \left( \frac{1}{p-P+i\Lambda} + \frac{1}{p+P+i\Lambda} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

В результате мы получим

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{i\pi^2}{2|p|^3 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \ln \frac{2|p| \sin \frac{\vartheta}{2}}{\eta}, \\ I_2 &= \frac{I_1}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} - \frac{i\pi^2}{2|p|^3 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \left( \ln \frac{i\eta}{2|p|} - \frac{i\pi}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \right). \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Отметим, что при  $\eta \rightarrow 0$

$$\operatorname{Re} I_1 = 0, \quad \operatorname{Re} I_2 = \frac{\pi^3}{4|p|^3 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \left( 1 - \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \right). \quad (5.4.7)$$

Определим теперь дифференциальное сечение чисто упругого рассеяния электрона, усредненное по ориентациям его спина в начальном и конечном состояниях:

$$d\sigma_e = \frac{2\pi}{J} \frac{1}{2} \sum_{\mu_1, \mu_2} |M|^2 \rho_f d\omega, \quad (5.4.8)$$

где  $M\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = M_1^{(1)} + M_1^{(2)} + M_1^{(3)} + M_2^{(3)}$ ,  $J$  — плотность потока электронов (нормировочный объем предполагается равным единице),  $\rho_f$  — плотность конечных состояний электрона, отнесенная к единичному интервалу энергии и единичному телесному углу,

$$\rho_f = \frac{|p_2|^2 d|p_2|}{(2\pi)^3 d\varepsilon_2} = \frac{|p_2| \varepsilon_2}{(2\pi)^3},$$

и  $d\omega$  — элемент телесного угла, в котором лежит  $p_2$ . Используя найденные выражения для  $M_1^{(1, 2)}$  и  $M_2^{(3)}$ , получим

$$\begin{aligned} d\sigma_e = & \left( \frac{Z\alpha}{2mv^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 (1 - v^2) \left( 1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left[ 2(1 - \varphi \operatorname{cth} \varphi) \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \varphi \right) - \frac{2}{9} + \varphi \operatorname{th} \varphi + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2(1 - 2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi) \left( 1 + \ln \frac{\lambda}{m} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 4 \operatorname{cth} 2\varphi \int_0^\varphi u \operatorname{th} u du + \frac{v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{2\varphi}{\operatorname{sh} 2\varphi} \right] + \right. \\ & \left. + \pi \alpha Z v \sin \frac{\vartheta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \left( 1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^{-1} \right\} d\omega, \quad (5.4.9) \end{aligned}$$

где  $v$  — скорость электрона. Мы видим, что сечение  $d\sigma_e$  содержит «массу» фотона  $\lambda$ ; что же касается константы экранирования  $\eta$ , то она не входит в  $d\sigma_e$ .

Заметим, что входящий в (5.4.9) интеграл можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^\varphi u \operatorname{th} u du = \\ & = \frac{1}{4} \frac{1 - v^2}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \operatorname{sh} 2\varphi \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \frac{\xi \ln(1 - v^2 \xi^2) d\xi}{(1 - v^2 \xi^2) \sqrt{\xi^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} + \frac{\varphi}{2} \ln \frac{1}{1 - v^2}. \quad (5.4.10) \end{aligned}$$

**5.4.2. Исключение «массы» фотона из сечения рассеяния.** Покажем, как исключить из сечения рассеяния «массу» фотона. Для этого нужно, как было разъяснено в § 4.2, наряду с чисто упругим рассеянием рассматривать также рассеяние с излучением

мягкого фотона, энергия которого значительно меньше энергии электрона. Сечение излучения  $d\sigma'$  такого фотона определяется формулой (4.4.22).

Мы видим, что масса фотона входит в  $d\sigma'$  в виде

$$\frac{2\alpha}{\pi} (2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi - 1) \ln \frac{2\Delta e}{\lambda},$$

а в сечение упругого рассеяния в виде

$$\frac{2\alpha}{\pi} (2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi - 1) \ln \frac{\lambda}{m}.$$

Поэтому, если сложить сечения  $d\sigma_e$  и  $d\sigma'$ , то в суммарное сечение рассеяния, которое только и имеет физический смысл, «масса» фотона входить не будет.

Суммарное сечение рассеяния с потерей энергии, не превосходящей  $\Delta e$ , мы будем записывать в виде

$$d\sigma_{\Delta e} = \left( \frac{Z\alpha}{2mv^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 (1-v^2) \left( 1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) (1 + \delta_B - \delta_R) d\vartheta, \quad (5.4.11)$$

где величины  $\delta_R$  и  $\delta_B$  учитывают радиационные поправки и рассеяние во втором борновском приближении; согласно (5.4.9) и (4.4.22) они равны [6, 14]

$$\begin{aligned} \delta_R = & \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 2(1 - 2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi) \left( 1 + \ln \frac{2\Delta e}{m} \right) + \varphi \operatorname{th} \varphi + \right. \\ & + 2(1 - \varphi \operatorname{cth} \varphi) \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \varphi \right) - \frac{2}{9} + \frac{1}{v} \ln \frac{1-v}{1+v} + \\ & + 2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi \ln \frac{1}{1-v^2} + \frac{v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{2\varphi}{\operatorname{sh} 2\varphi} + \\ & \left. + \frac{(1-v^2) \operatorname{ch} 2\varphi}{v \sin \frac{\vartheta}{2}} \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \left[ \frac{\ln(1+v\zeta)}{1-v\zeta} - \frac{\ln(1-v\zeta)}{1+v\zeta} \right] \sqrt{\frac{d\zeta}{\zeta^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} \right\}, \quad (5.4.12) \\ \delta_B = & \pi\alpha v Z \sin \frac{\vartheta}{2} \frac{1 - \sin \left( \frac{\vartheta}{2} \right)}{1 - v^2 \sin^2 \left( \frac{\vartheta}{2} \right)}, \quad \operatorname{sh}^2 \varphi = \frac{q^2}{4m^2} \end{aligned}$$

(в выражении для  $\delta_R$  мы воспользовались формулой (5.4.10)). В нерелятивистской области величины  $\delta_R$  и  $\delta_B$  стремятся к нулю при  $v \rightarrow 0$ .

В ультрарелятивистском пределе

$$d\sigma_{\Delta\varepsilon} = \left(\frac{Z\alpha}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{\cos^2(\vartheta/2)}{\sin^4(\vartheta/2)} (1 + \tilde{\delta}_R + \tilde{\delta}_B) d\omega,$$

$$\begin{aligned} \delta_R = \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ \left( \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} - \frac{13}{12} \right) \left[ \ln \left( \frac{4\varepsilon^2 \sin^2(\vartheta/2)}{m^2} \right) - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{17}{36} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} \int_0^{\cos^2(\vartheta/2)} \frac{dx}{x} \ln(1-x) \right\}, \\ \tilde{\delta}_B = \pi\alpha Z \frac{\sin(\vartheta/2)}{1 + \sin(\vartheta/2)}. \end{aligned}$$

Для  $\varepsilon = 100$  МэВ,  $\Delta\varepsilon = 0,5$  МэВ,  $\vartheta = 60^\circ$ , величина  $\tilde{\delta}_R + \tilde{\delta}_B$  достигает 20 %.

**5.4.3. Устранение инфракрасной расходимости в случае произвольного процесса рассеяния.** Мы видели выше, что радиационные поправки к сечению рассеяния электрона во внешнем поле содержат «массу» фотона. Проследим, как формально возникает в матричных элементах инфракрасная расходимость. До регуляризации ни электронная собственно энергетическая функция, ни вершинная функция (с внутренними электронными линиями) не содержат расходящихся величин в области малых частот виртуальных фотонов, вершинная же и собственно энергетическая электронная функции в случае свободных электронных линий содержат такие величины.

При регуляризации внутренней вершинной функции  $\Lambda_\mu(\rho_1, \rho_2)$  мы отнимаем от нее величину  $\Lambda_\mu(\rho_0, \rho_0)$ , соответствующую свободным электронным линиям. Эта величина содержит интеграл, который расходится в области малых импульсов виртуальных фотонов. Чтобы обеспечить сходимость интеграла, мы вводим отличную от нуля «массу» фотона  $\lambda$ , которая таким образом появляется в регуляризованной вершинной функции.

Аналогичным образом возникает  $\lambda$  и в выражении для регуляризованной электронной собственно энергетической функции. По этой причине «масса» фотона начинает входить в радиационные поправки к сечениям самых различных процессов рассеяния.

Мы покажем теперь, обобщая результат, полученный для радиационных поправок к сечению рассеяния электрона в кулоновском поле ядра, что если для любого сколь угодно сложного процесса рассеяния, являющегося эффектом  $n$ -го порядка теории возмущений, наряду с радиационными поправками к нему, соответствующими  $(n+2)$ -му порядку теории возмущений, рассматривать также излучение реального мягкого фотона, то суммарное сечение рассеяния, учитывающее как радиационные поправки, так и дополнительное излучение мягкого фотона, не будет содержать «массу» фотона.

Так как инфракрасная расходимость возникает при интегрировании в области малых импульсов виртуальных и реальных

фотонов, а «мягкость» и «жесткость» фотона не являются, вообще говоря, инвариантными понятиями, то мы будем пользоваться определенной системой отсчета, а именно системой, в которой потеря энергии каждой заряженной частицей, обусловленная испусканием «мягких» фотонов, не превосходит некоторой величины  $\epsilon$ , малой по сравнению с энергиями всех заряженных частиц, участвующих в процессе.

Пользуясь этой системой отсчета, мы выделим в пространстве 4-импульсов фотона  $k$  область  $R_\epsilon$ , в которой  $|k| \leq \epsilon$ ,  $k_0 \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  — некоторая малая величина (она может быть выбрана, например, таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $\epsilon \ll m$ ), и будем называть мягкими те фотоны, 4-импульсы которых лежат в  $R_\epsilon$ , остальные фотоны будем называть жесткими.

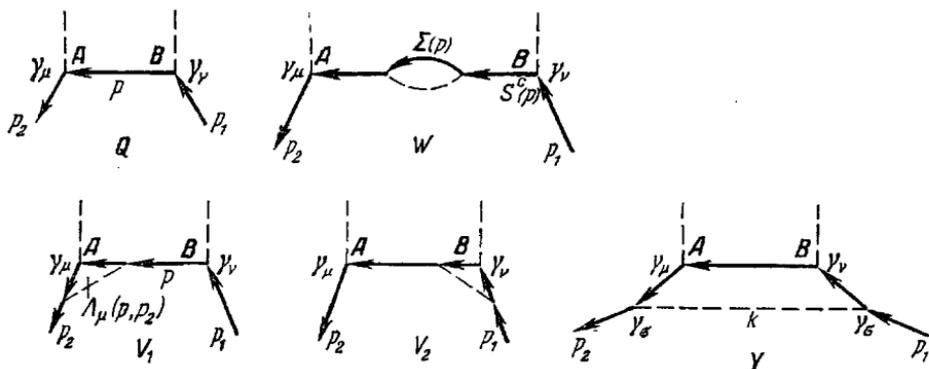


Рис. 5.5.

Будем для простоты предполагать, что в процессе рассеяния участвует только один электрон. Матричный элемент такого процесса можно записать в виде  $M = \bar{u}(p_2) Q(p_1, p_2) u(p_1)$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — 4-импульсы электрона до и после рассеяния,  $u(p_1)$  и  $\bar{u}(p_2)$  — соответствующие им биспинорные амплитуды и  $Q(p_1, p_2)$  — некоторая матрица.

Рассмотрим радиационные поправки наинизшего порядка к сечению этого процесса рассеяния, связанные с испусканием и последующим поглощением виртуального фотона и приводящие к инфракрасной расходимости. Пусть, например, основным процессом является тормозное излучение электрона (диаграмма Q на рис. 5.5). Тогда радиационным поправкам к этому процессу, приводящим к инфракрасной расходимости, будут соответствовать диаграммы W,  $V_1$ ,  $V_2$ , Y, изображенные на рис. 5.5. Покажем прежде всего, что во вкладышах, вносимых в радиационные поправки, члены, содержащие  $\lambda$  и происходящие от равного числа собственно энергетических электронных диаграмм и вершинных диаграмм, взаимно сокращаются. Возьмем, например, вершину A (рис. 5.5).

Матрице  $\gamma_\mu$  в основном процессе  $Q$  соответствует следующий вклад от диаграмм радиационных поправок  $W$  и  $V_1$ :

$$\begin{aligned} \gamma_\mu S_c(p) \Sigma^{(2)}(p) + \Lambda_\mu^{(2)}(p, p_2) = \\ = \gamma_\mu S_c(p) [\Sigma_0^{(2)} + \Sigma_1^{(2)}(\not{p} - im) + \Sigma_R^{(2)}(p)] + \Lambda_{R\mu}^{(2)}(p, p_2) + \gamma_\mu L^{(2)}, \end{aligned}$$

где  $\Sigma_1^{(2)} \equiv Z_1^{-1} - 1$ . Левая часть этого равенства не содержит инфракрасной расходимости, которая появляется в константах  $\Sigma_1^{(2)}$  и  $L^{(2)}$ . Но, согласно (5.1.35), эти константы равны  $\Sigma_1^{(2)} = L^{(2)}$ , и, следовательно, члены, содержащие их, сокращаются. По этой причине регуляризованное значение написанного выражения  $\gamma_\mu S_c(p) \Sigma_R^{(2)}(p) + \Lambda_{R\mu}^{(2)}(p, p_2)$  не будет, как и утверждалось, содержать инфракрасной расходимости.

Если основная диаграмма  $Q$  содержит  $n$  внутренних электронных линий, то в диаграммах радиационных поправок типов  $W$  и  $V$  будет  $n$  внутренних ЭСЭД и  $n-1$  внутренних ВД. От этих диаграмм останется одна нескомпенсированная «масса» фотона  $\lambda$ , соответствующая одной ЭСЭД. Учитывая наличие двух свободных электронных линий, с которыми связаны две ВД, мы окончательно получим от всех диаграмм  $W$  и  $V$  одну «нескомпенсированную»  $\lambda$  от одной ВД. Согласно (5.1.36) величина  $\lambda$  входит в вершинную функцию в виде  $\ln(\lambda/m)$ . Считая  $\lambda \rightarrow 0$ , мы можем поэтому написать следующее выражение для главной относительно  $\lambda$  части матричного элемента, соответствующего диаграммам типов  $W$  и  $V$ :

$$M_{W+V}^\lambda = -\frac{\alpha}{\pi} M \ln \frac{\lambda}{m}. \quad (5.4.13)$$

Этот результат можно сформулировать и иначе, сказав, что с каждой свободной электронной линией связана инфракрасная расходимость, причем вклад от каждой из этих линий в матричный элемент, соответствующий диаграммам типов  $W$  и  $V$ , равен

$$\frac{1}{2} M_{W+V}^\lambda = -\frac{\alpha}{2\pi} M \ln \frac{\lambda}{m}.$$

Рассмотрим теперь последнюю диаграмму радиационных поправок  $Y$ . Соответствующий ей матричный элемент  $M_Y$  при малых  $k$  имеет вид

$$\begin{aligned} M_Y = a_Y M, \\ a_Y = -\frac{i\alpha}{\pi^3} p_1 p_2 = \int \frac{d^4 k}{(k^2 + \lambda^2) [(p_2 - k)^2 + m^2] [(p_1 - k)^2 + m^2]}. \end{aligned}$$

Легко показать, что  $\lambda$  входит в  $M_Y$  в виде слагаемого

$$M_Y^\lambda = M \frac{\alpha}{\pi} \frac{\text{Ar th } v_2}{v_2} \ln \frac{\lambda}{m}$$

( $v_2$  — скорость электрона после рассеяния,  $p_1 = 0$ ).

В суммарный матричный элемент радиационных поправок «масса» фотона будет входить в виде  $M_R^\lambda = M_W^\lambda + \nu + M_Y^\lambda$ , а в сечение рассеяния с учетом радиационных поправок — в виде

$$|M + M_R^\lambda|^2 \approx |M|^2 \left[ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{\text{Ar th } v_2}{v_2} - 1 \right) \ln \frac{\lambda}{m} \right].$$

Поэтому сечение рассеяния с учетом радиационных поправок  $d\sigma_R$  будет содержать  $\lambda$  в виде слагаемого

$$d\sigma_R^\lambda = b_R^\lambda d\sigma_0, \quad (5.4.14)$$

$$b_R^\lambda = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{\text{Ar th } v_2}{v_2} - 1 \right) \ln \frac{\lambda}{m}$$

( $d\sigma_0$  — сечение основного процесса).

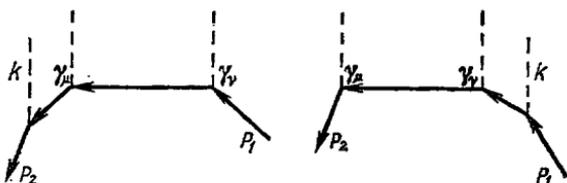


Рис. 5.6.

Рассмотрим теперь наряду с радиационными поправками излучение реального мягкого фотона с импульсом  $k$  и поляризацией  $e$ . Диаграммы, изображающие излучение фотона  $k$ , представлены на рис. 5.6. Матричный элемент, соответствующий этим диаграммам, равен

$$M_k = \frac{e}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \left( \frac{p_1 e}{p_1 k} - \frac{p_2 e}{p_2 k} \right) M. \quad (5.4.15)$$

Сечение рассеяния с излучением мягкого фотона с энергией, не превосходящей  $\Delta\varepsilon$ , будет, очевидно,

$$d\sigma' = b_k d\sigma_0, \quad (5.4.16)$$

$$b_k = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \sum_e \int_{\omega_{\min}}^{\Delta\varepsilon} \frac{d^3k}{2\omega} \left( \frac{p_1 e}{p_1 k} - \frac{p_2 e}{p_2 k} \right)^2, \quad \Delta\varepsilon \ll m.$$

Считая, так же как и выше, что  $p_1 = 0$ , получим согласно § 4.2:

$$b_k = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{\text{Ar th } v_2}{v_2} - 1 \right) \ln \frac{\Delta\varepsilon}{\omega_{\min}} = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{\text{Ar th } v_2}{v_2} - 1 \right) \left( \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{5}{6} \right). \quad (5.4.17)$$

Формула (5.4.16) показывает, что сечение рассеяния с излучением мягкого фотона представляет собой произведение сечения процесса без излучения фотона на вероятность излучения мягкого фотона. Такая факторизация является характерной чертой сечений рассеяния с излучением произвольного числа мягких фотонов.

Найдем, наконец, суммарное сечение рассеяния, учитывающее как радиационные поправки, так и излучение мягкого фотона:  $d\sigma = d\sigma_R + d\sigma'$ .

Часть  $d\sigma$ , содержащая  $\lambda$ , имеет вид

$$d\sigma^\lambda = b^\lambda d\sigma_0, \quad b^\lambda = b_R^\lambda + b_\mu.$$

Но эта величина, согласно (5.4.14) и (5.4.17), не содержит массы фотона, поэтому  $\lambda$ , как и утверждалось, не входит в суммарное сечение рассеяния [15].

Мы показали, как устраняется инфракрасная расходимость в случае произвольного процесса рассеяния в наименьшем приближении теории возмущений. Но полученные результаты могут быть обобщены на все порядки теории возмущений.

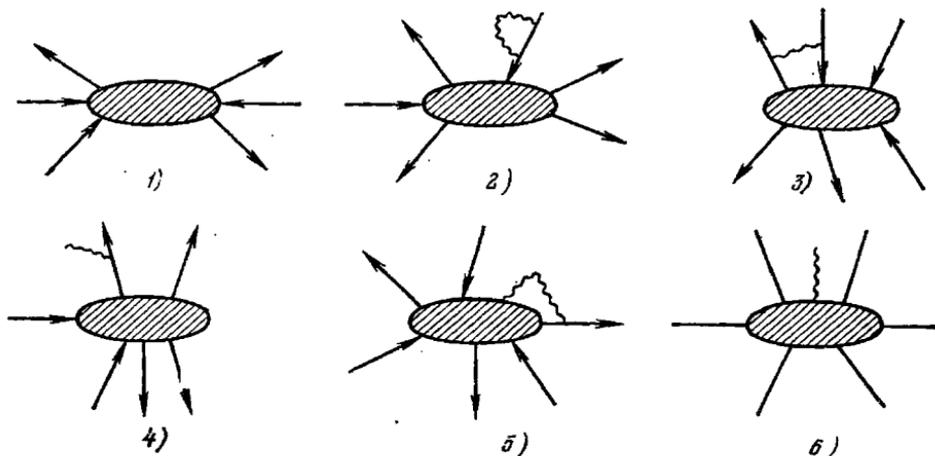


Рис. 5.7.

Пусть в некотором процессе участвует несколько реальных электронов и позитронов, но не участвуют мягкие фотоны (соответствующая диаграмма изображена на рис. 5.7, 1, заштрихованный блок изображает процесс, в котором не участвуют мягкие фотоны). Рассмотрим наряду с этим процессом процессы, в которых участвуют мягкие фотоны. Соответствующие фотонные линии (мы будем изображать мягкие фотоны волнистой линией) могут располагаться либо внутри заштрихованного блока, либо иметь внешние по отношению к этому блоку концы. Тогда, используя полученные выше результаты, можно утверждать, что к инфракрасной расходимости будут приводить только те диаграммы, в которых волнистые фотонные линии связаны со свободными электронными линиями: для виртуальных мягких фотонов это будут диаграммы типов 2 и 3, изображенные на рис. 5.7, а для реальных мягких фотонов — диаграммы типа 4 рис. 5.7 (диаграмма типа 2 эквивалентна диаграммам типа V на рис. 5.5); диаграммы иных типов, например, диаграммы 5 и 6, не приводят к инфра-

красной расходимости. Мы не будем приводить здесь вычисления соответствующих матричных элементов и приведем только окончательные результаты [15].

Рассмотрим сначала некоторый процесс, в котором участвуют два свободных электрона. Тогда матричный элемент, соответствующий этому процессу с учетом всех радиационных поправок к нему, будет иметь следующую структуру:

$$M = M_0 e^{\alpha B}, \quad (5.4.18)$$

где

$$B = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4 k}{k^2 + \lambda^2} \left( \frac{2p'_\mu - k_\mu}{2p'k - k^2} - \frac{2p_\mu - k_\mu}{2pk - k^2} \right)^2,$$

$p$  и  $p'$  — 4-импульсы электронов и  $M_0$  — некоторая величина, не содержащая инфракрасной расходимости, т. е. остающаяся конечной при  $\lambda \rightarrow 0$ . Величина, стоящая в скобках под знаком интеграла  $B$ , представляет собой, с точностью до множителя  $e$ , 4-ток «перехода»

$$j_\mu = e \left[ \frac{(2p' - k)_\mu}{2p'k - k^2} - \frac{(2p - k)_\mu}{2pk - k^2} \right],$$

удовлетворяющий уравнению непрерывности  $j_\mu k_\mu = 0$ .

Если наряду с радиационными поправками учитывать также излучение электронами реальных «мягких» фотонов, то суммарное сечение основного процесса вместе с радиационными поправками и излучением «мягких» фотонов будет иметь вид

$$d\sigma = e^{2\alpha(B + \tilde{B})} d\sigma_0, \quad (5.4.19)$$

где

$$\tilde{B} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\Delta e} \frac{d^3 k}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \left( \frac{p'_\mu}{p'k} - \frac{p_\mu}{pk} \right)^2,$$

$\Delta e$  — максимальная энергия фотонов и  $d\sigma_0$  — величина, пропорциональная  $|M_0|^2$  и не содержащая инфракрасной расходимости. Легко видеть, что  $d\sigma$  остается конечным при  $\lambda \rightarrow 0$ . Считая, что  $\lambda \ll \Delta e$ , получим

$$2\alpha(B + \tilde{B}) = -\frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{2pp'}{m^2} - 1 \right) \ln \frac{e\epsilon'}{(\Delta e)^2} + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{2pp'}{m^2}. \quad (5.4.20)$$

Эти формулы могут быть обобщены на тот случай, когда в процессе участвуют не два, а произвольное число электронов, а также позитронов и других заряженных частиц. В этом случае величины  $B$  и  $\tilde{B}$  имеют следующий вид:

$$B = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4 k}{k^2 + \lambda^2} \sum_{i < j} q_i \theta_i q_j \theta_j \left[ \frac{(2p_i \theta_i - k)_\mu}{k^2 - 2p_i k \theta_i} + \frac{(2p_j \theta_j + k)_\mu}{k^2 + 2p_j k \theta_j} \right]^2, \quad (5.4.21)$$

$$\tilde{B} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\Delta e} \frac{d^3 k}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \sum_{i < j} q_i \theta_i q_j \theta_j \left( \frac{p_{i\mu}}{kp_i} - \frac{p_{j\mu}}{kp_j} \right)^2,$$

где  $\theta_i = 1$  для частицы в конечном состоянии,  $\theta_i = -1$  для частицы в начальном состоянии и  $q_i e$  — заряд частицы.

Подчеркнем то обстоятельство, что устранение инфракрасных расходимостей было проведено здесь в выражениях для сечений, амплитуды же рассеяния оставались расходящимися. Это связано с тем, что мы рассматривали переходы между состояниями с определенным числом фотонов. Но такие состояния физически нереализуемы. Как мы видели (см. § 4.4), реально мы имеем дело с когерентными состояниями длинноволнового поля излучения, никак не характеризующегося числом фотонов. Можно показать, что, рассматривая переходы между такими реальными состояниями, мы получим амплитуды рассеяния, свободные от инфракрасных расходимостей [16].

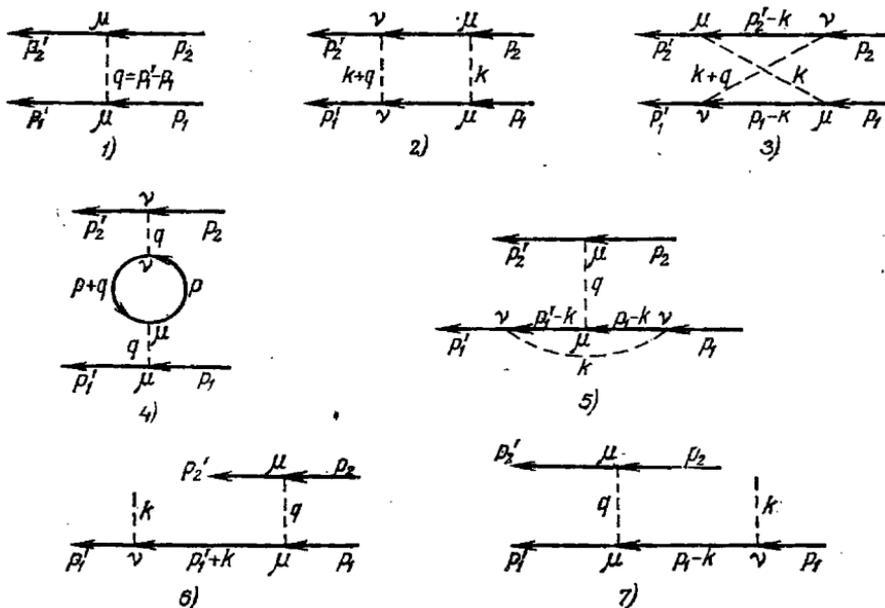


Рис. 5.8

**5.4.4. Радиационные поправки к сечению рассеяния электрона электрона и электрона позитроном.** Перейдем к рассмотрению радиационных поправок к сечению рассеяния электрона электрона и электрона позитроном [17].

Основные типы диаграмм, определяющих рассеяние электрона электрона и радиационные поправки к этому процессу, изображены на рис. 5.8. Для получения всех диаграмм нужно наряду с этими диаграммами рассматривать также диаграммы, получающиеся из изображенных путем следующих перестановок:

$$1) p_1 \leftrightarrow p_2, \quad p_1' \leftrightarrow p_2'; \quad 2) p_1' \leftrightarrow p_2'; \quad 3) p_1 \leftrightarrow p_2.$$

Обозначим через  $M_i$  матричный элемент (без  $\delta$ -функции), соответствующий  $i$ -диаграмме рис. 5.8. Матричные элементы, получающиеся из  $M_i$  путем замен 1), 2), 3), мы будем обозначать соответственно через  $M'_i$ ,  $M''_i$ ,  $M'''_i$ . Тогда дифференциальное сечение чисто упругого рассеяния электрона электроном с учетом радиационных поправок порядка  $\alpha$  будет иметь вид

$$d\sigma^{e-e} = \frac{1}{2v} \frac{1}{4} \sum_{\mu_i \mu_f} \left\{ |M_1 + M'_1 + M''_1 + M'''_1|^2 + \right. \\ \left. + 2\text{Re} \sum_{i=2}^5 (M_1 + M'_1 + M''_1 + M'''_1)^* (M_i + M'_i + M''_i + M'''_i) \right\} do_-,$$

где  $v$  — скорость электронов в системе центра инерции и суммирование производится по ориентациям спинов электронов в начальном и конечном состояниях ( $do_-$  — элемент телесного угла, в котором рассеивается электрон).

Для того чтобы получить сечение рассеяния электрона позитроном, нужно в этом выражении положить  $p_1 = p_-$ ,  $p'_1 = p'_-$ ,  $p_2 = -p'_+$ ,  $p'_2 = -p_+$ , где  $p_-$  и  $p_+$  — 4-импульсы электрона и позитрона.

В сечения рассеяния входит «масса» фотона  $\lambda$  (ее содержат матричные элементы, соответствующие диаграммам 2, 3, 5 рис. 5.8). Чтобы исключить  $\lambda$ , нужно рассмотреть неупругое рассеяние электрона электроном и электрона позитроном с испусканием мягкого фотона. Соответствующие этому процессу диаграммы изображены на рис. 5.8 (диаграммы 6 и 7; наряду с этими диаграммами нужно рассматривать также диаграммы, получающиеся из приведенных диаграмм путем замеч 1), 2), 3)).

Сечение рассеяния электронов с излучением мягких фотонов в ультрарелятивистском случае в с. ц. и. определяется формулой

$$\left(\frac{d\sigma'}{d\omega_-}\right)_{\text{с. ц. и.}} = \frac{d\sigma_0}{d\omega_-} \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 4 \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} [1 - \rho - \ln \chi(1 - \chi)] - \right. \\ \left. - \rho^2 + 2\rho - \frac{\pi^2}{3} + \ln^2 \frac{\chi}{1 - \chi} \right\}, \quad (5.4.22)$$

а в лабораторной системе — формулой

$$\left(\frac{d\sigma'}{d\omega_-}\right)_{\text{лаб}} = \frac{d\sigma_0}{d\omega_-} \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 4 \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} [1 - \rho - \ln \chi(1 - \chi)] - \right. \\ \left. - \frac{5}{2} \rho^2 + 3\rho - 3\rho \ln \chi(1 - \chi) - \frac{1}{2} \ln^2 \chi(1 - \chi) + \right. \\ \left. + \ln \chi(1 - \chi) - 2 \ln \chi \ln(1 - \chi) + 1 - \frac{\pi^2}{3} \right\}, \quad (5.4.23)$$

где

$$\chi = \sin^2 \frac{\theta_-}{2}, \quad \theta_- = \widehat{p_1 p'_1}, \quad \Delta\varepsilon \ll m, \quad \rho = \ln \frac{s}{m^2},$$

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad \frac{d\sigma_0}{d\omega_-} = \frac{\alpha^2}{s} \left[ \frac{1 - \chi + \chi^2}{\chi(1 - \chi)} \right]^2.$$

Суммарное сечение рассеяния  $d\sigma^{e^-e^-} + d\sigma'$  в пределе больших энергий в с. ц. и. определяется формулой

$$\frac{d\sigma}{do_-} (e^-e^- \rightarrow e^-e^-)_{с. ц. и.} = \frac{d\sigma_0}{do_-} \left( 1 + \frac{\alpha}{\pi} \delta \right),$$

$$\delta = 4 \ln \frac{\varepsilon}{2\Delta\varepsilon} [1 - \rho - \ln \chi(1 - \chi)] - \frac{46}{9} + \frac{11}{3} \rho + (1 - \chi + \chi^2)^{-2} \times$$

$$\times \left[ -\frac{3\pi^2}{4} \chi(1 - \chi) + \frac{1}{6} (1 - \chi) (22 - 36\chi + 39\chi^2 - 14\chi^3) \ln \chi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \chi (11 - 3\chi^2 + 14\chi^3) \ln(1 - \chi) + \frac{1}{4} (4 - 13\chi + \right.$$

$$\left. + 14\chi^2 - 8\chi^3 + 3\chi^4) \ln^2(1 - \chi) + \frac{1}{4} (-3\chi + 8\chi^2 - 4\chi^3 + 3\chi^4) \ln^2 \chi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (-8 + 19\chi - 27\chi^2 + 16\chi^3 - 8\chi^4) \ln \chi \ln(1 - \chi) \right], \quad (5.4.24)$$

а в лабораторной системе ( $p_2 = 0$ ,  $s = 2m\varepsilon$ ) — формулой

$$\frac{d\sigma}{do_-} (e^-e^- \rightarrow e^-e^-)_{лаб} = \frac{d\sigma_0}{do_-} \left( 1 + \frac{\alpha}{\pi} \bar{\delta} \right),$$

$$\bar{\delta} = 4 \ln \frac{m}{2\Delta\varepsilon} [1 - \rho - \ln \chi(1 - \chi)] - \frac{37}{9} + \frac{20}{3} \rho - \frac{7}{2} \rho^2 -$$

$$- 5\rho \ln \chi(1 - \chi) + (1 - \chi + \chi^2)^{-2} \left[ -\frac{3}{4} \pi^2 \chi(1 - \chi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} (28 - 70\chi + 93\chi^2 - 65\chi^3 + 20\chi^4) \ln \chi + \frac{1}{6} (6 - \chi + \right.$$

$$\left. + 18\chi^2 - 15\chi^3 + 20\chi^4) \ln(1 - \chi) + \frac{1}{4} (-6 + 9\chi - 10\chi^2 + \right.$$

$$\left. + 8\chi^3 - 3\chi^4) \ln^2 \chi + \frac{1}{4} (-2 - \chi - 4\chi^2 + 4\chi^3 - 3\chi^4) \ln^2(1 - \chi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (-10 + 23\chi - 33\chi^2 + 20\chi^3 - 10\chi^4) \ln \chi \ln(1 - \chi) \right]. \quad (5.4.25)$$

Приведем теперь формулы для сечения рассеяния позитронов электронами. Сечение рассеяния с излучением мягких фотонов при больших энергиях в с. ц. и. имеет вид

$$\left( \frac{d\sigma'}{do_+} \right)_{с. ц. и.} = \frac{d\sigma_0}{do_+} \frac{\alpha}{\pi} \left[ 4 \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} \left( 1 - \rho + \ln \frac{1-\chi}{\chi} \right) - \rho^2 + \right.$$

$$\left. + 2\rho - \frac{2\pi^2}{3} + 2 \int_{1-\chi}^{\chi} \frac{dz}{z} \ln(1-z) + \ln^2 \chi - \ln^2(1-\chi) \right], \quad (5.4.26)$$

а в лабораторной системе — вид

$$\left( \frac{d\sigma'}{do_+} \right)_{лаб} = \frac{d\sigma_0}{do_+} \frac{\alpha}{\pi} \left[ 4 \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} \left( 1 - \rho + \ln \frac{1-\chi}{\chi} \right) - \frac{5}{2} \rho^2 + \right.$$

$$\left. + 3\rho + 1 - \frac{\pi^2}{3} - \rho \ln \frac{\chi^3}{1-\chi} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\chi}{1-\chi} + \ln \chi(1-\chi) \right], \quad (5.4.27)$$

где

$$\chi = \sin^2 \frac{\theta_+}{2}, \quad \theta_+ = \widehat{p_+ p'_+}, \quad s = -(p_+ + p_-)^2, \quad \rho = \ln \frac{s}{m^2},$$

$$\frac{d\sigma_0}{d\omega_+} = \frac{\alpha}{s} \left( \frac{1 - \chi + \chi^2}{\chi} \right)^2.$$

Суммарное сечение рассеяния позитрона электроном в с. ц. и. определяется формулой

$$\frac{d\sigma}{d\omega_+} (e^+e^- \rightarrow e^+e^-)_{\text{с. ц. и.}} = \frac{d\sigma_0}{d\omega_+} \left( 1 + \frac{\alpha}{\pi} \delta \right),$$

$$\delta = 4 \left( 1 - \rho + \ln \frac{1 - \chi}{\chi} \right) \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} - \frac{2\pi^2}{3} - \frac{46}{9} + \frac{11}{3} \rho + 2 \int_{1-\chi}^{\chi} \frac{dt}{t} \ln(1-t) +$$

$$+ (1 - \chi + \chi^2)^{-2} \left[ \frac{\pi^2}{12} (4 - 8\chi + 27\chi^2 - 26\chi^3 + 16\chi^4) + \right.$$

$$+ \frac{1}{6} (22 - 30\chi + 33\chi^2 - 11\chi^3) \ln \chi - \frac{1}{2} (\chi + \chi^3) \ln(1 - \chi) +$$

$$+ \frac{1}{4} (3\chi - \chi^2 - 3\chi^3 + 4\chi^4) \ln^2 \chi + \frac{1}{4} (-4 + 10\chi - 14\chi^2 +$$

$$+ 10\chi^3 - 4\chi^4) \ln^2(1 - \chi) + \frac{1}{2} (4 - 8\chi + 7\chi^2 - 23\chi^3) \times$$

$$\left. \times \ln \chi \ln(1 - \chi) \right], \quad \varepsilon = \sqrt{s}/2, \quad (5.4.28)$$

а в лабораторной системе — формулой

$$\frac{d\sigma}{d\omega_+} (e^+e^- \rightarrow e^+e^-)_{\text{лаб}} = \frac{d\sigma_0}{d\omega_+} \left( 1 + \frac{\alpha}{\pi} \delta \right),$$

$$\delta = 4 \left( 1 - \rho + \ln \frac{1 - \chi}{\chi} \right) \ln \frac{m}{2\Delta\varepsilon} - \frac{7}{2} \rho^2 + \frac{20}{3} \rho - 5\rho \ln \chi +$$

$$+ 3\rho \ln(1 - \chi) - \frac{37}{9} + (1 - \chi + \chi^2)^{-2} \left[ \frac{\pi^2}{4} \chi^2 (5 - 6\chi + 4\chi^2) + \right.$$

$$+ \frac{1}{6} (28 - 42\chi + 51\chi^2 - 23\chi^3 + 6\chi^4) \ln \chi +$$

$$+ \frac{1}{2} (2 - 5\chi + 6\chi^2 - 5\chi^3 + 2\chi^4) \ln(1 - \chi) +$$

$$+ \frac{1}{4} (-6 + 15\chi - 19\chi^2 + 9\chi^3 - 2\chi^4) \ln^2 \chi +$$

$$+ \frac{1}{4} (-2 + 6\chi - 8\chi^2 - 6\chi^3 - 2\chi^4) \ln^2(1 - \chi) +$$

$$\left. + \frac{1}{2} (6 - 12\chi + 13\chi^2 - 6\chi^3 + 2\chi^4) \ln \chi \ln(1 - \chi) \right]. \quad (5.4.29)$$

## § 5.5. Радиационные поправки к сечениям комптоновского рассеяния, образования и аннигиляции пар и тормозного излучения

**5.5.1. Радиационные поправки к сечению комптоновского рассеяния.** Перейдем к определению радиационных поправок к сечениям процессов рассеяния, в которых наряду с электроном участ-

вуют фотоны. Начнем с эффекта Комптона [18]. На рис. 5.9 представлены диаграммы, изображающие основной эффект Комптона (диаграмма  $Y_0$ ) и радиационные поправки к нему порядка  $\alpha$

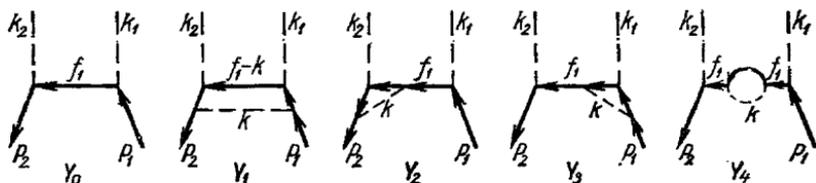


Рис. 5.9.

(диаграммы  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ ; кроме этих диаграмм, нужно, естественно, учитывать также и диаграммы, отличающиеся от изображенных заменой  $k_1 \leftrightarrow k_2$ ). Матричные элементы, соответствующие этим диаграммам, равны

$$M^{(2)} = ie^2 \frac{\bar{u}_2 Q_0 u_1}{4 \sqrt{\omega_1 \omega_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}}, \quad M^{(4)} = -\frac{e^4}{4 (2\pi)^4} \frac{\bar{u}_2 Q u_1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}}, \quad (5.5.1)$$

где

$$Q_0 = \hat{\varepsilon}_2 \frac{i \hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_1 \frac{i \hat{f}_2 - m}{m^2 \kappa_2} \hat{\varepsilon}_2,$$

$$f_1 = p_1 + k_1 = p_2 + k_2, \quad f_2 = p_1 - k_2 = p_2 - k_1,$$

$$m^2 \kappa_1 = f_1^2 + m^2, \quad m^2 \kappa_2 = f_2^2 + m^2,$$

$$Q = \sum_{i=1}^4 (Y_i + Y_i'),$$

$$Y_1 = \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \hat{\varepsilon}_2 \frac{i(\hat{f}_1 - \hat{k}) - m}{(f_1 - k)^2 + m^2} \hat{\varepsilon}_1 \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{d^4 k}{k^2 + \lambda^2},$$

$$Y_2 = \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \hat{\varepsilon}_2 \frac{i(\hat{f}_1 - \hat{k}) - m}{(f_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i \hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \hat{\varepsilon}_1 \frac{d^4 k}{k^2},$$

$$Y_3 = \hat{\varepsilon}_2 \frac{i \hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{f}_1 - \hat{k}) - m}{(f_1 - k)^2 + m^2} \hat{\varepsilon}_1 \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{d^4 k}{k^2},$$

$$Y_4 = \hat{\varepsilon}_2 \frac{i \hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{f}_1 - \hat{k}) - m}{(f_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i \hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \hat{\varepsilon}_1 \frac{d^4 k}{k^2 + \lambda^2}$$

(здесь приняты те же обозначения, что и в § 4.2; матрицы  $Y_i'$  отличаются от матриц  $Y_i$  перестановкой импульсов фотонов  $k_1$  и  $k_2$ ).

Сечение основного процесса  $d\sigma_0$  равно

$$d\sigma_0 = \frac{r_0^2}{4} \frac{\omega_3^2}{m^2 \kappa_1^2} 8U_0 d\omega,$$

где

$$U_0 = \frac{1}{8} \text{Sp} \{ Q_0 (i \hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i \hat{p}_2 - m) \} =$$

$$= 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right).$$

Сечение комптоновского рассеяния с учетом радиационных поправок порядка  $\alpha$  может быть представлено в виде

$$d\sigma = d\sigma_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \frac{U_1}{U_0} \right), \quad (5.5.2)$$

где

$$U_1 = \frac{1}{16\pi^2} \operatorname{Re} \operatorname{Sp} \frac{1}{i} \{ [Q_1 + Q'_1] (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m) \},$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^4 Y_i, \quad Q'_1 = \sum_{i=1}^4 Y'_i.$$

Вводя обозначения

$$P(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{16\pi^2} \operatorname{Re} \operatorname{Sp} \frac{1}{i} \{ Q_1 (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m) \},$$

$$P'(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{16\pi^2} \operatorname{Re} \operatorname{Sp} \frac{1}{i} \{ Q'_1 (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m) \},$$

легко убедиться, что  $P'(\kappa_1, \kappa_2) = P(\kappa_2, \kappa_1)$ . Поэтому  $U_1$  можно переписать в виде

$$U_1 = P(\kappa_1, \kappa_2) + P(\kappa_2, \kappa_1), \quad (5.5.2')$$

где

$$P(\kappa_1, \kappa_2) = \sum_{n=1}^4 P_n, \quad P_n = \frac{1}{16\pi^2} \operatorname{Re} \operatorname{Sp} \frac{1}{i} \{ Y_n (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m) \}.$$

Найдем прежде всего  $P_1$ . Найдя следы матриц по формулам (1.2.17), можно привести  $P_1$  к виду

$$\begin{aligned} i\pi^3 P_1 = & 4 (J_{\sigma\tau}^{(1)} - J_{\sigma\tau}^{(2)}) \left( \frac{1}{\kappa_1} \rho_{2\sigma} f_{1\tau} + \frac{1}{\kappa_2} \rho_{2\sigma} f_{2\tau} \right) + \\ & + (J_{\sigma}^{(0)} - J_{\sigma}^{(1)}) \rho_{2\sigma} \left( 2 - \frac{4}{\kappa_1} - \frac{4}{\kappa_2} \right) + J_{\sigma}^{(0)} f_{1\sigma} \left( 3 + \frac{2}{\kappa_1} + \frac{2\kappa_2}{\kappa_1} \right) + \\ & + J_{\sigma}^{(0)} f_{2\sigma} \left( 5 - \frac{2}{\kappa_1} + \frac{4\kappa_1}{\kappa_2} \right) + (J_{\sigma}^{(1)} \rho_{1\sigma} + J_{\sigma}^{(2)} \rho_{2\sigma}) \left( 1 - \frac{2}{\kappa_2} \right) - \\ & - (J_{\sigma}^{(1)} + J_{\sigma}^{(2)}) \left[ f_{1\sigma} \left( 1 + \frac{4}{\kappa_1} + \frac{4}{\kappa_2} \right) + f_{2\sigma} \left( 2 + \frac{2\kappa_1}{\kappa_2} \right) \right] - \\ & - J_{\sigma} (\rho_{1\sigma} + \rho_{2\sigma}) \left( 4\kappa_1 + 3\kappa_2 - \frac{12}{\kappa_2} - \frac{4}{\kappa_1} - \frac{2\kappa_2}{\kappa_1} + \frac{2\kappa_1^2}{\kappa_2} \right) - \\ & - J_{\sigma}^{(3)} f_{1\sigma} \left( \frac{2}{\kappa_2} - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) - J_{\sigma}^{(3)} f_{2\sigma} \left( 1 - \frac{2}{\kappa_1} \right) - \\ & - J_{\sigma} f_{1\sigma} \left( 6 - 4\kappa_1 - \kappa_2 - \frac{4}{\kappa_1} + \frac{12}{\kappa_2} + \frac{2\kappa_1}{\kappa_2} - \frac{2\kappa_1^2}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1} \right) + \\ & + J^{(0)} \left( 5 - 2\kappa_1 - \kappa_2 - \frac{2}{\kappa_1} - \frac{2}{\kappa_2} + \frac{4\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) + \\ & + J (-2 + \kappa_1 + \kappa_2) \left( 3 + \kappa_2 - \frac{4}{\kappa_1} - \frac{4}{\kappa_2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right), \quad (5.5.3) \end{aligned}$$

где

$$2J_{\sigma} \rho_{1\sigma} = 2J_{\sigma} \rho_{2\sigma} = J^{(0)} - J^{(1)} = J^{(0)} - J^{(2)},$$

$$2J_{\sigma} f_{1\sigma} = J^{(0)} - J^{(3)} + \kappa J,$$

$J_{\sigma}^{(0)}, J_{\sigma\tau}^{(1)}, \dots$  — интегралы типов

$$J_{\sigma}^{(0)} = \int \frac{k_{\sigma} d^4k}{(1)(2)(3)}, \quad J_{\sigma\tau}^{(1)} = \int \frac{k_{\sigma} k_{\tau} d^4k}{(0)(2)(3)}, \dots$$

и

$$(0) = k^2 + \lambda^2, \quad (1) = (\rho_1 - k)^2 + m^2 = k^2 - 2k\rho_1,$$

$$(2) = (\rho_2 - k)^2 + m^2 = k^2 - 2k\rho_2,$$

$$(3) = (f_1 - k)^2 + m^2 = k^2 - 2kf_1 + m^2\kappa_1$$

(нижние индексы у  $J^{(0)}, J^{(1)}, \dots$  обозначают проекции 4-вектора в числителе подынтегрального выражения, а верхний — указывает на недостающий в знаменателе множитель одного из типов (1), (2), (3), (0)).

Эти интегралы могут быть вычислены согласно правилам приложения А.1:

$$J^{(0)} = -\pi^2 i \frac{2y^2}{\kappa_1 + \kappa_2},$$

$$J^{(1)} = J^{(2)} = \pi^2 i \frac{1}{\kappa_1} [F(\kappa_1 - 1) - F(-1)],$$

$$J^{(3)} = \pi^2 i 2y (\operatorname{sh} 2y)^{-1} [h(2y) - h(y) - \ln \lambda],$$

$$J = \pi^2 i 2y (\operatorname{sh} 2y \cdot \kappa_1)^{-1} \left[ h(2y) - 2h(y) + \ln \frac{|\kappa_1|}{\lambda} \right],$$

$$J_{\sigma}^{(0)} = J^{(0)} (\rho_{1\sigma} + \rho_{2\sigma})/2 + \left( J^{(0)} - \pi^2 i \frac{4b}{\kappa_1 + \kappa_2} \right) (k_{1\sigma} + k_{2\sigma})/2,$$

$$J_{\sigma}^{(1)} = \left[ J^{(1)} - \pi^2 i \frac{\ln |\kappa_1|}{\kappa_1 - 1} \right] \rho_{2\sigma} + \left[ 2J^{(1)} + \pi^2 i \left( \frac{\kappa_1 - 2}{\kappa_1 - 1} \ln |\kappa_1| - 2 \right) \right] \frac{k_{2\sigma}}{\kappa_1},$$

$$J_{\sigma}^{(3)} = \pi^2 i y (\operatorname{sh} 2y)^{-1} (\rho_{1\sigma} + \rho_{2\sigma}),$$

$$J_{\sigma\tau}^{(0)} = -\pi^2 i \frac{\delta_{\sigma\tau}}{4} \left( A_0 - \frac{1}{2} - 2b + \frac{2}{\pi^2 i} J^{(0)} \right) - \frac{\pi^2 i}{\kappa_1 + \kappa_2} \left\{ 2y^2 f_{1\sigma} f_{1\tau} + \right. \\ \left. + b [2f_{1\sigma} (k_{1\tau} + k_{2\tau}) + 2f_{1\tau} (k_{1\sigma} + k_{2\sigma}) - k_{1\sigma} k_{1\tau} - k_{2\sigma} k_{2\tau}] + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2 i} J^{(0)} \right) (k_{1\sigma} k_{2\tau} + k_{1\tau} k_{2\sigma}) \right\},$$

$$J_{\sigma\tau}^{(1)} = -\pi^2 i \frac{\delta_{\sigma\tau}}{4} \left( A_0 + \frac{1}{2} - 3 + \frac{\kappa_1 - 2}{\kappa_1 + 1} \ln |\kappa_1| + \frac{2}{\pi^2 i} J^{(1)} \right) + \\ + \frac{\pi^2 i}{2} \rho_{2\sigma} \rho_{2\tau} \left[ \frac{2}{\pi^2 i} J^{(1)} - \frac{3\kappa_1 - 2}{(\kappa_1 - 1)^2} \ln |\kappa_1| + \frac{1}{\kappa_1 - 1} \right] + \\ + \frac{\pi^2 i}{\kappa_1^2} k_{2\sigma} k_{2\tau} \left[ \frac{6}{\pi^2 i} J^{(1)} + \frac{(\kappa_1^2 + 6\kappa_1 - 6)(\kappa_1 - 2)}{2(\kappa_1 - 1)^2} \ln |\kappa_1| - \right. \\ \left. - \frac{2\kappa_1^2 + 9\kappa_1 - 12}{2(\kappa_1 - 1)} \right] + \frac{\pi^2 i}{2\kappa_1} (\rho_{2\sigma} k_{2\tau} + \rho_{2\tau} k_{2\sigma}) \left[ \frac{6}{\pi^2 i} J^{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{2\kappa_1^2 - 9\kappa_1 + 6}{(\kappa_1 - 1)^2} \ln |\kappa_1| + \frac{1}{\kappa_1 - 1} - 5 \right],$$

где  $A_0$  обозначает логарифмически расходящуюся константу § 5.1:

$$A_0 = 1 - \ln \frac{L^2}{m^2} \quad \text{и} \quad \text{sh}^2 y = -\frac{1}{4} (\kappa_1 + \kappa_2), \quad b = 1 - y \text{cth} y,$$

$$F(x) = \int_0^x \ln(1+u) \frac{du}{u}, \quad h(y) = \frac{1}{y} \int_0^y u \text{cth} u du.$$

Величины  $P_2$  и  $P_3$ , очевидно, равны между собой:  $P_2 = P_3$ . Замечая, что регуляризованное выражение  $Y_3$ , входящее в  $P_2$ , имеет вид

$$Y_{3R} = \gamma_v \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \frac{(2\pi)^4}{e^2} \Lambda_{R\lambda}^{(3)}(p_1, p_1 + k_1),$$

получим

$$P_2 + P_3 = 2P_2 = \frac{1}{\kappa_1} \left[ 2A \left( 3 + \kappa_2 - \frac{4}{\kappa_1} - \frac{4}{\kappa_2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) - \right. \\ \left. - 2B (\kappa_1 + \kappa_2) + C \left( -8 + \kappa_1 + \frac{8}{\kappa_1} + \frac{8}{\kappa_2} - \frac{4\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} \right) - \right. \\ \left. - D \left( 4 - \kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1^2 - \kappa_1 \kappa_2 + \frac{4\kappa_1}{\kappa_2} \right) \right], \quad (5.5.4)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  определены в формуле (5.1.39).

Найдем, наконец,  $P_4$ . Регуляризованное выражение  $Y_4$  имеет вид

$$Y_{4R} = \gamma_v \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \frac{(2\pi)^4}{e^2} \sum_R^{(3)} (f_1) \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \gamma_\lambda,$$

где  $\sum_R^{(3)} (f_1)$  определяется формулой (5.1.10)

$$\frac{(2\pi)^4}{e^2} \sum_R^{(3)} (f_1) = \pi^2 i [B_1 (i\hat{f}_1 + m) + B_2 m], \\ B_1 = 2 \left( 1 + \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right) + \frac{\kappa_1}{\kappa_1 - 1} + \frac{\kappa_1 (\kappa_1 - 2)}{(\kappa_1 - 1)^2} \ln |\kappa_1|, \\ B_2 = -\frac{\kappa_1}{\kappa_1 - 1} + \frac{\kappa_1 (3\kappa_1 - 2)}{(\kappa_1 - 1)^2} \ln |\kappa_1|.$$

Используя это выражение, найдем

$$P_4 = \frac{1}{2\kappa_1^2} B_2 \left( 8 + \kappa_2 - \frac{8}{\kappa_1} - \frac{8}{\kappa_2} + \frac{4\kappa_1}{\kappa_2} - \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} \right) + \\ + \frac{1}{2\kappa_1} B_1 \left( 3 + \kappa_2 - \frac{4}{\kappa_1} - \frac{4}{\kappa_2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right). \quad (5.5.5)$$

Складывая  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$ , получим окончательно следующее выражение для  $P$ :

$$\begin{aligned}
 P(\kappa_1, \kappa_2) = & \left[ (1 - 2y \operatorname{cth} 2y) \ln \frac{\lambda}{m} \right] U_0 - \\
 & - 2y \operatorname{cth} 2y [2h(y) - h(2y)] U_0 + h(y) \left( -4y \operatorname{sh} 2y \frac{2 - \operatorname{ch} 2y}{\kappa_1 \kappa_2} + \right. \\
 & \left. + 2y \operatorname{cth} y \right) + \ln |\kappa_1| \left\{ 4y \operatorname{cth} 2y \left[ \frac{4 \operatorname{ch}^2 y}{\kappa_1 \kappa_2} + \frac{\kappa_1 - 6}{2\kappa_2} \frac{1}{\operatorname{ch} 2y} + \frac{4}{\kappa_1^2} - \right. \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\kappa_1} - \frac{\kappa_2}{2\kappa_1} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} - 1 \right] + 1 + \frac{3}{\kappa_2} + \frac{8}{\kappa_1} + \frac{3\kappa_2}{2\kappa_1} - \frac{8}{\kappa_1^2} - \frac{7}{\kappa_1 \kappa_2} + \frac{3\kappa_2}{2\kappa_1^2} + \\
 & \left. + \frac{2\kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2 \kappa_2}{2\kappa_1^2 \kappa_2 (\kappa_1 - 1)} - \frac{2\kappa_1^2 + \kappa_2}{2\kappa_2 (\kappa_1 - 1)^2} \right\} - \\
 & - \frac{4y^2}{\kappa_1 + \kappa_2} \left( \frac{2}{\kappa_1} - \frac{7}{4} \kappa_1 - \frac{3}{4} \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1} \right) - 4y \operatorname{th} y \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_1} \right) + 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - \\
 & - \frac{12}{\kappa_1} - \frac{3}{2} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} - \frac{2\kappa_1}{\kappa_2^2} + \frac{1}{\kappa_1 - 1} \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{1}{2} \right) + \\
 & + \frac{2}{\kappa_1} [F(\kappa_1 - 1) - F(-1)] \left( -1 + \frac{2}{\kappa_1} - \frac{3}{\kappa_2} + \kappa_1 + \right. \\
 & \left. + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1^2} + \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} \right). \quad (5.5.6)
 \end{aligned}$$

В величину  $U_1$ , определяющую радиационные поправки к сечению эффекта Комптона, входит «масса» фотона  $\lambda$ . Для того чтобы исключить ее, нужно, так же как это было сделано при рассмотрении радиационных поправок к сечению рассеяния электрона во внешнем поле, учесть в эффекте Комптона излучение дополнительного мягкого фотона. Такой процесс мы будем называть двойным эффектом Комптона.

В лабораторной системе отсчета ( $p_1 = 0$ ) сечение двойного эффекта Комптона может быть представлено, согласно общему результату п. 5.4.4, в следующем виде:

$$d\sigma_D = -\frac{\alpha}{\pi} d\sigma_0 \frac{U_D}{U_0}, \quad (5.5.7)$$

где  $d\sigma_0$  — сечение основного эффекта Комптона и

$$\frac{U_D}{U_0} = 2(1 - 2y \operatorname{cth} 2y) \left( \ln \frac{2\Delta\epsilon}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) + 4y \operatorname{cth} 2y [h(2y) - 1] \quad (5.5.8)$$

( $\Delta\epsilon$  — максимальная энергия фотона). Суммарное сечение рассеяния фотона электроном с учетом как радиационных поправок, так и излучения дополнительного мягкого фотона определяется формулой

$$d\sigma = d\sigma_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \frac{U_1 + U_D}{U_0} \right). \quad (5.5.9)$$

Эта величина, как легко видеть, не содержит «массы» фотона.

Приведенные общие формулы сильно упрощаются в предельных случаях малых и больших энергий фотона. В области малых энергий, когда  $\omega_1 \approx \omega_2 \equiv \omega \ll m$ , сечение рассеяния имеет вид

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} d\phi \left( 1 - 2 \frac{\omega}{m} + 2 \frac{\omega^2}{m^2} + \dots \right) \left[ U_0 - \frac{\alpha}{\pi} (U_1 + U_D) \right], \quad (5.5.10)$$

где

$$\begin{aligned} U_0 &= 1 + \cos^2 \phi, \\ U_1 &= -\frac{4}{3} \frac{\omega^2}{m^2} (1 - \cos \phi) U_0 \ln \frac{\lambda}{m} + \\ &\quad + \left( 1 + \cos \phi + \cos^2 \phi - \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right) 4 \frac{\omega^2}{m^2} \ln \frac{\omega}{m}, \\ U_D &= -\frac{4}{3} \frac{\omega^2}{m^2} (1 - \cos \phi) U_0 \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

( $\phi$  — угол рассеяния).

В области больших энергий мы будем различать три случая в зависимости от величины параметра  $(\kappa_1 + \kappa_2)/\kappa_2$  (в лабораторной системе этот параметр равен  $\frac{\kappa_1}{2} (1 - \cos \phi)$ ):

$$1) \left| \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_2} \right| \ll 1, \quad 2) \left| \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_2} \right| \sim 1, \quad 3) \left| \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_2} \right| \gg 1.$$

В первом случае  $|\kappa_1| \approx \kappa_2 \gg 1$ ; при этом в лабораторной системе  $\omega_2 \approx \omega_1 \gg m$ ,  $1 - \cos \phi \ll m/\omega_1$ . Во втором случае  $\kappa_2 \gg 1$ ,  $|\kappa_1 + \kappa_2| \gg 1$ , и в лабораторной системе  $\omega_2 \sim \omega_1/2 \gg m$ ,  $1 - \cos \phi \sim m/\omega_1$ . В третьем случае  $|\kappa_1 + \kappa_2| \gg 1$ ,  $|\kappa_1| \gg \kappa_2$ , и в лабораторной системе  $\omega_2 \sim m$ ,  $1 - \cos \phi \gg m/\omega_1$ .

В первом случае

$$U_0 = 2, \quad (5.5.12)$$

$$\begin{aligned} U_1 &= 4 (1 - 2y \operatorname{cth} 2y) \ln \frac{\lambda}{m} - 8y \operatorname{cth} 2y [2h(y) - h(2y)] + \\ &\quad + 4yh(y) \operatorname{cth} y + \ln |\kappa_1| (4y \operatorname{th} y - 1) - 2y^2 - \\ &\quad - 4y \operatorname{th} y + 3 - \ln^2 |\kappa_1| - \pi^2/6, \\ \operatorname{sh}^2 y &= -1/4 (\kappa_1 + \kappa_2). \end{aligned}$$

Во втором случае

$$U_0 = -(\kappa_1/\kappa_2 + \kappa_2/\kappa_1), \quad (5.5.13)$$

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 \left[ (1 - 2y) \left( \frac{3}{2} + 2 \ln \frac{\lambda}{m} \right) + 2y^2 - \frac{\pi^2}{6} \right] + \\ &\quad + \left( 1 + \frac{\kappa_2}{2\kappa_1} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \left[ \ln^2 \left( 1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) + 2 \ln \frac{\kappa_2}{|\kappa_1|} \right] + \\ &\quad + \left( 1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} + \frac{\kappa_1}{2\kappa_2} \right) \left[ \ln^2 \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) - \ln \left| \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right| + \pi^2 \right]. \end{aligned}$$

Наконец, в третьем случае

$$\begin{aligned}
 U_0 &= -\kappa_1/\kappa_2, \\
 U_1 &= U_0 \left\{ 2(1-2y) \ln \frac{\lambda}{m} + \ln \kappa_2 \left[ 2y - \frac{3}{2} \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_2} + \frac{1}{2\kappa_2(\kappa_2 - 1)} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{\kappa_2} [F(\kappa_2 - 1) - F(-1)] \left( \frac{1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{2} \right) + \frac{3}{2} + \frac{2}{\kappa_2} \right\}.
 \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

Величина  $U_D$  во втором и третьем случаях определяется формулой

$$U_D = U_0 \left[ 2(1-2y) \left( \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) + 4y \left( y + \frac{\pi^2}{24y} - 1 \right) \right], \quad (5.5.15)$$

в первом же случае следует пользоваться общей формулой (5.5.8).

**5.5.2. Рассеяние электроном фотонов малой частоты.** В п. 3.6.2 при разъяснении идеи перенормировки заряда электрона мы показали, что сечение рассеяния фотона электроном с учетом высших приближений теории возмущений при нулевой частоте фотона определяется формулой Томсона, т. е. амплитуда этого рассеяния имеет вид

$$M = \frac{\bar{u}_f}{\sqrt{2\varepsilon_f}} A \frac{u_i}{\sqrt{2\varepsilon_i}}, \quad A = -\frac{e\hbar}{m_R} \mathbf{e}\mathbf{e}', \quad \omega \rightarrow 0, \quad (5.5.16)$$

$u_i$  и  $u_f$  — биспиноры, описывающие электрон в начальном и конечном состояниях ( $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_f$  — соответствующие энергии),  $e_R$  и  $m_R$  — заряд и масса реального электрона и  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}'$  — векторы поляризации падающего и рассеянного фотонов. Это выражение, представляющее собой первый член в разложении амплитуды рассеяния фотона электроном по степеням частоты фотона, совпадает с классической амплитудой рассеяния фотона электроном. Оно показывает, что при  $\omega = 0$  радиационные поправки к амплитуде рассеяния сводятся лишь к перенормировке заряда и массы электрона. Это обстоятельство связано с тем, что амплитуда рассеяния фотона электроном имеет конечный и отличный от нуля классический предел (при  $\hbar \rightarrow 0$ ), а из  $e_R$  и  $m_R$  можно составить только одну величину, имеющую размерность длины, а именно классический радиус электрона  $e\hbar/m_R$ . По этой же причине формула (5.5.16) справедлива не только для электрона, но и для всех частиц.

Последующие члены в разложении амплитуды рассеяния фотона электроном по степеням частоты с учетом радиационных поправок имеют более сложную структуру и, как следует из результатов п. 5.5.1, отличаются от соответствующих членов в разложении формулы Клейна — Нишины по степеням  $\omega$ . Исключение представляет линейный по частоте член, который имеет такую же структуру, как и линейный по  $\omega$  член в классической амплитуде рассеяния фотона частицей, обладающей наряду с зарядом еще магнитным моментом — нормальным и аномальным.

Амплитуду рассеяния фотона такой частицей можно определить либо исходя из уравнений Максвелла и уравнений движения частицы в поле, либо, что проще, исходя из уравнения Дирака

$$\left[ \gamma_{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ie_R A_{\mu} \right) + m_R - \frac{1}{2} \mu_{\alpha} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \psi = 0, \quad (5.5.17)$$

описывающего частицу с зарядом  $e_R$ , массой  $m_R$  и аномальным магнитным моментом  $\mu_{\alpha}$  ( $F_{\mu\nu}$  представляет собой тензор поля,  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu})$ ). Мы не будем приводить здесь вычислений амплитуды рассеяния  $M$ , а приведем только окончательный результат (учитывающий не зависящие от  $\omega$  и линейные по  $\omega$  члены):

$$M = \frac{\bar{u}_f(p+k-k')}{\sqrt{2e_f}} A \frac{u_i(p)}{\sqrt{2e_i}} \equiv e'_\nu T_{\nu\mu}(k', k) e_{\mu},$$

$$A = -\frac{e\hat{k}}{m_R} ee' - 2i\mu^2 \omega \Sigma [[n'e']][ne] - \frac{ie_R \mu}{2m_R} \omega \{ (\Sigma n) ([ne]e') + (\Sigma [ne]) (ne') - (\Sigma n') ([n'e']e) + (\Sigma [n'e']) (n'e) \} + \frac{ie_R \mu_{\alpha}}{m_R} \omega (\Sigma [e'e]), \quad (5.5.18)$$

$u_i(p)$  и  $u_f(p+k-k')$  — биспиноры, описывающие начальное и конечное состояния электрона,  $p$  — 4-импульс электрона в начальном состоянии,  $k$  и  $k'$  — 4-импульсы падающего и рассеянного фотонов,  $n = \frac{k}{|k|}$ ,  $n' = \frac{k'}{|k'|}$ ,

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$  ( $\sigma$  — матрицы Паули) и  $\mu = e_R/2m_R + \mu_{\alpha}$  — полный магнитный момент частицы.

Можно показать, что такой же формулой определяются два первых члена в разложении по степеням  $\omega$  амплитуды рассеяния фотона электроном с учетом радиационных поправок, если под  $\mu_{\alpha}$  понимать аномальный магнитный момент электрона [19].

С этой целью разобьем, так же как и в п. 3.6.2, диаграммы, изображающие рассеяние фотона электроном, на две группы — диаграммы, сводящиеся к скелетной диаграмме  $I$  рис. 5.10, и диаграммы, представляющие собой компактные ЭСЭД, к электронным линиям которых присоединены две внешние фотонные линии.

Легко найти вклад, вносимый диаграммами первой группы в тензор  $T_{\nu\mu}(k', k)$ , определяющий амплитуду рассеяния:

$$T_{\nu\mu}^I(k', k) = t_{\nu\mu}^I(k', k) + t_{\nu\mu}^I(-k, -k'), \quad (5.5.19)$$

$$t_{\nu\mu}^I(k', k) = -e_R^2 \bar{u}_f(p+k-k') \Gamma_{\nu}(p+k-k', p+k) \times \times G^{(e)}(p+k) \Gamma_{\mu}(p+k, p) u_i(p)$$

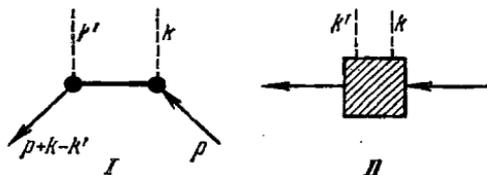


Рис. 5.10.

$(\Gamma_\nu(\rho, q)$  и  $G^{(e)}(\rho)$  — перенормированные вершинная функция и электронная функция Грина).

Определим теперь вклад  $T_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ , вносимый в тензор рассеяния  $T_{\nu\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$  диаграммами второй группы. Напомним для этого, что если имеется некоторая диаграмма, которой соответствует матричный элемент  $M$ , и к какой-либо ее электронной линии с 4-импульсом  $p$  присоединяется фотонная линия с нулевым импульсом и вектором поляризации, направленным вдоль оси  $\mu$ , то новой диаграмме будет соответствовать матричный элемент, равный  $\partial M / \partial \rho_\mu$ . Отсюда следует, что вклад, вносимый в  $T_{\nu\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$  диаграммами второй группы, будет определяться величинами  $\frac{\partial}{\partial \rho_\nu} \Gamma_\mu(\rho + \mathbf{k}, \rho)$  и  $\frac{\partial}{\partial \rho_\mu} \Gamma_\nu(\rho - \mathbf{k}', \rho)$ , в которых вершинная функция должна быть разложена в ряд по степеням волнового вектора фотона, причем в этом разложении должны быть сохранены только члены, не содержащие  $k$  и линейные по  $k$ . Ясно, что члены более высокого порядка при этом учитывались бы неправильно.

Из (5.5.19) следует, что  $T_{\nu\mu}^I(\mathbf{k}', \mathbf{k})$  удовлетворяет условию

$$T_{\nu\mu}^I(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = T_{\mu\nu}^I(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}').$$

Таким же свойством симметрии должен обладать и весь тензор рассеяния  $T_{\nu\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ , а следовательно, и его часть  $T_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ :

$$T_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = T_{\mu\nu}^{II}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}').$$

Учитывая это свойство, можно представить  $T_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$  в виде

$$T_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = t_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + t_{\mu\nu}^{II}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}'), \quad (5.5.20)$$

$$t_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -ie^2 k_\lambda \bar{u}_f(\rho + \mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\partial \Gamma_\mu(\rho', \rho)}{\partial \rho'_\nu} u_i(\rho), \quad \rho' = \rho + \mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \Gamma_\mu(\rho', \rho)}{\partial \rho'_\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma_\mu(\rho, \rho)}{\partial \rho_\nu} + \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} k_\lambda \frac{\partial}{\partial \rho'_\lambda} \Gamma_\mu(\rho', \rho) |_{\rho' = \rho}.$$

Мы должны теперь разложить выражения (5.5.19) и (5.5.20) в ряды по степеням частоты фотона и удержать в них только первые два члена. Из соображений релятивистской инвариантности следует, что нужные нам разложения вершинных функций имеют вид

$$\Gamma_\mu(\rho + \mathbf{k}, \rho) = \Gamma_\mu(\rho, \rho) + \frac{1}{2} k_\lambda \frac{\partial}{\partial \rho_\lambda} \Gamma_\mu(\rho, \rho) + \frac{\rho k}{m_R^2} \sigma_{\mu\lambda} \rho_\lambda F_1(\rho^2) + \frac{\sigma_{\mu\lambda} k_\lambda}{2m_R} F_2(\rho^2) + \frac{k_\lambda \sigma_{\lambda\rho} \rho_\rho \rho_\mu}{m_R^3} F_3(\rho^2), \quad (5.5.21)$$

$$\Gamma_\mu(\rho + \mathbf{k} - \mathbf{k}', \rho + \mathbf{k}) = \Gamma_\mu(\rho, \rho) + \frac{1}{2} (2k_\lambda - k'_\lambda) \frac{\partial}{\partial \rho_\lambda} \Gamma_\mu(\rho, \rho) - \frac{\rho k'}{m_R^2} \sigma_{\mu\lambda} \rho_\lambda F_1(\rho^2) - \frac{\sigma_{\mu\lambda} k'_\lambda}{2m_R} F_2(\rho^2) - \frac{k'_\lambda \sigma_{\lambda\rho} \rho_\rho \rho_\mu}{m_R^3} F_3(\rho^2),$$

где  $F_1(\rho^2)$ ,  $F_2(\rho^2)$  и  $F_3(\rho^2)$  — некоторые функции  $\rho^2$ .

Далее электронную функцию Грина  $G^{(e)}(p)$  мы можем представить в виде

$$G^{(e)}(p) = [i\gamma_\mu \rho_\mu K(p^2) + m_R F(p^2)]^{-1}, \quad (5.5.22)$$

где  $F(p^2)$  и  $K(p^2)$  — некоторые функции  $p^2$ , равные единице при  $p^2 = -m_R^2$ , причем из тождества Уорда легко заключить, что при  $p^2 = -m_R^2$  совпадают производные функций  $F(p^2)$  и  $K(p^2)$  по  $p^2$ . Используя (5.5.22), получим нужное нам разложение  $G^{(e)}(p+k)$

$$G^{(e)}(p+k) = \frac{1}{2pk} \{ -i\gamma_\mu \rho_\mu + m_R - i\gamma_\mu k_\mu + 2pk(-i\gamma_\mu \rho_\mu + m_R)F' - \\ - i\gamma_\mu k_\mu 2pkF' + 2(pk)^2(-i\gamma_\mu \rho_\mu K'' + m_R F'') - \\ - 2pk[2F' + m_R^2(F'' - K'')] [2pk(-i\gamma_\mu \rho_\mu + m_R)F' - i\gamma_\mu k_\mu] \}, \quad (5.5.23)$$

где производные  $F'$ ,  $F''$ ,  $K''$  берутся при  $p^2 = -m_R^2$ .

Наконец, считая, что электрон в начальном состоянии покоится,  $p=0$ , мы можем, согласно (1.1.27), представить  $u_i(p)$  и  $u_f(p+k-k')$  в виде

$$u_i(p) = \sqrt{2m_R} \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5.24) \\ u_f(p+k-k') = \sqrt{2m_R} \begin{pmatrix} v_f \\ \frac{\sigma(k-k')}{2m_R} v_f \end{pmatrix},$$

где  $v_i$  и  $v_f$  — двухкомпонентные спиноры, описывающие начальное и конечное состояния.

Используя формулы (5.5.21), (5.5.23) и (5.5.24), получим следующее выражение для амплитуды рассеяния фотона электроном:

$$M = v_f^* A v_i, \quad A = A^I + A^{II},$$

где  $A^I$  и  $A^{II}$  — вклады, вносимые в величину  $A$  диаграммами первой и второй групп, равные

$$A^I = -\frac{e_R^2}{m_R} e e' - \frac{ie_R^2}{2m_R^2} (1 - F_2)^2 \omega (\sigma[[n'e']][ne]) - \frac{ie_R^2}{2m_R^2} (1 - F_2) \omega \times \\ \times \{ (\sigma n)([ne]e') + (\sigma[ne])(ne') - (\sigma n')([n'e']e) - (\sigma[n'e'])(n'e) \} - \\ - \frac{ie_R^2}{2m_R} (4F_1 - F_2) \omega (\sigma[e'e]), \quad (5.5.25) \\ A^{II} = -\frac{2ie_R^2}{m_R^2} F_1 \omega (\sigma[e'e]).$$

Сумма величин  $A^I$  и  $A^{II}$  имеет, как мы видим, ту же структуру, что и величина  $A$ , определяемая формулой (5.5.18), и нам остается лишь убедиться, что аномальный магнитный момент электрона  $\mu_\alpha$  имеет вид

$$\mu_\alpha = -\mu_0 F_2, \quad (5.5.26)$$

где  $\mu_0 = e_R / 2m_R$ .

Рассмотрим для этого рассеяние электрона во внешнем электромагнитном поле  $A_{\mu}^{(e)}(x)$ . Матричный элемент, определяющий рассеяние, равен, очевидно,

$$M = -ie_R \frac{\bar{u}_f(p+q)}{\sqrt{2\varepsilon_f}} \Gamma_{\mu}(p+q, p) A_{\mu}^{(e)}(q) \frac{u_i(p)}{\sqrt{2\varepsilon_i}}.$$

Считая, что потенциал  $A_{\mu}^{(e)}(x)$  соответствует однородному магнитному полю, и предполагая, что электрон вначале покоится, получим, используя (5.5.21) и (5.5.24), следующее выражение для линейного по  $k$  слагаемого в  $M$ :

$$M \sim -\bar{u}_f \mu_0 (1 - F_2) \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} u_i.$$

С другой стороны, можно определить  $M$ , основываясь на уравнении (5.5.17):

$$M \sim -\bar{u}_f (\mu_0 + \mu_a) \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} u_i.$$

Сравнение этих выражений приводит к формуле (5.5.26).

Обратим внимание на тот факт, что основной вклад в амплитуду рассеяния  $A$  вносят диаграммы первой группы. Можно убедиться в том, что величина  $A^{11}$  лишь компенсирует те члены в  $A^1$ , наличие которых противоречит калибровочной инвариантности амплитуды рассеяния (ср. аналогичную ситуацию в амплитуде излучения мягкого фотона в § 4.4). Отсюда следует, что формула (5.5.18) справедлива не только для электронов, но и для произвольных частиц. Действительно, диаграммы первой группы носят универсальный характер, и вносимый ими вклад в  $A$  определяется только поведением функции Грина частицы вблизи полюса  $p^2 = -m_R^2$  и структурой вершинной функции  $\Gamma_{\mu}(p+k, p)$  при малых  $k$  (см. § 3.5).

Таким образом, рассеяние фотона любой частицей независимо от ее природы (в том числе адронов с произвольным спином) определяется с точностью до членов, линейных по частоте, только зарядом  $e_R$  и магнитным моментом частицы  $\mu$  (которые следует рассматривать как эмпирические константы).

**5.5.3. Радиационные поправки к сечению двухфотонной аннигиляции пар.** Зная радиационные поправки к сечению эффекта Комптона, легко найти радиационные поправки к сечению двухфотонной аннигиляции пар [20]. Действительно, диаграммы, изображающие двухфотонную аннигиляцию с радиационными поправками (рис. 5.11), топологически не отличаются от диаграмм, изображающих эффект Комптона с поправками (рис. 5.9). Различие состоит лишь в том, что вместо двух электронных состояний в эффекте Комптона в процессе двухфотонной аннигиляции мы имеем дело с одним электронным и одним позитронным состоя-

нием и, кроме того, в эффекте Комптона один фотон поглощается, а другой испускается, а в процессе аннигиляции пары оба фотона испускаются. Поэтому если в формуле, определяющей амплитуду рассеяния фотона электроном с радиационными поправками, изменить знак у 4-импульса падающего фотона и рассеянного электрона, то мы получим сечение двухфотонной аннигиляции пар с учетом радиационных поправок.

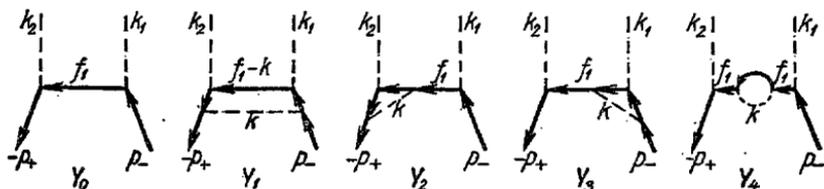


Рис. 5.11.

Итак, мы должны сделать в формуле (5.5.1) замену

$$p_1 \rightarrow p_-, \quad p_2 \rightarrow -p_+, \quad k_1 \rightarrow -k_1, \quad k_2 \rightarrow k_2,$$

где  $p_-$  и  $p_+$  — 4-импульсы электрона и позитрона и  $k_1$  и  $k_2$  — 4-импульсы обоих фотонов, и понимать под инвариантами  $\kappa_1, \kappa_2$  величины

$$m^2 \kappa_1 = -2p_- k_1 = -2p_+ k_2, \quad m^2 \kappa_2 = -2p_+ k_1 = -2p_- k_2.$$

В результате мы получим следующую формулу для сечения двухфотонной аннигиляции пар с радиационными поправками:

$$d\sigma_\lambda = d\sigma_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left[ \left( 2 + \frac{1+\beta^2}{\beta} \ln b \right) \ln \frac{\lambda}{m} - \frac{1+\beta^2}{\beta} (\ln \beta \ln b + 2F(-b) - \frac{1}{2} F(b^2) - \frac{\pi^2}{4}) + G(\kappa_1, \kappa_2) + G(\kappa_2, \kappa_1) \right] \right\}, \quad (5.5.27)$$

где  $d\sigma_0$  — сечение основного процесса двухфотонной аннигиляции пар

$$d\sigma_0 = \frac{\alpha^2}{4e^2\beta} \left[ \frac{1+\beta^2(2-x^2)}{1-\beta^2x^2} - \frac{2\beta^4(1-x^2)^2}{(1-\beta^2x^2)^2} \right] d\omega,$$

$$m^2 \kappa_1 = -2p_- k_1 = 2\varepsilon^2(1+\beta x), \quad x = \cos(\widehat{p k_1}),$$

$$m^2 \kappa_2 = -2p_- k_2 = 2\varepsilon^2(1-\beta x), \quad \beta^2 = 1 - 4m^2/s,$$

$$s = -2p_+ p_- = 4\varepsilon^2 \quad (\varepsilon - \text{энергия позитрона}).$$

$$b = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad F(x) = \int_0^x \frac{dz}{z} \ln(1-z).$$

Величина  $G(\kappa_1, \kappa_2)$  определяется формулой

$$\begin{aligned}
 U_0 G(\kappa_1, \kappa_2) = & [h(2x) - h(x)] \left[ \frac{4}{\kappa_1 \kappa_2} x \operatorname{sh} 2x (1 + 2 \operatorname{ch}^2 x) + 2x \operatorname{th} x \right] + \\
 & + \ln |\kappa_1| \left[ 4x \operatorname{cth} 2x \left( \frac{4}{\kappa_1^2} - \frac{1}{\kappa_1} - \frac{\kappa_2}{2\kappa_1} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} - 1 - \frac{4}{\kappa_1 \kappa_2} \operatorname{sh}^2 x \right) - \right. \\
 & - \frac{2x}{\operatorname{sh} 2x} \left( \frac{\kappa_1 - 6}{\kappa_2} \right) + \frac{3\kappa_2}{2\kappa_1^2} (1 + \kappa_1) + \frac{3}{\kappa_2} + 1 - \frac{7}{\kappa_1 \kappa_2} + \frac{8}{\kappa_1} - \frac{8}{\kappa_1^2} - \\
 & - \frac{\kappa_2^2 - 2\kappa_1 + \kappa_1^2 \kappa_2}{2\kappa_1^2 \kappa_2 (\kappa_1 - 1)} - \frac{2\kappa_1^2 + \kappa_2}{2\kappa_2 (\kappa_1 - 1)^2} \left. \right] - 4x \operatorname{cth} x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_1} \right) + \\
 & + \frac{\pi^2/4 - x^2}{\operatorname{ch}^2 x} \left( \frac{2}{\kappa_1} - \frac{7\kappa_1}{4} - \frac{3\kappa_1^2}{4\kappa_2} \right) + 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - \frac{12}{\kappa_1} - \frac{3\kappa_1}{2\kappa_2} - \frac{2\kappa_2}{\kappa_1} + \\
 & + \frac{1}{\kappa_1 - 1} \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{\kappa_1} [F(\kappa_1 - 1) - F(-1)] \times \\
 & \times \left( \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1^2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{2}{\kappa_1} - \frac{3}{\kappa_2} - 1 \right), \\
 U_0 = & \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) + 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

В это выражение входит «масса» фотона. Для того чтобы исключить ее, к сечению  $d\sigma$  должно быть добавлено сечение  $d\sigma'$  трехфотонной аннигиляции пары, при которой наряду с фотонами  $k_1$  и  $k_2$  испускается мягкий фотон  $k_3$ , энергия которого не превосходит  $\Delta\varepsilon$ . В с.ц.и. сечение  $d\sigma'$  равно

$$\begin{aligned}
 d\sigma' = d\sigma_0 \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left( 2 + \frac{1 + \beta^2}{\beta} \ln b \right) \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} - \frac{1}{\beta} \ln b - \right. \\
 \left. - \frac{1 - \beta^2}{\beta} \left[ \frac{1}{4} \ln^2 b - F \left( \frac{2\beta}{1 + \beta} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Приведем теперь формулы для суммарного сечения  $d\sigma = d\sigma_\lambda + d\sigma'$  в случаях малых и больших энергий. В нерелятивистском пределе

$$d\sigma = d\sigma_0 \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left( 5 - \frac{\pi^2}{4} \right) \right].$$

В ультрарелятивистском пределе имеем

$$\begin{aligned}
 d\sigma = \frac{\alpha^2}{8\varepsilon^2} \left\{ u \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left( 2(\rho - 1) \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} - \frac{3}{2}(\rho - 1) - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] + \right. \\
 + \frac{\alpha}{\pi} \left[ \left( 1 + \frac{3\chi}{2\tau} \right) (\ln \tau - \rho) + \left( 1 + \frac{3\tau}{2\chi} \right) (\ln \chi - \rho) + \right. \\
 \left. \left. + \left( 1 + \frac{\tau}{\chi} + \frac{\chi}{2\tau} \right) (\ln \tau - \rho)^2 + \left( 1 + \frac{\chi}{\tau} + \frac{\tau}{2\chi} \right) (\ln \chi - \rho)^2 \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\chi = \frac{4\varepsilon^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \tau = \frac{4\varepsilon^2}{m^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad \theta = \widehat{k_1 p_1} \quad (\theta \sim 1),$$

$$\rho = \ln \frac{4\varepsilon^2}{m^2}, \quad u = \frac{\chi}{\tau} + \frac{\tau}{\chi}.$$

**5.5.4. Радиационные поправки к сечению тормозного излучения.** Рассмотрим радиационные поправки к сечению тормозного излучения электрона в кулоновском поле ядра [21]. Диаграммы, изображающие основной процесс излучения и радиационные поправки к нему, представлены на рис. 5.12 (кроме этих диаграмм нужно, естественно, учитывать диаграммы с переставленными фотонными линиями). Так как матричные элементы, соответствующие диаграммам  $Y_i$ , содержат инфракрасную расходимость, то наряду с радиационными поправками нужно учитывать также двойное тормозное излучение, при котором вместе с фотоном ( $k, \omega$ ) излучается мягкий фотон ( $k', \omega'$ ).

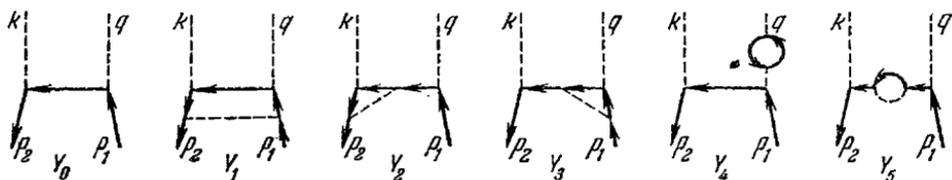


Рис. 5.12.

Мы приведем только окончательные результаты для нескольких наиболее интересных предельных случаев.

Запишем радиационные поправки к сечению тормозного излучения и сечение двойного тормозного излучения в виде

$$d\sigma_R = -\frac{\alpha}{\pi} \delta_R d\sigma_0, \quad d\sigma_D = -\frac{\alpha}{\pi} \delta_D d\sigma_0, \quad (5.5.28)$$

где  $d\sigma_0$  — сечение основного процесса. Тогда в предельном случае  $\omega \varepsilon_1 \ll m^2$  (мы пользуемся теми же обозначениями, что и в § 28.1) величины  $\delta_R$  и  $\delta_D$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \delta_R = & 2(1 - 2x \operatorname{cth} 2x) \left( \ln \frac{\lambda}{m} + 1 \right) + x \operatorname{th} x + \\ & + 4x \operatorname{cth} 2x [h(2x) - h(x)] + \frac{2x}{\operatorname{sh} 2x} \frac{v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \\ & + 2(1 - x \operatorname{ctg} x) \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 x \right) - \frac{2}{9}; \quad (5.5.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_D = & 2(1 - 2x \operatorname{cth} 2x) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{v} \ln \frac{1-v}{1+v} + \\ & + \frac{1-v^2}{v \sin \frac{\theta}{2}} \operatorname{ch} 2x G(v, \theta), \end{aligned}$$

$$G(v, \theta) = \int_{\cos \frac{\theta}{2}}^1 \frac{du}{(1-v^2 u^2) \sqrt{u^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \ln \frac{1+vu}{1-vu},$$

Величина  $G(\kappa_1, \kappa_2)$  определяется формулой

$$\begin{aligned}
 U_0 G(\kappa_1, \kappa_2) = & [h(2x) - h(x)] \left[ \frac{4}{\kappa_1 \kappa_2} x \operatorname{sh} 2x (1 + 2 \operatorname{ch}^2 x) + 2x \operatorname{th} x \right] + \\
 & + \ln |\kappa_1| \left[ 4x \operatorname{cth} 2x \left( \frac{4}{\kappa_1^2} - \frac{1}{\kappa_1} - \frac{\kappa_2}{2\kappa_1} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} - 1 - \frac{4}{\kappa_1 \kappa_2} \operatorname{sh}^2 x \right) - \right. \\
 & - \frac{2x}{\operatorname{sh} 2x} \left( \frac{\kappa_1 - 6}{\kappa_2} \right) + \frac{3\kappa_2}{2\kappa_1^2} (1 + \kappa_1) + \frac{3}{\kappa_2} + 1 - \frac{7}{\kappa_1 \kappa_2} + \frac{8}{\kappa_1} - \frac{8}{\kappa_1^2} - \\
 & - \frac{\kappa_2^2 - 2\kappa_1 + \kappa_1^2 \kappa_2}{2\kappa_1^2 \kappa_2 (\kappa_1 - 1)} - \frac{2\kappa_1^2 + \kappa_2}{2\kappa_2 (\kappa_1 - 1)^2} \left. \right] - 4x \operatorname{cth} x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_1} \right) + \\
 & + \frac{\pi^2/4 - x^2}{\operatorname{ch}^2 x} \left( \frac{2}{\kappa_1} - \frac{7\kappa_1}{4} - \frac{3\kappa_1^2}{4\kappa_2} \right) + 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - \frac{12}{\kappa_1} - \frac{3\kappa_1}{2\kappa_2} - \frac{2\kappa_2}{\kappa_1} + \\
 & + \frac{1}{\kappa_1 - 1} \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{\kappa_1} [F(\kappa_1 - 1) - F(-1)] \times \\
 & \times \left( \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1^2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{2}{\kappa_1} - \frac{3}{\kappa_2} - 1 \right), \\
 U_0 = & \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) + 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - 4 \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

В это выражение входит «масса» фотона. Для того чтобы исключить ее, к сечению  $d\sigma$  должно быть добавлено сечение  $d\sigma'$  трехфотонной аннигиляции пары, при которой наряду с фотонами  $k_1$  и  $k_2$  испускается мягкий фотон  $k_3$ , энергия которого не превосходит  $\Delta\varepsilon$ . В с.ц.и. сечение  $d\sigma'$  равно

$$\begin{aligned}
 d\sigma' = d\sigma_0 \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left( 2 + \frac{1 + \beta^2}{\beta} \ln b \right) \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} - \frac{1}{\beta} \ln b - \right. \\
 \left. - \frac{1 - \beta^2}{\beta} \left[ \frac{1}{4} \ln^2 b - F \left( \frac{2\beta}{1 + \beta} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Приведем теперь формулы для суммарного сечения  $d\sigma = d\sigma_\lambda + d\sigma'$  в случаях малых и больших энергий. В нерелятивистском пределе

$$d\sigma = d\sigma_0 \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left( 5 - \frac{\pi^2}{4} \right) \right].$$

В ультрарелятивистском пределе имеем

$$\begin{aligned}
 d\sigma = \frac{\alpha^2}{8\varepsilon^2} \left\{ u \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left( 2(\rho - 1) \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} - \frac{3}{2}(\rho - 1) - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] + \right. \\
 + \frac{\alpha}{\pi} \left[ \left( 1 + \frac{3\chi}{2\tau} \right) (\ln \tau - \rho) + \left( 1 + \frac{3\tau}{2\chi} \right) (\ln \chi - \rho) + \right. \\
 \left. \left. + \left( 1 + \frac{\tau}{\chi} + \frac{\chi}{2\tau} \right) (\ln \tau - \rho)^2 + \left( 1 + \frac{\chi}{\tau} + \frac{\tau}{2\chi} \right) (\ln \chi - \rho)^2 \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\chi = \frac{4\varepsilon^2}{m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \tau = \frac{4\varepsilon^2}{m^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad \theta = \widehat{k_1 p_1} \quad (\theta \sim 1),$$

$$\rho = \ln \frac{4\varepsilon^2}{m^2}, \quad u = \frac{\chi}{\tau} + \frac{\tau}{\chi}.$$

**5.5.4. Радиационные поправки к сечению тормозного излучения.** Рассмотрим радиационные поправки к сечению тормозного излучения электрона в кулоновском поле ядра [21]. Диаграммы, изображающие основной процесс излучения и радиационные поправки к нему, представлены на рис. 5.12 (кроме этих диаграмм нужно, естественно, учитывать диаграммы с переставленными фотонными линиями). Так как матричные элементы, соответствующие диаграммам  $Y_i$ , содержат инфракрасную расходимость, то наряду с радиационными поправками нужно учитывать также двойное тормозное излучение, при котором вместе с фотоном  $(k, \omega)$  излучается мягкий фотон  $(k', \omega')$ .

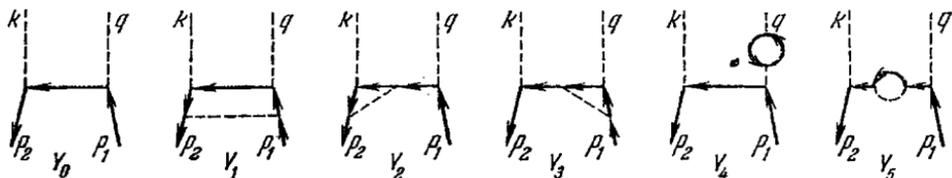


Рис. 5.12.

Мы приведем только окончательные результаты для нескольких наиболее интересных предельных случаев.

Запишем радиационные поправки к сечению тормозного излучения и сечение двойного тормозного излучения в виде

$$d\sigma_R = -\frac{\alpha}{\pi} \delta_R d\sigma_0, \quad d\sigma_D = -\frac{\alpha}{\pi} \delta_D d\sigma_0, \quad (5.5.28)$$

где  $d\sigma_0$  — сечение основного процесса. Тогда в предельном случае  $\omega \epsilon_1 \ll m^2$  (мы пользуемся теми же обозначениями, что и в § 28.1) величины  $\delta_R$  и  $\delta_D$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \delta_R = & 2(1 - 2x \operatorname{cth} 2x) \left( \ln \frac{\lambda}{m} + 1 \right) + x \operatorname{th} x + \\ & + 4x \operatorname{cth} 2x [h(2x) - h(x)] + \frac{2x}{\operatorname{sh} 2x} \frac{v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \\ & + 2(1 - x \operatorname{ctg} x) \left( 1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 x \right) - \frac{2}{9}; \quad (5.5.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_D = & 2(1 - 2x \operatorname{cth} 2x) \ln \frac{2\Delta\epsilon}{\lambda} + \frac{1}{v} \ln \frac{1-v}{1+v} + \\ & + \frac{1-v^2}{v \sin \frac{\theta}{2}} \operatorname{ch} 2x G(v, \theta), \end{aligned}$$

$$G(v, \theta) = \int_{\cos \frac{\theta}{2}}^1 \frac{du}{(1-v^2 u^2) \sqrt{u^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \ln \frac{1+vu}{1-vu}$$

где  $x$  связано с  $m^2\rho \equiv q^2 = (-2 + \kappa_1 + \kappa_2)m^2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - |\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta)$  соотношением  $\rho = 4\text{sh}^2 x$ .

В крайне релятивистском случае, когда выполняются не только условия  $\varepsilon_1, \varepsilon_2\omega \gg m$ , но и условие  $\ln|\kappa_1|, \ln\kappa_2, \ln\rho, \ln(\rho - \kappa_1 - \kappa_2) \gg 1$  (однако  $\ln\frac{\rho}{|\kappa_1|}, \ln\frac{\rho}{\kappa_2}, \ln\frac{\rho - \kappa_1 - \kappa_2}{|\kappa_1|}, \ln\frac{\rho - \kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_2} \sim 1$ ), величины  $\delta_R$  и  $\delta_D$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \delta_R &= 2(1 - 2y) \ln \frac{\lambda}{m} + 2y^2 - 3y - \frac{4}{3}x, \\ \delta_D &= 2(1 - 2y) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + 2y^2 - 2y \ln \frac{(\rho - \kappa_1 - \kappa_2)m^2}{4\varepsilon_1\varepsilon_2} - \ln \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{m^2}, \end{aligned} \quad (5.5.30)$$

где  $x = 1/2 \ln \rho$ ,  $y = 1/2 \ln(\rho - \kappa_1 - \kappa_2)$ .

Наконец, в нерелятивистском случае

$$\begin{aligned} \delta_R &= \frac{2}{3} \left[ -(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \left( \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{1}{5} \right) + 2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \mathbf{k} \ln \frac{\omega}{m} \right], \\ \delta_D &= \frac{2}{3} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \left( \frac{5}{6} - \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (5.5.31)$$

При  $\mathbf{p}_1 \rightarrow 0$  поправки к сечению исчезают.

**5.5.5. Радиационные поправки к сечению превращения электронно-позитронной пары в мюонную пару.** В заключение этого параграфа рассмотрим еще процесс превращения электронно-позитронной пары в мюонную пару с учетом радиационных поправок порядка  $\alpha$ . Соответствующие диаграммы изображены на рис. 5.13 (двойные линии означают мюоны).

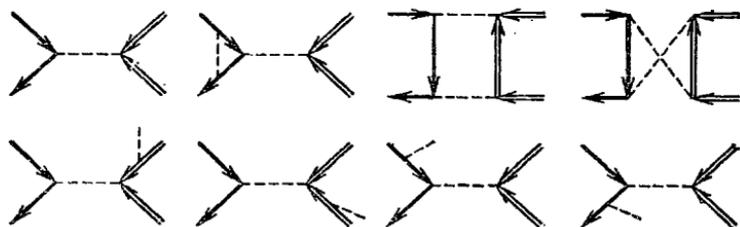


Рис. 5.13.

Сечение этого процесса в ультрарелятивистском случае имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\sigma_0 \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left[ -2 \left( \ln \frac{4\varepsilon^2}{m\mu} - 1 \right) \left( \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} - \frac{13}{12} \right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{17}{18} \right] + \right. \\ &+ \frac{2\alpha}{\pi} \left[ 4 \ln \text{ctg} \frac{\theta}{2} \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} - 2 \ln^2 \cos \frac{\theta}{2} + 2 \ln^2 \sin \frac{\theta}{2} - F \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ &+ \left. \left. F \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} + \frac{\alpha^3}{4\pi\varepsilon^2} \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} \ln \sin \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \ln \cos \frac{\theta}{2} - \right. \\ &\left. - \cos \theta \left( \ln^2 \cos \frac{\theta}{2} + \ln^2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.5.32)$$

где  $d\sigma_0$  — сечение основного процесса в ультрарелятивистском приближении

$$d\sigma_0 = \frac{\alpha^2}{16e^2} (1 + \cos^2 \theta) d\theta,$$

$\varepsilon$  — энергия позитрона в с. п. и.,  $\Delta\varepsilon$  — максимальная энергия мягкого фотона,  $\theta$  — угол между импульсами электрона и мезона.

## § 5.6. Нелинейная электродинамика вакуума

**5.6.1. Тензор рассеяния фотона фотоном четвертого ранга.** Взаимодействие электромагнитных полей с вакуумом электронно-позитронного поля должно приводить к взаимодействию этих полей, в частности к взаимодействию фотонов друг с другом. Действительно, рассмотрим два фотона с 4-импульсами  $k_1$  и  $k_2$ , энергия которых недостаточна для образования пары. Эти фотоны могут, однако, образовать две виртуальные пары, в результате аннигиляции которых появятся два фотона с импульсами  $k_3$  и  $k_4$ , связанными с импульсами первоначальных фотонов  $k_1$  и  $k_2$  единственным условием — законом сохранения энергии-импульса  $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ . Этот процесс представляет собой рассеяние фотона фотоном [22]. Он, очевидно, не может быть описан с помощью классических уравнений поля, так как в классической электродинамике вакуума электромагнитные волны распространяются независимо друг от друга.

Для того чтобы уравнения поля описывали процесс рассеяния фотона фотоном, а также другие процессы взаимодействия между электромагнитными полями, они должны быть нелинейными в отличие от линейных уравнений Максвелла. Отсюда следует, что лагранжиан электромагнитного поля в вакууме не может быть квадратичной функцией полей, т. е. должен отличаться от  $L_0 = \frac{1}{2} (E^2 - H^2)$ .

В дальнейшем приближении теории возмущений, которым мы здесь ограничимся, процессы взаимодействия между электромагнитными полями описываются матрицей рассеяния 4-порядка  $S^{(4)}$ :

$$S^{(4)} = \frac{e^4}{4!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 T \{ N(\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1)) \times \\ \times N(\bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2)) N(\bar{\psi}(x_3) \hat{A}(x_3) \psi(x_3)) N(\bar{\psi}(x_4) \hat{A}(x_4) \psi(x_4)) \}$$

и изображаются шестью диаграммами рис. 5.14. Заменяя произведения электронных операторов соответствующими связями и учитывая, что все шесть диаграмм вносят одинаковый вклад в матричные элементы, представим интересующую нас часть матрицы  $S^{(4)}$  в виде

$$S^{(4)} = -\frac{e^4}{4} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 N(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\lambda(x_3) A_\sigma(x_4)) \times \\ \times \text{Sp} \{ \gamma_\mu S_c(x_2 - x_1) \gamma_\nu S_c(x_3 - x_2) \gamma_\lambda S_c(x_4 - x_3) \gamma_\sigma S_c(x_1 - x_4) \},$$

или в импульсном пространстве

$$S^{(4)} = -\frac{i}{4} \frac{\alpha^2}{(2\pi)^{12}} \int d^4k_1 \int d^4k_2 \int d^4k_3 \int d^4k_4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\ \times N(A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4)) T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (5.6.1)$$

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{1}{i\pi^2} \int d^4p \operatorname{Sp} \{ \gamma_\mu(i\hat{p} + m)^{-1} \times \\ \times \gamma_\nu(i\hat{p} - i\hat{k}_2 + m)^{-1} \gamma_\lambda(i\hat{p} - i\hat{k}_3 + m)^{-1} \times \\ \times \gamma_\sigma(i\hat{p} - i\hat{k}_2 - i\hat{k}_3 - i\hat{k}_4 + m)^{-1} \}.$$

Вместо тензора  $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ , который в области больших импульсов виртуальных электронов расходится логарифмически, удобно ввести симметризованный относительно одновременной перестановки тензорных индексов и переменных  $k_i$  тензор

$$J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \\ + T_{\mu\nu\sigma\lambda}(k_1, k_2, k_4, k_3) + T_{\mu\lambda\nu\sigma}(k_1, k_3, k_2, k_4),$$

который не содержит расходящихся выражений. Он называется тензором рассеяния фотона фотоном четвертого ранга.

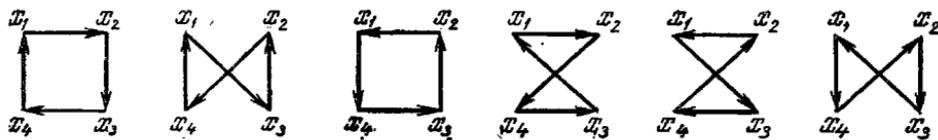


Рис. 5.14.

Ясно, что в выражении (5.6.1) можно заменить тензор  $T_{\mu\nu\lambda\sigma}$  тензором  $1/3 J_{\mu\nu\lambda\sigma}$ . Хотя тензор  $J_{\mu\nu\lambda\sigma}$  и не содержит расходящихся выражений, он, так же как и исходный тензор  $T_{\mu\nu\lambda\sigma}$ , не удовлетворяет требованию калибровочной инвариантности и должен быть поэтому регуляризован. Согласно результатам п. 3.7.3 регуляризованное значение тензора рассеяния фотона фотоном равно

$$J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) - J_{\mu\nu\lambda\sigma}(0, 0, 0, 0),$$

а регуляризованная матрица  $S_R^{(4)}$  имеет вид

$$S_\mu^{(4)} = -\frac{i}{12} \frac{\alpha^2}{(2\pi)^{12}} \int d^4k_1 \int d^4k_2 \int d^4k_3 \int d^4k_4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\ \times N(A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4)) J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4). \quad (5.6.2)$$

**5.6.2. Сечение рассеяния фотона фотоном.** Свяжем с тензором  $J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$  сечение рассеяния фотона фотоном. Рассмотрим процесс, в котором электронно-позитронным вакуумом поглощаются фотоны с импульсами  $k_1$  и  $k_2$  и поляризациями  $e_1$  и  $e_2$  и испускаются фотоны с импульсами  $k_3$  и  $k_4$  и поляризациями  $e_3$  и  $e_4$ . Этому процессу соответствует шесть диаграмм, изображенных

на рис. 5.15. Диаграммы 1, 2, 3 и 4, 5, 6 отличаются друг от друга только направлением обхода электронной петли, поэтому соответствующие им матричные элементы одинаковы. Суммарный регуляризованный матричный элемент рассеяния фотона фотоном определяется формулой

$$\langle f | S_R^{(4)} | i \rangle = -\frac{i}{2} \alpha^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(k_3 + k_4 - k_1 - k_2)}{(\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{1/2}} e_{1\mu} e_{2\nu} e_{3\lambda} e_{4\sigma} \times \\ \times J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4). \quad (5.6.3)$$

Для определения сечения рассеяния фотона фотоном, являющегося, согласно результатам п. 3.4.3, инвариантом, удобно перейти

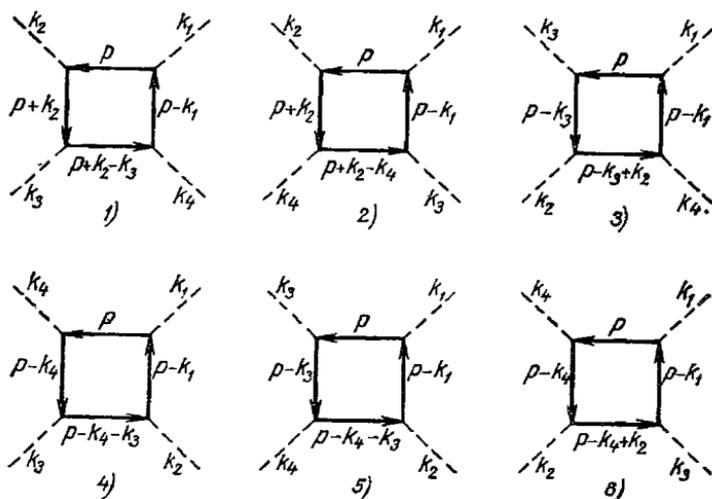


Рис. 5.15.

в с.ц.и. фотонов, в которой суммарный трехмерный импульс фотонов до и после рассеяния равен нулю:  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = 0$ ; 4-импульсы фотонов в этой системе имеют вид

$$k_1 = (\mathbf{k}, i\omega), \quad k_2 = (-\mathbf{k}, i\omega), \quad k_3 = (\mathbf{k}', i\omega), \quad k_4 = (-\mathbf{k}', i\omega),$$

где  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ .

Учитывая, что плотность потока фотонов  $k_1$  относительно фотонов  $k_2$  равна 2, получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния фотона фотоном:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\alpha^4}{16\omega^2} |e_{1\mu} e_{2\nu} e_{3\lambda} e_{4\sigma} J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4)|^2 d\omega,$$

где  $d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  — телесный угол, в котором лежит импульс фотона  $k_3$  ( $\theta$  — угол рассеяния, т. е. угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ ).

В эту формулу входят линейные поляризации фотонов. Часто оказывается более удобным пользоваться круговыми поляризациями и соответственно спиральными амплитудами.

Сечение рассеяния фотонов со спиральностями  $\lambda_1, \lambda_2$ , в результате которого возникают фотоны со спиральностями  $\lambda_3, \lambda_4$  (состоя-

ние с  $\lambda = +1$  отвечает правополяризованному фотону, с  $\lambda = -1$  — левополяризованному фотону), определяется формулой

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{(2\pi)^3 \omega^2} |M_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_3 \lambda_4}|^2 d\Omega, \quad M_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_3 \lambda_4} = 1/4 J_{\mu\nu\rho\sigma} u_\mu^{(-\lambda_1)} u_\nu^{\lambda_2} u_\rho^{\lambda_3} u_\sigma^{(-\lambda_4)},$$

где величины  $u_\mu^\lambda$  представляют собой коэффициенты преобразования от линейных поляризаций к круговым [23]

$$u_\mu^{\lambda_i} = \frac{i}{4\sqrt{2\Delta}} (\chi_\mu + \lambda_i \kappa_\mu(i)), \quad \Delta = rst, \quad (5.6.4)$$

$$\begin{aligned} \chi_\mu &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_{1\nu} k_{2\rho} k_{3\sigma}, \\ \kappa_\mu(i) &= (k_2 k_3) k_{1\mu} + (k_1 k_3) k_{2\mu} - (k_1 k_2) k_{3\mu}, \quad i = 1, 2; \\ \kappa_\mu(i) &= -(k_3 k_4) k_{1\mu} + (k_1 k_4) k_{3\mu} + (k_1 k_3) k_{4\mu}, \quad i = 3, 4; \\ r &= -1/2 k_1 k_2, \quad s = -1/2 k_1 k_3, \quad t = 1/2 k_1 k_4. \end{aligned}$$

Спиральные амплитуды  $M_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_3 \lambda_4}$  обладают следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} M_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_3 \lambda_4} &= M_{-\lambda_1 -\lambda_2; -\lambda_3 -\lambda_4}; \\ M_{++; +-} &= M_{++; -+} = M_{+-; ++} = M_{-+; ++}; \\ M_{+-; +-}(r, s, t) &= M_{++; ++}(t, s, r); \\ M_{++; ++}(s, r, t) &= M_{+-; -+}(r, s, t); \\ M_{++; ++}(r, s, t) &= M_{++; ++}(r, t, s). \end{aligned}$$

Поэтому из 16 амплитуд независимыми являются только три:  $M_{++; ++}$ ,  $M_{++; +-}$ ,  $M_{++; --}$ . Эти величины имеют вид

$$\begin{aligned} M_{++; ++} &= 1 + \left(2 + 4 \frac{s}{r}\right) B(s) + \left(2 + 4 \frac{t}{r}\right) B(t) + \\ &+ 2 \left(\frac{s^2 + t^2}{r^2} - \frac{m^2}{r}\right) [T(s) + T(t)] + \frac{m^2}{s} \left(\frac{m^2}{2r} - 1\right) I(s, r) + \\ &+ \frac{m^2}{t} \left(\frac{m^2}{2r} - 1\right) I(r, t) + \left[\frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{t} + \frac{4m^2}{r} + \frac{m^4}{2st} - \frac{2(s^2 + t^2)}{r^2}\right] I(s, t), \quad (5.6.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{++; +-} &= -1 - m^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right) [T(r) + T(s) + T(t)] + \\ &+ \left(\frac{m^2}{t} + \frac{m^4}{2rs}\right) I(r, s) + \left(\frac{m^2}{s} + \frac{m^4}{2rt}\right) I(r, t) + \left(\frac{m^2}{r} + \frac{m^4}{2st}\right) I(s, t), \quad (5.6.6) \end{aligned}$$

$$M_{++; --} = -1 + \frac{m^4}{2rs} I(r, s) + \frac{m^4}{2rt} I(r, t) + \frac{m^4}{2st} I(s, t), \quad (5.6.7)$$

$$B(r) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx l(x), \quad T(r) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{l(x)}{1-x^2}, \quad F(r, a) = \int_0^1 dx \frac{l(x)}{a^2 - x^2},$$

$$l(x) = \ln \left[ 1 - \frac{r}{m^2} (1 - x^2) - i0 \right], \quad I(r, s) = F(r, a) + F(s, a),$$

$$a = \sqrt{1 + \frac{tm^2}{rs}}.$$

В области высоких частот  $r, |t|, |s| \gg m^2$ , так что

$$M_{++; ++}(x) = 1 + (2x - 1) L_2 + \frac{1}{2} [x^2 + (1 - x)^2] (L_2^2 + \pi^2),$$

$$M_{+-; +-}(x) = 1 + \left(1 - \frac{2}{x}\right) (L_1 - i\pi) + \frac{1}{2x^2} [1 + (1 - x)^2] (L_1^2 - 2i\pi L_1) = \\ = M_{++++} + \left(\frac{1}{x + i0}\right),$$

$$M_{+-; -+}(x) = M_{+-; +-}(x \rightarrow (1 - x)), \quad M_{++; +-} = M_{+-; --} = -1, \\ L_1 = \ln \frac{r}{s} = \ln \frac{1}{1-x}, \quad L_2 = \ln \left| \frac{s}{t} \right| = \ln \frac{1-x}{x}.$$

Приведем теперь выражения для сечения рассеяния фотона фотоном в области малых ( $\omega \ll m$ ) и больших ( $\omega \gg m$ ) частот. При  $\omega \ll m$  тензор рассеяния фотона фотоном может быть разложен в ряд по степеням частот. Первый член разложения, соответствующий  $\omega = 0$ , равен для регуляризованного тензора нулю; поэтому разложение начинается с члена, содержащего линейно все четыре частоты, т. е. пропорционального  $\omega^4$ . Отсюда следует, что сечение рассеяния должно быть пропорционально  $\omega^6$ . Коэффициент может быть найден из приведенных формул для  $M_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_3 \lambda_4}$ . Результат гласит

$$\sigma = \alpha^2 r_0^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \cdot \frac{139}{(90)^2}. \quad (5.6.8)$$

В области высоких частот можно пренебречь массой электрона в  $J_{\text{Киндрс}}$ . Поэтому масса в этом случае не будет входить в выражение для сечения рассеяния. Но из величин  $e, \hbar, c, \omega$  можно составить только одну величину, содержащую заряд в восьмой степени и имеющую размерность площади, а именно  $\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4 \frac{c^2}{\omega^2}$ . Поэтому сечение должно быть пропорционально этой величине. Оно определяется формулой

$$\sigma = \frac{\alpha^4}{4\pi\omega^2} \int_0^1 dx \{ |M_{++; ++}|^2 + |M_{++; --}|^2 + \\ + |M_{+-; +-}|^2 + |M_{+-; -+}|^2 + 4 |M_{+-; +-}|^2 \} = \\ = \frac{\alpha^4}{2\pi\omega^2} \left[ \frac{108}{5} + \frac{13}{2} \pi^2 - 8\pi^2 \zeta(3) + \frac{148}{225} \pi^4 - 24\zeta(5) \right]. \quad (5.6.9)$$

Если энергию фотона измерять в массах электрона, то мы получим

$$\sigma = \frac{20}{\omega^2} 10^{-30} \text{ [см}^2\text{]}.$$

Приведенный анализ рассеяния фотона фотоном показывает, что в низшем порядке теории возмущений сечение этого процесса убывает с ростом энергии фотонов. Однако радиационные поправки

к этому сечению (рис. 5.16) не убывают при увеличении энергии фотонов, а даже растут логарифмически, так что [24]

$$\sigma_t(\omega) = r_0^2 \left[ c_1 \alpha^2 \left( \frac{m}{\omega} \right)^2 + c_2 \alpha^6 + c_3 \alpha^{10} \ln \frac{\omega}{m} \right].$$

**5.6.3. Радиационные поправки к функции Лагранжа электромагнитного поля в вакууме.** Малым частотам соответствуют медленно изменяющиеся поля, состояние которых можно описывать функцией Лагранжа, зависящей только от компонент поля и не зависящей от их производных по координатам и времени. Так как лагранжиан должен быть релятивистским инвариантом, то поля могут входить в функцию Лагранжа только в виде двух комбинаций  $E^2 - H^2$  и  $(EH)^2$ , являющихся единственными неза-



Рис. 5.16.

висимыми инвариантами поля. Если поля являются достаточно слабыми, то лагранжиан поля  $L$  можно разложить в ряд по степеням  $E^2 - H^2$  и  $(EH)^2$  и ограничиться в разложении членами второго и четвертого порядков:

$$L = L_0 + L', \quad L_0 = \frac{1}{2} (E^2 - H^2), \quad (5.6.10)$$

$$L' = a (F_{\mu\lambda} F_{\mu\lambda})^2 + b F_{\mu\lambda} F_{\lambda\sigma} F_{\sigma\nu} F_{\nu\mu},$$

где  $a, b$  — некоторые константы и  $F_{\mu\lambda}$  — тензор электромагнитного поля. Члены, объединенные в  $L'$ , представляют собой радиационную поправку к основной плотности функции Лагранжа  $L_0$ .

Лагранжиан  $L'$  можно связать с сечением рассеяния фотона фотоном. Действительно, матрица рассеяния 1-го порядка  $S^{(1)}$  связана с лагранжианом взаимодействия полей  $L_I$  соотношением

$$S^{(1)} = i \int L_I d^4x.$$

Поэтому если мы хотим описывать взаимодействие фотона с фотонами с помощью некоторого лагранжиана  $L'$ , то он должен быть по определению связан с матрицей рассеяния 4-го порядка  $S^{(4)}$  соотношением

$$S^{(4)} = i \int L' d^4x,$$

или

$$S^{(4)} = i \int N \{ a [F_{\lambda\nu}(x) F_{\nu\lambda}(x)]^2 + b [F_{\lambda\nu}(x) F_{\nu\mu}(x) F_{\mu\sigma}(x) F_{\sigma\lambda}(x)] \} d^4x. \quad (5.6.11)$$

Подчеркнем, что такое рассмотрение законно только для медленно изменяющихся полей:

$$\left| \frac{\hbar}{mc} \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\lambda\nu}(x) \right| \ll |F_{\lambda\nu}(x)|. \quad (5.6.12)$$

Подставляя в (5.6.11)

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int F_{\mu\nu}(k) e^{ikx} d^4k,$$

$$F_{\mu\nu}(k) = i(k_\mu A_\nu(k) - k_\nu A_\mu(k)),$$

получим

$$S^{(4)} = \frac{i}{(2\pi)^{12}} \int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times$$

$$\times N [A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4)] \left\{ \frac{a}{3} S_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{3} R_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \right\}, \quad (5.6.13)$$

где  $S_{\mu\nu\lambda\sigma}$  и  $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$  — некоторые симметризованные тензоры, содержащие слагаемые вида  $k_{i\mu} k_{j\nu} k_{k\lambda} k_{l\sigma}$  и их свертки по греческим индексам (мы не будем выписывать их здесь в явном виде). Сравнивая эту формулу с формулой (5.6.3) для  $S_R'$ , можно связать тензор рассеяния фотона фотоном  $J_{R\mu\nu\lambda\sigma}$  с тензорами  $S_{\mu\nu\lambda\sigma}$  и  $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ :

$$J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) =$$

$$= 4\alpha^{-2} [a S_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + b R_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)].$$

Подставив это выражение в (5.6.5), получим сечение рассеяния фотона фотоном в системе их центра инерции

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{(8\pi)^2 \omega^2} |M|^2 d\Omega, \quad (5.6.14)$$

$$M = e_\mu^{(\lambda_1)} e_\nu^{(\lambda_2)} e_\kappa^{(\lambda_3)} e_\sigma^{(\lambda_4)} J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4) = 4\alpha^{-2} (aS + bR),$$

$$\cdot S = e_\mu^{(\lambda_1)} e_\nu^{(\lambda_2)} e_\kappa^{(\lambda_3)} e_\sigma^{(\lambda_4)} S_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4),$$

$$R = e_\mu^{(\lambda_1)} e_\nu^{(\lambda_2)} e_\kappa^{(\lambda_3)} e_\sigma^{(\lambda_4)} R_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4)$$

(индекс  $\lambda_i$  служит для обозначения двух различных поляризаций фотона  $k_i$ ).

Можно показать, что

$$M = \frac{4\omega^4}{\alpha^2} \{ (8a + 2b) (e^{(\lambda_1)} \mathbf{n}') (e^{(\lambda_2)} \mathbf{n}') (e^{(\lambda_3)} \mathbf{n}) (e^{(\lambda_4)} \mathbf{n}) +$$

$$+ 4b [(e^{(\lambda_1)} e^{(\lambda_2)}) (e^{(\lambda_3)} \mathbf{n}) (e^{(\lambda_4)} \mathbf{n}) + (e^{(\lambda_3)} e^{(\lambda_4)}) (e^{(\lambda_1)} \mathbf{n}') (e^{(\lambda_2)} \mathbf{n})] +$$

$$+ [4a(1 - \cos \theta) - b(3 + \cos \theta)] \times$$

$$\times [(e^{(\lambda_1)} e^{(\lambda_3)}) (e^{(\lambda_2)} \mathbf{n}') (e^{(\lambda_4)} \mathbf{n}) + (e^{(\lambda_2)} e^{(\lambda_4)}) (e^{(\lambda_1)} \mathbf{n}') (e^{(\lambda_3)} \mathbf{n})] +$$

$$+ [4a(1 + \cos \theta) - b(3 - \cos \theta)] \times$$

$$\times [(e^{(\lambda_1)} e^{(\lambda_4)}) (e^{(\lambda_2)} \mathbf{n}') (e^{(\lambda_3)} \mathbf{n}) + (e^{(\lambda_2)} e^{(\lambda_3)}) (e^{(\lambda_1)} \mathbf{n}') (e^{(\lambda_4)} \mathbf{n})] +$$

$$+ 2 [8a + b(1 + \cos^2 \theta)] (e^{(\lambda_1)} e^{(\lambda_2)}) (e^{(\lambda_3)} e^{(\lambda_4)}) +$$

$$+ [4a(1 + \cos \theta)^2 + b(5 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)] \times$$

$$\times (e^{(\lambda_1)} e^{(\lambda_4)}) (e^{(\lambda_2)} e^{(\lambda_3)}) + [4a(1 - \cos \theta)^2 + b(5 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)] \times$$

$$\times (e^{(\lambda_1)} e^{(\lambda_3)}) (e^{(\lambda_2)} e^{(\lambda_4)}) \}, \quad (5.6.15)$$

где  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$  — единичные векторы в направлении  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  и  $\theta$  — угол рассеяния,  $\cos \theta = \mathbf{n} \mathbf{n}'$ . Подставляя это выражение в (5.6.14) и усредняя по поляризациям фотонов, получим

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} (48a^2 + 40ab + 11b^2) \omega^6 (3 + \cos^2 \theta)^2 d\omega. \quad (5.6.16)$$

Мы видим, что частотная и угловая зависимости сечения рассеяния фотона фотоном при  $\omega \ll m$  не связаны с конкретными значениями констант  $a$  и  $b$ , и только величина сечения определяется этими константами.

Приведем значения  $M$  для различных поляризаций фотонов. Будем обозначать через  $e_{\parallel i}^{(j)}$  поляризацию фотона  $k_i$ , лежащую в плоскости рассеяния  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ , и через  $e_{\perp i}^{(j)}$  поляризацию, перпендикулярную к плоскости  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ . Тогда согласно (5.6.15)

$$\begin{aligned} M(e_{\perp 1}^{(1)}, e_{\perp 1}^{(2)}, e_{\parallel 1}^{(3)}, e_{\parallel 1}^{(4)}) &= M(e_{\parallel 1}^{(1)}, e_{\parallel 1}^{(2)}, e_{\parallel 1}^{(3)}, e_{\parallel 1}^{(4)}) = \\ &= \omega^4 \frac{16}{\alpha^2} (2a + b) (3 + \cos^2 \theta), \\ M(e_{\perp 1}^{(1)}, e_{\perp 1}^{(2)}, e_{\parallel 1}^{(3)}, e_{\perp 1}^{(4)}) &= M(e_{\parallel 1}^{(1)}, e_{\parallel 1}^{(2)}, e_{\perp 1}^{(3)}, e_{\perp 1}^{(4)}) = \\ &= \omega^4 \frac{8}{\alpha^2} (8a + 3b - b \cos^2 \theta), \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

$$\begin{aligned} M(e_{\perp 1}^{(1)}, e_{\parallel 1}^{(2)}, e_{\perp 1}^{(3)}, e_{\parallel 1}^{(4)}) &= M(e_{\parallel 1}^{(1)}, e_{\perp 1}^{(2)}, e_{\parallel 1}^{(3)}, e_{\perp 1}^{(4)}) = \\ &= \omega^4 \left[ -\frac{16}{\alpha^2} a (1 - \cos \theta)^2 + \frac{4b}{\alpha^2} (3 + 6 \cos \theta - \cos^2 \theta) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(e_{\perp 1}^{(1)}, e_{\parallel 1}^{(2)}, e_{\parallel 1}^{(3)}, e_{\perp 1}^{(4)}) &= M(e_{\parallel 1}^{(1)}, e_{\perp 1}^{(2)}, e_{\perp 1}^{(3)}, e_{\parallel 1}^{(4)}) = \\ &= \omega^4 \left[ -\frac{16}{\alpha^2} (1 + \cos \theta)^2 + \frac{4b}{\alpha^2} (3 - 6 \cos \theta - \cos^2 \theta) \right]. \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что, вычислив непосредственно величину  $M$  для двух состояний поляризации фотонов (например,  $M(e_{\perp 1}^{(1)}, e_{\parallel 1}^{(2)}, e_{\perp 1}^{(3)}, e_{\parallel 1}^{(4)})$  и  $M(e_{\perp 1}^{(1)}, e_{\perp 1}^{(2)}, e_{\parallel 1}^{(3)}, e_{\perp 1}^{(4)})$ ) при фиксированном угле рассеяния (например, при  $\theta = 0$ ), можно найти константы  $a$  и  $b$ .

Мы приведем только окончательный результат:

$$a = -\frac{5}{180} \frac{\alpha^2}{m^4}, \quad b = \frac{14}{180} \frac{\alpha^2}{m^4}. \quad (5.6.18)$$

Подставив эти значения  $a$  и  $b$  в (5.6.16), найдем дифференциальное сечение рассеяния фотона фотоном при  $\omega \ll m$ :

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{139}{90^2} \frac{\alpha^3}{m^2} \left( \frac{\omega}{m} \right)^6 (3 + \cos^2 \theta)^2 d\omega. \quad (5.6.19)$$

Проинтегрировав по  $\theta$ , получим формулу (5.6.8).

Наконец, подставив (5.6.18) в (5.6.10), найдем радиационные поправки к лагранжиану электромагнитного поля

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{180} \frac{\alpha^2}{m^4} [14 F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda} F_{\lambda\sigma} F_{\sigma\mu} - 5 (F_{\mu\nu} F_{\nu\mu})^2] = \\ &= \frac{2}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} [(E^2 - H^2)^2 + 7 (EH)^2]. \end{aligned} \quad (5.6.20)$$

Зная лагранжиан, можно найти плотность электромагнитной энергии в вакууме

$$w = E \frac{\partial L}{\partial E} - L = \frac{1}{2} (E^2 + H^2) + w', \quad (5.6.21)$$

где

$$w' = (4a + 2b) (E^2 - H^2) (3E^2 + H^2) + 4b (EH)^2.$$

Эта величина представляет собой радиационную поправку к классической плотности энергии  $w_0 = \frac{1}{2} (E^2 + H^2)$ .

Нелинейные электродинамические эффекты можно описывать с помощью зависящих от полей диэлектрической и магнитной проницаемостей вакуума. Чтобы найти эти величины, определим электрическую и магнитную индукции  $D$  и  $B$ :

$$D = \frac{\partial L}{\partial E}, \quad B = - \frac{\partial L}{\partial H}.$$

Используя (5.6.20), получим

$$\begin{aligned} D_i &= E_i + \frac{4}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} [2 (E^2 - H^2) E_i + 7 (EH) H_i], \\ B_i &= H_i + \frac{4}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} [2 (E^2 - H^2) H_i - 7 (EH) E_i]. \end{aligned} \quad (5.6.22)$$

В макроскопической электродинамике  $D$  и  $B$  связаны с  $E$  и  $H$  соотношениями

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k, \quad B_i = \mu_{ik} H_k.$$

Сравнение этих формул с (5.6.22) показывает, что тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей вакуума для слабых и медленно меняющихся полей равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \delta_{ik} + \frac{4}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} [2 (E^2 - H^2) \delta_{ik} + 7 H_i H_k], \\ \mu_{ik} &= \delta_{ik} + \frac{4}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} [2 (E^2 - H^2) \delta_{ik} - 7 H_i H_k]. \end{aligned} \quad (5.6.23)$$

Эти формулы показывают, что вакуум при наличии магнитного поля становится анизотропным.

Формула для радиационной поправки к лагранжиану  $L'$  может быть использована для установления модификации закона Кулона на больших расстояниях от заряда. В случае чисто электрического поля лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2} E^2 + \frac{e^4 \hbar (E^2)^2}{360 \pi^2 m^4 c^7}.$$

Полагая здесь  $E = - \nabla \varphi(r)$ , получим из вариационного принципа

$$\delta \int r^2 dr L \{ \varphi(r) \} = 0$$

следующее уравнение для определения потенциала точечного заряда  $\varphi(r)$ :

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\varphi}{dr} + \frac{e^4 \hbar}{90\pi^2 m^4 c^7} \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^3 \right\} = 0.$$

Предполагая, что решение мало отличается от  $\varphi_0 = \frac{eZ}{4\pi r}$ , мы придем к решению

$$\varphi(r) = \frac{eZ}{4\pi r} \left[ 1 - \frac{2Z^2 \alpha^2}{225\pi} \left( \frac{1}{mr} \right)^4 \right],$$

о котором говорилось в п. 5.2.1.

**5.6.4. Точное выражение для лагранжиана произвольного медленно меняющегося электромагнитного поля.** В предыдущем пункте была найдена радиационная поправка к лагранжиану электромагнитного поля, пропорциональная четвертой степени полей. Мы определим теперь лагранжиан для произвольного сколь угодно сильного электромагнитного поля, удовлетворяющего единственному условию (5.6.12) [25]. Для решения этой задачи удобно представить себе электронно-позитронный вакуум как систему электронов, заполняющих уровни с «отрицательной» энергией. Такие электроны мы будем называть вакуумными. Ясно, что добавка  $w'$  к классической плотности энергии электромагнитного поля  $w_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$ , обусловленная существованием электронно-позитронного вакуума, совпадает с плотностью энергии вакуумных электронов за вычетом их потенциальной энергии во внешнем электрическом поле:

$$w' = i \sum_n \left( \psi_n^{(-)*}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_n^{(-)} \right) - \sum_n \left( \psi_n^{(-)*}, e\varphi \psi_n^{(-)} \right), \quad (5.6.24)$$

где  $\psi_n^{(-)}$  — волновая функция вакуумного электрона в состоянии  $n$  и  $\varphi$  — скалярный потенциал внешнего поля (функции  $\psi_n^{(-)}$  нормированы на единичный объем;  $(\psi, \chi) \equiv \psi_\lambda \chi_\lambda$ , где  $\lambda$  — спинорный индекс).

Покажем, что второе слагаемое в этом выражении — плотность потенциальной энергии вакуумных электронов — связано с первым слагаемым, т. е. с полной плотностью энергии вакуумных электронов (будем обозначать ее через  $w_-$ ) соотношением

$$\sum_n \left( \psi_n^{(-)*}, e\varphi \psi_n^{(-)} \right) = \frac{\partial w_-}{\partial E}, \quad (5.6.25)$$

где  $E$  — напряженность электрического поля.

Напомним, что если квантовомеханический оператор энергии  $H$  зависит от некоторого параметра  $\lambda$ , то при бесконечно малом изменении  $\lambda$  на  $d\lambda$  собственное значение энергии  $\varepsilon_n \equiv H_{nn}$  испытывает изменение

$$d\varepsilon_n = \left( \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{nn} d\lambda.$$

В частности, если  $H = H_0 + \lambda e\varphi$  ( $H_0$  и  $\varphi$  не зависят от  $\lambda$ ), то

$$\lambda (e\varphi)_{nn} = \lambda \left( \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{nn}.$$

Иными словами, если скалярный потенциал содержит постоянный множитель  $\lambda$ , то имеет место соотношение

$$\lambda \int \sum_n (\psi_n^{(-)*}, e\varphi \psi_n^{(-)}) d^3k = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int \omega_- d^3x,$$

где интегрирование совершается по всему объему. В интересующем нас случае постоянных полей можно рассматривать электрическое поле  $E$  как параметр  $\lambda$  и, кроме того, можно перейти от полной энергии к плотности энергии. В результате мы приходим к соотношению (5.6.25).

Из (5.6.24) следует, что  $\omega' = \omega_- - E \partial \omega_- / \partial E$ . Сравнивая это равенство с соотношением  $\omega = E \partial L / \partial E - L$ , мы приходим к заключению, что радиационная добавка к классической плотности функции Лагранжа  $L_0 = 1/2 (E^2 - H^2)$  совпадает с точностью до знака с полной плотностью энергии электронно-позитронного вакуума при наличии внешнего поля:

$$L' = -\omega_- \quad (5.6.26)$$

Так как, с другой стороны,  $L'$  является функцией только двух независимых инвариантов  $E^2 - H^2$  и  $(EH)^2$ , то для нахождения  $L'$  достаточно определить  $\omega_-$  в двух специальных случаях, например, когда имеется постоянное и однородное магнитное поле  $H$  и когда наряду с  $H$  имеется параллельное ему электрическое поле с потенциалом  $\varphi = \varphi_0 e^{ikz} + \varphi_0^* e^{-ikz}$  ( $\varphi_0$  и  $k$  — константы). Найдем прежде всего энергию  $\omega_-$  в постоянном и однородном магнитном поле  $H = (0, 0, H)$ . Согласно результатам § 1.6 возможные значения энергии вакуумного электрона в магнитном поле равны

$$e_{n\mu}(p_z) = -\sqrt{m^2 + eH(2n - \mu + 1) + p_z^2},$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\mu = \pm 1$  и  $p_z$  — проекция импульса электрона на направление магнитного поля (соответствующие волновые функции  $\psi_{n\mu p_y p_z}^{(-)}$  определяются формулами (1.6.2). Поэтому плотность энергии вакуума, которую мы будем обозначать через  $\omega^H$ , может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \omega^H &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2} (\psi_{n\mu p_y p_z}^{(-)*}(\mathbf{r}), \psi_{n\mu p_y p_z}^{(-)}(\mathbf{r})) e_{n\mu}(p_z) = \\ &= - \frac{eH}{(2\pi)^2} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e_{n\mu}(p) dp, \quad (5.6.27) \end{aligned}$$

где  $p \equiv p_z$ . Замечая, что  $\varepsilon_{n-1}(p) = \varepsilon_{n+1}(p)$ , перепишем  $\omega^H$  в виде

$$\omega^H = -\frac{eH}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \left\{ \varepsilon_0(p) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(p) \right\},$$

$$\varepsilon_n(p) = \sqrt{p^2 + m^2 + 2neH}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Используя далее формулу суммирования Эйлера

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum_{k=1}^N F(kb) - \frac{1}{2} F(bN) =$$

$$= \frac{1}{b} \left\{ \int_0^{bN} F(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n b^{2n}}{(2n)!} [F^{(2n-1)}(bN) - F^{(2n-1)}(0)] \right\}, \quad (5.6.28)$$

где  $B_n$  — числа Бернулли, и полагая в ней  $b = 2eH$ , получим

$$\omega^H = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \left[ \int_0^{\infty} F(x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n} \frac{B_n}{(2n)!} F^{(2n-1)}(0) \right],$$

где  $F(x) = \sqrt{p^2 + m^2 + x}$ .

Мы должны теперь регуляризовать величину  $\omega^H$ . Эта регуляризация может быть произведена следующим образом. Во-первых, следует отбросить интеграл  $\int_0^{\infty} F(x) dx$ , как не содержащий напряженности магнитного поля и представляющий собой энергию свободных вакуумных электронов и, во-вторых, следует отбросить первое слагаемое с  $n=1$  в бесконечной сумме, так как оно приводит к энергии, пропорциональной  $H^2$ , которая уже включена в невозмущенную энергию поля  $\omega_0$  (отбрасывая это слагаемое, мы, по существу дела, производим перенормировку напряженности поля, связанную с перенормировкой заряда).

Итак, регуляризованное выражение для плотности энергии  $\omega_R^H$  имеет следующий вид:

$$\omega_R^H = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \sum_{n=2}^{\infty} b^{2n} \frac{B_n}{(2n)!} F^{(2n-1)}(0) dp.$$

Замечая, что

$$F^{(2n-1)}(0) = \frac{\Gamma(2n-3/2)}{2\sqrt{\pi} (p^2 + m^2)^{4n-3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(p^2 + m^2)^q} = \sqrt{\pi} m^{1-2q} \frac{\Gamma(q-1/2)}{\Gamma(q)},$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция, имеем

$$\omega_R^H = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=2}^{\infty} b^{2n} B_n (m^2)^{2-2n} \frac{\Gamma(2n-2)}{2(2n)!}, \quad (5.6.29)$$

а так как

$$\Gamma(2n-2) = \int_0^{\infty} d\eta e^{-\eta} \eta^{2n-3},$$

то

$$\omega_R^H = \frac{bm^2}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} e^{-\eta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} \left(\frac{b\eta}{2m^2}\right)^{2n-1}.$$

Сравнивая это выражение с разложением

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k} B_k}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad (5.6.30)$$

найдем окончательно

$$\omega_R^H = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left[ \eta H^* \operatorname{cth}(\eta H^*) - 1 - \frac{\eta^2 H^{*2}}{3} \right], \quad (5.6.31)$$

где  $H^* = \frac{b}{2m^2} = \frac{eH}{m^2}$ .

Введем теперь в рассмотрение наряду с магнитным полем параллельное ему электростатическое поле с потенциалом  $\varphi = \varphi_0 e^{ikz} + \varphi_0^* e^{-ikz}$ . Разложим  $\omega_-$  в ряд по степеням  $E^2$  (или, что то же самое, по степеням  $\varphi^2$ ;  $E$  — напряженность электрического поля,  $E^2 = 2k^2 |\varphi_0|^2$ ):

$$\omega_- = \sum_{r=1}^{\infty} \omega^{(2r)} + \omega_R^H. \quad (5.6.32)$$

Повторяя выкладки, приводящие к (5.6.27), получим:

$$\omega^{(2r)} = \frac{eH}{(2\pi)^2} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp \varepsilon_{n\mu}^{(2r)}(p),$$

где  $\varepsilon_{n\mu}^{(2r)}(p)$  — поправка к энергии электрона  $\varepsilon_{n\mu}(p)$  в магнитном поле, пропорциональная  $E^{2r}$ . Рассмотрим прежде всего слагаемое  $\omega^{(2)}$ . Пользуясь теорией возмущений, легко показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \varepsilon_{n\mu}^{(2)}(p) = -e^2 |\Phi_n|^2 \frac{k^2}{1} \int \frac{dp K^2}{(p^2 + K^2)^{3/2}},$$

$$K^2 = m^2 + eH(2n - \mu + 1)$$

(мы разложили  $\Phi$  в ряд по степеням  $k$  и сохранили только члены второго порядка). Полагая в формуле суммирования Эйлера (5.6.28)

$$F(x) = -e^2 |\Phi_0|^2 \frac{k^2}{4} \frac{m^2 + x}{(p^2 + m^2 + x)^{5/2}},$$

найдем

$$\omega^{(2)} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{e^2 E^2}{12} \left[ \int_0^\infty \frac{dx}{m^2 + x} - \sum_{k=1}^\infty b^{2k} \frac{B_k}{(2k)!} \left( \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} \frac{1}{m^2 + x} \right)_{x=0} \right].$$

Регуляризация этого выражения сводится к отбрасыванию первого слагаемого, содержащего интеграл  $\int_0^\infty \frac{dx}{m^2 + x}$  и пропорционального  $E^2$ . Отбрасывая это слагаемое, мы, как и выше, при вычислении энергии  $\omega^H$  в магнитном поле, производим, по существу дела, перенормировку заряда.

Используя разложение (5.6.30) для  $\text{cth } x$ , получим окончательно следующее выражение для регуляризованного значения  $\omega^{(2)}$ :

$$\omega_R^{(2)} = -\frac{m^4 E^{*2}}{8\pi^2} \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta} [\eta H^* \text{cth}(\eta H^*) - 1], \quad (5.6.33)$$

$$E^* = \frac{eE}{m^2}, \quad H^* = \frac{eH}{m^2}, \quad m \equiv m_R.$$

Поступая аналогичным образом, можно показать, что

$$\sum_{r=2}^\infty \omega^{(2r)} = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left[ \eta E^* \text{ctg} \eta E^* - 1 + \frac{\eta E^{*2}}{3} \right] \eta H^* \text{cth} \eta H^*.$$

Складывая это выражение с выражениями (5.6.33) и (5.6.31) для  $\omega_R^{(2)}$  и  $\omega_R^H$ , найдем регуляризованное значение плотности энергии  $\omega_R$ :

$$\omega_R = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left[ (\eta E^* \text{ctg} \eta E^*) (\eta H^* \text{cth} \eta H^*) - 1 + \frac{1}{3} \eta^2 (E^{*2} - H^{*2}) \right]. \quad (5.6.34)$$

Замечая, наконец, что

$$\text{ctg} \alpha \text{cth} \beta = i \frac{\cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta} + \cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 - 2i\alpha\beta}}{\cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta} - \cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 - 2i\alpha\beta}},$$

и используя (5.6.26), получим следующее выражение для  $L'$ :

$$L' = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta x} \times \\ \times \left[ i\eta (EH) \frac{\cos(\eta\sqrt{E^{*2} - H^{*2} + 2i(E^*H^*)}) + \cos(\eta\sqrt{E^{*2} - H^{*2} - 2i(E^*H^*)})}{\cos(\eta\sqrt{E^{*2} - H^{*2} + 2i(E^*H^*)}) - \cos(\eta\sqrt{E^{*2} - H^{*2} - 2i(E^*H^*)})} + \right. \\ \left. + \frac{m^4}{e^2} - \frac{\eta^2}{3} (E^2 - H^2) \right]. \quad (5.6.35)$$

Легко проверить, что в случае слабых полей эта формула сводится к (5.6.20).

Рассмотрим теперь сильные поля. Пусть сначала  $E^* = 0$  и  $H^* \gg 1$ . Представим  $L'$  в виде

$$L' = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon x}}{x} f(x) dx, \quad \varepsilon = \frac{1}{H^*} \ll 1, \\ f(x) = -\frac{m^4 H^{*2}}{8\pi^2 x^2} \left( x \operatorname{cth} x - 1 - \frac{1}{3} x^2 \right).$$

Функция  $f(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow 0$  и ведет себя при  $x \gg 1$  как

$$f(x) = f(\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \gg 1,$$

где  $f(\infty) = \frac{\alpha}{6\pi} m^4 H^{*2}$ . Легко убедиться, что асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для функций с таким поведением справедливо соотношение

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon x}}{x} f(x) dx \approx f(\infty) \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Отсюда вытекает следующее асимптотическое выражение для  $L'$  при  $H^* \gg 1$ ,  $E^* = 0$ :

$$L' = \frac{\alpha m^4}{6\pi} H^{*2} \ln H^*, \quad H^* \gg 1 \quad (5.6.36)$$

Если имеется только электрическое поле, то формула (5.6.35) приобретает вид

$$L' = \frac{1}{2} E^2 - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-m^2 \eta} \left[ eE\eta \operatorname{ctg}(eE\eta) - 1 + \frac{1}{3} (eE\eta)^2 \right].$$

Однако, этим выражением нельзя непосредственно воспользоваться, так как подынтегральное выражение имеет полюсы при  $\eta_n = n\pi/eE$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Поэтому следует сместить путь интегрирования

в верхнюю полуплоскость. В результате  $L'$  приобретает мнимую добавку, которая, как легко показать, имеет вид

$$2 \operatorname{Im} L' = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_n)^{-2} \exp(-m^2 \eta_n) = \\ = \frac{\alpha^2}{\pi^2} E^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n m^2 \pi}{eE}\right). \quad (5.6.37)$$

Эта величина имеет простой физический смысл, а именно: она представляет собой вероятность образования  $e^+e^-$ -пары полем, отнесенную к единице времени и единице объема.

Реальная часть лагранжиана  $L'$  в случае сильного электрического поля имеет вид

$$\operatorname{Re} L' = -\frac{\alpha m^4}{6\pi} E^{*2} \ln E^*.$$

Таким образом, отношение радиационной поправки  $L'$  к классической плотности функции Лагранжа  $L_0$  при больших напряжениях полей растет только логарифмически с полем.

Поэтому нелинейность уравнения электродинамики будет малой даже в том случае, когда поле значительно больше значения  $m^2 c^3 / e \hbar$ . Если в качестве  $E$  взять поле на «краю электрона»  $E = \frac{e}{4\pi r_0^2} = 4\pi \frac{m^2 c^4}{e^3}$ , то отношение  $\left| \frac{L'}{L_0} \right|$  будет равно

$$\left| \frac{L'}{L_0} \right| \sim \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{1}{\alpha}, \quad (5.6.38)$$

т. е. и в этом случае  $|L'/L_0| \ll 1$ .

**5.6.5. Сечение рассеяния фотона в постоянном электромагнитном поле.** В матрицу  $S^{(4)}$ , описывающую нелинейные взаимодействия между электромагнитными полями, входят четыре оператора электромагнитного поля. Если все эти операторы относятся к фотонным состояниям, то элемент  $S^{(4)}$  будет описывать процесс рассеяния фотона фотоном, рассмотренный в предыдущем параграфе. Однако могут быть еще два случая, а именно: когда только два множителя  $A_\mu(x)$  относятся к фотонным состояниям, а два других — к внешнему электромагнитному полю либо когда три множителя  $A_\mu(x)$  относятся к фотонным состояниям, а один — к внешнему полю. В первом случае элемент матрицы  $S^{(4)}$  описывает рассеяние фотона во внешнем электромагнитном поле [26], а во втором — расщепление одного фотона на два или слияние двух фотонов в один во внешнем поле. Этими эффектами (вместе с рассеянием фотона фотоном) исчерпываются все процессы взаимодействия между электромагнитными полями 4-го порядка.

Мы ограничимся рассмотрением рассеяния фотона во внешнем электромагнитном поле. Если поле зависит от времени, то рассеяние фотона будет происходить с изменением частоты, если же

поле постоянно, то рассеяние происходит без изменения частоты фотона (когерентное рассеяние)

Особый интерес представляет когерентное рассеяние фотонов в кулоновском поле ядра. Сечение этого рассеяния становится сравнимым с сечением рассеяния фотонов электронами при энергиях порядка  $10^{10}$  эВ, но когерентное рассеяние фотонов ядрами может быть обнаружено и при меньших энергиях благодаря характерному угловому распределению, имеющему резкий максимум в области малых углов рассеяния; для тяжелых ядер при частоте фотонов  $\omega = 300$  МэВ дифференциальное сечение этого рассеяния на углы  $\sim 0,01^\circ$  на три порядка больше, чем соответствующее сечение комптоновского рассеяния.

Диаграммы, изображающие рассеяние фотона во внешнем поле, не отличаются от диаграмм рис. 5.15, изображающих рассеяние фотона фотоном (только двум фотонным линиям соответствует теперь внешний потенциал).

Используя определение (5.6.2) регуляризованного тензора рассеяния фотона фотоном  $J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ , можно записать регуляризованное значение матричного элемента рассеяния фотона о внешнем поле в виде

$$\langle f | S_R^{\lambda'} | i \rangle = -\frac{\alpha^2}{2(2\pi)^4} \frac{1}{V\omega_1\omega_2} \int d^4q_1 d^4q_2 \delta(k_1 - k_2 + q_1 + q_2) \times \\ \times e_{1\mu} e_{2\nu} A_\lambda^{(e)}(q_1) A_\sigma^{(e)}(q_2) J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, -k_2, q_1, q_2). \quad (5.6.39)$$

Если поле постоянно, т. е.  $A_\mu^{(e)}(q) = A_\mu^{(e)}(q) 2\pi\delta(q_0)$ , то частоты падающего и рассеянного фотонов равны,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , и

$$\langle f | S_R^{\lambda'} | i \rangle = -\frac{\alpha^2}{2(2\pi)^2} \frac{1}{\omega} \int d^3q A_\lambda^{(e)}(q) A_\sigma^{(e)}(k_2 - k_1 - q) \delta(\omega_1 - \omega_2) \times \\ \times e_{1\mu} e_{2\nu} J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, -k_2, q, k_2 - k_1 - q).$$

Умножая  $|\langle f | S_R^{\lambda'} | i \rangle|^2$  на число конечных состояний рассеянного фотона  $\omega_3^2 d\omega_2 d\omega_3 / (2\pi)^3$  ( $d\omega_2$  — элемент телесного угла, в котором лежит  $k_2$ ) и деля на плотность потока падающих фотонов  $J = 1$ , получим дифференциальное сечение когерентного рассеяния фотона в постоянном поле

$$d\sigma = \frac{1}{4} \frac{\alpha^4}{(2\pi)^2} d\omega_2 \left| \int d^3q A_\lambda^{(e)}(q) A_\sigma^{(e)}(k_2 - k_1 - q) e_{1\mu} e_{2\nu} \times \right. \\ \left. \times J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, -k_2, q, k_2 - k_1 - q) \right|^2. \quad (5.6.40)$$

(Этот эффект называется эффектом Дельбрюка).

Приведем выражение для сечения рассеяния циркулярно поляризованных фотонов в кулоновском поле ядра в случае малых энергий фотона  $\omega \ll m$  [27]. Обозначим через  $d\sigma_{++}$  ( $d\sigma_{--}$ ) сечение рассеяния право (лево) поляризованного фотона без изменения спинового состояния и через  $d\sigma_{+-}$  ( $d\sigma_{-+}$ ) сечение процесса рассея-

ния, в результате которого право (лево) поляризованный фотон превращается в лево (право) поляризованный фотон. Тогда

$$d\sigma_{++} = d\sigma_{--} = (Z\alpha)^4 r_0^2 \left( \frac{73}{32 \cdot 72} \right)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} \left( \frac{\omega}{m} \right)^4 do,$$

$$d\sigma_{+-} = d\sigma_{-+} = (Z\alpha)^4 r_0^2 \left( \frac{5}{8 \cdot 32} \right)^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left( \frac{\omega}{m} \right)^4 do,$$

где  $\theta$  — угол рассеяния фотона,  $\omega$  — его энергия в лабораторной системе,  $do$  — элемент телесного угла.

**5.6.6. Связь между амплитудой рассеяния фотона на нулевой угол и сечением образования пар.** Покажем, что матричный элемент когерентного рассеяния фотона в постоянном электромагнитном поле на нулевой угол связан простым соотношением с интегральным сечением образования пар фотоном в этом поле. Воспользуемся для этого условием унитарности матрицы рассеяния  $SS^+ = I$ , или

$$TT^+ = -i(T - T^+), \quad S = 1 + iT. \quad (5.6.41)$$

Из (5.6.41) следует, что  $\langle i | TT^+ | i \rangle = 2 \operatorname{Im} \langle i | T | i \rangle$ , или

$$\sum_f |\langle i | T | f \rangle|^2 = 2 \operatorname{Im} \langle i | T | i \rangle, \quad (5.6.42)$$

где  $i$  — произвольное состояние системы полей, и суммирование производится по всем состояниям полей  $f$ . Левая часть этого соотношения представляет собой суммарную вероятность перехода системы полей из состояния  $i$  во все другие состояния (включая состояние  $i$ ), а правая — пропорциональна инвариантной амплитуде процесса рассеяния  $i \rightarrow i$  на нулевой угол.

Применим это соотношение к тому случаю, когда рассеяние происходит в постоянном внешнем электромагнитном поле и в исходном состоянии  $i$  находится одна частица (далее такой частицей мы будем считать фотон). В этом случае в элементах матрицы  $T$  можно выделить  $\delta$ -функцию от энергии

$$\langle r | T | i \rangle = (2\pi)^2 \delta(E_r - E_i) F_{ri} \frac{1}{V} \prod_{\alpha} \frac{1}{V e_{\alpha}}, \quad (5.6.43)$$

где  $F_{ri}$  — инвариантная амплитуда процесса рассеяния  $i \rightarrow r$ ,  $E_r$  — суммарная энергия частиц в состоянии  $r$ ,  $e_{\alpha}$  — энергия частицы в индивидуальном состоянии  $\alpha$  (произведение по  $\alpha$  распространяется на все индивидуальные состояния частиц как в состоянии  $i$ , так и в состоянии  $r$ ) и  $V$  — нормировочный объем. Так как матричные элементы содержат  $\delta$ -функцию от энергии, то левая часть равенства (5.6.42) пропорциональна времени перехода  $t$  (ср. § 3.4). Поэтому, разделив  $\sum_f |\langle i | T | f \rangle|^2$  на  $tv_i/V$ , где  $v_i$  — скорость частицы, присутствующей в состоянии  $i$ , мы найдем сумму сечений  $\sigma_{i \rightarrow f}$  всех процессов рассеяния  $i \rightarrow f$ .

Рассмотрим теперь правую часть равенства (5.6.42). В соответствии с (5.6.43) мы можем заменить  $\langle i | T | i \rangle$  на  $2\pi t F_{ii}(\mathbf{e}_i, 0) / \sqrt{\epsilon_i}$ , где  $F_{ii}(\mathbf{e}_i, 0)$  — значение амплитуды рассеяния  $F_{ii}(\mathbf{e}_i, \theta)$  процесса  $i \rightarrow i$  при угле рассеяния  $\theta$ , равном нулю. Таким образом, соотношение (5.6.42) принимает вид

$$\sum_i \sigma_{i \rightarrow f} = \frac{4\pi}{\rho_i} \text{Im} F_{ii}(\mathbf{e}_i, 0), \quad (5.6.44)$$

где  $\rho_i = v_i \epsilon_i$  — импульс частицы. Это важное соотношение, связывающее суммарное сечение процессов рассеяния  $i \rightarrow f$  с амплитудой упругого рассеяния на нулевой угол, называется оптической теоремой.

Пусть в состоянии  $i$  находится один фотон, обладающий достаточно большой энергией, тогда суммарное сечение процессов рассеяния будет практически совпадать с сечением  $\sigma_p(\omega)$  образования электронно-позитронных пар фотоном во внешнем поле ( $\omega$  — энергия фотона), так как сечение упругого рассеяния фотона  $\sigma_e(\omega)$  значительно меньше  $\sigma_p(\omega)$ . Обозначая амплитуду упругого рассеяния фотона во внешнем поле через  $f(\omega, \theta)$  ( $\theta$  — угол рассеяния), мы можем, следовательно, написать на основании оптической теоремы соотношение

$$\sigma_p(\omega) = \frac{4\pi}{\omega} \text{Im} f(\omega, 0). \quad (5.6.45)$$

Амплитуда упругого рассеяния фотона  $f(\omega, \theta)$  связана с элементом матрицы  $S^{(4)}$ , соответствующим когерентному рассеянию фотона в постоянном поле, соотношением

$$\langle f | S^{(4)} | i \rangle = \frac{(2\pi)^2}{\omega} f(\omega, \theta) \delta(\omega - \omega_f), \quad (5.6.46)$$

а дифференциальное сечение упругого рассеяния фотона имеет вид

$$d\sigma_e = |f(\omega, \theta)|^2 d\omega, \quad (5.6.47)$$

где  $d\omega$  — элемент телесного угла, в котором лежит импульс рассеянного фотона.

При рассеянии в кулоновском поле на нулевой угол поляризация фотона, очевидно, не изменяется,  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ . Поэтому усредненное по состояниям поляризации значение амплитуды рассеяния на нулевой угол равняется согласно (5.6.39)

$$f(\omega, 0) = -\frac{\alpha^2}{4(2\pi)^4} \int A_\lambda^{(e)}(\mathbf{q}) A_\sigma^{(e)}(-\mathbf{q}) J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k, -k, \mathbf{q}, -\mathbf{q}) d^3q. \quad (5.6.48)$$

Подставляя это выражение в (5.6.45), получим следующую общую формулу для интегрального сечения образования пар фотоном в постоянном внешнем электромагнитном поле:

$$\sigma_p(\omega) = -\frac{\alpha^2}{2(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \int d^3q A_\lambda^{(e)}(q) A_\sigma^{(e)}(-q) J_{R\mu\lambda\sigma}(k, -k, q, -q) = \\ = \int A_\mu^{(e)}(q) A_\nu^{(e)}(-q) T_{\mu\nu}(q, k) d^3q, \quad (5.6.49)$$

где

$$T_{\mu\nu}(q, k) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4\pi\alpha^2}{\omega} \operatorname{Re} [A_{\mu\nu}(q, k) + B_{\mu\nu}(q, k) + B_{\mu\nu}(-q, k) + \\ + A_{\mu\nu}(q, -k) + B_{\mu\nu}(q, -k) + B_{\mu\nu}(-q, -k)],$$

$$A_{\mu\nu}(q, k) = \\ = \int d^4p \frac{\operatorname{Sp} [\gamma_\mu (i\hat{p} - m) \gamma_\lambda (i\hat{p} - i\hat{k} - m) \gamma_\nu (i\hat{p} - i\hat{k} - i\hat{q} - m) \gamma_\lambda (i\hat{p} - i\hat{q} - m)]}{(p^2 + m^2) [(p-k)^2 + m^2] [(p-k-q)^2 + m^2] [(p-q)^2 + m^2]}$$

$$B_{\mu\nu}(q, k) = \int d^4p \frac{\operatorname{Sp} [\gamma_\mu (i\hat{p} + i\hat{q} - m) \gamma_\nu (i\hat{p} - m) \gamma_\lambda (i\hat{p} + i\hat{k} - m) \gamma_\lambda (i\hat{p} - m)]}{[(p+q)^2 + m^2] [(p+k)^2 + m^2] (p^2 + m^2)}.$$

Чтобы найти тензор  $T_{\mu\nu}(q, k)$ , заметим, что он должен иметь следующую структуру:

$$T_{\mu\nu}(q, k) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4\pi\alpha^2}{\omega} [G_1 \delta_{\mu\nu} + G_2 k_\mu k_\nu + G_3 q_\mu q_\nu + G_4 (k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu)], \quad (5.6.50)$$

где  $G_i$  — некоторые инвариантные функции  $q$  и  $k$ . С другой стороны, в силу градиентной инвариантности выражения (5.6.49) для сечения образования пар должно выполняться соотношение  $q_\mu T_{\mu\nu}(q, k) = 0$ . Поэтому функции  $G_i$  связаны между собой соотношениями

$$G_1 + q^2 G_3 + qk G_4 = 0, \quad qk G_2 + q^2 G_4 = 0.$$

Таким образом, для определения  $T_{\mu\nu}$  достаточно найти две из четырех инвариантных функций  $G_i$ . Мы не будем приводить здесь вычисления этих функций, а приведем только окончательные результаты [28].

Если  $r^2 \equiv 1/4 (q-k)^2 < -m^2$ , то

$$G_2 = \frac{8\pi^3 q^2}{\beta^4} \left\{ [2(4m^4 + 6m^2 q^2 - q^4) + 2(q^2 - 2m^2)\beta - \beta^2] \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{1 - \sqrt{1 + m^2/r^2}}{1 + \sqrt{1 + m^2/r^2}} + \sqrt{1 + m^2/r^2} [4(q^2 - \beta)(m^2 - 2q^2) - \beta^2] \right\}, \\ G_3 = \frac{32\pi^3}{\beta^2} \left[ 2m^2 \ln \frac{1 - \sqrt{1 + m^2/r^2}}{1 + \sqrt{1 + m^2/r^2}} + (\beta - q^2) \sqrt{1 + m^2/r^2} \right], \\ G_4 = -\frac{\beta}{2q^2} G_3, \quad G_1 = -q^2 G_3 + \frac{\beta^2}{4q^2} G_2, \quad (5.6.51)$$

где  $\beta = 2qk$ . Если же  $r^2 \geq -m^2$ , то  $G_i = 0$ .

Сечение образования пары фотоном большой энергии в кулоновском поле ядра равно

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2 \alpha r_0^2 \ln \frac{2\omega}{m}.$$

Поэтому, согласно (5.6.45), в этом случае

$$\text{Im} f(\omega, 0) = \frac{7}{9\pi} \frac{Z^2 \alpha^3}{m} \frac{\omega}{m} \ln \frac{2\omega}{m}. \quad (5.6.52)$$

Зная мнимую часть амплитуды, можно найти ее реальную часть, если воспользоваться дисперсионным соотношением

$$\text{Re} f(\omega, q) = \frac{\omega}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im} f(\omega', q)}{\omega'(\omega' - \omega)} d\omega', \quad (5.6.53)$$

где  $q$  — переданный ядру импульс. Эта формула вытекает из формулы Коши и предположения об аналитичности  $f(\omega, q)$

$$f(\omega, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega', q)}{\omega' - \omega} d\omega'$$

(контур  $C$  изображен на рис. 5.17).

Подставляя (5.6.52) в (5.6.53), получим

$$\text{Re} f(\omega, 0) = \frac{7}{18} \frac{Z^2 \alpha^3}{m} \frac{\omega}{m}, \quad \omega \gg m.$$

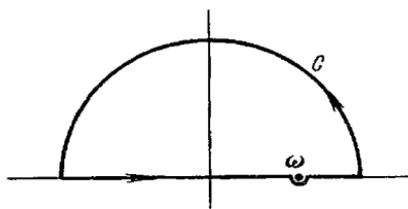


Рис. 5.17.

Интегральное сечение когерентного рассеяния фотона большой энергии в кулоновском поле ядра равно

$$\sigma = \frac{98}{81\pi} \frac{Z^4 \alpha^6}{m^2}.$$

**5.6.7. Импульсное и угловое распределения ядер отдачи при образовании пар фотоном в поле ядра.** Рассмотрим подробнее наиболее интересный случай, когда поле, в котором создается пара, представляет собой экранированное кулоновское поле ядра

$$A^{(e)'}(q) = 0, \quad A_0^{(e)}(q) = \frac{Ze}{q^2} (1 - F(q))$$

( $F(q)$  — атомный форм-фактор). В этом случае отлична от нуля только одна компонента тензора  $T_{\mu\nu}$

$$T_{44} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\alpha^2}{\omega} (-G_1 + \omega^2 G_2)$$

и

$$\sigma_p(\omega) = \frac{Z^2 \alpha^3}{8\pi^4 \omega} \int d^3q \frac{(1 - F(q))^2}{q^4} (\omega^2 G_2 - G_1), \quad (5.6.54)$$

где

$$\omega^2 G_2 - G_1 = \frac{8\pi^3}{\beta^2} \left\{ 4\gamma^2 \left[ 2m^2 \ln \frac{1 - \sqrt{1 + m^2/r^2}}{1 + \sqrt{1 + m^2/r^2}} + \sqrt{1 + \frac{m^2}{r^2}} (\beta - q^2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\beta^2 - 4q^2\omega^2}{\beta^2} \left[ \sqrt{1 + \frac{m^2}{r^2}} (\beta^2 - 4(q^2 - \beta)(m^2 - 2q^2)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \frac{1 - \sqrt{1 + m^2/r^2}}{1 + \sqrt{1 + m^2/r^2}} (\beta^2 + 2(\beta - q^2)(2m^2 - q^2) - 8m^2(q^2 + m^2)) \right] \right\}.$$

Так как  $q$  представляет собой импульс, передаваемый при образовании пары ядру, то подынтегральное выражение (5.6.54) определяет распределение ядер отдачи по получаемым ими импульсам [28].

Вводя новые переменные

$$2mQ = |q|, \quad \mu = (\omega^2 - |q - k|) \frac{1}{4m^2}, \quad \gamma = \frac{\omega}{2m},$$

можно представить (5.6.54) в виде

$$\sigma_p(\omega) = \int_{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}}^{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}} dQ P(Q, \omega), \quad (5.6.55)$$

$$P(Q, \omega) = \frac{2Z^2\alpha^3}{\omega^3} [1 - F(Q^2)] \frac{I(Q, \gamma)}{Q^3},$$

$$I(Q, \gamma) = J_0 + (1 - 2Q^2) J_1 + (2Q^4 - Q^2 - 4Q^2\gamma^2 - 1/2) J_3 + \\ + 2Q^2\gamma^2(1 + 6Q^2 - 4Q^4) J_4 + K_0 + (1 - 4Q^2) K_1 + [(4Q^2 - 1)Q^2 - \\ - 4Q^2\gamma^2] K_2 + 4Q^2\gamma^2(8Q^2 - 1) K_3 + 4Q^4\gamma^2(1 - 8Q^2) K_4, \quad (5.6.56)$$

где

$$J_n = \int_0^{2\gamma Q - Q^2} \frac{d\mu}{(Q^2 + \mu)^n} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 1/\mu}}{1 + \sqrt{1 - 1/\mu}}, \quad K_n = \int_0^{2\gamma Q - Q^2} \frac{d\mu}{(Q^2 + \mu)^n}.$$

Функция  $P(Q, \omega)$  определяет распределение ядер отдачи по абсолютным значениям импульсов.

Приближенно можно считать, что функция  $P(Q, \omega)$  обратно пропорциональна  $q \equiv |q|$  (в определенных пределах), т. е.

$$\sigma_p(\omega) = \text{const} \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{dq}{q},$$

где  $q_{\max} = m$ ,  $q_{\min} = m^2/\omega$  — в отсутствие экранирования и  $q_{\min} = 1/a$  ( $a$  — атомный радиус) — в случае полного экранирования. Сравнение этой формулы с формулой (4.5.8) для сечения образования пары фотоном в кулоновском поле ядра показывает, что

$$\text{const} = \frac{28}{9} \frac{Z^2\alpha^3}{m^2} = \frac{28}{9} \bar{\Phi}.$$

Таким образом, распределение ядер отдачи по импульсам в отсутствие экранирования приближенно определяется формулой

$$\sigma_p(\omega) = \frac{28}{9} \bar{\Phi} \int_{m^2/\omega}^m \frac{dq}{q}; \quad (5.6.57)$$

при полном же экранировании

$$\sigma_p(\omega) = \frac{28}{9} \bar{\Phi} \int_{1/a}^m \frac{dq}{q}. \quad (5.6.58)$$

Если  $R_{0\max} \ll a$ ,  $R_0 \sim |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}|^{-1}$ , где  $a$  — размер атома,  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  — импульсы компонент пары, образованной фотоном с импульсом  $\mathbf{k}$ , то экранирование поля ядра не играет роли (см. п. 4.3.4), и величиной  $F(q)$  в (5.6.54) можно пренебречь. Найдем в этом случае угловое распределение ядер отдачи, т. е. распределение их по углу  $\theta$  между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{k}$ .

Вводя переменные  $\eta = \gamma \cos \theta = \gamma q k / q \omega$ ,  $\gamma = \omega / 2m$ , получим из (5.6.54) при  $F(q) = 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_p(\omega) = & \frac{Z^2 e^6}{16\pi^2 \omega^3} \int_1^\gamma d\eta \int_{\eta - \sqrt{\eta^2 - 1}}^{\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}} \frac{dQ}{Q^2} \left\{ \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 1/2\eta Q - Q^2}}{1 + \sqrt{1 - 1/2\eta Q - Q^2}} \times \right. \\ & \times \left[ \left(1 - \frac{\gamma^2}{\eta^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{2\eta Q} - \frac{1}{8Q^2\eta^2} - \frac{Q}{\eta} + \frac{Q^2}{2\eta^3}\right) + \frac{\gamma^2}{2\eta^2} \right] + \\ & \left. + \sqrt{1 - \frac{1}{2\eta Q} - Q^2} \left[ \left(1 - \frac{\gamma^2}{\eta^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{2\eta Q}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\eta^2} \left(1 - \frac{2\gamma^2}{\eta^2}\right) (Q^2 - 2\eta Q) \right] \right\}. \quad (5.6.59) \end{aligned}$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$\sigma_p(\omega) = \int_0^{\arccos \frac{1}{\gamma}} d\theta P(\theta, \omega), \quad (5.6.60)$$

$$\begin{aligned} P(\theta, \omega) = & \frac{4\gamma\alpha^3 Z^2}{\omega^2} \sin \theta \int_0^{\eta^2} d\mu \frac{1}{(\eta^2 - \mu^2)^{1/2}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{1/2} \left[ \left(1 - \frac{\gamma^2}{\eta^2}\right) \times \right. \right. \\ & \times \left( \frac{2\eta^2}{\mu^3} + \frac{2(\eta^2 - 1)}{\mu^2} + \frac{\eta^2 - 4}{4\mu} \right) + \left(1 - \frac{2\gamma^2}{\eta^2}\right) \left( -\frac{2}{\mu} + \frac{1}{\eta^2} \right) \left. \right] + \\ & \left. + \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 1/\mu}}{1 + \sqrt{1 - 1/\mu}} \left[ \frac{\gamma^2}{\eta^2 \mu^2} - \frac{\gamma^2}{2\eta^4 \mu} + \left(1 - \frac{\gamma^2}{\eta^2}\right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( \frac{1}{2\eta^2} + \frac{1 - 8\eta^2}{4\eta^2 \mu} + \frac{16\eta^4 - 16\eta^2 - 1}{8\eta^2 \mu^2} + \frac{2\eta^2 + 1}{\mu^3} - \frac{\eta^2}{\mu^4} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя член, содержащий  $\ln \frac{1 - \sqrt{1 - 1/\mu}}{1 + \sqrt{1 - 1/\mu}}$ , по частям и вводя эллиптические интегралы

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi,$$

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi,$$

$$L(\eta) = \int_0^{\eta} F(\sqrt{1 - 1/\xi^2}) \frac{d\xi}{\xi},$$

можно представить  $\sigma_p(\omega)$  в виде

$$\sigma_p(\omega) = \frac{Z^2 \alpha^3}{m^2 \gamma^2} \left\{ 4 \int_1^{\gamma} \frac{L(\eta)}{\eta} d\eta + 2L(\gamma) + \right. \\ \left. + \frac{2}{27} \left[ -(64 + 109\gamma^2) E(\sqrt{1 - 1/\gamma^2}) + (125 + \frac{6}{\gamma^2} + 42\gamma^2) F(\sqrt{1 - 1/\gamma^2}) \right] \right\}. \quad (5.6.61)$$

## § 5.7. Дважды логарифмическая асимптотика сечений квантовоэлектродинамических процессов

**5.7.1. Дважды логарифмическая асимптотика вершинной функции.** В предыдущих параграфах мы определили радиационные поправки к сечениям рассеяния различных процессов в наименьшем приближении теории возмущений. Общей особенностью этих поправок является то, что они становятся сравнимыми и могут даже превосходить сечение основного процесса в области больших энергий. Например, величина  $\delta_R$ , определяющая радиационные поправки к сечению рассеяния электрона во внешнем поле, ведет себя при больших переданных импульсах  $q$  как  $\delta_R \sim \frac{\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{q^2}{m^2}$  и достигает значения порядка единицы при  $|q^2| \sim m^2 e^{\sqrt{\pi/\alpha}}$ . Ясно, что при таких и больших значениях  $q$  формула (5.4.12) для  $\delta_R$  теряет смысл, так как она выведена в предположении о малости радиационных поправок. Аналогичная ситуация имеет место и для других квантовоэлектродинамических процессов.

Мы видим, таким образом, что для получения правильных выражений для сечений различных процессов в области больших значений энергии и переданного импульса необходимо учитывать радиационные поправки к сечениям не только в наименьшем, но и во всех последующих порядках теории возмущений. Получающиеся бесконечные ряды (состоящие из регуляризованных слагаемых) мы не умеем суммировать и, строго говоря, вообще не знаем, сходятся ли они (см. в связи с этим п. 3.8.3). Но если считать,

что эти ряды являются асимптотическими рядами, описывающими соответствующие квантовоэлектродинамические величины, то в них могут быть выделены главные последовательности членов, которые могут быть просуммированы.

Если рассматривать рассеяние ультрарелятивистского электрона во внешнем поле, то главным в  $n$ -м приближении теории возмущений оказывается член вида  $(\alpha \ln^2 \frac{q^2}{m^2})^n$ .

Аналогичная ситуация имеет место и для других квантовоэлектродинамических процессов: всегда в области больших значений энергии и переданного импульса главным в каждом приближении теории возмущений оказывается член, в котором на каждый множитель  $\alpha$  приходится произведение двух логарифмов от больших аргументов. Такие члены (мы будем называть их дважды логарифмическими) можно просуммировать и найти таким образом асимптотику сечений различных квантовоэлектродинамических процессов в области больших значений энергии и переданного импульса. Эту асимптотику называют обычно дважды логарифмической.

Покажем, как производится выделение дважды логарифмических членов. Рассмотрим сначала простейшую задачу этого типа — выделение дважды логарифмических членов в радиационных поправках к вершинной функции  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$  в области 4-импульсов  $p_1, p_2$ ,

$$|(p_1 - p_2)^2| \gg |p_{1,2}^2|, \quad |p_{1,2}^2| \gg m^2. \quad (5.7.1)$$

Начнем с радиационной поправки 3-го порядка

$$\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma_\nu (\hat{p}_2 - \hat{k}) \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\nu}{((p_2 - k)^2 - i0)((p_1 - k)^2 - i0)} \frac{d^4k}{k^2 - i0}, \quad (5.7.2)$$

которой соответствует диаграмма 1 рис. 5.18. (Мы пренебрегли всюду в соответствии с неравенствами  $|p_{1,2}^2| \gg m^2$  величиной  $m^2$ .)

Для нахождения асимптотики функции  $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$  в области (5.7.1) удобно перейти от  $k$  к новым переменным интегрирования  $u, v, k_\perp$ , определенным в § 4.9 формулой (4.9.4):

$$\begin{aligned} k &= u(p_1 - \alpha_1 p_2) + v(p_2 - \alpha_2 p_1) + k_\perp, \\ \alpha_1 &= p_1^2/2p_1 p_2, \quad \alpha_2 = p_2^2/2p_1 p_2. \end{aligned} \quad (5.7.3)$$

Легко видеть, что 4-вектор  $k_\perp$  является пространственноподобным,  $k_\perp^2 > 0$ ; элемент объема в  $k$ -пространстве, проинтегрированный по углу  $\varphi$ , равен

$$d^4k = 2\pi (p_1, p_2)^2 \text{Sgn}(-p_1 p_2) du dv dz, \quad (5.7.4)$$

где  $z = -k_\perp^2/2p_1 p_2$ .

Наконец, выразим в новых переменных множители, входящие в знаменатель подынтегрального выражения для  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(\rho_1, \rho_2)$ :

$$\begin{aligned} k^2 &= 2\rho_1\rho_2(uv - z), & (\rho_1 - k)^2 &= 2\rho_1\rho_2[(v - \alpha_1)(u - 1) - z], \\ (\rho_2 - k)^2 &= 2\rho_1\rho_2[(u - \alpha_2)(v - 1) - z]. \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

Величины  $u$  и  $v$  изменяются в пределах  $(-\infty, \infty)$ , а величина  $z$  — в пределах  $(0, \infty)$  или  $(-\infty, 0)$  в зависимости от того, отрицательна или положительна величина  $\rho_1\rho_2$ . Из (5.7.5) и (5.7.4) следует, что главный вклад в интеграл (5.7.2) вносит область интегрирования, непосредственно примыкающая к точке  $v = \alpha_1$ ,  $u = \alpha_2$ ,  $z = uv$ .

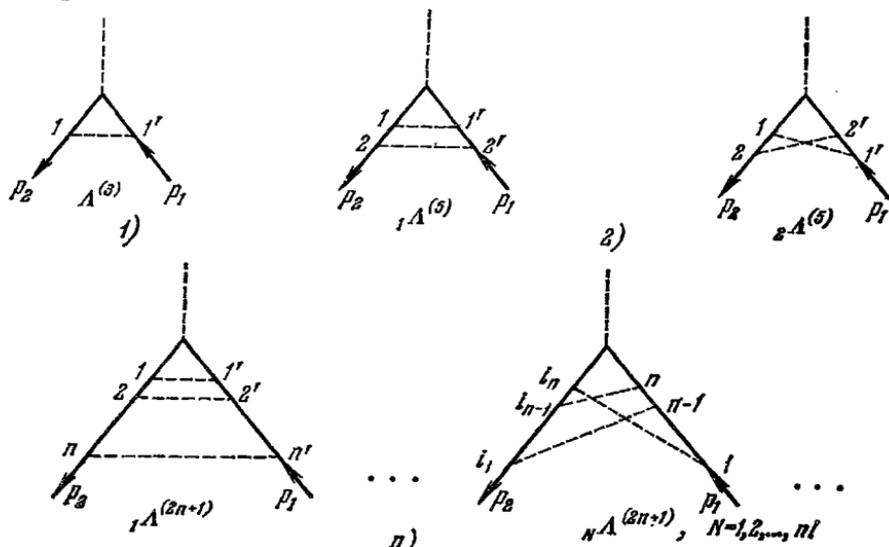


Рис. 5.18.

Так как  $|\alpha_1| \ll 1$ ,  $|\alpha_2| \ll 1$ , то существенными являются малые  $k_{\mu}$ ,  $|k_{\mu}| \ll |(p_{1,2})_{\mu}|$ ; поэтому в числителе подынтегрального выражения (5.7.2) можно пренебречь членами, содержащими  $k_{\mu}$ . Учитывая, что  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(\rho_1, \rho_2)$  находится в окружении функций  $S_c(\rho_1)$  и  $S_c(\rho_2)$ , ведущих себя при  $|\rho_{1,2}^2| \gg m^2$  как

$$S_c(\rho_{1,2}) \approx i \frac{\hat{p}_{1,2}}{\rho_{1,2}^2},$$

легко убедиться, что числитель подынтегрального выражения (5.7.2) можно заменить на  $4\rho_1\rho_2\gamma_{\mu}$ , т. е. в интересующем нас случае (5.7.1) величину  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(\rho_1, \rho_2)$  можно представить в виде

$$\Lambda_{\mu}^{(3)}(\rho_1, \rho_2) =$$

$$= -\gamma_{\mu} \frac{ie^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{du dv dz}{(v - \alpha_1 - i0)(u - \alpha_2 - i0)(uv - z + i0)}. \quad (5.7.6)$$

Точные значения пределов здесь несущественны, и мы можем их взять равными  $-1$  и  $+1$  при интегрировании по  $u$  и  $v$  и равными  $0$  и  $+1$  при интегрировании по  $z$ .

Выполним сначала интегрирование по  $z$ . Используя формулу

$$\frac{1}{x-i0} = \pi i \delta(x) + P \frac{1}{x}, \quad (5.7.7)$$

имеем

$$\int_0^1 \frac{dz}{uv-z+i0} = -i\pi\theta(uv) + \ln|uv|. \quad (5.7.8)$$

Подставляя далее это выражение в (5.7.6) и опуская член с логарифмом, получим

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu}^{(3)}(\rho_1, \rho_2) &= -\frac{\alpha}{2\pi} \gamma_{\mu} \int_0^1 \frac{du}{u-\alpha_2} \int_0^1 \frac{dv}{v-\alpha_1} = \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi} \gamma_{\mu} \ln \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{\alpha_2} = -\frac{\alpha}{2\pi} \gamma_{\mu} \ln \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1^2} \ln \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_2^2}. \end{aligned} \quad (5.7.9)$$

Таким образом, мы видим, что при  $|(p_1-p_2)^2| \gg \rho_{1,2}^2 \gg m^2$  вершинная функция  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(\rho_1, \rho_2)$  содержит дважды логарифмическое слагаемое, пропорциональное произведению  $\alpha$  и двух больших логарифмов. Это слагаемое, являющееся главным членом в  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(\rho_1, \rho_2)$ , возникает, как мы видим, при интегрировании по двум переменным  $u$  и  $v$ . Логарифмическое же слагаемое, возникающее при интегрировании по третьей переменной  $z$ , не вносит вклада в главный член, который связан только с мнимой частью интеграла по  $z$ .

Прежде чем перейти к вычислению следующих радиационных поправок к вершинной функции, убедимся, что если  $|\rho_{1,2}^2| \gg m^2$ , а  $|(p_1-p_2)^2|$  невелико по сравнению с  $|\rho_{1,2}^2|$ , то радиационная поправка к вершинной функции не будет содержать дважды логарифмических членов. Рассмотрим, например,  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(\rho_1, \rho_2)$  в предположении, что

$$\begin{aligned} |\rho_1^2| &\gg |(p_1-p_2)^2|, & |\rho_1^2| &\gg |\rho_2^2|, \\ |(p_1-p_2)^2| &\gg m^2, & |\rho_2^2| &\gg m^2. \end{aligned}$$

В этом случае, в отличие от случая (5.7.1), в знаменатель подынтегрального выражения (5.7.2) будет входить 4-вектор  $\rho_1$  с большим квадратом, благодаря чему непосредственно нельзя использовать примененную нами только что методику вычисления интеграла (5.7.2). Однако можно добиться того, чтобы в знаменатель входили векторы с малым квадратом, если предварительно произвести замену переменных интегрирования  $k \rightarrow k' = \rho_2 - k$ , после которой интеграл (5.7.2) примет вид

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu}^{(3)}(\rho_1, \rho_2) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\alpha}{\pi i} \int \frac{\gamma_{\nu}(\hat{q} + \hat{k}') \gamma_{\mu} \hat{k}' \gamma_{\nu}}{[(q+k')^2 - i0][(p_2 - k')^2 - i0](k'^2 - i0)}, \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

где  $q = p_1 - p_2$ . Применяя теперь преобразование (5.7.3) с вектором  $-q$  вместо вектора  $p_1$ ,  $k' = u(-q - \alpha_1 p_2) + v(p_2 + \alpha_2 q) + k'_\perp$ , легко убедиться, что главный вклад в интеграл (5.7.10) вносит область интегрирования  $|k'^2| \ll |q p_2|$ , в которой интеграл (5.7.10) принимает вид

$$\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = -\frac{\alpha}{8\pi p_2 q} \int_{\left|\frac{p_2^2}{2q p_2}\right|}^1 \frac{du}{u} \int_{\left|\frac{q^2}{2q p_2}\right|}^1 \frac{dv}{v} \gamma_\nu [\hat{q}(1-u) + \hat{p}_2 v] \gamma_\mu [-\hat{q}u + \hat{p}_2 v] \gamma_\nu. \quad (5.7.11)$$

В этом выражении, в отличие от выражения для  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$  в случае (5.7.1), нельзя пренебрегать в числителе под знаком интеграла членами, содержащими  $u$  и  $v$ , так как они умножаются на малые величины  $p_2$  и  $q$ . Благодаря этому интеграл (5.7.11) не будет содержать дважды логарифмических членов.

Легко убедиться, что регуляризованное значение  $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$  в рассматриваемом случае равно

$$\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = \frac{\alpha}{8\pi p_2 q} \left[ \hat{q} \gamma_\mu \hat{q} \ln \frac{p_2 q}{q^2} - 2\hat{p}_2 \gamma_\mu \hat{q} \ln \frac{p_2 q}{p_2^2} - \hat{p}_2 \gamma_\mu \hat{p}_2 \ln \frac{p_2 q}{p_2^2} \right]. \quad (5.7.12)$$

Это выражение содержит, как мы видим, только однологарифмические члены.

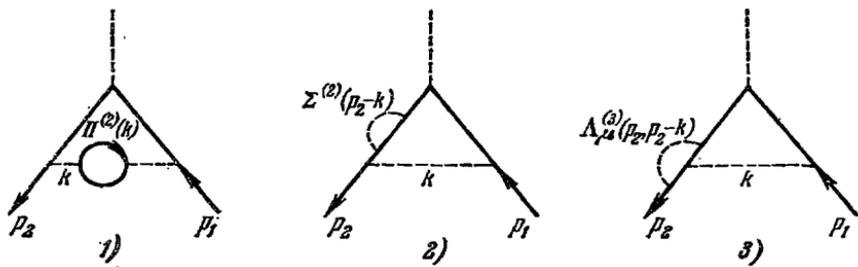


Рис. 5.19.

Таким образом, действительно, вершинная функция при  $|p_{1,2}^2| \gg m^2$  будет содержать дважды логарифмические члены только в том случае, если  $|(p_1 - p_2)^2| \gg |p_{1,2}^2| \gg m^2$ . Далее мы увидим, что дважды логарифмические члены возникают и при  $|p_{1,2}^2| \approx m^2$ , если выполняется условие  $|(p_1 - p_2)^2| \gg m^2$ . Этот случай будет играть особенно важную роль в дальнейшем, так как именно он соответствует рассеянию с большим переданным импульсом.

Вернемся теперь к определению следующих радиационных поправок к вершинной функции в случае (5.7.1). Выясним прежде всего, какие диаграммы приводят к дважды логарифмическим членам. Легко видеть, что замкнутые электронные линии не при-

водят к дважды логарифмическим членам: для таких диаграмм степени больших логарифмов оказываются всегда меньшими, чем степень квадрата заряда. Рассмотрим, например, диаграмму 1 рис. 5.19. Внутренней электронной петле соответствует, согласно (5.1.16), функция

$$\Pi_R^{(2)}(k) = 2 \frac{i\alpha}{4\pi} k^2 \int_0^1 dz (1-z^2) \left\{ \ln \left| 1 + \frac{k^2}{4m^2} (1-z^2) \right| - i\pi\theta[-k^2(1-z^2) - 4m^2] \right\},$$

откуда с логарифмической точностью

$$\Pi_R^{(2)}(k) = \frac{i\alpha}{3\pi} k^2 \left\{ \ln \left| 1 + \frac{k^2}{4m^2} \right| - i\pi\theta(-k^2 - 4m^2) \right\}.$$

Поэтому всей диаграмме 1 в целом будет соответствовать величина

$$\Lambda_\mu^{(5)}(p_1, p_2) = -\frac{ie^4}{3(2\pi)^6} \int \frac{\gamma_\nu (\hat{p}_2 - \hat{k}) \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\nu}{[(p_2 - k)^2 - i0][(p_1 - k)^2 - i0]} \times \\ \times \frac{1}{k^2} \left\{ \ln \left| 1 + \frac{k^2}{4m^2} \right| - i\pi\theta(-k^2 - 4m^2) \right\} d^4k.$$

Переходя к переменным  $u, v, z$ , согласно (5.7.3), и делая необходимые пренебрежения, получим

$$\Lambda_\mu^{(5)}(p_1, p_2) = \\ = -\frac{\alpha^2}{12\pi^2} \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^\infty \frac{\theta(uv - z - \gamma) du dv}{[(v - \alpha_1)(u - 1) - z][(u - \alpha_2)(v - 1) - z](uv - z)} = \\ = -\frac{\alpha^2}{12\pi^2} \gamma_\mu \int_{-1}^1 \frac{du}{u - \alpha_2} \int_{-1}^1 \frac{dv}{v - \alpha_1} \int_0^\infty \frac{\theta(uv - z - \gamma)}{uv - z} dz = \\ = -\frac{\alpha^2}{12\pi^2} \gamma_\mu \int_{-1}^1 \frac{du}{u - \alpha_2} \int_{-1}^1 \frac{dv}{v - \alpha_1} \theta(uv - \gamma) \ln \frac{uv}{\gamma} = \\ = -\frac{\alpha^2}{12\pi^2} \gamma_\mu \ln \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma^2} \ln \alpha_1 \ln \alpha_2, \quad (5.7.13)$$

где  $\gamma = 2m^2/p_1 p_2$ . Мы видим, как и утверждалось выше, что эта величина содержит большой логарифм в третьей степени, а заряд — в четвертой.

Таким образом, мы должны рассматривать только диаграммы с внутренними фотонными линиями. Однако и они не все будут приводить к дважды логарифмическим членам. Легко видеть, что только те из диаграмм, в которых все линии виртуальных фотонов охватывают точку испускания внешнего фотона, приводят к дважды логарифмическим членам. Рассмотрим, например, диаграммы 2 и 3

на рис. 5.19. Используя вытекающую из (5.1.12) формулу для массового оператора  $\Sigma_R^{(2)}$

$$\Sigma_R^{(2)}(\rho_2 - k) = -\frac{e^2}{16\pi^2} \left[ \ln \frac{(\rho_2 - k)^2}{m^2} - 2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right] (\hat{p}_2 - \hat{k}),$$

справедливую при  $|(p_2 - k)^2| \gg m^2$ , и аналогичную формулу для вершинной функции  $\Lambda_{R\mu}^{(2)}$  [29]

$$\Lambda_{R\mu}^{(2)}(\rho_2, \rho_2 - k) = \gamma_\mu \frac{e^2}{16\pi^2} \left[ \ln \frac{(\rho_2 - k)^2}{m^2} - 2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right],$$

справедливую при  $|\rho_2^2| \sim |(p_2 - k)^2| \gg m^2$ , получим следующие выражения для величин, соответствующих диаграммам 2 и 3:

$${}_2\Lambda_{\mu}^{(2)}(\rho_1, \rho_2) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma_\nu \Sigma_R^{(2)}(\rho_2 - k) \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\nu}{[(\rho_2 - k)^2 - i0][(\rho_1 - k)^2 - i0](k^2 - i0)} d^4k,$$

$${}_3\Lambda_{\mu}^{(2)}(\rho_1, \rho_2) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma_\nu (\hat{p}_2 - \hat{k}) \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}) \Lambda_{R\nu}^{(2)}(\rho_2, \rho_2 - k)}{[(\rho_2 - k)^2 - i0][(\rho_1 - k)^2 - i0](k^2 - i0)} d^4k.$$

Поступая так же, как и при выводе формулы (5.7.13), получим

$${}_2\Lambda_{\mu}^{(2)}(\rho_1, \rho_2) = \frac{\alpha^2}{8\pi^2} \gamma_\mu \left[ \left( \ln \frac{2\rho_1\rho_2}{m^2} + 2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right) \ln \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{2} \ln^2 \alpha_1 \ln \alpha_2 \right],$$

$${}_3\Lambda_{\mu}^{(2)}(\rho_1, \rho_2) = -{}_2\Lambda_{\mu}^{(2)}(\rho_1, \rho_2). \quad (5.7.14)$$

Эти величины, как мы видим, не содержат дважды логарифмических членов.

Перейдем теперь к рассмотрению диаграмм, содержащих только внутренние фотонные линии, охватывающие точку испускания внешнего фотона. В  $(2n+1)$ -м приближении содержится, очевидно,  $n!$  таких диаграмм, которые отличаются друг от друга только перестановкой концов виртуальных фотонных линий (см. диаграммы рис. 5.18). Вклад, вносимый этими диаграммами в вершинную функцию, будет равен, очевидно,

$$\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(\rho_1, \rho_2) = \left( \frac{\alpha}{i\pi} \right)^n \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \times$$

$$\times \sum_P \int \frac{\gamma_{\lambda_1} (\hat{p}_1 - \hat{k}_1) \gamma_{\lambda_2} (\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - \hat{k}_2) \dots \gamma_{\lambda_n} (\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - \dots - \hat{k}_n)}{[(\rho_1 - k_1)^2 - i0][(\rho_1 - k_1 - k_2)^2 - i0] \dots [(\rho_1 - k_1 - \dots - k_n)^2 - i0]} \times$$

$$\times \frac{\gamma_\mu (\hat{p}_2 - \hat{k}_{i_1} - \dots - \hat{k}_{i_n}) \gamma_{\lambda_{i_n}} (\hat{p}_2 - \hat{k}_{i_1} - \dots - \hat{k}_{i_{n-1}}) \gamma_{\lambda_{i_{n-1}}} \dots (\hat{p}_2 - \hat{k}_{i_1}) \gamma_{\lambda_{i_1}}}{[(\rho_2 - k_{i_1} - \dots - k_{i_n})^2 - i0][(\rho_2 - k_{i_1} - \dots - k_{i_{n-1}})^2 - i0] \dots [(\rho_2 - k_{i_1})^2 - i0]} \times$$

$$\times \frac{d^4k_1 \dots d^4k_n}{(k_1^2 - i0)(k_2^2 - i0) \dots (k_n^2 - i0)}, \quad (5.7.15)$$

где  $\sum_P$  обозначает суммирование по всем перестановкам  $(1, 2, \dots, n)$ . (Если  $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots$ , то фотонные линии не пересекаются; диаграмма в этом случае называется лестничной.)

Предполагая выполненными условия (5.7.1), можно в числителе подынтегрального выражения (5.7.15) пренебречь величинами  $k_i$  по сравнению с  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и заменить числитель на  $(4\rho_1\rho_2)^n \gamma_\mu$ :

$$\Lambda_\mu^{(2n+1)}(\rho_1, \rho_2) = \left(\frac{\alpha}{\pi i}\right)^n \frac{1}{(2\pi i)^{2n}} (4\rho_1\rho_2)^n \gamma_\mu \sum_P \int \prod_{s=1}^n \frac{d^4 k_s}{k_s^2 - i0} \times \\ \times \left\{ [(p_1 - k_1)^2 - i0][(p_1 - k_1 - k_2)^2 - i0] \dots \left[ p_1 - \sum_{j=1}^n k_j \right]^2 - i0 \right\} \times \\ \times \left\{ [(p_2 - k_{i_1})^2 - i0][(p_2 - k_{i_1} - k_{i_2})^2 - i0] \dots \left[ p_2 - \sum_{j=1}^n k_{i_j} \right]^2 - i0 \right\}^{-1}.$$

Для вычисления этого интеграла перейдем вместо  $k_i$  к новым переменным интегрирования  $u_i, v_i, k_{i\perp}$ , согласно (5.7.3),

$$k_i = u_i(\rho_1 - \alpha_1\rho_2) + v_i(\rho_2 - \alpha_2\rho_1) + k_{i\perp}.$$

Вспомня, что при интегрировании по  $z_i = -k_{i\perp}^2/2\rho_1\rho_2$  должна быть взята в соответствии с (5.7.7) только мнимая часть интеграла, мы получим следующее выражение для  $\Lambda_\mu^{(2n+1)}(\rho_1, \rho_2)$ :

$$\Lambda_\mu^{(2n+1)}(\rho_1, \rho_2) = \\ = \left(-\frac{\alpha}{4\pi}\right)^n \gamma_\mu \sum_P \int \frac{dv_1}{v_1 - \alpha_1} \frac{dv_2}{v_1 + v_2 - \alpha_1} \dots \frac{dv_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n - \alpha_1} \times \\ \times \frac{du_{i_n}}{u_{i_1} + \dots + u_{i_n} - \alpha_2} \frac{du_{i_{n-1}}}{u_{i_1} + \dots + u_{i_{n-1}} - \alpha_2} \dots \frac{du_{i_1}}{u_{i_1} - \alpha_2} \theta(u_1 v_1) \dots \theta(u_n v_n).$$

Главный вклад во входящие сюда интегралы вносит область интегрирования

$$\left| \frac{F_1^2}{\rho_1\rho_2} \right| \ll |v_1| \ll |v_2| \ll \dots \ll |v_n| \ll 1, \\ \left| \frac{p_\perp^2}{\rho_1\rho_2} \right| \ll |u_1| \ll |u_2| \ll \dots \ll |u_n| \ll 1.$$

Каждый из интегралов равен, как легко видеть,

$$J = \frac{2^n}{(n!)^2} \ln^n \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1^2} \ln^n \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2^2}.$$

Поэтому для  $\Lambda_\mu^{(2n+1)}(\rho_1, \rho_2)$  мы получим выражение

$$\Lambda_\mu^{(2n+1)}(\rho_1, \rho_2) = \left(-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \gamma_\mu \frac{1}{n!} \ln^n \alpha_1 \ln^n \alpha_2. \quad (5.7.16)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что все диаграммы, отличающиеся лишь перестановкой концов виртуальных фотонных линий, вносят одинаковый вклад в  $\Lambda_\mu^{(2n+1)}(\rho_1, \rho_2)$ . Суммируя выражение (5.7.16) по  $n$ , найдем вершинную функцию  $\Gamma_\mu(\rho_1, \rho_2)$

в случае  $|(\rho_1 - \rho_2)^2| \gg |\rho_{1,2}^2| \gg m^2$ :

$$\Gamma_\mu(\rho_1, \rho_2) = \gamma_\mu \exp\left(-\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1^2} \ln \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2^2}\right). \quad (5.7.17)$$

Эта важная формула [29] справедлива при выполнении следующих условий:

$$\ln \frac{q^2}{m^2} \gg 1, \quad \alpha \ln \frac{q^2}{m^2} \ll 1, \quad \alpha \ln^2 \frac{q^2}{m^2} \gtrsim 1, \quad (5.7.18)$$

где  $q = \rho_1 - \rho_2$ .

**5.7.2. Дважды логарифмическая асимптотика сечения рассеяния электрона во внешнем поле.** Перейдем теперь к определению сечения рассеяния электрона во внешнем поле в случае большого переданного импульса  $q$   $|q^2| \gg m^2$ . Сечение в этом случае будет определяться в основном вершинной функцией  $\Gamma_\mu(\rho_1, \rho_2)$  при  $|(\rho_1 - \rho_2)^2| \gg m^2$ , где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — 4-импульсы электрона в начальном и конечном состояниях,  $\rho_1^2 = \rho_2^2 = -m^2$ . Поэтому существенными, как следует из результатов предыдущего пункта, будут диаграммы с внутренними фотонными линиями, охватывающими «точку приращения» внешнего поля (такие диаграммы см. на рис. 5.18).

Покажем, как производится выделение дважды логарифмических членов в матричных элементах, соответствующих этим диаграммам. Рассмотрим прежде всего матричный элемент, соответствующий диаграмме 1:

$$M_1 = \frac{ie^3}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(\rho_2 - k)^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i(\hat{\rho}_1 - \hat{k}) - m}{(\rho_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{d^4k}{k^2} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}}. \quad (5.7.19)$$

(Мы пользуемся обозначениями п. 5.4.1.)

Так как внешние электронные линии соответствуют свободному электрону, т. е.  $\rho_1^2 = \rho_2^2 = -m^2$ , то написанный интеграл будет расходиться в области малых импульсов виртуального фотона. Чтобы избежать этой расходимости, можно, как мы видели в п. 5.4.3, ввести конечную массу фотона  $\lambda$ ; но можно поступить и иначе, а именно: вначале считать, что величины  $\delta_1 = (\rho_1^2 + m^2)/2\rho_1\rho_2$ ,  $\delta_2 = (\rho_2^2 + m^2)/2\rho_1\rho_2$  отличны от нуля и только после учета процессов излучения электроном реальных мягких фотонов положить  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ . Такой метод устранения инфракрасной расходимости позволяет воспользоваться методикой нахождения дважды логарифмической асимптотики, развитой в п. 5.7.1.

Пренебрегая в числителе подынтегрального выражения (5.7.19) величиной  $k$  по сравнению с  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и переходя от  $k$  к новым переменным интегрирования  $u, v, k_\perp$ :

$$k = u(\rho_1 - \gamma\rho_2) + v(\rho_2 - \gamma\rho_1) + k_\perp, \\ k_\perp \rho_1 = k_\perp \rho_2 = 0, \quad \gamma = m^2/2\rho_1\rho_2,$$

представим  $M_1$  в виде

$$M_1 = JM_0, \quad (5.7.20)$$

где  $M_0$  — матричный элемент, определяющий рассеяние электрона

в основном приближении:

$$M_0 = e^{\frac{\bar{n}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}}} \hat{A}^{(e)}(q) \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \quad (5.7.21)$$

и

$$J = -\frac{i\alpha}{(2\pi)^2} \int \frac{du dv dz}{(u - \gamma v - \delta_2 - i0)(v - \gamma u - \delta_1 - i0)(uv - z + i0)}$$

(переменная  $z$  связана с  $k_{\perp}$  соотношением  $z = -k_{\perp}^2/2p_1p_2$ ). В знаменателе подынтегрального выражения для  $J$  мы сохранили, в отличие от аналогичного выражения для  $\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ , члены, пропорциональные  $\gamma$ , так как величины  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , введенные нами для устранения инфракрасной расходимости, предполагаются очень малыми, именно, мы считаем, что  $\gamma \gg \delta_{1,2}$ .

В интеграле по  $z$  основной вклад дает в соответствии с результатами п. 5.7.1 полувычет в точке  $z = uv$ . Остающиеся после интегрирования по  $z$  интегралы по  $u$  и  $v$  берутся в смысле главного значения:

$$J = -\frac{\alpha}{4\pi} P \int_{-1}^1 du P \int_{-1}^1 dv \frac{\delta(uv)}{(u - \gamma v - \delta)(v - \gamma u - \delta)} \quad (5.7.22)$$

(мы считаем здесь для простоты, что  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ).

Выполнив интегрирование по одной из переменных, можно выразить  $J$  через функцию Спенса  $F(x)$ :

$$J = -\frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \ln^2 \delta + 2 \ln \delta \ln \gamma + F\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) + F\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2F\left(\frac{1}{\gamma}\right) - F\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right) - F\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) + 2F(-\gamma) \right\}, \quad (5.7.23)$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln|1-u|}{u} du.$$

Замечая, что при  $x \gg 1$  функция  $F(x) \sim \frac{1}{2} \ln^2 x$ , получим в интересующем нас случае  $\gamma \gg \delta$

$$J = -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \gamma \ln \frac{\delta^2}{\gamma}. \quad (5.7.24)$$

Если  $\delta \gg \gamma$ , то  $J = -\frac{\alpha}{2\pi} \ln^2 \delta$ , и мы приходим к результату (5.7.9).

Повторяя далее выкладки предыдущего пункта, легко показать, что каждой из диаграмм  $2n+1$ -го приближения соответствует матричный элемент

$$M_{2n+1}^{(\rho)} = M_0 \frac{J^n}{(n!)^2}.$$

Поэтому матричный элемент  $2n+1$ -го приближения равен

$$M_{2n+1} = \sum_P M_{2n+1}^{(\rho)} = M_0 \frac{J^n}{n!}.$$

и, следовательно, суммарный матричный элемент процесса рассеяния электрона во внешнем поле равен

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1} = M_0 e^J = M_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{2\pi} \ln \gamma \ln \frac{\delta^2}{\gamma}\right). \quad (5.7.25)$$

Отсюда следует, что дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона во внешнем поле с учетом радиационных поправок в дважды логарифмическом приближении определяется формулой [29]

$$d\sigma_R = d\sigma_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{\pi} \ln \gamma \ln \frac{\delta^2}{\gamma}\right), \quad (5.7.26)$$

где  $d\sigma_0$  — дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона в первом приближении теории возмущений.

Мы должны теперь устранить в сечении рассеяния инфракрасную расходимость. Для этого нужно прибавить к  $d\sigma_R$  сечение  $d\sigma'$  рассеяния электрона с излучением мягких фотонов. Этому процессу соответствуют диаграммы с волнистыми фотонными линиями, исходящими из внешних электронных линий (см. п. 5.4.4). Простейшие диаграммы такого типа, соответствующие излучению одного мягкого фотона, изображены на рис. 5.7, 4 (заштрихованный блок изображает основной процесс рассеяния и радиационные поправки к нему).

Матричный элемент, определяющий излучение одного мягкого фотона с 4-импульсом  $k$  и поляризацией  $e$ , можно представить, согласно результатам п. 5.4.4, в виде

$$M_k^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \left( \frac{2p_{2\mu} e_{\mu}}{2p_2 k + p_2^2 + m^2} - \frac{2p_{1\mu} e_{\mu}}{2p_1 k - p_1^2 - m^2} \right) M_0, \quad (5.7.27)$$

где  $M_0$  определяется формулой (5.7.1) и, в соответствии с используемым нами в этом разделе методом описания инфракрасной расходимости, мы сохранили в знаменателях слагаемые  $p_{i,a}^2 + m^2$ .

Просуммировав квадрат модуля  $M_k^{(1)}$  по поляризациям фотона  $e$  и проинтегрировав по энергии фотона  $\omega$  в пределах от  $\omega=0$  до  $\omega=\Delta\varepsilon$ , найдем дифференциальное сечение рассеяния электрона во внешнем поле с потерей энергии, не превосходящей  $\Delta\varepsilon$ :

$$d\sigma^{(1)} = d\sigma_R J_k, \quad (5.7.28)$$

где

$$J_k = \frac{4e^2}{(2\pi)^2} p_1 p_2 \int_{\omega \leq \Delta\varepsilon} \frac{d^3k}{\omega} \frac{1}{(2p_2 k + p_2^2 + m^2)(2p_1 k - p_1^2 - m^2)} = \\ = \frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \gamma \ln \frac{\delta^2}{\gamma} - 2 \ln \gamma \ln \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right),$$

$\varepsilon$  — энергия электрона ( $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$ ) и  $d\sigma_R$  определяется формулой (5.7.26).

Аналогичным образом можно получить сечение рассеяния электрона с излучением  $r$  мягких фотонов с суммарной энергией, не превосходящей  $\Delta\varepsilon$ :

$$d\sigma^{(r)} = d\sigma_R \int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \int_0^{\Delta\varepsilon - \omega_1} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \dots \int_0^{\Delta\varepsilon - \omega_1 - \omega_2 \dots - \omega_{r-1}} \frac{d^3k_r}{(2\pi)^3} \times \\ \times \frac{1}{r!} \prod_{i=1}^r \frac{-4e^2 p_1 p_2}{\omega_i} \frac{1}{(2p_2 k_i + p_2^2 + m^2)(2p_1 k_i - p_1^2 - m^2)} \quad (5.7.29)$$

( $r!$  входит сюда из-за неразличимости фотонов).

В интересующем нас случае дважды логарифмической асимптотики сечения рассеяния можно в этом выражении все верхние пределы интегралов считать равными  $\Delta\varepsilon$ . Поэтому

$$d\sigma^{(r)} = d\sigma_R \frac{J_k^r}{r!}.$$

Суммируя это выражение по  $r$ , найдем дифференциальное сечение рассеяния электрона во внешнем поле с потерей энергии, не превосходящей  $\Delta\varepsilon$ , в дважды логарифмическом приближении

$$d\sigma = d\sigma_0 \exp\left(-\frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{m^2}{q^2} \ln \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\right), \quad (5.7.30)$$

где  $d\sigma_0$  — сечение упругого рассеяния, и  $q^2 = (p_1 - p_2)^2 = 4\varepsilon^2 \sin^2(\theta/2)$  ( $\theta$  — угол рассеяния). Эта важная формула справедлива при выполнении условий

$$\alpha \ln \frac{q^2}{m^2} \ll 1, \quad \alpha \ln^2 \frac{q^2}{m^2} \sim 1, \quad \Delta\varepsilon \ll \varepsilon.$$

Заметим, что формула (5.7.30) находится в соответствии с общей формулой (5.4.20), определяющей структуру сечения рассеяния с излучением мягких фотонов. Мы видим, что в дважды логарифмическом приближении величина  $d\sigma_0$ , входящая в формулу (5.7.30), совпадает с сечением рассеяния в первом приближении теории возмущений.

**5.7.3. Дважды логарифмическая асимптотика сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .** Развита в п. 5.7.1 методика выделения дважды логарифмических членов в радиационных поправках к вершинной функции, может быть применена также для нахождения дважды логарифмической асимптотики сечений и других квантовоэлектродинамических процессов [29]. Мы не будем приводить подробные вычисления, отметим лишь, что основными процессами, которые необходимо учитывать, являются взаимодействие электронов (и других заряженных частиц) с виртуальными мягкими фотонами и излучение частицами мягких фотонов. При этом вклады, вносимые диаграммами с различным образом расположенными внутренними фотонными линиями (при одинаковом общем их числе), могут быть

различными, в отличие от случая рассеяния электрона во внешнем поле, когда все эти вклады одинаковы. Важным оказывается также характер излучения реальных мягких фотонов. Если ограничиться рассмотрением (что далее и делается) процессов с участием не более двух заряженных частиц как в начальном, так и в конечном состояниях, то дважды логарифмическая асимптотика сечений оказывается существенно зависящей от значений величин

$$|k_{s\perp}^2| = \frac{(\rho_1 k)(\rho_2 k)}{sm^2}, \quad |k_{t\perp}^2| = \frac{(\rho_1 k)(\rho'_1 k)}{|t|m^2}, \quad |k_{u\perp}^2| = \frac{(\rho_1 k)(\rho'_2 k)}{|u|m^2},$$

где  $\rho_1, \rho_2$  — 4-импульсы заряженных частиц в начальном состоянии,  $\rho'_1, \rho'_2$  — аналогичные величины в конечном состоянии,  $k$  — 4-импульс мягкого фотона и

$$s = -\frac{(\rho_1 + \rho_2)^2}{m^2}, \quad t = -\frac{(\rho_1 - \rho'_1)^2}{m^2}, \quad u = -\frac{(\rho_1 - \rho'_2)^2}{m^2}.$$

Покажем, например, что дважды логарифмическая асимптотика сечения процесса превращения электронно-позитронной пары в мюонную пару ( $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ ) при малом переданном импульсе,  $(\rho_1 - \rho'_1)^2 = (-\rho_2 + \rho'_2)^2 = O(m^2)$ ,  $s \gg 1$  ( $\rho_1, \rho_2$  — 4-импульсы электрона и позитрона,  $\rho'_1, \rho'_2$  — 4-импульсы мюонов), определяется только диаграммами лестничного типа. Рассмотрим с этой целью простейшие нелестничные диаграммы 4-го порядка (рис. 5.20) и убедимся, что они не вносят вклада в сечение процесса  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  в дважды логарифмическом приближении.

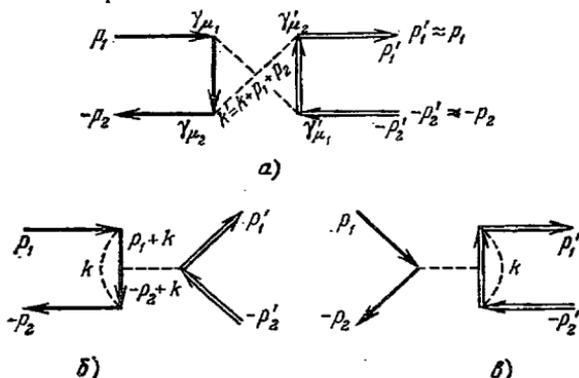


Рис. 5.20.

Диаграмме 1 рис. 5.20 соответствует величина

$$J^{(1)} \sim \int \frac{d^4k}{k^2} \frac{\gamma_{\mu_2}(\hat{p}_1 + \hat{k})\gamma_{\mu_1} \times \gamma_{\mu_2}(-\hat{p}_2 - \hat{k})\gamma_{\mu_1}}{[(\rho_1 + k)^2 + m^2][(\rho_2 + k)^2 + m^2](\rho_1 + \rho_2 + k)^2}, \quad (5.7.31)$$

где  $\gamma_\mu$  — дираковские матрицы, действующие на электронно-позитронные биспиноры  $u_- \equiv u(\rho_1)$ ,  $u_+ \equiv u(-\rho_2)$  и  $\gamma'_\mu$  — аналогичные матрицы, действующие на мюонные биспиноры  $u'_- \equiv u'(\rho'_1)$ ,  $u'_+ \equiv$

$\equiv u'(-p'_2)$  (в формуле (5.7.31) опущены биспиноры и учтено, что  $-p'_2 - k \approx -p_2 - k$ ).

Для дважды логарифмической асимптотики существенны малые 4-импульсы виртуальных фотонов; поэтому мы должны в интеграле (5.7.31) рассмотреть две области интегрирования: область малых  $k$  и область малых  $k' = p_1 + p_2 + k$ . Вклад в интеграл (5.7.31) от первой из этих областей равен

$$J_k^{(1)} \sim \frac{(\gamma_{\mu 2} \hat{p}_1 \gamma_{\mu 1}) \times \gamma'_{\mu 2} (-p_2) \gamma'_{\mu 1}}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \int_{\Omega_k} \frac{d^4 k}{k^2} \frac{1}{2\rho_1 k 2\rho_2 k},$$

а так как  $\gamma_{\mu 2} \hat{p}_1 \gamma_{\mu 1} = 2\rho_{\mu 1} \gamma_{\mu 2} - \gamma_{\mu 2} \gamma_{\mu 1} \hat{p}_1 \approx 2\rho_{\mu 1} \gamma_{\mu 2}$  (мы учли, что  $|\rho| \gg m$ ), то

$$J_k^{(1)} \sim -2 (\gamma_{\mu} \times \gamma'_{\mu}) \int_{\Omega_k} \frac{d^4 k}{k^2} \frac{1}{2\rho_1 k 2\rho_2 k} \quad (5.7.32)$$

( $\Omega_k$  означает область малых  $k$ ). Аналогичной формулой определяется вклад в интеграл (5.7.31), вносимый областью  $\Omega_{k'}$ .

Рассмотрим теперь диаграмму 2 рис. 5.20. Ей соответствует величина

$$J_k^{(2)} \sim \int \frac{d^4 k}{k^2} \frac{\gamma_{\mu 2} (-\hat{p}_2 + \hat{k}) \gamma_{\mu 1} (\hat{p}_1 + \hat{k}) \gamma_{\mu 2} \times \gamma'_{\mu 1}}{[(\rho_2 - k)^2 + m^2][(\rho_1 + k)^2 + m^2](\rho_1 + \rho_2)^2}, \quad (5.7.33)$$

которая при малых  $k$  приобретает вид

$$J_k^{(2)} \sim -2 (\gamma_{\mu} \times \gamma'_{\mu}) \int_{\Omega_k} \frac{d^4 k}{k^2} \frac{1}{(-2\rho_2 k) 2\rho_1 k}. \quad (5.7.34)$$

Мы видим, что  $J_k^{(2)}$  только знаком отличается от  $J_k^{(1)}$ :  $J_k^{(2)} = -J_k^{(1)}$ . Легко убедиться, что аналогичное соотношение имеет место для  $J_k^{(1)}$  и величины  $J_k^{(3)}$ , соответствующей диаграмме в рис. 5.20,  $J_k^{(1)} = -J_k^{(3)}$ .

Таким образом, как и утверждалось, суммарный вклад от трех нелестничных диаграмм 4-го порядка в сечение процесса  $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$  (при  $p_1 - p'_1 \rightarrow 0$ ) в дважды логарифмическом приближении обращается в нуль. Такая же ситуация имеет место и в более высоких приближениях теории возмущений.

Перейдем к рассмотрению диаграмм лестничного типа, описывающих процесс  $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$  при  $|t| \equiv (\rho_1 - \rho'_1)^2 / m^2 \sim O(1)$ ,  $s \gg 1$ . Основной диаграмме 2-го порядка (рис. 5.21) соответствует величина

$$M_2 = \frac{e^2}{im^2 s} (\bar{u}_+ \gamma_{\mu} u_-) (\bar{u}'_- \gamma'_{\mu} u'_+)$$

или сокращенно

$$M_2 \sim \frac{e^2}{im^2 s} \gamma_{\mu} \times \gamma'_{\mu}. \quad (5.7.35)$$

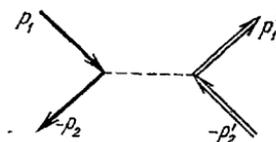


Рис. 5.21.

В с. и. и. электрона и позитрона мы можем, очевидно, заменить  $\gamma_4$  и  $\gamma_3$  на  $\gamma_4 \rightarrow -i \frac{\hat{p}_1 + \hat{p}_2}{\sqrt{m^2 s}}$ ,  $\gamma_3 \rightarrow \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{m^2 s}}$  (ось  $z$  направлена вдоль  $\rho_1$ ), а так как  $i\hat{p}u = -tu$ , то слагаемые в  $M_2$ , содержащие  $\gamma_4$  и  $\gamma_3$ , будут в  $\sqrt{s}$  раз меньше слагаемых, содержащих  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , и могут быть, следовательно, при  $s \gg 1$  опущены:

$$M_2 \sim \frac{e^2}{im^2 s} \gamma_\alpha \times \gamma'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5.7.36)$$

Найдем теперь вклад, вносимый в амплитуду процесса  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  лестничной диаграммой 4-го порядка (диаграмма 1 на рис. 5.22).

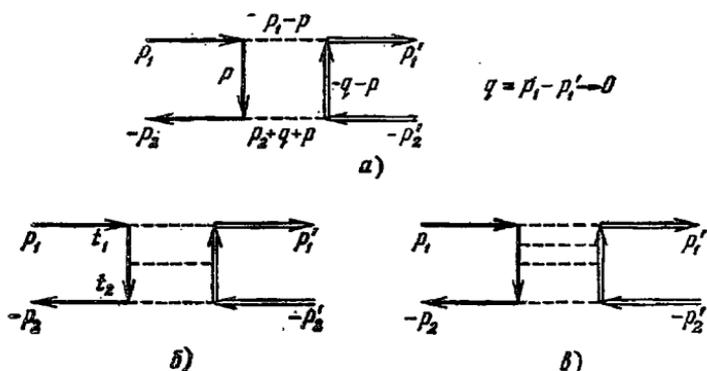


Рис. 5.22.

Введем вместо  $\rho$  новые переменные интегрирования  $u, v, \rho_\perp$ :

$$\rho = u\rho_1 + v\rho_2 + \rho_\perp, \quad \rho_\perp \rho_1 = \rho_\perp \rho_2 = 0.$$

Тогда, поступая так же, как и в § 5.6, легко убедиться, что интересующая нас дважды логарифмическая асимптотика определяется областью интегрирования  $|u|, |v| \ll 1$ . В этом случае диаграмме 1 рис. 5.22 соответствует величина

$$M_4 = -\frac{e^4}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma_\mu \hat{p} \gamma_\nu \times \gamma'_\nu \hat{p}' \gamma'_\mu \frac{s}{2m^2} du dv d^2 \rho_\perp}{(su - i0)(sv + i0)(-m^2 suv + \rho_\perp^2 - i0)^2} \approx$$

$$\approx -\frac{e^4}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \gamma_\sigma^1 \gamma_\nu \times \gamma'_\nu \gamma_\sigma^1 \gamma'_\mu \int \frac{\rho_\perp \sigma^1 \rho_\perp \sigma^1 \frac{s}{2m^2} du dv d^2 \rho_\perp}{(-m^2 suv + \rho_\perp^2 - i0)^2 (su - i0)(sv + i0)} \quad (5.7.37)$$

(члены, содержащие  $u$  и  $v$  в числителе, не приводят к дважды логарифмической асимптотике). Учитывая, что усреднение по углу в плоскости  $\rho_\perp$  дает

$$\rho_{\perp 1}^2 = \rho_{\perp 2}^2 = \frac{1}{2} \rho_\perp^2, \quad \overline{\rho_{\perp 1} \rho_{\perp 2}} = 0,$$

можно переписать  $M_4$  в виде

$$M_4 = -\frac{e^4}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \gamma_\sigma^{\perp} \gamma_\nu \times \\ \times \gamma'_\nu \gamma'_\sigma{}^{\perp} \gamma'_\mu \int \frac{^{1/2} p_\perp^2 \frac{s}{2m^2} du dv d^2 p_\perp}{(su-i0)(sv+i0)(-m^2 suv + p_\perp^2 - i0)^2}. \quad (5.7.38)$$

Вспоминая далее, что в системе центра инерции матрицы  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  приводят к слагаемым порядка  $1/\sqrt{s} \ll 1$ , можно пользоваться соотношением

$$\gamma_\mu \gamma_\sigma^{\perp} \gamma_\nu \times \gamma'_\nu \gamma'_\sigma{}^{\perp} \gamma'_\mu \approx \gamma_\alpha \gamma_\sigma \gamma_\beta \times \gamma'_\beta \gamma'_\sigma \gamma'_\alpha = 4\gamma_\alpha \times \gamma'_\sigma \\ (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4; \alpha, \beta, \sigma = 1, 2).$$

Таким образом,  $M_4$  приобретает вид

$$M_4 = -\frac{e^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \times \gamma'_\alpha \int \frac{\frac{s}{m^2} du dv d^2 p_\perp \theta(p_\perp^2 - m^2)}{(su-i0)(sv+i0)(-m^2 suv + p_\perp^2 - i0)} \quad (5.7.39)$$

(область малых  $p_\perp^2$ ,  $p_\perp^2 < m^2$ , не дает дважды логарифмических членов, поэтому под знак интеграла введена функция  $\theta(p_\perp^2 - m^2)$ ). Считая пределы интегрирования по  $u$ ,  $v$  равными  $1/s$  и  $1$ , получим

$$M_4 = M_2 \frac{\alpha}{2\pi} \int_{1/s}^1 \int_{1/s}^1 \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \theta(suv - 1) = M_2 \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \ln^2 s, \quad (5.7.40)$$

где  $M_2$  определяется формулой (5.7.36).

Аналогичным образом может быть определен дважды логарифмический вклад, вносимый лестничной диаграммой 6-го порядка (диаграмма 2 на рис. 5.22). Он определяется формулой

$$M_6 = -\frac{e^6}{i(2\pi)^6} \int \frac{\gamma_\mu \hat{t}_2 \gamma_\nu \hat{t}_1 \gamma_\lambda \times \gamma'_\lambda \hat{t}_1 \gamma'_\nu \hat{t}_2 \gamma'_\mu d^4 t_1 d^4 t_2}{m^3 s u_1 (t_1^2)^2 [m^2 s (u_1 + u_2) (v_1 + v_2)] (t_2^2)^2 m^2 s v_2},$$

в которой следует считать  $u_2 \gg u_1$ ,  $v_1 \gg v_2$ . При этом  $M_6$  приобретает вид

$$M_6 = M_2 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int_{1/s}^1 \frac{du_2}{u_2} \int_{1/s}^{u_2} \frac{du_1}{u_1} \int_{1/s}^1 \frac{dv_2}{v_2} \int_{v_2}^1 \frac{dv_1}{v_1} \theta(su_1 v_1 - 1) \times \\ \times \theta(su_2 v_2 - 1) = M_2 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2! 3!} (\ln^2 s)^2.$$

Наконец, вклад, вносимый лестничной диаграммой  $2(n+1)$ -го порядка в амплитуду процесса  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ , в дважды логарифмическом приближении определяется формулой

$$M_{2(n+1)} = M_2 \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right)^n \int_{1/s}^1 \frac{du_n}{u_n} \int_{1/s}^{u_n} \frac{du_{n-1}}{u_{n-1}} \dots \int_{1/s}^{u_2} \frac{du_1}{u_1} \int_{1/s}^1 \frac{dv_n}{v_n} \dots \\ \dots \int_{v_2}^1 \frac{dv_1}{v_1} \prod_i \theta(su_i v_i - 1) = M_2 \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right)^n \frac{1}{n! (n+1)!} (\ln^2 s)^n.$$

Суммируя величины  $M_2, M_4, M_6, \dots$ , найдем амплитуду процесса  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  в дважды логарифмическом приближении при  $t \rightarrow 0$

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_{2n} = M_2 \frac{2}{x} I_1(x), \quad (5.7.41)$$

где  $I_1(x)$  — функция Бесселя мнимого аргумента,

$$I_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n+1}}{n! (n+1)!}, \quad x = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \ln s.$$

Отсюда легко найти дифференциальное сечение рассматриваемого процесса

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_0}{dt} \frac{4}{x^2} I_1^2(x), \quad (5.7.42)$$

где  $d\sigma_0$  — дифференциальное сечение процесса  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  в борновском приближении.

**5.7.4. Сводка формул для сечений квантовоэлектродинамических процессов в дважды логарифмическом приближении.** Мы не будем приводить здесь подробных вычислений сечений других квантовоэлектродинамических процессов в дважды логарифмическом

Таблица значений  $\frac{d\sigma}{d\sigma_0}$  (по результатам работ [29])

| Области<br>Процессы               | $\ln s \gg \ln  t , \ln s = \ln  u $ |                          | $\ln s \gg \ln u, \ln s = \ln  t $ |                       |                     | $\ln s = \ln  t  = \ln  u $ |                     |
|-----------------------------------|--------------------------------------|--------------------------|------------------------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------------|---------------------|
|                                   | $k_{\perp}^2 \ll m^2$                | $k_{\perp}^2 \ll s,  t $ | $k_{\perp}^2 \ll m^2$              | $k_{\perp}^2 \ll  u $ | $k_{\perp}^2 \ll s$ | $k_{\perp}^2 \ll m^2$       | $k_{\perp}^2 \ll s$ |
| $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$   | $b$                                  | $a$                      | $c$                                | $d$                   |                     | $g$                         | $l$                 |
| $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$   | $b$                                  | $l$                      | $b$                                | $a$                   | $a$                 | $b$                         | $l$                 |
| $e^+\mu^+ \rightarrow e^+\mu^+$   | $c$                                  | $l$                      | $c$                                | $d$                   |                     | $c$                         | $l$                 |
| $e^-\mu^+ \rightarrow e^-\mu^+$   |                                      |                          |                                    |                       |                     |                             |                     |
| $e\nu \rightarrow e\nu$           |                                      |                          | $h$                                | $l$                   | $l$                 | $h$                         | $l$                 |
| $e^+e^+ \rightarrow \gamma\gamma$ | $h$                                  | $l$                      | $h$                                | $l$                   | $l$                 | $h$                         | $l$                 |

приближении, а приведем только таблицу отношений сечений  $d\sigma$  процессов в дважды логарифмическом приближении к сечениям  $d\sigma_0$  соответствующих процессов в основном приближении в различных областях значений переменных  $s, t, u$  и  $k_{\perp}^2$  (неравенство  $k_{\perp}^2 \ll A$  означает, что  $k_{s\perp}^2 \ll A, k_{t\perp}^2 \ll A, k_{u\perp}^2 \ll A$ ).

Входящие в таблицу величины  $a, b, c, d, g, h$  означают

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{2}{x} I_1(x)\right)^2, & x^2 &= \frac{2\alpha}{\pi} \ln^2 s, \\
 b &= a \exp\left(-\frac{\alpha}{\pi} \ln^2 t\right), \\
 c &= d \exp\left[\frac{\alpha}{\pi} \left(-2 \ln^2 s + \ln^2 |u| + 2 \ln^2 \frac{s}{|u|}\right)\right], \\
 d &= J^2(y), & y^2 &= \frac{2\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{s}{|u|}, \\
 g &= \exp\left(-\frac{\alpha}{\pi} \ln^2 s\right), \\
 h &= \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} \left(\ln s \ln |u| - \frac{1}{2} \ln^2 |u|\right)\right], \\
 J(y) &= \frac{2i}{\pi} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{ty} \frac{\partial}{\partial t} \ln D_{-1/4}(t) dt, & r &> 0,
 \end{aligned}$$

где  $D_{-1/4}(z)$  — функция параболического цилиндра, определяемая интегральным представлением

$$D_p(z) = -\frac{\Gamma(p+1)}{2\pi i} e^{-z/4} z^2 \int_0^{\infty} e^{-zt - 1/4 t^2} (-t)^{-p-1} dt$$

при  $p = -1/4$ . В предельных случаях малых и больших аргументов функция  $J(y)$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 J(y) &= 1 - \frac{5}{8} y^2 + \frac{35}{192} y^4 + \dots, & y &\ll 1, \\
 J(y) &= -8 (e^{-2.26y} \cos 1,84y + e^{-3.44y} \cos 3,05y + \dots), & y &\gg 1.
 \end{aligned}$$

В заключение этого раздела приведем выражения для полных сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- (\gamma)$  и  $e^+e^- \rightarrow (\gamma)$  в пределе высоких энергий и дважды логарифмическом приближении ( $(\gamma)$  означает произвольное число жестких фотонов):

$$\begin{aligned}
 \sigma(e^+e^- \rightarrow (\gamma)) &= \frac{\pi\alpha^2}{g^2} \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} I_2(y), & y^2 &= \frac{2\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{4e^2}{m^2}, \\
 \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- (\gamma)) &= \frac{\pi\alpha^2}{3e^2} \operatorname{ch} x, & x^2 &= \frac{2\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{4e^2}{m\mu},
 \end{aligned}$$

где  $I_2(y)$  — модифицированная функция Бесселя.

**А.1. Вычисление интегралов по инвариантному объему в 4-импульсном пространстве.** Мы разъясним здесь технику вычисления встречающихся в квантовой электродинамике интегралов.

Интегральные выражения, сопоставляемые, согласно правилам Фейнмана, различным диаграммам, имеют следующую структуру:

$$I = \int \frac{F(p_1, \dots)}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} d^4 p_1 \dots d^4 p_l, \quad (\text{A.1.1})$$

где  $F$  — некоторый полином относительно 4-импульсов  $p_m$  в  $\alpha_i$  — полиномы второй степени относительно  $p_m$ . Вычисление таких интегралов удобно производить, воспользовавшись предварительно тождеством

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} &= (n-1)! \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \dots \\ &\dots \int_0^1 d\xi_n \frac{\delta(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - 1)}{(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_n \xi_n)^n} = (n-1)! \int_0^1 u_1^{n-2} du_1 \int_0^1 u_2^{n-3} du_2 \dots \\ &\dots \int_0^1 du_{n-1} \frac{1}{[\alpha_1 u_1 \dots u_{n-1} + \alpha_2 u_1 \dots u_{n-2} (1-u_{n-1}) + \dots + \alpha_n (1-u_1)]^n}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

При  $n=2$  это тождество очевидно, так как

$$\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} = \int_0^1 \frac{du}{[\alpha_1 u + \alpha_2 (1-u)]^2}. \quad (\text{A.1.3})$$

Но его легко доказать и в общем виде.

Используя тождество (A.1.2), получим интеграл в  $p$ -пространстве вида

$$J(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \int \frac{F(p) d^4 p}{[(p-\alpha)^2 + l]^n}, \quad (\text{A.1.4})$$

где  $\alpha$  и  $l$  зависят от параметров  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ . Искомый интеграл  $I$  получается из  $J(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  интегрированием по  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ . (Этот метод вычисления интегралов  $I$  мы будем называть методом параметризации [1].)

Перейдем к вычислению интеграла (A.1.4). Предположим сначала, что интеграл сходится. В этом случае можно сделать преобразование  $p - \alpha \rightarrow p$ , после чего интеграл приобретает вид

$$K = \int \frac{f(p)}{(p^2 + l)^n} d^4 p. \quad (\text{A.1.5})$$

Достаточно, очевидно, ограничиться рассмотрением случая, когда  $f(p)$  представляет собой некоторую скалярную функцию от  $p^2$ . Действительно, если  $f(p) = p_\mu f_1(p^2)$ , то  $K=0$ ; если  $f(p) = p_\mu p_\nu f_2(p^2)$ , то

$$\int \frac{p_\mu p_\nu f_2(p^2)}{(p^2+l)^n} d^4p = \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \int \frac{p^2 f_2(p^2)}{(p^2+l)^n} d^4p$$

и т. д.

В интеграле (A.1.5) интегрирование по  $p_4$  производится в соответствии с правилом обхода полюсов, т. е. вдоль пути  $C$ , изображенного на рис. A.1. Но этот путь можно, очевидно, повернуть на  $\pi/2$ , как указано на рис. A.2. При этом  $p_4$  заменится на  $p_0$  и  $p^2 = p^2 + p_4^2$  перейдет в  $p^2 + p_0^2$ , где  $p_0$  — вещественная величина. Таким образом, поворот пути интегрирования  $C$  на  $\pi/2$  соответствует переходу в  $p$ -пространстве к обычной евклидовой метрике.

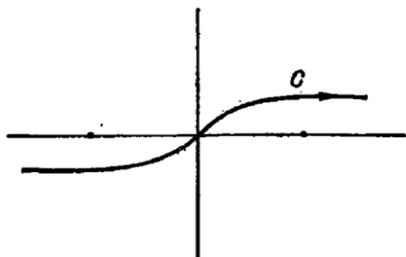


Рис. A.1.

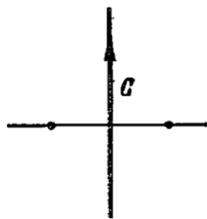


Рис. A.2.

Так как  $d^4p \equiv i d^3p dp_0 \rightarrow i\pi^2 z dz$ ,  $z = p^2$  (предполагается выполненным интегрирование по углам), то мы приходим к однократному интегралу

$$\int \frac{f(p^2) d^4p}{(p^2+l)^n} = i\pi^2 \int_0^\infty \frac{f(z) z dz}{(z+l)^n}. \quad (\text{A.1.6})$$

В частности,

$$\int \frac{d^4p}{(p^2+l-2pk)^2} = \frac{i\pi^2}{2(l-k^2)}, \quad \int \frac{p_\sigma d^4p}{(p^2+l-2pk)^2} = \frac{i\pi^2 k_\sigma}{2(l-k^2)}. \quad (\text{A.1.7})$$

Перейдем теперь к рассмотрению расходящихся интегралов типа (A.1.4). Так как в квантовой электродинамике не встречается расходимостей выше квадратичной, то речь идет об интегралах следующих четырех типов:

$$\begin{aligned} J_{\mu}^{(2)}(k, l) &= \int \frac{d^4p}{(p^2-2pk+l)^2}, & J_{\mu}^{(2)}(k, l) &= \int \frac{p_\mu d^4p}{(p^2-2pk+l)^2}, \\ J_{\mu\nu}^{(2)}(k, l) &= \int \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2-2pk+l)^2} d^4p, & J_{\mu\nu}^{(2)}(k, l) &= \int \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2-2pk+l)^3} d^4p. \end{aligned}$$

Мы будем производить во всех этих интегралах интегрирование по некоторой конечной инвариантной области ( $\Omega$ ), характеризующейся числом  $N$ , причем предел  $N \rightarrow \infty$  соответствует всему бесконечному четырехмерному пространству  $p$ . Такая конечная инвариантная область может быть определена, например, неравенствами  $|p^2| \leq N^2$ ,  $\frac{(ps)^2}{s^2} \leq N^2$ , где  $s$  — произвольный времени-подобный четырехмерный вектор [2].

Так как интегрирование по  $p_4$  при постоянном  $p^2$  не приводит к расходимости, то путь интегрирования по  $p_4$  (см. рис. A.1, A.2) можно так же, как и при вычислении сходящихся четырехмерных интегралов (A.1.4), повернуть

на  $\pi/2$ . После такого поворота мы получим четырехмерное евклидово  $p$ -пространство с вещественной четвертой координатой, и область интегрирования станет четырехмерной сферой, радиус которой мы обозначим через  $L$  и отождествим с введенным в § 3.7 предельным импульсом.

Переходя к вычислению интересующих нас расходящихся интегралов, начнем с логарифмически расходящегося интеграла

$$J_1^{(2)}(0, l) = \int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 + l)^2}.$$

Повернув путь интегрирования по  $p_4$  на  $\pi/2$  и воспользовавшись формулой (A.1.6), имеем

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 + l)^2} = i\pi^2 \int_0^{L^2} \frac{z dz}{(z + l)^2}.$$

Вычислив последний интеграл и отбросив члены порядка  $L^{-2}$ , получим

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 + l)^2} = i\pi^2 \left( \ln \frac{L^2}{l} - 1 \right). \quad (\text{A.1.8})$$

Рассмотрим далее интеграл  $J_1^{(2)}(k, l)$ , который так же как и интеграл  $J_1^{(2)}(0, l)$ , расходится логарифмически. Переписав тот интеграл в виде

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = \int_{\Omega} \frac{d^4 p}{[(p - k)^2 + l - k^2]^2},$$

сделаем замену переменных  $p - k \rightarrow p$ . Тогда интеграл приобретет вид (A.1.8) с измененной, однако, областью интегрирования, которую мы обозначим через  $\Omega'$ .

Согласно (A.1.8) интеграл  $J^{(2)}(k, l)$  будет равен  $i\pi^2 \left( \ln \frac{L'^2}{l - k^2} - 1 \right)$ . Но  $L'$  отличается от  $L$  на конечную величину: поэтому если  $L'$  достаточно велико, то  $\ln L'$  отличается от  $\ln L$  на малую величину порядка  $1/L$ , и окончательно мы получим

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = i\pi^2 \left( \ln \frac{L^2}{l - k^2} - 1 \right). \quad (\text{A.1.9})$$

Вычислим теперь логарифмически расходящийся интеграл  $J_{\mu\nu}^{(2)}(k, l)$ . Так же, как и при вычислении интеграла (A.1.9), мы можем сделать смещение начала координат, введя новую переменную интегрирования  $p - k \rightarrow p$ :

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\mu} p_{\nu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = \int_{\Omega} \frac{(p_{\mu} + k_{\mu})(p_{\nu} + k_{\nu}) d^4 p}{(p^2 + l - k^2)^2}.$$

Замечая, что

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\mu} p_{\nu} d^4 p}{(p^2 + l)^2} = \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \int_{\Omega} \frac{p^2 d^4 p}{(p^2 + l)^2} = \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\mu\nu} \int_0^{L^2} \frac{z^2 dz}{(z + l)^2} = \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\mu\nu} \left( \ln \frac{L^2}{l} - \frac{3}{2} \right),$$

получим окончательно

$$J_{\mu\lambda}^{(2)}(k, l) = \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\mu\nu} \left( \ln \frac{L^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{i\pi^2}{2} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{l - k^2}. \quad (\text{A.1.10})$$

Переходя к вычислению интеграла  $J_{\mu}^{(2)}(k, l)$ , заметим, что

$$\frac{\partial J_{\mu}^{(2)}(k, l)}{\partial k_{\nu}} = 4J_{\mu\nu}^{(1)}(k, l)$$

и что 4-вектор  $J_{\mu}^{(2)}(k, l)$  должен быть направлен вдоль  $k_{\mu}$ . Отсюда и из (A.1.10) следует:

$$\int_{\Omega} \frac{\rho_{\mu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = i\pi^2 k_{\mu} \left( \ln \frac{L^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right). \quad (\text{A.1.11})$$

Обратим внимание на то, что если бы мы вычисляли этот интеграл, сделав замену переменной (при той же области интегрирования  $\Omega$ )  $p - k \rightarrow p$ , то получили бы в результате  $i\pi^2 k_{\mu} \left( \ln \frac{L^2}{l - k^2} - 1 \right)$ . Таким образом, при преобразовании  $p \rightarrow p - k$ , т. е. смещении начала координат на  $k$ , расходящийся интеграл (A.1.11) получает добавку  $\frac{i\pi^2}{2} k_{\mu}$ .

Рассмотрим, наконец, квадратично расходящийся интеграл  $J_{\mu\nu}^{(2)}(k, l)$ . Проинтегрировав выражение (A.1.11) по  $l$ , получим

$$\int_{\Omega} \frac{\rho_{\mu} d^4 p}{p^2 - 2pk + l} = i\pi^2 k_{\mu} [(l - k^2) \ln(l - k^2) - (l - k^2) - l (\ln L^2 - 3/2) + g(N, k^2)], \quad (\text{A.1.12})$$

где  $g$  — некоторая функция от  $N$  и  $k^2$ , содержащая квадратично расходящуюся при  $N \rightarrow \infty$  константу. Легко видеть, что  $g$  представляет собой линейную функцию от  $k^2$ . Действительно, левая часть (A.1.12) при преобразовании  $k \rightarrow nk$ ,  $p \rightarrow np$ ,  $l \rightarrow n^2 l$ , где  $n$  — произвольное число, приобретает множитель  $n^2$ , что возможно только в том случае, если

$$g = \frac{1}{2} A_2 + k^2 (a \ln L^2 + b),$$

где  $A_2$  — квадратично расходящаяся константа, а  $a$  и  $b$  — некоторые числа ( $k^2$  умножается на логарифмически расходящуюся константу  $\ln L^2$ , а не на  $A_2$ , так как только при этом оба слагаемых в  $g$  будут иметь одинаковую размерность).

Продифференцировав (A.1.12) по  $k_{\nu}$ , получим интересующий нас интеграл

$$\int_{\Omega} \frac{\rho_{\mu} \rho_{\nu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = \frac{i\pi^2}{2} \delta_{\mu\nu} \left\{ (l - k^2) [\ln(l - k^2) - 1] + l \left( \frac{3}{2} - \ln L^2 \right) + k^2 (a \ln L^2 + b) + \frac{1}{2} A_2 \right\} - i\pi^2 k_{\mu} k_{\nu} [\ln(l - k^2) - (a \ln L^2 + b)]. \quad (\text{A.1.13})$$

Для того чтобы найти  $a$  и  $b$  и выразить  $A_2$  через  $L$ , можно поступит следующим образом. Представим  $J_{\mu\nu}^{(2)}(k, l)$  в виде

$$J_{\mu\nu}^{(2)}(k, l) = K_{\mu\nu}(k, l) + \int_{\Omega} \frac{\rho_{\mu} \rho_{\nu} d^4 p}{(p^2 + l)^2}, \quad (\text{A.1.14})$$

$$K_{\mu\nu}(k, l) = \int_{\Omega} \frac{\rho_{\mu} \rho_{\nu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} - \int_{\Omega} \frac{\rho_{\mu} \rho_{\nu} d^4 p}{(p^2 + l)^2}.$$

Второй интеграл в (A.1.14) может быть немедленно вычислен:

$$\int_{\Omega} \frac{\rho_{\mu} \rho_{\nu} d^4 p}{(p^2 + l)^2} = \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\mu\nu} \{ L^2 - 4l \ln L + 2l \ln l + l \}.$$

Интеграл же  $K_{\mu\nu}(k, l)$  с помощью формулы

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = - \int_0^1 \frac{n(\alpha - \beta)}{[(\alpha - \beta)z + \beta]^{n+1}} dz \quad (\text{A.1.15})$$

приводится к виду

$$K_{\mu\nu}(k, l) = -4k_\sigma \int_0^1 dz \int \frac{\rho_\mu \rho_\nu \rho_\sigma d^4 p}{(\rho^2 - 2\rho k z + l)^3}.$$

Так как

$$\int_\Omega \frac{\rho_\mu \rho_\nu \rho_\sigma d^4 p}{(\rho^2 + l)^3} = 0,$$

то, применяя еще раз формулу (A.1.15), получим

$$K_{\mu\nu}(k, l) = 24k_\sigma k_\tau \int_0^1 z dz \int_0^1 dt \int_\Omega \frac{\rho_\mu \rho_\nu \rho_\sigma \rho_\tau d^4 p}{(\rho^2 - 2\rho k z t + l)^4}.$$

Входящий сюда интеграл по  $\rho$  расходится логарифмически и может быть вычислен так же, как и интегралы (A.1.11) и (A.1.13). Поступая таким образом, найдем

$$a = 1, \quad b = -11/6, \quad A_2 = L^2.$$

Приведем в заключение сводку вычисленных интегралов:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{d^4 p}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^2} &= i\pi^2 \left( \ln \frac{L^2}{l - k^2} - 1 \right), \\ \int_\Omega \frac{\rho_\mu d^4 p}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^2} &= i\pi^2 k_\mu \left( \ln \frac{L^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right), \\ \int_\Omega \frac{\rho_\mu \rho_\nu d^4 p}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^2} &= -\frac{i\pi^2}{2} \delta_{\mu\nu} \left\{ (l - k^2) \ln \frac{L^2}{l - k^2} + \frac{5k^2 - 3l}{6} - \frac{1}{2} L^2 \right\} + \\ &\quad + i\pi^2 k_\mu k_\nu \left( \ln \frac{L^2}{l - k^2} - \frac{11}{6} \right), \quad (\text{A.1.16}) \\ \int_\Omega \frac{d^4 p}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^3} &= \frac{i\pi^2}{2} \frac{1}{l - k^2}, \quad \int_\Omega \frac{\rho_\mu d^4 p}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^3} = \frac{i\pi^2}{2} \frac{k_\mu}{l - k^2}, \\ \int_\Omega \frac{\rho_\mu \rho_\nu d^4 p}{(\rho^2 - 2\rho k + l)^3} &= \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\mu\nu} \left( \ln \frac{L^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{i\pi^2}{2} \frac{k_\mu k_\nu}{l - k^2}. \end{aligned}$$

**A.2. Метод размерной регуляризации.** Для регуляризации квантовоэлектродинамических величин в соответствии с правилами § 3.7 нужно иметь сначала конечные интегралы, соответствующие этим величинам. Для этого можно, как мы делали в § 3.7, производить интегрирование по большой, но конечной 4-мерной инвариантной области  $\Omega$ , затем регуляризовать интегралы и после этого устремить размеры области  $\Omega$  к бесконечности.

Но это не единственный метод регуляризации. Можно для обеспечения сходимости интегралов ввести под знак интеграла множитель сходимости, например, множитель типа

$$f_n(M) = \left( \frac{M^2}{\rho^2 + M} \right)^n,$$

где  $M$  и  $n$  — константы, и вычислить модифицированный таким образом интеграл по всему  $p$ -пространству. Затем регуляризуем его и устремляем  $M$  к бесконечности. Результаты, полученные обоими методами, естественно, совпадают.

Можно также сделать интеграл конечным, не прибегая к интегрированию по ограниченной области  $\Omega$  и не вводя множитель сходимости, а изменяя размерность пространства интегрирования, от которой, вообще говоря, зависит степень расходимости интеграла. При этом мы приходим к интегралам вида

$$J_{(1; \mu; \mu\nu)}(n, \alpha) = \int \frac{(1; k_{\mu}; k_{\mu}k_{\nu}) d^n k}{(k^2 - 2kp + l)^{\alpha}}, \quad (\text{A.2.1})$$

которые легко вычисляются [3]. Например,

$$J_1(n, \alpha) \equiv \int \frac{d^n k}{(k^2 - 2kp + l)^{\alpha}} = i\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)} (l - p^2)^{\frac{n}{2} - \alpha}, \quad (\text{A.2.2})$$

где  $\Gamma(n)$  — гамма-функция Эйлера.

Интеграл  $J_1(n, \alpha)$ , определяемый левой частью равенства (A.2.2), расходится при  $n=4$  и  $\alpha \leq 2$ . В методе размерной регуляризации величина  $J_1(n, \alpha)$  определяется правой частью равенства (A.2.2) при любых значениях  $n$  и  $\alpha$ . Поэтому регуляризация выражения  $J_1(4, \alpha)$  считается эквивалентной регуляризации правой части формулы (A.2.2) при  $n=4$ .

Для регуляризации правой части (A.2.2) надо иметь в виду, что  $\Gamma$ -функция имеет простые полюсы для целых отрицательных значений аргумента:

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+z)} + \int_1^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}.$$

Регуляризовав правую часть (A.2.2), в полученном выражении можно положить затем  $n=4$ . В результате мы получим регуляризованное выражение исходной величины.

Рассмотрим регуляризацию этим методом массового и поляризационного операторов 2-го порядка. Массовый оператор 2-го порядка  $\Sigma^{(2)}(p; n)$  в  $n$ -мерном импульсном пространстве определяется формулой (5.1.1), в которой следует заменить  $d^4k/(2\pi)^4$  на  $d^n k/(2\pi)^n$  и считать, что матрицы Дирака удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \delta_{\mu\mu} = n, \quad \text{Sp } l = n.$$

Поэтому

$$\Sigma^{(2)}(p; n) = e^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(2-n) i (\hat{p} + \hat{k}) - nm}{(k^2 + \lambda^2) [(p+k)^2 + m^2]}. \quad (\text{A.2.3})$$

Используя формулу (A.1.3), представим  $\Sigma^{(2)}(p; n)$  в виде

$$\Sigma^{(2)}(p; n) = \frac{e^2}{(2\pi)^n} \int_0^1 dx \int d^n k \frac{(2-n) i (\hat{p} + \hat{k}) - nm}{[k^2 + (2kp + p^2 + m^2 - \lambda^2)x + \lambda^2]^2}.$$

Интегрирование по  $k$  выполняется с помощью (A.2.2) и формулы

$$\int \frac{k_{\mu} d^n k}{(k^2 - 2kp + l)^{\alpha}} = i\pi^{n/2} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)} (l - p^2)^{\frac{n}{2} - \alpha} p_{\mu}.$$

В результате получим для  $\Sigma^{(2)}(p; n)$  выражение

$$\Sigma^{(2)}(p; n) = ie^2 \frac{\Gamma(2 - n/2)}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^1 dx [(2 - n) i\hat{p}(1 - x) - nm] \times \\ \times [p^2 x(1 - x) + m^2 x + \lambda^2(1 - x)]^{\frac{n}{2} - 2}. \quad (\text{A.2.4})$$

Мы видим, что величина  $\Sigma^{(2)}(p; n)$ , рассматриваемая как функция  $n$ , имеет простые полюсы при  $n=4, 6, \dots$ . Вблизи значения  $n=4$  массовый оператор имеет вид

$$\Sigma^{(2)}(p; n) \underset{n \rightarrow 4}{=} \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \{ \eta [\hat{p}(1 - x) - 2im] - \hat{p}(1 - x) + im - \\ - [\hat{p}(1 - x) - 2im] \ln [m^2 x + p^2 x(1 - x) + \lambda^2(1 - x)] \},$$

где  $\eta = 2/(4 - n) - \gamma + \ln 4\pi$ ,  $\gamma$  — постоянная Эйлера.

Для регуляризации  $\Sigma^{(2)}(p; 4)$  нужно вычесть из  $\Sigma^{(2)}(p; n)$  два первых члена разложения этой величины по степеням  $(\hat{p} - im)_R$  и положить затем  $n=4$ .

В результате мы придем, как легко видеть, к формуле (5.1.10) для массового оператора.

Проведем теперь регуляризацию поляризационного оператора  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k; n)$ , определяемого формулой (5.1.13) с заменой  $d^4 p/(2\pi)^4 \rightarrow d^n p/(2\pi)^n$ . Вычисляя шпур произведения  $\gamma$ -матриц и используя снова тождество (A.1.3), получим после интегрирования по  $p$

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k; n) = \frac{i\alpha}{\pi^{n/2-1}} \frac{\Gamma(2 - n/2)}{(m^2)^2 - n/2} \int_0^1 \frac{dx}{\left[1 + \frac{k^2}{m^2} x(1 - x)\right]^{2 - n/2}} \times \\ \times \left\{ \delta_{\mu\nu} \left[ m^2 - k^2 x(1 - x) + \Delta \frac{n/2}{1 - n/2} \right] - \delta_{\mu\nu} \frac{\Delta}{1 - n/2} + 2k_\mu k_\nu x(x - 1) \right\},$$

где  $\Delta = n \cdot k^2 + k^2 x(1 - x)$ . Разлагая далее это выражение вблизи значения  $n=4$ , найдем

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k; n) \underset{n \rightarrow 4}{=} i \frac{\alpha}{\pi} (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) \left\{ \frac{1}{3} (\eta - \ln m^2) - \right. \\ \left. - 2 \int_0^1 dx x(1 - x) \ln \left[ 1 + \frac{k^2}{m^2} x(1 - x) \right] \right\}. \quad (\text{A.2.5})$$

Для регуляризации  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k; 4)$  нужно вычесть из величины в фигурной скобке этой формулы ее значение при  $k^2=0$ . В результате мы придем к формуле (5.1.16) для  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)_R$ .

Обратим внимание на то обстоятельство, что в результате такого способа регуляризации мы получаем сразу калибровочно инвариантное выражение для  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ .

К главе 1.

1. Dirac P. A. M. — Proc. Roy. Soc., 1928, v. A117, p. 610.
2. Дирак П. А. М. — Труды института истории естествознания и техники, 1959, т. 22, с. 32.
3. Michel L., Wightman A. S. — Phys. Rev., 1955, v. 98, № 4, p. 1190.
4. Michel L. — Nuovo Cimento Suppl., 1959, v. 14, p. 95.
5. Weyl H. Gruppentheorie und Quantenmechanik. — Leipzig, 1928.
6. Weyl H. — Zs. f. Phys., 1929, Bd 56, H. 5—6, S. 330.
7. Pauli W. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1936, v. 6, p. 109.
8. Yang L. M. — Phil. Mag., 1952, № 334, p. 1333.
9. Половин Р. В. — ЖЭТФ, 1956, т. 31, № 3, с. 449.
10. Feynman R. — Phys. Rev., 1949, v. 76, № 6, p. 749.
11. Feynman R. — Phys. Rev., 1949, v. 76, № 6, p. 769.
12. Pauli W. — Zs. f. Phys., 1927, Bd 43, S. 601.
13. Pauli W. — Helv. Phys. Acta, 1932, v. 5, p. 179.
14. Ахмезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. — ТМФ, 1975, т. 23, № 1, с. 11.
15. Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров: Пер. с англ. / Под ред. Я. А. Смородинского. — М.: ИЛ, 1961.
16. Shift L. I., Snyder H., Weinberg J. — Phys. Rev., 1940, v. 57, № 4, p. 315.
17. Попов В. С., Мур В. П. — ЯФ, 1973, т. 18, вып. 3, с. 684.
18. Зельдович Я. Б., Попов В. С. — УФН, 1971, т. 105, вып. 3, с. 403.
19. Poteranchuk I., Smorodinsky J. — J. Phys., 1945, v. 9, № 2, p. 97.
20. Sauter F. — Zs. f. Phys., 1931, Bd 69, H. 11, S. 742.
21. Szczeniowski S. — Zs. f. Phys., 1932, Bd 73, H. 8, S. 553.
22. Klein O. — Zs. f. Phys., 1929, Bd 53, H. 3, S. 157.
23. Schwinger J. — Phys. Rev., 1951, v. 82, № 5, p. 664.
24. Никушиов А. И. — ЖЭТФ, 1969, т. 57, вып. 4, с. 1210.
25. Никушиов А. И. Проблемы внешнего поля в квантовой электродинамике. — В сб.: Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. — М.: Наука, 1979 (Труды ФИАН СССР, т. 111).
26. Furry W. H. — Phys. Rev., 1934, v. 46, p. 391.
27. Ахмезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф. — В сб.: Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1979, т. 10, вып. 1, с. 51.
28. Wallace S. J. — Ann. of Phys., 1973, v. 78, p. 190.
29. Морс Ф. М., Феибих Г. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1958, т. 1.
30. Mott N. F. — Proc. Roy. Soc., 1925, v. A124, p. 425.
31. McKinley W. A., Feshbach G. — Phys. Rev., 1948, v. 74, p. 1759.
32. Госдинейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962.

К главе 2.

1. Mignani R., Recami E., Baldo M. — Lett. Nuovo Cimento, 1974, v. 11, № 12, p. 568—572,

2. *Bete G.* Квантовая механика простейших систем. — М.; Л.: ГТТИ, 1935.
3. *Heitler W.* — Proc. Camb. Phil. Soc., 1936, v. 32, p. 112—126.
4. *Dirac P. A. M.* — Proc. Roy. Soc., 1927, v. A114, № 767, p. 243—265.
5. *Fermi E.* — Rev. Mod. Phys., 1932, v. 4, № 1, p. 87—132.
6. *Gupta S.* — Proc. Phys. Soc., 1950, v. A63, № 367, p. 681—691.
7. *Bleuler K.* — Helv. Phys. Acta, 1950, v. 23, № 5, p. 567—586.
8. *Pauli W.* — Rev. Mod. Phys., 1943, v. 15, № 3, p. 175—207.
9. *Jordan P., Pauli W.* — Zs. f. Phys., 1928, Bd 47, H. 3—4, S. 151—173.
10. *Глаубер Р.* Оптическая когерентность и статистика фотонов. — В кн.: Квантовая оптика и квантовая радиопизика. — М.: Мир, 1966, с. 91—279.
11. *Carruthers P., Nieto M.* — Rev. Mod. Phys., 1968, v. 40, № 2, p. 411—440.
12. *Hanbury Brown R., Twiss R. Q.* — Proc. Roy. Soc., 1957, v. A242, № 1230, p. 300—324; 1958, v. A243, № 1234, p. 291—319.

### К главе 3.

1. *Dirac P.* — Proc. Roy. Soc., 1927, v. A111, p. 243.
2. *Heisenberg W.* — Zs. f. Phys., 1943, v. 120, p. 513.
3. *Tomonaga S.* — Progr. Theor. Phys., 1946, v. 1, p. 27; *Schwinger J.* — Phys. Rev., 1948, v. 74, p. 1439.
4. *Wick G.* — Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 268.
5. *Hori S.* — Progr. Theor. Phys., 1952, v. 7, p. 578.
6. *Feynman R.* — Phys. Rev., 1949, v. 76, p. 749, 769.
7. *Furry W.* — Phys. Rev., 1937, v. 51, p. 125.
8. *Dyson F.* — Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1736.
9. *Ward J.* — Phys. Rev., 1950, v. 78, p. 182.
10. *Schwinger J.* — Proc. Nat. Acad. USA, 1951, v. 37, p. 452, 455.
11. *Bethe H. A.* — Phys. Rev., 1947, v. 72, p. 339.
12. *Thirring W.* — Phil. Mag., 1950, v. 41, p. 1193.
13. *Gell-Mann M., Low F.* — Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 1300.
14. *Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М.* — ДАН СССР, 1954, т. 95, с. 497, 773, 1117.
15. *Овсянников Л. В.* — ДАН СССР, 1956, т. 109, с. 1112.
16. *Callan C.* — Phys. Rev., 1970, v. D2, p. 1541.
17. *Symanzik K.* — Commun. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 227.
18. *Stueckelberg E. C. G., Petermann A.* — Helv. Phys. Acta, 1953, v. 26, p. 499.
19. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* — ДАН СССР, 1955, т. 103, с. 203.
20. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976, гл. 9.
21. *Трутень В. И., Фокин П. И.* — ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 1280.
22. *Dyson F.* — Phys. Rev., 1952, v. 85, p. 631.

### К главе 4.

1. *Зоммерфельд А.* Строение атома и спектры: Пер. с нем. / Под ред. И. Б. Борковского. — М.: Гостехиздат, 1956, ч. 2.
2. *Sauter F.* — Ann. Phys., 1931, v. 9, p. 217; v. 11, p. 454.
3. *Klein O., Nishina Y.* — Zs. f. Phys., 1929, Bd 52, S. 853.
4. *Tamm I.* — Zs. f. Phys., 1930, Bd 62, S. 545.
5. *Fano U.* — Phys. Rev., 1954, v. 93, p. 121.
6. *Lipps F. W., Tolhock H. A.* — Physica, 1954, v. 20, p. 85.
7. *McMaster W. H.* — Rev. Mod. Phys., 1961, v. 33, p. 8.
8. *Kramers H. A., Heisenberg W.* — Zs. f. Phys., 1925, Bd 31, S. 681.
9. *Weisskopf V., Wigner E. W.* — Zs. f. Phys., 1930, Bd 63, S. 54; Bd 65, S. 18.
10. *Weisskopf V.* — Ann. d. Phys., 1931, v. 9, p. 23.
11. *Bethe H., Heitler W.* — Proc. Roy. Soc., 1934, v. 146, p. 83.
12. *Koch H. W., Motz J. W.* — Rev. Mod. Phys., 1961, v. 31, p. 920.
13. *Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф.* — ЯФ, 1975, т. 22, с. 1185.
14. *Breit G., Teller E.* — Astroph. J., 1940, v. 91, p. 215.

15. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* — Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. / Отв. ред. А. Ф. Лапко. — 4-е изд., перераб. — М.: Физматгиз, 1962.
16. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра: Пер. с англ. / Отв. ред. М. Я. Ворпоницкий. — М.: Наука, 1965.
17. *Bethe H., Maximon L.* — Phys. Rev., 1954, v. 93, p. 768.
18. *Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С.* Излучение релятивистских электронов. — М.: Атомиздат, 1973.
19. *Nordsteck A.* — Phys. Rev., 1954, v. 93, p. 785.
20. *Feynman R. P.* — Phys. Rev., 1949, v. 74, p. 1430; *French J. B., Weisskopf V. F.* — Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1240.
21. *Glauber R.* — Phys. Rev., 1951, v. 84, p. 395; 1963, v. 131, p. 2766.
22. *Low F.* — Phys. Rev., 1958, v. 110, p. 974.
23. *Racah G.* — Nuovo Cimento, 1936, v. 13, p. 69.
24. *Nishina Y., Tomonaga S., Sakata S.* — Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Japan, 1934, v. 24, № 17.
25. *Dirac P. A. M.* — Proc. Camb. Phil. Soc., 1930, v. 26, p. 361.
26. *Tamm I.* — Zs. f. Phys., 1930, Bd 62, S. 545.
27. *Page L. A.* — Phys. Rev., 1957, v. 106, p. 394.
28. *Померанчук И. Я.* — ДАН СССР, 1947, т. 60, с. 218.
29. *Ore A., Powell i.* — Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1696.
30. *Fermi E., Uhlenbeck G. E.* — Phys. Rev., 1933, v. 44, p. 510.
31. *Möller C.* — Ann. d. Phys., 1932, v. 14, p. 531.
32. *Bhabha H. J.* — Proc. Roy. Soc., 1936, v. 154, p. 195.
33. *Bhabha H. J.* — Proc. Roy. Soc., 1938, v. 164, p. 257; *Massey H. S. W., Corben H. C.* — Proc. Camb. Phil. Soc., 1939, v. 35, p. 463.
34. *Ford G. W., Mullin C. J.* — Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 477.
35. *Berends F. A., Gaemers K. J., Gastmans R.* — Nucl. Phys., 1973, v. B57, p. 381; 1973, v. B63, p. 381; 1974, v. B68, p. 541.
36. *Breit G.* — Phys. Rev., 1929, v. 34, p. 553; *Ландау Л. Д.* — Sow. Phys., 1932, v. 8, p. 487; *Bethe H., Fermi E.* — Zs. f. Phys., 1932, Bd 77, S. 296.
37. *Pirenne J.* — Arch. Sc. Phys. et Nat., 1947, v. 29, p. 207; *Берестецкий В., Ландау Л.* — ЖЭТФ, 1949, т. 19, с. 673.
38. *Берестецкий В.* — ЖЭТФ, 1949, т. 19, с. 1130.
39. *Судаков В. В.* — ЖЭТФ, 1956, т. 30, с. 87.
40. *Weizsäcker C.* — Zs. f. Phys., 1934, Bd 88, S. 612; *Williams E.* — Phys. Rev., 1934, v. 45, p. 729.
41. *Ландау Л., Лифшиц Е.* — Sow. Phys., 1934, v. 6, p. 244.
42. *Горшков В. Г.* — УФН, 1973, т. 110, с. 45.
43. *Such K. S., Bethe H. A.* — Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 672.
44. *Липатов Л. Н., Фролов В. Г.* — ЯФ, 1971, т. 13, с. 588.

#### К главе 5.

1. *Feynman R.* — Phys. Rev., 1949, v. 76, p. 769.
2. *Uehling E. A.* — Phys. Rev., 1935, v. 48, p. 55.
3. *Barbiery R., Mignaco J. A., Remitty E.* — Nuovo Cimento, 1972, v. A11, p. 824. 865.
4. *Schwinger J.* — Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 651.
5. *Wichman E. H., Kroll N. M.* — Phys. Rev., 1956, v. 101, p. 843.
6. *Schwinger J.* — Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1912.
7. *Sommerfield C. M.* — Phys. Rev., 1957, v. 107, p. 328; *Peterman A.* — Helv. Phys. Acta, 1957, v. 30, p. 409.
8. *Peterman A.* — Phys. Rev., 1957, v. 105, p. 1931.
9. *Low F.* — Phys. Rev., 1952, v. 88, p. 53.
10. *Bethe H.* — Phys. Rev., 1947, v. 72, p. 339.
11. *Kroll N. M., Lamb W.* — Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 338.
12. *Karplus R., Klein A., Schwinger J.* — Phys. Rev., 1952, v. 86, p. 288.
13. *Lamb W. E., Retherford R. C.* — Phys. Rev., 1947, v. 72, p. 241.

14. *Elton L., Robertson H.* — Proc. Roy. Soc., 1952, v. A65, p. 145.
15. *Jauch J., Rohrlich F.* — Helv. Phys. Acta, 1954, v. 27, p. 613; *Yennie D. R., Frautchi S. C., Saura H.* — Ann. of Phys., 1961, v. 13, p. 379.
16. *Chung V.* — Phys. Rev., 1965, v. 140B, p. 1110; *Greco M., Ross G.* — Nuovo Cimento, 1967, v. A50, p. 168.
17. *Ахиезер А. И., Половин Р. В.* — ДАН СССР, 1953, т. 90, с. 55; *Redhead M.* — Proc. Roy. Soc., 1953, v. A220, p. 219.
18. *Brown L., Feynman R.* — Phys. Rev., 1952, v. 85, p. 231.
19. *Low F.* — Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 1428; *Gell-Mann M., Goldberger M. L.* — Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 1433.
20. *Haaris J., Brown M.* — Phys. Rev., 1957, v. 105, p. 1656.
21. *Фомин П. И.* — ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 707.
22. *Euler H. E.* — Ann. d. Phys., 1936, v. 26, p. 398; *Ахиезер А. И.* — Sow. Phys., 1937, v. 11, p. 263; *Karplus H., Neuman M.* — Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 380.
23. *Costantini V., de Tollis B., Pistoni G.* Nonlinear Effects in Quantum Electrodynamics, 1970, preprint, Nota Intera, № 273.
24. *Gribov V. N., Lipatov L. N., Frolov G. V.* — Phys. Lett., 1975, v. B60, p. 50.
25. *Heisenberg W., Euler H.* — Zs. f. Phys., 1936, Bd 98, S. 714; *Weisskopf V.* — Kgl. Dan. Vid. Sels. Mat. — Fys. Medd., 1936, v. 14, p. 6; *Schwinger J.* — Phys. Rev., 1948, v. 73, p. 416; v. 74, p. 1439.
26. *Halpern O.* — Phys. Rev., 1937, v. 44, p. 855; *Ахиезер А., Померанчук И.* — Sow. Phys., 1937, v. 11, p. 478; *Kemmer A., Ludwig G.* — Helv. Phys. Acta, 1937, v. 10, p. 182.
27. *Costantini Vi de Tollis B., Pistoni G.* — Nuovo Cimento, 1971, v. A2, p. 733.
28. *Jost R., Lutinger J., Slotnik M.* — Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 89; *Bethe H.* — Proc. Camb. Phil. Soc., 1934, v. 30, p. 524.
29. *Горшков В. Г., Грибов В. Н., Фролов Г. В.* — ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 1093; *Абрикосов А. А.* — ЖЭТФ, 1956, т. 30, с. 386; *Байер В. Н., Хейфец С. А.* — ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 613; *Горшков В. Г., Грибов В. Н., Липатов Л. Н., Фролов Г. В.* — ЯФ, 1967, т. 6, с. 129, 361.

К приложению.

1. *Feynman R.* — Phys. Rev., 1949, v. 16, p. 769.
2. *Ахиезер А. И., Половин Р. В.* — УФН, 1953, т. 51, с. 3.
3. *'t Hooft G., Veltman M.* — Nucl. Phys., 1972, v. B44, p. 189.

- Адиабатическая гипотеза 137  
 Азимутальная асимметрия 73  
 Алгебра матриц Дирака 23  
 Амплитуда излучения 214, 273  
 — рассеяния 70, 160  
 Аннигиляция пары 282  
 Аномальный магнитный момент 333  
 Антиккоммутатор электронного поля 120  
 Асимптотика волновой функции 67  
 — функций Грина 209
- Билинейные формы биспиноров 30  
 Биспинор 9  
 Борновское приближение 39, 75, 238
- Вакуум 95, 118  
 Вакуумные средние 177  
 Вариационный принцип 128  
 Векторное сложение 42  
 Вероятность перехода 160  
 Вершинная диаграмма 167  
 — функция 170, 329  
 — — трехфотонная 190  
 Виртуальные частицы 153  
 Водородоподобный атом 56  
 Волновая функция фотона 81  
 Высокоэнергетическое приближение 36,  
 243, 254
- Гамильтониан взаимодействия 34, 131, 134,  
 135  
 Гейзенберговское представление 126  
 Гипергеометрическая функция 55  
 Градиентная инвариантность 20  
 Граничный импульс 195  
 Группа Лоренца собственная 25
- Дважды логарифмическая асимптотика 398,  
 406, 409  
 Действие 127  
 Дисперсионная формула 233  
 Дополнительное условие для потенциалов  
 82, 135
- Естественная ширина уровня 339
- Запаздывающее взаимодействие 298  
 Запаздывающий потенциал 301  
 Зарядовое сопряжение 14
- Излучение дипольное 216  
 — квадрупольное 216  
 — мультипольное 214, 216  
 — мягких фотонов 262, 271  
 — ядер 217  
 Импульс электромагнитного поля 94  
 Инвариантность сечения 164  
 Интегралы по инвариантному объему 416  
 Интерференция света 103
- Инфинитезимальный оператор для биспи-  
 нора 26  
 Инфракрасная расходимость 258, 259, 271  
 Ионизационная энергия 219, 220
- Калибровочное преобразование 21, 83  
 Квадратичная расходимость 194  
 Классический радиус электрона 225, 292  
 Ковариантные компоненты 86  
 Когерентное рассеяние фотонов внешним  
 полем 391  
 Когерентные состояния электромагнитного  
 поля 106, 271  
 Коммутатор электромагнитных потенциа-  
 лов 97  
 Компактные диаграммы 167, 168  
 Комптон-эффект 222, 364  
 Контравариантные компоненты 86  
 Корреляционные функции электромагнит-  
 ного поля 103  
 Коэффициенты Клебша — Гордана 42  
 Критический заряд ядра 58  
 Кулона закон, поправки 332, 384
- Лагранжиан взаимодействия 128, 138  
 Логарифмическая расходимость 194
- «Масса» фотона 263  
 Массовый оператор 172, 322, 421  
 Матрица плотности позитрона 18  
 — рассеяния 194  
 — — фотона 112  
 — — электрона 18  
 Матрицы Дирака 8, 10, 22  
 — Паули 8  
 Метод эквивалентных фотонов 309  
 Момент импульса фотона 84  
 Мультипольное излучение 214  
 Мультипольный момент магнитный 216  
 — — электрический 215
- Нелинейная электродинамика вакуума 375  
 Нормальное произведение 99, 121, 142  
 Нормировка биспинора 15
- Обменная диаграмма 300  
 Обменное взаимодействие 300, 305  
 Образование электронно-позитронных пар  
 внешним полем 52, 59, 66  
 — — в поле ядра 273, 278, 315  
 — — — двумя фотонами 280  
 Обращение времени 28  
 Оператор заряда 117, 131  
 — инфинитезимальный 26  
 — преобразования 133, 137  
 — спина фотона 81  
 — тока 117  
 — упорядоченный 144  
 Операторы взаимодействующих полей 127  
 — импульса 129  
 — испускания и поглощения фотона 92  
 — — — электрона и позитрона 118

Операторы момента 41, 81, 86  
— полей 141  
Оптическая теорема 393  
Ортопозитроний 287  
Отражение пространственное 28  
Отрицательная частота 11

Парадокс Клейна 65  
Параметры Стокса 113  
Парапозитроний 287  
Перенормировка вершинной функции 188  
— заряда 185  
— массы 184  
— матрицы рассеяния 191  
— функции Грина 187  
Перенормировочные константы 171, 187  
Перенормируемость 192  
Перестановочные соотношения 126  
— — для электромагнитных потенциалов 97  
— — электроного поля 120  
Плоские волны 15, 83  
Позитрон 13  
Позитроний 287, 305  
Поляризационный оператор 173, 323, 422  
Поляризационные эффекты 230  
Поляризация при рассеянии в кулоновском поле 73  
Поляризованные частицы 161, 164  
Правила Вика 142  
— отбора при излучении 217  
— Фейнмана 156  
Представление взаимодействия 181  
Псевдоевклидова метрика 30  
Пуассона формула 260

Раднальные функции электрона 43  
Радиационное смещение атомных уровней 339, 342  
Радиационные поправки 356, 359, 370, 373  
Размерная регуляризация 421  
Распад позитрония 287  
Распределение Пуассона 261, 269  
Рассеяние в кулоновском поле 77  
— мюона электроном 295  
— мягких фотонов 366  
— фотона фотоном 377  
— — электроном 222  
— электрона позитроном 293  
— — электроном 290  
Расходимости 194  
Расходящиеся волны 67  
Регуляризация 196, 200  
— интегралов 417  
Регуляризованный оператор 188, 189  
Резонансное рассеяние 343  
Релятивистская инвариантность уравнения Дирака 25  
Ренормализационная группа 208

Свертка операторов 123  
Связь операторов 99, 123, 147  
Сечение двухструйного процесса 317  
— рассеяния 163, 225  
— — фотона в постоянном электромагнитном поле 390  
— — — фотоном 376  
— — — электроном 227

Сингулярные функции поля 101  
— — электроного поля 121  
Следы матриц 24  
Собственно энергетическая диаграмма 167  
— энергетические функции 170  
Спин электрона 16  
Спинор 9  
Сходящиеся волны 67

Тензор энергии-импульса 128  
Теорема Фарра 156  
Тождество Уорда 175  
Ток 21  
— — перехода 261, 271, 273, 301  
Тонкая структура 56  
Тормозное излучение 238, 314  
— — в высокоэнергетическом приближении 243  
— — — кулоновском поле 247, 250, 254

Унитарность S-матрицы 139  
Упорядоченный оператор 144  
Уругое рассеяние 70  
Уравнение Дирака 8, 10  
— Клейна — Гордона 9  
— непрерывности 21  
— Паули 32  
Уравнения графические 179  
— Вейля 23  
— Дайсона 172  
— Максвелла 80  
— — в форме Майорана 80  
Условие Лоренца 82  
Устранение инфракрасной расходимости 354

Фарри — Зоммерфельда — Мауэ (FSM) приближение 69, 79  
Фейнмана диаграммы 30, 147, 153, 156  
Формула Клейна — Нишины 237  
— Комптона 224  
— Резерфорда 292  
— Томсона 185, 227  
Форм-фактор электрона 330  
Фотон, состояние магнитного типа 90  
Фотонная липия 169  
Фотоэффект 218  
Функциональная производная 130  
Функция Грина 101, 123, 172, 176

Хронологический оператор 139  
Хронологическое произведение 99, 121, 142

Шаровой вектор 87  
— спинор 40  
Ширина линии 339  
Шредингеровское представление 126

Эйкональное приближение 38, 75, 79  
Экранирование 248, 255  
— в релятивистской области 255  
Электромагнитная масса 183  
Электрон в кулоновском поле 54  
— — магнитном поле 62  
— — потенциальной яме 50  
— — электрическом поле 64  
Эффективные линии 169