

А.И. АХИЕЗЕР, В.Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ

Квантовая
электродинамика



А. И. АХИЕЗЕР, В. Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

530.1
А 95
УДК 530.145

«Квантовая электродинамика», Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Монография, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1969.

Третье издание монографии значительно переработано авторами с учетом развития и уточнения представлений в области квантовой электродинамики. Кроме того, добавлены новые разделы, параграфы, описывающие электромагнитные свойства адронов (сильно взаимодействующих частиц), параграф о новом методе учета радиационных поправок (дважды логарифмическая асимптотика) и параграф о применимости метода дисперсионных соотношений для решения задач квантовой электродинамики.

План книг в основном повторяет прежние издания. В гл. I излагается формализм теории квантовой механики фотона, в гл. II аналогично описывается релятивистская квантовая механика электрона. В гл. III рассматриваются электромагнитные взаимодействия. В гл. IV общие результаты предыдущих глав конкретизируются при рассмотрении наиболее типичных физических явлений. В гл. V изложены методы расчета радиационных поправок и приведены схемы соответствующих расчетов для основных типов рассеяния электронов и фотонов Табл. 13, рис. 126, библиогр. назв. 160.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Из предисловия к первому изданию	13
<i>Глава I. Квантовая механика фотона</i>	<i>15</i>
§ 1. Уравнения Максвелла	15
1.1. Введение (15). 1.2. Различные формы уравнений электромагнитного поля (15). 1.3. Релятивистская инвариантность уравнений Максвелла (16). 1.4. Группа Лоренца (17). 1.5. Инверсия и обращение времени (19). 1.6.* Вариационный принцип (20). 1.7. Тензор энергии-импульса поля (23). 1.8. Тензор момента количества движения поля (25). 1.9. Разложение потенциалов на плоские волны (26)	
§ 2. Волновая функция фотона	28
2.1. Уравнение Максвелла в пространстве волновых векторов (28). 2.2. Волновая функция фотона в импульсном пространстве (30). 2.3. Плоские волны (32). 2.4. Поляризационная матрица плотности фотона (33). 2.5. Невозможность введения волновой функции фотона в координатном представлении (36).	
§ 3. Момент количества движения фотона	37
3.1. Оператор момента (37). 3.2. Спиновые волновые функции фотона (38). 3.3. Собственные функции оператора момента фотона (41). 3.4. Коэффициенты векторного сложения (43). 3.5. Продольный и поперечные шаровые векторы (45). 3.6. Четность состояний фотона (47). 3.7. Угловое распределение (48). 3.8. Сферические электромагнитные волны (48).	
§ 4. Система двух фотонов	51
4.1. Волновая функция двух фотонов в импульсном пространстве (51). 4.2 Четные и нечетные состояния двух фотонов (52). 4.3. Классификация состояний двух фотонов с определенным моментом (54).	
§ 5. Квантование электромагнитного поля	56
5.1. Операторы испускания и поглощения фотона (56) 5.2. Использование индефинитной метрики (62). 5.3. Перестановочные соотношения для потенциалов и компонент электромагнитного поля (68).	
§ 6. Сингулярные функции, связанные с волновыми полями	70
6.1 Вакуумные средние произведений операторов электромагнитного поля (70) 6.2 Хронологическое и нормальное произведения операторов электромагнитных потенциалов (72). 6.3. Функция Грина волнового уравнения (73). 6.4. Сингулярные функции, связанные с волновым уравнением (75). 6.5. Аналитические свойства сингулярных решений волновых уравнений (77)	

<i>Глава II. Релятивистская квантовая механика электрона</i>	82
§ 7. Уравнение Дирака	82
7.1. Спиноры (82). 7.2. Уравнение Дирака для свободного электрона (83). 7.3. Симметричная форма уравнения Дирака (85). 7.4. Уравнение Дирака для электрона во внешнем электромагнитном поле (86). 7.5. Уравнение непрерывности (87).	
§ 8. Свойства инвариантности уравнения Дирака	88
8.1. Различные представления уравнения Дирака (88). 8.2. Алгебра матриц Дирака (89). 8.3. Вычисление следов матриц (91). 8.4. Прямые произведения матриц Γ_j (93). 8.5. Преобразования Лоренца для биспинора (94). 8.6. Про- странственное отражение, обращение времени и зарядовое сопряжение (98). 8.7. Ковариантные билинейные формы (103). 8.8. Вариационный принцип для уравнений Дирака (105).	
§ 9. Свободный электрон	109
9.1. Решения с положительными и отрицательными частотами (109). 9.2. Пло- ские волны (112). 9.3. Поляризационные состояния электрона (114). 9.4. Поля- ризационная матрица плотности электрона (116). 9.5. Шаровые спиноры (119). 9.6. Волновая функция свободного электрона с определенным моментом (123). 9.7. Четность состояния (127). 9.8. Разложение по сферическим волнам (128).	
§ 10. Движение электрона во внешнем поле	131
10.1. Разделение переменных в центральном поле (131). 10.2. Сферически сим- метричная потенциальная яма (133). 10.3. Движение электрона в кулоновском поле ядра (136). 10.4. Волновые функции непрерывного спектра в кулоновском поле ядра (140). 10.5. Электрон в постоянном и однородном магнитном поле (142).	
§ 11. Рассеяние электронов	144
11.1. Расходящиеся и сходящиеся волны (144). 11.2. Амплитуда и сечение рас- сеяния (147). 11.3. Поляризация и азимутальная асимметрия (149). 11.4. Бор- новское приближение (150). 11.5. Рассеяние в кулоновском поле ядра (152).	
§ 12. Предельные переходы к нерелятивистской квантовой механике и реля- тивистской классической механике	156
12.1. Уравнение Паули (156). 12.2. Второе приближение (157). 12.3. Переход к релятивистской классической механике (159).	
§ 13. Релятивистски инвариантные уравнения полей	162
13.1. Конечномерные представления собственной группы Лоренца (162). 13.2. Функция Лагранжа свободного поля (166). 13.3. Тензор энергии-импульса, тен- зор моментов и вектор плотности тока (168). 13.4. Масса и спин частицы (169). 13.5. Неопределенный характер заряда при целом спине и энергии при полу- целом спине (171). 13.6. Уравнения для частиц со спином нуль и единица (174). 13.7. Уравнения для частиц с произвольным спином (177).	
§ 14. Квантование электронно-позитронного поля	179
14.1. Условия квантования (179). 14.2. Операторы испускания и поглощения электронов и позитронов (183). 14.3. Антиккоммутаторы электронного поля (187). 14.4. Хронологическое и нормальное произведения операторов электронного поля (189). 14.5. Связь спина со статистикой (193).	

<i>Глава III. Электромагнитное взаимодействие</i>	197
§ 15. Основные уравнения квантовой электродинамики	197
15.1. Система уравнений квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении (197). 15.2. Функция Лагранжа, тензор энергии-импульса и тензор моментов для взаимодействующих квантованных полей (199). 15.3. Уравнения поля в форме коммутаторов (201). 15.4. Стационарные состояния системы взаимодействующих полей (203). 15.5. Представление взаимодействия (207). 15.6. Представление взаимодействия в квантовой электродинамике (209).	
§ 16. Матрица рассеяния	215
16.1. Проблема рассеяния частиц в квантовой электродинамике (215). 16.2. Инвариантная теория возмущений (217). 16.3. Матричные элементы операторов полей (220). 16.4. Унитарность матрицы рассеяния (222). 16.5. Представление матрицы рассеяния в виде суммы нормальных произведений (225). 16.6. Функциональная форма представления матрицы рассеяния в виде N -упорядоченного оператора (229). 16.7. Мюонный и адронный токи (232).	
§ 17. Графическое представление элементов матрицы рассеяния	234
17.1. Графическое представление нормальных произведений (234). 17.2. Простейшие диаграммы (235). 17.3. Импульсное представление (240). 17.4. Теорема Фарри (243). 17.5. Правила Фейнмана (244).	
§ 18. Вероятность и эффективное сечение	246
18.1. Амплитуда рассеяния и вероятность (246). 18.2. Суммирование по состояниям поляризации электронов и фотонов (248). 18.3. Эффективное сечение (250). 18.4. Вероятность процессов рассеяния поляризованных частиц (253). 18.5. Использование обозначений, соответствующих псевдоевклидовой метрике (257).	
§ 19. Свойства симметрии электромагнитного взаимодействия	259
19.1. Релятивистская инвариантность уравнений квантовой электродинамики (259). 19.2. Инвариантность уравнений квантовой электродинамики относительно преобразования обращения времени (263). 19.3. Инвариантность уравнений квантовой электродинамики относительно преобразования зарядового сопряжения (272). 19.4. <i>CPT</i> -теорема (277). 19.5. Калибровочная инвариантность уравнений квантовой электродинамики (282).	
§ 20. Структура диаграмм матрицы рассеяния	284
20.1. Собственно энергетические и вершинные диаграммы (284). 20.2. Эффективные линии (286). 20.3. Уравнения Дайсона для функций Грина и графическое уравнение для вершинной функции (289).	
§ 21. Функции Грина взаимодействующих полей	293
21.1. Функции Грина как вакуумные средние (293). 21.2. Следствия из условия Лоренца (298). 21.3. Спектральное представление функций Грина (300). 21.4. Уравнения для функций Грина в функциональных производных (305). 21.5. Представление функций Грина в виде функциональных интегралов (310). 21.6. Калибровочные преобразования функций Грина (313).	
§ 22. Перенормировка массы и заряда электрона	315
22.1. Перенормировка массы электрона (315). 22.2. Физический заряд электрона (318). 22.3. Перенормировка функций Грина и вершинной функции (320). 22.4. Трехфотонная вершинная функция (322). 22.5. Перенормировка элементов матрицы рассеяния (324).	

§ 23. Расходимости в матрице рассеяния и их устранение	326
23.1. Расходимости в интегральных выражениях, сопоставляемых неприводимым диаграммам (326). 23.2. Введение граничного импульса (328). 23.3. Регуляризация функций, соответствующих неприводимым диаграммам (329). 23.4. Регуляризация функций, соответствующих приводимым диаграммам (332).	
§ 24. Асимптотические свойства функций Грина и границы применимости квантовой электродинамики	336
24.1. Структура функций Грина в области больших импульсов (336). 24.2. Асимптотические выражения для функций Грина (341). 24.3. Асимптотический характер регуляризованных разложений матрицы рассеяния (344). 24.4. Проблема замкнутости квантовой электродинамики (345).	
<i>Глава IV. Основные электродинамические явления</i>	<i>347</i>
§ 25. Излучение фотона	347
25.1. Общее выражение для амплитуды излучения (347). 25.2. Излучение электрического мультиполя (348). 25.3. Излучение магнитного мультиполя (350). 25.4. Излучение ядер. Правила отбора (351). 25.5. Токи перехода в импульсном представлении (352). 25.6. Угловое распределение и поляризация излучения (355). 25.7. Фотозффект (360).	
§ 26. Рассеяние фотона электроном	366
26.1. Матричный элемент рассеяния (366). 26.2. Применение законов сохранения (367). 26.3. Дифференциальное сечение в случае неполяризованных частиц (368). 26.4. Угловое распределение рассеянных фотонов (371). 26.5. Полное сечение (372). 26.6. Распределение электронов отдачи (373). 26.7. Поляризационные эффекты (374). 26.8. Рассеяние поляризованных фотонов неполяризованными электронами (376). 26.9. Рассеяние поляризованными электронами и поляризация электронов отдачи (378).	
§ 27. Рассеяние фотона связанным электроном	379
27.1. Дисперсионная формула (379). 27.2. Резонансное рассеяние (384). 27.3. Излучение двух фотонов (385).	
§ 28. Тормозное излучение	387
28.1. Эффективное сечение тормозного излучения (387). 28.2. Угловое распределение излучения в кулоновском поле (390). 28.3. Поляризация излучения (392). 28.4. Спектр излучения (394). 28.5. Экранирование (395). 28.6. Потеря энергии на излучение (398). 28.7. Точная теория тормозного излучения в нерелятивистской области. Поправка к сечению тормозного излучения в борновском приближении при крайне релятивистских энергиях (400). 28.8. Асимптотика волновой функции электрона в непрерывном спектре (406).	
§ 29. Излучение длинноволновых фотонов	408
29.1. «Инфракрасная катастрофа» (408). 29.2. Сечение рассеяния электрона с излучением мягкого фотона (412). 29.3. Исследование расходимости в области малых частот (417). 29.4. Когерентные состояния поля излучения (420). 29.5. Излучение мягких фотонов при произвольных столкновениях (422).	
§ 30. Образование и аннигиляция электронно-позитронных пар	424
30.1. Образование электронно-позитронной пары фотоном в поле ядра (424). 30.2. Точная теория образования пары фотоном в поле ядра вблизи порога. Поправка к сечению образования пары фотоном в поле ядра в борновском приближении при крайне релятивистских энергиях (429). 30.3. Образование	

пары двумя фотонами (431) 30 4. Превращение пары в два фотона (433). 30 5. Поляризационные эффекты при двухфотонной аннигиляции пар (435). 30.6. Распад позитрония (437). 30.7 Превращение пары в один фотон (439).

§ 31. Рассеяние электрона и позитрона электроном	440
31.1. Рассеяние электрона электроном (440). 31.2. Рассеяние позитрона электроном (442). 31.3. Рассеяние поляризованных электронов (443). 31 4. Рассеяние мюона электроном. Превращение электронной пары в мюонную пару (444).	
§ 32. Запаздывающее взаимодействие зарядов	446
32.1. Функция взаимодействия двух зарядов (446). 32.2. Запаздывающие потенциалы (449) 32 3 Энергия взаимодействия двух электронов с точностью до v^2/c^2 (451). 32 4 Взаимодействие электрона с позитроном (455). 32.5. Позитроний (457).	
§ 33. Метод эквивалентных фотонов	462
33 1 Сравнение диаграмм, содержащих реальный и виртуальный фотоны (462). 33.2. Число эквивалентных фотонов(464) 33.3. Тормозное излучение быстрого электрона в поле ядра (467) 33 4. Излучение при столкновении двух электронов (469). 33.5. Образование пары фотоном в поле ядра (470). 33 6. Образование пары при столкновении двух быстрых частиц (471).	
§ 34. Рассеяние электронов адронами	471
34 1. Электромагнитная вершина адрона (471). 34.2. Формфакторы (473). 34 3. Сечение рассеяния (475). 34 4. Электромагнитная структура частицы (477). 34 5 Нарушение S -инвариантности (479).	
§ 35. Взаимодействие электронов с ядрами	481
35.1. Формфакторы и мультипольные моменты (481). 35.2. Возбуждение ядер электронами (482). 35 3. Конверсия на атомной оболочке (484) 35.4. Конверсия с образованием пар (485). 35 5. Учет поля ядра (487)	
<i>Глава V. Радиационные поправки</i>	490
§ 36. Радиационные поправки к функциям Грина и вершинной функции	490
36.1 Вычисление интегралов по инвариантному объему в 4-импульсном пространстве (490). 36.2. Массовый оператор второго порядка (496). 36.3. Поляризационный оператор второго порядка (498). 36.4. Вершинная функция третьего порядка (501).	
§ 37. Модификация закона Кулона. Аномальный магнитный момент электрона	505
37 1. Модификация закона Кулона (505). 37.2. Аномальный магнитный момент электрона и мюона (507).	
§ 38. Радиационные поправки к атомным уровням	511
38.1. Уравнение Дирака с массовым оператором μ (511). 38 2. Общие формулы для радиационного смещения и естественной ширины уровней (513). 38.3. Радиационное смещение уровней атома водорода (515). 38.4. Радиационное смещение уровней μ -мезоводорода (519). 38.5. Рассеяние фотона вблизи резонанса (520).	
§ 39. Радиационные поправки к сечению рассеяния электрона во внешнем поле и сечению рассеяния электрона электроном	522
39.1. Сечение рассеяния электрона в кулоновском поле ядра во втором борновском приближении (522). 39 2 Дифференциальное сечение рассеяния электрона	

в кулоновском поле ядра с учетом радиационных поправок порядка α (526). 39.3. Исключение «массы» фотона из сечения рассеяния (528). 39.4. Устранение инфракрасной расходимости в случае произвольного процесса рассеяния (530). 39.5 Радиационные поправки к сечению рассеяния электрона электроном и электрона позитроном (535).

- § 40. Радиационные поправки к сечениям комптоновского рассеяния, образования и аннигиляции пар и к тормозному излучению 538
- 40.1. Радиационные поправки к сечению комптоновского рассеяния (538). 40.2. Рассеяние электроном фотонов малой частоты (545). 40.3. Радиационные поправки к сечению двухфотонной аннигиляции пар (550). 40.4. Радиационные поправки к сечению тормозного излучения (551). 40.5. Радиационные поправки к сечениям однофотонного образования и однофотонной аннигиляции пары (553).
- § 41. Рассеяние фотона фотоном и нелинейная электродинамика вакуума 554
- 41.1. Тензор рассеяния фотона фотоном четвертого ранга (554). 41.2. Связь между сечением рассеяния фотона фотоном и радиационными поправками к функции Лагранжа электромагнитного поля в вакууме (558). 41.3. Точное выражение для функции Лагранжа в случае медленно меняющегося электромагнитного поля (562).
- § 42. Рассеяние фотона в кулоновском поле ядра 567
- 42.1. Общее выражение для сечения рассеяния фотона в постоянном электромагнитном поле (567). 42.2. Связь между амплитудой рассеяния фотона на нулевой угол и сечением образования пар (569). 42.3. Распределение ядер отдачи по импульсам при образовании пар фотоном в поле ядра (571). 42.4. Угловое распределение ядер отдачи и интегральное сечение образования пар фотоном в кулоновском поле ядра (573). 42.5. Когерентное рассеяние фотонов в поле ядра на нулевой угол (574). 42.6. Когерентное рассеяние фотонов большой энергии в кулоновском поле ядра на малые углы (578).
- § 43. Дважды логарифмическая асимптотика сечений рассеяния 583
- 43.1. Дважды логарифмическая асимптотика вершинной функции (583). 43.2. Дважды логарифмическая асимптотика сечения рассеяния электрона во внешнем поле (590). 43.3. Сводка формул для сечений квантовоэлектродинамических процессов в дважды логарифмическом приближении (594).
- § 44. Дисперсионный метод вычисления радиационных поправок 599
- 44.1. Аналитические свойства поляризационного оператора (599). 44.2. Дисперсионное соотношение (602). 44.3. Применение соотношения унитарности (604). 44.4. Вершинная функция во втором приближении (607). 44.5. Вершинная функция в третьем приближении (609). 44.6. Четырехугольная диаграмма и двойное спектральное представление (611).
- Литература 617
- Предметный указатель 621

*Светлой памяти
нашего друга
Исаака Яковлевича
ПОМЕРАНЧУКА*

Авторы

ПРЕДИСЛОВИЕ

За 15 лет, прошедших со времени выхода первого издания этой книги, основные принципы квантовой электродинамики, ее содержание и методы не претерпели существенных изменений.

Предпринимались эксперименты для проверки предсказаний квантовой электродинамики: более точное измерение тонкой и сверхтонкой структуры уровней атома водорода, магнитных моментов электрона и мюона, измерение эффективных сечений электромагнитных процессов в области высоких энергий. В пределах экспериментальных погрешностей эти измерения показали согласие с существующей теорией.

В связи с этим особый интерес представляет теоретическое исследование поведения сечений при высоких энергиях в той области, где радиационные поправки не могут быть учтены обычными методами теории возмущений. Основные методы и результаты в этой области (так называемая дважды логарифмическая асимптотика), полученные главным образом в последние годы, изложены в § 43.

Широко исследовались в последние годы электромагнитные свойства сильно взаимодействующих частиц — адронов. Они могут быть описаны при помощи метода, в котором сильные взаимодействия учитываются феноменологически. Эти методы изложены в §§ 34, 35 в форме, позволяющей с единой точки зрения рассматривать как рассеяние электронов адронами, так и электромагнитные процессы с участием ядер.

Мы изложили также некоторые предельные теоремы, которым строго удовлетворяют адронные амплитуды излучения и рассеяния фотонов.

Попытки распространить методы квантовой теории взаимодействующих полей за пределы области электромагнитных взаимодействий не привели к радикальному прогрессу в понимании сильных и слабых взаимодействий. Однако развитый на базе этих попыток метод дисперсионных соотношений привел к появлению новой концепции теории взаимодействия элементарных частиц, не оперирующей непосредственно с полевыми понятиями. Такая концепция может быть плодотворно применена и в квантовой электродинамике для нахождения радиационных поправок. Развитию метода дисперсионных соотношений в таком плане посвящен § 44.

Остальная часть книги в идейном и методическом отношении, а также по выбору конкретного материала принципиально не отличается от предыдущего издания. Тем не менее авторы не устояли перед соблазном полной

переработки текста, были перегруппированы главы и разделы, сокращены одни из них и дано более подробное изложение в других (например, в разделах о свойствах инвариантности уравнений квантовой электродинамики — градиентной инвариантности, СРТ-теоремы и др.— о свойствах функций Грина, уравнений для частиц с высшим спином, о методе эквивалентных фотонов, о свойствах инфракрасного излучения и т. д.), т. е. книга по форме и стилю приведена к виду, соответствующему современному пониманию предмета авторами.

Мы хотим выразить глубокую благодарность И. А. Ахиезеру, В. Ф. Алексину, В. Ф. Болдышеву, Д. В. Волкову, В. Г. Горшкову, С. Я. Гузенко, С. В. Пелетминскому, С. С. Санникову, Ю. П. Степановскому, П. И. Фомину за большую помощь в подготовке настоящего издания.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время известен ряд частиц, которым соответствуют различные квантовые поля, взаимодействующие друг с другом. Однако из многообразия физических взаимодействий, существующих в природе, достаточно детально изучены в настоящее время, кроме гравитационного, только электромагнитные взаимодействия. Теория этих взаимодействий составляет предмет квантовой электродинамики, систематическому изложению которой посвящена настоящая книга.

Так как электромагнитные взаимодействия являются основными для электронов и фотонов, то квантовая электродинамика дает возможность объяснять и предсказывать широкий круг явлений, связанных с поведением этих частиц. Что касается применения квантовой электродинамики к другим частицам (нуклонам и мезонам), то оно весьма ограничено вследствие существенной роли, которую играют для этих частиц другие типы взаимодействий (ядерные или мезонные взаимодействия). Поэтому вопросы, связанные с мезонами, в книге не излагаются, а взаимодействие нуклонов с электромагнитным полем рассматривается только в предельном случае малых скоростей.

Формулировка основных уравнений квантовой электродинамики и даже сама возможность разделения взаимодействующих полей на электромагнитное и электронно-позитронное связаны с тем, что взаимодействие между полями является слабым. Это обстоятельство находит свое выражение в малости постоянной $\alpha = e^2/\hbar c$, характеризующей взаимодействие. Поэтому взаимодействие между полями рассматривается в квантовой электродинамике как малое возмущение, и математическим аппаратом квантовой электродинамики является теория возмущений, которая представляет все количественные результаты в виде разложений по степеням α .

Так как электромагнитное и электронно-позитронное поля представляют собой системы с неограниченным числом степеней свободы, то при применении теории возмущений возникают характерные для современной теории расходящиеся выражения, которые отсутствуют только в первом исчезающем приближении теории возмущений. Развитие квантовой электродинамики в последние годы позволило установить принципы регуляризации расходящихся выражений, благодаря чему стало возможным вычисление высших приближений (так называемые радиационные поправки).

Этот прогресс в значительной степени связан с новой, инвариантной, формой теории возмущений. Инвариантная теория возмущений дала возможность представлять результаты в компактном и релятивистски инвариантном виде, что позволило сформулировать правила регуляризации. С другой стороны, применение инвариантной теории возмущений представляет значительные практические преимущества по сравнению с прежними методами и при расчетах первых приближений. Поэтому все изложение в книге строится на основе инвариантной теории возмущений.

Являясь вполне удовлетворительной теорией определенной области физических явлений, современная квантовая электродинамика обладает тем крупным недостатком, что для устранения возникающих в ней расходимостей приходится привлекать дополнительные идеи, не содержащиеся в основных формулировках теории и не отраженные в ее исходных уравнениях. Такое положение вещей имеет, по-видимому, глубокие причины. Они лежат в том, что далеко не всегда возможно построение замкнутой теории ограниченного круга явлений (в данном случае чисто электромагнитных) без учета более широкого класса взаимосвязей, имеющих место в природе.

Мы выражаем благодарность Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуку и участникам руководимых ими семинаров за обсуждение ряда вопросов, изложенных в книге.

§ 1. Уравнения Максвелла

1.1. Введение. Корпускулярные свойства света явились исторически первым фундаментальным фактом, послужившим основой для развития квантовой теории. Соотношение Планка — Эйнштейна $\varepsilon = \hbar\omega$ между энергией ε частицы света, фотона и частотой колебаний соответствующего ему электромагнитного поля ω было исторически первым соотношением, содержащим квантовую постоянную \hbar .

Однако последовательная квантовая механика атома была построена до квантовой механики фотона. Это обстоятельство имеет глубокую физическую причину. Атомные частицы, электроны и ядра имеют отличную от нуля массу покоя. Для них существует область энергий, малых по сравнению с энергией покоя, в которой можно не учитывать эффектов теории относительности. Так как масса покоя фотона равна нулю, то для него не существует нерелятивистской области, и квантовая механика фотона должна быть с самого начала релятивистской теорией.

Простейшей задачей квантовой механики является описание состояний свободной частицы. В этом случае волновая функция частицы является полем в трехмерном пространстве. Если воспользоваться методом вторичного квантования, то при помощи того же поля можно описать состояния системы невзаимодействующих частиц

Такое описание состояний частиц может быть перенесено в релятивистскую область. При этом необходимым является требование инвариантности уравнений поля относительно преобразований Лоренца. Естественно принять в качестве уравнений поля, описывающего квантовомеханические состояния фотона и системы фотонов, уравнения Максвелла. Как будет показано далее, этого вместе с соотношением $\varepsilon = \hbar\omega$ достаточно для построения теории фотонов и их взаимодействия с другими частицами.

Нашей первой задачей является изучение фотонов в отсутствие электрических зарядов. Хотя свойства частиц проявляются именно при взаимодействии их с другими частицами, такое рассмотрение необходимо в качестве подготовительного этапа к изучению взаимодействий.

Начнем с краткого обзора классической теории электромагнитного поля.

1.2. Различные формы уравнений электромагнитного поля. Электромагнитное поле описывается вектором электрического поля \mathbf{E} и вектором магнитного поля \mathbf{H} , которые удовлетворяют в отсутствие зарядов системе уравнений Максвелла для пустоты:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

(Мы пользуемся здесь и в дальнейшем системой единиц, в которой скорость света равна единице, $c = 1$.)

Первые два уравнения (1.2.1) будут тождественно удовлетворены, если выразить векторы электромагнитного поля через *потенциалы поля*, вектор \mathbf{A} и скаляр φ

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.2.2)$$

Соотношения (1.2.2) определяют потенциалы не однозначно, а лишь с точностью до преобразования

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (1.2.3)$$

где χ — произвольная функция координат и времени. Это преобразование называется *калибровочным* или *градиентным*. Очевидно, что все физические соотношения, содержащие векторы поля, инвариантны по отношению к калибровочным преобразованиям.

Неоднозначность в выборе потенциалов позволяет наложить на них добавочное условие (*условие Лоренца*)

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.2.4)$$

Вторая пара уравнений Максвелла в (1.2.1) при подстановке (1.2.2) с учетом (1.2.4) принимает вид волнового уравнения для потенциалов

$$\square \mathbf{A} = 0, \quad \square \varphi = 0, \quad (1.2.5)$$

где \square — оператор Даламбера:

$$\square = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (1.2.6)$$

Условие Лоренца определяет калибровку потенциалов \mathbf{A} , φ не полностью. Легко видеть, что (1.2.4) будет выполняться, если подвергнуть потенциалы калибровочному преобразованию (1.2.3), в котором функция χ удовлетворяет волновому уравнению

$$\square \chi = 0. \quad (1.2.7)$$

1.3. Релятивистская инвариантность уравнений Максвелла. Для обеспечения релятивистской инвариантности уравнений Максвелла достаточно принять, что потенциалы электромагнитного поля \mathbf{A} , φ образуют четырехмерный вектор (*4-вектор*) $A_\mu(\mathbf{A}, i\varphi)$:

$$A_\mu = (\mathbf{A})_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, \quad (1.3.1)$$

$$A_4 = i\varphi,$$

т. е. при преобразованиях Лоренца ведут себя как составляющие четырехмерного радиуса-вектора $x_\mu(\mathbf{r}, it)$. Тогда уравнения для потенциалов (1.2.5) принимают вид

$$\square A_\mu = 0, \quad (1.3.2)$$

а условие Лоренца (1.2.4) запишется в виде

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (1.3.3)$$

(по дважды встречающемуся греческому индексу производится суммирование от 1 до 4).

4-векторная запись показывает, что вид уравнений не меняется при преобразованиях Лоренца.

Калибровочное преобразование (1.2.3) можно записать в виде

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \frac{\partial \chi}{\partial x_{\mu}}. \quad (1.3.4)$$

Оно сохраняет свой вид при преобразованиях Лоренца, если χ является четырехмерным скаляром.

Теперь уравнения (1.2.2) определяют четырехмерный антисимметричный тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}}, \quad (1.3.5)$$

объединяющий векторы электрического и магнитного полей

$$F_{jk} = \varepsilon_{jkl} H_l, \quad F_{4k} = iE_k \quad (1.3.6)$$

($j, k, l = 1, 2, 3$, ε_{jkl} — единичный антисимметричный тензор).

Соотношения (1.3.6) позволяют записать (1.2.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial F_{j\mu}}{\partial x_{\nu}} &= 0, \\ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

4-тензорная форма непосредственно доказывает релятивистскую инвариантность уравнений Максвелла.

В заключение запишем уравнения электромагнитного поля при наличии зарядов. Они отличаются тем, что уравнение (1.3.2) и второе из уравнений (1.3.7) становятся неоднородными:

$$\square A_{\mu} = -j_{\mu} \quad (1.3.8)$$

или

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = -j_{\mu}, \quad (1.3.9)$$

где j_{μ} — 4-вектор плотности электрического тока.

1.4. Группа Лоренца. Выше мы пользовались понятиями преобразований Лоренца, 4-вектора и др. Здесь мы изложим некоторые полезные для дальнейшего уточнения и обобщения этих понятий.

Рассмотрим группу линейных преобразований

$$x_{\mu} = a_{\mu\nu} x'_{\nu},$$

оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$x_{\mu}^2 = x'_{\mu}{}^2.$$

Здесь x_1, x_2, x_3 — пространственные координаты, $t = \frac{1}{i} x_4$ — время, x'_{μ} — те же величины в другой инерциальной системе отсчета. Запишем эти преобразования в матричной форме

$$x' = ax. \quad (1.4.1)$$

Из соотношения $x'^2 = x^2$ следует, что матрица a удовлетворяет условию

$$a_{\mu\nu} a_{\rho\nu} = \delta_{\mu\rho}$$

или

$$aa^T = I,$$

где a^T — матрица, транспонированная по отношению к a , и I — единичная матрица. Отсюда получаем следующее важное свойство определителя матрицы a

$$|\det a|^2 = 1, \quad \det a = \pm 1. \quad (1.4.2)$$

Матрица a удовлетворяет еще условию, ограничивающему скорость относительного движения инерциальной системы скоростью света,

$$|a_{44}| \geq 1. \quad (1.4.3)$$

Группа преобразований, определяемых формулами (1.4.1) — (1.4.3), называется *полной однородной* (или просто *полной*) *группой Лоренца*

Из полной группы Лоренца можно выделять подгруппу, называемую *собственной группой Лоренца*. Это — совокупность таких преобразований из полной группы Лоренца, которые содержат тождественное преобразование, осуществляемое единичной матрицей I , и бесконечно малые преобразования, т. е. преобразования, бесконечно близкие к тождественному,

$$x_\mu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu,$$

осуществляемые матрицей

$$a = I + \varepsilon, \quad (1.4.4)$$

где ε — бесконечно малая антисимметричная матрица,

$$\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}, \quad |\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1.$$

Любое преобразование из собственной группы Лоренца может быть получено из тождественного путем непрерывного изменения элементов матрицы a . Так как $\det a$ принимает, согласно (1.4.2), только два дискретных значения, то для любого преобразования собственной группы Лоренца

$$\det a = 1, \quad a_{44} \geq 1. \quad (1.4.5)$$

Мы называли четырехкомпонентную величину потенциала A_μ 4-вектором. Это означает, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, осуществляемом преобразованием собственной группы Лоренца, она преобразуется как x , т. е.

$$A'(x') = aA(x) \quad (1.4.6)$$

при $x' = ax$, где a — преобразование из собственной группы Лоренца.

Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ преобразуется, как легко видеть из (1.3.5), следующим образом

$$F'(x') = aF(x)a^T. \quad (1.4.7)$$

Это преобразование, служащее определением 4-тензора второго ранга, является примером линейного преобразования, однозначно определяемого преобразованием a , но не совпадающего с ним.

Заметим, что тензор $F_{\mu\nu}$ можно записать не в виде квадратной матрицы, а в виде шестикомпонентного вектора F_i ($i = 1, 2, \dots, 6$). Тогда преобразование его можно представить в виде

$$F'(x') = SF(x),$$

т. е.

$$F_i(x') = S_{ij}F_j(x),$$

где S — квадратная шестирядная матрица, элементы которой являются определенными функциями элементов матрицы a .

Мы можем перейти теперь к рассмотрению общего случая произвольного поля, описываемого некоторым числом функций $\psi_i(x)$, совокупность которых мы будем называть волновой функцией поля и обозначать через $\psi(x)$. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой волновая функция претерпевает линейное преобразование, являющееся представлением группы Лоренца

$$\psi'(x') = S\psi(x). \quad (1.4.8)$$

Для бесконечно малых преобразований (1.4.4) матрицу S можно разложить в ряд по степеням $\varepsilon_{\mu\nu}$ и ограничиться линейными членами

$$S = I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I^{\mu\nu}, \quad (1.4.9)$$

где $I^{\mu\nu} = -I^{\nu\mu}$ — некоторые не зависящие от $\varepsilon_{\mu\nu}$ матрицы. Эти матрицы называются *инфинитезимальными операторами*. Они определяют представление собственной группы Лоренца.

1.5. Инверсия и обращение времени. Любое преобразование полной группы Лоренца (не входящее в собственную группу) отличается от собственных преобразований знаком $\det a$ или a_{44} (или обеих этих величин). Оно может быть получено как совокупность собственного преобразования Лоренца и двух дискретных преобразований: преобразования *пространственного отражения* (инверсии)

$$x'_j = -x_j, \quad x'_4 = x_4 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.5.1)$$

или

$$x' = a_P x,$$

где

$$a_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det a_P = -1, \quad (a_P)_{44} = 1,$$

и преобразования *обращения времени*

$$x'_j = x_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad x'_4 = -x_4 \quad (1.5.2)$$

или

$$x' = a_T x,$$

где

$$a_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det a_T = -1, \quad (a_T)_{44} = -1.$$

Каждое из этих преобразований (вместе с тождественным преобразованием) образует группу, являющуюся подгруппой полной группы Лоренца. Каждая из этих двух групп, таким образом, состоит из двух матриц (a_P и I или a_T и I), причем

$$a_P^2 = I, \quad a_T^2 = I.$$

Выше мы определили 4-вектор по поведению этой величины относительно преобразований собственной группы Лоренца. При преобразованиях

полной группы Лоренца различные 4-векторы могут преобразовываться по-разному. Это определяется их поведением при преобразованиях инверсии (P) и обращения времени (T). Матрицы соответствующих преобразований имеют вид

$$P = \eta_P a_P, \quad T = \eta_T a_T. \quad (1.5.3)$$

Так как $P^2 = I$, $T^2 = I$, то

$$\eta_P^2 = 1, \quad \eta_T^2 = 1$$

и, следовательно,

$$\eta_P = \pm 1, \quad \eta_T = \pm 1. \quad (1.5.4)$$

При $\eta_P = 1$ 4-вектор называется полярным, при $\eta_P = -1$ — аксиальным. При $\eta_T = -1$ мы будем называть 4-вектор t -четным, а при $\eta_T = 1$ — t -нечетным. В этих терминах x_μ является полярным t -нечетным 4-вектором.

Определим значения η_P и η_T для 4-вектора потенциала электромагнитного поля. Уравнения для потенциалов (1.3.2) — (1.3.3) допускают любое значение этих величин. Мы придем к однозначному выбору их, если обратимся к неоднородному уравнению (1.3.8). Плотность тока j_μ является полярным t -четным 4-вектором. Действительно, рассмотрим связь заряда e с временной компонентой плотности тока $j_4 = ip$

$$e = \int \rho d^3x.$$

Так как заряд — инвариантная величина, а объем $\int d^3x$ не меняется при инверсии и обращении времени, то $j_4 \rightarrow j_4$ как при P -, так и при T -преобразовании. С другой стороны, пространственные составляющие плотности тока определяются формулой

$$j_k = \rho v_k = \rho \frac{dx_k}{dt} \quad (k = 1, 2, 3),$$

откуда видно, что при инверсии ($x_k \rightarrow -x_k$, $t \rightarrow t$) и обращении времени ($t \rightarrow -t$, $x_k \rightarrow x_k$) эти составляющие изменяют свой знак,

$$j_k \rightarrow -j_k.$$

Из (1.3.8) следует, что 4-потенциал A_μ является полярным t -четным 4-вектором,

$$\eta_P = 1, \quad \eta_T = -1. \quad (1.5.5)$$

Отсюда и из (1.3.5) следуют законы преобразования компонент электромагнитного поля при инверсии и обращении времени:

$$\begin{aligned} PE_j &= -E_j, & PH_j &= H_j, \\ TE_j &= E_j, & TH_j &= -H_j. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Легко видеть, что при этих соотношениях уравнения Максвелла (1.2.1) инвариантны относительно P - и T -преобразований. Заметим, что неоднозначность выбора значений η_P и η_T в однородных уравнениях Максвелла связана с их инвариантностью относительно преобразования

$$E \rightarrow H, \quad H \rightarrow -E.$$

1.6. Вариационный принцип. Вторая пара уравнений Максвелла (1.2.1) может быть получена из *вариационного принципа*, если рассматривать электромагнитное поле как некоторую динамическую систему, которой соответствует определенная функция Лагранжа. При этом потенциалы поля $A_\mu(x)$ в различных точках x выступают как обобщенные координаты, а $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ — как обобщенные скорости этой динамической системы.

Такой подход не является специфическим только для электромагнитного поля; он в равной мере пригоден при описании любых волновых полей. Поэтому мы сформулируем здесь вариационный принцип в общем виде для произвольного волнового поля, описываемого некоторой волновой функцией $\psi(x)$.

Компоненты волновой функции, как функции координат и времени, удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям, которые называются *уравнениями поля*. Уравнения поля должны быть инвариантными относительно преобразований Лоренца. Это значит, что, произведя преобразование Лоренца $x \rightarrow x' = ax$ и осуществив одновременно преобразование волновой функции $\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(a)\psi(x)$, мы должны получить для $\psi'(x')$ такие же уравнения, как и для $\psi(x)$.

Уравнениям поля может быть придана очень общая — вариационная или *лагранжева форма*, если принять, что поле как динамическая система должно характеризоваться определенной локальной *функцией Лагранжа* (или, точнее, плотностью функции Лагранжа) L , зависящей от компонент волновой функции поля $\psi_i(x)$ и их производных по координатам и времени $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu}$ (L не может содержать явно координаты и время в силу однородности пространства и времени).

Интеграл от плотности функции Лагранжа по четырехмерному объему Ω называется *действием* (мы обозначаем его через J):

$$J = \int_{\Omega} L(\psi, \psi_{,\mu}) d^4x, \quad (1.6.1)$$

где $\psi_{,\mu} = \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}$. Согласно *принципу наименьшего действия* действие должно быть экстремальным для действительного движения, т. е. для таких ψ , которые удовлетворяют уравнениям поля. Так как эти уравнения должны быть релятивистски инвариантными, то релятивистским инвариантом должна быть и функция L .

Общая вариация действия, связанная с варьированием как волновой функции поля, так и границы области интегрирования, равна

$$\delta J = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} \delta \psi_{,\mu} \right) d^4x + \int_{\Sigma} L \delta x_\mu d\sigma_\mu,$$

где второй интеграл берется по гиперповерхности Σ , ограничивающей Ω , а δx_μ представляют собой вариацию координат границы. Интегрируя по частям второе слагаемое в объемном интеграле, перепишем δJ в виде

$$\delta J = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} \right) \delta \psi d^4x + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} \delta \psi + L \delta x_\mu \right) d\sigma_\mu. \quad (1.6.2)$$

Рассмотрим прежде всего вариацию действия при закрепленных границах, предполагая, что вариация волновых функций на границе равна нулю. При этом второй интеграл обращается в нуль, и мы получим, приравнявая вариацию действия нулю, уравнения Лагранжа для компонент волновой функции поля ψ_i

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial L}{\partial \psi_i} = 0. \quad (1.6.3)$$

Эти уравнения можно рассматривать как уравнение «движения» поля.

Вернемся теперь к электромагнитному полю. Роль ψ_i в этом случае играют компоненты потенциала A_μ и уравнения (1.6.3) приобретают вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)} - \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0. \quad (1.6.4)$$

Так как уравнения электромагнитного поля инвариантны относительно градиентных преобразований, то в плотность функции Лагранжа должны входить не непосредственно потенциалы A_μ , а производные от них по координатам. Из компонент поля можно составить только два независимых инварианта полной группы Лоренца:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= 2(H^2 - E^2), \\ (F_{\mu\nu} F'_{\mu\nu})^2 &= -16(EH)^2, \end{aligned}$$

где $F'_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ ($\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — единичный антисимметричный тензор четвертого ранга). Кроме того, инвариантом является $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$. Поэтому плотность функции Лагранжа может зависеть только от этих инвариантов:

$$L = L \left(E^2 - H^2, (EH)^2, \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \right).$$

Если наложить добавочное условие (1.3.3) и потребовать, чтобы удовлетворялся принцип суперпозиции, т. е. чтобы уравнения поля были линейными, то плотность функции Лагранжа должна быть квадратичной относительно компонент поля. Иными словами, с точностью до численного множителя функция L должна совпадать с $E^2 - H^2$. Мы положим

$$L = \frac{1}{2} (E^2 - H^2) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (1.6.5)$$

что соответствует использованию единиц Хевисайда.

Уравнения поля для этой функции Лагранжа приобретают, согласно (1.6.4), вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)} = 0,$$

а так как

$$\delta L = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \left(\delta \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \delta \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) = F_{\mu\nu} \delta \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},$$

т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)} = F_{\mu\nu},$$

то окончательно, как и утверждалось выше, мы получим вторую пару уравнений Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Волновые уравнения (1.3.2) для потенциала также могут быть получены из вариационного принципа, но при этом плотность функции Лагранжа должна быть взята не в виде (1.6.5), а в виде

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \right)^2$$

или

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (1.6.6)$$

Оба эти выражения отличаются на величину

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(A_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} - A_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right),$$

имеющую вид четырехмерной дивергенции, и поэтому приводят к одинаковым уравнениям поля. Чтобы получить теперь уравнения Максвелла, к волновым уравнениям должно быть присоединено добавочное условие (1.3.3).

1.7. Тензор энергии-импульса поля. При выводе уравнений движения поля (1.6.3) мы считали, что вариации волновых функций поля на границах области Ω равны нулю.

Рассмотрим теперь вариацию действия для действительного движения, предполагая, что область интегрирования Ω вместе с волновым полем подвергнута как одно целое бесконечно малому смещению либо бесконечно малому повороту. При этом, очевидно, действие не изменится, т. е. вариация действия δJ будет равна нулю.

В случае бесконечно малого смещения, т. е. бесконечно малого преобразования координат

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu,$$

где ε_μ — бесконечно малый четырехмерный вектор, волновые функции подвергнутся бесконечно малому преобразованию

$$\psi(x_\mu) \rightarrow \psi'(x_\mu) = \psi(x_\mu - \varepsilon_\mu) = \psi(x_\mu) - \varepsilon_\mu \psi_{,\mu}(x_\mu),$$

откуда

$$\delta\psi \equiv \psi'(x_\mu) - \psi(x_\mu) = -\varepsilon_\mu \psi_{,\mu}(x_\mu).$$

Подставляя это значение вариации волновой функции вместе с $\delta x_\mu = \varepsilon_\mu$ в поверхностный интеграл (1.6.2), получим

$$\delta J = \int_{\Sigma} \varepsilon_\mu T_{\mu\nu} d\sigma_\nu = 0, \quad (1.7.1)$$

где

$$T_{\mu\nu} = L\delta_{\mu\nu} - \psi_{,\mu} \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\nu}} \equiv L\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu}}. \quad (1.7.2)$$

Эти величины представляют собой четырехмерный тензор второго ранга, который называется *тензором энергии-импульса* (более точно — *каноническим* тензором энергии-импульса).

Из (1.7.1) следует

$$\int_{\Sigma} T_{\mu\nu} d\sigma_\nu = 0.$$

Предполагая, что объем Ω ограничен двумя гиперповерхностями, ориентированными ортогонально к оси времени, т. е. $d\sigma_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, $d\sigma_4 = -i d^3x$, где d^3x — элемент трехмерного объема, мы получим законы сохранения

$$\int T_{\mu 4} d^3x = \text{const}, \quad (1.7.3)$$

где интегрирование производится по всему объему поля.

Величины

$$P_{\mu} = -i \int T_{\mu 4} d^3x = - \int \left(\pi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{\mu}} + iL \delta_{\mu 4} \right) d^3x, \quad (1.7.4)$$

где $\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i}$ (точка над буквой означает дифференцирование по времени, образуют, очевидно, четырехмерный вектор. Он называется *4-вектором энергии-импульса* поля. Пространственные компоненты P_{μ} определяют импульс поля \mathbf{P} , а временная компонента — энергию поля H .

Плотность энергии поля равна

$$\omega = -T_{44}.$$

Это выражение может быть получено по аналогии с классической механикой, если воспользоваться известным выражением для энергии системы

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L,$$

где L — функция Лагранжа и $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ — импульс, сопряженный с координатой q_i . В случае волнового поля мы должны заменить q_i на ψ_i и p_i на π_i . В результате мы получим для плотности энергии выражение

$$\omega = \pi_i \dot{\psi}_i - L = -T_{44}.$$

Заметим, что плотность энергии, как правило, не является положительно определенной, и только для некоторых специальных полей выполняется условие $-T_{44} > 0$

Применяя к поверхностному интегралу (1 7 1) теорему Гаусса, получим

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \quad (1.7.5)$$

Таким образом, четырехмерная дивергенция тензора энергии-импульса равна нулю. Используя это соотношение, легко доказать сохранение вектора P_{μ} .

Обратим внимание на то, что если к $T_{\mu\nu}$ прибавить величину вида $\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} \chi_{\mu\nu\lambda}$, где $\chi_{\mu\nu\lambda}$ — любой тензор третьего ранга, антисимметричный относительно индексов ν и λ , то четырехмерная дивергенция тензора

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\partial \chi_{\mu\nu\lambda}}{\partial x_{\lambda}}, \quad (1.7.6)$$

так же как и тензора $T_{\mu\nu}$, будет равна нулю:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0.$$

Поэтому замена тензора $T_{\mu\nu}$ тензором $T_{\mu\nu}$ не приведет к изменению полной энергии и полного импульса поля

Заметим, что тензор $\chi_{\mu\nu\lambda}$ можно подобрать таким образом, чтобы тензор $T_{\mu\nu}$ стал симметричным:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}.$$

В случае электромагнитного поля канонический тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{\mu\nu} = L \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial A_{\lambda}} \frac{\partial L}{\partial x_{\nu}}.$$

Подставляя сюда вместо L выражение (1.6.5) и вычитая несущественное слагаемое $F_{\lambda\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}$, удовлетворяющее условию $\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(F_{\lambda\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} \right) = 0$, найдем симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \quad (1.7.7)$$

или в компонентах:

$$T_{jh} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \delta_{jh} - E_j E_h - H_j H_h,$$

$$T_{4k} = i [\mathbf{E}\mathbf{H}]_k,$$

$$T_{44} = -\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2),$$

где $j, k = 1, 2, 3$. Величины

$$\omega = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad \mathbf{s} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (1.7.8)$$

представляют собой плотности энергии и импульса электромагнитного поля.

Заметим, что если взять плотность функции Лагранжа электромагнитного поля в виде (1.6.6), то для тензора энергии-импульса поля получится выражение

$$T_{\mu\nu} = L \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu}} = \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\sigma} \right)^2. \quad (1.7.9)$$

1.8. Тензор момента количества движения поля. Рассмотрим теперь вариацию действия при бесконечно малом повороте системы отсчета, которому соответствует бесконечно малое преобразование Лоренца $x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu$, $|\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1$. Используя разложение (1.4.9) для матрицы $S(a)$, представим преобразование компонент волновой функции поля $\psi_i(x)$, соответствующее бесконечно малому преобразованию Лоренца, в виде

$$\psi'_j(x_\mu) = \psi_j(x_\mu - \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I_{jk}^{\mu\nu} \psi_k(x_\mu)$$

(мы заменили здесь x'_μ на x_μ и соответственно x_μ на $x_\mu - \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu$; в последнем слагаемом подразумевается суммирование по μ, ν от $\mu, \nu = 1$ до $\mu, \nu = 4$ и по k от $k = 1$ до $k = n$). Производя в первом слагаемом разложение по $\varepsilon_{\mu\nu}$, получим с точностью до $\varepsilon_{\mu\nu}^2$

$$\delta\psi_j \equiv \psi'_j(x) - \psi_j(x) = -\varepsilon_{\mu\nu} x_\nu \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I_{jk}^{\mu\nu} \psi_k(x)$$

или сокращенно

$$\delta\psi \equiv \psi'(x) - \psi(x) = -\varepsilon_{\mu\nu} x_\nu \psi_{,\mu} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \psi. \quad (1.8.1)$$

Подставляя это выражение для вариации волновой функции вместе с выражением $\delta x_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu$ в поверхностный интеграл (1.6.2), получим

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} \delta\psi + L \delta x_\mu \right) d\sigma_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \int_{\Sigma} M_{\mu\nu\rho} d\sigma_\rho = 0,$$

где

$$M_{\mu\nu\rho} = x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho} - \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\rho}} I^{\mu\nu} \psi. \quad (1.8.2)$$

Таким образом,

$$\int_{\Sigma} M_{\mu\nu\rho} d\sigma_\rho = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial M_{\mu\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} = 0.$$

Считая гиперповерхность ортогональной к оси времени, получим законы сохранения

$$\int M_{\mu\nu\lambda} d^3x = \text{const.}$$

Величины

$$M_{\mu\nu} = -i \int M_{\mu\nu\lambda} d^3x = -i \int (x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda}) d^3x - \int \pi_i I_{ik}^{\mu\nu} \psi_k d^3x \quad (1.8.3)$$

образуют, очевидно, тензор второго ранга. Этот тензор называется тензором *момента количества движения поля*. Его можно представить также в виде

$$M_{\mu\nu} = -i \int (x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda}) d^3x, \quad (1.8.4)$$

где $T'_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса в симметричной форме. Нетрудно убедиться, что (1.8.4) следует из (1.8.3), если воспользоваться преобразованием (1.7.6), выбрав $\chi_{\nu\rho\mu}$ в виде

$$\chi_{\nu\rho\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\rho}} I^{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} I^{\rho\nu} - \frac{\partial L}{\partial \psi_{,\nu}} I^{\rho\mu} \right) \psi.$$

Вернемся теперь к электромагнитному полю. Подставив в (1.8.4) выражение (1.7.7) для симметричного тензора энергии-импульса, мы получим

$$M_{\mu\nu} = \int (x_\mu s_\nu - x_\nu s_\mu) d^3x, \quad (1.8.5)$$

где $s_4 = \frac{i}{2} (E^2 + H^2)$, $s = [EH]$. Пространственные компоненты $M_{\mu\nu}$ образуют вектор

$$M = \int [r [EH]] d^3x. \quad (1.8.6)$$

1.9. Разложение потенциалов на плоские волны. Общее решение волнового уравнения (1.3.2) можно представить в виде суперпозиции плоских волн с произвольными амплитудами. Мы запишем его в следующем виде:

$$A_\mu(x) = \sum_{k\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_\mu^\lambda (c_{k\lambda} e^{ikx} + c_{k\lambda}^+ e^{-ikx}). \quad (1.9.1)$$

Здесь V — нормировочный объем, $kx = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$ — скалярное произведение четырехмерного вектора $x(\mathbf{r}, it)$ и четырехмерного волнового вектора $k(\mathbf{k}, i\omega)$, удовлетворяющего условию $k^2 = \mathbf{k}^2 - \omega^2 = 0$, $c_{k\lambda}$ — амплитуды волн и e_μ^λ — единичные векторы поляризации. При данном k возможны четыре линейно независимых решения, различающихся поляризациями. Мы можем выбрать (при данном k) векторы e^λ так, чтобы они совпадали с осями n_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) некоторой системы координат, т. е.

$$e_\alpha^\lambda = \delta_{\lambda\alpha}. \quad (1.9.2)$$

Если направить n_3 по \mathbf{k} , а n_1 и n_2 — перпендикулярно к \mathbf{k} и друг к другу, то $\lambda = 1, 2$ будут соответствовать поперечным, а $\lambda = 3$ — продольной поляризациям; $\lambda = 4$ соответствует так называемой

скалярной поляризации. При этом

$$e^\lambda k = \begin{cases} 0, & \lambda = 1, 2, \\ \omega, & \lambda = 3, \\ i\omega, & \lambda = 4, \end{cases} \quad (1.9.3)$$

$$e^\lambda e^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (1.9.4)$$

$$\sum_\lambda e_\mu^\lambda e_\nu^\lambda = \delta_{\mu\nu}.$$

Из соотношения $k^2 = \mathbf{k}^2 - \omega^2 = 0$ следует, что частота ω может иметь оба знака. Это обстоятельство учитывается наличием в (1.9.1) двух типов слагаемых, содержащих соответственно e^{ikh} и e^{-ikh} , в каждом из которых следует считать $\omega = |\mathbf{k}|$.

Заметим, что знак частоты релятивистски инвариантен, в чем можно легко убедиться непосредственно из преобразований Лоренца. Поэтому инвариантным является разделение $A_\mu(x)$ на члены с положительными и отрицательными частотами.

Так как пространственные компоненты потенциала $A_j(x)$ ($j = 1, 2, 3$) вещественны, а временная компонента $A_4(x) = i\phi(x)$ является чисто мнимой, то амплитуды $c_{k\lambda}$ при волнах с положительными и отрицательными частотами должны удовлетворять соотношениям

$$c_{kj}^+ = c_{kj}^*, \quad c_{k4}^+ = -c_{k4}^*,$$

где c^* означает величину, комплексно-сопряженную по отношению к c .

Потенциалы $A_\mu(x)$ должны, как мы видели выше, удовлетворять, кроме уравнения (1.3.2), еще дополнительному условию (1.3.3). Подставляя в (1.3.3) разложение (1.9.1), получим, используя (1.9.3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} &= i \sum_{k\lambda} \frac{k_\mu e_\mu^\lambda}{\sqrt{2V\omega}} (c_{k\lambda} e^{ikh} - c_{k\lambda}^+ e^{-ikh}) = \\ &= i \sum_k \sqrt{\frac{\omega}{2V}} [(c_{k3} + ic_{k4}) e^{ikh} - (c_{k3}^+ + ic_{k4}^+) e^{-ikh}] = 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$c_{k3} + ic_{k4} = 0, \quad c_{k3}^+ + ic_{k4}^+ = 0. \quad (1.9.5)$$

Пользуясь разложением потенциалов на плоские волны (1.9.1), можно представить тензор поля в виде

$$F_{\mu\nu} = i \sum_{k\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} (e_\nu^\lambda k_\mu - e_\mu^\lambda k_\nu) (c_{k\lambda} e^{ikh} - c_{k\lambda}^+ e^{-ikh}), \quad (1.9.6)$$

откуда

$$\begin{aligned} E &= i \sum_{k; \lambda=1, 2} \sqrt{\frac{\omega}{2V}} e^\lambda (c_{k\lambda} e^{ikh} - c_{k\lambda}^+ e^{-ikh}), \\ H &= i \sum_{k; \lambda=1, 2} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} [\mathbf{k} e^\lambda] (c_{k\lambda} e^{ikh} - c_{k\lambda}^+ e^{-ikh}). \end{aligned} \quad (1.9.7)$$

Подставляя (1.9.6) в (1.7.7), найдем симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля, выраженный через амплитуды плоских волн:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \sum_{kk', \lambda=1, 2} \frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}} \left(\frac{1}{2} k_\sigma k'_\sigma \delta_{\mu\nu} - k'_\mu k_\nu \right) \times \\ &\quad \times (c_{k\lambda} e^{ikh} - c_{k\lambda}^+ e^{-ikh}) (c_{k'\lambda} e^{ik'x} - c_{k'\lambda}^+ e^{-ik'x}). \end{aligned}$$

Используя (1.7.4), найдем энергию H и импульс поля \mathbf{P} , выраженные через амплитуды $c_{k\lambda}$ и $c_{k\lambda}^\dagger$:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k, \lambda=1, 2} \frac{1}{2} \omega (c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger + c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}), \\ \mathbf{P} &= \sum_{k, \lambda=1, 2} \frac{1}{2} \mathbf{k} (c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger + c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}) \end{aligned} \quad (1.9.8)$$

(здесь оба слагаемых в скобках одинаковы, но мы их сохраняем порознь, так как симметричная форма записи H и \mathbf{P} через $c_{k\lambda}$ и $c_{k\lambda}^\dagger$ понадобится нам в дальнейшем при квантовании электромагнитного поля).

Формулы (1.9.7) и (1.9.8) показывают, что электрическое и магнитное поля, а также энергия и импульс поля не зависят от продольных и скалярных волн. Это связано с наличием условий (1.9.5). Если бы мы не пользовались ими, то получили бы для H и \mathbf{P} те же выражения (1.9.8), но λ принимала бы значения 1, 2, 3, 4. Члены, соответствующие поляризациям $\lambda = 3, 4$, сокращаются благодаря условиям (1.9.5).

§ 2. Волновая функция фотона

2.1. Уравнения Максвелла в пространстве волновых векторов. Перейдем к исследованию квантовых свойств электромагнитного поля. Как уже указывалось в 1.1, мы хотим интерпретировать векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} как величины, описывающие состояние фотона в квантовомеханическом смысле этого слова. Для того чтобы дать такую «корпускулярную» интерпретацию системе уравнений (1.2.1), сравним ее с уравнением Шредингера в обычной квантовой механике. Это удобно сделать, подвергнув предварительно уравнения (1.2.1) преобразованию Фурье относительно пространственных координат \mathbf{r} , т. е. совершить переход к пространству волновых векторов. Представив \mathbf{E} и \mathbf{H} в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int \mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k, \\ \mathbf{H} &= \int \mathbf{H}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k, \end{aligned}$$

легко убедиться, что компоненты Фурье \mathbf{E}_k и \mathbf{H}_k в силу (1.2.1) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_k &= -i [\mathbf{k} \mathbf{E}_k], & \mathbf{k} \mathbf{H}_k &= 0, \\ \dot{\mathbf{E}}_k &= i [\mathbf{k} \mathbf{H}_k], & \mathbf{k} \mathbf{E}_k &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

(для краткости мы опускаем здесь и в дальнейшем аргумент t в функциях $\mathbf{E}_k = \mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$ и $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}(\mathbf{k}, t)$). К этой системе нужно добавить еще условие вещественности полей

$$\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{E}_k^*, \quad \mathbf{H}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{H}_k^* \quad (2.1.2)$$

Вместо двух векторов \mathbf{E}_k и \mathbf{H}_k можно пользоваться векторами \mathbf{E}_k и $\dot{\mathbf{E}}_k$, исключив \mathbf{H}_k при помощи (2.1.1):

$$\mathbf{H}_k = \frac{i}{k^2} [\mathbf{k} \dot{\mathbf{E}}_k].$$

Удобно избавиться от необходимости учитывать требование вещественности. Для этого сделаем подстановку, автоматически обеспечивающую

выполнение соотношений (2.1.2),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k &= N(k) (\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k^*), \\ \dot{\mathbf{E}}_k &= -ikN(k) (\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_k^*), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

где $N(k)$ — некоторый нормирующий множитель, который, как мы увидим ниже, удобно выбрать равным

$$N(k) = \sqrt{\frac{k}{2(2\pi)^3}}. \quad (2.1.4)$$

(Здесь и ниже для краткости принято обозначение $k = |\mathbf{k}|$.) Подстановка (2.1.3) означает, что вместо двух функций \mathbf{E}_k и $\dot{\mathbf{E}}_k$, определенных фактически в силу (2.1.2) в полупространстве, вводится одна функция \mathbf{f}_k , определенная уже независимо во всем \mathbf{k} -пространстве.

Если использовать (2.1.3), то разложение Фурье примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathcal{E} + \mathcal{E}^*, \quad \mathbf{H} = \mathcal{H} + \mathcal{H}^*, \\ \mathcal{E} &= \int N(k) \mathbf{f}_k e^{ikr} d^3k, \\ \mathcal{H} &= \int N(k) \left[\frac{k}{k} \mathbf{f}_k \right] e^{ikr} d^3k. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Нетрудно получить уравнение, которому удовлетворяет \mathbf{f}_k . Исключая \mathbf{H}_k из (2.1.1), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) \mathbf{E}_k = 0,$$

что можно переписать в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ik \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - ik \right) \mathbf{E}_k = 0.$$

Это уравнение второго порядка можно преобразовать в уравнение первого порядка относительно \mathbf{f}_k . Действительно, воспользовавшись вытекающим из (2.1.3) соотношением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - ik \right) \mathbf{E}_k = -2iN(k) k \mathbf{f}_k,$$

получим

$$i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial t} = k \mathbf{f}_k. \quad (2.1.6)$$

Кроме того, из (2.1.3) и (2.1.1) следует, что

$$\mathbf{k} \mathbf{f}_k = 0. \quad (2.1.7)$$

Уравнения (2.1.6) и (2.1.7) можно объединить в одно уравнение. Умножив (2.1.7) на \mathbf{k}/k и сложив с (2.1.6), получим

$$i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial t} = \mathbf{w} \mathbf{f}_k, \quad (2.1.8)$$

где

$$(\mathbf{w} \mathbf{f}_k)_\alpha = \omega_{\alpha\beta} f_{k\beta}, \quad \omega_{\alpha\beta} = k \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Из (2.1.8) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{k} \mathbf{f}_k) = 0.$$

Поэтому условие (2.1.7) будет иметь место всегда, если оно выполнено в начальный момент времени.

Уравнение (2.1.8) с начальным условием (2.1.7) эквивалентно системе уравнений Максвелла.

Уравнение (2.1.8) имеет форму уравнения Шредингера (при $\hbar = 1$), в котором \mathbf{w} является оператором Гамильтона. Собственные значения этого оператора есть k .

2.2. Волновая функция фотона в импульсном пространстве. Покажем теперь, что f_k можно интерпретировать (при надлежащей нормировке) как волновую функцию фотона в импульсном пространстве, а \mathbf{w} — как оператор энергии фотона (здесь и в дальнейшем предполагается, что квантовая постоянная $\hbar = 1$). Убедимся с этой целью, что энергия

$$H = \frac{1}{2} \int (E^2 + H^2) d^3x$$

и импульс электромагнитного поля

$$\mathbf{P} = \int [E\mathbf{H}] d^3x$$

(мы пользуемся для полей единицами Хевисайда) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} H &= \int k (f_k^* f_k) d^3k, \\ \mathbf{P} &= \int \mathbf{k} (f_k^* f_k) d^3k. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Действительно, используя разложение Фурье, имеем

$$H = \frac{1}{2} \int (E_k E_{k'} + H_k H_{k'}) e^{i(k+k') \cdot r} d^3k d^3k' d^3x.$$

Выполняя интегрирование по r с помощью соотношения

$$\int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3x = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}),$$

где $\delta(\mathbf{k})$ — трехмерная δ -функция, и учитывая (2.1.1), найдем

$$H = 4\pi^3 \int \left(E_k E_{-k} + \frac{1}{k^2} \dot{E}_k \dot{E}_{-k} \right) d^3k.$$

Наконец, выражая E_k и \dot{E}_k через f_k согласно (2.1.3), получим

$$H = 16\pi^3 \int N^2(k) (f_k^* f_k) d^3k = \int k (f_k^* f_k) d^3k.$$

Это выражение можно, очевидно, представить также в виде

$$H = \int f_k^* \mathbf{w} f_k d^3k. \quad (2.2.2)$$

Поступая аналогичным образом с импульсом \mathbf{P} , получим

$$\mathbf{P} = (2\pi)^3 \int [E_k H_{-k}] d^3k = -i (2\pi)^3 \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} E_k \dot{E}_{-k} d^3k,$$

откуда после подстановки (2.1.3)

$$\mathbf{P} = (2\pi)^3 \int N^2(k) \frac{\mathbf{k}}{k} (f_k^* f_k - f_{-k}^* f_{-k} + f_{-k}^* f_k^* - f_k f_{-k}) d^3k.$$

Произведя замену $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, легко убедиться, что интегралы от первых двух слагаемых совпадают, а от последних двух — обращаются в нуль. В результате мы получим вторую формулу (2.2.1). Это выражение можно

также представить в виде

$$P = \int f_{k_j}^* \mathbf{k} f_{k_j} d^3k, \quad (2.2.3)$$

где индекс $j = 1, 2, 3$ служит для обозначения составляющих вектора \mathbf{f}_k (по j подразумевается суммирование).

Рассмотрим монохроматическое решение уравнения (2.1.6)

$$f_k = f_0(\mathbf{k}) e^{-i\omega t},$$

где $\omega = k$ и функция $f_0(\mathbf{k})$ отлична от нуля только при $k = \omega$. Энергия поля приобретает в этом случае вид

$$H = \omega \int f_k^* f_k d^3k.$$

Предположим теперь, что поле содержит только один фотон с частотой ω . Тогда энергия поля будет равна, очевидно, ω ,

$$H = \omega,$$

и функция f_k должна удовлетворять условию

$$\int f_k^* f_k d^3k = 1. \quad (2.2.4)$$

Это условие можно рассматривать как условие нормировки волновой функции фотона f_k в пространстве импульсов \mathbf{k} , а величину $|f_k|^2$ интерпретировать как плотность вероятности того, что фотон имеет импульс \mathbf{k} . При этом выражения (2.2.2) и (2.2.3) для энергии и импульса поля приобретают смысл обычных квантовомеханических выражений для средних значений энергии и импульса фотона.

Практически удобнее иметь дело не с непрерывным, а с дискретным спектром. Для этой цели следует ввести нормировочный объем V и считать, что внутри него сосредоточено все поле. На границе области V можно задать определенные граничные условия, которые отберут из совокупности решений уравнений Максвелла дискретный спектр решений, удовлетворяющих этим граничным условиям. Проще всего выбрать объем в виде куба с ребром a и считать, что граничные условия сводятся к условиям тройной периодичности полей \mathbf{E} и \mathbf{H} с периодом a по каждой из декартовых осей. При выполнении этих условий отбираются только те поля, для которых составляющие волнового вектора \mathbf{k} удовлетворяют соотношениям

$$k_i = \frac{2\pi}{a} n_i,$$

где n_i — целые числа. Таким образом, \mathbf{k} -пространство разбивается на ячейки объема

$$\Delta = \frac{(2\pi)^3}{V},$$

причем каждой ячейке соответствует одно допустимое значение \mathbf{k} . Поэтому число значений \mathbf{k} в некотором интервале d^3k равно

$$dn = \frac{d^3k}{\Delta} = \frac{V d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (2.2.5)$$

Интегрирование по \mathbf{k} -пространству заменяется при этом суммированием по ячейкам

$$\int F(\mathbf{k}) d^3k = \Delta \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}).$$

В частности, разложение (2.1.5) принимает вид

$$\mathcal{E} = \Delta \sum_k N(k) f_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.2.6)$$

т. е. коэффициентами разложения \mathcal{E} в ряд Фурье являются величины $f_k N(k) \Delta$.

Условие нормировки (2.2.4) запишется теперь следующим образом:

$$\Delta \sum_k f_k^* f_k = 1.$$

Если объем V выбрать достаточно большим, то соотношение (2.2.5) не будет зависеть ни от формы объема V , ни от характера граничных условий. Иначе говоря, это соотношение является универсальным асимптотическим соотношением, справедливым при $ka \gg 1$, где a — величина, характеризующая линейные размеры области.

В дальнейшем мы сможем убедиться, что при решении любой физической задачи величины Δ (или V) входят лишь в промежуточные выкладки и исчезают из окончательного результата.

Переход от интеграла к ряду Фурье можно осуществить и частично, только по одной из координат. Представим себе, например, что граничные условия таковы, что \mathbf{k} -пространство разбивается на сферические слои толщины δ . Тогда, выбрав сферические координаты, мы получим

$$\int F(\mathbf{k}) d^3k = \int F(\mathbf{k}) k^2 dk d\omega = \delta \sum_k k^2 \int F(\mathbf{k}) d\omega.$$

Разложение (2.1.5) принимает в этом случае вид

$$\mathcal{E} = \delta \sum_k k^2 N(k) \int f_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\omega, \quad (2.2.7)$$

а условие нормировки

$$\delta \sum_k k^2 \int (f_k^* f_k) d\omega = 1.$$

Разделение \mathbf{k} -пространства на сферические слои можно реализовать, выбрав область V в виде сферы большого радиуса R и считая, что поле обращается в нуль на поверхности сферы. В этом случае $\delta = \pi/R$, и число различных возможных значений \mathbf{k} в интервале $d\mathbf{k}$ равно

$$dn = \frac{R dk}{\pi}. \quad (2.2.8)$$

2.3. Плоские волны. Рассмотрим состояние фотона с определенным импульсом \mathbf{p} . Считая \mathbf{k} -пространство дискретным, можно записать волновую функцию такого фотона в виде

$$\hat{f}_{\mathbf{p}, e}(\mathbf{k}, t) = i \frac{e}{\sqrt{\Delta}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} e^{-i\omega t}, \quad (2.3.1)$$

где $\omega = |\mathbf{p}|$, \mathbf{e} — вектор поляризации фотона, по модулю равный единице и перпендикулярный \mathbf{p} ,

$$|\mathbf{e}| = 1, \quad \mathbf{e}\mathbf{p} = 0$$

и

$$\delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} = \begin{cases} 1, & \mathbf{k} = \mathbf{p}, \\ 0, & \mathbf{k} \neq \mathbf{p} \end{cases}$$

(фазовый множитель i введен для удобства).

При заданном \mathbf{p} возможны два линейно независимых вектора поляризации \mathbf{e} . Иными словами, состояния с определенным импульсом двукратно вырождены. Мы будем обозначать линейно независимые векторы поляризации через $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ и считать их взаимно ортогональными:

$$\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)} = 1.$$

Направив ось 3 вдоль импульса фотона \mathbf{p} , можно выбрать в качестве $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ единичные векторы вдоль осей 1, 2:

$$\begin{aligned} e_1^{(1)} &= 1, & e_2^{(1)} &= e_3^{(1)} = 0, \\ e_2^{(2)} &= 1, & e_1^{(2)} &= e_3^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Если вектор поляризации \mathbf{e} совпадает с одним из этих векторов, то говорят о *линейной поляризации фотона* по оси 1 или 2.

В качестве линейно независимых векторов поляризации можно выбрать также векторы

$$\begin{aligned} e_1^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & e_2^{(1)} &= \frac{i}{\sqrt{2}}, & e_3^{(1)} &= 0, \\ e_1^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & e_2^{(2)} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}, & e_3^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

которые, так же как и векторы (2.3.2), являются единичными и взаимно ортогональными. Если \mathbf{e} совпадает с одним из этих векторов, то говорят о *круговой поляризации фотона*.

Величины \mathbf{p} и $\mathbf{e}^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2$) образуют полный набор квантовых чисел фотона (при этом энергия фотона равна $\omega = p$), а система функций $f_{p\mu}(\mathbf{k}, t) \equiv f_{p, \mathbf{e}^{(\mu)}}(\mathbf{k}, t)$ является полной ортонормированной системой, по которой может быть разложена произвольная волновая функция фотона $f_{\mathbf{k}}$.

Используя формулу (2.3.1) для $f_{p\mu}(\mathbf{k}, t)$, можно, согласно (2.1.4) и (2.2.6), найти электрическое и магнитное поля, соответствующие состоянию фотона с определенным импульсом \mathbf{p} и поляризацией μ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p\mu} &= i \sqrt{\frac{\omega}{2V}} e^{(\mu)} e^{i(p\mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathcal{H}_{p\mu} &= i \sqrt{\frac{\omega}{2V}} \left[\frac{\mathbf{p}}{p} e^{(\mu)} \right] e^{i(p\mathbf{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Полезно найти также выражения для потенциалов, отвечающих состоянию фотона с определенным импульсом и поляризацией. Используя формулы (1.2.2), выражающие поля через потенциалы, и записав последние аналогично (2.1.5) в виде

$$A = \mathcal{A} + \mathcal{A}^*, \quad \varphi = \Phi + \Phi^*,$$

получим, исходя из (2.3.4),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{p\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} (e^{(\mu)} + Cn) e^{i(p\mathbf{r} - \omega t)}, \\ \Phi_{p\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} C e^{i(p\mathbf{r} - \omega t)}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

где $\omega = p$, $n = \frac{\mathbf{p}}{p}$ и C — произвольная постоянная, наличие которой выражает свойство калибровочной инвариантности электромагнитного поля.

2.4. Поляризационная матрица плотности фотона. При данном импульсе состояние фотона характеризуется единичным вектором поляризации \mathbf{e} .

Разложив e по двум произвольным ортогональным ортам $e^{(1)}$, $e^{(2)}$,

$$e = a_1 e^{(1)} + a_2 e^{(2)},$$

можно сказать, что состояние поляризации определяется парой комплексных чисел a_1 и a_2 . Величины $|a_1|^2$ и $|a_2|^2$ представляют собой вероятности определенной линейной поляризации фотона, определяемой ортами $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$. Так как a_1 и a_2 связаны условием нормировки

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1,$$

и, кроме того, общий фазовый множитель e произволен, то вектор поляризации можно представить в следующем виде:

$$e = e^{(1)} \cos \alpha + e^{(2)} \sin \alpha e^{i\beta}, \quad (2.4.1)$$

где α и β — два вещественных параметра.

Если $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ определены согласно (2.3.2), то $\beta = 0$ означает линейную поляризацию под углом α к оси x_1 . Значения $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ означают круговые поляризации, произвольные же α и β соответствуют эллиптической поляризации.

Мы рассматривали до сих пор состояния фотона, описываемые волновой функцией. Возможны, однако, ситуации, когда фотону нельзя приписать определенной волновой функции. Если, например, фотон был рассеян электроном, то существует лишь волновая функция системы фотон — электрон, разложение которой по волновым функциям свободного фотона содержит волновые функции электрона.

Рассмотрим теперь тот случай, когда импульс фотона определен, но поляризационное состояние не может быть определенным образом фиксировано, так как коэффициенты a_1 , a_2 или величины α , β в (2.4.1) зависят от параметров, характеризующих другую систему. Такое состояние фотона называется *состоянием частичной поляризации* *). Оно может быть описано при помощи *матрицы плотности* **) ρ , элементы которой определяются формулой

$$\rho_{\mu\nu} = \overline{a_\mu a_\nu^*}, \quad (2.4.2)$$

где черта означает усреднение по соответствующим параметрам, характеризующим другую систему.

Из определения (2.4.2) следует, что ρ — эрмитовская матрица

$$\rho_{\mu\nu} = \rho_{\nu\mu}^*,$$

а из условия нормировки для a_μ следует, что

$$\text{Sp } \rho = \rho_{11} + \rho_{22} = 1.$$

Таким образом, матрица плотности зависит от трех вещественных параметров. Ее можно записать в следующем виде:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\rho = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{j=1}^3 \xi_j \tau_j \right), \quad (2.4.3)$$

*) Ср. описание частично поляризованного света в классической электродинамике.

**) См., например, [1].

где

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эти четыре матрицы образуют полную систему линейно независимых двумерных матриц (матрицы τ_j совпадают с матрицами Паули σ_j , ср. 7.1).

Величины ξ_j можно выразить через ρ :

$$\xi_j = \text{Sp}(\rho\tau_j). \quad (2.4.4)$$

Эти величины, называемые *параметрами Стокса*, могут быть непосредственно определены экспериментально. Так, параметр ξ_3 определяется вероятностью поляризации по оси x_1 :

$$\rho_{11} = \frac{1}{2} (1 + \xi_3).$$

Для определения ξ_1 необходимо найти вероятность поляризации по оси, составляющей с осью x_1 угол $\pi/4$. Действительно, переход к такой оси соответствует преобразованию ортов

$$e^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{(1)'} + e^{(2)'}), \quad e^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{(1)'} - e^{(2)'}).$$

Представив e в виде

$$e = a_1' e^{(1)'} + a_2' e^{(2)'}$$

и вводя матрицу плотности ρ' согласно (2.4.2)

$$\rho'_{\mu\nu} = \overline{a_\mu' a_\nu'^*},$$

найдем вероятность линейной поляризации, соответствующей $e^{(1)'}$,

$$\rho'_{11} = \frac{1}{2} (\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{12} + \rho_{21}) = \frac{1}{2} (1 + \xi_1).$$

Наконец, для нахождения ξ_2 необходимо рассмотреть круговую поляризацию, орты которой $e^{(1)''}$ и $e^{(2)''}$ связаны с $e^{(1)'}$ и $e^{(2)'}$ соотношениями

$$e^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{(1)''} + e^{(2)''}), \quad e^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{(1)''} - e^{(2)''}).$$

Вероятность поляризации, соответствующей орту $e^{(1)''}$, выражается аналогично предыдущему следующим образом:

$$\rho''_{11} = \frac{1}{2} (\rho_{11} + \rho_{22} + i(\rho_{12} - \rho_{21})) = \frac{1}{2} (1 + \xi_2).$$

Мы видим, что определение поляризации пучка фотонов требует измерения двух линейных (под углом $\pi/4$ одна к другой) и одной круговой поляризации.

Так как вероятности должны быть положительны и меньше единицы, то из выражений для ρ_{11} , ρ'_{11} и ρ''_{11} следует $|\xi_j| \leq 1$.

Из (2.4.2) и (2.4.3) следует

$$\det \rho = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) = |a_1|^2 |a_2|^2 - \overline{(a_1 a_2^*)} (a_2 a_1^*) \geq 0,$$

поэтому

$$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq 1.$$

Рассмотрим для иллюстрации некоторые предельные случаи. Если $\xi_j = 0$, то $\rho = 1/2$. При этом вероятность любой поляризации равна $1/2$. Такое состояние называется полностью *неполяризованным*.

При $\xi^2 = 1$ мы можем записать ξ_j в виде

$$\xi_3 = \cos 2\alpha, \quad \xi_1 = \sin 2\alpha \cos \beta, \quad \xi_2 = \sin 2\alpha \sin \beta.$$

При этих значениях параметров ξ_j матрица ρ совпадает с матрицей, построенной на основе выражения (2.4.1). Поэтому она описывает состояние полной поляризации.

Матрицу плотности при частичной поляризации можно рассматривать как линейную комбинацию двух матриц плотности, соответствующих полностью неполяризованному и полностью поляризованному состояниям. Действительно, пусть

$$\xi_j = \mathcal{F} \eta_j,$$

где

$$\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1.$$

Тогда выражение (2.4.3) можно записать в виде

$$\rho = \frac{1}{2} (1 - \mathcal{F}) + \frac{1}{2} \mathcal{F} (1 + \tau \eta).$$

Коэффициент \mathcal{F} называется *степенью поляризации фотона*.

2.5. Невозможность введения волновой функции фотона в координатном представлении. Совершив обратное преобразование Фурье над функцией f_k :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int f_k e^{ikr} d^3k = f(\mathbf{r}, t),$$

можно, казалось бы, определить волновую функцию фотона в координатном представлении $f(\mathbf{r}, t)$. Благодаря условию нормировки (2.2 4) для f_k функция $f(\mathbf{r}, t)$ также будет нормирована обычным образом:

$$\int |f(\mathbf{r}, t)|^2 d^3x = 1.$$

Однако величина $|f(\mathbf{r}, t)|^2$ не будет иметь смысла плотности вероятности нахождения фотона в данной точке пространства. Действительно, наличие фотона может быть установлено только по его взаимодействию с зарядами. Это взаимодействие определяется значениями векторов электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в данной точке, но последние не определяются значением волновой функции $f(\mathbf{r}, t)$ в этой же точке, а определяются значениями ее во всем пространстве.

В самом деле, компоненты Фурье векторов поля, выраженные через f_k , содержат, согласно (2.1.3), множитель \sqrt{k} . Формально это можно записать в виде

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{-\Delta} f(\mathbf{r}, t),$$

где Δ — оператор Лапласа. Но $\sqrt{-\Delta}$ представляет собой интегральный оператор, и поэтому соотношение между $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ и $f(\mathbf{r}, t)$ является не локальным, а интегральным. Иными словами, $f(\mathbf{r}, t)$ не определяется значением поля $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ в той же точке, а зависит от распределения поля в некоторой области, размеры которой порядка длины волны. Это значит, что локализация фотона в меньшей области невозможна и, следовательно, понятие плотности вероятности нахождения фотона в определенной точке пространства не имеет смысла [2].

Заметим также, что плотность вероятности должна вести себя при преобразованиях Лоренца как временная составляющая четырехмерного вектора, дивергенция которого равна нулю. Между тем из векторов электромагнитного поля нельзя составить билинейной комбинации, образующей

четырёхмерный вектор, дивергенция которого равнялась бы нулю. (Величины плотности энергии $\omega = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$ и плотности импульса поля $\mathbf{s} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$, удовлетворяющие уравнению непрерывности, не образуют четырёхмерного вектора)

§ 3. Момент количества движения фотона

3.1. Оператор момента. Состояния фотона можно классифицировать не только по импульсу, но и по моменту количества движения. Этому соответствует разложение электромагнитного поля не по плоским, а по сферическим волнам.

Чтобы определить момент количества движения фотона, можно воспользоваться общим выражением (1.8.6) для момента количества движения электромагнитного поля

$$\mathbf{M} = \int [\mathbf{r} [\mathbf{E}\mathbf{H}]] d^3x$$

и подставить вместо \mathbf{E} и \mathbf{H} поля, соответствующие одному фотону. Если перейти в этом выражении от интегрирования по \mathbf{r} к интегрированию по волновому вектору \mathbf{k} и выразить \mathbf{E} и \mathbf{H} через волновую функцию фотона \mathbf{f}_k , то мы придем, очевидно, к соотношению вида

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{f}_k^* \mathbf{J} \mathbf{f}_k d^3k, \quad (3.1.1)$$

где \mathbf{J} — некоторый оператор, действующий на \mathbf{f}_k , который, учитывая смысл \mathbf{f}_k , как волновой функции фотона в пространстве импульсов, следует интерпретировать как оператор момента количества движения фотона (в пространстве \mathbf{k}).

Найдем вид оператора \mathbf{J} . Подставляя в (3.1.1) разложения Фурье для полей и замечая, что

$$\int \mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3x = -i(2\pi)^3 \nabla_{\mathbf{q}} \delta(\mathbf{q}),$$

представим \mathbf{M} в виде

$$\mathbf{M} = i(2\pi)^3 \int [\nabla_{\mathbf{k}'} [E_k H_{k'}]] \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') d^3k d^3k'.$$

Исключив далее H_k и учитывая, что $\mathbf{k}E_k = 0$, получим

$$\mathbf{M} = (2\pi)^3 \int \left\{ [\mathbf{k} \nabla_k \left(\frac{1}{k^2} E_k \dot{E}_{-k} \right)] + \frac{1}{k^2} [E_k \dot{E}_{-k}] \right\} d^3k,$$

где штрих над E_k означает, что эта функция не подвергается дифференцированию по \mathbf{k} . Выразив, наконец, E_k и \dot{E}_{-k} через \mathbf{f}_k согласно (2.2.3), придем окончательно к следующему выражению для момента количества движения фотона:

$$\mathbf{M} = \int \left\{ -i [\mathbf{k} \nabla_k (\mathbf{f}_k^* \mathbf{f}_k)] - i [\mathbf{f}_k^* \mathbf{f}_k] \right\} d^3k$$

или в компонентах

$$M_\alpha = \int f_{k\beta}^* \left\{ -i [\mathbf{k} \nabla_k]_\alpha f_{k\beta} - i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f_{k\gamma} \right\} d^3k,$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Мы видим, таким образом, что момент количества движения фотона в состоянии, описываемом волновой функцией \mathbf{f}_k , определяется квантово-

механической формулой для среднего значения (3.1.1) оператора

$$\mathbf{J} = -i [\mathbf{k}\nabla_{\mathbf{k}}] + \mathbf{s}, \quad (3.1.2)$$

где

$$(\mathbf{s}_\alpha f_{\mathbf{k}})_\beta = -i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f_{\mathbf{k}\gamma}. \quad (3.1.3)$$

Поэтому этот оператор мы должны интерпретировать как оператор момента количества движения фотона в импульсном пространстве

Формулу для момента фотона можно получить иначе, если вспомнить, что оператор момента с точностью до множителя i совпадает с инфинитезимальным оператором вращения волновых функций. В случае фотона эти функции имеют смысл только в импульсном пространстве; поэтому мы должны выяснить, как преобразуются волновые функции фотона $f_{\mathbf{k}} \equiv \equiv \mathbf{f}(\mathbf{k})$ при бесконечно малом вращении пространства \mathbf{k} . Так как $f_{\mathbf{k}}$ представляет собой вектор, то при бесконечно малом вращении \mathbf{k} -пространства на угол $\delta\theta$ волновые функции $\mathbf{f}(\mathbf{k})$ преобразуются согласно закону

$$\mathbf{f}(\mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{f}'(\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}) = \mathbf{f}(\mathbf{k}) + [\delta\theta \mathbf{f}(\mathbf{k})], \quad (3.1.4)$$

где $\delta\mathbf{k}$ — изменение \mathbf{k} при вращении $\delta\theta$,

$$\delta\mathbf{k} = [\delta\theta \mathbf{k}].$$

Из (3.1.4) следует, что изменение волновой функции в точке \mathbf{k} равно

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{f}(\mathbf{k}) &= \mathbf{f}'(\mathbf{k}) - \mathbf{f}(\mathbf{k}) = \mathbf{f}(\mathbf{k} - \delta\mathbf{k}) + [\delta\theta, \mathbf{f}(\mathbf{k})] - \mathbf{f}(\mathbf{k}) = \\ &= -(\delta\mathbf{k}\nabla_{\mathbf{k}})\mathbf{f}(\mathbf{k}) + [\delta\theta, \mathbf{f}(\mathbf{k})]. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значение $\delta\mathbf{k}$ и вспоминая определение (3.1.3) оператора \mathbf{s} , перепишем $\delta \mathbf{f}(\mathbf{k})$ в виде

$$\delta \mathbf{f}(\mathbf{k}) = -i \delta\theta (-i [\mathbf{k}\nabla_{\mathbf{k}}] + \mathbf{s}) \mathbf{f}(\mathbf{k}).$$

Входящее сюда выражение в простых скобках (отличающееся множителем $-i$ от оператора бесконечно малого поворота) и представляет собой оператор момента количества движения фотона.

Обратим внимание на то, что для сферически симметричной функции $f(\mathbf{k}) = \mathbf{k}F(k)$ ее изменение $\delta f = 0$.

3.2. Спиновые волновые функции фотона. Формула (3.1.2) показывает, что оператор момента количества движения фотона состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое совпадает с обычным квантовомеханическим оператором орбитального момента количества движения в импульсном представлении

$$\mathbf{L} = -i [\mathbf{k}\nabla_{\mathbf{k}}].$$

Второе слагаемое \mathbf{s} можно назвать оператором спинового момента. Однако разделение момента фотона на орбитальную и спиновую части имеет ограниченный физический смысл. Во-первых, к фотону неприменимо обычное определение спина как момента покоящейся частицы, ибо масса покоя фотона равна нулю. Во-вторых, состояния с определенными значениями орбитального и спинового моментов, как мы увидим ниже, не удовлетворяют в общем случае условию поперечности. Поэтому физический смысл имеют только определенные суперпозиции таких состояний. Тем не менее с формальной стороны представление момента в виде суммы двух слагаемых весьма полезно. Оно позволяет построить волновые функции состояний фотона с определенным значением момента из более простых собственных функций орбитального момента и спина.

Векторный индекс α волновой функции фотона $f_\alpha(\mathbf{k})$ можно рассматривать как независимую переменную, принимающую три значения, $\alpha = 1, 2, 3$. Соответственно этому мы введем обозначение

$$f_\alpha(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k}, \alpha).$$

Функция $f(\mathbf{k}, \alpha)$ представляет собой скаляр в обобщенном пространстве импульсов и спина, объединяющем переменные k_1, k_2, k_3, α . Различные проекции вектора $f_{\mathbf{k}}$ теперь являются значениями скаляра $f(\mathbf{k}, \alpha)$ в различных точках спинового подпространства. Оператор \mathbf{L} действует только на переменные \mathbf{k} , а оператор \mathbf{s} , согласно его определению (3.1.3), — только на переменную α . Поэтому операторы \mathbf{L} и \mathbf{s} коммутируют.

Рассмотрим прежде всего оператор \mathbf{L} . Проекции его удовлетворяют, как известно, перестановочным соотношениям

$$\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_2\mathbf{L}_1 = i\mathbf{L}_3,$$

$$\mathbf{L}_2\mathbf{L}_3 - \mathbf{L}_3\mathbf{L}_2 = i\mathbf{L}_1,$$

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_1\mathbf{L}_3 = i\mathbf{L}_2,$$

или сокращенно

$$[\mathbf{L}, \mathbf{L}] = i\mathbf{L}.$$

Так как квадрат оператора \mathbf{L} коммутирует с его проекциями, то одновременно можно диагонализировать \mathbf{L}^2 в одну из проекций \mathbf{L} , например, \mathbf{L}_3 . Собственные значения этих операторов равны соответственно $l(l+1)$ и m , где l — целое положительное число, $m = -l, l+1, \dots, l$.

Собственная функция операторов \mathbf{L}^2 и \mathbf{L}_3 , соответствующая их собственным значениям $l(l+1)$ и m , представляет собой шаровую функцию $Y_{lm}(\mathbf{v})$, где $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{k}$,

$$\mathbf{L}^2 Y_{lm}(\mathbf{v}) = l(l+1) Y_{lm}(\mathbf{v}),$$

$$\mathbf{L}_3 Y_{lm}(\mathbf{v}) = m Y_{lm}(\mathbf{v}).$$

Мы будем считать $Y_{lm}(\mathbf{v})$ нормированными согласно условию

$$\int Y_{lm}^*(\mathbf{v}) Y_{l'm'}(\mathbf{v}) d\omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла в пространстве \mathbf{k} .

Приведем явное выражение $Y_{lm}(\mathbf{v})$

$$Y_{lm}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\vartheta),$$

$$P_l^{|m|}(\cos\vartheta) = \frac{1}{2^l l!} \sin^{|m|}\vartheta \frac{d^{|m|+l}}{(d \cos\vartheta)^{|m|}} (\cos^2\vartheta - 1)^l,$$

где ϑ и φ — полярный и азимутальный углы, определяющие вектор \mathbf{v} .

Рассмотрим теперь оператор спина фотона и его собственные функции. Обозначим через $\chi_{s\mu}(\alpha)$ собственную функцию операторов \mathbf{s}^2 и \mathbf{s}_3 . Аргументом функции $\chi_{s\mu}(\alpha)$ является спиновая переменная α . Поэтому эту функцию можно представить также в виде вектора $\chi_{s\mu}$. Записав $\chi_{s\mu}$ в виде столбца

$$\chi_{s\mu} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix}$$

и используя определение (3.1.3) оператора спина \mathbf{s} фотона, легко получить явное представление операторов \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 , \mathbf{s}_3 в виде матриц

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.1)$$

Эти матрицы удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям, как и компоненты \mathbf{L} :

$$[\mathbf{s}, \mathbf{s}] = i\mathbf{s}.$$

Из (3.2.1) следует

$$\mathbf{s}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Записав эту матрицу в виде $\mathbf{s}^2 = s(s+1)I$, где s — спин фотона и I — единичная матрица, мы заключаем, что спин фотона равен единице, $s=1$.

Отсюда следует, что проекция спина фотона на ось z может принимать три значения:

$$\mu = -1, 0, 1.$$

Так как s принимает только одно значение, то мы будем опускать далее индекс s у функции $\chi_{s\mu}(\alpha)$ и обозначать ее просто через $\chi_\mu(\alpha)$.

Функции $\chi_\mu(\alpha)$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{s}^2 \chi_\mu(\alpha) = 2\chi_\mu(\alpha),$$

$$\mathbf{s}_3 \chi_\mu(\alpha) = \mu \chi_\mu(\alpha).$$

Используя явный вид (3.2.1) матриц \mathbf{s}_j , получим отсюда

$$\chi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Эти функции ортогональны друг к другу, так как они являются собственными функциями эрмитовского оператора \mathbf{s}_3 , и нормированы таким образом, что

$$\sum_{\alpha} \chi_{\mu}^*(\alpha) \chi_{\mu'}(\alpha) = \delta_{\mu\mu'},$$

или в векторной форме

$$\chi_{\mu}^* \chi_{\mu'} = \delta_{\mu\mu'}.$$

Ортонормированные векторы χ_{μ} могут быть использованы для того, чтобы разлагать по ним произвольный вектор \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} = \sum_{\mu=-1}^1 f^{\mu} \chi_{\mu}. \quad (3.2.3)$$

Величины f^{μ} называются *контравариантными составляющими* вектора \mathbf{f} . Используя (3.2.2), легко установить связь f^{μ} с декартовыми составляющими f_x , f_y , f_z вектора \mathbf{f} :

$$f^0 = f_z, \quad f^{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (f_x \mp if_y). \quad (3.2.4)$$

Наряду с контравариантными можно ввести также *ковариантные составляющие* вектора f , определяемые как

$$f_{\mu} = (-1)^{\mu} f^{-\mu}. \quad (3.2.5)$$

Используя это определение, можно представить скалярное произведение двух векторов f и g в виде

$$fg = \sum_{\mu} f^{\mu} g_{\mu} = \sum_{\mu} f_{\mu} g^{\mu}.$$

Рассмотрим состояние какой-либо свободной частицы с определенным импульсом p . Так как импульс не коммутирует с моментом, то такое состояние не обладает определенным моментом. Однако оно может иметь определенное значение проекции момента на направление импульса. Действительно, выберем в качестве оси квантования ось z вдоль направления p . Так как $pL = 0$, то проекция полного момента J_z будет совпадать с проекцией спина частицы s_z . Но оператор спина коммутирует с оператором импульса. Поэтому наряду с p можно задать значение s_z , т. е. μ . Такие состояния называются *спиральными*, а величина μ — спиральностью. Важным свойством спиральности является ее инвариантность относительно вращений пространства, а также таких преобразований Лоренца, которые не меняют направления p . При пространственном отражении спиральность меняет знак.

Для фотона спиральность равна $\mu = \pm 1$. Третье значение проекции спина $\mu = 0$ исключается условием поперечности электромагнитного поля. Двум значениям спиральности соответствуют две возможные поляризации фотона. Сравнение формул (2.3.3) для проекций векторов круговой поляризации фотона $e^{(\mu)}$ с (3.2.2) показывает, что

$$e^{(1)} = \chi_1, \quad e^{(2)} = \chi_{-1}.$$

Таким образом, фотон с положительной спиральностью ($\mu = 1$) характеризуется правовращающей, а фотон с отрицательной спиральностью ($\mu = -1$) — левовращающей поляризацией.

3.3. Собственные функции оператора момента фотона. Согласно (3.1.2) момент количества движения фотона \mathbf{J} складывается из коммутирующих между собой орбитального и спиновых моментов. Так как эти моменты удовлетворяют одинаковому перестановочным соотношениям, то таким же соотношениям удовлетворяет, очевидно, и момент \mathbf{J} :

$$[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = i\mathbf{J}.$$

Эти соотношения справедливы для любой квантовомеханической системы и являются выражением общей связи, существующей между оператором момента и оператором бесконечно малого поворота.

Из условий коммутации для \mathbf{J}_k следует, что собственные значения операторов \mathbf{J}^2 и \mathbf{J}_z равны соответственно $j(j+1)$ и M , где $2j+1$ — целое положительное число, $M = -j, -j+1, \dots, j$. В случае фотона число j должно быть целым, так как l — целое число и $s = 1$.

Оператор момента количества движения фотона коммутирует с оператором его энергии. Поэтому возможны состояния фотона с определенными значениями ω , \mathbf{J}^2 , J_z (им соответствуют квантовые числа ω , j , M).

Найдем собственные функции операторов \mathbf{J}^2 и \mathbf{J}_z . Мы будем обозначать их через $Y_{jM}(\mathbf{v})$ и называть *векторными шаровыми функциями* или *шаровыми векторами*. Как и выше, мы можем ввести спиновые переменные α и пользоваться обозначением

$$(Y_{jM}(\mathbf{v}))_{\alpha} = Y_{jM}(\mathbf{v}, \alpha).$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{J}^2 Y_{jM}(\mathbf{v}, \alpha) = j(j+1) Y_{jM}(\mathbf{v}, \alpha),$$

$$\mathbf{J}_3 Y_{jM}(\mathbf{v}, \alpha) = M Y_{jM}(\mathbf{v}, \alpha).$$

Вместо того чтобы непосредственно решать эти уравнения, можно воспользоваться для определения Y_{jM} квантовомеханическими правилами сложения моментов [3]. Вопрос сводится при этом к известной в квантовой механике задаче о построении волновой функции системы, состоящей из двух не взаимодействующих подсистем. В нашем случае эти подсистемы связаны с орбитальными и спиновыми степенями свободы фотона и описываются соответственно переменными \mathbf{k} и α .

Так как спин фотона равен единице, то, согласно правилу сложения моментов, полный момент фотона может принимать данное значение j при следующих значениях орбитального момента:

$$l = j, \quad j \pm 1, \quad j \neq 0,$$

$$l = 1, \quad j = 0.$$

Таким образом, в общем случае существуют три различные волновые функции Y_{jM} , соответствующие трем орбитальным состояниям. Мы будем обозначать их через Y_{jlm} .

Чтобы определить Y_{jlm} , следует воспользоваться общей формулой, связывающей волновую функцию системы Ψ_{jm} (j и m — момент системы и проекция его на ось z) с волновыми функциями $\Psi_{j_1 m_1}$ и $\Psi_{j_2 m_2}$ составляющих ее подсистем (j_1 и j_2 — моменты подсистем, m_1 и m_2 — их проекции на ось z)

$$\Psi_{jm} = \sum_{m_1 m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} \Psi_{j_1 m_1} \Psi_{j_2 m_2}, \quad (3.3.1)$$

где $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm}$ — так называемые *коэффициенты векторного сложения* или *коэффициенты Клебша—Гордана* и $m = m_1 + m_2$ *). В интересующем нас случае складываются орбитальный и спиновый моменты фотона, т. е. $j_1 = l$, $j_2 = 1$, $m_1 = m$, $m_2 = \mu$, и волновые функции Y_{jlm} , согласно (3.3.1), должны иметь вид суперпозиций произведений орбитальных $Y_{lm}(\mathbf{v})$ и спиновых $\chi_\mu(\alpha)$ волновых функций фотона

$$Y_{jlm}(\mathbf{v}, \alpha) = \sum_{m_\mu} C_{lm \ 1\mu}^{jM} Y_{lm}(\mathbf{v}) \chi_\mu(\alpha), \quad m + \mu = M. \quad (3.3.2)$$

Формулу (3.3.2) можно переписать также в векторной форме

$$Y_{jlm}(\mathbf{v}) = \sum_{m_\mu} C_{lm \ 1\mu}^{jM} Y_{lm}(\mathbf{v}) \chi_\mu \quad (m + \mu = M), \quad (3.3.2')$$

сравнение которой с (3.2.3) показывает, что контравариантные составляющие шарового вектора $Y_{jlm}(\mathbf{v})$ имеют вид

$$(Y_{jlm}(\mathbf{v}))^\mu = C_{lm \ 1\mu}^{jM} Y_{lm}(\mathbf{v}). \quad (3.3.3)$$

Ковариантные и декартовые составляющие определяются отсюда по формулам (3.2.4) и (3.2.5).

Шаровые векторы $Y_{jlm}(\mathbf{v})$ образуют ортогональную систему функций, так как различие в каком-либо из индексов означает принадлежность функции к различным собственным значениям самосопряженных операторов \mathbf{J}^2 , \mathbf{J}_3 или \mathbf{L}^2 :

$$\int Y_{jlm}^*(\mathbf{v}) Y_{j'l'm'}(\mathbf{v}) d\omega = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (3.3.4)$$

* См., например, [4]. Для коэффициентов Клебша—Гордана используются также обозначения $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m)$, либо $C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)$.

где $Y_{jLM}^*(\mathbf{v})$ означает вектор, декартовы составляющие которого являются комплексно-сопряженными декартовых составляющих $Y_{jLM}(\mathbf{v})$. Заметим, что $(Y_{jLM}^*(\mathbf{v}))^\mu$ не совпадает с $(Y_{jLM}(\mathbf{v}))^{\mu*}$,

$$(Y_{jLM}^*(\mathbf{v}))^\mu = (-1)^\mu (Y_{jLM}(\mathbf{v}))^{-\mu*} = (Y_{jLM}(\mathbf{v}))_{\mu}^* \quad (3.3.5)$$

Отсюда следует

$$Y_{jLM}^*(\mathbf{v}) = Y_{j, l, -M}(\mathbf{v}) (-1)^{j+l+M+1} \quad (3.3.6)$$

3.4. Коэффициенты векторного сложения. Входящие в (3.3.1) — (3.3.3) коэффициенты Клебша — Гордана приведены в следующей таблице:

Коэффициенты $C_{lm1\mu}^M$

$\mu \backslash l$	$l+1$	l	$l-1$
-1	$\sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{(2l+1)(2l+2)}}$	$\sqrt{\frac{(l+M+1)(l-M)}{2l(l+1)}}$	$\sqrt{\frac{(l+M)(l+M+1)}{2l(2l+1)}}$
0	$\sqrt{\frac{(l+M+1)(l-M+1)}{(2l+1)(l+1)}}$	$\frac{M}{\sqrt{l(l+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(l+M)(l-M)}{l(2l+1)}}$
1	$\sqrt{\frac{(l+M)(l+M-1)}{(2l+1)(2l+2)}}$	$-\sqrt{\frac{(l+M)(l-M+1)}{2l(l+1)}}$	$\sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{2l(2l+1)}}$

В дальнейшем мы будем неоднократно пользоваться рядом свойств коэффициентов $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm}$, поэтому приведем их здесь для справочных целей.

Отметим прежде всего, что коэффициенты $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm}$ вещественны и удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$\sum_{m_1 m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} C_{j_1 m_1' j_2 m_2'}^{j'm'} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \quad (3.4.1)$$

$$\sum_{jm} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} C_{j_1 m_1' j_2 m_2'}^{jm} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}.$$

Коэффициенты $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm}$ обладают рядом свойств симметрии, которые просто сформулировать, если ввести величины $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$, называемые *3j-символами Вигнера* и определяемые следующим образом:

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} = \sqrt{2j+1} (-1)^{j_1-j_2+m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}. \quad (3.4.2)$$

Если $\begin{pmatrix} j_a & j_b & j_c \\ m_a & m_b & m_c \end{pmatrix}$ — *3j-символ*, полученный из $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ путем перестановки столбцов, то

$$\begin{pmatrix} j_a & j_b & j_c \\ m_a & m_b & m_c \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (3.4.3)$$

где $\varepsilon = (-1)^{(j_1+j_2+j_3)N}$ и N — число перестановок.

Далее

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}. \quad (3.4.4)$$

$3j$ -символами удобно пользоваться при проведении суммирований по индексам m_i . Основные формулы суммирования имеют вид [5]

$$\begin{aligned} (-1)^{\nu} \begin{pmatrix} j_1 & L_2 & L_3 \\ m_1 & M_2 & -M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & j_2 & L_3 \\ -M_1 & m_2 & M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & j_3 \\ M_1 & -M_2 & m_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{matrix} \right\}, \\ \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & j_3 \\ M_1 & M_2 & -m_3 \end{pmatrix} = \sum_{L_3} (-1)^{\nu'} (2L_3+1) \times \\ \times \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} L_1 & j_2 & L_3 \\ M_1 & m_2 & M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & L_2 & L_3 \\ m_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

где $\nu = L_1 + L_2 + L_3 + M_1 + M_2 + M_3$, $\nu' = j_3 + L_3 + m_1 + M_1$. Входящие

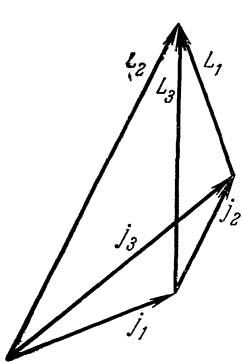


Рис. 3.1.

сюда величины $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{matrix} \right\}$, называемые $6j$ -символами, определяются формулами

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{j_1+j_2+L_1+L_2}}{\sqrt{(2j_3+1)(2L_3+1)}} \sum_{m_1 m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_3, m_1+m_2} \times \\ \times C_{j_3, m_1+m_2, l_1, m-m_1-m_2}^{l_2 m} C_{j_2 m_2, l_1-m_1-m_2+m}^{l_3, m-m_1} C_{j_1 m_1, l_3, m-m_1}^{l_2 m} \end{aligned}$$

$6j$ -символы обладают следующими свойствами симметрии:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_a & j_b & j_c \\ L_a & L_b & L_c \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} L_a & L_b & j_c \\ j_a & j_b & L_c \end{matrix} \right\}, \quad (3.4.6)$$

где a, b, c — любая перестановка чисел 1, 2, 3, и удовлетворяют соотношениям ортогональности и нормировки

$$\sum_{j_3} (2j_3+1)(2L_3+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ L_1 & L_2 & L'_3 \end{matrix} \right\} = \delta_{L_3 L'_3}. \quad (3.4.7)$$

Соотношения (3.4.5) можно проиллюстрировать следующей схемой сложения моментов. Пусть складываются три момента j_1, j_2, L_1

$$j_1 + j_2 + L_1 = L_2.$$

Сложение можно выполнить в два этапа, причем двумя различными путями (рис. 3.1):

$$\begin{aligned} 1) \quad j_1 + j_2 = j_3, \quad j_3 + L_1 = L_2, \\ 2) \quad j_2 + L_1 = L_3, \quad L_3 + j_1 = L_2. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Формулы (3.4.5) устанавливают соотношения между коэффициентами C этих двух схем сложения. Поэтому $6j$ -символы отличны от нуля, только

если величины j_a , L_a удовлетворяют правилам треугольников, содержащихся в (3.4.8) (см. рис. 3.1).

Ниже проводятся выражения для $6j$ -символов для случаев, когда один из индексов равен 0, $1/2$ или 1:

$$\left\{ \begin{matrix} j & j & 0 \\ l & l & L \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{j+L+l}}{\sqrt{(2j+1)(2l+1)}},$$

$$\left\{ \begin{matrix} j & j+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ l-1/2 & l & L \end{matrix} \right\} = (-1)^s \sqrt{\frac{(s-2j)(s-2l+1)}{(2j+1)(2j+2)2l(2l+1)}},$$

$$\left\{ \begin{matrix} j & j-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ l-\frac{1}{2} & l & L \end{matrix} \right\} = (-1)^s \sqrt{\frac{(s+1)(s-2L)}{2j(2j+1)2l(2l+1)}},$$

$$\left\{ \begin{matrix} j & j-1 & 1 \\ l-1 & l & L \end{matrix} \right\} = (-1)^s \sqrt{\frac{s(s+1)(s-2L-1)(s-2L)}{(2j-1)2j(2j+1)(2l-1)2l(2l+1)}},$$

$$\left\{ \begin{matrix} j & l & 1 \\ l-1 & j & L \end{matrix} \right\} = (-1)^s \sqrt{\frac{2(s+1)(s-2L)(s-2j)(s-2l+1)}{2j(2j+1)(2j+2)(2l-1)2l(2l+1)}},$$

$$\left\{ \begin{matrix} j & j+1 & 1 \\ l-1 & l & L \end{matrix} \right\} = (-1)^s \sqrt{\frac{(s-2j-1)(s-2j)(s-2l+1)(s-2l+2)}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)(2l-1)2l(2l+1)}},$$

$$\left\{ \begin{matrix} j & j & 1 \\ l & l & L \end{matrix} \right\} = (-1)^{s+1} \frac{2[j(j+1)+l(l+1)-L(L+1)]}{\sqrt{2j(2j+1)(2j+2)2l(2l+1)(2l+2)}},$$

где $s = j + l + L$.

3.5. Продольный и поперечные шаровые векторы. Мы нашли систему собственных функций операторов квадрата момента количества движения фотона \mathbf{J}^2 и его проекции \mathbf{J}_3 . Состояние фотона с определенными значениями j и M описывается волновой функцией, являющейся в общем случае линейной комбинацией трех шаровых векторов:

$$\mathbf{f}_{jM}(\mathbf{k}) = \sum_{l=j-1}^{j+1} a_l \mathbf{Y}_{jM}(\mathbf{v}).$$

Однако коэффициенты этой линейной комбинации не независимы, так как волновая функция фотона должна удовлетворять условию поперечности (2.1.7)

$$\mathbf{k} \mathbf{f}_{jM}(\mathbf{k}) = 0.$$

Поэтому имеется не три, а два различных состояния фотона с заданными квантовыми числами j и M .

Чтобы условие поперечности выполнялось автоматически, удобно пользоваться не шаровыми векторами $\mathbf{Y}_{jM}(\mathbf{v})$, а некоторыми их тремя линейными комбинациями $\mathbf{Y}_{jM}^{(\lambda)}(\mathbf{v})$, $\lambda = -1, 0, 1$, две из которых ($\lambda = 0, 1$) перпендикулярны \mathbf{k} , а третья ($\lambda = -1$) направлена вдоль \mathbf{k} . Эти комбинации называются *поперечными и продольным шаровыми векторами*.

Чтобы найти их, воспользуемся разложением $\mathbf{v} \mathbf{Y}_{jM}(\mathbf{v})$ на шаровые векторы *)

$$\mathbf{v} \mathbf{Y}_{jM}(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \mathbf{Y}_{j, j-1, M}(\mathbf{v}) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \mathbf{Y}_{j, j+1, M}(\mathbf{v}). \quad (3.5.1)$$

*) См., например, [6].

Эта формула показывает, что мы можем определить продольный шаровой вектор $Y_{jM}^{(-1)}(\mathbf{v})$ как

$$Y_{jM}^{(-1)}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}Y_{jM}(\mathbf{v}). \quad (3.5.2)$$

Используя далее разложение (3.5.1) и значения коэффициентов C_{lm}^{jM} , легко убедиться, что

$$\mathbf{v}Y_{jM}(\mathbf{v}) = \sum_{m\mu} C_{jm}^{jM} v_\mu Y_{jm}(\mathbf{v}) = 0, \quad m = M - \mu.$$

Поэтому $Y_{jM}(\mathbf{v})$ представляет собой поперечный шаровой вектор, который мы будем обозначать через

$$Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}) = Y_{jM}(\mathbf{v}). \quad (3.5.3)$$

Наконец, второй поперечный шаровой вектор $Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v})$ мы определим как

$$Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}) = i [Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}), \mathbf{v}]. \quad (3.5.4)$$

Используя (3.5.1) и (3.3.4), можно выразить $Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v})$ через шаровые векторы $Y_{jM}(\mathbf{v})$:

$$Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} Y_{j, j+1, M}(\mathbf{v}) + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} Y_{j, j-1, M}(\mathbf{v}). \quad (3.5.5)$$

Из (3.5.1) и (3.5.5) следует

$$\begin{aligned} Y_{j, j-1, M}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (\sqrt{j+1} Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}) + \sqrt{j} Y_{jM}^{(-1)}(\mathbf{v})), \\ Y_{j, j+1, M}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (\sqrt{j} Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}) - \sqrt{j+1} Y_{jM}^{(-1)}(\mathbf{v})). \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Шаровые векторы $Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v})$ и $Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v})$ можно выразить также через производные от шаровой функции $Y_{jM}(\mathbf{v})$. Для этого следует воспользоваться формулой дифференцирования шаровых функций:

$$k\nabla_k Y_{jM}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (j\sqrt{j+1} Y_{j, j+1, M}(\mathbf{v}) + (j+1)\sqrt{j} Y_{j, j-1, M}(\mathbf{v})).$$

Сравнивая эту формулу с (3.5.5), мы видим, что

$$Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}) = \frac{k}{\sqrt{j(j+1)}} \nabla_k Y_{jM}(\mathbf{v}), \quad (3.5.7)$$

и, согласно (3.5.4),

$$Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}) = -\frac{[k\nabla_k] Y_{jM}(\mathbf{v})}{\sqrt{j(j+1)}} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \mathbf{L} Y_{jM}(\mathbf{v}), \quad (3.5.8)$$

где $\mathbf{L} = -i [k\nabla_k]$ — оператор орбитального момента фотона.

Приведем еще выражения для составляющих шаровых векторов $Y_{jM}^{(\lambda)}(\mathbf{v})$ в сферических координатах:

$$\begin{aligned} (Y_{jM}^{(-1)}(\mathbf{v}))_{\mathbf{v}} &= Y_{jM}(\mathbf{v}), \\ (Y_{jM}^{(-1)}(\mathbf{v}))_{\Phi} &= (Y_{jM}^{(-1)}(\mathbf{v}))_{\Phi} = 0, \\ (Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}))_{\Phi} &= i (Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}))_{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \frac{\partial Y_{jM}(\mathbf{v})}{\partial \Phi}, \\ (Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}))_{\Phi} &= -i (Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}))_{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \frac{1}{\sin \Phi} \frac{\partial Y_{jM}(\mathbf{v})}{\partial \Phi}, \\ (Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}))_{\mathbf{v}} &= (Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}))_{\mathbf{v}} = 0. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Легко видеть, что шаровые векторы удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\int Y_{jm}^{(\lambda)*}(\mathbf{v}) Y_{j'm'}^{(\lambda')}(\mathbf{v}) d\Omega = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

3.6. Четность состояний фотона. Образовав линейную комбинацию шаровых векторов $Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v})$ и $Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v})$ с произвольными коэффициентами a_0 и a_1 (зависящими от \mathbf{k} и t), мы получим общее выражение для волновой функции фотона $f_{jM}(\mathbf{k})$ с заданными значениями j и M :

$$f_{jM}(\mathbf{k}) = a_0 Y_{jM}^{(0)}(\mathbf{v}) + a_1 Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

Входящие сюда слагаемые по-разному преобразуются при замене \mathbf{k} на $-\mathbf{k}$

$$Y_{jM}^{(\lambda)}(-\mathbf{v}) = (-1)^{j+M} Y_{jM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}). \quad (3.6.1)$$

Поэтому можно различать состояния фотона с заданными j и M по их четности.

Четностью называются собственные значения η_P оператора отражения P , который в случае векторного поля определяется как (ср. (1.5.3))

$$P\mathbf{f}(\mathbf{k}) = -\mathbf{f}(-\mathbf{k}). \quad (3.6.2)$$

Так как $P^2 = 1$, то $\eta_P = \pm 1$.

Из (3.6.1) и (3.6.2) следует, что при данных j и M возможны два состояния фотона, отличающиеся четностью η_P ,

$$\eta_P = (-1)^{j+1+M}. \quad (3.6.3)$$

Мы будем обозначать волновые функции этих состояний через $f_{jM\lambda}(\mathbf{k}, t)$:

$$f_{jM\lambda}(\mathbf{k}, t) = a Y_{jM}^\lambda(\mathbf{v}), \quad \lambda = 0, 1. \quad (3.6.4)$$

При $\lambda = 1$ говорят о состояниях фотона *электрического* типа, а при $\lambda = 0$ — о состояниях фотона *магнитного* типа. (Эти названия связаны с тем, что излучение фотона с $\lambda = 1$ определяется электрическим моментом системы, а фотона с $\lambda = 0$ — магнитным моментом, см. § 25)

Если одновременно с моментом и четностью фотон обладает определенной энергией ω , то его волновая функция имеет вид

$$f_{\omega jM\lambda}(\mathbf{k}, t) = \iota \sqrt{\frac{R}{\pi}} \frac{1}{\omega} Y_{jM}^\lambda(\mathbf{v}) e^{-i\omega t} \delta_{k\omega} \quad (3.6.5)$$

Нормировка этой функции соответствует нахождению одного фотона в сфере радиуса R .

Отметим то обстоятельство, что при $\lambda = 1$ состоянию фотона нельзя приписать определенного значения орбитального момента, так как, согласно (3.5.5), шаровой вектор $Y_{jM}^{(1)}(\mathbf{v})$ является линейной комбинацией шаровых векторов $Y_{jLM}(\mathbf{v})$ с различными значениями l . Здесь проявляется тот факт, что, по существу, нельзя разделять момент количества движения фотона на орбитальную и спиновую части, о чем уже говорилось выше.

Если $j = 0$, то по правилу сложения моментов имеется только один шаровой вектор $Y_{010}(\mathbf{v})$, совпадающий с продольным шаровым вектором $Y_{00}^{(-1)}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} Y_{00}(\mathbf{v})$. Отсюда следует, что поперечных шаровых векторов при $j = 0$ не существует. Этот результат имеет простой смысл. Состояние с моментом нуль представляет собой сферически симметричное состояние, но сферически симметричное векторное поле может быть только продольным.

Таким образом, фотон не может находиться в состоянии с моментом, равным нулю.

3.7. Угловое распределение. С помощью (3.6.4) можно найти вероятность $d\omega_{JM}(\mathbf{v})$ того, что фотон в состоянии $JM\lambda$ движется в телесном угле $d\omega$:

$$d\omega_{JM}(\mathbf{v}) = |Y_{JM}^{(\lambda)}(\mathbf{v})|^2 d\omega. \quad (3.7.1)$$

Так как оба поперечных шаровых вектора связаны между собой соотношением (3.5.4), то вероятность $d\omega_{JM}(\mathbf{v})$ не зависит от λ , т. е. угловое распределение фотона определяется только его моментом, но не четностью. Оно зависит от полярного угла ϑ между \mathbf{k} и осью квантования (ось z) и не зависит от азимутального угла φ . Поэтому $d\omega_{JM}(\mathbf{v})$ удобно разложить по полиномам Лежандра $P_l(\cos \vartheta)$. Так как $|Y_{JM}^{(\lambda)}(\mathbf{v})|^2$ — четная функция \mathbf{v} , то в разложение войдут лишь полиномы четного порядка

$$d\omega_{JM}(\mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n a_{2n} P_{2n}(\cos \vartheta) d\omega. \quad (3.7.2)$$

Для нахождения коэффициентов этого разложения воспользуемся формулами (3.4.3), (3.3.5), (3.2.5) при $\lambda = 0, 1$:

$$\begin{aligned} |Y_{JM}^{(\lambda)}(\mathbf{v})|^2 &= |Y_{JM}(\mathbf{v})|^2 = \sum_{\mu} (Y_{JM}(\mathbf{v}))^{\mu} (Y_{JM}(\mathbf{v}))^{\mu*} = \\ &= \sum_{\mu m} (C_{JM\mu}^M)^2 |Y_{JM}(\mathbf{v})|^2 = \sum_{\mu m} (-1)^m (C_{JM\mu}^M)^2 Y_{Jm}(\mathbf{v}) Y_{J,-m}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Входящее сюда произведение двух шаровых функций может быть разложено по шаровым функциям

$$Y_{Jm}(\mathbf{v}) Y_{J,-m}(\mathbf{v}) = \sum_L \rho_L C_{JM\mu}^{L0} Y_{L0}(\mathbf{v}) = \sum_L \rho_L C_{JM\mu}^{L0} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} P_L(\cos \vartheta),$$

где коэффициенты ρ_L не зависят от m . Для определения их умножим обе части последнего равенства на $C_{JM\mu}^{L'0}$ и просуммируем по m . Используя первое из соотношений (3.4.1), найдем

$$\rho_L \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} P_L(\cos \vartheta) = C_{JM\mu}^{L0} Y_{Jm}(\mathbf{v}) Y_{J,-m}(\mathbf{v}),$$

откуда, полагая $\vartheta = 0$ (при этом $P_L = 1$, $Y_{Jm} = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}$), получим

$$\rho_L \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} = \frac{2J+1}{4\pi} C_{J0\mu}^{L0}.$$

Таким образом,

$$|Y_{Jm}(\mathbf{v})|^2 = (-1)^m \frac{2J+1}{4\pi} \sum_L C_{J0\mu}^{L0} C_{JM\mu}^{L0} P_L(\cos \vartheta), \quad (3.7.3)$$

и, следовательно, коэффициенты в разложении (3.7.2) имеют вид

$$a_L = (2J+1) C_{J0\mu}^{L0} \sum_{m\mu} (-1)^m (C_{JM\mu}^M)^2 C_{JM\mu}^{L0}.$$

Входящую сюда сумму можно вычислить с помощью формул (3.4.2)–(3.4.5):

$$a_L = (2J+1) C_{J1, J, -1}^{L0} C_{JM, -M}^{L0} (-1)^{M+1}. \quad (3.7.4)$$

3.8. Сферические электромагнитные волны. Зная волновую функцию фотона $f_{\omega JM\lambda}(\mathbf{k}, t)$, легко определить электромагнитное поле $\mathcal{E}_{\omega JM}(\mathbf{r}, t)$,

$\mathcal{H}_{\omega j M}^{(\lambda)}(\mathbf{r}, t)$, соответствующее состоянию фотона с определенными энергией, моментом и четностью. Подставим для этого выражение (3.6.5) для $f_{\omega j M \lambda}(\mathbf{k}, t)$ в формулы (2.2.7) для полей. Учитывая соотношение (3.5.4), получим

$$\mathcal{E}_{\omega j M}^{(\lambda)}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} \int Y_{jM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{v} e^{-i\omega t},$$

$$\mathcal{H}_{\omega j M}^{(\lambda)}(\mathbf{r}, t) = -\sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} \int Y_{jM}^{(1-\lambda)}(\mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{v} e^{-i\omega t},$$

где $\omega = k$.

Для вычисления входящих сюда интегралов воспользуемся известным разложением плоской волны по шаровым функциям

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{lm} g_l(kr) Y_{lm}^* \left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right) Y_{lm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right), \quad (3.8.1)$$

где

$$g_l(kr) = (2\pi)^{3/2} i^l \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}$$

и $J_n(x)$ — функция Бесселя. Учитывая определение векторных шаровых функций, получим отсюда

$$\int Y_{jM} \left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{v} = g_l(kr) Y_{jM} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

и, следовательно,

$$\int Y_{jM}^{(0)} \left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{v} = g_j(kr) Y_{jM}^{(0)} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right),$$

$$\int Y_{jM}^{(1)} \left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{v} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} g_{j+1}(kr) Y_{j, j+1, M} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \\ + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j, j-1, M} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right).$$

Подставляя эти формулы в выражение полей $\mathcal{E}_{\omega j M}^{(\lambda)}$, $\mathcal{H}_{\omega j M}^{(\lambda)}$, получим

$$\mathcal{E}_{\omega j M}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} \left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}} g_{j+1}(kr) Y_{j, j+1, M} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j, j-1, M} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \right] e^{-i\omega t}, \quad (3.8.2)$$

$$\mathcal{H}_{\omega j M}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -\sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} g_j(kr) Y_{jM} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) e^{-i\omega t},$$

$$\mathcal{E}_{\omega j M}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} g_j(kr) Y_{jM} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) e^{-i\omega t}, \quad (3.8.3)$$

$$\mathcal{H}_{\omega j M}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = -\sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} \left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}} g_{j+1}(kr) Y_{j, j+1, M} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j, j-1, M} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \right] e^{-i\omega t}.$$

Заметим, что формулы (3.8.2) переходят в формулы (3.8.3) при замене $\mathcal{E} \rightarrow -i\mathcal{H}$, $\mathcal{H} \rightarrow i\mathcal{E}$, что соответствует инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразования $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$, $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H}$.

Ввиду поперечности шарового вектора $Y_{JM}^{(0)} \equiv Y_{JJM}$, магнитное поле в состояниях электрического типа и электрическое поле в состояниях магнитного типа поперечны, т. е.

$$r \mathcal{H}_{\omega JM}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = r \mathcal{E}_{\omega JM}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Электрическое же поле в состояниях электрического типа и магнитное поле в состояниях магнитного типа не поперечны. Действительно, воспользовавшись (3.5.6), можно записать $\mathcal{E}_{\omega JM}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\mathcal{E}_{\omega JM}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{2j+1} \left\{ \sqrt{J(J+1)} (g_{j-1}(kr) - g_{j+1}(kr)) Y_{jM}^{(-1)}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + (jg_{j+1}(kr) + (j+1)g_{j-1}(kr)) Y_{jM}^{(1)}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \right\} e^{-i\omega t}, \quad (3.8.4)$$

где первое слагаемое и определяет радиальную составляющую электрического поля. Магнитное поле $\mathcal{H}_{\omega JM}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$, связанное с $\mathcal{E}_{\omega JM}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ соотношением

$$\mathcal{H}_{\omega JM}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = i \mathcal{E}_{\omega JM}^{(1)}(\mathbf{r}, t),$$

также имеет радиальную составляющую.

Эти радиальные составляющие исчезают на больших расстояниях в волновой зоне, когда $kr \gg 1$. В самом деле, при $kr \gg 1$

$$g_l(kr) = i^l 4\pi \frac{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr}$$

и

$$g_{j-1}(kr) = g_{j+1}(kr).$$

Отметим, что в волновой зоне поля определяются следующими асимптотическими формулами:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\omega JM}^{(\lambda)}(\mathbf{r}, t) &= -i \mathcal{H}_{\omega JM}^{(1-\lambda)}(\mathbf{r}, t) = \\ &= i^{j+1-\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{R}} \frac{\sin\left(kr - (j-\lambda)\frac{\pi}{2}\right)}{kr} Y_{jM}^{(\lambda)}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

Приведем также выражения для потенциалов, соответствующих полям $\mathcal{E}_{\omega JM}^{(\lambda)}$ и $\mathcal{H}_{\omega JM}^{(\lambda)}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\omega JM}^{(0)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega}{R}} g_j(kr) Y_{jM}^{(0)}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) e^{-i\omega t}, \\ \Phi_{\omega JM}^{(0)}(\mathbf{r}, t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\omega JM}^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega}{R}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2j+1}} g_{j+1}(kr) Y_{j, j+1, M}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \right. \\ &+ \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j, j-1, M}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \\ &+ C \left[\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j+1}(kr) Y_{j, j+1, M}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) - \right. \\ &\left. \left. - \sqrt{\frac{1}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j, j-1, M}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \right] \right\} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.8.7)$$

$$\Phi_{\omega JM}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{C}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega}{R}} g_j(kr) Y_{jM}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) e^{-i\omega t},$$

где C — произвольная постоянная и $k = \omega$.

Различным выбором постоянной C можно придать выражениям (3.8.7) различный вид. Так, при $C=0$ $\mathcal{A}_{\omega JM}^{(1)}$ отличается только множителем $1/i\omega$ от $\mathcal{E}_{\omega JM}^{(1)}$ [7]. При $C = \sqrt{\frac{l+1}{l}}$ выражение для $\mathcal{A}_{\omega JM}^{(1)}$ становится одночленным и содержит лишь функцию $g_{j+1}(kr)$, что дает преимущества в ряде приложений (см. § 25),

$$\mathcal{A}_{\omega JM}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega}{R}} \sqrt{\frac{2l+1}{l}} g_{j+1}(kr) Y_{J, j+1, M} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) e^{-i\omega t},$$

$$\Phi_{\omega JM}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega}{R}} \sqrt{\frac{l+1}{l}} g_j(kr) Y_{JM} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) e^{-i\omega t}. \quad (3.8.8)$$

Так как волновые функции состояний с определенными значениями $\omega JM\lambda$ образуют полную систему, то по ним может быть разложена произвольная волновая функция фотона $f(\mathbf{k}, t)$. Этому отвечает разложение произвольного решения уравнений Максвелла по сферическим волнам. В частности, разложение плоской волны по сферическим волнам имеет вид

$$\mathcal{E}_{k\mu} = \sum_{JM\lambda} \left(e_{\mu} Y_{JM}^{(\lambda)*} \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \right) \right) \mathcal{E}_{\omega JM}^{(\lambda)},$$

или

$$e e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{JM} \left(e Y_{JM}^* \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \right) \right) g_l(kr) Y_{JM} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (3.8.9)$$

§ 4. Система двух фотонов

4.1. Волновая функция двух фотонов в импульсном пространстве.

До сих пор мы рассматривали один фотон и соответствующее ему электромагнитное поле. Однако можно обобщить изложенный метод введения волновой функции фотона в импульсном пространстве и рассматривать также совокупность произвольного числа фотонов, подобно тому как это делается в квантовой механике системы частиц.

Рассмотрим подробнее систему двух фотонов. Волновая функция f такой системы, зависящая от импульсов \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и спиновых переменных α_1 , α_2 ($\alpha_1 = 1, 2, 3$; $\alpha_2 = 1, 2, 3$) обоих фотонов, удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{w} f, \quad (4.1.1)$$

где \mathbf{w} — гамильтониан системы фотонов. Квадрат модуля волновой функции f определяет вероятность того, что один из фотонов имеет импульс \mathbf{k}_1 и поляризован вдоль оси α_1 , а другой фотон имеет импульс \mathbf{k}_2 и поляризован вдоль оси α_2 . С большой степенью точности фотоны можно считать невзаимодействующими*) и записать поэтому \mathbf{w} в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{k}_1) + \mathbf{w}(\mathbf{k}_2),$$

где $\mathbf{w}(\mathbf{k})$ — гамильтониан одного фотона, определяемый формулой (2.1.8).

Волновая функция $f \equiv f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2; t)$ представляет собой скаляр в пространстве \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , α_1 , α_2 , но ее можно рассматривать также как тензорную функцию $f_{\alpha_1\alpha_2}$ в пространстве импульсов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 :

$$f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2; t) \equiv f_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (4.1.2)$$

*) В действительности благодаря взаимодействию фотонов с электронами возникает слабое взаимодействие между фотонами, подробнее об этом см. § 41.

аналогично тому, как волновую функцию одного фотона можно рассматривать либо как скаляр $f(\mathbf{k}, \alpha)$ в пространстве \mathbf{k}, α , либо как вектор $f_{\alpha}(\mathbf{k})$ в пространстве \mathbf{k} . (Мы опускаем всюду в числе аргументов время t .)

Так как фотоны подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, то их волновая функция должна быть симметричной относительно перестановки переменных, относящихся к обоим фотонам:

$$f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2) = f(\mathbf{k}_2, \alpha_2; \mathbf{k}_1, \alpha_1), \quad (4.1.3)$$

или в тензорной форме

$$f_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = f_{\alpha_2 \alpha_1}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1).$$

Кроме условия симметричности, волновая функция фотонов должна еще удовлетворять условиям поперечности поляризаций каждого из фотонов:

$$\sum_{\alpha_1} \mathbf{k}_{1\alpha_1} f_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 0, \quad (4.1.4)$$

$$\sum_{\alpha_2} \mathbf{k}_{2\alpha_2} f_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 0.$$

Вместо переменных \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 можно ввести две другие переменные — полный импульс \mathbf{K} системы фотонов (импульс центра инерции) и их относительный импульс \mathbf{k}

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2.$$

В состояниях с определенным полным импульсом волновая функция системы двух фотонов имеет вид произведения двух функций, из которых одна зависит от \mathbf{K} , а другая — от \mathbf{k} (и от α_1, α_2):

$$f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2) = F(\mathbf{K}) f(\mathbf{k}; \alpha_1, \alpha_2). \quad (4.1.5)$$

Если импульсы фотонов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 не параллельны, то можно перейти в систему отсчета, в которой суммарный импульс фотонов будет равен нулю, $\mathbf{K} = 0$. Функция $f(\mathbf{k}; \alpha_1, \alpha_2)$ представляет собой волновую функцию фотонов в этой системе отсчета (импульсы фотонов равны в этой системе $\mathbf{k}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{k}$, $\mathbf{k}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{k}$). Заметим, что два фотона с равным нулю полным импульсом экспериментально наблюдаются при распаде покоящейся нейтральной системы, например, при распадах позитрония и π^0 -мезона.

Волновая функция $f(\mathbf{k}; \alpha_1, \alpha_2) \equiv f_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k})$ удовлетворяет, очевидно, условию симметричности

$$f_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}) = f_{\alpha_2 \alpha_1}(-\mathbf{k}) \quad (4.1.6)$$

и условиям поперечности

$$\mathbf{k}_{\alpha_1} f_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}) = 0, \quad (4.1.7)$$

$$\mathbf{k}_{\alpha_2} f_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{k}) = 0.$$

4.2. Четные и нечетные состояния двух фотонов. Поставим теперь задачу о нахождении волновых функций системы двух фотонов с определенным моментом и четностью [8]. Импульс центра инерции \mathbf{K} будем считать равным нулю. Оператор момента количества движения системы \mathbf{J} является суммой операторов орбитального и спинного моментов

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s},$$

где \mathbf{L} — оператор орбитального момента относительного движения,

$$\mathbf{L} = -i [\mathbf{k} \nabla_{\mathbf{k}}],$$

и \mathbf{s} — сумма операторов спина обоих фотонов,

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2.$$

Собственными функциями операторов \mathbf{L}^2 и \mathbf{L}_3 являются, как и в случае одного фотона, шаровые функции $Y_{lm}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{k}$. Собственные значения квадрата спинового момента равны $s(s+1)$, где квантовое число s может, согласно правилу сложения моментов, принимать три значения:

$$s = 0, 1, 2.$$

Так как при данном значении s собственное значение оператора проекции спинового момента принимает значения $\mu = -s, -s+1, \dots, s$, то всего имеется девять различных спиновых волновых функций системы двух фотонов, которые мы будем обозначать через $\chi_{s\mu}(\alpha_1, \alpha_2)$. Они представляют собой билинейные комбинации спиновых волновых функций обоих фотонов $\chi_{\mu_1}(\alpha_1)$ и $\chi_{\mu_2}(\alpha_2)$:

$$\chi_{s\mu}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{\mu_1 \mu_2} C_{1\mu_1 1\mu_2}^{s\mu} \chi_{\mu_1}(\alpha_1) \chi_{\mu_2}(\alpha_2),$$

где $C_{1\mu_1 1\mu_2}^{s\mu}$ — коэффициенты Клебша — Гордана и $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Легко видеть, что при данном s сюда входят только симметричные или антисимметричные комбинации функций $\chi_{\mu_1}(\alpha_1)$ и $\chi_{\mu_2}(\alpha_2)$, шесть первых и три вторых. При этом, так как состояния с различными значениями μ и одним и тем же s должны обладать одинаковой симметрией, то три антисимметричные комбинации следует отнести к значению $s = 1$:

$$\chi_{1\mu}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \chi_{\mu_1}(\alpha_1) \chi_{\mu_2}(\alpha_2) - \chi_{\mu_1}(\alpha_2) \chi_{\mu_2}(\alpha_1) \}, \quad (4.2.1)$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = -1, 0, 1,$$

а шесть симметричных комбинаций — к значениям $s = 0, 2$. Четыре симметричные комбинации, для которых $\mu = \mu_1 + \mu_2 \neq 0$, соответствуют $s = 2$:

$$\chi_{2\mu}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \chi_{\mu_1}(\alpha_1) \chi_{\mu_2}(\alpha_2) + \chi_{\mu_1}(\alpha_2) \chi_{\mu_2}(\alpha_1) \}, \quad \mu \neq 0, \quad (4.2.2)$$

остальные же две симметричные комбинации с $\mu_1 + \mu_2 = 0$ представляют собой суперпозиции состояний $\chi_{20}(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\chi_{00}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Используя явные значения коэффициентов C_{1010}^{s0} , легко убедиться, что

$$\chi_{00}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ -\chi_0(\alpha_1) \chi_0(\alpha_2) + \chi_1(\alpha_1) \chi_{-1}(\alpha_2) + \chi_{-1}(\alpha_1) \chi_1(\alpha_2) \},$$

$$\chi_{20}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \{ 2\chi_0(\alpha_1) \chi_0(\alpha_2) + \chi_1(\alpha_1) \chi_{-1}(\alpha_2) + \chi_{-1}(\alpha_1) \chi_1(\alpha_2) \}. \quad (4.2.3)$$

Как будет видно из дальнейшего, условие поперечности требует суперпозиции состояний с $s = 0$ и $s = 2$. Поэтому классификация состояний по значению спина не имеет глубокого физического смысла в отличие от разделения спиновых состояний на симметричные и антисимметричные.

Зная функции $\chi_{s\mu}(\alpha_1, \alpha_2)$, можно построить волновые функции системы двух фотонов с определенными значениями момента количества движения j и его проекции M на какую-либо ось (ось z). Эти функции, которые мы будем

обозначать через $f_{jM}(\mathbf{k}; \alpha_1, \alpha_2)$, представляют собой, согласно правилу сложения моментов, суперпозиции функций $Y_{lm}(\mathbf{v}) \chi_{s\mu}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Состояния с определенным моментом могут быть классифицированы по их четности, т. е. по собственным значениям оператора отражения \mathbf{P} . Этот оператор действует на орбитальную часть волновой функции

$$\mathbf{P}f(\mathbf{k}; \alpha_1, \alpha_2) = f(-\mathbf{k}; \alpha_1, \alpha_2),$$

а так как

$$Y_{lm}(-\mathbf{v}) = (-1)^l Y_{lm}(\mathbf{v}),$$

то четность состояния равна

$$\eta_{\mathbf{P}} = (-1)^l. \quad (4.2.4)$$

С другой стороны, замена $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ эквивалентна перестановке импульсов двух фотонов. Но из условия симметрии волновой функции (4.1.6) следует, что

$$Y_{lm}(\mathbf{v}) \chi_{s\mu}(\alpha_1, \alpha_2) = Y_{lm}(-\mathbf{v}) \chi_{s\mu}(\alpha_2, \alpha_1).$$

Поэтому существует связь между четностью состояния и симметрией спиновой функции:

$$\chi_{s\mu}(\alpha_1, \alpha_2) = (-1)^l \chi_{s\mu}(\alpha_2, \alpha_1), \quad (4.2.5)$$

т. е. четные состояния ($l = 2n$, n — целое число) симметричны по отношению к спиновым переменным, а нечетные ($l = 2n + 1$) антисимметричны.

Иными словами, тензор $f_{\alpha_1\alpha_2}$ является симметричным в случае четных состояний и антисимметричным в случае нечетных состояний. В первом случае он имеет шесть составляющих, а во втором — три, что находится в соответствии с числом симметричных и антисимметричных спиновых функций.

4.3. Классификация состояний двух фотонов с определенным моментом.

Состояние фотона при заданной энергии полностью определяется его моментом и четностью. Каждому набору квантовых чисел ω , j , M , $\eta_{\mathbf{P}}$ соответствует одно состояние фотона (за исключением отсутствующего состояния при $j = 0$). Для двух фотонов, как мы покажем, это, вообще говоря, не так.

Начнем с рассмотрения нечетных состояний. Антисимметричный тензор второго ранга, как известно, можно представить в следующем виде:

$$f_{\alpha_1\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\gamma} F_{\gamma},$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор третьего ранга и F_{γ} — некоторый вектор. Поэтому нечетные состояния можно описывать векторной волновой функцией $\mathbf{F}(\mathbf{k})$. Свойства векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{k})$ существенно, однако, отличаются от свойств векторной волновой функции одного фотона $\mathbf{f}(\mathbf{k})$. Действительно, условие поперечности (4.1.4) в применении к антисимметричному тензору $f_{\alpha_1\alpha_2}$ дает

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nu_{\beta} F_{\gamma} = 0,$$

т. е.

$$[\mathbf{v}\mathbf{F}] = 0.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{F}(\mathbf{k})$ является продольным в отличие от поперечного вектора $\mathbf{f}(\mathbf{k})$.

Согласно результатам § 3 существуют три линейно независимые векторные функции $Y_{jM}^{(\lambda)}$, отвечающие заданным значениям квантовых чисел j и M , причем две из них поперечные ($\lambda = 0, 1$), а одна продольная ($\lambda = -1$). Поэтому при данных j и M вектор \mathbf{F} имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}) = Y_{jM}^{(-1)}(\mathbf{v}). \quad (4.3.1)$$

Согласно (3.6.2) эта функция является нечетной только при четном j . Таким образом, число нечетных состояний для двух фотонов при заданных j и M , которое мы будем обозначать через $N_{jM}^{(-)}$, равно

$$N_{jM}^{(-)} = \begin{cases} 1, & j = 2n, \\ 0, & j = 2n + 1. \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Заметим, что поскольку тензорная волновая функция системы двух фотонов $f_{\alpha_1\alpha_2}$ является билинейной относительно компонент векторных функций обоих фотонов f_1 и f_2 , то из антисимметрии тензора $f_{\alpha_1\alpha_2}$ следует, что векторы f_1 и f_2 не имеют составляющих вдоль одной и той же оси. Это означает, что поляризации двух фотонов, находящихся в нечетном состоянии, взаимно перпендикулярны. Примерами нечетных систем, распадающихся на два фотона, могут служить π^0 -мезон и позитроний в основном состоянии (см. § 30.7).

Перейдем теперь к рассмотрению четных состояний. Как мы видели выше, они соответствуют значениям $s = 0, 2$. Согласно правилу сложения моментов при данных j и M и $s = 2$ имеется пять различных волновых функций, соответствующих $l = j, j \pm 1, j \pm 2$; при $s = 0$ имеется только одна волновая функция с $l = j$. Так как $\eta_P = (-1)^l$, то из этих шести функций мы должны оставить лишь те, для которых $j = 2n$. Число их равно четырем при $j = 2n$ и двум при $j = 2n + 1$ (n — целое число).

Чтобы найти число четных состояний с заданными j и M (мы будем обозначать его через $N_{jM}^{(+)}$), нужно учесть еще условие поперечности (4.1.4). Рассмотрим для этого какую-либо из тензорных волновых функций $f_{\alpha_1\alpha_2}$, соответствующих данным значениям j и M . Составим вектор $G_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta$, представляющий собой продольную компоненту волновой функции. Ясно, что вектор G , так же как и тензор $f_{\alpha_1\alpha_2}$, является собственной функцией операторов момента с теми же собственными значениями j и M . Но при данных j и M существуют три линейно независимых шаровых вектора $Y_{jM}^{(\lambda)}(\mathbf{v})$. Поэтому из шести тензорных функций $f_{\alpha_1\alpha_2}$ только у трех может быть отлична от нуля продольная составляющая, остальные же три будут удовлетворять условию поперечности. Четность первых совпадает с четностью соответствующих им шаровых векторов, так что число четных линейно независимых тензорных функций, имеющих отличную от нуля продольную составляющую, равно двум при $j = 2n$ и единице при $j = 2n + 1$. Вычитая это число из общего числа четных функций, получим число четных состояний, удовлетворяющих условию поперечности,

$$\begin{aligned} N_{jM}^{(+)} &= 2, & j = 2n, \\ N_{jM}^{(+)} &= 1, & j = 2n + 1. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Случаи $j = 0$ и $j = 1$ требуют отдельного рассмотрения. При $j = 0$ правило сложения моментов допускает лишь два состояния (оба четные): $l = 0, s = 0$ и $l = 2, s = 2$. С другой стороны, при $j = 0$ существует один шаровой вектор $Y_{00}^{(-1)}$ (четный). Это значит, что из двух тензоров $f_{\alpha_1\alpha_2}$ только один удовлетворяет условию поперечности.

Таким образом, существует только одно четное состояние системы с моментом, равным нулю. В этом случае, как нетрудно проверить, волновой функцией системы, удовлетворяющей условиям симметрии и поперечности, является функция

$$f_{\alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (v_{\alpha_1} v_{\alpha_2} - \delta_{\alpha_1\alpha_2}). \quad (4.3.4)$$

Из вида $f_{\alpha_1\alpha_2}$ можно заключить, что поляризации фотонов в этом состоянии параллельны. Действительно, пусть ось z направлена вдоль \mathbf{k} , тогда $f_{xy} = 0$.

При $j = 1$ правило сложения моментов допускает только одно четное состояние: $l = 2, s = 2$. Но соответствующая тензорная функция имеет продольную составляющую, так как из трех шаровых векторов $Y_{1M}^{(\lambda)}$ один $Y_{1M}^{(0)}$ является четным. Это значит, что четных состояний, удовлетворяющих условию поперечности, при $j = 1$ не существует. При $j = 1$ нет, согласно (4.3.2), и нечетных состояний. Поэтому система двух фотонов вообще не может находиться в состоянии с $j = 1$ и, следовательно, система, имеющая момент, равный единице, не может распадаться на два фотона.

В таблице дана классификация состояний системы двух фотонов:

i	$N_{jM}^{(+)}$	$N_{jM}^{(-)}$
0	1	1
1	0	0
2n	2	1
2n + 1	1	0

§ 5. Квантование электромагнитного поля

5.1. Операторы испускания и поглощения фотона. В предыдущих параграфах мы построили, исходя из уравнений Максвелла, волновую функцию фотона в импульсном пространстве и изучили квантовые состояния фотона. Однако, как уже указывалось в § 1.1, для общей формулировки теории электромагнитного поля и изучения различных процессов его взаимодействия с электронами удобнее пользоваться другим методом — методом вторичного квантования [9]. Этот метод заключается в том, что четырехмерный потенциал $A_\mu(x)$ (и соответственно поля $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{H}(x)$), рассматриваются не как обычные величины (c -числа), а как операторы (q -числа), подчиняющиеся определенным перестановочным соотношениям.

Эти операторы действуют на волновую функцию или вектор состояния Φ , описывающий состояние электромагнитного поля как некоторой обобщенной квантовомеханической системы. Вектор состояния Φ определяется в пространстве чисел частиц (фотонов) и не зависит от координат, функциями которых являются только операторы поля. Можно определить Φ так, чтобы он не зависел и от времени. Тогда $A_\mu(x)$ (а также \mathbf{E} и \mathbf{H}) представляют собой операторы полей в гейзенберговском представлении *).

Если представить $A_\mu(x)$ (а также \mathbf{E} и \mathbf{H}) в виде суперпозиции волн, каждая из которых удовлетворяет уравнениям Максвелла, то операторные, т. е. квантовые, свойства должны нести амплитуды этих волн.

Мы будем исходить из разложения $A_\mu(x)$ на плоские волны (1.9.1)

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^{(\lambda)} (c_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}x} + c_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}x}), \quad (5.1.1)$$

тогда q -числами будут амплитуды $c_{\mathbf{k}\lambda}$ и $c_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$.

* Систему фотонов (как и любую систему частиц, число которых может меняться при взаимодействии) можно описывать также с помощью совокупности волновых функций в импульсном или конфигурационном пространстве с переменным числом частиц. Эту совокупность функций можно связать с некоторым функционалом (функционал Фока) [10].

Условия коммутации, накладываемые на амплитуды суперпонируемых волн, должны приводить к правильной корпускулярной картине электромагнитного поля. Это значит, что энергия, импульс и проекция момента количества движения электромагнитного поля должны быть равны сумме энергий, импульсов и проекций моментов количества движения отдельных частиц, квантов электромагнитного поля — фотонов. Мы покажем, что эти условия будут выполнены, если амплитуды $c_{k\lambda}$ и $c_{k\lambda}^\dagger$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^\dagger] &= \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \\ [c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}] &= [c_{k\lambda}^\dagger, c_{k'\lambda'}^\dagger] = 0, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

где $[A, B] = AB - BA$, и в соответствии с вещественностью $A(x)$ и $A_0(x) = \frac{1}{i} A_4(x)$ предполагается, что операторы c_{kj} и c_{kj}^\dagger ($j = 1, 2, 3$), а также операторы $c_{k0} = -ic_{k4}$ и $c_{k0}^\dagger = -ic_{k4}^\dagger$ эрмитовски сопряжены.

Покажем прежде всего, что из этих соотношений, представляющих собой условия квантования электромагнитного поля, вытекает, что собственными значениями операторов $c_{kj}^\dagger c_{kj}$ ($j = 1, 2, 3$) являются целые положительные числа и нуль.

Обозначим через $\Phi_{N_{k\lambda}}$ нормированную собственную функцию оператора $\mathfrak{N}_{k\lambda} \equiv c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}$, принадлежащую собственному значению $N_{k\lambda}$,

$$c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}} = N_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}}, \quad (\Phi_{N_{k\lambda}}, \Phi_{N_{k\lambda}}) = 1,$$

где (Φ_1, Φ_2) обозначает скалярное произведение функций Φ_1 и Φ_2 . Из этого уравнения следует, что

$$N_{k\lambda} = (c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}}, \Phi_{N_{k\lambda}}) = (c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}}, c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}}),$$

т. е. $N_{k\lambda} \geq 0$.

Рассмотрим далее функцию $\Phi' = c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}}$, предполагая $N_{k\lambda} > 0$. Эта функция отлична от нуля, так как

$$c_{k\lambda}^\dagger \Phi' = c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}} = N_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}} \neq 0,$$

и удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{N}_{k\lambda} \Phi' = c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}} = (c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger - 1) c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}} = (N_{k\lambda} - 1) \Phi',$$

т. е. Φ' представляет собой собственную функцию оператора $\mathfrak{N}_{k\lambda}$, принадлежащую собственному значению $N_{k\lambda} - 1$,

$$c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}} = \gamma \Phi_{N_{k\lambda} - 1}$$

(γ — некоторая постоянная, которая будет далее определена). Аналогично можно показать, что собственными значениями оператора $\mathfrak{N}_{k\lambda}$ являются также $N_{k\lambda} - 2, N_{k\lambda} - 3, \dots$ Но такой ряд должен, очевидно, оборваться, так как собственные значения $N_{k\lambda}$ не могут быть отрицательными. Это возможно только в том случае, если $N_{k\lambda}$ представляет собой положительное целое число или нуль, $N_{k\lambda} = 0, 1, 2, \dots$

Легко видеть, что все целые числа являются собственными значениями оператора $\mathfrak{N}_{k\lambda}$. Это следует из того, что функция $\Phi'' = c_{k\lambda}^\dagger \Phi_{N_{k\lambda}}$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathfrak{N}_{k\lambda} \Phi'' = c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger \Phi_{N_{k\lambda}} = c_{k\lambda}^\dagger (1 + c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}) \Phi_{N_{k\lambda}} = (N_{k\lambda} + 1) \Phi'',$$

является собственной функцией оператора $\mathfrak{N}_{k\lambda}$, принадлежащей собственному значению $N_{k\lambda} + 1$,

$$c_{k\lambda}^{\dagger} \Phi_{N_{k\lambda}} = \gamma' \Phi_{N_{k\lambda}+1}$$

(γ' — некоторая постоянная).

Свойства функций Φ' и Φ'' позволяют определить матричные элементы операторов $c_{k\lambda}$ и $c_{k\lambda}^{\dagger}$:

$$\langle N_{k\lambda} | c_{k\lambda} | N_{k\lambda} \rangle \equiv (\Phi_{N_{k\lambda}'}', c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}}),$$

$$\langle N_{k\lambda}'' | c_{k\lambda}^{\dagger} | N_{k\lambda} \rangle \equiv (\Phi_{N_{k\lambda}''}, c_{k\lambda}^{\dagger} \Phi_{N_{k\lambda}}).$$

Легко видеть, что эти матричные элементы отличны от нуля только в том случае, если $N_{k\lambda}' = N_{k\lambda} - 1$ и $N_{k\lambda}'' = N_{k\lambda} + 1$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} N_{k\lambda} &= \langle N_{k\lambda} | c_{k\lambda}^{\dagger} c_{k\lambda} | N_{k\lambda} \rangle = \langle N_{k\lambda} | c_{k\lambda}^{\dagger} | N_{k\lambda} - 1 \rangle \langle N_{k\lambda} - 1 | c_{k\lambda} | N_{k\lambda} \rangle = \\ &= |\langle N_{k\lambda} | c_{k\lambda}^{\dagger} | N_{k\lambda} - 1 \rangle|^2 = |\langle N_{k\lambda} - 1 | c_{k\lambda} | N_{k\lambda} \rangle|^2, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \langle N_{k\lambda} - 1 | c_{k\lambda} | N_{k\lambda} \rangle &= \sqrt{N_{k\lambda}}, \\ \langle N_{k\lambda} + 1 | c_{k\lambda}^{\dagger} | N_{k\lambda} \rangle &= \sqrt{N_{k\lambda} + 1} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

(мы не учитываем при этом несущественный фазовый множитель, по модулю равный единице).

Используя эти формулы, легко убедиться, что

$$c_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}} = \sqrt{N_{k\lambda}} \Phi_{N_{k\lambda}-1}, \quad c_{k\lambda}^{\dagger} \Phi_{N_{k\lambda}} = \sqrt{N_{k\lambda} + 1} \Phi_{N_{k\lambda}+1}. \quad (5.1.4)$$

Заметим, что нахождение собственных значений оператора $\mathfrak{N}_{k\lambda}$ эквивалентно нахождению собственных значений энергии осциллятора с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2),$$

где ω — частота и q и p — координата и импульс осциллятора, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[p, q] = -i$$

(для простоты масса осциллятора предполагается равной единице). Действительно, полагая

$$c_{k\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (p + i\omega q), \quad c_{k\lambda}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (p - i\omega q),$$

мы приведем гамильтониан H к виду

$$H = \left(c_{k\lambda}^{\dagger} c_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \omega.$$

Формулы (5.1.3) и (5.1.4) относятся к $\lambda = 1, 2, 3$. При $\lambda = 4$ первое из квантовых условий (5.1.2) можно переписать в виде

$$[c_{k0}^{\dagger}, c_{k0}] = 1,$$

где $c_{k0} = -i c_{k4}$ и c_{k0}^{\dagger} — оператор, эрмитовски сопряженный по отношению к c_{k0} . Из этого условия следует, что собственными значениями оператора $c_{k0} c_{k0}^{\dagger}$ являются целые положительные числа, включая нуль,

а отличные от нуля матричные элементы операторов c_{k0} и c_{k0}^\dagger равны

$$\langle N_{k4} + 1 | c_{k0} | N_{k4} \rangle = \sqrt{N_{k4} + 1}, \quad \langle N_{k4} - 1 | c_{k0}^\dagger | N_{k4} \rangle = \sqrt{N_{k4}}.$$

Обратим внимание на то, что при переходе от $\lambda = 1, 2, 3$ к $\lambda = 4$ меняется роль операторов $c_{k\lambda}$ и $c_{k\lambda}^\dagger$: c_{k0} ведет себя не как c_{kj} ($j = 1, 2, 3$), а как c_{k3}^\dagger , а c_{k0}^\dagger — как c_{kj} .

Перейдем к нахождению возможных значений энергии и импульса электромагнитного поля. Определим с этой целью операторы, соответствующие этим величинам. В классической электродинамике, используя разложение потенциалов на плоские волны, мы выразили энергию и импульс поля через амплитуды $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^\dagger$. Представляется естественным принять полученные выражения (1.9.8) в качестве определений операторов энергии и импульса в квантовой электродинамике, понимая под $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^\dagger$ не c -числа, а операторы, подчиняющиеся перестановочным соотношениям (5.1.2). Однако при выводе (1.9.8) мы использовали соотношение (1.9.5) $c_{k3} = -ic_{k4}$, вытекающее из дополнительного условия (1.3.3), накладываемого на потенциалы, в то время как в квантовых условиях (5.1.2) операторы c_{k3} и c_{k4} являются независимыми. Если не пользоваться этим соотношением, то, как уже указывалось ранее, формально мы получим те же выражения (1.9.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \sum_{k\lambda} \omega (c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger + c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}), \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{2} \sum_{k\lambda} \mathbf{k} (c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger + c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}), \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

в которых λ будет принимать все четыре значения. Эти выражения мы и примем в качестве определений операторов энергии и импульса электромагнитного поля, понимая под $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^\dagger$ ($\lambda = 1, 2, 3, 4$) операторы, удовлетворяющие квантовым условиям (5.1.2).

Вводя в определение операторов энергии и импульса электромагнитного поля амплитуды c_{k3} и c_{k4} , соответствующие продольным и скалярным колебаниям, мы должны потребовать, чтобы эти колебания не вносили вклада в возможные значения энергии и импульса поля. В классической электродинамике это достигается дополнительным условием, накладываемым на потенциалы, в квантовой же электродинамике такое условие, как уже указывалось, несоместимо с независимостью операторов c_{k3} и c_{k4} .

Дополнительное условие для квантованного поля можно сформулировать в виде условия, накладываемого не на операторы c_{k3} и c_{k4} , а на волновые функции Φ , описывающие состояния электромагнитного поля, на которые действуют операторы $c_{k\lambda}$ и $c_{k\lambda}^\dagger$ [11]. Именно, мы будем предполагать допустимыми только такие волновые функции (или векторы состояний) Φ , в применении к которым часть оператора $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_\mu(x)$ содержащая положительные частоты, т. е. члены типа e^{ikhx} , дает нуль. Обозначая эту часть оператора $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_\mu(x)$ через $\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_\mu(x)\right)_+$, мы запишем дополнительное условие в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_\mu(x)\right)_+ \Phi = 0, \quad (5.1.6)$$

или

$$\sum_k \sqrt{\omega} (c_{k3} + ic_{k4}) e^{ikhx} \Phi = 0,$$

откуда следует, что функция Φ при всех k должна удовлетворять условиям

$$(c_{k3} + i c_{k4}) \Phi = 0, \quad (5.1.7)$$

а следовательно, и условиям

$$\Phi^* (c_{k3}^\dagger + i c_{k4}^\dagger) = 0.$$

Иными словами, функция Φ наряду с условием (5.1.6) удовлетворяет условию

$$\Phi^* \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) \right)_- = 0,$$

где $\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) \right)_-$ — часть оператора $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)$, содержащая отрицательные частоты, т. е. члены типа e^{-ikhx} .

Умножив скалярно дополнительное условие (5.1.6) слева на Φ^* , а сопряженное условие (5.1.8) справа на Φ , получим, сложив эти выражения,

$$\left(\Phi, \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) \Phi \right) \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) \right\rangle = 0, \quad (5.1.8)$$

где $\langle L \rangle = (\Phi, L \Phi)$ обозначает среднее значение оператора L в состоянии Φ .

Мы видим, что в квантовой электродинамике обращается в нуль не $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)$, чего нельзя требовать, а среднее значение оператора $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x)$ в состоянии Φ . Вследствие этого в квантовой электродинамике уравнения для тензора поля имеют вид не (1.3.7), а

$$\left(\Phi, \frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\mu\nu}(x) \Phi \right) = 0.$$

Из сформулированных выше условий следует, что

$$\left(\Phi, (c_{k3}^\dagger - i c_{k4}^\dagger) (c_{k3} + i c_{k4}) \Phi \right) + \left(\Phi, (c_{k3}^\dagger + i c_{k4}^\dagger) (c_{k3} - i c_{k4}) \Phi \right) = 0,$$

т. е.

$$\left(\Phi, (c_{k3}^\dagger c_{k3} + c_{k4}^\dagger c_{k4}) \Phi \right) = \langle c_{k3}^\dagger c_{k3} \rangle + \langle c_{k4}^\dagger c_{k4} \rangle = 0. \quad (5.1.9)$$

Благодаря соотношению (5.1.9) исчезают средние значения тех частей операторов энергии и импульса, которые связаны с продольными и скалярными колебаниями, и мы можем рассматривать только поперечные колебания. Замечая, что $c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger = c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} + 1$, и обозначая через $N_{k\lambda}$ собственные значения оператора $\mathfrak{H}_{k\lambda} = c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}$, найдем возможные значения энергии и импульса электромагнитного поля

$$\mathfrak{E} = \sum_{k; \lambda=1, 2} \omega \left(N_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad \mathfrak{P} = \sum_{k; \lambda=1, 2} \mathbf{k} \left(N_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.1.10)$$

Мы видим, что если отвлечься от несущественных бесконечных сумм $\frac{1}{2} \sum_{k; \lambda=1, 2} \omega$ и $\frac{1}{2} \sum_{k; \lambda=1, 2} \mathbf{k}^*$, то энергия и импульс поля действительно

*) Заметим, что эти суммы не имеют принципиального значения. Если переопределить выражения (5.1.5), заменив в них $\frac{1}{2} (c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger + c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda})$ на $c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda}$, то формулы (5.1.10) не будут содержать членов $\frac{1}{2} \sum_{k, \lambda} \omega$ и $\frac{1}{2} \sum_{k, \lambda} \mathbf{k}$. Такое переопределение

можно непротиворечиво провести, постулируя, что при переходе от классического гамильтониана к квантованному произведению понимаются в виде нормальных произведений (см. ниже, § 6.2).

выражаются в виде суммы энергий и импульсов отдельных частиц — фотонов, причем целое число $N_{k\lambda}$ — собственное значение оператора $\mathfrak{N}_{k\lambda}$ — представляет собой число фотонов с импульсом k и поляризацией λ ($\lambda = 1, 2$).

Выражения (5.1.10) показывают, что состояния, в которых величины $\mathfrak{N}_{k\lambda}$ имеют определенные значения, являются состояниями поля с определенными значениями энергии и импульса. Это связано с тем, что амплитуды $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^+$ представляют собой коэффициенты разложения по плоским волнам, т. е. по состояниям фотона с определенным импульсом.

Формулы (5.1.10) показывают, что энергия поля имеет наименьшее значение, когда числа фотонов равны нулю. Это наимизшее энергетическое состояние поля называется состоянием *вакуума электромагнитного поля*.

Показав, что условия квантования (5.1.2) правильно описывают корпускулярные свойства электромагнитного поля, мы можем теперь выяснить физический смысл операторов $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^+$.

Пусть электромагнитное поле содержит $N_{k\lambda}$ фотонов с импульсом k и поляризацией λ . Если $\Phi_{N_{k\lambda}}$ обозначает волновую функцию, описывающую состояние поля, то, согласно (5.1.4), действие $c_{k\lambda}^+$ сводится к увеличению числа фотонов $N_{k\lambda}$ на единицу, а действие $c_{k\lambda}$ — к уменьшению этого числа на единицу. Поэтому можно сказать, что $c_{k\lambda}^+$ представляет собой *оператор испускания* фотона с импульсом k и поляризацией λ ($\lambda = 1, 2, 3$), а $c_{k\lambda}$ — *оператор поглощения* такого же фотона.

При $\lambda = 4$ роли $c_{k\lambda}$ и $c_{k\lambda}^+$, как уже ранее отмечалось, меняются: c_{k0} представляет собой оператор испускания, а c_{k0}^+ — оператор поглощения «скалярного фотона».

Разложение (5.1.1) является не единственным видом разложения операторов поля. Можно исходить также из разложения $A_\mu(x)$ на сферические волны $A_{\omega j M}^{(\lambda)}(x)$, описывающие состояния фотона с определенными моментом и четностью (см. § 3)

$$A(x) = \sum_{\omega j M \lambda} (c_{\omega j M \lambda} A_{\omega j M}^{(\lambda)}(x) + c_{\omega j M \lambda}^+ A_{\omega j M}^{(\lambda)*}(x)). \quad (5.1.11)$$

В этом случае q -числами являются амплитуды $c_{\omega j M \lambda}$ и $c_{\omega j M \lambda}^+$.

Соответствующие перестановочные соотношения для амплитуд $c_{\omega j M \lambda}$ имеют вид

$$\begin{aligned} [c_{\omega j M \lambda}, c_{\omega' j' M' \lambda'}^+] &= \delta_{\omega\omega'} \delta_{jj'} \delta_{MM'} \delta_{\lambda\lambda'}, \\ [c_{\omega j M \lambda}, c_{\omega' j' M' \lambda'}] &= [c_{\omega j M \lambda}^+, c_{\omega' j' M' \lambda'}^+] = 0. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Так как условия коммутации для операторов $c_{\omega j M \lambda}$ не отличаются от условий коммутации для операторов $c_{k\lambda}$, то собственными значениями оператора $\mathfrak{N}_{\omega j M \lambda} = c_{\omega j M \lambda}^+ c_{\omega j M \lambda}$, так же как и оператора $\mathfrak{N}_{k\lambda}$, являются целые положительные числа и нуль.

Легко видеть, что состояния, в которых величины $\mathfrak{N}_{\omega j M \lambda}$ (а не $\mathfrak{N}_{k\lambda}$) имеют определенные значения, являются состояниями поля с определенными значениями энергии и проекции момента на некоторую ось (ось z). Действительно, воспользовавшись разложением потенциалов на сферические волны (5.7.2), можно выразить энергию и проекцию момента (на ось z) через амплитуды $c_{\omega j M \lambda}$ и $c_{\omega j M \lambda}^+$:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\omega j M \lambda} \omega (c_{\omega j M \lambda}^+ c_{\omega j M \lambda} + c_{\omega j M \lambda} c_{\omega j M \lambda}^+), \\ M_3 &= \frac{1}{2} \sum_{\omega j M \lambda} M (c_{\omega j M \lambda}^+ c_{\omega j M \lambda} + c_{\omega j M \lambda} c_{\omega j M \lambda}^+). \end{aligned}$$

Эти формулы, если считать в них $c_{\omega j M \lambda}$ и $c_{\omega j M \lambda}^+$ операторами, подчиняющимися перестановочным соотношениям (5.1.12), определяют операторы энергии и проекции момента количества движения поля, выраженные через операторы $c_{\omega j M \lambda}$, $c_{\omega j M \lambda}^+$.

Мы видим, что состояния поля, которым соответствуют определенные значения величин $\mathfrak{N}_{\omega j M \lambda}$, являются состояниями с определенными значениями энергии и проекции момента количества движения поля

$$\mathcal{E} = \sum_{\omega j M \lambda} \omega \left(N_{\omega j M \lambda} + \frac{1}{2} \right),$$

$$\mathcal{M}_3 = \sum_{\omega j M \lambda} M \left(N_{\omega j M \lambda} + \frac{1}{2} \right),$$

где $N_{\omega j M \lambda}$ — собственное значение оператора $\mathfrak{N}_{\omega j M \lambda}$; оно представляет собой число фотонов с частотой ω , моментом j , проекцией момента M и четностью λ .

5.2. Использование индефинитной метрики. Вакуум электромагнитного поля представляет собой такое состояние поля, в котором отсутствуют поперечные фотоны, $N_{k\lambda} = 0$ ($\lambda = 1, 2$). Что же касается продольных и скалярных «фотонов», то числа их N_{k3} и N_{k4} всегда отличны от нуля. Действительно, рассмотрим волновую функцию (вектор состояния) Ψ , которая описывает продольные и скалярные степени свободы поля. Эту функцию можно, очевидно, представить в виде

$$\Psi = \sum_{N_3 N_4} d(N_3, N_4) \Phi_{N_3 N_4},$$

где функция $\Phi_{N_3 N_4}$ описывает состояние поля с определенными числами продольных (N_3) и скалярных (N_4) фотонов и $d(N_3, N_4)$ — численные коэффициенты (мы пользуемся здесь вместо N_{k3} и N_{k4} обозначениями N_3 и N_4). Подставив это выражение в (5.1.6) и воспользовавшись (5.1.4), получим

$$\sum_{N_3 N_4} d(N_3, N_4) \{ \sqrt{N_3} \Phi_{N_3-1, N_4} - \sqrt{N_4+1} \Phi_{N_3, N_4+1} \} = 0.$$

Сделаем в первом слагаемом замену $N_3 - 1 \rightarrow N_3$, а во втором — замену $N_4 + 1 \rightarrow N_4$, перепишем это соотношение в виде

$$\sum_{\substack{N_3 \geq 0 \\ N_4 \geq 0}} d(N_3 + 1, N_4) \sqrt{N_3 + 1} \Phi_{N_3 N_4} - \sum_{\substack{N_3 \geq 0 \\ N_4 \geq 1}} d(N_3, N_4 - 1) \sqrt{N_4} \Phi_{N_3 N_4} = 0,$$

из которого следует, что величины $d(N_3, N_4)$ удовлетворяют разностному уравнению

$$d(N_3 + 1, N_4) \sqrt{N_3 + 1} = d(N_3, N_4 - 1) \sqrt{N_4}, \quad N_3 \geq 0, \quad N_4 \geq 1$$

и краевому условию $d(N_3, 0) = 0$, $N_3 \geq 1$. Полагая далее

$$d(N_3, N_4) = \sqrt{\frac{N_4!}{N_3!}} b(N_3, N_4),$$

получим

$$b(N_3 + 1, N_4) = b(N_3, N_4 - 1),$$

откуда следует, что $b(N_3, N_4)$ зависит только от разности $N_3 - N_4$.

Используя, наконец, краевое условие, найдем общий вид $d(N_3, N_4)$

$$d(N_3, N_4) = \begin{cases} \sqrt{\frac{N_4!}{N_3!}} f(N_4 - N_3), & N_4 \geq N_3, \\ 0, & N_4 < N_3, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

где $f(N)$ — произвольная функция целого неотрицательного числа.

Мы видим, что возможны различные состояния поля продольных и скалярных колебаний, однако не существует состояния, в котором числа продольных и скалярных фотонов равнялись бы нулю. При этом, как следует из (5.2.1), волновая функция Ψ , описывающая продольные и скалярные колебания поля, не может быть нормирована, так как

$$\sum_{N_3 N_4} |d(N_3, N_4)|^2 = \infty.$$

Эта трудность является однако чисто формальной, так как продольные и скалярные фотоны не имеют физического смысла для свободного электромагнитного поля, и связана с различной ролью операторов c_{hj} ($j = 1, 2, 3$) и $c_{h0} = -ic_{h4}$: в то время как первые представляют собой операторы поглощения, c_{h0} являются оператором испускания скалярного фотона.

Мы покажем теперь, что можно изменить интерпретацию операторов $c_{h0} = -ic_{h4}$ и $c_{h0}^{\dagger} = -ic_{h4}^{\dagger}$ и рассматривать c_{h0} как оператор поглощения, а c_{h0}^{\dagger} — как оператор испускания скалярного фотона, если при описании скалярных колебаний исходить не из обычного, а из обобщенного определения скалярного произведения волновых функций (или векторов состояний) Ψ , допускающего как положительную, так и отрицательную норму [12].

Обобщенное определение скалярного произведения двух векторов состояния Ψ_1 и Ψ_2 (описывающих скалярные колебания), из которого мы будем исходить, имеет вид [13]

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \Psi_1^* \eta \Psi_2 dt \quad (5.2.2)$$

и содержит некоторый в общем произвольный оператор η , который можно назвать метрическим (Ψ^* — функция, комплексно-сопряженная с Ψ ; интегрирование производится по всем переменным, от которых зависит Ψ). При $\eta = 1$ мы получаем обычное определение скалярного произведения; в общем же случае (5.2.2) может, очевидно, приводить как к положительной, так и отрицательной норме (Ψ, Ψ) вектора Ψ . Поэтому говорят, что определение (5.2.2) соответствует *индефинитной метрике* в гильбертовом пространстве.

Изменив определение скалярного произведения, мы формально сохраняем определение эрмитовского сопряжения операторов: оператором, эрмитовски сопряженным с оператором L , называется такой оператор L^+ , для которого

$$(L^+ \Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_1, L \Psi_2). \quad (5.2.3)$$

Средние значения операторов, соответствующих физическим величинам, в любых состояниях должны быть, очевидно, вещественными

$$(\Psi, L \Psi) = (\Psi, L \Psi)^*.$$

Легко убедиться, что это условие выполняется в случае эрмитовских метрических операторов η , если оператор L является самосопряженным (в смысле (5.2.3)):

$$L = L^+.$$

Вернемся теперь к квантованию электромагнитного поля. Мы будем по-прежнему исходить из условий квантования

$$\begin{aligned} [c_{kj}, c_{k'j}^{\dagger}] &= 1, \quad j = 1, 2, 3, \\ [c_{k0}, c_{k'0}^{\dagger}] &= -1, \end{aligned}$$

где $c_{k0} = -ic_{k4}$, $c_{k'0}^{\dagger} = -ic_{k'4}^{\dagger}$ и $c_{k\lambda}^{\dagger}$ — оператор, эрмитовски сопряженный с оператором $c_{k\lambda}$ в обобщенном смысле. Однако, в отличие от предыдущего, мы будем теперь считать все операторы $c_{k\lambda}$ операторами поглощения и все операторы $c_{k\lambda}^{\dagger}$ — операторами испускания фотонов. Это значит, что мы предполагаем справедливыми соотношения

$$c_{k\lambda}\Phi_0 = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3, 0, \quad (5.2.4)$$

где Φ_0 — вектор состояния вакуума электромагнитного поля. Этот вектор предполагается нормированным на единицу:

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1.$$

Если на вектор состояния вакуума подействовать оператором $c_{k\lambda}^{\dagger}$, то мы получим состояние поля, в котором содержится только один фотон с импульсом k и поляризацией λ :

$$\Phi_{1k\lambda} = c_{k\lambda}^{\dagger}\Phi_0.$$

Легко видеть, что эти соотношения при $\lambda = 0$ непосредственно приводят к индефинитной метрике для скалярных фотонов. Действительно, определим норму вектора состояния поля, содержащего один скалярный фотон,

$$(\Phi_{1k0}, \Phi_{1k0}) = (c_{k0}^{\dagger}\Phi_0, c_{k0}^{\dagger}\Phi_0).$$

Используя определение эрмитовского сопряжения (5.2.3), перестановочные соотношения для $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^{\dagger}$ и условие нормировки Φ_0 , получим

$$(c_{k0}^{\dagger}\Phi_0, c_{k0}^{\dagger}\Phi_0) = (\Phi_0, c_{k0}c_{k0}^{\dagger}\Phi_0) = -1.$$

Таким образом,

$$(\Phi_{1k0}, \Phi_{1k0}) = -1,$$

т. е. норма вектора Φ_{1k0} отрицательна.

Аналогично можно представить вектор состояния поля, содержащего $N_{k\lambda}$ фотонов с импульсом k и поляризацией λ в виде

$$\Phi_{N_{k\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{N_{k\lambda}!}} (c_{k\lambda}^{\dagger})^{N_{k\lambda}} \Phi_0. \quad (5.2.5)$$

Эти векторы удовлетворяют, как легко убедиться, условиям нормировки

$$\begin{aligned} (\Phi_{N_{k\lambda}}, \Phi_{N_{k\lambda}}) &= 1, \quad \lambda = 1, 2, 3, \\ (\Phi_{N_{k0}}, \Phi_{N_{k0}}) &= (-1)^{N_{k0}}. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Подействовав на $\Phi_{N_{k\lambda}}$ операторами $c_{k\lambda}$ и $c_{k\lambda}^{\dagger}$ и используя перестановочные соотношения для $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^{\dagger}$, получим

$$\begin{aligned} c_{k\lambda}\Phi_{N_{k\lambda}} &= \sqrt{N_{k\lambda}}\Phi_{N_{k\lambda}-1}, \quad c_{k\lambda}^{\dagger}\Phi_{N_{k\lambda}} = \sqrt{N_{k\lambda}+1}\Phi_{N_{k\lambda}+1}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \\ c_{k0}\Phi_{N_{k0}} &= -\sqrt{N_{k0}}\Phi_{N_{k0}-1}, \quad c_{k0}^{\dagger}\Phi_{N_{k0}} = \sqrt{N_{k0}+1}\Phi_{N_{k0}+1}. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Мы видим, что $c_{\lambda\lambda}$ представляют собой операторы поглощения, а $c_{\bar{k}\lambda}$ — операторы испускания фотонов. Отсюда далее следует, что

$$c_{\bar{k}0}^{\dagger} c_{k0} \Phi_{N_{k0}} = -N_{k0} \Phi_{N_{k0}},$$

т. е. собственные значения оператора $c_{\bar{k}0}^{\dagger} c_{k0}$ равны $-N_{k0} = 0, -1, -2, \dots$ (собственные значения оператора $c_{\bar{k}4}^{\dagger} c_{k4}$ равны $N_{k0} = 0, 1, 2, \dots$).

Используя разложение (5.1.1) и соотношения (5.2.7), легко определить матричные элементы оператора $A_{\mu}(x)$, соответствующие поглощению и испусканию фотона с импульсом k и поляризацией λ ,

$$\begin{aligned} \langle 0_{k\lambda} | A_{\mu}(x) | 1_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_{\mu}^{(\lambda)} e^{ikhx}, \\ \langle 1_{k\lambda} | A_{\mu}(x) | 0_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_{\mu}^{(\lambda)*} e^{-ikhx} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

(во второй формуле над $e_{\mu}^{(\lambda)}$ поставлен знак комплексного сопряжения, чтобы формулами можно было пользоваться не только в случае линейной, но и в случае круговой поляризации).

Аналогичные формулы для матричных элементов оператора $A(x)$, соответствующих поглощению и испусканию фотона в состоянии ω, j, M, λ , имеют вид

$$\begin{aligned} \langle 0_{\omega j M \lambda} | A(x) | 1_{\omega j M \lambda} \rangle &= A_{\omega j M}^{(\lambda)}(x), \\ \langle 1_{\omega j M \lambda} | A(x) | 0_{\omega j M \lambda} \rangle &= A_{\omega j M}^{(\lambda)*}(x)^*, \end{aligned}$$

где потенциалы $A_{\omega j M}^{(\lambda)}(x)$ определяются формулами (3.8.6) и (3.8.7).

Выше мы видели, что векторы состояний электромагнитного поля Φ удовлетворяют дополнительному условию

$$\left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\mu}} \right)_{+} \Phi = 0,$$

или

$$(c_{k3} - c_{k0}) \Phi = 0. \quad (5.2.9)$$

Выясним теперь, какой вид имеют допустимые функции Φ , если при описании скалярных «фотонов» пользоваться индефинитной метрикой.

Заметим предварительно, что

$$[c_{k3} - c_{k0}, c_{\bar{k}3}^{\dagger} - c_{\bar{k}0}^{\dagger}] = 0,$$

и, следовательно, $c_{k3} - c_{k0}$ коммутирует с оператором

$$U_g = \exp i \left\{ \sum_{k, n} [\alpha_n(k) (c_{\bar{k}3}^{\dagger} - c_{\bar{k}0}^{\dagger})^n + \alpha_n^*(k) (c_{k3} - c_{k0})^n] \right\}, \quad (5.2.10)$$

где $\alpha_n(k)$ — произвольные функции k и $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$[(c_{k3} - c_{k0}), U_g] = 0.$$

Поэтому, если вектор состояния Φ удовлетворяет условию (5.2.9), то вектор состояния

$$\Phi' = U_g \Phi \quad (5.2.11)$$

также будет удовлетворять условию (5.2.9). Переход от вектора состояния Φ к вектору состояния Φ' , не меняющий поля поперечных фотонов, представляет собой калибровочное преобразование вектора состояния. Оператор U_g , осуществляющий это преобразование, может быть назван

оператором калибровочного преобразования. Он является, очевидно, унитарным,

$$U_g^+ U_g = I,$$

и не меняет поэтому нормы вектора Φ ,

$$(\Phi', \Phi') = (\Phi, \Phi).$$

Подвергнув калибровочному преобразованию вектор Φ_0 , получим общее выражение для вектора состояния вакуума электромагнитного поля

$$\Phi'_0 = U_g \Phi_0.$$

Этот вектор, как и всякий допустимый вектор состояния поля, удовлетворяет условию (5.2 9), но не удовлетворяет соотношениям $c_{k\lambda} \Phi_0 = 0$, которые справедливы только при специальной калибровке потенциалов электромагнитного поля, соответствующей равенству нулю всех чисел фотонов, $N_{k\lambda} = 0$, $\lambda = 1, 2, 3, 0$ (напомним, что в теории, не использующей индефинитной метрики, такое состояние поля невозможно).

Поддействовав на вектор состояния вакуума Φ'_0 оператором $(c_{k\lambda}^\dagger)^{N_{k\lambda}}$, где $\lambda = 1, 2$, получим вектор состояния поля $\Phi_{N_{k\lambda}}$, содержащего $N_{k\lambda}$ поперечных фотонов с импульсом k и поляризацией λ ($\lambda = 1, 2$),

$$\Phi_{N_{k\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{N_{k\lambda}}} (c_{k\lambda}^\dagger)^{N_{k\lambda}} \Phi'_0. \quad (5.2.12)$$

При этом поле может содержать произвольное число продольных и скалярных фотонов.

Векторы $\Phi_{N_{k\lambda}}$ образуют, очевидно, ортонормированную систему векторов

$$(\Phi_{N_{k\lambda}}, \Phi_{N_{k'\lambda'}}) = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Образовав суперпозицию этих векторов, мы получим любой допустимый вектор состояния поля

$$\Phi = \sum_{k, \lambda=1,2} \alpha_{k\lambda} \Phi_{N_{k\lambda}},$$

где $\alpha_{k\lambda}$ — произвольные коэффициенты, удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{k, \lambda} |\alpha_{k\lambda}|^2 = 1,$$

если вектор Φ нормирован согласно условию

$$(\Phi, \Phi) = 1.$$

Мы видим, таким образом, что при использовании индефинитной метрики не возникает трудности с нормировкой Φ

Калибровочному преобразованию вектора состояния Φ соответствует определенное преобразование оператора потенциала $A_\mu(x)$. Если $A'_\mu(x)$ обозначает преобразованный потенциал, то должно, очевидно, выполняться соотношение

$$A'_\mu(x) \Phi' = U_g (A_\mu(x) \Phi),$$

откуда

$$A'_\mu(x) = U_g A_\mu(x) U_g^{-1} \quad (5.2.13)$$

Так как U_g — унитарный оператор, то операторы $A'_\mu(x)$ удовлетворяют, как и следовало ожидать, тем же перестановочным соотношениям, что и операторы $A_\mu(x)$.

Подобно $A_\mu(x)$ преобразуются при калибровочном преобразовании и другие операторы L

$$L' = U_g L U_g^{-1}.$$

В частности, если L — калибровочно инвариантный оператор, то $L' = L$, т. е.

$$[L, U_g] = 0.$$

Это условие выполняется, если L коммутирует с $c_{k3} - c_{k0}$,

$$[L, c_{k3} - c_{k0}] = 0.$$

Покажем, что градиентному преобразованию потенциалов (5.2.13) можно придать обычную форму

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \chi(x),$$

где $\chi(x)$ — некоторый оператор. Перепишем для этого (5.2.13) в виде

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + [U_g, A_\mu(x)] U_g^{-1}$$

и подставим в коммутатор разложение $A_\mu(x)$ на плоские волны. Вводя обозначения

$$\beta_k = c_{k3} e_\mu^{(3)} + i c_{k0} e_\mu^{(4)}, \quad \beta_k^\dagger = c_{k3}^\dagger e_\mu^{(3)} + i c_{k0}^\dagger e_\mu^{(4)}$$

и замечая, что

$$\beta_k = (c_{k3} - c_{k0}) e_\mu^{(3)} + c_{k0} (e_\mu^{(3)} + i e_\mu^{(4)}) = (c_{k3} - c_{k0}) e_\mu^{(3)} + \frac{k_\mu}{\omega} c_{k0},$$

имеем

$$[U_g, \beta_k] = \frac{k_\mu}{\omega} [U_g, c_{k0}], \quad [U_g, \beta_k^\dagger] = \frac{k_\mu}{\omega} [U_g, c_{k0}^\dagger].$$

Поэтому

$$[U_g, A_\mu(x)] U_g^{-1} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{k_\mu}{\omega \sqrt{2\omega}} [U_g, c_{k0} e^{ikx} + c_{k0}^\dagger e^{-ikx}] U_g^{-1}.$$

Приравняв это выражение $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \chi(x)$, найдем $\chi(x)$:

$$\chi(x) = [U_g, B] U_g^{-1},$$

где

$$B = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} (c_{k0}^\dagger e^{-ikx} - c_{k0} e^{ikx}).$$

Мы видим, что $\chi(x)$ представляет собой, вообще говоря, не c -число, а оператор, удовлетворяющий как функция координат и времени уравнению

$$\square \chi(x) = 0.$$

Только в специальном случае

$$U_g = \exp i \sum_k \{ \alpha(k) (c_{k3}^\dagger - c_{k0}^\dagger) + \alpha^*(k) (c_{k3} - c_{k0}) \},$$

когда справедливы соотношения

$$[U_g, c_{k0}] U_g^{-1} = -i \alpha(k), \quad [U_g, c_{k0}^\dagger] U_g^{-1} = i \alpha^*(k),$$

$\chi(x)$ будет c -числом,

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} \{ \alpha(k) e^{ikx} + \alpha^*(k) e^{-ikx} \}$$

Заметим в заключение этого раздела, что операторы \mathbf{H} и \mathbf{P} , определяемые формулами (5.1.5), не коммутируют с $\mathbf{c}_{k3} - \mathbf{c}_{k0}$, т. е. не являются градиентно инвариантными. С этим связано то, что векторы состояний поля Φ , определяемые формулой (5.2.12), не являются собственными векторами оператора \mathbf{H} . Действительно, можно убедиться, что

$$\mathbf{H}\Phi = \mathcal{E}\Phi + \Psi,$$

где \mathcal{E} — энергия поля и Ψ — вектор, имеющий структуру

$$\Psi = \sum_k (\mathbf{c}_{k3}^{\dagger} - \mathbf{c}_{k0}^{\dagger}) \varphi_k.$$

Этот вектор, очевидно, ортогонален Φ ,

$$(\Psi, \Phi) = \left(\sum_k (\mathbf{c}_{k3}^{\dagger} - \mathbf{c}_{k0}^{\dagger}) \varphi_k, \Phi \right) = \sum_k (\varphi_k, (\mathbf{c}_{k3} - \mathbf{c}_{k0}) \Phi) = 0,$$

и поэтому средние значения \mathbf{H} совпадают с возможными значениями энергии поля

$$(\Phi, \mathbf{H}\Phi) = \mathcal{E}.$$

5.3. Перестановочные соотношения для потенциалов и компонент электромагнитного поля. Зная квантовые условия для $\mathbf{c}_{k\lambda}$ и $\mathbf{c}_{k\lambda}^{\dagger}$, можно установить перестановочные соотношения, которым должны удовлетворять операторы потенциалов и компонент поля.

Вычислим прежде всего коммутатор потенциалов $[\mathbf{A}_{\mu}(x), \mathbf{A}_{\nu}(x')]$. Воспользуемся для этого разложением (5.1.1):

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{\mu}(x), \mathbf{A}_{\nu}(x')] &= \frac{1}{2V} \sum_{k, \lambda; k', \lambda'} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \{ [\mathbf{c}_{k\lambda}, \mathbf{c}_{k'\lambda'}] \times \\ &\times e^{i(kx+k'x')} + [\mathbf{c}_{k\lambda}, \mathbf{c}_{k'\lambda'}^{\dagger}] e^{i(kx-k'x')} + [\mathbf{c}_{k\lambda}^{\dagger}, \mathbf{c}_{k'\lambda'}] \times \\ &\times e^{-i(kx-k'x')} + [\mathbf{c}_{k\lambda}^{\dagger}, \mathbf{c}_{k'\lambda'}^{\dagger}] e^{-i(kx+k'x')} \} e_{\mu}^{(\lambda)} e_{\nu}^{(\lambda')}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (5.1.2) и (1.9.4), получим

$$[\mathbf{A}_{\mu}(x), \mathbf{A}_{\nu}(x')] = \frac{1}{2V} \sum_k \frac{1}{\omega} \{ e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')} \} \delta_{\mu\nu}.$$

Переходя далее от суммирования по \mathbf{k} к интегрированию в \mathbf{k} -пространстве согласно формуле

$$\sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{k}) d^3k,$$

получим окончательно [14]

$$[\mathbf{A}_{\mu}(x), \mathbf{A}_{\nu}(x')] = -iD_0(x-x') \delta_{\mu\nu}, \quad (5.3.1)$$

где

$$D_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikr} \frac{\sin \omega t}{\omega} d^3k. \quad (5.3.2)$$

Легко видеть, что функция $D_0(x)$ инвариантна относительно преобразований Лоренца. Действительно, функцию $D_0(x)$ можно представить в виде

$$D_0(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{ikh} \operatorname{sgn} k_0 \delta(k^2) d^4k, \quad (5.3.3)$$

где $d^4k = dk_1 dk_2 dk_3 dk_0$. Релятивистская инвариантность всех множителей под знаком интеграла, кроме $\operatorname{sgn} k_0$, очевидна. Но $\operatorname{sgn} k_0$ также представ-

ляет собой релятивистский инвариант, так как благодаря наличию в (5.3.3) δ -функции выполняется условие $k^2 = 0$, т. е. $k_0 = \pm |\mathbf{k}|$, а знак частоты релятивистски инвариантен. Это свойство функции $D_0(x)$ показывает, что квантовые условия (5.3.1) инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Из (5.3.2) следует, что

$$D_0(x) \equiv D_0(\mathbf{r}, t) = D_0(-\mathbf{r}, t) = -D_0(\mathbf{r}, -t). \quad (5.3.4)$$

Выполнив в (5.3.2) интегрирование по углу между векторами \mathbf{k} и \mathbf{r} , получим

$$\begin{aligned} D_0(x) &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^\infty \{e^{i\omega(r-t)} + e^{-i\omega(r-t)} - e^{i\omega(r+t)} - e^{-i\omega(r+t)}\} d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi r} \{\delta(r-t) - \delta(r+t)\}, \end{aligned}$$

т.е.

$$D_0(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(r^2 - t^2) \operatorname{sgn} t. \quad (5.3.5)$$

Это выражение показывает, что функция $D_0(x)$ отлична от нуля только на световом конусе $r^2 - t^2 = 0$ и имеет на нем δ -образную особенность.

Из интегрального представления (5.3.2) следует, что $D_0(x)$ представляет собой сингулярное решение уравнения

$$\square D_0(x) = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$D(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} D(x) \Big|_{t=0} = \delta(\mathbf{r}). \quad (5.3.6)$$

Используя (5.3.1), можно найти перестановочные соотношения между компонентами потенциала и их производными по координатам и времени. В частности, дифференцируя (5.3.1) по t' и полагая затем $t' = t$, получим

$$\left[\mathbf{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_\nu(\mathbf{r}', t) \right] = i \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.3.7)$$

Дифференцируя (5.3.1) по x и x' и используя определение тензора поля, легко получить перестановочные соотношения для компонент поля

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_{\mu\nu}(x), \mathbf{F}_{\mu'\nu'}(x')] &= i \left\{ \delta_{\nu\nu'} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_{\mu'}} - \delta_{\nu\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_{\nu'}} - \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\mu\nu'} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x'_{\mu'}} + \delta_{\mu\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x'_{\nu'}} \right\} D_0(x - x'), \end{aligned}$$

откуда

$$[\mathbf{E}_j(x), \mathbf{E}_l(x')] = [\mathbf{H}_j(x), \mathbf{H}_l(x')] = i \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x'_l} - \delta_{jl} \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} \right\} D_0(x - x'), \quad (5.3.8)$$

$$[\mathbf{E}_j(x), \mathbf{H}_l(x')] = i \varepsilon_{jlk} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_k} D_0(x - x'), \quad j, l, k = 1, 2, 3,$$

где ε_{jlk} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Мы видим, что компоненты поля могут не коммутировать друг с другом только в том случае, если соответствующие пространственно-временные точки лежат на световом конусе $(x - x')^2 = 0$.

Перестановочные соотношения допускают, как известно, следующую физическую интерпретацию. Если операторы \mathbf{A} и \mathbf{B} , соответствующие некоторым физическим величинам A и B системы, не коммутируют между собой

и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[A, B] = K, \quad K \neq 0,$$

то не существует состояний системы, в которых величины A и B имеют определенные значения, причем неопределенности при их одновременном измерении связаны между собой соотношением

$$\Delta A \Delta B \geq |K|.$$

Используя (5.3.8), можно получить соотношения неопределенности для электрического и магнитного полей и установить предельные точности их одновременного измерения. Физический смысл имеют при этом соотношения для полей, усредненных по некоторым пространственно-временным областям. Можно показать, что такие усредненные значения компонент поля коммутируют между собой, если совпадают временные или пространственные интервалы усреднения. В частности, коммутируют значения полей, усредненные по одной и той же пространственно-временной области. Если же области усреднения хотя бы частично могут быть связаны световыми сигналами, то усредненные поля не коммутируют друг с другом [15,16].

§ 6. Сингулярные функции, связанные с волновыми полями

6.1. Вакуумные средние произведений операторов электромагнитного поля. Перестановочные соотношения для операторов испускания и поглощения фотонов полностью определяют алгебру операторов электромагнитного поля и позволяют в принципе находить средние значения различных функций от этих операторов в различных состояниях электромагнитного поля. Особый интерес представляют средние значения в состоянии вакуума произведений операторов потенциалов электромагнитного поля. При этом среднее значение произведения произвольного числа операторов потенциалов может быть выражено через средние значения произведений только двух таких операторов (см. § 16.5). Поэтому мы рассмотрим сейчас средние значения в состоянии вакуума различных произведений двух операторов потенциалов электромагнитного поля.

Так как потенциалы поля являются линейными функциями операторов испускания и поглощения фотонов, то прежде всего нужно определить средние значения в состоянии вакуума произведений этих операторов.

В состоянии вакуума числа поперечных фотонов равны нулю, поэтому

$$\langle c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} \rangle_0 = 0, \quad \langle c_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger \rangle_0 = 1, \quad \lambda = 1, 2,$$

где $\langle L \rangle_0$ обозначает среднее значение операторов L в состоянии вакуума. Для этих поляризаций справедливы, очевидно, также соотношения

$$\langle c_{k\lambda} c_{k'\lambda'}^\dagger \rangle_0 = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \\ \langle c_{k\lambda}^\dagger c_{k'\lambda'} \rangle_0 = \langle c_{k\lambda} c_{k'\lambda'} \rangle_0 = \langle c_{k\lambda}^\dagger c_{k'\lambda'}^\dagger \rangle_0 = 0, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2.$$

Что касается продольной и скалярной поляризаций, то при калибровке потенциалов, которой соответствует определение вакуума (5.2.4), числа продольных и скалярных фотонов в состоянии вакуума также будут равны нулю. Пользуясь этим определением вакуума, мы можем, следовательно, написать общие соотношения

$$\langle c_{k\lambda} c_{k'\lambda'}^\dagger \rangle_0 = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \\ \langle c_{k\lambda}^\dagger c_{k'\lambda'} \rangle_0 = \langle c_{k\lambda} c_{k'\lambda'} \rangle_0 = \langle c_{k\lambda}^\dagger c_{k'\lambda'}^\dagger \rangle_0 = 0, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2, 3, 4. \quad (6.1.1)$$

Соотношения (6.1.1) позволяют определить среднее значение произведения операторов $\mathbf{A}_\mu(x)$ и $\mathbf{A}_\nu(x')$ в состоянии вакуума. Действительно, используя их и разложение потенциалов на плоские волны (5.1.1), имеем

$$\langle \mathbf{A}_\mu(x) \mathbf{A}_\nu(x') \rangle_0 = \frac{1}{2V} \sum_{\kappa \lambda \lambda'} \frac{1}{\omega} e^{i\kappa(x-x')} e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda')} \delta_{\lambda \lambda'}.$$

Замечая, что $e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu}$, и переходя от суммирования к интегрированию по \mathbf{k} , получим окончательно

$$\langle \mathbf{A}_\mu(x) \mathbf{A}_\nu(x') \rangle_0 \equiv \langle 0 | \mathbf{A}_\mu(x) \mathbf{A}_\nu(x') | 0 \rangle = D_+(x-x') \delta_{\mu\nu}, \quad (6.1.2)$$

где

$$D_+(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{i\kappa x} \frac{d^3\kappa}{\omega}, \quad \omega = |\mathbf{k}|. \quad (6.1.3)$$

Переставив в (6.1.2) местами $\mathbf{A}_\mu(x)$ и $\mathbf{A}_\nu(x')$, получим

$$\langle \mathbf{A}_\nu(x') \mathbf{A}_\mu(x) \rangle_0 = D_-(x-x') \delta_{\mu\nu},$$

где

$$D_-(x) = D_+(-x) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{-i\kappa x} \frac{d^3\kappa}{\omega}. \quad (6.1.4)$$

Сложив это выражение с (6.1.2), найдем среднее значение в состоянии вакуума антикоммутиатора потенциалов

$$\langle 0 | \{ \mathbf{A}_\mu(x), \mathbf{A}_\nu(x') \} | 0 \rangle = D_1(x-x') \delta_{\mu\nu}, \quad (6.1.5)$$

где

$$D_1(x) = D_+(x) + D_-(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}r} \frac{\cos \omega t}{\omega} d^3\kappa. \quad (6.1.6)$$

Выполнив интегрирование по углу между \mathbf{k} и \mathbf{r} , получим

$$D_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{ir} \int_0^\infty \{ e^{i\omega(r+t)} - e^{-i\omega(r+t)} + e^{i\omega(r-t)} - e^{-i\omega(r-t)} \} d\omega,$$

откуда

$$D_1(x) = \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{x^2}. \quad (6.1.7)$$

Сравнение определений функций $D_+(x)$ (6.1.3), $D_-(x)$ (6.1.4), $D_1(x)$ (6.1.6) и $D_0(x)$ (5.3.2) показывает, что

$$\begin{aligned} D_0(x) &= i(D_+(x) - D_-(x)), \\ D_+(x) &= \frac{1}{2}(D_1(x) - iD_0(x)), \\ D_-(x) &= \frac{1}{2}(D_1(x) + iD_0(x)). \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Подставляя сюда выражения (5.3.5) и (6.1.7) для функций $D_0(x)$ и $D_1(x)$, найдем явные выражения функций $D_+(x)$ и $D_-(x)$

$$\begin{aligned} D_+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x^2} - \frac{t}{4\pi} \delta(x^2) \operatorname{sgn} t, \\ D_-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{x^2} + \frac{t}{4\pi} \delta(x^2) \operatorname{sgn} t. \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Легко проверить, исходя из (6.1.7), что функция $D_1(x)$, как и функция $D_0(x)$, удовлетворяет волновому уравнению. Из (6.1.8) тогда следует,

что этому уравнению удовлетворяют и функции $D_+(x)$, и $D_-(x)$:

$$\square D_1(x) = 0, \quad \square D_{\pm}(x) = 0. \quad (6.1.10)$$

6.2. Хронологическое и нормальное произведения операторов электромагнитных потенциалов. В дальнейшем при исследовании взаимодействия электромагнитного поля с электронами существенную роль будут играть произведения операторов потенциалов, расположенных в определенном порядке. Различают два типа упорядоченных произведений — *хронологические* и *нормальные произведения*.

В хронологическом произведении операторов $A_{\mu}(x)$ и $A_{\nu}(x')$, которое мы будем обозначать через $T(A_{\mu}(x)A_{\nu}(x'))$, множители располагаются в хронологическом порядке, а именно: справа стоит множитель, отвечающий меньшему значению времени, а слева — большему. Иными словами,

$$T(A_{\mu}(x)A_{\nu}(x')) = \begin{cases} A_{\mu}(x)A_{\nu}(x'), & t > t', \\ A_{\nu}(x')A_{\mu}(x). & t < t'. \end{cases} \quad (6.2.1)$$

В нормальном произведении операторов $A_{\mu}(x)$ и $A_{\nu}(x')$, которое мы будем обозначать через $N(A_{\mu}(x)A_{\nu}(x'))$, операторы испускания фотонов расположены слева от операторов их поглощения. Иными словами, если представить оператор $A_{\mu}(x)$ в виде $A_{\mu}(x) = A_{\mu}^{(+)}(x) + A_{\mu}^{(-)}(x)$, где $A_{\mu}^{(+)}(x)$ содержит слагаемые с положительными, а $A_{\mu}^{(-)}(x)$ — с отрицательными частотами, то

$$N(A_{\mu}(x)A_{\nu}(x')) = A_{\mu}^{(+)}(x)A_{\nu}^{(+)}(x') + A_{\mu}^{(-)}(x)A_{\nu}^{(-)}(x') + \\ + A_{\mu}^{(-)}(x)A_{\nu}^{(+)}(x') + A_{\nu}^{(-)}(x')A_{\mu}^{(+)}(x). \quad (6.2.2)$$

Легко видеть, что эти определения являются релятивистски инвариантными. Что касается нормального произведения (или, иначе, N -произведения), то это очевидно, так как разделение $A_{\mu}(x)$ на слагаемые с положительными и отрицательными частотами является релятивистски инвариантным. Рассмотрим далее хронологическое произведение (или, иначе, T -произведение). Если x и x' разделены времениподобным интервалом, то утверждение снова очевидно, так как в этом случае понятия более позднего и более раннего времени носят абсолютный характер. Если же x и x' разделены пространственноподобным интервалом и $t - t'$ может менять знак при преобразованиях Лоренца, то операторы $A_{\mu}(x)$ и $A_{\nu}(x')$ коммутируют между собой и поэтому могут быть во всех системах отсчета расположены в том порядке, который установлен в хронологическом произведении.

Используя разложение потенциалов (5.1.1) на плоские волны, можно выразить N - и T -произведения операторов потенциалов через операторы испускания и поглощения фотонов:

$$N(A_{\mu}(x)A_{\nu}(x')) = \frac{1}{2V} \sum_{k, \lambda; k', \lambda'} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \{ c_{k\lambda} c_{k'\lambda'} e^{i(kx+k'x')} + \\ + c_{k'\lambda'}^{\dagger} c_{k\lambda} e^{i(kx-k'x')} + c_{k\lambda}^{\dagger} c_{k'\lambda'} e^{i(k'x-kx)} + c_{k'\lambda'}^{\dagger} c_{k\lambda}^{\dagger} e^{-i(kx+k'x')} \} e_{\mu}^{(\lambda)} e_{\nu}^{(\lambda')}, \quad (6.2.3)$$

$$T(A_{\mu}(x)A_{\nu}(x')) = \frac{1}{2V} \sum_{k, \lambda; k', \lambda'} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \{ c_{k\lambda} c_{k'\lambda'} e^{i(kx+k'x')} + \\ + c_{k\lambda} c_{k'\lambda'}^{\dagger} e^{i(kx-k'x')} + c_{k'\lambda'}^{\dagger} c_{k\lambda} e^{-i(kx-k'x')} + \\ + c_{k\lambda}^{\dagger} c_{k'\lambda'}^{\dagger} e^{-i(kx+k'x')} \} e_{\mu}^{(\lambda)} e_{\nu}^{(\lambda')}, \quad t > t'. \quad (6.2.4)$$

Поменяв местами x и x' , получим хронологическое произведение при $t < t'$.

Рассмотрим разность между хронологическим и нормальным произведениями операторов потенциалов. Эта разность называется *связью* операторов и обозначается через $A_\mu^a(x) A_\nu^a(x')$ (вместо a может применяться также любая другая буква латинского алфавита),

$$A_\mu^a(x) A_\nu^a(x') \equiv T(A_\mu(x) A_\nu(x')) - N(A_\mu(x) A_\nu(x')). \quad (6.2.5)$$

Из (6.2.4), (6.2.5) и (5.1.2) следует, что $A_\mu^a A_\nu^a$ не содержит операторов испускания и поглощения фотонов, т. е. является c -числом:

$$A_\mu^a(x) A_\nu^a(x') = \frac{1}{2V} \sum_k \frac{1}{\omega} e^{ik(r-r') - i\omega|t-t'|} \delta_{\mu\nu}.$$

Переходя от суммы к интегралу, получим следующее выражение для связи операторов потенциалов электромагнитного поля:

$$A_\mu^a(x) A_\nu^a(x') = D_c(x-x') \delta_{\mu\nu}, \quad (6.2.6)$$

где

$$D_c(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{i(kr - \omega|t|)} \frac{d^3k}{\omega}, \quad \omega = |\mathbf{k}|. \quad (6.2.7)$$

Легко видеть, что связь операторов $A_\mu(x)$ и $A_\nu(x')$ равна среднему значению T -произведения этих операторов в состоянии вакуума. Действительно, используя (6.1.1), имеем

$$\langle T(A_\mu(x) A_\nu(x')) \rangle_0 = \frac{1}{2V} \sum_{\kappa\lambda\lambda'} \frac{1}{\omega} e^{i\kappa(r-r') - i\omega|t-t'|} \delta_{\lambda\lambda'} e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda)},$$

а так как $e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu}$, то

$$\langle T(A_\mu(x) A_\nu(x')) \rangle_0 = D_c(x-x') \delta_{\mu\nu}. \quad (6.2.8)$$

Сравнение этой формулы с формулой (6.2.5) показывает, что среднее значение в состоянии вакуума N -произведения операторов потенциалов равно нулю,

$$\langle N(A_\mu(x) A_\nu(x')) \rangle_0 = 0.$$

6.3. Функция Грина волнового уравнения. Для дальнейшего существенно знать компоненты Фурье функции $D_c(x)$, которые мы будем обозначать через $D_c(k)$,

$$D_c(k) = \int D_c(x) e^{-ikx} d^4x.$$

При таком определении разложение Фурье функции $D_c(x)$ имеет вид

$$D_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D_c(k) e^{ikx} d^4k, \quad (6.3.1)$$

где $d^4k = dk_1 dk_2 dk_3 dk_0$ (все четыре составляющие вектора k являются независимыми).

Для нахождения $D_c(k)$ воспользуемся соотношением

$$\frac{e^{-i\omega|t|}}{\omega} = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{e^{-ik_0 t}}{k^2} dk_0, \quad (6.3.2)$$

где $k^2 = \mathbf{k}^2 - k_0^2 \equiv \omega^2 - k_0^2$ и интегрирование производится в комплексной плоскости k_0 вдоль контура C , изображенного на рис. 6.1. Чтобы убедиться в справедливости этого соотношения, заметим, что при $t > 0$ путь интегрирования можно замкнуть полуокружностью бесконечного радиуса, расположенной в нижней полуплоскости. Тогда интеграл определится вычетом в полюсе $k_0 = \omega$. Если же $t < 0$, то путь интегрирования должен быть замкнут полуокружностью в верхней полуплоскости. При этом интеграл определится вычетом в точке $k_0 = -\omega$. В обоих случаях мы получим равенство (6.3.2).

Вместо того чтобы интегрировать в (6.3.2) вдоль контура C , обходящего полюс $k_0 = \omega$ сверху, а полюс $k_0 = -\omega$ снизу, можно интегрировать вдоль вещественной оси k_0 , сместив первый полюс в нижнюю, а второй полюс в верхнюю полуплоскость (рис. 6.2). Для этого следует заменить

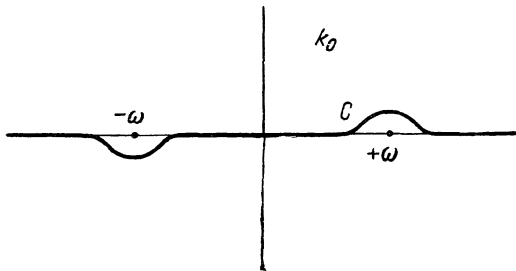


Рис. 6.1.

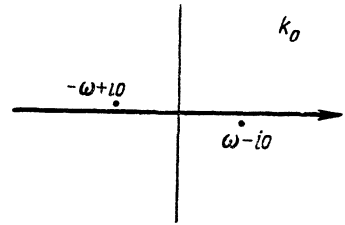


Рис. 6.2.

знаменатель подынтегрального выражения k^2 на $k^2 - i\eta$, где η — бесконечно малое положительное число, так как полюсами при этом будут точки $k_0 = \pm \omega \left(1 - \frac{i\eta}{2\omega^2}\right)$, расположенные как указано на рис. 6.2.

Подставляя (6.3.2) в (6.2.7) и сравнивая с (6.3.1), найдем компоненту Фурье $D_c(k)$:

$$D_c(k) = \frac{1}{i(k^2 - i0)}, \quad (6.3.3)$$

где $i0$ означает $i\eta$ при $\eta \rightarrow +0$.

Это выражение можно также представить в виде

$$D_c(k) = \pi \delta_+(-k^2), \quad (6.3.4)$$

где сингулярная функция $\delta_+(x)$ определяется интегралом

$$\delta_+(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{i\xi(x+i\eta)} d\xi = \frac{i}{\pi} \frac{1}{x+i\eta}, \quad \eta \rightarrow +0. \quad (6.3.5)$$

Заметим, что

$$\delta_+(x) = \delta(x) + \frac{i}{\pi} P \frac{1}{x}. \quad (6.3.6)$$

Это равенство, вытекающее из (6.3.5), означает, что интегралы, содержащие δ_+ -функцию, вычисляются согласно правилу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_+(x) dx = \int_C f(x) \frac{i}{\pi x} dx = f(0) + \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{dx}{x},$$

где путь интегрирования C совпадает с вещественной осью и обходит полюс $x=0$ сверху, а P служит для обозначения главного значения интеграла.

Подставляя (6.3.4) в (6.3.1), получим

$$D_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ikhx} \int_0^\infty e^{-i\xi(k^2 - i\eta)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\xi e^{i \frac{x^2 + i\eta}{4\xi}} \int e^{-ik'^2 \xi} d^4k',$$

где $k' = k - \frac{1}{2\xi}x$. Замечая, что

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\pm i\xi\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} e^{\pm i \frac{\pi}{4}},$$

и поэтому

$$\int e^{-ik'^2 \xi} d^4k' = \frac{\pi^2}{i\xi^2},$$

найдем

$$D_c(x) = \frac{1}{(4\pi)^2 i} \int_0^\infty e^{i \frac{x^2 + i\eta}{4\xi}} \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^\infty e^{iz(x^2 + i\eta)} dz,$$

т. е.

$$D_c(x) = \frac{1}{4\pi i} \delta_+(x^2). \quad (6.3.7)$$

Так как

$$-k^2 D_c(k) = i,$$

то $D_c(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\square D_c(x) = i\delta(x). \quad (6.3.8)$$

Таким образом, $D_c(x)$ является функцией Грина волнового уравнения.

6.4. Сингулярные функции, связанные с волновым уравнением. Выше мы видели, что функция $D_0(x)$, определяющая алгебру операторов потенциалов электромагнитного поля, и функции $D_\pm(x)$, $D_1(x)$, определяющие вакуумные средние произведений этих операторов, представляют собой сингулярные решения волнового уравнения, а функция $D_c(x)$, определяющая связь операторов потенциалов, является функцией Грина этого уравнения.

Выясним общую структуру рассмотренных сингулярных решений волнового уравнения.

Замечая, что компонента Фурье функции $f(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\square f = -\delta(x),$$

равна

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{k^2},$$

легко убедиться, что любая функция Грина волнового уравнения может быть представлена в виде

$$D(x) = \frac{\alpha}{(2\pi)^4} \int_{C'} e^{ikh} \frac{d^4k}{k^2}, \quad (6.4.1)$$

где α — некоторая постоянная и C' — контур, вдоль которого производится интегрирование в плоскости комплексного переменного k_0 .

Такой же вид (только каждый раз со своими α и C') имеют также, как будет сейчас показано, сингулярные решения волнового уравнения D_0 , D_\pm и D_1 .

Легко перечислить все возможные функции вида (6.4.1). Заметим этой целью, что подынтегральная функция в (6.4.1) имеет только две особые точки в плоскости комплексного переменного k_0 , $k_0 = \pm \omega$, где $\omega = |\mathbf{k}|$. Поэтому контур C' можно провести одним из семи способов, указанных на рис. 6.3 (отмечены точки $k_0 = \pm \omega$).

Если контуром является C и $\alpha = -i$, то мы получим, согласно (6.3.2) и (6.3.3), функцию $D_c(x)$:

$$D_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_C e^{ikhx} \frac{d^4 k}{k^2}. \quad (6.4.1')$$

Контур C_0 и $\alpha = 1$ соответствует функция $D_0(x)$,

$$D_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} e^{ikhx} \frac{d^4 k}{k^2}. \quad (6.4.2)$$

Действительно, выполнив интегрирование по k_0 с помощью теоремы о вычетах, найдем

$$D_0(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int (e^{i(kr+\omega t)} - e^{i(kr-\omega t)}) \frac{d^3 k}{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikr} \frac{\sin \omega t}{\omega} d^3 k$$

в согласии с (5.3.2).

Аналогично легко убедиться, что контурам C_+ , C_- и C_1 соответствуют функции D_+ , D_- и D_1 :

$$\begin{aligned} D_+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_{C_+} e^{ikhx} \frac{d^4 k}{k^2}, \\ D_-(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_{C_-} e^{ikhx} \frac{d^4 k}{k^2}, \\ D_1(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_{C_1} e^{ikhx} \frac{d^4 k}{k^2}. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Заметим, что из (6.4.3) следует, что функции $D_+(x)$ и $D_-(x)$ комплексно сопряжены

$$D_+(x) = D_-^*(x). \quad (6.4.4)$$

Наконец, контурам C_R и C_A соответствуют функции Грина волнового уравнения

$$\begin{aligned} D_R(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_R} e^{ikhx} \frac{d^4 k}{k^2}, \\ D_A(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_A} e^{ikhx} \frac{d^4 k}{k^2}. \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Действительно, применив к $D_R(x)$ и $D_A(x)$ оператор Даламбера и совмещающая контуры интегрирования с осью k_0 , получим

$$\square D_{R,A}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikhx} d^4 k = -\delta(x). \quad (6.4.6)$$

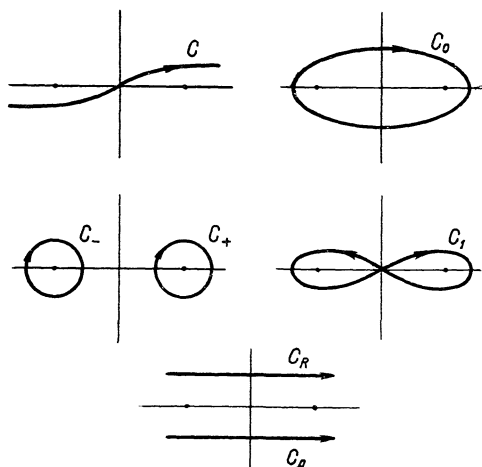


Рис. 6.3.

Разъясним различие между функциями $D_R(x)$ и $D_A(x)$.

Если $t > 0$, то контур C_R можно замкнуть полуокружностью в нижней полуплоскости, и мы получим функцию $D_0(x)$. Если же $t < 0$, то путь интегрирования можно замкнуть сверху, где у подынтегральной функции нет полюсов, и мы получим нуль. Поэтому

$$D_R(x) = \begin{cases} D_0(x), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (6.4.7)$$

Аналогичным образом можно показать

$$D_A(x) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ -D_0(x), & t < 0. \end{cases} \quad (6.4.8)$$

Мы видим, что функция $D_R(x)$ обращается в нуль при отрицательных, а функция $D_A(x)$ — при положительных значениях времени.

Из (6.4.6) и (6.4.7) следует, что решение неоднородного волнового уравнения

$$\square A_\mu(x) = -j_\mu(x),$$

обращающееся в нуль при $t = -\infty$, может быть представлено в виде

$$A_\mu(x) = \int D_R(x-x') j_\mu(x') d^4x'.$$

Таким образом, функция $D_R(x)$ является функцией Грина волнового уравнения, приводящей к запаздывающим решениям. Аналогично можно убедиться, что функция Грина $D_A(x)$ приводит к опережающим решениям.

Формулы (6.4.7) и (6.4.8) связывают функции Грина $D_R(x)$ и $D_A(x)$ с функцией $D_0(x)$, которая, согласно (6.1.8), выражается через функции $D_+(x)$ и $D_-(x)$. Через эти же функции выражается функция $D_1(x)$ согласно (6.1.6). Покажем, что функция $D_c(x)$ также может быть выражена через функции $D_+(x)$ и $D_-(x)$. Воспользуемся для этого представлением (6.4.1') функции $D_c(x)$. Замечая, что при $t > 0$ контур интегрирования C можно замкнуть снизу, а при $t < 0$ — сверху и учитывая (6.4.3), получим

$$D_c(x) = \theta(x) D_+(x) + \theta(-x) D_-(x), \quad (6.4.9)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

6.5. Аналитические свойства сингулярных решений волновых уравнений.

В предыдущих пунктах мы рассмотрели ряд сингулярных решений уравнения

$$\square f = 0.$$

В следующей главе при изучении электронно-позитронного поля мы встретимся с более общим уравнением

$$(\square - m^2) f = 0,$$

где m — масса электрона. Для этого уравнения могут быть определены сингулярные решения $\Delta_\pm(x)$, $\Delta_0(x)$, $\Delta_1(x)$ и функции Грина $\Delta_c(x)$, $\Delta_R(x)$ и $\Delta_A(x)$, аналогичные сингулярным функциям $D_\pm(x)$, $D_0(x)$, $D_1(x)$, $D_c(x)$, $D_R(x)$, $D_A(x)$. Эти сингулярные функции $\Delta(x)$ будут играть для электронно-позитронного поля такую же роль, какую играют функции $D(x)$ для электромагнитного поля.

Функции $\Delta(x)$ являются обобщением функций $D(x)$ и переходят в $D(x)$ при $m^2 \rightarrow 0$. Мы рассмотрим теперь подробнее свойства этих функций.

Функции $\Delta(x)$ определяются четырехкратными интегралами Фурье:

$$\begin{aligned}
 \Delta_+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_{C_+} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} d^4 p, \\
 \Delta_-(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^4 i} \int_{C_-} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} d^4 p, \\
 \Delta_0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} d^4 p, \\
 \Delta_1(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_{C_1} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} d^4 p, \\
 \Delta_c(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_C \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} d^4 p, \\
 \Delta_R(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_R} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} d^4 p, \\
 \Delta_A(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_A} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} d^4 p,
 \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

где вместо k используется обозначение p и интегрирование по p совершается вдоль одного из контуров, изображенных на рис. 6.3 (следует лишь заметить k_0 на p_0 и ω на $\varepsilon = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$).

Применяя к выражениям (6.5.1) оператор $\square - m^2$ и совмещая затем контуры с вещественной осью p_0 , получим уравнения, которым удовлетворяют функции $\Delta(x)$:

$$\begin{aligned}
 (\square - m^2) \Delta_0(x) &= 0, \\
 (\square - m^2) \Delta_1(x) &= 0, \\
 (\square - m^2) \Delta_+(x) &= 0, \\
 (\square - m^2) \Delta_-(x) &= 0, \\
 (\square - m^2) \Delta_c(x) &= i\delta(x), \\
 (\square - m^2) \Delta_R(x) &= -\delta(x), \\
 (\square - m^2) \Delta_A(x) &= -\delta(x).
 \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
 \Delta_1(x) &= \Delta_+(x) + \Delta_-(x), \\
 \Delta_0(x) &= i(\Delta_+(x) - \Delta_-(x)).
 \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

Эти соотношения аналогичны соотношениям (6.1.6) и (6.1.8).

Так же как и функции $D_+(x)$ и $D_-(x)$, функции $\Delta_+(x)$ и $\Delta_-(x)$ комплексно сопряжены:

$$\Delta_+^*(x) = \Delta_-(x). \tag{6.5.4}$$

Выполнив в (6.5.1) интегрирование по p_0 с помощью теоремы о вычетах, найдем представления функций $\Delta(x)$ в виде трехкратных интегралов

Фурье

$$\begin{aligned}\Delta_0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{p}r} \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon} d^3p, \\ \Delta_1(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{p}r} \frac{\cos \varepsilon t}{\varepsilon} d^3p, \\ \Delta_c(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{p}r - \varepsilon |t|)} \frac{d^3p}{\varepsilon}, \\ \Delta_{\pm}(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{\pm i\mathbf{p}x} \frac{d^3p}{\varepsilon},\end{aligned}\tag{6.5.5}$$

где $\varepsilon = \sqrt{|\mathbf{p}^2| + m^2}$. Эти формулы отличаются от соответствующих формул для функций $D(x)$ заменой ω на ε .

Сравнивая разложения (6.5.5) для $\Delta_c(x)$ и $\Delta_{\pm}(x)$, мы видим, что

$$\Delta_c(x) = \theta(x) \Delta_+(x) + \theta(-x) \Delta_-(x).\tag{6.5.6}$$

Это соотношение аналогично соотношению (6.4.9).

Справедливы также следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\Delta_R(x) &= \begin{cases} \Delta_0(x), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \\ \Delta_A(x) &= \begin{cases} 0, & t > 0, \\ -\Delta_0(x), & t < 0, \end{cases}\end{aligned}$$

аналогичные соотношениям (6.4.7), (6.4.8).

Формулы (6.5.1) для $\Delta_0(x)$ и $\Delta_1(x)$ могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned}\Delta_0(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{p}x} \operatorname{sgn} p_0 \delta(p^2 + m^2) d^4p, \\ \Delta_1(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{p}x} \delta(p^2 + m^2) d^4p\end{aligned}$$

(здесь p_0 принимает только вещественные значения). Отсюда следует, что компоненты Фурье функций $\Delta_0(x)$ и $\Delta_1(x)$ равны

$$\begin{aligned}\Delta_0(p) &= 2\pi i \delta(p^2 + m^2) \operatorname{sgn} p_0, \\ \Delta_1(p) &= 2\pi \delta(p^2 + m^2).\end{aligned}\tag{6.5.7}$$

Компонента Фурье функции $\Delta_c(x)$ может быть получена так же, как и компонента Фурье функции $D_c(x)$, если сместить полюс ε в комплексной плоскости p_0 в нижнюю, а полюс $-\varepsilon$ — в верхнюю полуплоскость p_0 и после этого интегрировать в выражении (6.5.1) для $\Delta_c(x)$ вдоль вещественной оси p_0 . Такое смещение эквивалентно, очевидно, замене p^2 на $p^2 - i\eta$, $\eta \rightarrow +0$. Поэтому компонента Фурье функции $\Delta_c(x)$ равна

$$\Delta_c(p) = \frac{1}{i(p^2 + m^2 - i0)}.\tag{6.5.8}$$

Это выражение можно переписать также в виде

$$\Delta_c(p) = \pi \delta_+(-p^2 - m^2).$$

Все функции $\Delta(x)$, так же как и функции $D(x)$, инвариантны, очевидно, относительно преобразований Лоренца. Поэтому они могут зависеть только от интервала $-x^2$ и знака времени.

$$\Delta(x) = \Delta(-x^2, \zeta),\tag{6.5.9}$$

где $\zeta = \text{sgn } t$. Для пространственноподобных интервалов, когда знак времени может меняться при преобразованиях Лоренца, зависимость $\Delta(x)$ и $D(x)$ от ζ должна исчезать, т. е.

$$\Delta(-x^2, \zeta) = \Delta(-x^2, -\zeta), \quad x^2 > 0.$$

Согласно (6.5.5) функция $\Delta_0(x)$ (так же как и $D_0(x)$) обращается в нуль при $t = 0$; поэтому она равна нулю всюду вне светового конуса, когда $x^2 = r^2 - t^2 > 0$.

Покажем теперь, что все функции $\Delta(x)$ можно выразить через единую аналитическую функцию от переменной $z = -x^2$.

Так как все функции $\Delta(x)$ выражаются через функции $\Delta_+(x)$ и $\Delta_-(x)$, то достаточно убедиться в справедливости этого утверждения для функций $\Delta_+(x)$ и $\Delta_-(x)$.

В случае времениподобного интервала ($-x^2 > 0$) функции $\Delta_+(x)$ и $\Delta_-(x)$ можно, согласно (6.5.1) и (6.5.4), представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta_+(x) &\equiv \Delta_+(-x^2, \zeta) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_{C_+} \frac{e^{-ip_0 \sqrt{-x^2} \zeta}}{p^2 + m^2} d^4 p, \\ \Delta_-(x) &\equiv \Delta_-(-x^2, \zeta) = \frac{-1}{(2\pi)^4 i} \int_{C_-} \frac{e^{ip_0 \sqrt{-x^2} \zeta}}{p^2 + m^2} d^4 p. \end{aligned} \quad (6.5.10)$$

Введем функцию

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_{C_+} \frac{e^{ip_0 \sqrt{z}}}{p^2 + m^2} d^4 p. \quad (6.5.11)$$

Легко видеть, что входящий сюда интеграл сходится во всей плоскости комплексного переменного z с разрезом вдоль положительной вещественной оси. Действительно, выполнив интегрирование по p_0 с помощью теоремы о вычетах, мы получим экспоненциально убывающий с ростом $|p|$ множитель $e^{i\varepsilon V \sqrt{z}}$, где $\varepsilon = \sqrt{|p|^2 + m^2}$ и $\text{Im} \sqrt{z} > 0$, который обеспечит сходимость интеграла по $|p|$. Поэтому выражение (6.5.11) определяет функцию $F(z)$, аналитическую в плоскости комплексного переменного z с разрезом вдоль положительной вещественной оси. Значения этой функции на двух берегах разреза, очевидно, комплексно сопряжены:

$$F(-x^2 - i0) = F^*(-x^2 + i0),$$

где 0 обозначает бесконечно малую положительную величину.

Сравнение выражений (6.5.10) для $\Delta_{\pm}(x)$ с выражением (6.5.11) для $F(z)$ показывает, что при $-x^2 > 0$

$$\begin{aligned} \Delta_+(-x^2, \zeta) &= F(-x^2 - i0\zeta), \\ \Delta_-(-x^2, \zeta) &= F(-x^2 + i0\zeta), \quad \zeta = \text{sgn } t. \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

Легко видеть, что эти соотношения, доказанные при $-x^2 > 0$, справедливы также и при $-x^2 < 0$. Это вытекает из того, что две аналитические функции (в данном случае $F(z)$ и любая из функций $\Delta_{\pm}(-x^2, \zeta)$), совпадающие на каком-либо луче, совпадают во всей комплексной плоскости.

Выразим теперь остальные функции $\Delta(x)$ через функцию $F(z)$.

Воспользовавшись соотношениями (6.5.3), имеем

$$\begin{aligned} \Delta_0(x) &= -2 \text{Im} \Delta_+(x) = 2\zeta \text{Im} F(-x^2 + i0), \\ \Delta_1(x) &= 2 \text{Re} F(-x^2). \end{aligned} \quad (6.5.13)$$

Используя далее (6.5.6), получим

$$\Delta_c(x) = \begin{cases} F(-x^2), & -x^2 < 0, \\ F(-x^2 - i0), & -x^2 > 0. \end{cases} \quad (6.5.14)$$

Таким образом, $\Delta_c(x)$ представляет собой предельное значение аналитической функции $F(z)$ при $z \rightarrow -x^2 - i0$.

Получим в заключение этого раздела явное выражение для функции $F(z)$. Рассмотрим с этой целью выражение (6.5.5) для $\Delta_c(x)$. Считая сперва, что $-x^2 < 0$, можно положить в (6.5.5) $t = 0$. Выполнив интегрирование по углу между \mathbf{p} и \mathbf{r} и полагая затем $|\mathbf{p}| = m \operatorname{sh} u$, $\varepsilon = m \operatorname{ch} u$, представим Δ_c в виде

$$\Delta_c(x) = \frac{m}{8\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{imr \operatorname{sh} u} \operatorname{sh} u du.$$

Используя далее интегральное представление функции Ганкеля $H_0^{(2)}(x)$,

$$H_0^{(2)}(-ir) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ir \operatorname{sh} u} du,$$

и соотношение

$$\frac{d}{dx} H_0^{(2)}(x) = -H_1^{(2)}(x),$$

получим

$$\Delta_c(x) = \frac{im^2}{8\pi} \frac{H_1^{(2)}(-m\sqrt{-x^2})}{-m\sqrt{-x^2}}, \quad -x^2 < 0,$$

где $\sqrt{-x^2}$ следует понимать как $i|x^2|^{1/2}$. Сравнение этой формулы, определяющей $\Delta_c(x)$ при $-x^2 < 0$, с (6.5.14), показывает, что аналитическая функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = \frac{im^2}{8\pi} \frac{H_1^{(2)}(-m\sqrt{z})}{-m\sqrt{z}}. \quad (6.5.15)$$

Взяв предельное значение этой функции при $z \rightarrow -x^2 - i0$, найдем функцию $\Delta_c(x)$ при $-x^2 \geq 0$:

$$\Delta_c(x) = \frac{1}{4\pi i} \left\{ \delta(x^2) - \frac{m^2}{2} \frac{H_1^{(2)}(m|-x^2|^{1/2})}{m|-x^2|^{1/2}} \right\}.$$

§ 7. Уравнение Дирака

7.1. Спиноры. В нерелятивистской квантовой механике состояние электрона описывается двухкомпонентной волновой функцией — *спинором* φ ,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Это является следствием того основного физического факта, что спин электрона равен $1/2$.

При повороте координатной системы на бесконечно малый угол $\delta\theta$ волновая функция частицы в данной точке пространства испытывает бесконечно малое преобразование

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \delta\varphi, \quad \delta\varphi = -i\mathbf{s}\delta\theta\varphi, \quad (7.1.1)$$

где \mathbf{s} — оператор спина, компоненты которого удовлетворяют перестановочным соотношениям момента

$$\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2\mathbf{s}_1 = i\mathbf{s}_3, \quad \mathbf{s}_2\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_3\mathbf{s}_2 = i\mathbf{s}_1, \quad \mathbf{s}_3\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1\mathbf{s}_3 = i\mathbf{s}_2. \quad (7.1.2)$$

Закон преобразования (7.1.1) является, по существу, определением понятия спинора в квантовой механике.

В случае спина $1/2$ операторы $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ должны иметь два собственных значения: $\pm 1/2$. Поэтому они могут быть выражены через двухрядные матрицы Паули σ

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\sigma, \quad (7.1.3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.1.4)$$

Элемент матрицы σ_i ($i = 1, 2, 3$) мы будем обозначать через $(\sigma_i)_{\alpha\beta}$, где α — номер строки, β — номер столбца ($\alpha, \beta = 1, 2$). Под произведением матрицы σ и спинора φ понимается спинор $(\sigma_i\varphi)_\alpha = (\sigma_i)_{\alpha\beta}\varphi_\beta$.

Помимо перестановочных соотношений, следующих из (7.1.2), матрицы Паули удовлетворяют также соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i &= 2\delta_{ij}, \\ \sigma_i\sigma_j &= \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

где ε_{ijk} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга. Вместе с единичной матрицей матрицы Паули образуют полный набор линейно независимых матриц, по которым может быть разложена любая квадратная двухрядная матрица.

Из (7.1.1) можно получить закон преобразования спинора при повороте координатной системы на конечный угол θ , вокруг оси, направление

которой определяется единичным вектором \mathbf{n} :

$$\varphi' = e^{-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\sigma}\varphi. \quad (7.1.6)$$

Так как

$$(\mathbf{n}\sigma)^{2k} = 1, \quad (\mathbf{n}\sigma)^{2k+1} = \mathbf{n}\sigma$$

(k — целое число), то (7.1.6) можно переписать также в виде

$$\varphi' = \left(\cos \frac{\theta}{2} - i\mathbf{n}\sigma \sin \frac{\theta}{2} \right) \varphi. \quad (7.1.7)$$

Из этой формулы следует, что, если $\theta = 2\pi$, то

$$\varphi' = -\varphi.$$

Но поворот на угол 2π физически эквивалентен тождественному преобразованию. Мы видим, таким образом, что определение спинора содержит неоднозначность: знак его неопределен. Поэтому физические величины не могут содержать спиноры линейно.

Спиноры (как векторы и тензоры) могут различаться по характеру преобразования при пространственном отражении. Собственные значения оператора отражения \mathbf{P} определяются обычно, исходя из того, что двойное отражение представляет собой тождественное преобразование, т. е. $\mathbf{P}^2 = 1$. Но для спинора двойное отражение можно рассматривать также и как поворот на угол 2π , при котором спинор меняет знак. Поэтому возможны два альтернативных определения оператора отражения, для которых

$$\mathbf{P}^2 = 1 \quad \text{или} \quad \mathbf{P}^2 = -1.$$

При этом собственные значения η_p оператора отражения

$$\mathbf{P}\varphi = \eta_p\varphi \quad (7.1.8)$$

принимают альтернативно значения

$$\eta_p = \pm 1 \quad \text{или} \quad \eta_p = \pm i. \quad (7.1.9)$$

7.2. Уравнение Дирака для свободного электрона. Релятивистски инвариантные уравнения для электрона были найдены Дираком [1]. Ниже, в § 8, мы получим их, исходя из общего вариационного принципа. Но сначала мы изучим их свойства.

Уравнения Дирака представляют собой систему однородных дифференциальных уравнений первого порядка для двух спинорных функций φ и χ :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= m\varphi + \sigma \mathbf{p} \chi, \\ i \frac{\partial \chi}{\partial t} &= -m\chi + \sigma \mathbf{p} \varphi, \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

где $\mathbf{p} = -i\nabla$ — оператор импульса, m — масса электрона.

Совокупность двух спиноров φ и χ можно представить как единую четырехкомпонентную величину ψ , называемую *биспинором*:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (7.2.2)$$

Для того чтобы записать уравнения (7.2.1) в виде уравнения для биспинорной волновой функции ψ , введем четырехрядные *матрицы Дирака*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.2.3)$$

Здесь каждый элемент этих матриц означает соответствующую двухрядную матрицу. Элементы матриц α_i ($i = 1, 2, 3$), β мы будем обозначать через $(\alpha_i)_{\lambda\mu}$, $\beta_{\lambda\mu}$, где λ — номер строки и μ — номер столбца ($\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$). Понимая под произведениями $\alpha_i\psi$ и $\beta\psi$ биспиноры $(\alpha_i\psi)_\lambda = (\alpha_i)_{\lambda\mu}\psi_\mu$ и $(\beta\psi)_\lambda = \beta_{\lambda\mu}\psi_\mu$, можно переписать уравнения (7.2.1) в виде единого уравнения

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\alpha \mathbf{p} + \beta m) \psi, \quad (7.2.4)$$

которое называется *уравнением Дирака*.

Из определения матриц α и β (7.2.3) следует, что они удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij} I, \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \beta^2 &= I \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

(I — единичная четырехрядная матрица).

Из уравнения Дирака (7.2.4) следует, что волновая функция ψ , т. е. каждая ее компонента, удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta - m^2 \right) \psi = 0. \quad (7.2.6)$$

В этом легко убедиться, если продифференцировать (7.2.3) по времени, заменить в правой части уравнения $i \frac{\partial}{\partial t}$ на $\alpha \mathbf{p} + \beta m$ и использовать при вычислении $(\alpha \mathbf{p} + \beta m)^2$ соотношения (7.2.5).

Уравнение (7.2.6) применяется для описания частиц со спином 0 [2, 3] (при этом ψ — скалярная функция). Очевидно, что этому уравнению должна удовлетворять волновая функция любой свободной частицы. Действительно, его решениями являются плоские волны

$$\psi = u e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)}, \quad (7.2.7)$$

для которых

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2.$$

Таким образом, уравнение (7.2.6) является лишь квантовомеханическим выражением общего релятивистского соотношения между энергией и импульсом частицы. Уравнение же Дирака фиксирует, кроме того, спин частицы.

Полезно иметь в виду два аспекта уравнения Дирака. Во-первых, уравнение (7.2.4) можно записать в форме уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad (7.2.8)$$

в котором оператор Гамильтона имеет вид

$$H = \alpha \mathbf{p} + \beta m. \quad (7.2.9)$$

Это «корпускулярный» аспект. Второй, «полево́й», состоит в том, что уравнения (7.2.1) для спиноров «дираковского поля» ψ , χ аналогичны уравнениям Максвелла для векторов электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} . Действитель-

но, уравнения Максвелла имеют форму уравнений (7.1.1), в которых произведена замена

$$\varphi \rightarrow E, \quad \chi \rightarrow iH, \quad \sigma \rightarrow \mathbf{s}, \quad m \rightarrow 0,$$

где \mathbf{s} — оператор спина фотона (3.2.1).

7.3. Симметричная форма уравнения Дирака. Уравнению Дирака можно придать более симметричный вид. Умножив (7.2.4) слева на $i\beta$ и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_k &= -i\beta\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \\ \gamma_4 &= \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

получим

$$(i\gamma_\mu \mathbf{p}_\mu + m)\psi = 0, \quad (7.3.2)$$

где $\mathbf{p}_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ ($x_4 = it$) и по μ производится суммирование ($\mu = 1, 2, 3, 4$), или

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0.$$

Мы будем пользоваться также обозначением

$$\hat{\mathbf{p}} = \gamma_\mu \mathbf{p}_\mu \quad (7.3.3)$$

и записывать (7.3.2) в виде

$$(i\hat{\mathbf{p}} + m)\psi = 0. \quad (7.3.4)$$

Матрицы γ_μ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} I \quad (7.3.5)$$

($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$). Как и матрицы α, β , они являются эрмитовыми

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu \quad (7.3.6)$$

(напомним, что $(\gamma_\mu^\dagger)_{ik} = (\gamma_\mu^T)_{ik}^* = (\gamma_\mu)_{ki}^*$; индекс T служит для обозначения транспонированной матрицы).

Получим уравнение для комплексно-сопряженной волновой функции. Комплексно-сопряженный биспинор ψ^* мы будем также обозначать через ψ^+ , т. е. представлять его в виде строки

$$\psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*),$$

в отличие от биспинора — столбца (7.2.2). Введем, кроме того, линейную комбинацию компонент ψ^+ :

$$\bar{\psi} = \psi^+ \beta, \quad (7.3.7)$$

т. е.

$$\bar{\psi}_\lambda = \psi_\mu^+ \beta_{\mu\lambda}^*.$$

Переходя в уравнении (7.3.2) к комплексно-сопряженным величинам и учитывая эрмитовость матриц γ_μ , получим

$$-i\mathbf{p}_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu + m \bar{\psi} = 0, \quad (7.3.8)$$

где

$$(\bar{\psi} \gamma_\mu)_\alpha = \bar{\psi}_\beta (\gamma_\mu)_{\beta\alpha}.$$

Уравнение (7.3.8), очевидно, можно записать в виде

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - m \bar{\psi} = 0,$$

или

$$\bar{\psi} (-\hat{\mathbf{p}} + m) = 0 \quad (7.3.9)$$

(в последнем выражении подразумевается, что дифференциальные операторы \mathbf{p}_μ действуют на находящуюся слева от них функцию $\bar{\psi}$).

Уравнение (7.3.8) можно записать также в виде

$$\left(\gamma_\mu^T \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \bar{\psi} = 0,$$

где γ_μ^T — матрица, транспонированная по отношению к γ_μ , а компоненты $\bar{\psi}$ подразумеваются расположенными в виде столбца.

7.4. Уравнение Дирака для электрона во внешнем электромагнитном поле. Уравнения движения электрона в заданном внешнем электромагнитном поле могут быть получены из уравнений для свободного электрона путем замены

$$\mathbf{p}_\mu \rightarrow \mathbf{p}_\mu - eA_\mu(x), \quad (7.4.1)$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x),$$

где e — заряд электрона и $A_\mu(x)$ — 4-вектор потенциала внешнего поля.

Делая такую замену в (7.3.4), получим

$$[i(\hat{\mathbf{p}} - e\hat{A}) + m] \psi = 0, \quad (7.4.2)$$

где $\hat{A} = \gamma_\mu A_\mu(x)$ и $\hat{\mathbf{p}} = -i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$. Комплексно-сопряженное уравнение, очевидно, имеет вид

$$\bar{\psi} [i(\hat{\mathbf{p}} + e\hat{A}) - m] = 0 \quad (7.4.3)$$

(оператор \mathbf{p}_μ действует на функцию $\bar{\psi}$, находящуюся слева от него).

Уравнению Дирака (7.4.2) можно придать вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H} \psi,$$

где гамильтониан \mathbf{H} определяется формулой

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m + e\varphi, \quad \varphi = A_0. \quad (7.4.4)$$

От уравнений Дирака, как системы дифференциальных уравнений первого порядка для четырехкомпонентной волновой функции, можно перейти к уравнениям второго порядка для двухкомпонентной волновой функции.

Для этого прежде всего представим биспинор ψ в виде (7.2.2)

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

после чего, очевидно, уравнение (7.4.2) примет вид системы уравнений (7.2.1), в которых произведена замена (7.4.1). Вводя далее линейные комбинации спиноров φ и χ ,

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \chi), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - \chi), \quad (7.4.5)$$

получим

$$\begin{aligned} \left[i \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi - \sigma(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \xi &= m\eta, \\ \left[i \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi + \sigma(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \eta &= m\xi. \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Исключая из этих уравнений ξ , найдем

$$\left\{ \left(i \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \right)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\sigma(\mathbf{H} + i\mathbf{E}) \right\} \eta = m^2\eta, \quad (7.4.7)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — электрическое и магнитное поля.

Зная η , как решение уравнения (7.4.7), легко найти выражение для 4-компонентной волновой функции ψ

$$\psi = \frac{1}{m} [-i(\hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}) + m] \Phi, \quad (7.4.8)$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix}. \quad (7.4.9)$$

Ниже (см. § 8) мы покажем, что уравнение (7.4.7) инвариантно относительно преобразований собственной группы Лоренца. Однако оно неинвариантно относительно инверсии.

7.5. Уравнение непрерывности. Из уравнения (7.4.2) вытекает важное соотношение — уравнение непрерывности. Чтобы получить его, умножим уравнение (7.4.2) слева на $\bar{\psi}$, а уравнение (7.4.3) справа на ψ и сложим. В результате получим

$$\bar{\psi}\gamma_{\mu}(\rho_{\mu}\psi) + (\rho_{\mu}\bar{\psi})\gamma_{\mu}\psi = 0,$$

или

$$\frac{\partial s_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0. \quad (7.5.1)$$

где введено обозначение

$$s_{\mu} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi. \quad (7.5.2)$$

В трехмерной форме уравнение (7.5.1) имеет вид

$$\frac{\partial s_0}{\partial t} + \text{div } \mathbf{s} = 0, \quad (7.5.3)$$

где

$$\begin{aligned} s_0 &= \bar{\psi}\gamma_4\psi = \psi^+\psi, \\ \mathbf{s} &= i\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi = \psi^+\boldsymbol{\alpha}\psi \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

($\boldsymbol{\gamma}$ обозначает совокупность матриц $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$). Как будет показано далее (§ 8.8), величины s_{μ} образуют четырехмерный вектор. Этот вектор мы можем интерпретировать как четырехмерный вектор плотности тока, а (7.5.1) — как уравнение непрерывности. Величина s_0 представляет собой плотность вероятности локализации электрона в данной точке пространства, а \mathbf{s} — плотность тока вероятности. Однако, как мы увидим в дальнейшем, такая интерпретация имеет более ограниченную область применимости, чем в нерелятивистской квантовой механике.

Уравнение непрерывности позволяет ввести нормировку волновой функции ψ согласно условию

$$\int \psi^+\psi d^3x = 1. \quad (7.5.5)$$

Заметим, что, поскольку s_{μ} является 4-вектором, то входящий сюда интеграл представляет собой релятивистский инвариант.

§ 8. Свойства инвариантности уравнения Дирака

8.1. Различные представления уравнения Дирака. Если подвергнуть волновую функцию ψ линейному преобразованию

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi, \quad (8.1.1)$$

одновременно подвергнув матрицы γ_μ преобразованию подобия

$$\gamma_\mu \rightarrow \gamma'_\mu = U\gamma_\mu U^{-1}, \quad (8.1.2)$$

где U — произвольная четырехрядная (квадратная, неособенная) матрица, то при этом уравнение Дирака не изменит своего вида. В этом легко убедиться непосредственно, подставив (8.1.1), (8.1.2) в (7.3.2):

$$(i\gamma'_\mu \rho_\mu + m)\psi' = 0.$$

Легко видеть также, что подстановка (8.1.2) не меняет соотношений (7.3.5)

$$\gamma'_\mu \gamma'_\nu + \gamma'_\nu \gamma'_\mu = 2\delta_{\mu\nu} I.$$

Если выбрать матрицу U унитарной

$$UU^+ = I,$$

то матрицы γ'_μ будут, как и матрицы γ_μ , эрмитовыми,

$$\gamma'_\mu = \gamma'^{\mu+}.$$

Приведем примеры унитарных преобразований уравнения Дирака. Выберем U в виде действительной матрицы

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}, \quad U^2 = I \quad (8.1.3)$$

(каждый элемент означает двухрядную матрицу). Подставив (7.3.1) в (8.1.2), получим

$$\begin{aligned} \gamma'_k &= -\gamma_k, & k &= 1, 2, 3, \\ \gamma'_4 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

Если записать преобразованную волновую функцию в виде (7.2.2)

$$\psi' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (8.1.5)$$

то величины ξ и η будут связаны с величинами φ и χ соотношениями

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \chi), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - \chi), \quad (8.1.6)$$

и система уравнений, которым удовлетворяют эти двухкомпонентные величины, будет иметь вид

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \sigma \mathbf{p} \xi + m \eta, \\ i \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\sigma \mathbf{p} \eta + m \xi. \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

Ниже (§ 8.6) мы покажем, что ξ и η , в отличие от φ и χ , обладают следующим замечательным свойством: они преобразуются независимо при преобразованиях собственной группы Лоренца. Поэтому мы будем их называть 4-спинорами (по аналогии с 4-векторами или 4-тензорами).

Заметим, что при $m = 0$ уравнения (8.1.7) распадаются на два независимых уравнения (*уравнения Вейля*) [4]:

$$i \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\sigma \mathbf{r} \eta, \quad i \frac{\partial \xi}{\partial t} = \sigma \mathbf{r} \xi. \quad (8.1.8)$$

Таким образом, при нулевой массе частица со спином $1/2$ может описываться одним 4-спинором, удовлетворяющим уравнению Вейля. Каждое из двух уравнений (8.1.8) в отдельности инвариантно относительно преобразований собственной группы Лоренца, но неинвариантно относительно инверсии (см. § 8.6). Такие уравнения описывают нейтрино.

В качестве второго примера выберем U в виде

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta + \alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & -I \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\alpha'_1 = -\alpha_1, \quad \alpha'_2 = \beta, \quad \alpha'_3 = -\alpha_3, \quad \beta' = \alpha_2$$

и уравнение Дирака для преобразованной функции $\psi' = U\psi$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} - \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} + i\alpha_2 m \right) \psi' = 0. \quad (8.1.9)$$

Это уравнение, как легко видеть, содержит только вещественные коэффициенты. Оно называется уравнением Дирака в *представлении Майорана* [5]

8.2. Алгебра матриц Дирака. Мы видим, таким образом, что уравнение Дирака определяется не столько явным видом матриц γ_μ , сколько их алгебраическими свойствами, заключенными в соотношениях (7.3.5). От данной совокупности матриц γ_μ можно перейти к другой γ'_μ при помощи преобразования подобия (8.1.2). Справедливо и обратное утверждение [6] (основная теорема о матрицах γ_μ): если две совокупности матриц γ_μ и γ'_μ удовлетворяют соотношениям (7.3.5), то существует матрица U , связывающая их посредством преобразования (8.1.2). Поэтому полезно изучить более детально алгебру матриц Дирака.

Рассмотрим совокупность всех различных произведений матриц γ_μ . Мы получим следующие 16 матриц:

$$\begin{aligned} & I, \\ & \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \\ & i\gamma_1\gamma_2, \quad i\gamma_2\gamma_3, \quad i\gamma_3\gamma_1, \quad i\gamma_1\gamma_4, \quad i\gamma_2\gamma_4, \quad i\gamma_3\gamma_4, \\ & i\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad i\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \quad i\gamma_3\gamma_1\gamma_4, \quad i\gamma_1\gamma_2\gamma_4, \\ & \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4. \end{aligned}$$

Мы будем обозначать их через Γ_j ($j = 1, 2, \dots, 16$). Коэффициенты в определении Γ_j выбраны так, чтобы выполнялось условие

$$\Gamma_j^2 = I. \quad (8.2.1)$$

Кроме того, Γ_j — эрмитовы матрицы, если матрицы γ_μ эрмитовы. Матрицы Γ_j можно записать также в виде

$$\Gamma_j \equiv I, \quad \gamma_\mu, \quad \sigma_{\mu\nu}, \quad i\gamma_5\gamma_\mu, \quad \gamma_5; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \quad (8.2.2)$$

где

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \quad (8.2.3)$$

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4.$$

Легко видеть, что произведение более чем четырех матриц γ_μ сводится в силу (7.3.5) к одной из матриц (8.2.2). Поэтому матрицы Γ_j образуют систему гиперкомплексных чисел. Это означает существование операции умножения, т. е. соотношения

$$\Gamma_j \Gamma_l = \sum_k b_k \Gamma_k \quad (8.2.4)$$

(b_k —некоторые комплексные числа), причем при $j \neq l$ в правую часть (8.2.4) не входит единичная матрица.

Отметим два важных свойства матриц Γ_j , которые легко проверить, используя их определение и соотношение (7.3.5). Во-первых, только единичная матрица I коммутирует со всеми матрицами Γ_j . Во-вторых, для каждой матрицы Γ_j (кроме I) можно указать другую матрицу $\Gamma_{j'}$, которая антикоммутирует с Γ_j ,

$$\Gamma_j \Gamma_{j'} + \Gamma_{j'} \Gamma_j = 0. \quad (8.2.5)$$

Приведем матрицы $\Gamma_{j'}$, отвечающие данным Γ_j ,

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= \gamma_\mu, \quad \sigma_{\mu\nu}, \quad i\gamma_5\gamma_\mu, \quad \gamma_5, \\ \Gamma_{j'} &= \gamma_5, \quad \gamma_\mu, \quad \gamma_5, \quad \gamma_\mu. \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

Отсюда следует важное свойство всех матриц Γ_j (кроме I); их следы равны нулю. Действительно, используя (8.2.5), имеем

$$\text{Sp } \Gamma_j = -\text{Sp } \Gamma_{j'} \Gamma_j \Gamma_{j'},$$

и так как матрицы под знаком Sp можно циклически переставлять, то, учитывая (8.2.1), получим

$$\text{Sp } \Gamma_j = -\text{Sp } \Gamma_j \Gamma_{j'}^2 = -\text{Sp } \Gamma_j,$$

т. е.

$$\text{Sp } \Gamma_j = 0, \quad \Gamma_j \neq I. \quad (8.2.7)$$

В частности,

$$\text{Sp } \gamma_\mu = 0, \quad \text{Sp } \gamma_5 = 0. \quad (8.2.8)$$

Используя (8.2.4), (8.2.7) и (8.2.1), легко заключить, что

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \Gamma_i \Gamma_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 16). \quad (8.2.9)$$

Из (8.2.9) непосредственно следует линейная независимость матриц Γ_j . Действительно, пусть имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{16} a_k \Gamma_k = 0.$$

Умножая это равенство на Γ_j и беря след, получим

$$a_j = 0.$$

Подчеркнем, что доказательство линейной независимости Γ_j базируется только на соотношениях коммутации для матриц γ_μ . Мы не пользовались тем, что это четырехрядные матрицы. Наоборот, из существования 16 линейно независимых матриц Γ_j следует, что они (т. е. и матрицы γ_μ) не могут быть реализованы с числом строк и столбцов, меньшим четырех. Представления γ_μ в виде матриц большей размерности возможны, но такие представления приводимы, т.е. могут быть путем преобразования подобия

приведены к виду

$$\begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_\mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \gamma_\mu & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где γ_μ — 4-рядные матрицы. Мы не будем приводить доказательства этой теоремы.

8.3. Вычисление следов матриц. Поскольку уравнение Дирака определено с точностью до преобразования подобия (8.1.1), (8.1.2), то физические результаты, получаемые на основе этого уравнения, должны выражаться через величины, инвариантные относительно таких преобразований. Таким практически очень важным инвариантом является след произведения определенного числа матриц γ_μ . Здесь мы получим формулы для нахождения этих следов.

Прежде всего легко видеть, что след произведения нечетного числа матриц γ_μ равен нулю

$$\text{Sp } \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2n+1}} = 0. \quad (8.3.1)$$

Действительно, так как μ_i может принимать только четыре различных значения, то при $n > 1$ среди значений μ_i есть пары одинаковых. Используя перестановочные соотношения (7.3.5), можно свести матрицу $\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2n+1}}$ к виду γ_μ или $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda$ ($\mu \neq \nu \neq \lambda$), т. е. к одной из матриц Γ_j , след которых равен нулю согласно (8.2.7).

Определим теперь следы произведений четного числа матриц γ_μ . Если число их равно двум, то мы имеем частный случай формулы (8.2.9)

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_j \gamma_l = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, 2, 3, 4. \quad (8.3.2)$$

Определим далее $\text{Sp } \gamma_j \gamma_l \gamma_k \gamma_n$. Замечая, что

$$\gamma_j \gamma_l \gamma_k \gamma_n = 2\delta_{jl} \gamma_k \gamma_n - \gamma_l \gamma_j \gamma_k \gamma_n,$$

$$\gamma_l \gamma_j \gamma_k \gamma_n = 2\delta_{jk} \gamma_l \gamma_n - \gamma_l \gamma_k \gamma_j \gamma_n,$$

$$\gamma_l \gamma_k \gamma_j \gamma_n = 2\delta_{jn} \gamma_l \gamma_k - \gamma_l \gamma_k \gamma_n \gamma_j,$$

откуда

$$\gamma_j \gamma_l \gamma_k \gamma_n = 2\delta_{jl} \gamma_k \gamma_n - 2\delta_{jk} \gamma_l \gamma_n + 2\delta_{jn} \gamma_l \gamma_k - \gamma_l \gamma_k \gamma_n \gamma_j$$

и, учитывая, что

$$\text{Sp } \gamma_j \gamma_l \gamma_k \gamma_n = \text{Sp } \gamma_l \gamma_k \gamma_n \gamma_j,$$

найдем, используя (8.3.2),

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_j \gamma_l \gamma_k \gamma_n = \delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{jn} \delta_{lk}. \quad (8.3.3)$$

Аналогичным образом легко показать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_l \gamma_k \gamma_i \gamma_m \gamma_r \gamma_s = & \delta_{ik} \delta_{lm} \delta_{rs} + \delta_{is} \delta_{kl} \delta_{mr} + \delta_{ik} \delta_{ls} \delta_{mr} + \delta_{im} \delta_{kl} \delta_{rs} + \\ & + \delta_{is} \delta_{kr} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{kr} \delta_{ms} + \delta_{im} \delta_{ks} \delta_{lr} + \delta_{ir} \delta_{km} \delta_{ls} - \delta_{is} \delta_{km} \delta_{lr} - \delta_{im} \delta_{kr} \delta_{ls} - \\ & - \delta_{ik} \delta_{lr} \delta_{ms} - \delta_{il} \delta_{km} \delta_{rs} - \delta_{il} \delta_{ks} \delta_{mr} - \delta_{ir} \delta_{kl} \delta_{ms} - \delta_{ir} \delta_{ks} \delta_{lm}. \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

В общем случае

$$\frac{1}{4} \text{Sp } (\gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_{2n}}) = \sum (-1)^N \delta_{i_k} \delta_{lm} \dots, \quad (8.3.5)$$

где i, k, l, m, \dots — некоторая комбинация индексов i_1, i_2, \dots, i_{2n} и сумма берется по всем возможным комбинациям пар чисел i, k, l, m, \dots ; N — число парных перестановок, переводящих последовательность i_1, i_2, \dots, i_{2n} в i, k, \dots , причем порядок следования индексов внутри каждой пары отвечает их порядку в последовательности i_1, i_2, \dots, i_{2n} . Число слагаемых в сумме равно, очевидно, $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n - 1)$.

Знаки отдельных слагаемых в (8.3.5) удобно находить следующим образом [7]. Сопоставим каждой матрице γ_i точку на окружности и расположим их в таком же порядке, в каком они расположены в левой части равенства. Соединим далее эти точки попарно прямыми линиями. Тогда каждой прямой, соединяющей точки i и k , соответствует множитель δ_{ik} , а каждому способу соединения точек — слагаемое $(-1)^N \delta_{ik} \delta_{lm} \dots$, где N — число точек пересечения прямых.

Из (8.3.2) и (8.3.3) следуют формулы

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \hat{A}_1 \hat{A}_2 = A_1 A_2,$$

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \hat{A}_4 = (A_1 A_2)(A_3 A_4) + (A_1 A_4)(A_2 A_3) - (A_1 A_3)(A_2 A_4), \quad (8.3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Sp} (\hat{A}_1 + a_1)(\hat{A}_2 + a_2)(\hat{A}_3 + a_3)(\hat{A}_4 + a_4) = \\ = (A_1 A_2 + a_1 a_2)(A_3 A_4 + a_3 a_4) + (A_1 A_4 + a_1 a_4)(A_2 A_3 + a_2 a_3) - \\ - (A_1 A_3 + a_1 a_3)(A_2 A_4 + a_2 a_4), \end{aligned}$$

где A_i — произвольные 4-векторы,

$$\hat{A} = A_\mu \gamma_\mu, \quad AB = A_\mu B_\mu$$

и a_i — произвольные комплексные числа.

Из (8.3.5) легко заключить, что

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \gamma_5 \gamma_i \gamma_k \gamma_l \gamma_m = \varepsilon_{iklm}, \quad (8.3.7)$$

где $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \frac{1}{4!} \varepsilon_{iklm} \gamma_i \gamma_k \gamma_l \gamma_m$ и ε_{iklm} — единичный антисимметричный тензор.

Часто приходится встречаться с матрицами вида

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^4 \gamma_i Q \gamma_i,$$

где Q — произведение некоторого числа матриц γ_μ или линейная комбинация таких произведений. Используя (7.3.5), нетрудно преобразовать такие суммы к виду

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^4 \gamma_i \gamma_i Q' = 4Q',$$

где Q' — некоторая матрица.

Например,

$$\begin{aligned} \gamma_i \gamma_k \gamma_i = -2\gamma_k, \quad \gamma_i \hat{A} \gamma_i = -2\hat{A}, \\ \gamma_i \gamma_k \gamma_l \gamma_i = 4\delta_{kl} I, \quad \gamma_i \hat{A} \hat{B} \gamma_i = 4\hat{A} \hat{B}, \\ \gamma_i \gamma_k \gamma_l \gamma_m \gamma_i = -2\gamma_m \gamma_l \gamma_k, \quad \gamma_i \hat{A} \hat{B} \hat{C} \gamma_i = -2\hat{C} \hat{B} \hat{A}, \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

где A, B, C — произвольные 4-векторы (подразумевается суммирование по i от 1 до 4).

Если

$$Q = \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_{2n+1}},$$

то [8]

$$\gamma_i Q \gamma_i = -2Q, \quad (8.3.9)$$

$$\gamma_i Q \gamma_k \gamma_i = 2(\gamma_k Q + Q \gamma_k),$$

где $Q_R = \gamma_{i_{2n+1}} \gamma_{i_{2n}} \dots \gamma_{i_1}$. Эти формулы справедливы также и в том случае, когда Q , кроме нечетного числа матриц γ_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), содержит в виде множителей произвольное число матриц γ_5 (при этом $\gamma_{5R} = \gamma_5$).

8.4. Прямые произведения матриц Γ_j . В приложениях встречается задача о выражении величины $(\bar{\psi}_1 \Gamma_i \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Gamma_k \psi_4)$, где Γ_i, Γ_k ($i, k = 1, 2, \dots, 16$) — матрицы (8.2.2) и $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ — некоторые биспиноры, через величины $(\bar{\psi}_1 \Gamma_l \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Gamma_m \psi_2)$,

$$(\bar{\psi}_1 \Gamma_i \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Gamma_k \psi_4) = \sum_{l, m=1}^{16} C_{iklm} (\bar{\psi}_1 \Gamma_l \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Gamma_m \psi_2).$$

Входящие сюда коэффициенты C_{iklm} представляют собой, очевидно, коэффициенты разложения прямого произведения матриц $\Gamma_i \times \Gamma_k$ по прямым произведениям матриц этого же типа, только с переставленными индексами:

$$(\Gamma_i)_{\alpha\beta} (\Gamma_k)_{\rho\sigma} = \sum_{l, m=1}^{16} C_{iklm} (\Gamma_l)_{\alpha\sigma} (\Gamma_m)_{\rho\beta}. \quad (8.4.1)$$

Коэффициенты C_{iklm} могут быть найдены из условия полноты системы матриц Γ_i :

$$\frac{1}{4} \sum_i (\Gamma_i)_{\alpha\sigma} (\Gamma_i)_{\rho\beta} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\rho\sigma}. \quad (8.4.2)$$

Для доказательства (8.4.2) рассмотрим разложение произвольной (4×4) матрицы Q по матрицам Γ_k :

$$Q = \sum_{k=1}^{16} c_k \Gamma_k.$$

Умножая это уравнение на Γ_i и используя (8.2.8), получим

$$c_i = \frac{1}{4} \text{Sp}(Q \Gamma_i) = \frac{1}{4} Q_{\rho\lambda} (\Gamma_i)_{\lambda\rho},$$

т. е.

$$Q_{\alpha\sigma} = \frac{1}{4} Q_{\rho\lambda} \sum_i (\Gamma_i)_{\lambda\rho} (\Gamma_i)_{\alpha\sigma}. \quad (8.4.3)$$

Если эту формулу применить к матрице Q , у которой отличен от нуля только один элемент при $\alpha = \beta, \sigma = \rho$, т. е. $Q_{\alpha\sigma} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\rho\sigma}$, то мы придем к (8.4.2).

Чтобы получить коэффициенты C_{iklm} , достаточно представить левую часть (8.4.1) в виде

$$(\Gamma_i)_{\alpha\beta} (\Gamma_k)_{\rho\sigma} \equiv (\Gamma_i)_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha'\beta} \delta_{\rho\beta'} (\Gamma_k)_{\beta'\sigma}$$

и использовать (8.4.2), что даст

$$(\Gamma_i)_{\alpha\beta} (\Gamma_k)_{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \sum_l (\Gamma_i \Gamma_l \Gamma_k)_{\alpha\sigma} (\Gamma_l)_{\rho\beta}. \quad (8.4.4)$$

Разложив матрицу $\Gamma_i \Gamma_l \Gamma_k$ по матрицам Γ_m , получим

$$C_{iklm} = \frac{1}{16} \text{Sp } \Gamma_i \Gamma_l \Gamma_k \Gamma_m. \quad (8.4.5)$$

Приведем некоторые соотношения, вытекающие из (8.4.1) и (8.4.5) [9]:

$$\begin{aligned} I \times I &= \frac{1}{4} \left\{ I \times I + \gamma_\mu \times \gamma_\mu + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \times \sigma_{\mu\nu} - \gamma_5 \gamma_\mu \times \gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_5 \times \gamma_5 \right\}, \\ \gamma_\mu \times \gamma_\mu &= I \times I - \frac{1}{2} \gamma_\mu \times \gamma_\mu - \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_\mu \times \gamma_5 \gamma_\mu - \gamma_5 \times \gamma_5, \\ \sigma_{\mu\nu} \times \sigma_{\mu\nu} &= 3I \times I - \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \times \sigma_{\mu\nu} + 3\gamma_5 \times \gamma_5, \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 \gamma_\mu \times \gamma_5 \gamma_\mu &= -I \times I - \frac{1}{2} \gamma_\mu \times \gamma_\mu - \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_\mu \times \gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_5 \times \gamma_5, \\ \gamma_5 \times \gamma_5 &= \frac{1}{4} \left\{ I \times I - \gamma_\mu \times \gamma_\mu + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \times \sigma_{\mu\nu} + \gamma_5 \gamma_\mu \times \gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_5 \times \gamma_5 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь в левой части равенств множитель перед знаком прямого произведения \times подразумевается с индексами $\alpha\beta$, а второй множитель — с индексами $\rho\sigma$, а в правой части первый множитель имеет индексы $\alpha\sigma$, второй — $\rho\beta$; по μ, ν подразумевается суммирование от 1 до 4;

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu).$$

Приведем некоторые комбинации прямых произведений, обладающих свойством

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta\rho\sigma}^{(k)} &= -\Pi_{\alpha\sigma\rho\beta}^{(k)}: \\ \Pi^{(1)} &= \gamma_\mu \times \gamma_\mu + \gamma_5 \times \gamma_5 - I \times I, \\ \Pi^{(2)} &= \gamma_\mu \times \gamma_\mu + \gamma_5 \gamma_\mu \times \gamma_5 \gamma_\mu, \\ \Pi^{(3)} &= \gamma_5 \gamma_\mu \times \gamma_\mu + \gamma_\mu \times \gamma_5 \gamma_\mu, \\ \Pi^{(4)} &= (I \pm \gamma_5) \gamma_\mu \times (I \pm \gamma_5) \gamma_\mu. \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

Имеют место также следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{ \gamma_\mu \times \gamma_\mu - \gamma_5 \gamma_\mu \times \gamma_5 \gamma_\mu \} &= I \times I - \gamma_5 \times \gamma_5, \\ \frac{1}{2} (I \pm \gamma_5) \gamma_\mu \times (I \mp \gamma_5) \gamma_\mu &= (I \pm \gamma_5) (I \mp \gamma_5). \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

8.5. Преобразования Лоренца для биспинора. Докажем теперь релятивистскую инвариантность уравнения Дирака, т. е. инвариантность по отношению к преобразованиям собственной группы Лоренца, инверсии и обращению времени. Начнем с собственных преобразований Лоренца.

Утверждение об инвариантности уравнений (7.4.2) и (7.4.3)

$$\begin{aligned} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x) \right) + m \right] \psi(x) &= 0, \\ \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu(x) \right) - m \right] \bar{\psi}(x) &= 0 \end{aligned}$$

относительно собственных преобразований Лоренца означает, что для каждого собственного преобразования Лоренца

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$$

и соответственно преобразования 4-импульса и 4-потенциала

$$\begin{aligned} p_\mu &\rightarrow p'_\mu = a_{\mu\nu} p_\nu, \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x') = a_{\mu\nu} A_\nu(x) \end{aligned} \quad (8.5.1)$$

можно найти такое линейное преобразование волновой функции электрона

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S\psi(x), \quad (8.5.2)$$

где $S = S(a)$ — некоторая четырехрядная неособенная матрица, являющаяся функцией матрицы a , при котором $\psi'(x')$ и $\bar{\psi}'(x') = \psi'(x') \gamma_4$ будут удовлетворять уравнениям, имеющим такой же вид, как и исходные уравнения:

$$\begin{aligned} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} - ieA'_\mu(x') \right) + m \right] \psi'(x') &= 0, \\ \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} + ieA'_\mu(x') \right) - m \right] \bar{\psi}'(x') &= 0. \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

Докажем, что такое преобразование существует. Подставим для этого (8.5.2) в первое из последних уравнений и умножим его слева на S^{-1} . Учитывая (8.5.1), мы получим

$$S^{-1} \left[\gamma_\mu a_{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - ieA_\nu(x) \right) + m \right] S\psi(x) = 0.$$

Это уравнение должно совпадать с исходным уравнением Дирака для $\psi(x)$, для чего необходимо выполнение условий

$$\gamma_\nu^a = S\gamma_\nu S^{-1}, \quad (8.5.4)$$

где

$$\gamma_\nu^a = \gamma_\mu a_{\mu\nu}.$$

Чтобы убедиться в существовании матрицы S , удовлетворяющей этим условиям, достаточно заметить, что матрицы γ_ν^a удовлетворяют перестановочным соотношениям матриц Дирака

$$\gamma_\mu^a \gamma_\nu^a + \gamma_\nu^a \gamma_\mu^a = 2\delta_{\mu\nu} I.$$

Отсюда, согласно фундаментальной теореме о матрицах Дирака, следует, что существует преобразование подобия, связывающее матрицы γ_μ^a и γ_μ , каковым и является соотношение (8.5.4).

Легко видеть, что при преобразовании (8.5.2) биспинор $\bar{\psi}(x)$ преобразуется согласно закону

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}. \quad (8.5.5)$$

Действительно, подставляя это выражение во второе уравнение (8.5.3) и умножая его слева на S^T , мы приходим к исходному уравнению для $\bar{\psi}(x)$, если выполняются условия

$$S^T \gamma_\mu^T (S^{-1})^T a_{\mu\nu} = \gamma_\nu^T,$$

которые тождественны условиям (8.5.4).

Учтем теперь, что функции $\bar{\psi}'(x')$ и $\psi'(x')$ связаны между собой так же, как и функции $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(x)$,

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^+ \gamma_4.$$

Подставляя сюда (8.5.2) и (8.5.5), получим

$$\bar{\psi}(x) S^{-1} = (S\psi(x))^+ \gamma_4 = \bar{\psi}(x) \gamma_4^{-1} S^+ \gamma_4,$$

ткуда

$$S^+ \gamma_4 = \gamma_4 S^{-1}. \quad (8.5.6)$$

Этому условию, помимо соотношений (8.5.4), должна удовлетворять матрица S .

Найдем явный вид матрицы S . Рассмотрим сперва бесконечно малое собственное преобразование Лоренца

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}, \quad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}, \quad |\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1.$$

Ему соответствует преобразование (8.5.4), бесконечно мало отличающееся от единичного

$$S = I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I^{\mu\nu}, \quad I^{\mu\nu} = -I^{\nu\mu}, \quad (8.5.7)$$

где $I^{\mu\nu}$ — так называемые инфинитезимальные операторы преобразования. Подставляя (8.5.7) в (8.5.4), получим

$$\gamma_\mu I^{\lambda\nu} - I^{\lambda\nu} \gamma_\mu = \delta_{\lambda\mu} \gamma_\nu - \delta_{\nu\mu} \gamma_\lambda. \quad (8.5.8)$$

Этим соотношениям можно удовлетворить, положив

$$I^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu}. \quad (8.5.9)$$

При этом будет удовлетворено также условие (8.5.6).

Зная инфинитезимальные операторы $I^{\mu\nu}$, легко найти вид матрицы S , соответствующей произвольному конечному преобразованию Лоренца $x' = ax$.

Рассмотрим два типа преобразований, входящих в собственную группу Лоренца: преобразования пространственного поворота и преобразования, связывающие различные инерциальные системы отсчета.

В случае бесконечно малого пространственного поворота, очевидно,

$$\varepsilon_{jkl} = -\varepsilon_{jkl} d\theta_l, \quad j, k, l = 1, 2, 3,$$

где $d\theta$ — бесконечно малый угол поворота системы координат, и матрица $S(d\theta)$, соответствующая этому повороту, имеет вид

$$S(d\theta) = I + \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} I^{jk} = I - \frac{i}{2} \Sigma d\theta, \quad (8.5.10)$$

где

$$\Sigma_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} \sigma_{kl} = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} = i\gamma_4 \gamma_5 \gamma_j. \quad (8.5.11)$$

Пусть теперь происходит вращение вокруг заданной оси, направление которой характеризуется единичным вектором \mathbf{n} , на конечный угол θ . Так как при этом вращения на различные углы независимы, то

$$S(\theta + d\theta) = S(\theta) S(d\theta) = S(\theta) \left(I - \frac{i}{2} \Sigma \mathbf{n} d\theta \right),$$

откуда

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta} = -\frac{i}{2} \Sigma \mathbf{n} S(\theta),$$

и, следовательно,

$$S(\theta) = e^{-i \Sigma \mathbf{n} \frac{\theta}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} - i \Sigma \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (8.5.12)$$

Эта формула показывает, что матрицу $\frac{1}{2} \Sigma$ можно интерпретировать как оператор спина электрона.

Из (8.5.12), (8.5.11) следует, что спиноры φ и χ , образующие биспинор ψ , преобразуются при вращениях независимо друг от друга по одинаковому закону (7.1.6). Это, впрочем, очевидно уже из первоначальной формулировки уравнения Дирака в виде (7.2.1).

Обратим внимание на то, что в $S(\theta)$ входит половинный угол вращения. Благодаря этому при вращении на угол $\theta = 2\pi$ преобразованная волновая функция отличается знаком от исходной,

$$S(2\pi) = -1.$$

Это обстоятельство связано со спинорным характером функции $\psi(x)$.

Рассмотрим теперь преобразование Лоренца, связывающие различные инерциальные системы отсчета. Если относительное движение систем происходит вдоль оси x_1 , то такие преобразования можно рассматривать как вращения в плоскости (x_1, x_4) с мнимым углом вращения $-i\vartheta$, где $\text{th } \vartheta = v$ и v — относительная скорость систем. При этом у $\varepsilon_{\mu\nu}$ будут отличны от нуля только две компоненты, $\varepsilon_{41} = -\varepsilon_{14} = i d\vartheta$, и, следовательно, бесконечно малое преобразование волновой функции будет иметь вид

$$S(d\vartheta) = I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I^{\mu\nu} = I - \frac{i}{2} \gamma_1 \gamma_4 d\vartheta = I - \frac{1}{2} \alpha_1 d\vartheta.$$

Если движение происходит не вдоль оси x_1 , а вдоль произвольного направления, характеризуемого единичным вектором \mathbf{n} , то это выражение должно быть заменено на

$$S(d\vartheta) = I - \frac{1}{2} \alpha \mathbf{n} d\vartheta.$$

Отсюда легко, повторяя рассуждения, приводящие к (8.5.12), получить формулу для S в случае конечного поворота на угол ϑ

$$S(\vartheta) = e^{-\frac{1}{2} \alpha \mathbf{n} \vartheta}, \quad (8.5.13)$$

где $\text{th } \vartheta = v$.

Так как матрицы α_i в представлении (7.2.3) недиагональны (в смысле разбиения на двумерные матрицы), то спиноры φ и χ в выражении (7.2.2) для биспинора ψ преобразуются при лоренцевых преобразованиях (8.5.13) не независимо друг от друга; иначе говоря, каждый из этих спиноров в отдельности не является релятивистски ковариантной величиной.

Если однако выбрать представление матриц Дирака в виде (8.1.4)

$$\Sigma' = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \alpha' = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

то спиноры ξ , η , образующие преобразованный при унитарном преобразовании (8.1.3) биспинор ψ' , будут при лоренцевых преобразованиях (8.5.13) преобразовываться независимо друг от друга. Поэтому их можно назвать 4-спинорами.

Совокупность матриц S , определяющих преобразования волновой функции $\psi(x)$ при собственных лоренцевых преобразованиях, образует некоторое представление собственной группы Лоренца. Эти матрицы, как мы видели, определяются их инфинитезимальными операторами $I^{\mu\nu}$. Различным представлениям одной и той же группы (осуществляемым, например, волновыми функциями различных полей в случае группы Лоренца) соответствуют различные инфинитезимальные операторы. Однако

оказывается, что коммутационные свойства этих операторов не зависят от конкретного вида представления группы. Более точно, справедлива теорема, согласно которой коммутатор двух инфинитезимальных операторов равен сумме инфинитезимальных операторов, умноженных на некоторые численные коэффициенты, одинаковые для всех представлений группы.

Инфинитезимальные операторы $I^{\mu\nu}$, определяемые формулами (8.5.9), удовлетворяют, как легко убедиться, соотношениям

$$[I^{\mu\nu}, I^{\lambda\rho}] = \delta_{\mu\rho} I^{\lambda\nu} + \delta_{\nu\lambda} I^{\mu\rho} - \delta_{\nu\rho} I^{\mu\lambda} - \delta_{\mu\lambda} I^{\nu\rho}. \quad (8.5.14)$$

Сформулированная теорема показывает, что инфинитезимальные операторы всех представлений непрерывной группы Лоренца удовлетворяют этим же соотношениям.

8.6. Пространственное отражение, обращение времени и зарядовое сопряжение. Перейдем к доказательству инвариантности уравнения Дирака относительно дискретных преобразований полной группы Лоренца — пространственного отражения (инверсии) и обращения времени.

Рассмотрим сперва преобразование пространственного отражения

$$x \rightarrow x' = a_p x,$$

где

$$a_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которому соответствует преобразование 4-потенциала электромагнитного поля

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, t) &\rightarrow A'(-\mathbf{r}, t) = -A(\mathbf{r}, t), \\ A_4(\mathbf{r}, t) &\rightarrow A_4(-\mathbf{r}, t) = A_4(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Инвариантность уравнений Дирака относительно этого преобразования означает, что существует линейное преобразование биспиноров

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \psi'(-\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}\psi(\mathbf{r}, t), \\ \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \bar{\psi}'(-\mathbf{r}, t) = \bar{\psi}(\mathbf{r}, t)\mathbf{P}^{-1}, \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

где \mathbf{P} — некоторая неособенная 4×4 -матрица.

Повторяя рассуждения, приводящие к (8.5.4), легко убедиться, что матрица \mathbf{P} должна удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \gamma_i \mathbf{P} &= -\mathbf{P} \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \gamma_4 \mathbf{P} &= \mathbf{P} \gamma_4 \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

и, кроме того, условию (8.5.6)

$$\mathbf{P}^+ \gamma_4 = \gamma_4 \mathbf{P}^{-1}.$$

Из этих условий следует

$$\mathbf{P} = \eta_P \gamma_4, \quad (8.6.3)$$

где η_P — численный множитель, модуль которого равен единице,

$$|\eta_P| = 1.$$

Для определения величины η_P мы можем исходить из того, что двойное отражение должно быть эквивалентно либо тождественному преобразова-

нию, либо вращению на угол 2π . В первом случае

$$\eta_P^2 = 1,$$

и, следовательно,

$$\eta_P = \pm 1,$$

а во втором случае, согласно (8.5.12),

$$\eta_P^2 = -1,$$

и, следовательно,

$$\eta_P = \pm i.$$

В конце этого раздела мы сформулируем дополнительное требование, на основании которого должен быть сделан выбор $\eta_P^2 = -1$.

В зависимости от знака η_P следует различать два типа биспиноров $\psi(x)$. Это значит, что в принципе возможно существование двух типов частиц, подчиняющихся одному и тому же уравнению Дирака, но отличающихся характером преобразования при пространственном отражении. Об этих частицах говорят, что они обладают различной *внутренней четностью*.

Из (8.6.1) и (7.2.3) следует, что двухкомпонентные спиноры φ и χ преобразуются при пространственном отражении по законам

$$P\varphi(r, t) = \eta_P \varphi(-r, t), \quad P\chi(r, t) = -\eta_P \chi(-r, t),$$

т. е. независимо друг от друга, причем четности φ и χ противоположны. Этот результат следует непосредственно из уравнений (7.2.1), если учесть, что оператор спина является аксиально-векторным оператором.

Из (8.6.3) и (8.1.4) следует, что двухкомпонентные 4-спиноры ξ и η преобразуются при пространственном отражении по законам

$$P\xi(r, t) = \eta_P \eta(-r, t), \quad P\eta(r, t) = \eta_P \xi(-r, t).$$

Таким образом, 4-спиноры ξ и η , преобразующиеся независимо друг от друга при преобразованиях собственной группы Лоренца, переходят друг в друга при преобразовании пространственного отражения. По этой причине уравнение Вейля (8.1.8), а также уравнение (7.4.7) не обладают инвариантностью относительно пространственных отражений.

Перейдем к рассмотрению преобразования обращения времени. Здесь мы сталкиваемся с принципиально новым обстоятельством. Так как 4-векторы $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ и $A_\mu(x)$, входящие в уравнение Дирака (7.4.2) в виде линейной комбинации, обладают различной t -четностью (см § 1.5), то никакое линейное преобразование биспинора $\psi(x)$ не может вернуть уравнению прежнюю форму.

Как известно, в нерелятивистской квантовой механике обращение времени сопровождается антилинейным преобразованием волновой функции

$$\psi(r, t) \rightarrow \psi^*(r, -t).$$

Мы покажем теперь, что можно найти такое антилинейное преобразование биспинора

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = T\bar{\psi}(x), \quad (8.6.4)$$

где

$$x' = a_T x, \quad a_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в результате которого уравнения Дирака в обращенной системе отсчета имеют ту же форму, что и в исходной.

Предполагая, что $\psi'(x')$ удовлетворяет уравнению Дирака

$$\left[\gamma_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} - ieA'_{\mu}(x') \right) + m \right] \psi'(x') = 0,$$

и произведя в нем подстановки

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = (a_T)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}, \quad A'_{\mu}(x') = -(a_T)_{\mu\nu} A_{\nu}(x),$$

получим

$$\left[\gamma'_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + ieA_{\nu}(x) \right) + m \right] \Gamma \bar{\psi}(x) = 0,$$

где

$$\gamma'_{\nu} = (a_T)_{\nu\mu} \gamma_{\mu},$$

т. е.

$$\gamma'_j = \gamma_j, \quad \gamma'_4 = -\gamma_4 \quad (j=1, 2, 3).$$

Это уравнение будет совпадать с уравнением для $\bar{\psi}(x)$

$$\left[\gamma_{\mu}^T \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ieA_{\mu}(x) \right) - m \right] \bar{\psi}(x) = 0,$$

если матрица Γ удовлетворяет условиям

$$\Gamma^{-1} \gamma'_{\mu} \Gamma = -\gamma_{\mu}^T, \quad (8.6.5)$$

т. е.

$$\begin{aligned} -\gamma_j \Gamma &= \Gamma \gamma_j^T, \quad j=1, 2, 3, \\ \gamma_4 \Gamma &= \Gamma \gamma_4^T. \end{aligned}$$

Легко видеть, что матрицы γ'_{μ} , а также матрицы γ_{μ}^T удовлетворяют перестановочным соотношениям (7.3.5). Поэтому, в силу фундаментальной теоремы § 8.2 о матрицах Дирака, матрица Γ , удовлетворяющая условиям (8.6.5), существует. Прежде чем найти ее явный вид, заметим, что, как легко убедиться, преобразованию (8.6.4) для биспинора $\psi(x)$ соответствует преобразование

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \psi(x) \Gamma^{-1} \quad (8.6.6)$$

для биспинора $\bar{\psi}(x)$. С другой стороны, функции $\psi'(x')$ и $\bar{\psi}'(x')$ должны быть связаны между собой так же, как и функции $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, т. е.

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^+ \gamma_4.$$

Подставляя сюда (8.6.4) и (8.6.6), получим

$$\psi(x) \Gamma^{-1} = (\Gamma \bar{\psi}(x))^+ \gamma_4 = ((\Gamma \psi^+(x)) \gamma_4)^+ \gamma_4 = \psi(x) (\Gamma \gamma_4^T)^+ \gamma_4.$$

Но, согласно (8.6.5),

$$(\Gamma \gamma_4^T)^+ = (\gamma_4 \Gamma)^+ = \Gamma^+ \gamma_4.$$

Поэтому

$$\Gamma^{-1} = \Gamma^+,$$

т. е. матрица Γ должна быть унитарной,

$$\Gamma \Gamma^+ = I.$$

Легко найти явный вид матрицы Γ в том случае, когда матрицы γ_μ определяются формулами (7.3.1). Замечая, что при этом

$$\gamma_1^T = -\gamma_1, \quad \gamma_2^T = \gamma_2, \quad \gamma_3^T = -\gamma_3, \quad \gamma_4^T = \gamma_4,$$

получим, согласно (8.6.5),

$$\gamma_1 \Gamma = \Gamma \gamma_1, \quad \gamma_2 \Gamma = -\Gamma \gamma_2, \quad \gamma_3 \Gamma = \Gamma \gamma_3, \quad \gamma_4 \Gamma = \Gamma \gamma_4.$$

Этим соотношениям удовлетворяет, очевидно, матрица

$$\Gamma = \eta_T' \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4,$$

где η_T' — численный множитель, равный по модулю единице. К выбору этого множителя мы вернемся несколько позже.

Кроме пространственного отражения и обращения времени, существует еще одно дискретное преобразование, относительно которого инвариантны уравнения Дирака. Это преобразование, не входящее в полную группу Лоренца, носит название *зарядового сопряжения* и выражает симметрию теории относительно замены знака заряда электрона, или, что то же самое, симметрию относительно замены частицы античастицей.

Инвариантность уравнений Дирака относительно преобразования зарядового сопряжения означает, что если изменить знак 4-потенциала электромагнитного поля, т. е. произвести замену

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^c(x) = -A_\mu(x),$$

и одновременно произвести антилинейное преобразование биспиноров $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi^c(x) = \mathbf{C} \bar{\psi}(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}^c(x) = \mathbf{C}^{-1} \psi(x), \end{aligned} \quad (8.6.7)$$

где \mathbf{C} — некоторая неособенная 4×4 -матрица, то эту матрицу можно выбрать таким образом, что уравнения для биспиноров $\psi^c(x)$ и $\bar{\psi}^c(x)$ в поле $A_\mu^c(x)$ будут иметь такой же вид, как и исходные уравнения Дирака для $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ в поле $A_\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie A_\mu^c(x) \right) + m \right] \psi^c(x) &= 0, \\ \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ie A_\mu^c(x) \right) - m \right] \bar{\psi}^c(x) &= 0. \end{aligned} \quad (8.6.8)$$

Чтобы доказать существование матрицы \mathbf{C} , которая называется *матрицей зарядового сопряжения*, подставим в эти уравнения (8.6.7)

$$\begin{aligned} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ie A_\mu(x) \right) + m \right] \mathbf{C} \bar{\psi}(x) &= 0, \\ \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie A_\mu(x) \right) - m \right] \mathbf{C}^{-1} \psi(x) &= 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы эти уравнения были тождественны исходным уравнениям Дирака для $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, должны, очевидно, выполняться условия

$$\mathbf{C}^{-1} \gamma_\mu \mathbf{C} = -\gamma_\mu^T. \quad (8.6.9)$$

Но матрицы γ_μ^T удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям, как и матрицы γ_μ . Поэтому, согласно фундаментальной теореме § 8.2 о матрицах Дирака, матрица \mathbf{C} существует.

В силу унитарности матриц γ_μ , γ_μ^T матрица \mathbf{C} также унитарна:

$$\mathbf{C}^+\mathbf{C} = I.$$

Кроме того, можно показать, что матрица \mathbf{C} кососимметрична:

$$\mathbf{C} = -\mathbf{C}^T. \quad (8.6.10)$$

Легко проверить, что, если матрицы γ_μ определяются формулами (7.3.1), то матрица \mathbf{C} имеет вид

$$\mathbf{C} = \gamma_2\gamma_4.$$

Поскольку потенциал электромагнитного поля входит в уравнения Дирака с коэффициентом e , то преобразование (8.6.7) можно интерпретировать как изменение знака заряда. Инвариантность уравнений Дирака относительно преобразования зарядового сопряжения показывает равноправность двух знаков заряда, ибо каждому решению уравнения Дирака $\psi(x)$, отвечающему одному знаку заряда, можно сопоставить решение $\mathbf{C}\bar{\psi}(x)$, отвечающее другому знаку и обладающему теми же свойствами.

Легко показать, что зарядово-сопряженные биспиноры $\psi^c(x)$ и $\bar{\psi}^c(x)$ преобразуются при преобразованиях собственной группы Лоренца так же, как и биспиноры $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$,

$$\begin{aligned} \psi^{c'}(x') &= S\psi^c(x), \\ \bar{\psi}^{c'}(x') &= \bar{\psi}^c(x)S^{-1}, \end{aligned} \quad (8.6.11)$$

где S — матрица преобразования биспиноров $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$. Действительно, предполагая, что связь между функциями $\psi^c(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ сохраняется при преобразованиях Лоренца, т. е.

$$\psi^{c'}(x') = \mathbf{C}\bar{\psi}'(x'),$$

имеем, согласно (8.5.5),

$$\psi^{c'}(x') = (\mathbf{C}\bar{\psi}(x))S^{-1} = \mathbf{C}(S^{-1})^T\bar{\psi}(x).$$

Поэтому, чтобы убедиться в справедливости (8.6.11), нужно проверить справедливость соотношения

$$\mathbf{S}\mathbf{C} = \mathbf{C}(S^{-1})^T.$$

Но это соотношение в силу (8.6.9) выполняется для инфинитезимальных операторов $I^{\mu\nu}$, определяемых формулой (8.5.9), и, следовательно, справедливо для всех S .

Рассмотрим теперь преобразование зарядово-сопряженных биспиноров при преобразовании пространственного отражения. Подставляя в соотношение

$$\psi^{c'}(x') = \mathbf{C}\bar{\psi}'(x'),$$

где $x' = a_P x$, выражение (8.6.1) для преобразованного биспинора $\bar{\psi}'(x')$

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)P^{-1}, \quad P = \eta_P\gamma_4,$$

получим

$$\psi^{c'}(x') = \frac{1}{\eta_P} \mathbf{C}\gamma_4^T\bar{\psi}(x),$$

откуда, согласно (8.6.9),

$$\psi^{c'}(x') = -\frac{1}{\eta_P} \gamma_4\psi^c(x). \quad (8.6.12)$$

Если потребовать, чтобы закон преобразования зарядово-сопряженных биспиноров $\psi^c(x)$, $\bar{\psi}^c(x)$ при пространственном отражении был таким же, как и закон преобразования биспиноров $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$,

$$\begin{aligned}\psi^{c'}(x') &= \eta_P \gamma_4 \psi^c(x), \\ \bar{\psi}^{c'}(x') &= \frac{1}{\eta_P} \bar{\psi}^c(x) \gamma_4,\end{aligned}$$

то мы приходим к однозначному выбору величины η_P^2 :

$$\eta_P^2 = -1,$$

т. е. только к двум значениям η_P , $\eta_P = \pm i$, как и указывалось выше.

Остановимся еще на преобразовании $\psi^c(x)$ и $\bar{\psi}^c(x)$ при обращении времени. Выше мы установили условия, которым удовлетворяет матрица T , определяющая это преобразование для биспиноров $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$. Легко связать эту матрицу с матрицей зарядового сопряжения. Действительно, полагая

$$T = C\Omega^T,$$

перепишем условия (8.6.5) в виде

$$\begin{aligned}\Omega \gamma_j \Omega^{-1} &= \gamma_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ -\Omega \gamma_4 \Omega^{-1} &= \gamma_4,\end{aligned}$$

откуда

$$\Omega = \eta_T \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3,$$

т. е.

$$T = \eta_T C \gamma_3^T \gamma_2^T \gamma_1^T, \quad (8.6.13)$$

где η_T — численный множитель, равный по модулю единице.

Потребуем теперь, чтобы зарядово-сопряженные биспиноры $\psi^c(x)$ и $\bar{\psi}^c(x)$ преобразовывались при обращении времени $x' = a_T x$ так же, как и $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$:

$$\begin{aligned}\psi^{c'}(x') &= T \bar{\psi}^c(x), \\ \bar{\psi}^{c'}(x') &= \psi^c(x) T^{-1}.\end{aligned}$$

Тогда, как легко видеть, добавляется условие

$$T^{-1} C = C^{-1} T^T,$$

т. е.

$$-C^{-1} \Omega^{-1} C = \Omega^T,$$

приводящее к однозначному выбору η_T^2 ,

$$\eta_T^2 = 1.$$

Таким образом, возможны только два значения η_T , $\eta_T = \pm 1$.

8.7. Ковариантные билинейные формы. Установив законы преобразования волновых функций электрона $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, можно выяснить, как преобразуются при лоренцевых преобразованиях различные произведения компонент этих функций. Мы ограничимся рассмотрением простейшего и наиболее важного случая, когда эти произведения построены билинейно из компонент $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, т. е. имеют вид $\bar{\psi}_1(x) Q \psi_2(x)$, где Q — произвольная четырехрядная матрица и ψ_1 , и ψ_2 относятся, вообще говоря, к разным состояниям электрона.

В § 8.2 мы видели, что матрицы

$$\Gamma_i = I, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_5, i\gamma_5\gamma_\mu$$

образуют систему 16 независимых четырехрядных матриц, по которым может быть разложена любая четырехрядная (квадратная) матрица Q :

$$Q = \frac{1}{4} \text{Sp } QI + \frac{1}{4} \text{Sp } (Q\gamma_\mu) \gamma_\mu + \frac{1}{4} \text{Sp } (Q\gamma_5) \gamma_5 + \\ + \frac{1}{8} \text{Sp } (Q\sigma_{\mu\nu}) \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \text{Sp } (Qi\gamma_5\gamma_\mu) i\gamma_5\gamma_\mu. \quad (8.7.1)$$

Поэтому достаточно выяснить, как преобразуются 16 независимых билинейных форм $\bar{\psi}(x) \Gamma_i \psi(x)$.

Рассмотрим прежде всего форму $\bar{\psi}(x) \psi(x)$. Используя соотношения §§ 8.5 и 8.6, имеем

$$\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \psi(x),$$

где преобразование $x \rightarrow x' = ax$ может быть либо собственным преобразованием Лоренца, либо пространственным отражением, либо обращением времени (в дальнейшем для краткости эти преобразования обозначаются соответственно через L, P, T).

Таким образом, $\bar{\psi}(x) \psi(x)$ представляет собой четырехмерный скаляр.

Рассмотрим далее четыре величины $\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$. Используя соотношения (8.5.2), (8.5.4) и (8.5.5), имеем для L -преобразований

$$\bar{\psi}'(x') \gamma_\mu \psi'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1} \gamma_\mu S \psi(x) = a_{\mu\nu} \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x),$$

т. е. величины $\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$ при L -преобразованиях ведут себя как четырехмерный вектор.

При P -преобразовании эти величины преобразуются, как полярный вектор, так как, согласно (8.6.1) и (8.6.3),

$$\bar{\psi}'(-\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\gamma} \psi'(-\mathbf{r}, t) = -\bar{\psi}(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\gamma} \psi(\mathbf{r}, t), \\ \bar{\psi}'(-\mathbf{r}, t) \gamma_4 \psi'(-\mathbf{r}, t) = \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) \gamma_4 \psi(\mathbf{r}, t).$$

При T -преобразовании величины $\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$ ведут себя как t -четный четырехмерный вектор, как и $A_\mu(x)$. Действительно, из (8.6.4) и (8.6.5) следует:

$$\bar{\psi}'(\mathbf{r}, -t) \boldsymbol{\gamma} \psi'(\mathbf{r}, -t) = -\bar{\psi}(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\gamma} \psi(\mathbf{r}, t), \\ \bar{\psi}'(\mathbf{r}, -t) \gamma_4 \psi'(\mathbf{r}, -t) = \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) \gamma_4 \psi(\mathbf{r}, t).$$

В § 7.5 были определены величины $s_\mu = i\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$, которые мы интерпретировали как 4-вектор плотности потока. Теперь мы видим, что они образуют четырехмерный полярный t -четный вектор, т. е. по своим свойствам преобразования они действительно соответствуют плотности потока.

Поступая аналогичным образом, можно показать, что величины $\bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \psi(x)$ преобразуются при L - и P -преобразованиях как компоненты четырехмерного тензора второго ранга, а величины $\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)$ и $\bar{\psi}(x) i\gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)$ — соответственно как псевдоскаляр и аксиальный вектор. При T -преобразовании величины $\bar{\psi}(x) \sigma_{jl} \psi(x)$, $\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)$ и $\bar{\psi}(x) i\gamma_5 \gamma_j \psi(x)$, где $j, l = 1, 2, 3$, изменяют свой знак, величины же $\bar{\psi}(x) \sigma_{j4} \psi(x)$ и $\bar{\psi}(x) i\gamma_5 \gamma_4 \psi(x)$ остаются неизменными.

Таким образом, 16 билинейных комбинаций образуют 5 ковариантных величин:

$$\begin{aligned}
 &\text{скаляр } S = \bar{\psi}\psi, \\
 &\text{вектор } V_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \\
 &\text{тензор } T_{\mu\nu} = \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi, \\
 &\text{аксиальный вектор } A_\mu = \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi, \\
 &\text{псевдоскаляр } P = \bar{\psi}\gamma_5\psi.
 \end{aligned} \tag{8.7.2}$$

Приведем выражения для компонент V , A , T в трехмерной форме:

$$\begin{aligned}
 V_j &= -i\psi^+\alpha_j\psi, & V_4 &= \psi^+\psi, \\
 A_j &= \psi^+\Sigma_j\psi, & A_4 &= -i\psi^+\gamma_5\psi, \\
 T_{jl} &= \varepsilon_{jlm}\psi^+\Sigma_m\psi, & T_{j4} &= \psi^+\beta\alpha_j\psi, \\
 & & j, l &= 1, 2, 3,
 \end{aligned} \tag{8.7.3}$$

где α_j и Σ_j , β — матрицы, определяемые формулами (7.3.1), (8.5.11).

Приведем еще общие законы преобразования форм $\bar{\psi}\Gamma_i\psi$ при L -, P - и T -преобразованиях:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\psi(x), \\
 \bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\psi'(x') &= \text{Sgn } a_{44} a_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x), \\
 \bar{\psi}'(x')\sigma_{\mu\nu}\psi'(x') &= \text{Sgn } a_{44} a_{\mu\rho}a_{\nu\lambda}\bar{\psi}(x)\sigma_{\rho\lambda}\psi(x), \\
 \bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') &= \det a \cdot \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), \\
 \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma_\mu\psi'(x') &= \det a \cdot a_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\nu\psi(x),
 \end{aligned}$$

где a — матрица преобразования $x \rightarrow x'$,

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$$

Найдем, наконец, как ведут себя эти величины при зарядовом сопряжении. Используя определения (8.6.7) и соотношения (8.6.9), из которых, в частности, следует, что

$$\mathbf{C}\gamma_5\mathbf{C}^{-1} = \gamma_5^T, \tag{8.7.4}$$

получим

$$\begin{aligned}
 S &= -\psi^c\bar{\psi}^c, \\
 V_\mu &= \psi^c\gamma_\mu^T\bar{\psi}^c, \\
 T_{\mu\nu} &= \psi^c\sigma_{\mu\nu}^T\bar{\psi}^c, \\
 A_\mu &= -\psi^c(\gamma_5\gamma_\mu)^T\bar{\psi}^c, \\
 P &= -\psi^c\gamma_5^T\bar{\psi}^c.
 \end{aligned} \tag{8.7.5}$$

8.8. Вариационный принцип для уравнений Дирака. Уравнения Дирака, так же как и уравнения Максвелла, можно рассматривать как уравнения некоторого поля. Это поле, описываемое биспинорами $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, называется, как мы уже говорили, электронно-позитронным полем (для краткости будем называть его просто электронным полем)

Сопоставив электронному полю определенную функцию Лагранжа, можно получить уравнения Дирака из вариационного принципа

$$\delta \int L d^4x = 0.$$

как это было разъяснено в общем виде в § 1 6.

Плотность функции Лагранжа электронного поля, которую мы будем обозначать через L_e , определяется однозначно, если потребовать, чтобы уравнения Дирака были дифференциальными уравнениями первого порядка. Действительно, функция L_e должна быть релятивистским инвариантом, а из $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и операторов $\partial/\partial x_\mu$ можно, согласно результатам предыдущего раздела, построить только одну билинейную инвариантную форму

$$L_e = -\frac{1}{2} \left(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) - \psi(x) \gamma_\mu^T \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{\psi}(x) \right) - m \bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (8.8.1)$$

Считая при варьировании L_e функции $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ независимыми, мы придем к уравнениям Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L_e}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial L_e}{\partial \psi} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L_e}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial L_e}{\partial \bar{\psi}} &= 0, \end{aligned}$$

которые после подстановки в них

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_e}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} &= -\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu, & \frac{\partial L_e}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \right)} &= \frac{1}{2} \gamma_\mu \psi, \\ \frac{\partial L_e}{\partial \psi} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - m \bar{\psi}, & \frac{\partial L_e}{\partial \bar{\psi}} &= -\frac{1}{2} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - m \psi \end{aligned}$$

переходят в уравнения Дирака для свободных электронов

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi(x) &= 0, \\ \left(\gamma_\mu^T \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \bar{\psi}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Имея выражение для плотности функции Лагранжа L_e , можно, так же как и в случае электромагнитного поля, определить тензор энергии-импульса электронного поля

$$T_{\mu\nu} = L \delta_{\mu\nu} - \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \right)} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \right)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \right).$$

Замечая, что функции $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, удовлетворяющие уравнениям Дирака, обращают плотность функции Лагранжа в нуль, получим

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\nu \psi \right). \quad (8.8.2)$$

Отсюда плотность энергии и плотность импульса поля равны соответственно

$$\begin{aligned} \omega &= -T_{44} = \frac{1}{2i} \left(-\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi \right), \\ \mathbf{p} &= \frac{1}{2i} \left(\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \psi^+}{\partial \mathbf{r}} \psi \right). \end{aligned} \quad (8.8.3)$$

Тензор энергии-импульса (8.9.2) в силу уравнений Дирака удовлетворяет условию

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0,$$

означающему, как мы знаем, сохранение 4-вектора

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3x. \quad (8.8.4)$$

Этот вектор представляет собой 4-вектор энергии-импульса электронного поля.

Зная $T_{\mu\nu}$, можно определить также тензор плотности момента количества движения электронного поля

$$M_{\mu\nu\lambda} = x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda} - \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda} \right)} I^{\mu\nu} \psi + \bar{\psi} I^{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\lambda} \right)}, \quad (8.8.5)$$

где $I^{\mu\nu}$ — инфинитезимальные операторы, определяемые формулами (8.5.9)

$$I^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu).$$

Тензор момента количества движения всего поля $M_{\mu\nu}$ представляет собой объемный интеграл от $M_{\mu\nu 4}$,

$$M_{\mu\nu} = -i \int M_{\mu\nu 4} d^3x. \quad (8.8.6)$$

Если электроны находятся во внешнем электромагнитном поле, то можно определить плотность функции Лагранжа взаимодействующих электронного и электромагнитного полей:

$$L = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x) \right) + m \right] \psi(x) + \\ + \frac{1}{2} \psi(x) \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu(x) \right) - m \right] \bar{\psi}(x), \quad (8.8.7)$$

где первое слагаемое представляет собой плотность функции Лагранжа свободного электромагнитного поля L_ν :

$$L_\nu = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}.$$

Считая при варьировании L величины $A_\mu(x)$ заданными функциями x , получим

$$\delta \int L d^4x = -\frac{1}{2} \int \delta \bar{\psi}(x) \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x) \right) + m \right] \psi(x) d^4x - \\ - \frac{1}{2} \int \bar{\psi}(x) \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x) \right) + m \right] \delta \psi(x) d^4x + \\ + \frac{1}{2} \int \delta \psi(x) \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu(x) \right) - m \right] \bar{\psi}(x) d^4x + \\ + \frac{1}{2} \int \psi(x) \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu(x) \right) - m \right] \delta \bar{\psi}(x) d^4x.$$

Интегрируя во втором и четвертом слагаемых по частям и считая величины $\delta \psi(x)$ и $\delta \bar{\psi}(x)$ независимыми, мы приходим к уравнениям Дирака

во внешнем электромагнитном поле (7.4.2), (7.4.3):

$$\begin{aligned} \left[\gamma_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ieA_{\mu}(x) \right) + m \right] \psi(x) &= 0, \\ \left[\gamma_{\mu}^T \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ieA_{\mu}(x) \right) - m \right] \bar{\psi}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (8.8.8)$$

Считая $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ заданными функциями x и варьируя величины $A_{\mu}(x)$, получим

$$\delta \int L d^4x = - \int \frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu}(x) d^4x + \frac{ie}{2} \int [\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu}(x) + \psi(x) \gamma_{\mu}^T \bar{\psi}(x)] \delta A_{\mu}(x) d^4x.$$

Выполняя в первом слагаемом интегрирование по частям, мы приходим к волновому уравнению для 4-потенциала электромагнитного поля

$$\square A_{\mu} = -j_{\mu}(x), \quad (8.8.9)$$

где

$$j_{\mu}(x) = ie \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x). \quad (8.8.10)$$

Величины $j_{\mu}(x)$, образующие 4-вектор, можно интерпретировать, как указывалось выше, как 4-вектор плотности электрического тока, создаваемого электронами. Как и следовало ожидать, 4-вектор $j_{\mu}(x)$ только множителем e отличается от 4-вектора плотности потока, определяемого формулой (7.5.2).

Обратим внимание на то, что 4-вектор плотности тока имеет формально одинаковый вид как для свободных электронов, так и для электронов, находящихся в электромагнитном поле. В соответствии с (7.5.3) вектор плотности тока удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial j_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} = 0. \quad (8.8.11)$$

Используя выражение (8.8.10) для плотности тока, можно представить плотность функции Лагранжа взаимодействующих электронного и электромагнитного полей в виде

$$L = L_0 + L_I,$$

где L_0 — сумма плотностей функций Лагранжа свободных полей:

$$L_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + m \right) \psi(x) + \frac{1}{2} \psi(x) \left(\gamma_{\mu}^T \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right) \bar{\psi}(x),$$

и L_I — часть функции L , описывающая взаимодействие между полями:

$$L_I = j_{\mu}(x) A_{\mu}(x). \quad (8.8.12)$$

Эта величина называется *лагранжианом взаимодействия*.

Заметим, что плотность функции Лагранжа инвариантна относительно преобразований собственной группы Лоренца, отражения пространства, обращения времени и, кроме того, относительно градиентного преобразования. Последнее определяется формулами

$$\begin{aligned} A_{\mu}(x) &\rightarrow A_{\mu}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \eta(x), \\ \psi(x) &\rightarrow e^{-ie\eta(x)} \psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{ie\eta(x)} \bar{\psi}(x), \end{aligned} \quad (8.8.13)$$

где $\eta(x)$ — произвольное решение волнового уравнения

$$\square \eta(x) = 0.$$

При таком преобразовании функция L приобретает добавку

$$-\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \left(A_\nu(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right\} + \left(A_\nu(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x_\mu^2};$$

второе слагаемое здесь равно нулю, так как $\square \eta = 0$, первое же слагаемое имеет вид дивергенции и может быть отброшено, так как оно не влияет на уравнения движения.

§ 9. Свободный электрон

9.1. Решения с положительными и отрицательными частотами. Установив общие свойства уравнений Дирака, мы перейдем теперь к нахождению их решений. Начнем с уравнений Дирака для свободного электрона.

Общее решение этих уравнений можно представить в виде интеграла Фурье

$$\psi(r, t) = \int \psi_p(t) e^{i p r} d^3 p,$$

где компонента Фурье $\psi_p(t)$ — волновая функция электрона в импульсном пространстве — удовлетворяет, согласно (7.2.4), уравнению

$$i \frac{\partial \psi_p(t)}{\partial t} = (\alpha p + \beta m) \psi_p(t).$$

Подставляя сюда $\psi_p(t)$ в виде столбца из двух спиноров $\varphi_p(t)$ и $\chi_p(t)$ аналогично (7.2.2)

$$\psi_p(t) = \begin{pmatrix} \varphi_p(t) \\ \chi_p(t) \end{pmatrix}$$

и используя для матриц α, β представление (7.2.3), получим для $\varphi_p(t)$ и $\chi_p(t)$ уравнения, представляющие собой преобразование Фурье уравнений (7.2.1)

$$i \frac{\partial \varphi_p(t)}{\partial t} = m \varphi_p(t) + \sigma p \chi_p(t),$$

$$i \frac{\partial \chi_p(t)}{\partial t} = -m \chi_p(t) + \sigma p \varphi_p(t).$$

Решения этих уравнений содержат, очевидно, время в виде $e^{-i\omega t}$, где частота ω есть некоторая константа, определяемая из уравнений

$$\begin{aligned} (\omega - m) \varphi_p - \sigma p \chi_p &= 0, \\ -\sigma p \varphi_p + (\omega + m) \chi_p &= 0. \end{aligned} \tag{9.1.1}$$

Из условия разрешимости этой системы

$$\begin{vmatrix} \omega - m & -\sigma p \\ -\sigma p & \omega + m \end{vmatrix} = 0$$

найдем частоту ω :

$$\omega = \pm \sqrt{p^2 + m^2}.$$

Эти значения частоты представляют собой, очевидно, собственные значения оператора

$$H = \frac{1}{i} \alpha \nabla + \beta m,$$

который мы интерпретировали в § 7.2 как оператор Гамильтона свободного электрона

$$\mathbf{H}\psi_p = \omega\psi_p.$$

Таким образом, существуют два типа решений уравнений Дирака для свободного электрона — решения с положительными частотами ($\omega > 0$)

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \int \psi_p e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - \varepsilon t)} d^3p$$

и решения с отрицательными частотами ($\omega < 0$)

$$\psi^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \int \psi_{-p} e^{-i(\mathbf{p}\mathbf{r} - \varepsilon t)} d^3p,$$

где p — 4-импульс электрона:

$$p = (\mathbf{p}, i\varepsilon), \quad \varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

и

$$\psi_{\pm p} = \begin{pmatrix} \varphi_{\pm p} \\ \chi_{\pm p} \end{pmatrix}.$$

Спиноры $\varphi_{\pm p}$, $\chi_{\pm p}$ удовлетворяют уравнениям (9.1.1) соответственно при $\omega = +\varepsilon$ и $\omega = -\varepsilon$. Поэтому один спинор может быть выбран произвольно, второй же выразится через первый. Задавая, например, φ_p и χ_{-p} , можно найти χ_p и φ_{-p} .

$$\begin{aligned} \chi_p &= \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\varepsilon + m} \varphi_p, \\ \varphi_{-p} &= \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\varepsilon + m} \chi_{-p}. \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

Общее решение уравнений Дирака для свободного электрона можно разделить на решения с положительными и отрицательными частотами

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \psi^{(-)}(\mathbf{r}, t).$$

Такое разделение, очевидно, релятивистски инвариантно, так как при собственных преобразованиях Лоренца знак частоты не может измениться (наименьшая положительная частота равна m , а наибольшая отрицательная частота равна $-m$, т. е. области частот разных знаков разделены конечным интервалом $2m$, в то время как собственные преобразования Лоренца определяются только непрерывными параметрами).

Так как решения с положительными и отрицательными частотами относятся к различным собственным значениям оператора \mathbf{H} , который является самосопряженным, то эти решения должны быть ортогональными

$$\int \psi^{(+)*}(\mathbf{r}, t) \psi^{(-)}(\mathbf{r}, t) d^3x = 0.$$

Существование решений уравнений Дирака двух типов — с положительными и отрицательными частотами — имеет фундаментальное значение. Оно приводит к выводу, что в релятивистской квантовой механике невозможно сохранить обычную интерпретацию нерелятивистской квантовой механики, согласно которой собственные значения оператора Гамильтона имеют смысл значений энергии частицы.

Действительно, частоты ω представляют собой собственные значения оператора Гамильтона свободного электрона. Поэтому, если бы была справедлива обычная интерпретация собственных значений оператора Гамильтона, то это означало бы существование у свободного электрона состояний

с отрицательной энергией и отсутствие наимизшего энергетического состояния. В свою очередь отсюда следовало бы, что при взаимодействии с другими частицами электрон мог бы неограниченно отдавать свою энергию, переходя во все более низкие энергетические состояния, что физически абсурдно.

Таким образом, мы приходим к заключению о необходимости изменения в релятивистской квантовой механике электрона основного положения нерелятивистской квантовой механики, касающегося интерпретации собственных значений оператора Гамильтона.

Чтобы сформулировать это изменение, необходимость которого диктуется существованием решений с отрицательными частотами, обратим внимание на то, что уравнения Дирака допускают преобразование зарядового сопряжения. В § 8.6 мы видели, что если подвергнуть этому преобразованию волновую функцию $\psi(x)$ электрона, находящегося в электромагнитном поле $A_\mu(x)$, которая удовлетворяет уравнениям (7.4.2),

$$\left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x) \right) + m \right] \psi(x) = 0,$$

т. е. перейти от биспинора $\psi(x)$ к зарядово-сопряженному биспинору $\psi^c(x)$,

$$\psi^c(x) = \mathbf{C} \bar{\psi}(x),$$

где \mathbf{C} — матрица, удовлетворяющая соотношениям (8.6.9), то функция $\psi^c(x)$ будет удовлетворять уравнениям

$$\left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu(x) \right) + m \right] \psi^c(x) = 0,$$

которые отличаются от исходных уравнений для $\psi(x)$ только изменением знака заряда

$$e \rightarrow -e.$$

С другой стороны, операция зарядового сопряжения содержит в себе комплексное сопряжение. Поэтому, если подвергнуть преобразованию зарядового сопряжения волновую функцию, содержащую только отрицательные частоты, то мы получим функцию, содержащую только положительные частоты.

Отсюда вытекает возможность следующей физической интерпретации состояний с отрицательными частотами. Если дано решение уравнений Дирака $\psi^{(-)}(x)$ с отрицательными частотами для свободного электрона с зарядом e , то физический смысл волновой функции частицы имеет не сама функция $\psi^{(-)}(x)$, а зарядово-сопряженная функция

$$\psi^{c(+)}(x) = \mathbf{C} \bar{\psi}^{(-)}(x).$$

Эта функция содержит только положительные частоты и описывает частицу, отличающуюся от исходного электрона только знаком заряда. Эта частица называется *позитроном*.

Таким образом, мы пришли к заключению, что уравнения Дирака должны описывать состояния электронов обоих знаков заряда, т. е. обычных электронов и позитронов. При этом знак частоты является характеристикой зарядового состояния частицы.

Иными словами, если произведено разбиение общего решения уравнений Дирака для свободной частицы на решения с положительными и отрицательными частотами

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x),$$

то мы будем интерпретировать $\psi^{(+)}(x)$ как волновую функцию электрона, а функцию, зарядово-сопряженную по отношению к $\psi^{(-)}(x)$, как волновую функцию позитрона:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{эл}}(x) &= \psi^{(+)}(x), \\ \psi_{\text{поз}}(x) &= \mathbf{C}\overline{\psi^{(-)}}(x).\end{aligned}\tag{9.1.3}$$

Ясно, что как $\psi_{\text{эл}}(x)$, так и $\psi_{\text{поз}}(x)$ будут содержать только положительные частоты.

Отметим, что, определив волновую функцию позитрона с помощью соотношения (9.1.3), мы выходим за рамки допустимых в квантовой механике линейных преобразований, так как подвергаем часть решений уравнений Дирака антилинейному преобразованию (содержащему комплексное сопряжение). По этой причине общее решение уравнений Дирака, которое можно записать в виде

$$\psi(x) = \psi_{\text{эл}}(x) + \mathbf{C}\overline{\psi_{\text{поз}}}(x),$$

не имеет смысла волновой функции частицы (который имеют порознь $\psi_{\text{эл}}(x)$ и $\psi_{\text{поз}}(x)$). С другой стороны, суперпозиция волновых функций электрона и позитрона удовлетворяет уравнениям Дирака, но не дает общего решения этих уравнений, так как решения с положительными частотами не образуют полной системы функций.

Формулы (9.1.3) определяют поведение внутренней волновой функции позитрона при различных преобразованиях, рассмотренных в § 8.

Как следует из § 8.5, волновая функция позитрона преобразуется при преобразованиях собственной группы Лоренца $x' = ax$ так же, как и волновая функция электрона:

$$\begin{aligned}\psi'_{\text{эл}}(x') &= \mathcal{S}\psi_{\text{эл}}(x), \\ \psi'_{\text{поз}}(x') &= \mathcal{S}\psi_{\text{поз}}(x).\end{aligned}$$

При преобразовании пространственного отражения, независимо от предположения о характере преобразования зарядово-сопряженного биспинора, имеем, согласно (8.6.2), (8.6.12) и (9.1.3),

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\psi_{\text{эл}}(\mathbf{r}, t) &= \eta_{\mathbf{P}}^{\text{эл}}\gamma_4\psi_{\text{эл}}(-\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{P}\psi_{\text{поз}}(\mathbf{r}, t) &= \eta_{\mathbf{P}}^{\text{поз}}\gamma_4\psi_{\text{поз}}(-\mathbf{r}, t),\end{aligned}$$

где $\eta_{\mathbf{P}}^{\text{эл}} \equiv \eta_{\mathbf{P}}$, $\eta_{\mathbf{P}}^{\text{поз}} \equiv -1/\eta_{\mathbf{P}}$.

Величины $\eta_{\mathbf{P}}^{\text{эл}}$ и $\eta_{\mathbf{P}}^{\text{поз}}$ можно назвать внутренними четностями электрона и позитрона. Мы видим, что их произведение равно -1 [10]:

$$\eta_{\mathbf{P}}^{\text{эл}}\eta_{\mathbf{P}}^{\text{поз}} = -1.\tag{9.1.4}$$

Для покоящихся электрона и позитрона, очевидно,

$$\begin{aligned}\gamma_4\psi_{\text{эл}} &= \psi_{\text{эл}}, \\ \gamma_4\psi_{\text{поз}} &= \psi_{\text{поз}},\end{aligned}$$

и поэтому

$$\mathbf{P}(\psi_{\text{эл}}\psi_{\text{поз}}) = -\psi_{\text{эл}}\psi_{\text{поз}}.$$

Отсюда следует, что система, состоящая из электрона и позитрона, например позитроний, обладает отрицательной внутренней четностью.

9.2. Плоские волны. Так как гамильтониан свободного электрона

$$\mathbf{H} = \alpha p + \beta m$$

коммутирует с оператором импульса \mathbf{p} :

$$[\mathbf{H}, \mathbf{p}] = 0.$$

то для свободного электрона возможны состояния с определенной энергией и с определенным импульсом \mathbf{p} . Таким состоянием соответствуют решения уравнений Дирака, имеющие вид плоских монохроматических волн с обоими знаками частот

$$\psi_{\pm p}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}} u(\pm p) e^{\pm i p x}, \quad (9.2.1)$$

где V — нормировочный объем, p — 4-вектор импульса частицы, $p = (\mathbf{p}, i\varepsilon)$, $\varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и $u(\pm p)$ — постоянные биспиноры, удовлетворяющие уравнениям

$$(\pm i \hat{\mathbf{p}} + m) u(\pm p) = 0, \quad \hat{\mathbf{p}} = \gamma_{\mu} p_{\mu}. \quad (9.2.2)$$

При этом, в соответствии с (9.1.3), решение с положительной частотой $\omega = \varepsilon$ описывает состояние электрона, а решение с отрицательной частотой $\omega = -\varepsilon$ — позитрона

$$\begin{aligned} \psi_p^{\text{эл}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}} u(p) e^{i p x}, \\ \psi_p^{\text{поз}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}} C \bar{u}(-p) e^{i p x}, \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

так что оба решения $u(\pm p)$ описывают частицы с 4-импульсом p .

Уравнения (9.2.2) мы можем переписать в виде

$$(i q \hat{\mathbf{p}} + m) u(q p) = 0, \quad (9.2.4)$$

где

$$q = \pm 1$$

представляет собой квантовое число — знак частоты или знак заряда, — различающее два типа решений уравнения Дирака.

Мы будем предполагать, что волновые функции $\psi_p^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют инвариантному условию нормировки (7.5.5)

$$\int_V |\psi_p^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3x = 1,$$

где интегрирование совершается по объему V . Из этого условия легко установить условие нормировки биспиноров $u(\pm p)$. Напомним с этой целью, что, как было показано в § 8, величина $\bar{\psi}\psi$ представляет собой скаляр, а величины $\bar{\psi}\gamma_{\nu}\psi$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$) образуют четырехмерный вектор. С другой стороны, произведение εV не меняется при лоренцевых преобразованиях. Поэтому из (9.2.1) следует, что величина $\bar{u}(\pm p) u(\pm p)$ должна быть скаляром, а величины $\bar{u}(\pm p) \gamma_{\nu} u(\pm p)$ должны образовывать четырехмерный вектор. Для свободной частицы существует только один четырехмерный вектор — вектор энергии-импульса p ($\mathbf{p}, i\varepsilon$), и мы можем, следовательно, положить

$$\bar{u}(\pm p) \gamma_{\nu} u(\pm p) = a p_{\nu},$$

где a — некоторая константа. В частности,

$$\bar{u}(\pm p) \gamma_4 u(\pm p) = u^*(\pm p) u(\pm p) = i a \varepsilon.$$

Из этого соотношения и условия нормировки $\psi_p^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)$ следует, что $a = \frac{2}{i}$.

Итак,

$$\bar{u}(\pm p) \gamma_\nu u(\pm p) = \frac{2}{i} p_\nu. \quad (9.2.5)$$

Найдем теперь $\bar{u}(\pm p) u(\pm p)$. Умножим с этой целью (9.2.5) на $i p_\nu$ и произведем суммирование по ν ,

$$\bar{u}(\pm p) i \hat{p} u(\pm p) = \pm 2p^2 = \mp 2m^2.$$

Используя далее уравнения (9.2.2), получим окончательно

$$\bar{u}(\pm p) u(\pm p) = \pm 2m. \quad (9.2.6)$$

Эти соотношения, так же как и соотношения (9.2.5), представляют собой условия нормировки биспиноров $u(\pm p)$.

Заметим, что соотношения (9.2.5) справедливы не только для электронов, но и для нейтрино, которые также описываются уравнениями Дирака. В этом случае $m = 0$ и в качестве условий нормировки биспиноров следует брать соотношения (9.2.5).

Выше (§ 9.1) мы записывали биспинор ψ в виде столбца, содержащего два спинора, связанных между собой соотношениями (9.1.2). Используя эти соотношения и условия нормировки (9.2.6), можно представить биспиноры $u(\pm p)$ в виде столбцов

$$\begin{aligned} u(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + mv^{(+)}(\mathbf{v})} \\ \sqrt{\varepsilon - m\sigma\mathbf{v}v^{(+)}(\mathbf{v})} \end{pmatrix}, \\ u(-p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m\sigma\mathbf{v}v^{(-)}(\mathbf{v})} \\ \sqrt{\varepsilon + mv^{(-)}(\mathbf{v})} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ и двухкомпонентные спиноры $v^{(\pm)}(\mathbf{v})$ удовлетворяют условию нормировки

$$v^{(\pm)*}(\mathbf{v}) v^{(\pm)}(\mathbf{v}) = 1. \quad (9.2.8)$$

9.3. Поляризационные состояния электрона. Возвратимся к уравнениям (9.2.2). Эти уравнения не определяют биспиноры $u(\pm p)$ однозначно (т. е. с точностью до нормировочной константы). Действительно, так как спин электрона равен $1/2$, то каждое из уравнений (9.2.2) имеет два линейно независимых решения. Об этих решениях говорят, что они соответствуют двум различным *состояниям поляризации* электрона.

Состояние поляризации нерелятивистского электрона можно характеризовать, задав направление, проекция спина на которое имеет вполне определенное значение. При этом выбор направления может быть произвольным. Для релятивистского электрона такой метод, вообще говоря, неприменим, так как оператор проекции спина на произвольное направление не коммутирует с гамильтонианом электрона, содержащим спиновые матрицы.

Чтобы описать состояние поляризации релятивистского электрона, мы поступим следующим образом. Рассмотрим матрицу $\gamma_5 \hat{\mathbf{v}}$, где \mathbf{v} — единичный 4-вектор, ортогональный 4-импульсу,

$$\mathbf{v}p = 0, \quad \mathbf{v}^2 = 1 \quad (9.3.1)$$

(в системе покоя частицы $\mathbf{v} = (\mathbf{v}, 0)$, где \mathbf{v} — единичный вектор). Легко видеть, что матрица $\gamma_5 \hat{\mathbf{v}}$ коммутирует с матрицей \hat{p} :

$$[\gamma_5 \hat{\mathbf{v}}, \hat{p}] = 2\gamma_5 (\mathbf{v}p) = 0.$$

Поэтому обе матрицы \hat{p} и $\gamma_5 \hat{v}$ имеют общую полную систему собственных векторов. Иными словами, биспиноры $u(\pm p)$, удовлетворяющие уравнению Дирака (9.2.2),

$$-i\hat{p}u(qp) = qtu(qp), \quad q = \pm 1,$$

могут быть выбраны так, чтобы они одновременно удовлетворяли уравнению

$$i\gamma_5 \hat{v}u(qp) = \mu u(qp), \quad (9.3.2)$$

где μ — c -число. Так как $(i\gamma_5 \hat{v})^2 = 1$, то, очевидно,

$$\mu = \pm 1.$$

Таким образом, мы имеем возможность характеризовать два линейно независимых решения уравнения (9.2.2) с помощью числа μ — собственного значения матрицы $i\gamma_5 \hat{v}$. Это число можно, следовательно, рассматривать как квантовое число, описывающее состояние поляризации электрона независимо от того, является ли электрон нерелятивистским или релятивистским.

Мы будем обозначать биспинор, удовлетворяющий уравнениям (9.2.2) и (9.3.2), через $u^\mu(qp)$:

$$\begin{aligned} (iq\hat{p} + m)u^\mu(qp) &= 0, \\ (i\gamma_5 \hat{v} - \mu)u^\mu(qp) &= 0, \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

и говорить, что биспинор $u^\mu(qp)$ описывает электрон с *поляризацией* μ ($\mu = \pm 1$).

Заметим, что, как легко видеть, сопряженный биспинор $\bar{u}^\mu(qp)$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \bar{u}^\mu(qp)(iq\hat{p} + m) &= 0, \\ \bar{u}^\mu(qp)(i\gamma_5 \hat{v} - \mu) &= 0. \end{aligned} \quad (9.3.4)$$

Чтобы яснее представить себе смысл квантового числа μ , рассмотрим сперва тот случай, когда электрон покоится. Тогда уравнения (9.3.3) приобретают вид

$$\begin{aligned} q\gamma_4 u^\mu(qp^{(0)}) &= u^\mu(qp^{(0)}), \\ i\gamma_5 \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} u^\mu(qp^{(0)}) &= \mu u^\mu(qp^{(0)}), \end{aligned}$$

где $p^{(0)} = (0, im)$, $|\mathbf{v}| = 1$. Вспоминая определение оператора спина электрона Σ :

$$\Sigma = i\gamma_4 \gamma_5 \boldsymbol{\gamma},$$

получим отсюда

$$\Sigma \mathbf{v} u^\mu(qp^{(0)}) = q\mu u^\mu(qp^{(0)}). \quad (9.3.5)$$

Мы видим, таким образом, что в нерелятивистском случае биспинор $u^\mu(p^{(0)})$ описывает состояние электрона с определенной проекцией спина на направление \mathbf{v} (равной $\frac{1}{2}\mu$).

Аналогичное заключение можно сделать и о нерелятивистском позитроне. Его состояние описывается, как мы знаем, биспинором $\bar{C}u(-p)$. Учитывая, что

$$C\Sigma^T = -\Sigma C,$$

получим из (9.3.5)

$$\Sigma \mathbf{v} C\bar{u}^\mu(-p^{(0)}) = \mu C\bar{u}^\mu(-p^{(0)}),$$

т. е. проекция спина позитрона на направление \mathbf{v} в состоянии с волновой функцией $\mathbf{C}\bar{u}^\mu(-p^{(0)})$ равна $\frac{1}{2}\mu$.

Пусть теперь электрон обладает произвольным импульсом \mathbf{p} , вдоль которого направлен вектор \mathbf{v} . Тогда $\mathbf{v} = \frac{\varepsilon}{m} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$, $v_0 = \frac{|\mathbf{p}|}{m}$ и $\hat{v}\hat{p} = im \frac{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \boldsymbol{\gamma}_4$. Комбинируя уравнения (9.3.3), легко показать, что в этом случае

$$\boldsymbol{\Sigma} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u^\mu(qp) = q\mu u^\mu(qp) \quad (\mathbf{p} \parallel \mathbf{v}). \quad (9.3.6)$$

Таким образом, при $\mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$ в состоянии $u^\mu(qp)$ проекция спина электрона (позитрона) на направление движения электрона имеет определенное значение $\mu/2$. В этом случае говорят о состоянии с определенной *спиральностью* μ (наличие таких состояний связано с тем, что оператор $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}$ коммутирует с оператором Гамильтона $\mathbf{H} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m$).

Возвратимся к уравнениям (9.3.3), (9.3.4) для биспиноров $u^\mu(qp)$. Используя эти уравнения, легко убедиться, что биспиноры $u^\mu(qp)$ удовлетворяют соотношениям ортонормированности

$$\bar{u}^{\mu'}(q'p) u^\mu(qp) = 2mq\delta_{q'q}\delta_{\mu\mu'}. \quad (9.3.7)$$

Замечая далее, что любую четверку чисел можно разложить по четырем линейно независимым биспинорам $u^\mu(qp)$ ($\mu = \pm 1$, $q = \pm 1$), и используя (9.3.7), можно получить условие полноты биспиноров $u^\mu(qp)$

$$\sum_{q, \mu} q \bar{u}_\alpha^\mu(qp) u_\beta^\mu(qp) = 2m\delta_{\alpha\beta} \quad (9.3.8)$$

(α, β — спинорные индексы).

Выше мы видели, что при $\mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$ биспиноры $u^\mu(\pm p)$ описывают состояния электрона и позитрона со спиральностью μ . Поэтому амплитуды соответствующих плоских волн (9.2.3) должны совпадать

$$\mathbf{C}\bar{u}^\mu(-p) = u^\mu(p). \quad (9.3.9)$$

Докажем, что это соотношение справедливо при любом выборе 4-вектора \mathbf{v} . Биспинор $\bar{u}^\mu(-p)$ однозначно (с точностью до нормировки) определяется уравнениями

$$\begin{aligned} (-i\boldsymbol{\gamma}_\alpha^T p_\alpha + m)\bar{u}^\mu(-p) &= 0, \\ (i(\boldsymbol{\gamma}_5\boldsymbol{\gamma}_\alpha)^T v_\alpha - \mu)\bar{u}^\mu(-p) &= 0. \end{aligned}$$

Умножив эти уравнения слева на матрицу \mathbf{C} и используя соотношения (8.6.9), (8.7.4), получим

$$\begin{aligned} (i\hat{p} + m)\mathbf{C}\bar{u}^\mu(-p) &= 0, \\ (i\boldsymbol{\gamma}_5\hat{v} - \mu)\mathbf{C}\bar{u}^\mu(-p) &= 0. \end{aligned}$$

Мы видим, что биспинор $\mathbf{C}\bar{u}^\mu(-p)$ удовлетворяет тем же уравнениям, что и биспинор $u^\mu(p)$. Поэтому при нормировке (9.3.7) мы приходим к соотношению (9.3.9).

9.4. Поляризационная матрица плотности электрона. Покоящийся электрон можно описывать двухкомпонентным спинором. Переходя в (9.3.6) от $u^\mu(qp^{(0)})$ к двухкомпонентному спинору $v^\mu(\mathbf{v})$, мы получим, очевидно,

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}v^\mu(\mathbf{v}) = \mu v^\mu(\mathbf{v}), \quad \mu = \pm 1.$$

Мы видим, что двум линейно независимым двухкомпонентным спинорам $v^\mu(\mathbf{v})$ соответствуют проекции спина электрона $\pm 1/2$ на ось, определяемую направлением \mathbf{v} .

Спиноры v^μ обладают свойством ортонормированности

$$v^{\mu*}v^{\mu'} = \delta_{\mu\mu'} \quad (9.4.1)$$

и удовлетворяют условию полноты

$$\sum_{\mu} v_{\alpha}^{\mu*}v_{\beta}^{\mu} = \delta_{\alpha\beta} \quad (9.4.2)$$

($\alpha, \beta = 1, 2$ — спинорные индексы).

Введем в рассмотрение оператор

$$\Lambda^{\mu} = \frac{1}{2} (I + \mu \mathbf{v}\sigma). \quad (9.4.3)$$

Этот оператор обладает, очевидно, свойством

$$\Lambda^{\mu}v^{\mu'} = \delta_{\mu\mu'}v^{\mu},$$

и поэтому, действуя на произвольную двухкомпонентную величину, выделяет из нее часть, пропорциональную v^{μ} . По этой причине Λ^{μ} называется оператором проектирования.

Умножив (9.4.2) на Λ^{μ} , получим

$$v_{\alpha}^{\mu}v_{\beta}^{\mu*} = \Lambda_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} (I + \mu \mathbf{v}\sigma)_{\alpha\beta}.$$

Любая волновая функция v покоящегося электрона может быть разложена по спинорам v^{μ} ($\mu = \pm 1$) при произвольном выборе направления оси квантования \mathbf{v} . Можно высказать также следующее утверждение: для каждой волновой функции v можно выбрать такое направление \mathbf{v} , чтобы функция v была собственной функцией оператора $\sigma \mathbf{v}$ с собственным значением $\mu = 1$:

$$\sigma \mathbf{v}v = v.$$

Поэтому для любого состояния, описываемого волновой функцией (чистого состояния), может быть написано соотношение

$$v_{\alpha}v_{\beta}^* = \frac{1}{2} (I + \mathbf{v}\sigma)_{\alpha\beta}. \quad (9.4.4)$$

Перейдем теперь к описанию «смешанного» состояния покоящегося электрона, которое характеризуется не волновой функцией, а матрицей плотности

$$\rho_{\alpha\beta} = \overline{v_{\alpha}v_{\beta}^*},$$

где черта означает усреднение по параметрам, характеризующим систему, частью которой является электрон.

Двухрядную квадратную матрицу ρ , удовлетворяющую условию нормировки

$$\text{Sp } \rho = 1,$$

можно, очевидно, представить в виде

$$\rho = \frac{1}{2} (I + \xi \sigma). \quad (9.4.5)$$

Смысл вектора ξ легко выяснить, вычислив среднее значение спина электрона

$$\frac{1}{2} \langle \sigma \rangle \equiv \frac{1}{2} \text{Sp } \rho \sigma = \frac{1}{2} \xi.$$

Отсюда следует, что

$$|\xi| \leq 1.$$

Случай $\xi = 0$ описывает неполяризованное состояние. При $|\xi| = 1$ мы возвращаемся к выражению (9.4.4). В этом случае существует волновая функция электрона, определяемая условием

$$\sigma \mathbf{v} = v.$$

Заметим, что формула (9.4.5) имеет ту же структуру, что и формула (2.4.3) для матрицы плотности фотона. Это объясняется тем, что в обоих случаях частица имеет два поляризационных состояния. Однако смысл параметров ξ_i в случае фотона и параметров ζ_i в случае электрона существенно различен. Это связано с разным характером преобразования соответствующих матриц. В случае электрона α, β являются спинорными индексами, а в случае фотона — векторными (двумерного вектора в плоскости, перпендикулярной импульсу фотона).

Изложенная схема может быть использована для построения поляризационной матрицы плотности, описывающей поляризационное состояние электрона или позитрона с произвольным импульсом \mathbf{p} .

Введем с этой целью в рассмотрение оператор проектирования

$$\Lambda^\mu(qp) = \frac{1}{4m} (m - iq\hat{p})(1 + i\mu\gamma_5\hat{v}), \quad (9.4.6)$$

обладающий свойством

$$\Lambda^\mu(qp) u^{\mu'}(q'p) = \delta_{qq'} \delta_{\mu\mu'} u^\mu(qp).$$

Умножив (9.3.8) на $\Lambda^{\mu'}(qp)$, получим

$$u_\alpha^\mu(qp) \bar{u}_\beta^\mu(qp) = 2mq \Lambda_{\alpha\beta}^\mu(qp) = \frac{q}{2} [(m - iq\hat{p})(1 + i\mu\gamma_5\hat{v})]_{\alpha\beta}$$

($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ — биспинорные индексы).

Замечая, что любой биспинор $u(\pm p)$, удовлетворяющий уравнению Дирака (9.2.4), может быть разложен по двум биспинорам $u^\mu(\pm p)$, удовлетворяющим уравнению (9.3.2) при произвольном 4-векторе \mathbf{v} , ортогональном \mathbf{p} , и выбирая \mathbf{v} таким образом, чтобы $u(\pm p)$ удовлетворяло уравнению (9.3.2) при $\mu = 1$, перепишем последнее выражение в виде

$$u_\alpha(\pm p) \bar{u}_\beta(\pm p) = \pm \frac{1}{2} [(m \mp i\hat{p})(1 + i\gamma_5\hat{v})]_{\alpha\beta}. \quad (9.4.7)$$

Это выражение можно рассматривать как четырехрядную матрицу плотности электрона, релятивистски инвариантно описывающую его поляризацию в случае чистого состояния.

В системе покоя электрона (9.4.7) переходит с точностью до нормировочного коэффициента в (9.4.4):

$$u_\alpha(p^{(0)}) \bar{u}_\beta(p^{(0)}) = 2m \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I + \mathbf{v}\sigma) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выше мы видели, что в случае покоящегося электрона переход от чистого состояния к смешанному осуществлялся заменой единичного вектора \mathbf{v} вектором ξ ($|\xi| < 1$). Аналогично, заменив в (9.4.7) единичный 4-вектор \mathbf{v} 4-вектором s , обладающим свойствами $s^2 < 1$, $sp = 0$ (в системе покоя $s = (\xi, 0)$), получим для матрицы плотности

$$\rho_{\alpha\beta}^\pm(p) = u_\alpha(\pm p) \bar{u}_\beta(\pm p)$$

выражение [11]

$$\rho^\pm(p) = \frac{1}{2} (\pm m - i\hat{p})(1 + i\gamma_5\hat{s}). \quad (9.4.8)$$

Эта матрица удовлетворяет условию нормировки

$$\text{Sp } \rho^\pm(p) = \pm 2m,$$

отвечающему условию нормировки биспиноров $u(\pm p)$ (9.2.6).

Из (9.4.8) следует, что 4-вектор поляризации s равен

$$s_\mu = \pm \frac{1}{2m} \text{Sp } \nu \gamma_5 \gamma_\mu \rho^\pm(p). \quad (9.4.9)$$

Выполнив преобразование Лоренца, можно выразить компоненты s_ν через их значения в системе покоя $s = (\xi, 0)$:

$$\mathbf{s} = \xi + \frac{(\xi \mathbf{p}) \mathbf{p}}{m(s + m)}, \quad s_0 = \frac{s_4}{i} = \frac{p\xi}{m}. \quad (9.4.10)$$

Случай $s^2 = 1$ ($\xi^2 = 1$) отвечает чистому состоянию, а случай $s = 0$ ($\xi = 0$) — неполяризованному состоянию:

$$\rho^\pm(p) = \frac{1}{2} (\pm m - i\hat{p}). \quad (9.4.11)$$

Последняя формула может быть получена путем усреднения по поляризационным состояниям матрицы $\frac{1}{2} \sum_\mu u_\alpha^\mu \bar{u}_\beta^\mu$, т. е. усреднением (9.4.7) по двум значениям 4-вектора ν (ν и $-\nu$).

Следует подчеркнуть, что 4-вектор s_α , входящий в (9.4.8) или вычисленный по формуле (9.4.9), характеризует поляризацию частицы (в частности, значение вектора ξ в системе покоя) как в случае электрона, так и в случае позитрона. В этом можно убедиться непосредственно, используя преобразование зарядового сопряжения. Действительно, так как по определению $u_{\text{поз}}(p) = \mathbf{C} \bar{u}(-p)$, то матрица плотности позитрона будет иметь вид

$$\rho_{\alpha\beta}^{\text{поз}}(p) = \overline{u_\alpha^{\text{поз}}(p) \bar{u}_\beta^{\text{поз}}(p)} = (\mathbf{C} (\rho^-(p))^T \mathbf{C}^{-1})_{\alpha\beta}.$$

Подставив сюда вместо $\rho^-(p)$ выражение (9.4.8) и используя свойства коммутации матрицы \mathbf{C} , получим

$$\rho^{\text{поз}}(p) = \rho^{\text{эл}}(p),$$

где $\rho^{\text{эл}}(p) \equiv \rho^+(p)$ — матрица (9.4.8) с теми же значениями s_α , которые входят в исходную матрицу $\rho^-(p)$.

9.5. Шаровые спиноры. В предыдущих разделах мы изучили состояния электрона, характеризующиеся определенными значениями энергии, импульса и проекции спина на импульс. Но свободный электрон может находиться также в состояниях с определенными значениями энергии, квадрата момента импульса и проекции момента на какую-либо неподвижную ось. Мы перейдем к изучению таких состояний.

Оператор момента электрона (мы будем употреблять термин *момент* вместо момента импульса) \mathbf{J} складывается из оператора орбитального момента \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}],$$

и оператора спинового момента $\frac{1}{2} \Sigma$:

$$\frac{1}{2} \Sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{p} = -i\nabla$ — оператор импульса и σ_i — матрицы Паули,

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}.$$

Проекции момента \mathbf{J} удовлетворяют перестановочным условиям

$$[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = i\mathbf{J}_3,$$

$$[\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3] = i\mathbf{J}_1,$$

$$[\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_1] = i\mathbf{J}_2.$$

Кроме того, квадрат момента коммутирует с каждой из его проекций

$$[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_k] = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Таким же условиям удовлетворяют проекции \mathbf{L} и $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}$.

Легко видеть, что оператор Гамильтона свободного электрона

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{p} + \beta m$$

коммутирует с операторами квадрата момента \mathbf{J}^2 и проекции момента на произвольную ось (мы будем называть ее осью z) \mathbf{J}_z ,

$$[\mathbf{H}, \mathbf{J}^2] = 0,$$

$$[\mathbf{H}, \mathbf{J}_z] = 0.$$

Поэтому операторы \mathbf{H} , \mathbf{J}^2 , \mathbf{J}_z имеют общие собственные функции

$$\mathbf{H}\psi_{\omega j M} = \omega\psi_{\omega j M},$$

$$\mathbf{J}^2\psi_{\omega j M} = j(j+1)\psi_{\omega j M},$$

$$\mathbf{J}_z\psi_{\omega j M} = M\psi_{\omega j M},$$

где ω , $j(j+1)$ и M — собственные значения \mathbf{H} , \mathbf{J}^2 , \mathbf{J}_z (в дальнейшем мы часто будем опускать в числе индексов волновой функции ψ частоту ω).

Волновую функцию — биспинор ψ_{jM} — можно представить в виде столбца, состоящего из двух спиноров φ_{jM} и χ_{jM} :

$$\psi_{jM} = \begin{pmatrix} \varphi_{jM} \\ \chi_{jM} \end{pmatrix}.$$

Эти спиноры удовлетворяют уравнениям (9.1.1)

$$\begin{aligned} (\omega - m)\varphi_{jM} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \chi_{jM} &= 0, \\ -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \varphi_{jM} + (\omega + m)\chi_{jM} &= 0, \end{aligned} \tag{9.5.1}$$

где $\mathbf{p} = -i\nabla$, и уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 \varphi_{jM} &= j(j+1)\varphi_{jM}, & \mathbf{J}_z \varphi_{jM} &= M\varphi_{jM}, \\ \mathbf{J}^2 \chi_{jM} &= j(j+1)\chi_{jM}, & \mathbf{J}_z \chi_{jM} &= M\chi_{jM}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}.$$

Уравнения (9.5.1) для спиноров φ_{jM} и χ_{jM} , являющихся функциями \mathbf{r} , или, в сферических координатах, функциями r , θ , φ , допускают решения в разделяющихся переменных r и θ , φ .

Определим прежде всего угловые части спиноров φ_{jM} и χ_{jM} , т. е. их зависимости от углов θ , φ . Для этого нет необходимости решать сформулированные выше уравнения, а достаточно воспользоваться, так же как это

было сделано в § 3.3, квантово-механическим правилом сложения моментов — орбитального и спинового.

Собственные функции орбитального момента хорошо известны — это шаровые функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 Y_{lm} &= l(l+1) Y_{lm}, \\ \mathbf{L}_z Y_{lm} &= m Y_{lm}, \quad m = -l, -l+1, \dots, l. \end{aligned}$$

Легко найти также собственные функции спинового момента, которые мы будем обозначать через v_μ , где μ — проекция спина на ось z , принимающая два значения $\mu = \pm \frac{1}{2}$. Так как квадрат спинового момента электрона представляет собой s -число (он равен $(\frac{1}{2}\sigma)^2 = 3/4$), то вместо двух мы имеем только одно уравнение для определения v_μ :

$$\frac{1}{2} \sigma_z v_\mu = \mu v_\mu.$$

Обозначим спиновую переменную, от которой зависит v_μ и на которую действует оператор σ_z , через α . Так как имеется только два значения α , то в качестве их можно выбрать $\alpha = \pm 1/2$. Замечая далее, что

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

получим

$$v_\mu \equiv v_\mu(\alpha) = \delta_{\mu\alpha}. \quad (9.5.2)$$

Найдем теперь собственные функции φ_{jM} оператора полного момента $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\sigma$. Используя формулу (3.3.1) и полагая в ней $j_1 = l$, $j_2 = \frac{1}{2}$, $\psi_{j_1 m_1} = Y_{lm}$, $\psi_{j_2 m_2} = v_\mu$, $\psi_{jM} = \varphi_{jM}$, получим

$$\varphi_{jM}(\mathbf{r}, \alpha) = \sum_{m\mu} C_{lm \frac{1}{2} \mu}^{jM} Y_{lm}(\mathbf{n}) v_\mu(\alpha), \quad (9.5.3)$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ — единичный вектор в направлении \mathbf{r} , α — спиновая переменная, $\alpha = \pm 1/2$ и

$$l = j \pm \frac{1}{2}, \quad M = m + \mu.$$

Функции $\varphi_{jM}(\mathbf{n}, \alpha)$ определены в пространстве угловых переменных θ, φ и спиновой переменной α . Поэтому они являются спинорами в пространстве θ, φ . Формулу (9.5.3) можно рассматривать как разложение этих спиноров по ортонормированным спинорам v_μ , а величины

$$(\Omega_{j\mu M}(\mathbf{n}))^\mu = C_{lm \frac{1}{2} \mu}^{jM} Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad m = M - \mu, \quad (9.5.4)$$

как их контравариантные компоненты. Эти компоненты (мы обозначаем их для спинора Φ через Φ^μ) определяются с помощью разложения

$$\Phi = \sum_{\mu} \Phi^\mu v_\mu,$$

а так как $v_\mu(\alpha) = \delta_{\mu\alpha}$, то

$$\Phi^\mu = \Phi(\mu).$$

Величины $(\Omega_{jlm}(\mathbf{n}))^\mu$ с $\mu = \pm \frac{1}{2}$ образуют спинор

$$\Omega_{jlm}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} C_{l, M-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{jM} Y_{l, M-\frac{1}{2}}(\mathbf{n}) \\ C_{l, M+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{jM} Y_{l, M+\frac{1}{2}}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \quad (9.5.5)$$

который называется *шаровым спинором* или спинорной шаровой функцией. Значения коэффициентов Клебша — Гордана, входящих в него, приведены в таблице.

Коэффициенты $C_{l, M-\mu, \frac{1}{2}, \mu}^{jM}$

$l \backslash \mu$	$l + \frac{1}{2}$	$l - \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$	$-\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$
$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$	$\sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$

Шаровые спиноры $\Omega_{jlm}(\mathbf{n})$ определяют угловую зависимость спиноров φ_{jm} и χ_{jm} , образующих вместе биспинор φ_{jm} . При этом, если в φ_{jm} входит шаровой спинор Ω_{jlm} , то в χ_{jm} будет входить шаровой спинор $\Omega_{j'l'M}$, где $l+l'=2j$. Это обстоятельство связано с тем, что значения l и l' должны быть различны (при $l=l'$ не могут удовлетворяться уравнения (9.5.1)). Поэтому из правила сложения момента следует, что, если $l = j \pm \frac{1}{2}$, то $l' = j \mp \frac{1}{2}$, т. е. $l+l' = 2j$.

Как следует из (9.5.1), спинор χ_{jm} пропорционален $(\sigma \mathbf{p}) \varphi_{jm}$. Но при пространственных вращениях $\sigma \mathbf{p}$ ведет себя так же, как $\sigma \mathbf{n}$. Поэтому угловая часть спинора χ_{jm} определяется произведением $\sigma \mathbf{n}$ на $\Omega_{jlm}(\mathbf{n})$. С другой стороны, она имеет вид $\Omega_{j'l'M}(\mathbf{n})$. Поэтому должно иметь место равенство

$$(\sigma \mathbf{n}) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}) = c \Omega_{j'l'M}(\mathbf{n}),$$

где c — некоторая константа. Чтобы найти ее, выберем направление \mathbf{n} вдоль оси z . Используя определение шарового спинора (9.5.5) и явные выражения для коэффициентов $C_{l, M-\mu, \frac{1}{2}, \mu}^{jM}$, получим $c = -1$, т. е.

$$(\sigma \mathbf{n}) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}) = -\Omega_{j'l'M}(\mathbf{n}), \quad l+l'=2j. \quad (9.5.6)$$

Шаровые спиноры, как следует из общих свойств преобразования (3.3.1), образуют ортонормированную систему функций

$$\int \Omega_{jlm}^*(\mathbf{n}) \Omega_{j'l'M}(\mathbf{n}) d\omega = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (9.5.7)$$

где $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ — элемент телесного угла, в котором лежит вектор \mathbf{n} .

9.6. Волновая функция свободного электрона с определенным моментом. Перейдем теперь к нахождению волновой функции свободного электрона с определенными значениями энергии и момента. Мы будем обозначать ее через $\Psi_{\varepsilon j l M}$ и искать в виде

$$\Psi_{\varepsilon j l M} = \begin{pmatrix} \varphi_{\varepsilon j l M} \\ \chi_{\varepsilon j l M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(r) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) \\ i b(r) \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \quad (9.6.1)$$

где $\Omega_{j l M}(\mathbf{n})$ — шаровой спинор, определяемый формулой (9.5.5), $l = j \pm \frac{1}{2}$, $l' = j \mp \frac{1}{2}$ и $a(r)$ и $b(r)$ — некоторые функции r (они называются *радиальными функциями*). Спиноры $\varphi_{\varepsilon j l M}$ и $\chi_{\varepsilon j l M}$ удовлетворяют уравнениям (9.5.1), в которых нужно положить $\omega = \varepsilon$ и считать $\varepsilon > 0$.

Подстановка (9.6.1) в (9.5.1) приводит к выражениям

$$(\sigma \mathbf{p})(a(r) \Omega_{j l M}(\mathbf{n})) = -i \frac{da(r)}{dr} (\sigma \mathbf{n}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) + a(r) (\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}),$$

$$(\sigma \mathbf{p})(i b(r) \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n})) = \frac{db(r)}{dr} (\sigma \mathbf{n}) \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n}) + i b(r) (\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n}),$$

где $\mathbf{p} = -i \nabla$. Поэтому прежде всего нужно вычислить $(\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n})$. Покажем, что

$$\begin{aligned} (\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) &= i \frac{1+\kappa}{r} \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n}), \\ (\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n}) &= i \frac{1-\kappa}{r} \Omega_{j l M}(\mathbf{n}), \end{aligned} \quad (9.6.2)$$

где

$$\kappa = l(l+1) - J(j+1) - \frac{1}{4},$$

т. е.

$$\kappa = \begin{cases} l, & \text{если } j = l - \frac{1}{2}, \quad l' = l - 1, \\ -(l+1), & \text{если } j = l + \frac{1}{2}, \quad l' = l + 1. \end{cases}$$

Заменим для этого в левой части первой из этих формул $\Omega_{j l M}(\mathbf{n})$, в соответствии с (9.5.6), на $-(\sigma \mathbf{n}) \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n})$:

$$(\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) = -(\sigma \mathbf{p})(\sigma \mathbf{n}) \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n}),$$

а так как

$$(\sigma \mathbf{p})(\sigma \mathbf{n}) = \mathbf{p} \mathbf{n} + i [\mathbf{p} \mathbf{n}] \sigma,$$

то

$$(\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) = -(\mathbf{p} \mathbf{n} + i [\mathbf{p} \mathbf{n}] \sigma) \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n}).$$

Но

$$-i \nabla \mathbf{n} = -\frac{2i}{r}, \quad \mathbf{n} \nabla \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n}) = 0.$$

Поэтому

$$(\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) = \left(\frac{2i}{r} + i \frac{\mathbf{L} \sigma}{r} \right) \Omega_{j' l' M}(\mathbf{n}), \quad (9.6.3)$$

где $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \mathbf{p}]$.

Шаровой спинор $\Omega_{j' l' M}(\mathbf{n})$ является, как мы знаем, собственной функцией операторов $\mathbf{J}^2 = \left(\mathbf{L} + \frac{1}{2} \sigma \right)^2$ и \mathbf{L}^2 . Отсюда следует, что этот спинор является также собственной функцией оператора $\mathbf{L} \sigma$, и мы можем

в применении к $\Omega_{j'l'm}(\mathbf{n})$ произвести замену

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}^2,$$

откуда

$$(\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})\Omega_{j'l'm}(\mathbf{n}) = \left\{ j(j+1) - l'(l'+1) - \frac{3}{4} \right\} \Omega_{j'l'm}(\mathbf{n}).$$

Подставляя это выражение в (9.6.3), получим первую из формул (9.6.2). Аналогичным образом можно доказать вторую из формул (9.6.2).

Подставим теперь в уравнения (9.5.1) выражение (9.6.1) и воспользуемся формулами (9.6.2). В результате мы получим следующую систему уравнений для определения радиальных функций $a(r)$ и $b(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{da(r)}{dr} + \frac{1+\kappa}{r}a(r) - (\varepsilon+m)b(r) &= 0, \\ \frac{db(r)}{dr} + \frac{1-\kappa}{r}b(r) + (\varepsilon-m)a(r) &= 0, \end{aligned} \quad (9.6.4)$$

где ε — энергия частицы.

Вводя вместо $a(r)$ и $b(r)$ новые неизвестные

$$A(r) = ra(r), \quad B(r) = rb(r),$$

перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} \frac{dA(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r}A(r) - (\varepsilon+m)B(r) &= 0, \\ \frac{dB(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r}B(r) + (\varepsilon-m)A(r) &= 0. \end{aligned}$$

Исключая отсюда $B(r)$,

$$B(r) = \frac{1}{\varepsilon+m} \frac{dA(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r(\varepsilon+m)} A(r),$$

получим уравнение для определения $A(r)$

$$\frac{d^2A(r)}{dr^2} + \left(\varepsilon^2 - m^2 - \frac{\kappa(1+\kappa)}{r^2} \right) A(r) = 0.$$

Решение этого уравнения выражается через функции Бесселя. Действительно, вспоминая, что общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\beta^2 + \frac{1-\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

имеет вид

$$y = c_1 \sqrt{x} J_\nu(\beta x) + c_2 \sqrt{x} J_{-\nu}(\beta x),$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя, найдем

$$A(r) = c_1 \sqrt{\frac{r}{p}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(pr) + c_2 \sqrt{\frac{r}{p}} J_{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}(pr),$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы и

$$p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}.$$

Из условия регулярности $A(r)$ при $r \rightarrow 0$ следует

$$A(r) = \begin{cases} c_1 \sqrt{\frac{r}{p}} J_{\kappa + \frac{1}{2}}(pr), & \kappa > 0, \\ c_2 \sqrt{\frac{r}{p}} J_{-(\kappa + \frac{1}{2})}(pr), & \kappa < 0, \end{cases}$$

т. е. при обоих значениях κ (9.6.2)

$$a(r) = c \frac{1}{\sqrt{pr}} J_{\iota + \frac{1}{2}}(pr). \quad (9.6.5)$$

Найдем теперь $B(r)$. Вспоминая связь между $B(r)$ и $A(r)$ и используя соотношение

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x),$$

получим при $\kappa > 0$

$$B(r) = c_1 \sqrt{\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon + m}} \sqrt{\frac{r}{p}} J_{\kappa - \frac{1}{2}}(pr), \quad \kappa > 0.$$

Если $\kappa < 0$, то применение формулы

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

дает

$$B(r) = c_1 \sqrt{\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon + m}} \sqrt{\frac{r}{p}} J_{-\kappa + \frac{1}{2}}(pr), \quad \kappa < 0.$$

Таким образом, при обоих значениях κ

$$b(r) = \frac{\kappa}{|\kappa|} c \sqrt{\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon + m}} \frac{1}{\sqrt{pr}} J_{\iota + \frac{1}{2}}(pr). \quad (9.6.6)$$

Входящая в $a(r)$ и $b(r)$ постоянная c определяется условием нормировки. Поэтому фаза ее произвольна. Удобно выбрать ее равной $\frac{\pi}{2} l$. Полагая

$$c = c_0 (2\pi)^{3/2} i^l,$$

где c_0 — действительное число, представим $a(r)$ и $b(r)$ в виде

$$\begin{aligned} a(r) &= c_0 g_l(pr), \\ b(r) &= i c_0 \sqrt{\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon + m}} g_l(pr), \end{aligned} \quad (9.6.7)$$

где $g_l(x)$ — функция, введенная в § 8.8 при разложении плоской волны по сферическим волнам

$$g_l(x) = (2\pi)^{3/2} i^l \frac{J_{l+1/2}(x)}{\sqrt{x}}.$$

Найдем теперь постоянную c_0 . Будем исходить сначала из нормировочного условия

$$\int \Psi_{\varepsilon' j' l' m'}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\varepsilon j l m}(\mathbf{r}) d^3x = \delta(\varepsilon - \varepsilon') \delta_{j' j} \delta_{l' l} \delta_{m' m}.$$

Подставляя сюда (9.6.1) и используя формулы (9.6.7), получим

$$\int \Psi_{\varepsilon' j l M}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) d^3x = (2\pi)^3 \frac{c_0^2}{\sqrt{pp'}} \left\{ \int_0^\infty J_{l+1/2}(pr) J_{l+1/2}(p'r) r dr + \frac{\varepsilon-m}{\varepsilon+m} \int_0^\infty J_{l'+1/2}(pr) J_{l'+1/2}(p'r) r dr \right\}.$$

Учитывая далее, что

$$\int_0^\infty J_\nu(pr) J_\nu(p'r) r dr = \frac{1}{p} \delta(p-p') = \frac{1}{\varepsilon} \delta(\varepsilon-\varepsilon'),$$

найдем

$$\int \Psi_{\varepsilon' j l M}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) d^3x = \frac{(2\pi)^3 c_0^2}{p\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon-m}{\varepsilon+m} \right) \delta(\varepsilon-\varepsilon'),$$

откуда

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{2(2\pi)^3} p(m+\varepsilon)}. \quad (9.6.8)$$

Для определения постоянной c_0 при нормировке на сферу радиуса R

$$\int_V \Psi_{\varepsilon j l M}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) d^3x = \int d\omega \int_0^R |\Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})|^2 r^2 dr = 1,$$

можно воспользоваться следующим общим приемом. Переходу к этой нормировке от нормировки на δ -функцию отвечает переход от непрерывного спектра к дискретному (ср. разложение поля (2.1 5) с (2.2.7)). Если функция нормируется на δ -функцию от импульса, то число состояний в интервале dp равно dp , в случае же нормировки на сферу число состояний, согласно (2.2 8), равно $R/\pi dp$. Отсюда следует, что соответствующие нормировочные коэффициенты c_p и c_R связаны между собой соотношением

$$\frac{R}{\pi} |c_R|^2 = |c_p|^2.$$

В случае нормировки на δ -функцию от энергии число состояний в интервале $d\varepsilon$ равно $d\varepsilon = p/\varepsilon dp$, и нормировочный множитель c_ε при этой нормировке связан с c_p соотношением

$$|c_p|^2 = \frac{p}{\varepsilon} |c_\varepsilon|^2,$$

и, следовательно,

$$|c_R|^2 = \frac{\pi p}{R\varepsilon} |c_\varepsilon|^2.$$

Таким образом, при нормировке на сферу значение коэффициента (9.6.8) надо заменить на

$$c_0 = \sqrt{\frac{\pi p^2 (m+\varepsilon)}{2(2\pi)^3 R\varepsilon}}. \quad (9.6.9)$$

Окончательно волновую функцию $\Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ можно записать в виде

$$\Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{(\varepsilon+m)p^2 \delta}{2\varepsilon}} g_l(pr) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) \\ -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{(\varepsilon-m)p^2 \delta}{2\varepsilon}} g_{l'}(pr) \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \quad (9.6.10)$$

где $\delta = \frac{\pi}{R}$ при нормировке на сферу радиуса R и $\delta = \frac{\varepsilon}{p}$ при нормировке на $\delta(\varepsilon - \varepsilon')$.

При $pr \gg 1$ справедлива асимптотическая формула

$$\Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\delta}{\pi \varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m} l^l \sin\left(pr - l \frac{\pi}{2}\right) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) \\ -\sqrt{\varepsilon - m} l^l \sin\left(pr - l' \frac{\pi}{2}\right) \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}. \quad (9.6.11)$$

9.7. Четность состояния. Построенные в предыдущем разделе волновые функции электрона $\Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ являются собственными функциями операторов его энергии \mathbf{H} , квадрата полного момента \mathbf{J}^2 и его проекции \mathbf{J}_z , но не являются собственными функциями оператора квадрата орбитального момента электрона \mathbf{L}^2 , напротив, спиноры $\Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ и $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$, образующие биспинор $\Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$,

$$\Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) \\ \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

являясь собственными функциями оператора \mathbf{L}^2 , относятся, как мы знаем, к различным собственным значениям $l(l+1)$ и $l'(l'+1)$ этого оператора, где $l = j \pm 1/2$ и $l' = j \mp 1/2$. Это обстоятельство связано с тем, что гамильтониан \mathbf{H} не коммутирует с оператором \mathbf{L}^2 ,

$$[\mathbf{H}, \mathbf{L}^2] \neq 0.$$

Мы приходим, таким образом, к заключению, что для электрона, так же как и для фотона, разделение момента количества движения на орбитальный и спиновый моменты не имеет, вообще говоря, смысла. Это разделение приобретает смысл только для нерелятивистского электрона, т. е. в предельном случае $p \rightarrow 0$. При этом, как видно из (9.5.4), спинор $\chi_{\varepsilon j l M}$ стремится к нулю, и биспинор $\Psi_{\varepsilon j l M}$ сводится к одному спинору $\Psi_{\varepsilon j l M}$. В этом случае $l(l+1)$ приобретает смысл квадрата орбитального момента электрона. В общем же случае не малых энергий электрона индекс l у волновой функции $\Psi_{\varepsilon j l M}$ обозначает не орбитальный момент, а указывает лишь на тот факт, что для электрона возможны два различных состояния с одинаковыми значениями ε, j, M .

Покажем, что эти состояния отличаются своей четностью.

Как мы видели в § 8.6, при пространственном отражении,

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r},$$

биспинор $\Psi(\mathbf{r}, t)$ преобразуется согласно закону

$$\mathbf{P}\Psi(\mathbf{r}, t) = \eta_P \gamma_4 \Psi(-\mathbf{r}, t).$$

Применим этот закон к волновой функции $\Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$, определяемой формулой (9.6.6). Так как

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

то

$$\mathbf{P}\Psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) = \eta_P \gamma_4 \Psi_{\varepsilon j l M}(-\mathbf{r}) =$$

$$= \eta_P \begin{pmatrix} (2\pi)^{-3/2} \sqrt{\frac{(\varepsilon + m) p^2 \delta}{2\varepsilon}} g_l(pr) \Omega_{j l M}(-\mathbf{n}) \\ (2\pi)^{-3/2} \sqrt{\frac{(\varepsilon - m) p^2 \delta}{2\varepsilon}} g_{l'}(pr) \Omega_{j l' M}(-\mathbf{n}) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Замечая, что

$$\Omega_{jLM}(-\mathbf{n}) = (-1)^l \Omega_{jLM}(\mathbf{n})$$

и что l и l' отличаются на единицу, т. е. $(-1)^{l'} = -(-1)^l$, получим окончательно

$$P\psi_{\varepsilon jLM}(\mathbf{r}) = \eta_P (-1)^l \psi_{\varepsilon jLM}(\mathbf{r}). \quad (9.7.1)$$

Это соотношение показывает, что помимо внутренней четности, т. е. множителя η_P , одинакового для всех состояний электрона, преобразованная функция отличается от исходной функции (в той же точке пространства) множителем

$$w = (-1)^l,$$

который можно назвать *четностью состояния*.

Итак, квантовое число l определяет четность состояния, а не орбитальный момент, который не имеет для электрона строгого физического смысла. Два состояния с различными l при данном j ($l = j \pm 1/2$) отличаются своей четностью.

9.8. Разложение по сферическим волнам. Мы построили две различные ортонормированные системы волновых функций электрона $\psi_{\mathbf{p}\mu}(\mathbf{r})$ и $\psi_{\varepsilon jLM}(\mathbf{r})$. Произвольное решение уравнений Дирака может быть разложено по любой из этих систем,

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n a_n \psi_n(\mathbf{r}),$$

где n означает набор квантовых чисел $\mathbf{p}\mu$ или εjLM . Если функции $\psi_n(\mathbf{r})$ нормированы согласно условию

$$\int_V |\psi_n(\mathbf{r})|^2 d^3x = 1,$$

где V — нормировочный объем, то, очевидно,

$$a_n = \int \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3x.$$

В частности, можно разложить волновую функцию электрона с определенными импульсом и поляризацией $\psi_{\mathbf{p}\mu}$ по волновым функциям электрона с определенными моментом и четностью $\psi_{\varepsilon jLM}$:

$$\psi_{\mathbf{p}\mu}(\mathbf{r}) = \sum_{jLM} \psi_{\varepsilon jLM}(\mathbf{r}) \langle \varepsilon jLM | \mathbf{p}\mu \rangle,$$

где

$$\langle \varepsilon jLM | \mathbf{p}\mu \rangle = \int \psi_{\varepsilon jLM}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{p}\mu}(\mathbf{r}) d^3x, \quad (9.8.1)$$

или произвести обратное разложение

$$\psi_{\varepsilon jLM}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}\mu} \psi_{\mathbf{p}\mu}(\mathbf{r}) \langle \mathbf{p}\mu | \varepsilon jLM \rangle,$$

где, очевидно,

$$\langle \mathbf{p}\mu | \varepsilon jLM \rangle = \langle \varepsilon jLM | \mathbf{p}\mu \rangle^*.$$

Найдем коэффициенты разложения $\langle \varepsilon jLM | \mathbf{p}\mu \rangle$. Подставляя в (9.8.1) выражения (9.2.1), (9.2.7) для $\psi_{\mathbf{p}\mu}(k)$:

$$\psi_{\mathbf{p}\mu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} u^\mu(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}},$$

$$u^\mu(\mathbf{p}) = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon + m} v^\mu(\mathbf{v})}{\sqrt{\varepsilon - m\sigma\mathbf{v} v^\mu(\mathbf{v})}} \right), \quad (v^\mu(\mathbf{v}))^* v^\mu(\mathbf{v}) = 1, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|},$$

и выражение (9.6.1) для $\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$:

$$\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) \\ \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

получим

$$\langle \varepsilon j l M | \mathbf{p} \mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \{ \sqrt{\varepsilon + m} \varphi_{\varepsilon j l M}^*(\mathbf{p}) + \sqrt{\varepsilon - m} \chi_{\varepsilon j l M}^*(\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) \} v^\mu(\mathbf{v}), \quad (9.8.2)$$

где $\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p})$ и $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p})$ — компоненты Фурье функций $\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ и $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$:

$$\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p}) = \int \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} d^3x,$$

$$\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p}) = \int \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} d^3x.$$

Спиноры $\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p})$, $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p})$ образуют, очевидно, волновую функцию электрона с определенными моментом и его проекцией в импульсном пространстве. Так как координаты и проекции импульса входят симметрично в перестановочные условия

$$[p_j, x_k] = \frac{1}{i} \delta_{jk},$$

то оператор орбитального момента в импульсном пространстве имеет ту же структуру, что и в координатном пространстве

$$\mathbf{L}_p = -i [\mathbf{p} \nabla_p], \quad \nabla_p = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$$

(этим мы уже пользовались в применении к фотону в § 3). Поэтому $\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p})$ и $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p})$ будут пропорциональны тем же шаровым спинорам $\Omega_{j l M}(\mathbf{v})$ и $\Omega_{j l M}(\mathbf{v})$, которые определяют угловую зависимость $\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ и $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$, но аргументом спиноров будет, естественно, $\mathbf{v} = \mathbf{p} / |\mathbf{p}|$, а не $\mathbf{n} = \mathbf{r} / |\mathbf{r}|$.

Чтобы получить спиноры $\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p})$ и $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p})$ с нормировочными коэффициентами, отвечающими нормировке функции $\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$, вычислим их непосредственно, используя формулу (9.6.10)

$$\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3/2} \sqrt{\frac{p^2 \delta}{2\varepsilon}} \int g_l(pr) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} d^3x$$

(аналогичной формулы для $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p})$ мы не выписываем). Этот интеграл легко вычислить, если воспользоваться разложением (3.8.1)

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \sum_{lm} g_l(pr) Y_{lm}^*(\mathbf{v}) Y_{lm}(\mathbf{n}),$$

определением шаровых спиноров (9.5.5) и ортогональностью шаровых функций. Верхним пределом интегрирования по r является радиус нормировочной сферы R . При этом можно заменить $g_l(pr)$ асимптотическим выражением (8.8.5)

$$g_l(pr) \approx 4\pi i^l \frac{\sin\left(pr - l \frac{\pi}{2}\right)}{pr},$$

что дает

$$\int_0^R |g_l(pr)|^2 r^2 dr = \frac{(2\pi)^3}{p^2 \delta}, \quad \delta = \frac{\pi}{R}.$$

Окончательно мы получим следующие выражения для $\Phi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p})$ и $\chi_{\varepsilon j l' M}(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned}\Phi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{p}) &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon-m)\delta}} \Omega_{j l M}(\mathbf{v}), \\ \chi_{\varepsilon j l' M}(\mathbf{p}) &= \frac{-(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon+m)\delta}} \Omega_{j l' M}(\mathbf{v}).\end{aligned}\quad (9.8.3)$$

Подставив эти формулы в (9.8.2), найдем $\langle \varepsilon j l M | \mathbf{p} \mu \rangle$:

$$\langle \varepsilon j l M | \mathbf{p} \mu \rangle = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p \sqrt{V\delta}} (\Omega_{j l M}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})), \quad (9.8.4)$$

откуда следует, что разложение плоской волны на сферические волны имеет вид

$$\begin{aligned}u^\mu(p) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} &\equiv \left(\frac{\sqrt{\varepsilon+m} v^\mu(\mathbf{v})}{\sqrt{\varepsilon-m} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})} \right) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \\ &= \sum_{j l M} (\Omega_{j l M}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m} g_l(pr) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) \\ -\sqrt{\varepsilon-m} g_{l'}(pr) \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (9.8.5)$$

где $v^{\mu*}(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v}) = 1$.

При $pr \gg 1$ справедливо асимптотическое представление

$$u^\mu(p) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \approx \frac{4\pi}{p} \sum_{j l M} (\Omega_{j l M}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) \begin{pmatrix} i^l \sqrt{\varepsilon+m} \frac{\sin\left(pr - l \frac{\pi}{2}\right)}{r} \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) \\ -i^{l'} \sqrt{\varepsilon-m} \frac{\sin\left(pr - l' \frac{\pi}{2}\right)}{r} \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}. \quad (9.8.6)$$

Величина $\langle \mathbf{p} \mu | \varepsilon j l M \rangle$ представляет собой амплитуду вероятности того, что электрон, находясь в состоянии с определенными энергией, моментом и четностью, имеет импульс \mathbf{p} и спиральность μ . Поэтому угловое распределение электронов в этом состоянии определяется формулой

$$d\omega(\mathbf{v}) = |\Omega_{j l M}(\mathbf{v})|^2 d\omega,$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла, в котором лежит вектор \mathbf{p} .

Заметим, что при данном моменте j величина $d\omega(\mathbf{v})$ не зависит от l , т. е. от четности электрона. Действительно, если $l = j + 1/2$ и $l' = j - 1/2$ — два состояния с данным j , то, согласно (9.5.6),

$$|\Omega_{j l' M}(\mathbf{v})|^2 = (\Omega_{j l M}^*(\mathbf{v}) (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v})) ((\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}) \Omega_{j l M}(\mathbf{v})) = |\Omega_{j l M}(\mathbf{v})|^2.$$

Угловое распределение $d\omega(\mathbf{v})$ можно представить в виде

$$d\omega(\mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{j-1/2} a_{2n} P_{2n}(\cos \vartheta) d\omega, \quad (9.8.7)$$

где ϑ — угол между \mathbf{v} и осью z и a_{2n} — некоторые численные коэффициенты. Действительно, используя определение шаровых спиноров и правила суммирования коэффициентов векторного сложения (§ 3.4), мы придем, повторив рассуждения § 3.7, к формуле (9.8.6) со следующими значениями коэффициентов a_L :

$$a_L = (-1)^{M-1/2} C_{j-1/2, j}^{L0} C_{j, M}^{L0}, \quad -M.$$

§ 10. Движение электрона во внешнем поле

10.1. Разделение переменных в центральном поле. В предыдущем параграфе мы изучали состояния свободного электрона. Теперь мы перейдем к изучению движения электрона во внешних электромагнитных полях.

Рассмотрим прежде всего движение электрона в электростатическом поле, обладающем центральной симметрией:

$$A = 0, \quad \varphi = \varphi(r).$$

Гамильтониан электрона имеет в этом случае вид

$$H = \alpha \mathbf{p} + \beta m + V(r), \quad (10.1.1)$$

где $V(r)$ — потенциальная энергия электрона, равная

$$V(r) = e\varphi(r).$$

Легко видеть, что гамильтониан H коммутирует с моментом $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\Sigma$. Поэтому в центрально-симметричном поле существуют состояния электрона с определенными значениями энергии, квадрата момента и проекции момента на одну какую-либо ось (ось z). Волновые функции таких состояний, которые мы будем обозначать через $\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} H\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= \varepsilon\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}), \\ \mathbf{J}^2\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= j(j+1)\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}), \\ J_z\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= M\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Представив $\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ в виде столбца, состоящего из двух спиноров $\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ и $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$,

$$\psi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) \\ \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

мы получим для $\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ и $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ уравнения

$$\begin{aligned} (\sigma \mathbf{p}) \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= (\varepsilon + m - V) \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}), \\ (\sigma \mathbf{p}) \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= (\varepsilon - m - V) \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}), \\ \mathbf{J}^2 \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= j(j+1) \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}), \\ J_z \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= M \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}), \\ \mathbf{J}^2 \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= j(j+1) \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}), \\ J_z \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= M \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

где $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\sigma$.

Так как поле является центрально-симметричным, то угловая зависимость спиноров $\varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ и $\chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r})$ должна быть такой же, как и угловая зависимость соответствующих спиноров в случае свободного электрона.

Иными словами, мы можем положить аналогично (9.6.1)

$$\begin{aligned} \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= g(r) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}), \\ \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) &= i f(r) \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}), \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

где $\Omega_{j l M}(\mathbf{n})$ — шаровой спинор, $l' = 2j - l$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ и $g(r)$ и $f(r)$ — радиальные функции.

Можно непосредственно убедиться, что уравнения (10.1.2) имеют решения в разделяющихся переменных r и \mathbf{n} . Заметим для этого, что

$$(\sigma \mathbf{p}) \varphi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) = -i \frac{dg(r)}{dr} (\sigma \mathbf{n}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) + g(r) (\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}),$$

$$(\sigma \mathbf{p}) \chi_{\varepsilon j l M}(\mathbf{r}) = \frac{df(r)}{dr} (\sigma \mathbf{n}) \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}) + if(r) (\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}),$$

и воспользуемся соотношениями (9.6.2)

$$(\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) = i \frac{1+\kappa}{r} \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}),$$

$$(\sigma \mathbf{p}) \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}) = i \frac{1-\kappa}{r} \Omega_{j l M}(\mathbf{n}),$$

где

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2}, \\ l, & j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Учитывая, кроме того, что

$$(\sigma \mathbf{n}) \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) = -\Omega_{j l' M}(\mathbf{n}),$$

получим из (10.1.1)

$$\begin{aligned} \frac{d(rg(r))}{dr} + \frac{\kappa}{r} (rg(r)) - (\varepsilon + m - V(r)) (rf(r)) &= 0, \\ \frac{d(rf(r))}{dr} - \frac{\kappa}{r} (rf(r)) + (\varepsilon - m - V(r)) (rg(r)) &= 0. \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

Это и есть уравнения для определения радиальных функций $f(r)$ и $g(r)$.

Вид этих функций, естественно, зависит от вида функции $V(r)$. Мы рассмотрим прежде всего асимптотическое поведение радиальных функций при $r \rightarrow \infty$, предполагая, что потенциальная энергия достаточно быстро стремится к нулю с возрастанием r .

Пренебрегая в (10.1.4) вторыми слагаемыми, а также $V(r)$, получим

$$\frac{d}{dr} (rg(r)) - (\varepsilon + m) (rf(r)) = 0,$$

$$\frac{d}{dr} (rf(r)) + (\varepsilon - m) (rg(r)) = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} rg(r) &= C \sqrt{m + \varepsilon} (e^{-\lambda r} + qe^{\lambda r}), \\ rf(r) &= -C \sqrt{m - \varepsilon} (e^{-\lambda r} - qe^{\lambda r}), \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

где C — нормировочный множитель, $\lambda = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}$ и q — постоянная, определяющаяся из условия конечности функций $g(r)$ и $f(r)$ при $r = 0$ и зависящая от ε , j , l .

Как показывают эти формулы, поведение функций $f(r)$ и $g(r)$ при $r \rightarrow \infty$ существенно зависит от того, какое из неравенств имеет место: $\varepsilon > m$ или $\varepsilon < m$. Если $\varepsilon > m$, то величина λ будет чисто мнимой, и оба слагаемых в (10.1.5), не являясь нарастающими при $r \rightarrow \infty$, имеют физический смысл: именно, одно из них описывает расходящуюся, а другое — сходящуюся волну (с определенным моментом). Так как не происходит поглощения частиц, то интенсивности обеих волн должны быть одинаковы,

т. е. q по модулю должно равняться единице. Поэтому при $\varepsilon > m$ можно положить

$$q = e^{2i\delta} (-1)^{l+1}, \quad (10.1.6)$$

где δ — вещественная величина, зависящая от характера потенциальной энергии $V(r)$ и являющаяся функцией ε, j, l :

$$\delta = \delta(\varepsilon, j, l).$$

Используя это представление q , можно переписать асимптотические формулы (10.1.5) при $\varepsilon > m$ в виде

$$\begin{aligned} rg(r) &= i^l C_1 \sqrt{\varepsilon + m} \sin\left(pr - \frac{l\pi}{2} + \delta\right), \\ rf(r) &= -i^l C_1 \sqrt{\varepsilon - m} \sin\left(pr - \frac{l'\pi}{2} + \delta\right), \end{aligned} \quad (10.1.7)$$

где константа C_1 связана с C_j соотношением $C_1 = 2iC(-1)^le^{i\delta}$ и $p = \sqrt{\varepsilon^2 + m^2}$ (эта величина представляет собой, очевидно, импульс свободной частицы, энергия которой равна ε). Нормировочная константа в формулах (10.1.7) может быть выбрана таким образом, чтобы при $\delta = 0$ эти формулы совпадали с формулами (9.6.7) для радиальных функций свободного электрона. Иными словами, величина δ (она называется *фазой на бесконечности*) считается равной нулю в отсутствие внешнего поля.

Итак, мы видим, что при $\varepsilon > m$ возможны все значения энергии электрона, т. е. при $\varepsilon > m$ энергетический спектр электрона непрерывен.

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon < m$. В этом случае λ будет вещественной величиной. Поэтому из условия конечности функций $f(r)$ и $g(r)$ при $r \rightarrow \infty$ следует, что величина q , являющаяся функцией энергии, должна обращаться в нуль,

$$q(\varepsilon) = 0, \quad \varepsilon < m.$$

Обращение q в нуль возможно при определенных значениях энергии. Иными словами, при $\varepsilon < m$ энергетический спектр является дискретным.

10.2. Сферически симметричная потенциальная яма. Рассмотрим энергетический спектр в простейшем случае сферически симметричной потенциальной ямы

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases}$$

где V_0 — некоторая константа, называемая глубиной потенциальной ямы, $V_0 > 0$ (величина r_0 называется шириной ямы).

Исключая из системы (10.1.3) функцию $rf(r)$, получим следующие уравнения для определения $rg(r) \equiv w(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w(r)}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} w(r) + [(\varepsilon + V_0)^2 - m^2] w(r) &= 0, \quad r < r_0, \\ \frac{d^2w(r)}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} w(r) - (\varepsilon^2 - m^2) w(r) &= 0, \quad r > r_0. \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} w(r) &= \sqrt{r} \{A_1 J_{|\kappa+1/2|}(\beta r) + B_1 N_{|\kappa+1/2|}(\beta r)\}, \quad (r < r_0), \\ w(r) &= \sqrt{r} \{A_2 J_{|\kappa+1/2|}(\beta' r) + B_2 N_{|\kappa+1/2|}(\beta' r)\}, \quad (r > r_0), \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

где $J(x)$ и $N(x)$ — функции Бесселя и Неймана,

$$\beta = \sqrt{(\varepsilon + V_0)^2 - m^2}, \quad \beta' = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}.$$

Условие конечности $\omega(r)$ при $r = 0$ требует, чтобы $B_1 = 0$.
 Вместо условия конечности при $r \rightarrow \infty$ мы введем условие

$$\omega(R) = 0,$$

где константа R удовлетворяет условию $R \gg r_0$. Это соответствует помещению системы в сферический ящик с непроницаемыми стенками радиуса R . Принципиально значения такое изменение граничного условия не имеет. Однако практически оно удобно тем, что делает весь спектр дискретным с очень малым расстоянием, порядка $1/R$, между соседними значениями ε в области $|\varepsilon| > m$ (мы пишем модуль ε , так как параметр ε в (10.2.1) может быть как положительным, так и отрицательным). Благодаря дискретности спектра мы сможем следить за изменением положения каждого уровня при изменении V_0 .

Из граничных условий следует

$$B_2 = -A_2 \frac{J_{|\kappa+1/2|}(\beta'R)}{N_{|\kappa+1/2|}(\beta'R)}.$$

Требование непрерывности $\omega(r)$ при $r = r_0$ приводит окончательно к формуле

$$\omega(r) = A \sqrt{r} \begin{cases} [N_{|\kappa+1/2|}(\beta'R) J_{|\kappa+1/2|}(\beta'r_0) - \\ - J_{|\kappa+1/2|}(\beta'R) N_{|\kappa+1/2|}(\beta'r_0)] J_{|\kappa+1/2|}(\beta r), & r < r_0, \\ J_{|\kappa+1/2|}(\beta r_0) [N_{|\kappa+1/2|}(\beta'R) J_{|\kappa+1/2|}(\beta'r) - \\ - J_{|\kappa+1/2|}(\beta'R) N_{|\kappa+1/2|}(\beta'r)], & r > r_0, \end{cases}$$

где A — нормировочная постоянная.

Энергетический спектр определяется из условия

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{r=r_0-0} = \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{r=r_0+0},$$

где $\omega_1(r) = r f(r)$. Выразив $\omega_1(r)$ через $\omega(r)$ при помощи уравнений (10.1.4) и используя асимптотические выражения функций, содержащихся в аргументе R , получим при $\varepsilon < m$

$$\alpha \frac{J'_{|\nu|}(\alpha)}{J_{|\nu|}(\alpha)} = \frac{m \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mr_0}\right)^2} - \varepsilon}{m + \varepsilon} \left\{ \alpha' \frac{H_{|\nu|}^{(1)}(\alpha')}{H_{|\nu|}^{(1)}(\alpha)} \frac{m \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mr_0}\right)^2}\right)}{-\varepsilon + m \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mr_0}\right)^2}} + \nu \right\},$$

где $\nu = \kappa + \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta r_0$, $\alpha' = \beta' r_0$ и $H_{\nu}^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля.

Корни этого уравнения можно определить в общем случае только графически.

Рассмотрим случай $l = 0$, $\kappa = -1$, $\nu = -1/2$. Тогда

$$J_{1/2}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \sin \alpha, \quad H_{1/2}^{(1)}(\alpha) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} e^{i\alpha},$$

и последнее уравнение принимает вид

$$1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{mr_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{m^2}} + 1}{1 + \frac{\varepsilon}{m}} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mr_0}\right)^2}\right).$$

Это уравнение легко решить в предельных случаях широкой ($mr_0 \gg 1$) и узкой ($mr_0 \ll 1$) ямы. В первом случае

$$1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{1 + \frac{\varepsilon}{m}} \left[1 + mr_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{m^2} \right) \right], \quad mr_0 \gg 1.$$

Отсюда видно, что первое связанное состояние $\varepsilon = m$ появляется при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т. е. при $V_0 = \frac{\pi^2}{8mr_0^2}$, как и в соответствующей нерелятивистской задаче. Энергия уровня достигает значения $\varepsilon = 0$ при

$$V_0 = \left(1 + \frac{\pi^2}{2m^2r_0^2} \right) m, \quad \varepsilon = 0,$$

и значения $\varepsilon = -m$ при

$$V_0 = 2 \left(1 + \frac{\pi^2}{4m^2r_0^2} \right) m, \quad \varepsilon = -m.$$

Во втором случае (узкая яма, $mr_0 \ll 1$) состояния с $\varepsilon = m, 0, -m$ достигаются при следующих значениях:

$$\varepsilon = m, \quad V_0 = \frac{\pi}{r_0} - m,$$

$$\varepsilon = 0, \quad V_0 = \frac{\pi}{r_0},$$

$$\varepsilon = -m, \quad V_0 = \frac{\pi}{r_0} + m.$$

Мы видим, что в обоих предельных случаях ($mr_0 \gg 1$ и $mr_0 \ll 1$) интервал изменения глубины ямы V_0 , которому соответствует изменение ε от m до $-m$, равен $2m$ (в общем случае он также $\sim 2m$).

На рис. 10.1 схематически изображена зависимость энергетического спектра от глубины ямы V_0 при заданном радиусе ямы r_0 [12]. Мы видим, что при $V_0 < V_0^{(1)}$ связанные состояния ($|\varepsilon| < m$) отсутствуют. Спектр состоит, как и в отсутствие внешнего поля, из двух областей $\varepsilon > m$ и $\varepsilon < -m$, которые мы будем называть *верхним* и *нижним континуумами*. При $V_0 > V_0^{(1)}$ нижний из уровней верхнего континуума принимает значение, меньшее m , т. е. появляется одно связанное состояние; при $V_0 = V_0^{(2)}$ появляется второе связанное состояние и т. д. Значение энергии для каждого связанного состояния непрерывно уменьшается при росте V_0 и даже становится при $V_0 > V_0^{(3)}$ отрицательным. Тем не менее мы можем причислить эти состояния к электронным состояниям, ибо адиабатическим изменением внешнего поля можно вернуть такие состояния в верхний континуум. Трудность возникает, когда при значении $V_0 = V_0^{(4)}$ уровень пересекает границу $\varepsilon = -m$ и сливается с нижним континуумом, представляющим

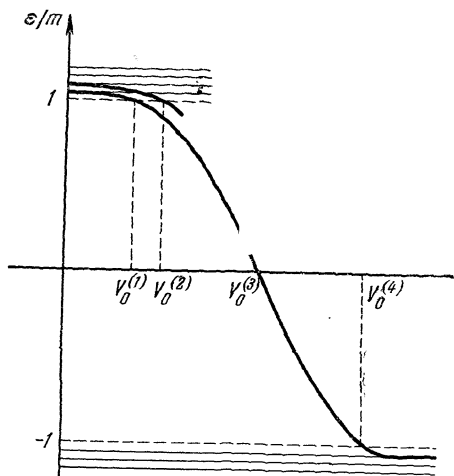


Рис. 10.1.

представляющим

собой совокупность позитронных состояний. Однако задача о поведении электрона в потенциальной яме, глубина которой превышает $V_0^{(4)}$, не может быть решена в рамках квантовой механики одной частицы.

10.3. Движение электрона в кулоновском поле ядра. Одним из важнейших применений уравнений Дирака является исследование движения электрона в поле ядра. Это поле не является строго центральным. Отклонение от сферической симметрии связано с наличием в общем случае у ядер электрических квадрупольных и магнитных дипольных, а также высших мультипольных моментов. Если пренебречь этими эффектами, обуславливающими сверхтонкую структуру электронных уровней, и считать поле ядра сферически симметричным, то можно рассматривать состояния электрона с определенными значениями энергии, момента и четности. При этом волновые функции таких состояний имеют вид (10.1.3), и задача сводится к решению уравнений для радиальных функций (10.1.4).

Поле вне ядра совпадает с полем точечного заряда, т. е.

$$V(r) = -\frac{Ze}{r}, \quad r > r_0,$$

где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, Ze — заряд ядра и r_0 — радиус ядра. Мы рассмотрим задачу в том приближении, когда можно пренебречь конечными размерами ядра, и будем считать, что это выражение для $V(r)$ справедливо вплоть до $r=0$.

Уравнения для радиальных функций в таком поле имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rg(r)) + \frac{\kappa}{r}(rg(r)) - \left(\varepsilon + m + \frac{Ze}{r}\right)(rf(r)) &= 0, \\ \frac{d}{dr}(rf(r)) - \frac{\kappa}{r}(rf(r)) + \left(\varepsilon - m + \frac{Ze}{r}\right)(rg(r)) &= 0. \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

В соответствии с характером асимптотического поведения радиальных волновых функций (10.1.5) будем искать решение уравнений (10.3.1) в виде

$$\begin{aligned} rg(r) &= \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{m}} e^{-\lambda r} (F_1(2\lambda r) + F_2(2\lambda r)), \\ rf(r) &= \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{m}} e^{-\lambda r} (F_1(2\lambda r) - F_2(2\lambda r)), \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

где $\lambda = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}$. Подстановка этих выражений в (10.3.1) приводит к следующим уравнениям для функций $F_1(\rho)$ и $F_2(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{dF_1(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{Ze}{\lambda\rho} - 1\right) F_1(\rho) + \left(\frac{Z\alpha m}{\lambda\rho} + \frac{\kappa}{\rho}\right) F_2(\rho) &= 0, \\ \frac{dF_2(\rho)}{d\rho} - \frac{Ze}{\lambda\rho} F_2(\rho) - \left(\frac{Z\alpha m}{\lambda\rho} - \frac{\kappa}{\rho}\right) F_1(\rho) &= 0, \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

где $\rho = 2\lambda r$.

Выясним сначала поведение решений этих уравнений при $\rho \rightarrow 0$. В этом случае можно положить

$$F_1(\rho) = a_1 \rho^\gamma, \quad F_2(\rho) = a_2 \rho^\gamma,$$

где a_1 , a_2 и γ — константы, связанные, как следует из (10.3.3), соотношениями

$$\begin{aligned} \left(\gamma + \frac{Ze}{\lambda}\right) a_1 + \left(\kappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) a_2 &= 0, \\ \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) a_1 + \left(-\gamma + \frac{Ze}{\lambda}\right) a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю детерминант этой системы, получим

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 - Z^2 \alpha^2} \quad (10.3.4)$$

(знак корня должен быть выбран положительным, чтобы функции $F_1(\rho)$ и $F_2(\rho)$ были конечными при $\rho \rightarrow 0$).

Вернемся теперь к системе (10.3.3). Исключив из нее $F_1(\rho)$ и вводя вместо $F_2(\rho)$ функцию $G_2(\rho)$,

$$F_2(\rho) = \rho^\nu G_2(\rho),$$

получим для $G_2(\rho)$ уравнение

$$\rho \frac{d^2 G_2(\rho)}{d\rho^2} + (2\gamma + 1 - \rho) \frac{dG_2(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} - \gamma \right) G_2(\rho) = 0.$$

Сравнение этого уравнения с уравнением

$$\rho \frac{d^2 \mathcal{F}}{d\rho^2} + (b - \rho) \frac{d\mathcal{F}}{d\rho} - a\mathcal{F} = 0$$

для вырожденной гипергеометрической функции $\mathcal{F}(a, b; \rho)$

$$\mathcal{F}(a, b; \rho) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \frac{\rho^n}{n!}$$

показывает, что

$$G_2(\rho) = C \mathcal{F}\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right)$$

и, следовательно,

$$F_2(\rho) = C \rho^\nu \mathcal{F}\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right), \quad (10.3.5)$$

где C — некоторая константа.

Найдем теперь функцию $F_1(\rho)$. Вычислим для этого $\frac{dF_2(\rho)}{d\rho}$:

$$\frac{dF_2(\rho)}{d\rho} = C \gamma \rho^{\nu-1} \mathcal{F}\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right) + C \rho^\nu \frac{d}{d\rho} \mathcal{F}\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right).$$

Но

$$\frac{d}{d\rho} \mathcal{F}(a, b; \rho) = \frac{a}{\rho} \{ \mathcal{F}(a+1, b; \rho) - \mathcal{F}(a, b; \rho) \}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dF_2(\rho)}{d\rho} = C \rho^{\nu-1} \left\{ \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} \mathcal{F}\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right) + \right. \\ \left. + \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) \mathcal{F}\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right) \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (10.3.3), получим

$$F_1(\rho) = -C \frac{\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}}{\kappa - \frac{Z\alpha m}{\lambda}} \rho^\nu \mathcal{F}\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right). \quad (10.3.6)$$

Формулы (10.3.2), (10.3.5) и (10.3.6) определяют радиальные функции независимо от того, будет ли $\varepsilon < m$ или $\varepsilon > m$.

Рассмотрим сначала случай $\varepsilon < m$. В этом случае энергетический спектр будет, как мы уже знаем, дискретным. Чтобы найти возможные

значения энергии, нужно воспользоваться условиями конечности функций $F_1(\rho)$ и $F_2(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$.

Для гипергеометрической функции $\mathcal{F}(a, b; \rho)$ справедливо следующее асимптотическое представление при $\rho \gg 1$:

$$\mathcal{F}(a, b; \rho) \approx e^{-i\pi a} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \rho^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \rho^{a-b} e^{\rho}.$$

Из него следует, что $\mathcal{F}(a, b; \rho)$ не будет содержать экспоненциально нарастающего члена, если

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = 0.$$

В применении к функциям $F_2(\rho)$ и $F_1(\rho)$ это условие дает

$$\frac{1}{\Gamma\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)} = 0,$$

$$\frac{1}{\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda} - \kappa\right) \Gamma\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)} = 0,$$

где $\lambda = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}$.

Если $\frac{Z\alpha m}{\lambda} - \kappa \neq 0$, то второе условие совпадает с первым (в частности, это имеет место всегда при $\kappa < 0$). Так как полюсами гамма-функции являются целые отрицательные числа и нуль, то мы получаем

$$\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} = -n_r,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{Z\alpha}{\gamma + n_r}\right)^2}}, \quad (10.3.7)$$

где $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$ и $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - Z^2\alpha^2}$.

Если $\kappa = \frac{Z\alpha m}{\lambda}$, то, как легко видеть, $\gamma = \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}$, т. е. $n_r = 0$ (при этом второе условие не выполняется).

Мы видим, таким образом, что

$$n_r = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, & \text{если } \kappa < 0, \\ 1, 2, \dots, & \text{если } \kappa > 0. \end{cases}$$

Формула (10.3.7) определяет тонкую структуру уровней водородоподобного атома (при $\kappa < 0$ число n_r называется радиальным квантовым числом, при $\kappa > 0$ радиальным квантовым числом называется $n_r - 1$).

Полагая в этой формуле $n_r = 0$ и $\kappa = -1$, найдем энергию основного состояния

$$\varepsilon_0 = m \sqrt{1 - Z^2\alpha^2}.$$

Обратим внимание на то, что при $Z\alpha = 1$ значение ε_0 обращается в нуль, а при $Z\alpha > 1$ становится мнимым. Однако это заключение непосредственно не имеет физического значения, так как оно справедливо лишь для кулоновского поля точечного заряда. Учет конечности ядра коренным образом меняет ситуацию. Рассмотрение задачи о движении электрона во внешнем

поле, кулоновском при $r > r_0$ и описываемым некоторой потенциальной ямой при $r < r_0$ и (r_0 — радиус ядра) показывает [13], что связанные состояния могут осуществляться и при $Z\alpha > 1$. При увеличении Z низший уровень понижается и, как это имело место в примере, разобранным в § 10 2, достигает значения $-2m$ при некотором Z_c . Для $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-12}$ см $Z_c \approx 200$.

Если $Z\alpha \ll 1$, то разложение формулы (10.3.7) по этому параметру с точностью до $(Z\alpha)^4$ дает

$$\frac{\varepsilon - m}{m} = -(Z\alpha)^2 \left\{ \frac{1}{2n^2} + \frac{(Z\alpha)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{|\kappa|} - \frac{3}{4n} \right) \right\} \quad (10.3.8)$$

где $n = n_r + |\kappa|$ (это число совпадает с главным квантовым числом нерелятивистской квантовой механики). Первый член в (10.3.8) соответствует формуле Бальмера.

Формулу (10.3.8) можно переписать также в виде

$$\varepsilon - m = -\frac{Z^2\alpha}{2a_0n^2} \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left(\frac{1}{|\kappa|} - \frac{3}{4n} \right) \right\},$$

где a_0 — радиус первой боровской орбиты,

$$a_0 = \frac{1}{m\alpha}.$$

Характерной особенностью формулы для тонкой структуры является то, что в нее входит абсолютное значение κ . Поэтому все уровни энергии, кроме наинизшего, двукратно вырождены. В частности, совпадают уровни $2s_{1/2}$ ($n_r = 1$, $\kappa = -1$, $l = 0$, $j = \frac{1}{2}$, $n = 2$) и $2p_{1/2}$ ($n_r = 1$, $\kappa = 1$, $l = 1$, $j = \frac{1}{2}$, $n = 2$).

В дальнейшем (§ 38) мы увидим, что формула (10.3.7), основанная на применении понятия заданного внешнего поля, не является точной. Поправки к ней снимают вырождение по κ . Величина этих поправок при малых Z по порядку величины равна $(Z\alpha)^4 \alpha$. Отсюда видно, что, например, использование формулы (10.3.7) для водорода с точностью, превышающей точность разложения (10.3.8), не имеет смысла.

В заключение этого раздела приведем окончательные выражения для радиальных функций дискретного спектра

$$g(r) = -\frac{\sqrt{\Gamma(2\gamma + n_r + 1)}}{\Gamma(2\gamma + 1) \sqrt{n_r!}} \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon}{m}}{4N(N - \kappa)}} \left(\frac{2Z}{Na_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{Na_0}} \left(\frac{2Zr}{Na_0} \right)^{\nu-1} \times \\ \times \left\{ n_r \mathcal{F} \left(-n_r + 1, 2\gamma + 1; \frac{2Zr}{Na_0} \right) - (N - \kappa) \mathcal{F} \left(-n_r, 2\gamma + 1; \frac{2Zr}{Na_0} \right) \right\}, \quad (10.3.9)$$

$$f(r) = -\frac{\sqrt{\Gamma(2\gamma + n_r + 1)}}{\Gamma(2\gamma + 1) \sqrt{n_r!}} \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{4N(N - \kappa)}} \left(\frac{2Z}{Na_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{Na_0}} \left(\frac{2Zr}{Na_0} \right)^{\nu-1} \times \\ \times \left\{ n_r \mathcal{F} \left(-n_r + 1, 2\gamma + 1; \frac{2Zr}{Na_0} \right) + (N - \kappa) \mathcal{F} \left(-n_r, 2\gamma + 1; \frac{2Zr}{Na_0} \right) \right\},$$

где

$$N = \sqrt{n^2 - 2n_r(|\kappa| - \gamma)}.$$

Эти функции нормированы согласно условию

$$\int_0^{\infty} (f^2 + g^2) r^2 dr = 1.$$

10.4. Волновые функции непрерывного спектра в кулоновском поле ядра-

При $\varepsilon > m$ энергетический спектр электрона будет, как мы знаем, непрерывным. Мы перейдем теперь к подробному рассмотрению этого спектра.

Общие формулы (10.3.2), (10.3.5), (10.3.6), определяющие радиальные функции для кулоновского поля точечного ядра, в случае непрерывного спектра могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} rg(r) &= Ce^{i\varphi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{m} + 1} e^{-ipr} (2pr)^\gamma \times \\ &\times \left\{ \frac{\gamma + i\xi}{-\kappa - \frac{im\xi}{\varepsilon}} \mathcal{F}(\gamma + 1 + i\xi, 2\gamma + 1; 2ipr) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{F}(\gamma + i\xi, 2\gamma + 1; 2ipr) \right\}, \\ rf(r) &= iCe^{i\varphi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{m} - 1} e^{-ipr} (2pr)^\gamma \times \\ &\times \left\{ \frac{\gamma + i\xi}{-\kappa - \frac{im\xi}{\varepsilon}} \mathcal{F}(\gamma + 1 + i\xi, 2\gamma + 1; 2ipr) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{F}(\gamma + i\xi, 2\gamma + 1; 2ipr) \right\}, \end{aligned} \quad (10.4.1)$$

где

$$p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}, \quad \xi = \frac{Z\alpha\varepsilon}{p}, \quad \gamma = \sqrt{\kappa^2 - Z^2\alpha^2};$$

C — нормировочная константа и φ — произвольная фаза, которые будут выбраны далее.

Замечая, что $\kappa^2 + \frac{m^2\xi^2}{\varepsilon^2} = \gamma^2 + \xi^2$, и вводя вспомогательную величину η ,

$$e^{2i\eta} = \frac{-\kappa + i \frac{m\xi}{\varepsilon}}{\gamma + i\xi} = \frac{\gamma - i\xi}{-\kappa - i \frac{m\xi}{\varepsilon}},$$

можно переписать $rg(r)$ и $rf(r)$ в виде

$$\begin{aligned} rg(r) &= Ce^{i(\varphi+\eta)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{m} + 1} e^{-ipr} \frac{(2pr)^\gamma}{\gamma - i\xi} \times \\ &\times \{ (\gamma + i\xi) e^{i\eta} \mathcal{F}(\gamma + 1 + i\xi, 2\gamma + 1; 2ipr) + \\ &\quad + (\gamma - i\xi) e^{-i\eta} \mathcal{F}(\gamma + i\xi, 2\gamma + 1; 2ipr) \}, \\ rf(r) &= iCe^{i(\varphi+\eta)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{m} - 1} e^{-ipr} \frac{(2pr)^\gamma}{\gamma - i\xi} \times \\ &\times \{ (\gamma + i\xi) e^{i\eta} \mathcal{F}(\gamma + 1 + i\xi, 2\gamma + 1; 2ipr) - \\ &\quad - (\gamma - i\xi) e^{-i\eta} \mathcal{F}(\gamma + i\xi, 2\gamma + 1; 2ipr) \}. \end{aligned}$$

Используем далее известное соотношение

$$\mathcal{F}(a, b; x) = e^x \mathcal{F}(b - a, b; -x).$$

Из него следует, что

$$e^{-\nu pr} \mathcal{F}(\gamma + i\xi, 2\gamma + 1; 2i pr) = e^{\nu pr} \mathcal{F}(\gamma + 1 - i\xi, 2\gamma + 1; -2i pr).$$

Поэтому окончательно можно представить функции $rg(r)$ и $rf(r)$ в виде

$$\left. \begin{aligned} rg(r) &= C e^{i(\varphi + \eta)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{m} + 1} \frac{(2pr)^\gamma}{\gamma - i\xi} \times \\ &\quad \times \{(\gamma + i\xi) e^{-\nu pr + i\eta} \mathcal{F}(\gamma + 1 + i\xi, 2\gamma + 1; 2i pr) + \text{с. с.}\}, \\ rf(r) &= i C e^{i(\varphi + \eta)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{m} - 1} \frac{(2pr)^\gamma}{\gamma - i\xi} \times \\ &\quad \times \{(\gamma + i\xi) e^{-\nu pr + i\eta} \mathcal{F}(\gamma + 1 + i\xi, 2\gamma + 1; 2i pr) - \text{с. с.}\} \end{aligned} \right\} \quad (10.4.2)$$

(с. с. служит для обозначения комплексно сопряженной величины).

Вясним, как ведут себя эти функции при $r \rightarrow \infty$. Используя асимптотическое представление гипергеометрической функции

$$\mathcal{F}(\gamma + 1 + i\xi, 2\gamma + 1; 2i pr) \approx \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + 1 + i\xi)} e^{-\gamma \ln 2pr - \frac{\pi\xi}{2}} e^{i(2pr - \frac{\pi\gamma}{2} + \xi \ln 2pr)},$$

справедливое при $pr \gg 1$, получим следующие асимптотические выражения для функций $rg(r)$ и $rf(r)$:

$$rg(r) \approx \frac{2C}{\gamma - i\xi} e^{i(\varphi + \eta)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{m} + 1} \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{|\Gamma(\gamma + i\xi)|} e^{-\frac{\pi\xi}{2}} \cos(pr + \xi \ln 2pr + \delta), \quad (10.4.3)$$

$$rf(r) \approx \frac{-2C}{\gamma - i\xi} e^{i(\varphi - \eta)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{m} - 1} \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{|\Gamma(\gamma - i\xi)|} e^{-\frac{\pi\xi}{2}} \sin(pr + \xi \ln 2pr + \delta),$$

где

$$\delta = \eta - \frac{\pi\gamma}{2} - \arg \Gamma(\gamma + i\xi). \quad (10.4.4)$$

Определим теперь нормировочную константу C .

Предполагая выполненным условием нормировки

$$\int_0^R (|g(r)|^2 + |f(r)|^2) r^2 dr = 1,$$

где R выбрано таким образом, что $pR \gg 1$, получим, подставляя под знак интеграла вместо $rg(r)$ и $rf(r)$ асимптотические представления этих функций,

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon R}} e^{\frac{\pi\xi}{2}} \frac{|\Gamma(\gamma + 1 + i\xi)|}{\Gamma(2\gamma + 1)}. \quad (10.4.5)$$

Нам остается сделать выбор произвольной фазы φ . Рассмотрим с этой целью переход к свободному электрону, $Z \rightarrow 0$. В этом случае $\xi = \theta$, т. е. $\eta = \frac{1}{2} \arg(-\kappa)$, $\delta = \eta - \frac{\pi|\kappa|}{2}$, и асимптотические формулы (10.4.3) с учетом (10.4.5) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} rg(r) &\approx -\sqrt{\frac{\varepsilon + m}{\varepsilon R}} e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} \sin\left(pr - \frac{l\pi}{2}\right), \\ rf(r) &\approx -\sqrt{\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon R}} e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} \sin\left(pr - \frac{(l-1)\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \kappa = l, \quad (10.4.6)$$

$$\left. \begin{aligned} rg(r) &\approx \sqrt{\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon R}} e^{i\varphi} \sin\left(pr - \frac{l\pi}{2}\right), \\ rf(r) &\approx -\sqrt{\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon R}} e^{i\varphi} \sin\left(pr - \frac{(l+1)\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \kappa = -l - 1.$$

С другой стороны, в § 9.6 мы уже определили радиальные функции для свободного электрона

$$\begin{aligned}rg(r) &\approx \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon R}} i^l \sin\left(pr - \frac{l\pi}{2}\right), \\rf(r) &\approx \sqrt{\frac{\varepsilon-m}{\varepsilon R}} i^{l'+1} \sin\left(pr - \frac{l'\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Поэтому мы выберем фазу φ таким образом, чтобы получить эти формулы. Легко видеть, что

$$\varphi = \frac{l\pi}{2} + \eta + \arg(\gamma - i\xi). \quad (10.4.7)$$

Действительно, при таком выборе φ , если $\xi \rightarrow 0$, $\kappa > 0$, то $e^{i(\varphi+\eta)} \rightarrow -i^l$; если же $\xi \rightarrow 0$ и $\kappa < 0$, то $e^{i(\varphi+\eta)} \rightarrow i^l$, и формулы (10.4.6) переходят в формулы (9.6.7).

Подставляя (10.4.5), (10.4.7) в (10.4.1), представим окончательно функции $rg(r)$ и $rf(r)$ в виде

$$\begin{aligned}rg(r) &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi\xi}{2}} \frac{|\Gamma(\gamma+i\xi)|}{\Gamma(2\gamma+1)} e^{2i\eta} \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon R}} (2pr)^\gamma, \\&\{(\gamma+i\xi) e^{-ipr+i\eta} \mathcal{F}(\gamma+1+i\xi, 2\gamma+1; 2ipr) + \text{с. с.}\}, \\rf(r) &= \frac{i}{2} e^{\frac{\pi\xi}{2}} \frac{|\Gamma(\gamma+i\xi)|}{\Gamma(2\gamma+1)} e^{i(2\eta+\frac{l\pi}{2})} \sqrt{\frac{\varepsilon-m}{\varepsilon R}} (2pr)^\gamma, \\&\{(\gamma+i\xi) e^{-ipr+i\eta} \mathcal{F}(\gamma+1+i\xi, 2\gamma+1; 2ipr) - \text{с. с.}\}.\end{aligned} \quad (10.4.8)$$

10.5. Электрон в постоянном и однородном магнитном поле. В предыдущих разделах мы рассматривали движение электрона в электростатическом поле. Рассмотрим теперь движение электрона в постоянном магнитном поле.

Уравнения Дирака для биспинорной волновой функции

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

описывающей стационарные состояния электрона в таком поле, имеют вид

$$(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m) \psi = \varepsilon \psi,$$

или

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \varphi &= (\varepsilon + m) \chi, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \chi &= (\varepsilon - m) \varphi,\end{aligned} \quad (10.5.1)$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал и ε — энергия электрона.

Исключив из (10.5.1) спинор χ , получим уравнение второго порядка для определения спинора φ

$$(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2 \varphi = (\varepsilon^2 - m^2) \varphi. \quad (10.5.2)$$

Мы будем рассматривать далее только простейший случай однородного магнитного поля. Предполагая, что оно направлено вдоль оси z , можно выбрать векторный потенциал \mathbf{A} в виде

$$A_x = 0, \quad A_y = Hx, \quad A_z = 0,$$

где H — магнитное поле. Подставив эти выражения в (10.5.2), получим следующее уравнение для определения спинора φ в случае постоянного и однородного магнитного поля:

$$\{\mathbf{p}^2 + e^2 H^2 x^2 - eH(\sigma_z + 2xp_y)\} \varphi = (e^2 - m^2) \varphi. \quad (10.5.3)$$

Спинор φ можно выбрать так, чтобы он был собственной функцией проекции спина на направление магнитного поля

$$\sigma_z \varphi = \mu \varphi,$$

где $\mu = \pm 1$. Поэтому мы будем снабжать φ индексом μ и считать, что

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{-1} \end{pmatrix},$$

где функции Φ_μ удовлетворяют уравнению

$$\{\mathbf{p}^2 + e^2 H^2 x^2 - eH(\mu + 2xp_y)\} \Phi_\mu = (e^2 - m^2) \Phi_\mu.$$

Решение этого уравнения можно искать в виде

$$\Phi_\mu = e^{i(p_y y + p_z z)} f_\mu(x), \quad (10.5.4)$$

где p_y и p_z — константы. Функция $f_\mu(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + (eHx - p_y^2)^2 - eH\mu \right\} f_\mu(x) = (e^2 - m^2 - p_z^2) f_\mu(x),$$

или

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right) f_\mu(\xi) = \frac{e^2 - m^2 - p_z^2 - eH\mu}{eH} f_\mu(\xi), \quad (10.5.5)$$

где $\xi = \sqrt{eH} \left(x - \frac{p_y}{eH} \right)$, т. е. уравнению Шредингера для гармонического осциллятора.

Функции $f_\mu(\xi)$ должны, очевидно, обращаться в нуль при $\xi \rightarrow \pm \infty$. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{e^2 - m^2 - p_z^2 + eH\mu}{eH} = 2n + 1, \quad n = 0, 1, \dots,$$

откуда

$$e^2 = m^2 + p_z^2 + eH(2n + 1 - \mu). \quad (10.5.6)$$

При выполнении этого соотношения, определяющего энергию электрона, решение имеет, как известно, вид

$$f_\mu(\xi) = C e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi), \quad (10.5.7)$$

где $H_n(\xi)$ — полином Эрмита и C — нормировочная константа.

Мы видим, что энергия электрона в постоянном и однородном магнитном поле содержит непрерывный параметр p_z — импульс электрона вдоль \mathbf{H} и дискретный параметр n , связанный с финитностью движения электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю (в классической механике движение в этой плоскости является круговым).

Определив спинор φ_μ , можно с помощью (10.5.1) найти спинор χ :

$$\chi_\mu = \frac{1}{\varepsilon + m} \left\{ \mu p_z + \sqrt{eH} \left(\xi \sigma_y - i \sigma_x \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right\} \varphi_\mu, \quad (10.5.8)$$

а следовательно, и биспинор $\psi \equiv \psi_\mu$, описывающий состояние электрона в магнитном поле

$$\begin{aligned} \psi_{+1} &= \frac{1}{\sqrt{L_y L_z} \sqrt{2\varepsilon(\varepsilon+m)}} \begin{pmatrix} (\varepsilon+m) v_n(\xi) \\ 0 \\ p_z v_n(\xi) \\ -i(2eHn)^{1/2} v_{n-1}(\xi) \end{pmatrix} e^{i(p_y y + p_z z)}, \\ \psi_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{L_y L_z} \sqrt{2\varepsilon(\varepsilon+m)}} \begin{pmatrix} 0 \\ (\varepsilon+m) v_n(\xi) \\ i(2eH[n+1])^{1/2} v_{n+1}(\xi) \\ -p_z v_n(\xi) \end{pmatrix} e^{i(p_y y + p_z z)}, \end{aligned} \quad (10.5.9)$$

где

$$v_n(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \frac{(eH)^{1/4}}{\pi^{1/4} 2^{n/2} (n!)^{1/2}}.$$

Эти волновые функции нормированы согласно условию

$$\int_0^{L_z} dz \int_0^{L_y} dy \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\mu|^2 dx = 1.$$

§ 11. Рассеяние электронов

11.1. Расходящиеся и сходящиеся волны. До сих пор мы рассматривали только такие состояния электрона в центральном поле, которым соответствуют определенные значения энергии, момента и четности. В случае инфинитного движения бóльший интерес представляют, однако, состояния, в которых электрон вдали от силового центра имеет определенный импульс и определенную поляризацию. Мы перейдем теперь к рассмотрению таких состояний.

Если электрон, движущийся в некотором центральном поле, обладает определенной энергией ε ($\varepsilon > m$), то его волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ может быть, очевидно, представлена в виде суперпозиции волновых функций $\psi_{\varepsilon j l m}(\mathbf{r})$, описывающих состояния электрона (в данном поле) с определенными энергией, моментом и четностью,

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{j l m} a_{j l m} \psi_{\varepsilon j l m}(\mathbf{r}),$$

где $a_{j l m}$ — некоторые коэффициенты. Мы хотим, чтобы волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ описывала состояние электрона, имеющего на бесконечности определенный импульс и определенную поляризацию. Это требование, однако, не определяет однозначно вида функции $\psi(\mathbf{r})$. Необходимо задать еще характер асимптотики $\psi(\mathbf{r})$ при $r \rightarrow \infty$. Особенно важны два случая: когда функция $\psi(\mathbf{r})$ при $r \rightarrow \infty$ имеет вид либо суперпозиции плоской и сферической расходящейся волн

$$\psi^+(\mathbf{r}) \sim u^\mu e^{i p r} + G^+(\mathbf{n}) \frac{e^{i p r}}{r}, \quad (11.1.1)$$

либо суперпозиции плоской и сферической сходящейся волн

$$\psi^-(\mathbf{r}) \sim u^\mu e^{i p r} + G^-(\mathbf{n}) \frac{e^{-i p r}}{r}. \quad (11.1.2)$$

Здесь $p \equiv |\mathbf{p}| = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$, \mathbf{p} — импульс электрона на бесконечности, u^μ — биспинор, описывающий состояние свободного электрона с импуль-

сом \mathbf{p} и поляризацией μ и, наконец, $G^+(\mathbf{n})$ и $G^-(\mathbf{n})$ — некоторые биспиноры, зависящие от $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Покажем, как найти коэффициенты a_{jlm} , предполагая, что функция $\psi(\mathbf{r})$ имеет заданную асимптотику.

Воспользуемся для этого асимптотическим разложением (9.8.6) плоской волны по сферическим волнам при $pr \gg 1$

$$u^\mu e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \approx \frac{4\pi}{pr} \sum_{jlm} (\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) \begin{pmatrix} i^l V_{\varepsilon+m} \Omega_{jlm}(\mathbf{n}) \sin\left(pr - l \frac{\pi}{2}\right) \\ -i^{l'} V_{\varepsilon-m} \Omega_{jl'm}(\mathbf{n}) \sin\left(pr - l' \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

и асимптотическим представлением функции $\psi_{\varepsilon jlm}(\mathbf{r})$ при $pr \gg 1$

$$\psi_{\varepsilon jlm}(\mathbf{r}) \approx \frac{N}{r} \begin{pmatrix} i^l V_{\varepsilon+m} \Omega_{jlm}(\mathbf{n}) \sin\left(pr - \frac{l\pi}{2} + \delta\right) \\ -i^{l'} V_{\varepsilon-m} \Omega_{jl'm}(\mathbf{n}) \sin\left(pr - \frac{l'\pi}{2} + \delta\right) \end{pmatrix},$$

где δ — фаза на бесконечности, определяющаяся характером силового поля и зависящая от ε, j, l ,

$$\delta = \delta(\varepsilon, j, l) \equiv \delta_{jl},$$

и N — множитель, зависящий от нормировки функции $\psi_{\varepsilon jlm}(\mathbf{r})$, который мы будем считать далее равным единице.

Образовав разность $u^\mu e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} - \sum a_{jlm} \psi_{\varepsilon jlm}(\mathbf{r})$, мы должны потребовать, чтобы в случае асимптотики (11.1.1) в ней исчезали все слагаемые, содержащие $e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}$, а в случае асимптотики (11.1.2) — все слагаемые, содержащие $e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$. Это приводит к следующим значениям коэффициентов a_{jlm} : в первом случае

$$a_{jlm}^+ = \frac{4\pi}{p} e^{i\delta_{jl}} (\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})),$$

во втором случае

$$a_{jlm}^- = \frac{4\pi}{p} e^{-i\delta_{jl}} (\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})).$$

Таким образом, ряд

$$\psi_{p\mu}^+(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{p} \sum_{jlm} (\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) e^{i\delta_{jl}} \psi_{\varepsilon jlm}(\mathbf{r}) \quad (11.1.3)$$

имеет асимптотику (11.1.1), а ряд

$$\psi_{p\mu}^-(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{p} \sum_{jlm} (\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) e^{-i\delta_{jl}} \psi_{\varepsilon jlm}(\mathbf{r}) \quad (11.1.4)$$

— асимптотику (11.1.2).

Волновые функции $\psi_{p\mu}^+(\mathbf{r})$ и $\psi_{p\mu}^-(\mathbf{r})$ являются точными решениями уравнений Дирака во внешнем поле, относящимися к непрерывному спектру. При различных \mathbf{p} и μ они образуют две полные ортогональные системы функций, по которым может быть разложено произвольное решение уравнения Дирака.

Мы будем далее пользоваться точными волновыми функциями $\psi_{p\mu}^+(\mathbf{r})$ и $\psi_{p\mu}^-(\mathbf{r})$ при вычислении матричных элементов, характеризующих различные процессы взаимодействия электронов и фотонов. При этом, как будет подробно разъяснено в § 28.8, в качестве волновых функций частиц, образующихся в результате какого-либо процесса, следует всегда брать функции вида $\psi_{p\mu}^-(\mathbf{r})$, а в качестве волновых функций частиц, исчезающих в результате какого-либо процесса, — функции вида $\psi_{p\mu}^+(\mathbf{r})$.

В случае кулоновского поля ядра функции $\Psi_{p\mu}^+(\mathbf{r})$ и $\Psi_{p\mu}^-(\mathbf{r})$ имеют вид

$$\Psi_{p\mu}^+(\mathbf{r}) = \sum_{jIM} \frac{4\pi i^{l+1}}{p} V \sqrt{\varepsilon R} e^{-i(\eta - \frac{\pi\gamma}{2} - \arg \Gamma(\gamma + i\xi))} \Omega_{jIM}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{p}) \psi_{jIM}(\mathbf{r}), \quad (11.1.5)$$

$$\Psi_{p\mu}^-(\mathbf{r}) = \sum_{jIM} \frac{4\pi(-i)^{l+1}}{p} V \sqrt{\varepsilon R} e^{-i(3\eta - \frac{\pi\gamma}{2} - \arg \Gamma(\gamma + j\xi))} \Omega_{jIM}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{p}) \psi_{jIM}(\mathbf{r}),$$

где использованы обозначения § 10.4.

Просуммировать эти ряды в общем виде невозможно. Однако, если по характеру физической задачи известно, что в исследуемом процессе главную роль играют большие прицельные параметры (которым соответствуют большие значения углового момента электрона), то эти ряды могут быть приближенно заменены функциями [14]

$$\Phi_{p\mu}^+(\mathbf{r}) = \Gamma(1 - i\xi) e^{\frac{\pi\xi}{2}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \left(1 - \frac{i\alpha\nabla}{2\varepsilon}\right) \mathcal{F}[i\xi, 1; -i(\mathbf{p}\mathbf{r} - pr)] u^\mu(p), \quad (11.1.6)$$

$$\Phi_{p\mu}^-(\mathbf{r}) = \Gamma(1 + i\xi) e^{\frac{\pi\xi}{2}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \left(1 - \frac{i\alpha\nabla}{2\varepsilon}\right) \mathcal{F}[-i\xi, 1; -i(\mathbf{p}\mathbf{r} + pr)] u^\mu(p).$$

Смысл этого приближения (оно называется приближением Фарри — Зоммерфельда — Мауэ; такое же название имеют и функции (11.1.6)) заключается в том, что если произвести разложения функций (11.1.6) в ряды по шаровым спинорам, то члены этих разложений будут существенно отличаться от соответствующих членов рядов (11.1.5) только при $l \leq \frac{1}{2}(\alpha Z)^2$; члены же с $l \gg \frac{1}{2}(\alpha Z)^2$ будут практически совпадать в обоих разложениях. Так как моменту l соответствует прицельный параметр $\rho \sim l/p$, то использование функций $\Phi_{p\mu}^\pm(\mathbf{r})$ вместо рядов (11.1.5) будет приводить к малым ошибкам, если эффективные значения прицельного параметра в исследуемом конкретном процессе удовлетворяют неравенству

$$\rho \gg \frac{1}{2} \frac{(\alpha Z)^2}{\varepsilon}.$$

Заметим, что так как силовое поле обращается при $r \rightarrow \infty$ в нуль, то расходящаяся и сходящаяся волны удовлетворяют уравнениям Дирака для свободного электрона

$$(\boldsymbol{\gamma}\nabla - \gamma_4\varepsilon + m) G^\pm(\mathbf{n}) \frac{e^{\pm i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{r} = 0.$$

Но при $r \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{i} \nabla G^\pm(\mathbf{n}) \frac{e^{\pm i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{r} \sim \pm n\rho G^\pm(\mathbf{n}) \frac{e^{\pm i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{r}.$$

Поэтому биспинорные амплитуды $G^\pm(\mathbf{n})$ удовлетворяют уравнениям

$$(\pm n\rho\boldsymbol{\gamma} + i\varepsilon\gamma_4 - im) G^\pm(\mathbf{n}) = 0.$$

Сравнение этих уравнений с уравнением (9.2.2) для биспинора $u(p)$ (при $\mathbf{p} = \pm n\rho$) показывает, что амплитуды $G^+(\mathbf{n})$ и $G^-(\mathbf{n})$ можно представить в виде, аналогичном (9.2.7):

$$G^\pm(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} V \sqrt{\varepsilon + m} & F^\pm(\mathbf{n}) \\ \pm V \sqrt{\varepsilon - m} & (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) F^\pm(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \quad (11.1.7)$$

где $F^\pm(\mathbf{n})$ — двухкомпонентные спинорные амплитуды.

Используя ряды (11.1.3) и (11.1.4) и асимптотическое представление (9.6.11) функций $\psi_{\epsilon, jLM}(\mathbf{r})$, легко убедиться, что

$$F^+(\mathbf{n}) = \frac{2\pi}{ip} \sum_{jLM} (\Omega_{jLM}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) (e^{2i\delta_{jl}} - 1) \Omega_{jLM}(\mathbf{n}) \quad (11.1.8)$$

и

$$F^-(\mathbf{n}) = \frac{2\pi}{ip} \sum_{jLM} (-1)^{l+1} (\Omega_{jLM}^*(\mathbf{v}) v^\mu(\mathbf{v})) (e^{-2i\delta_{jl}} - 1) \Omega_{jLM}(\mathbf{n}). \quad (11.1.9)$$

11.2. Амплитуда и сечение рассеяния. Волновая функция $\psi_{p\mu}^+(\mathbf{r})$ описывает процесс упругого рассеяния частиц в центральном поле. Первый член асимптотической формулы (11.1.1) (плоская волна) отвечает частицам, «падающим» из бесконечности на рассеиватель, а расходящаяся волна — рассеянными частицам.

По смыслу обоих слагаемых, входящих в эту формулу, величина

$$j_0 = (u^\mu)^*(\alpha\mathbf{v}) u^\mu,$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, представляет собой плотность потока падающих частиц на бесконечности, а величина

$$dN = (G^+(\mathbf{n}))^*(\alpha\mathbf{n}) G^+(\mathbf{n}) d\omega,$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла в направлении \mathbf{n} , dN — число частиц, рассеиваемых в единицу времени в этом направлении. Разделив dN на j_0 , мы получим дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{(G^+(\mathbf{n}))^*(\alpha\mathbf{n}) G^+(\mathbf{n})}{(u^\mu)^*(\alpha\mathbf{v}) u^\mu} d\omega. \quad (11.2.1)$$

Это выражение можно упростить, используя представление (11.1.7) для $G^+(\mathbf{n})$. Действительно, легко видеть, что

$$(G^+(\mathbf{n}))^*(\alpha\mathbf{n}) G^+(\mathbf{n}) = 2p F^*(\mathbf{n}) F(\mathbf{n}),$$

где вместо $F^+(\mathbf{n})$ использовано обозначение $F(\mathbf{n})$. Замечая далее, что, согласно (9.2.7),

$$(u^\mu)^*(\alpha\mathbf{v}) u^\mu = 2p (v^\mu(\mathbf{v}))^* v^\mu(\mathbf{v}),$$

получим

$$d\sigma = \frac{F^*(\mathbf{n}) F(\mathbf{n})}{(v^\mu(\mathbf{v}))^* v^\mu(\mathbf{v})} d\omega. \quad (11.2.2)$$

При нормировке

$$(v^\mu(\mathbf{v}))^* v^\mu(\mathbf{v}) = 1$$

дифференциальное сечение рассеяния приобретает вид

$$d\sigma = |F(\mathbf{n})|^2 d\omega. \quad (11.2.3)$$

Связь между спинорными амплитудами рассеянной и падающей волн $F(\mathbf{n})$ и $v(\mathbf{v})$ (мы опускаем в дальнейшем значок μ у $v^\mu(\mathbf{v})$) удобно представить в виде

$$F(\mathbf{n}) = R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) v(\mathbf{v}), \quad (11.2.4)$$

где $R(\mathbf{n}, \mathbf{v})$ — некоторая двумерная матрица. Она должна, очевидно, иметь следующую структуру:

$$R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{n}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \sigma,$$

где a — скаляр, а \mathbf{a}_1 — аксиальный вектор. Но единственным аксиальным вектором, который можно построить в задаче о рассеянии, является вектор $[\mathbf{v}\mathbf{n}]$. Поэтому $R(\mathbf{n}, \mathbf{v})$ можно записать в виде

$$R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = a(\vartheta) - ib(\vartheta)[\mathbf{v}\mathbf{n}]\sigma, \quad (11.2.5)$$

или

$$R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = a(\vartheta) - ib(\vartheta)\sin\vartheta(\sigma_y \cos\varphi - \sigma_x \sin\varphi),$$

где ϑ и φ — сферические координаты вектора \mathbf{n} в системе, в которой вектор \mathbf{v} направлен вдоль полярной оси. Функции $a(\vartheta)$ и $b(\vartheta)$ можно найти, сравнивая (11.2.4) с (11.1.6). Используя явный вид шаровых спинов Ω_{jlm} и матриц σ_i , получим

$$a(\vartheta) = \frac{1}{2ip} \sum_{jl} (e^{2i\delta_{jl}} - 1) |\kappa| P_l(\cos\vartheta), \quad (11.2.6)$$

$$b(\vartheta) = \frac{1}{2ip} \sum_{jl} (e^{2i\delta_{jl}} - 1) \frac{\kappa}{|\kappa|} P_l(\cos\vartheta),$$

где $P_l(x)$ — полином Лежандра, $P_l(x) = \frac{dP_l(x)}{dx}$, $x = \cos\vartheta$.

Таким образом, амплитуда рассеяния и дифференциальное сечение полностью определяются значениями фаз δ_{jl} .

Через фазы δ_{jl} можно выразить также интегральное сечение рассеяния

$$\sigma = \int |F|^2 d\omega.$$

Действительно, используя выражения (11.1.8) для F и замечая, что

$$\int \Omega_{jlm}^*(\mathbf{n}) \Omega_{j'l'm'}(\mathbf{n}) d\omega = \delta_{j'j} \delta_{l'l} \delta_{m'm},$$

получим

$$\sigma = \frac{4\pi}{p^2} \sum_{jlm} |\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v(\mathbf{v})|^2 |e^{2i\delta_{jl}} - 1|^2.$$

Направим ось z вдоль \mathbf{v} . Тогда

$$\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v(\mathbf{v}) = \sum_{m,\alpha} C_{l0^{1/2}m}^{jM} Y_{lm}^*(0) v_\alpha.$$

Но

$$Y_{lm}(0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0},$$

$$C_{l0^{1/2}m}^{jM} \sqrt{\frac{|\kappa|}{2l+1}}$$

(напомним, что $\kappa = \pm(j+1/2)$ при $j = l \mp 1/2$). Поэтому

$$\sum_M |\Omega_{jlm}^*(\mathbf{v}) v(\mathbf{v})|^2 = \frac{|\kappa|}{4\pi}$$

и

$$\sigma = \frac{4\pi}{p^2} \sum_{jl} |\kappa| \sin^2 \delta_{jl}. \quad (11.2.7)$$

Если для всех l имеет место равенство $\delta_{l+1/2} = \delta_{l-1/2}$, $l \equiv \delta_l$, то формула (11.2.4) переходит в известную нерелятивистскую формулу для

сечения рассеяния

$$\sigma = \frac{4\pi}{p^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l.$$

11.3. Поляризация и азимутальная асимметрия. Характерной чертой рассеяния электронов является азимутальная асимметрия, т. е. зависимость дифференциального сечения рассеяния от угла φ . Согласно (11.2.5) угол φ содержит матрица $R(\mathbf{n}, \mathbf{v})$, определяющая связь между амплитудами падающей и рассеянной волн, причем коэффициенты при $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ содержат операторы спина электрона. Поэтому азимутальная асимметрия рассеяния тесно связана с характером поляризации падающей волны.

Дифференциальное сечение рассеяния легко связать с состоянием поляризации падающей волны, если воспользоваться поляризационной матрицей плотности электрона ρ . Из (11.2.4) следует

$$|F|^2 = v^* R^+ R v.$$

Заменяя произведения компонент спинора $v_\alpha v_\beta^*$ на элементы матрицы плотности $\rho_{\alpha\beta}$, получим, используя (11.2.3),

$$d\sigma = \text{Sp } R \rho R^+ d\Omega. \quad (11.3.1)$$

Подставив сюда общее выражение (9.4.5) для ρ

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\sigma}),$$

где $\boldsymbol{\xi}$ — вектор поляризации (удвоенный средний спин в системе покоя электрона), и выражение (11.2.5) для R , получим

$$d\sigma = Q(\vartheta) (1 + \Delta(\vartheta) \boldsymbol{\xi} [\mathbf{v} \mathbf{n}]) d\Omega = Q(\vartheta) \{1 + \Delta(\vartheta) (\zeta_y \cos \varphi - \zeta_x \sin \varphi)\} d\Omega, \quad (11.3.2)$$

где

$$Q(\vartheta) = |a|^2 + |b|^2, \\ \Delta(\vartheta) = \frac{i(ab^* - a^*b)}{|a|^2 + |b|^2} \sin \vartheta. \quad (11.3.3)$$

Из (11.3.2) видно, что рассеивающая система является «анализатором» поляризации. Измерение азимутальной асимметрии дает возможность определить составляющую вектора поляризации $\boldsymbol{\xi}$, перпендикулярную к плоскости рассеяния. Выбирая для φ значения 0 и π , получим из (11.3.2)

$$\Delta(\vartheta) \zeta_y = \frac{d\sigma(\vartheta, 0) - d\sigma(\vartheta, \pi)}{d\sigma(\vartheta, 0) + d\sigma(\vartheta, \pi)},$$

при $\varphi = \pm \pi/2$ найдем

$$\Delta(\vartheta) \zeta_x = \frac{d\sigma(\vartheta, -\frac{\pi}{2}) - d\sigma(\vartheta, \frac{\pi}{2})}{d\sigma(\vartheta, -\frac{\pi}{2}) + d\sigma(\vartheta, \frac{\pi}{2})}.$$

Продольную составляющую вектора поляризации ζ_z нельзя определить при однократном рассеянии.

Если $\Delta(\vartheta) = 0$, то рассеяние не обладает азимутальной асимметрией. Это имеет место, в частности, в нерелятивистском приближении, когда рассеянию в центральном поле отвечают одинаковые фазы δ_{jl} при данном l и различных j . При этом, согласно (11.2.6), $b = 0$ и, следовательно, $\Delta = 0$.

Кроме того, азимутальная асимметрия отсутствует в случае малых фаз δ_{jl} . Действительно, если $e^{2i\delta_{jl}} - 1 \approx 2i\delta_{jl}$, то a и b вещественны и, согласно (11.3.3), $\Delta(\vartheta) = 0$.

Заметим, что при $\vartheta \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$, так как $\Delta(\vartheta)$ содержит множитель $\sin \vartheta$.

Вследствие зависимости матрицы R от σ при рассеянии меняется состояние поляризации электрона. Поляризационная матрица плотности ρ' рассеянного электрона может быть определена как $\rho'_{\alpha\beta} = \frac{F^\alpha F^{\beta*}}{|F|^2}$, где F^α — составляющие спинора F . Из (11.2.4) находим

$$\rho' = \frac{R\rho R^+}{\text{Sp } R\rho R^+}. \quad (11.3.4)$$

Поэтому вектор поляризации ξ' рассеянного электрона равен

$$\xi' = \frac{\text{Sp } R\rho R^+ \sigma}{\text{Sp } R\rho R^+}. \quad (11.3.5)$$

Если падающий электрон не поляризован, то

$$\xi' = \Delta(\vartheta) \tau, \quad (11.3.6)$$

где

$$\tau = \frac{[vn]}{\sin \vartheta},$$

т. е. рассеянный электрон поляризован в направлении, перпендикулярном к плоскости рассеяния, а степень поляризации его равна $\Delta(\vartheta)$. Таким образом, рассеивающая система является «поляризатором».

Используя (11.3.6) и (11.3.2), мы приходим к заключению, что вторичное рассеяние неполяризованного электрона будет обладать азимутальной асимметрией. Дифференциальное сечение вторичного рассеяния определяется следующей формулой:

$$\frac{d\sigma'(n, n')}{d\sigma'} = Q(\vartheta') (1 + \Delta(\vartheta) \Delta(\vartheta') (\tau\tau')), \quad (11.3.7)$$

где $\cos \vartheta' = nn'$, $\tau' = [nn']/\sin \vartheta'$, n' — единичный вектор в направлении вторичного рассеяния.

В общем случае при наличии начальной поляризации

$$\xi' = \frac{(|a|^2 - |b|^2)\xi + i(ab^* - a^*b)\tau + (ab^* + a^*b)[\tau\xi] + 2|b|^2(\xi\tau)\tau}{|a|^2 + |b|^2 + i(ab^* - a^*b)\xi\tau}.$$

11.4. Борновское приближение. Полученные выше формулы для сечения рассеяния электронов являются точными, но они содержат фазы на бесконечности $\delta_{jl}(\varepsilon)$, весьма сложным образом зависящие от внешнего поля. Упрощения возникают, если рассеивающее поле можно трактовать как малое возмущение. В этом случае (называемом *борновским приближением*) фазы малы:

$$\delta_{jl}(\varepsilon) \ll 1,$$

и сечение рассеяния может быть непосредственно выражено через потенциал внешнего поля.

Рассмотрим подробнее этот случай.

Полагая в уравнениях Дирака

$$\psi(x) = e^{-i\varepsilon t} \psi(\mathbf{r}),$$

где ε — энергия электрона, запишем эти уравнения в виде

$$(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m)\psi(\mathbf{r}) = i\varepsilon\gamma_\nu A_\nu(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \quad (11.4.1)$$

и будем рассматривать правую часть этих уравнений как малое возмущение. В качестве нулевого приближения возьмем плоскую волну

$$\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = ue^{i\mathbf{p}\mathbf{r}},$$

где \mathbf{p} — импульс электрона на бесконечности. Полагая далее

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi^{(0)}(\mathbf{r}) + \psi^{(1)}(\mathbf{r}),$$

где $\psi^{(1)}(\mathbf{r})$ — малая добавка к $\psi^{(0)}(\mathbf{r})$, получим, согласно (11.4.1),

$$(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m)\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (11.4.2)$$

где

$$f(\mathbf{r}) = ie\gamma_4 A_v(\mathbf{r})ue^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}.$$

Для решения этого уравнения введем функцию Грина $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ уравнений Дирака

$$(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (11.4.3)$$

Легко убедиться, что функция Грина, соответствующая запаздывающим решениям, имеет вид

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon - m)\frac{e^{i\mathbf{p}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (11.4.4)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{1}{4\pi}(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon + m)(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon - m)\frac{e^{i\mathbf{p}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \\ &= -\frac{1}{4\pi}(\Delta + p^2)\frac{e^{i\mathbf{p}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Зная $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, можно сразу написать решение уравнений (11.4.2)

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon - m)\int\frac{e^{i\mathbf{p}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}f(\mathbf{r}')d^3x'. \quad (11.4.5)$$

Найдем асимптотику $\psi^{(1)}(\mathbf{r})$ при $r \rightarrow \infty$. Полагая $r \gg r'$ и замечая, что

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - n\mathbf{r}', \quad n = \mathbf{r}/r,$$

получим

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{4\pi}(\gamma\nabla - \gamma_4\varepsilon - m)\frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{r}\int e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}'}f(\mathbf{r}')d^3x',$$

где $\mathbf{p}' = \mathbf{p}n$. Но

$$\nabla\frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{r} \approx i\mathbf{p}'\frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{r},$$

поэтому окончательно $\psi^{(1)}(\mathbf{r})$ приобретает вид

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r})_{r \rightarrow \infty} \approx ie\frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{4\pi r}(i\mathbf{p}' - \gamma_4\varepsilon - m)\gamma_4 u \int e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}'}A_v(\mathbf{r}')d^3x'. \quad (11.4.6)$$

Если поле является электростатическим, то

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r})_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{4\pi r}(i\mathbf{p}' - \gamma_4\varepsilon - m)\gamma_4 u \int e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}'}V(\mathbf{r}')d^3x',$$

где $V(\mathbf{r}) = eA_0(\mathbf{r})$. Сравнение этой формулы с (11.1.1) показывает, что амплитуда рассеяния в борновском приближении (более точно, в первом борновском приближении) определяется формулой

$$G(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi}(i\mathbf{p}' - \gamma_4\varepsilon - m)\gamma_4 u M, \quad (11.4.7)$$

где

$$M = \int e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3x.$$

Выражая в (11.4.7) биспинорную амплитуду рассеяния $G(\mathbf{n})$ через спинорную (двухкомпонентную) амплитуду $F(\mathbf{n})$ согласно (11.1.5), а также биспинор u через спинор $v(\mathbf{v})$ согласно (9.2.7), мы приходим к выражению вида (11.2.4)

$$F(\mathbf{n}) = R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) v(\mathbf{v}),$$

где матрица $R(\mathbf{n}, \mathbf{v})$ имеет структуру (11.2.5)

$$R(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = a(\vartheta) - ib(\vartheta) [\mathbf{vn}] \boldsymbol{\sigma},$$

причем

$$\begin{aligned} a(\vartheta) &= -\frac{M}{4\pi} (\varepsilon + m + (\varepsilon - m) \cos \vartheta), \\ b(\vartheta) &= -\frac{M}{4\pi} (\varepsilon - m). \end{aligned} \quad (11.4.8)$$

Так как аргументы величин $a(\vartheta)$ и $b(\vartheta)$ одинаковы, то

$$\Delta(\vartheta) = i(ab^* - a^*b) = 0,$$

и сечение рассеяния имеет, согласно (11.3.2), вид

$$d\sigma = Q(\vartheta) d\omega,$$

где

$$Q(\vartheta) = |a|^2 + |b|^2 = \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} M^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right), \quad (11.4.9)$$

и $v = p/\varepsilon$ — скорость частицы.

Легко обобщить изложенный метод для нахождения поправок к сечению рассеяния, вносимых вторым и более высокими приближениями теории возмущений. Например, чтобы учесть второе приближение, нужно положить

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi^{(0)}(\mathbf{r}) + \psi^{(1)}(\mathbf{r}) + \psi^{(2)}(\mathbf{r}),$$

где $\psi^{(2)}(\mathbf{r})$ определяется из уравнения

$$(\gamma \nabla - \gamma_4 \varepsilon + m) \psi^{(2)}(\mathbf{r}) = i e \gamma_\nu A_\nu(\mathbf{r}) \psi^{(1)}(\mathbf{r}).$$

Подставляя в правую часть этого уравнения найденное выше выражение для $\psi^{(1)}(\mathbf{r})$, можно определить по формуле, аналогичной (11.4.5), функцию $\psi^{(2)}(\mathbf{r})$. При $r \rightarrow \infty$ она ведет себя как

$$\psi^{(2)}(\mathbf{r}) = G^{(2)}(\mathbf{n}) \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{r},$$

где $G^{(2)}(\mathbf{n})$ — некоторый биспинор, зависящий от $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Он представляет собой, очевидно, поправку к амплитуде рассеяния $G(\mathbf{n})$, найденную выше в первом приближении теории возмущений. Сложив $G(\mathbf{n})$ и $G^{(2)}(\mathbf{n})$, мы найдем амплитуду рассеяния с учетом второго приближения теории возмущений. Мы не будем, однако, приводить здесь вычисления $G^{(2)}(\mathbf{n})$.

11.5. Рассеяние в кулоновском поле ядра. Перейдем к рассмотрению рассеяния электронов в кулоновском поле ядра,

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Z\alpha}{r}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}.$$

Если Z невелико, так что

$$\frac{Z\alpha}{\hbar v} \ll 1,$$

то можно пользоваться борновским приближением. В этом случае, с рассмотрения которого мы начнем, сечение рассеяния определяется величиной

$$M = -Z\alpha \int e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3x}{r},$$

которая, как легко видеть, равна

$$M = -\frac{4\pi Z\alpha}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2}. \quad (11.5.1)$$

Действительно, вводя под знак интеграла для обеспечения его сходимости при $r \rightarrow \infty$ множитель $e^{-\eta r}$, где η — бесконечно малая положительная величина, и выполняя интегрирование по углу между векторами \mathbf{r} и $\mathbf{p}-\mathbf{p}'$, получим

$$M = -\frac{2\pi Z\alpha}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^\infty \{e^{-i|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|+\eta)r} - e^{i|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|-\eta)r}\} d^3x = -\frac{4\pi Z\alpha}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2}.$$

Подставляя это значение M в формулу (11.4.9), получим дифференциальное сечение рассеяния электронов в кулоновском поле ядра в первом борновском приближении (*Формула Мотта*) [15]

$$d\sigma = \left(\frac{Z\alpha}{2pv}\right)^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \frac{d\sigma}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (11.5.2)$$

Эта формула только множителем $\left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)$, имеющим чисто кинематическое происхождение, отличается от классической формулы Резерфорда.

Как отмечалось выше, в рассматриваемом приближении величина $\Delta(\vartheta)$, определяющая азимутальную асимметрию рассеяния, равна нулю,

$$\Delta(\vartheta) = 0.$$

Асимметрия появляется только в следующих приближениях теории возмущений.

Приведем результаты вычислений сечения рассеяния $d\sigma$, т. е. величин $Q(\vartheta)$ и $\Delta(\vartheta)$ с учетом второго приближения теории возмущений (т. е. с точностью до членов порядка $(Z\alpha)^3$) [16, 15],

$$Q(\vartheta) = \left(\frac{Z\alpha}{2pv}\right)^2 \left[1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \pm \pi Z\alpha \left(1 - \sin \frac{\vartheta}{2}\right) \sin \frac{\vartheta}{2}\right] \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}, \quad (11.5.3)$$

$$\Delta(\vartheta) = \mp 2Z\alpha \frac{v\sqrt{1-v^2}}{1-v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{\vartheta}{2}} \ln \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}}.$$

Эти формулы определяют рассеяние как электронов, так и позитронов (в последнем случае величины, пропорциональные $Z\alpha$, должны быть взяты с нижним знаком).

Простой вид имеет выражение дифференциального сечения в случае рассеяния на малые углы. Оно совпадает с соответствующим классическим выражением

$$d\sigma = \left(\frac{2Z\alpha}{pv}\right)^2 \frac{d\sigma}{\vartheta^4}, \quad \vartheta \ll 1. \quad (11.5.4)$$

В общем случае произвольных Z и произвольных углов для нахождения сечения рассеяния следует применять общие методы, изложенные в предыдущих разделах. Однако, так как фаза в асимптотическом выражении

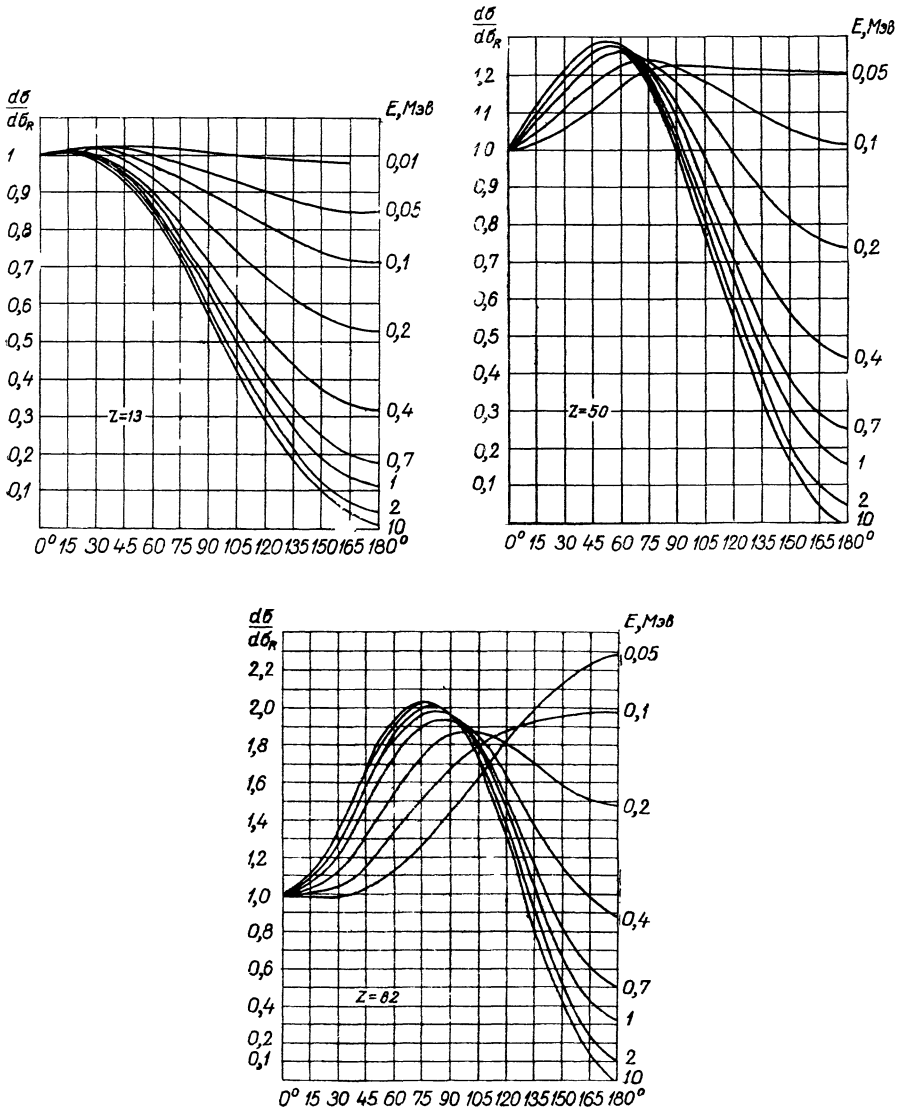


Рис. 11.1

волновой функции (10 4 3) содержит логарифмическую зависимость от r , то решение уравнения Дирака, описывающее рассеяние, следует искать в виде, учитывающем искажение плоской волны на бесконечности, а именно в виде

$$\varphi = v e^{i p z - i \xi \ln p(r-z)} + F \frac{e^{i p r - i \xi \ln 2 p r}}{r} .$$

При этом формулы (11.1.6) и (11.2.3) остаются в силе, причем, согласно (10.4.4),

$$\delta = \eta - \frac{\pi\gamma}{2} - \arg \Gamma(\gamma + i\xi).$$

Суммирование рядов (11.2.6) для функций $a(\vartheta)$ и $b(\vartheta)$ в общем случае невозможно провести аналитически, и определение сечения требует численных расчетов. На рис. 11.1 и 11.2 приведены некоторые полученные

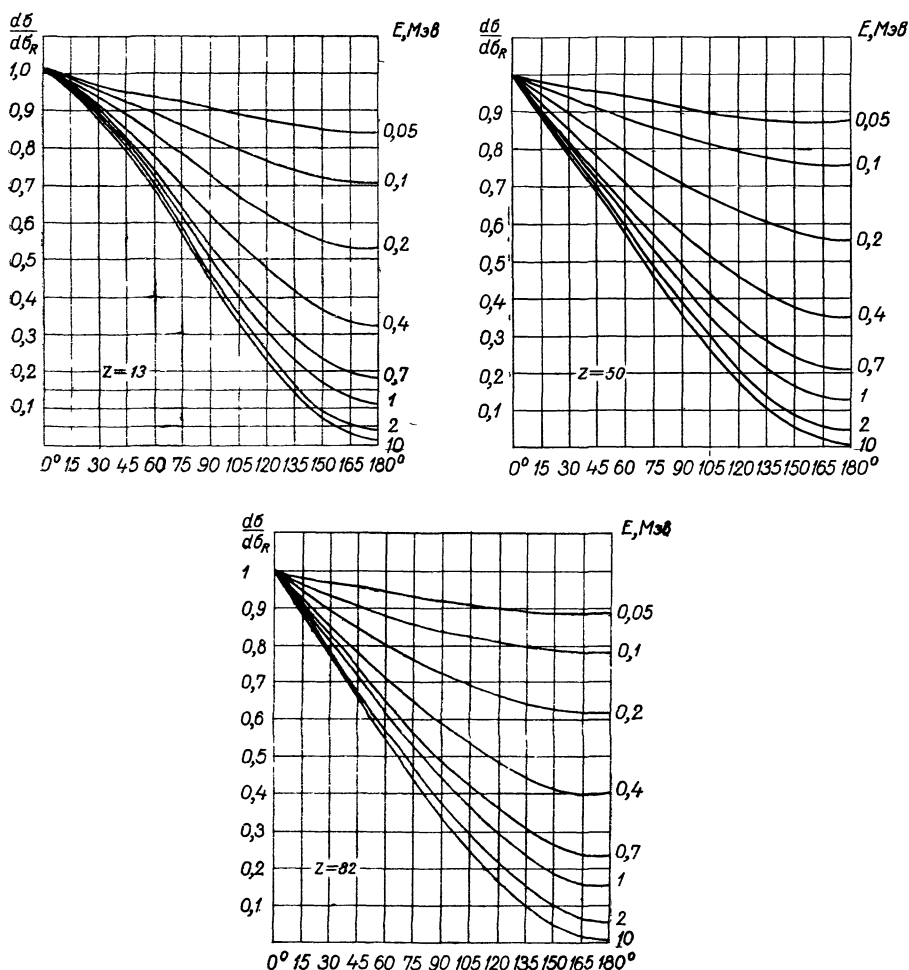


Рис. 11.2.

таким образом результаты [17]. Кривые рис. 11.1 изображают отношение дифференциального сечения рассеяния неполяризованных электронов к его значению, вычисленному по формуле Резерфорда $d\sigma_R$, т. е. величину

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_R} = \frac{Q(\vartheta)}{\left(Z\alpha/2pv \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2}$$

как функцию угла рассеяния ϑ при различных значениях энергии и Z . На рис. 11.2 приведены аналогичные результаты для позитронов. На рис. 11.3 представлена зависимость величины $\Delta(\vartheta)$ от энергии при данных ϑ и Z для электрона [18], а на рис. 11.4 — для позитрона [19].

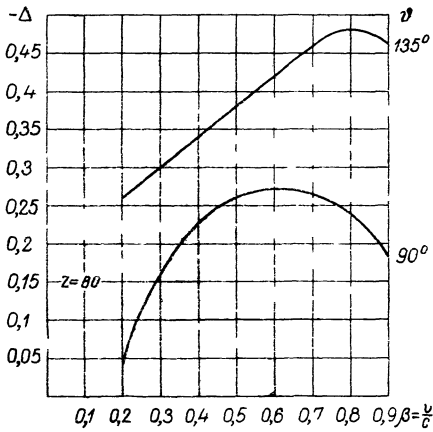


Рис. 11.3.

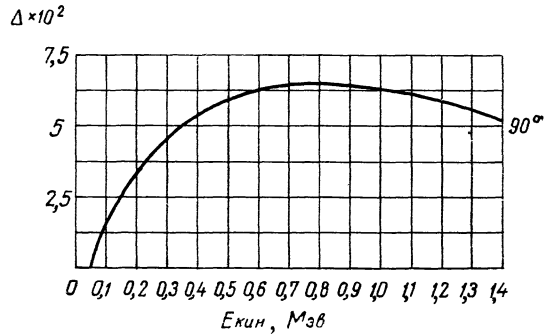


Рис. 11.4

При очень больших энергиях электронов необходимо учитывать конечность размеров ядра. Мы не будем приводить здесь соответствующие результаты.

§ 12. Предельные переходы к нерелятивистской квантовой механике и релятивистской классической механике

12.1. Уравнение Паули. Если энергия электрона ε мало отличается от его энергии покоя m

$$|\varepsilon - m| \ll m,$$

то, как мы видели, один из двух спиноров, образующих волновую функцию электрона, мал по сравнению с другим.

$$|\chi| \ll |\varphi|.$$

Это дает возможность путем формального разложения волновой функции в ряд по степеням $1/c$ (c — скорость света в вакууме) получить приближенное уравнение, содержащее только бóльший спинор.

Перепишем с этой целью уравнение Дирака в форме, содержащей явно скорость света,

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(c\alpha \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + eA_0 \right) \Psi, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{i} \nabla,$$

где \mathbf{A} и A_0 — векторный и скалярный потенциалы внешнего электромагнитного поля. Так как в нерелятивистской теории под энергией понимается разность между полной энергией и энергией покоя, то удобно вместо Ψ рассматривать функцию Ψ :

$$\Psi = \psi e^{imc^2 t} \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (12.1.1)$$

Она удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(c\alpha \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + (\beta - 1) mc^2 + eA_0 \right) \Psi, \quad (12.1.2)$$

которое распадается на уравнения

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= c \sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \chi + e A_0 \varphi, \\ i \frac{\partial \chi}{\partial t} &= c \sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi + e A_0 \chi - 2mc^2 \chi \end{aligned} \quad (12.1.3)$$

для спинов φ и χ , образующих Ψ .

Чтобы произвести разложение по степеням $1/c$, будем считать, что χ по порядку величины составляет $\frac{1}{c} \varphi$ (это оправдывается ходом дальнейших выкладок). Тогда для получения первого приближения можно отбросить во втором уравнении все члены, содержащие χ , кроме последнего, в котором коэффициент содержит c^2 . Мы получим, таким образом,

$$\chi = \frac{1}{2mc} \sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi. \quad (12.1.4)$$

Подстановка этого выражения в первое уравнение дает

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m} \left[\sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 + e A_0 \right) \varphi. \quad (12.1.5)$$

Пользуясь свойствами матриц σ_i , легко убедиться, что

$$\left[\sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e}{c} \sigma \mathbf{H},$$

где \mathbf{H} — магнитное поле,

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Подстановка этого выражения в (12.1.5) приводит окончательно к следующему уравнению для спина φ :

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e A_0 - \frac{e}{2mc} \sigma \mathbf{H} \right) \varphi. \quad (12.1.6)$$

Это уравнение, представляющее собой первое приближение в разложении φ по $1/c$, называется *уравнением Паули* [20]. Оно имеет вид уравнения Шредингера с гамильтонианом

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e A_0 - \frac{e}{2mc} \sigma \mathbf{H}, \quad (12.1.7)$$

отличающимся от нерелятивистского гамильтониана бесспиновой частицы наличием члена $-\mu \mathbf{H}$, где

$$\mu = \frac{e \hbar}{2mc} \sigma \quad (12.1.8)$$

(мы ввели сюда явно \hbar). Этот член имеет, очевидно, вид потенциальной энергии магнитного диполя μ во внешнем магнитном поле \mathbf{H} .

Таким образом, мы приходим к выводу, что в первом приближении по $1/c$ электрон ведет себя, как нерелятивистская частица, обладающая, кроме заряда, магнитным моментом μ .

12.2. Второе приближение. Найдем теперь второе приближение, продолжив разложение до членов порядка $1/c^2$. Ограничимся сначала случаем, когда имеется только постоянное внешнее электрическое поле.

Подставив в отброшенные ранее члены второго уравнения (17.1.3) значение χ в первом приближении и решив это уравнение относительно χ , получим

$$\chi = \frac{1}{2mc} \left(\sigma \mathbf{p} + \frac{e A_0}{2mc^2} \sigma \mathbf{p} - \frac{i}{2mc^2} \sigma \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi. \quad (12.2.1)$$

Подставив далее это выражение в первое уравнение (12.1.3), получим следующее уравнение для φ :

$$i \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{4mc^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + eA_0 + \frac{e}{4m^2c^2} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) A_0 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) \right) \varphi.$$

Умножая это уравнение на $\left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{4mc^2} \right)$ и сохраняя члены порядка не выше $1/c^2$, перепишем его в виде

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2c^2} \right) \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + eA_0 \right) + \frac{e}{4m^2c^2} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) A_0 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) \right) \varphi \equiv \mathbf{H}' \varphi. \quad (12.2.2)$$

Хотя это уравнение формально и имеет вид уравнения Шредингера, тем не менее оно им не является, так как функция φ не имеет точного смысла волновой функции электрона, а оператор \mathbf{H}' нельзя рассматривать как оператор Гамильтона. Действительно, интеграл $\int |\varphi|^2 d^3x$ не сохраняется во времени (согласно уравнению непрерывности сохраняется лишь интеграл $\int (|\varphi|^2 + |\chi|^2) d^3x$), поэтому φ нельзя пронормировать; оператор же \mathbf{H}' не является самосопряженным, так как он содержит слагаемое $\frac{e}{4m^2c^2} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) A_0 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})$.

Чтобы найти волновую функцию и гамильтониан во втором приближении, произведем преобразование

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \Phi = \mathbf{O} \varphi, \\ \mathbf{H}' &\rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{O} \mathbf{H}' \mathbf{O}^{-1}, \end{aligned}$$

где \mathbf{O} — некоторый оператор, не содержащий явно времени. Тогда Φ будет удовлетворять уравнению

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{H} \Phi.$$

Если мы подберем теперь \mathbf{O} таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int (|\varphi|^2 + |\chi|^2) d^3x = \int |\Phi|^2 d^3x,$$

то Φ можно будет интерпретировать как волновую функцию, а \mathbf{H} — как гамильтониан во втором приближении.

Подставляя в это условие вместо χ выражение (12.1.4), получим

$$\int \varphi^* \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2c^2} \right) \varphi d^3x = \int |\Phi|^2 d^3x,$$

откуда следует, что с требуемой точностью оператор \mathbf{O} имеет вид

$$\mathbf{O} = 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}.$$

Так как оператор \mathbf{O} отличается от единицы на слагаемое порядка $1/c^2$, то преобразование $\varphi \rightarrow \Phi$ не затрагивает уравнения первого приближения, в котором, с точностью до членов порядка $1/c$, функция φ является нормируемой.

Найдем теперь оператор Гамильтона во втором приближении. Используя выражения для операторов \mathbf{O} и \mathbf{H}' , получим, сохраняя члены порядка $1/c^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + eA_0 + \frac{1}{8m^2c^2} (\mathbf{p}^2 A_0 - A_0 \mathbf{p}^2) - \\ & - \frac{e}{4m^2c^2} \mathbf{p}^2 A_0 + \frac{e}{4m^2c^2} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) A_0 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Замечая, что

$$(\sigma \mathbf{p}) A_0 (\sigma \mathbf{p}) = A_0 \mathbf{p}^2 - \sigma (A_0 \mathbf{p} - \mathbf{p} A_0) (\sigma \mathbf{p}) = \\ = A_0 \mathbf{p}^2 - i (\sigma \nabla A_0) (\sigma \mathbf{p}) = A_0 \mathbf{p}^2 + i \mathbf{E} \mathbf{p} - [\mathbf{E} \mathbf{p}] \sigma$$

и

$$\mathbf{p}^2 A_0 - A_0 \mathbf{p}^2 = -\Delta A_0 + 2i \mathbf{E} \mathbf{p},$$

где $\mathbf{E} = -\nabla A_0$ — электрическое поле, получим окончательно следующее выражение для оператора Гамильтона:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + eA_0 - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{e}{4m^2c^2} \sigma [\mathbf{E} \mathbf{p}] + \frac{e}{8m^2c^2} \Delta A_0. \quad (12.2.3)$$

Этот оператор, как легко видеть, является эрмитовским.

Последние три члена в гамильтониане (12.2.3) являются поправками порядка $1/c^2$. Из них первый член учитывает зависимость массы от скорости, а второй можно интерпретировать как энергию взаимодействия движущегося магнитного диполя с электрическим полем. Поскольку электростатическое поле удовлетворяет уравнению

$$\Delta A_0 = -\rho,$$

где ρ — плотность зарядов, создающих поле, то последний член отличен от нуля только в тех точках, где находятся эти заряды. В частности, для точечного заряда Ze

$$\Delta A_0 = -Ze\delta(\mathbf{r}).$$

Используя гамильтониан (12.2.3), можно решить методами теории возмущений задачу о тонкой структуре уровней водородоподобного атома, считая возмущением три последних члена. Это приводит к формуле (10.3.8), полученной ранее путем разложения результата точного решения (10.3.7) уравнения Дирака.

До сих пор мы считали, что внешнее магнитное поле отсутствует. Чтобы получить гамильтониан при наличии такого поля, нужно в выражении (12.2.3) произвести замены

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \rightarrow \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \mu H, \quad [\mathbf{E} \mathbf{p}] \rightarrow \left[\mathbf{E} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right],$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал. В результате мы получим следующее выражение для гамильтониана с учетом членов порядка $1/c^2$

$$H = \frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + eA_0 - \frac{e}{2mc} \sigma H + \frac{e}{8m^2c^2} \Delta A_0 - \\ - \frac{e}{4m^2c^2} \sigma \left[\mathbf{E} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]. \quad (12.2.4)$$

12.3. Переход к релятивистской классической механике. В предыдущих разделах мы выяснили связь релятивистской квантовой механики электрона с нерелятивистской квантовой механикой. Теперь мы перейдем к выяснению ее связи с релятивистской классической механикой [21].

Будем исходить для этого из уравнения второго порядка для биспинора Φ , связанного с ψ соотношением (7.4.8),

$$\psi = \frac{1}{mc} \left[-i \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right) + mc \right] \Phi, \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Подставляя сюда

$$\psi = \frac{1}{mc} \left(-\gamma_\mu \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{c} A_\mu \right) + mc \right) f_0 e^{\frac{i}{\hbar} S} = \frac{1}{mc} e^{\frac{i}{\hbar} S} (-i\hat{\pi} + mc) f_0,$$

где

$$\hat{\pi} = \gamma_\mu \pi_\mu, \quad \pi_\mu \equiv \pi_\mu(x, \alpha_i) = \frac{\partial S(x, \alpha_i)}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu$$

(α_i , $i = 1, 2, 3$ — три произвольные постоянные, определяющие решение уравнения для S), получим

$$s_v = \frac{1}{m^2 c^2} \bar{f}_0 (-i\hat{\pi} + mc) \gamma_v (-i\hat{\pi} + mc) f_0.$$

Но

$$\hat{\pi} \gamma_v \hat{\pi} = 2 \left(\hat{\pi} \pi_v - \frac{1}{2} \gamma_v \pi_\mu^2 \right),$$

а так как

$$\pi_\mu^2 + m^2 c^2 = 0,$$

то окончательно получим

$$s_v = -\frac{2i}{m^2 c^2} \pi_v \bar{f}_0 (-i\hat{\pi} + mc) f_0. \quad (12.3.5)$$

Плотность потока удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} s_\nu = 0.$$

Поэтому в рассматриваемом приближении

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} (\pi_\nu \xi) = 0, \quad (12.3.6)$$

где

$$\xi = -\frac{2i}{m^2 c^2} \bar{f}_0 (-i\hat{\pi} + mc) f_0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \frac{\pi_k}{\pi_0} \right) = 0,$$

где ρ — плотность частиц, равная $\rho = \pi_0 \xi$.

Вводя классическую функцию Гамильтона частицы

$$H = c \sqrt{\left(p - \frac{e}{c} A \right)^2 + m^2 c^2} + e A_0$$

и вспоминая классические канонические уравнения движения

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

имеем

$$\dot{x}_k = c \frac{\pi_k}{\sqrt{\pi^2 + m^2 c^2}}, \quad \pi_k = p_k - \frac{e}{c} A_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Но

$$\pi_0 = \frac{1}{c^2} (H - e A_0) = \frac{1}{c} \sqrt{\pi^2 + m^2 c^2}.$$

Поэтому

$$\dot{x}_k = \frac{\pi_k}{\pi_0}.$$

Подстановка этого выражения в (12.3.6) дает

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \dot{x}_k) = 0.$$

откуда следует, как и утверждалось выше, что в рассматриваемом приближении частицы распространяются вдоль классических траекторий

Возвратимся теперь к уравнению (12.3.4) для биспинора f_0 . Полагая

$$f_0 = V \bar{\xi} \varphi_0 \quad (12.3.7)$$

и используя уравнение непрерывности (12.3.6), получим следующее уравнение для определения φ_0 :

$$\pi_\mu(x, \alpha_i) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\mu} = i \frac{e}{4c} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \varphi_0. \quad (12.3.8)$$

Это уравнение тесно связано с уравнением Шредингера

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d\psi}{dt} = \frac{e\hbar}{4mc} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(t) \psi \quad (12.3.9)$$

для волновой функции ψ , описывающей движение спина электрона в заданном переменном электромагнитном поле $F_{\mu\nu}(t)$. Действительно, рассмотрим классические траектории электрона, определяемые уравнениями

$$m \frac{dx_\mu}{d\tau} = \pi_\mu(x, \alpha_i), \quad (12.3.10)$$

где τ — собственное время, и определим поле вдоль траектории $x_\mu = x_\mu(\tau, \alpha_i, \beta_i)$ (константы β_i и α_i определяют траекторию)

$$F_{\mu\nu}(\tau, \alpha_i, \beta_i) = F_{\mu\nu}(x(\tau, \alpha_i, \beta_i)).$$

Введем теперь волновую функцию $\psi(\tau, \alpha_i, \beta_i)$, описывающую движение спина электрона в поле $F_{\mu\nu}(\tau, \alpha_i, \beta_i)$,

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{d\tau} \psi(\tau, \alpha_i, \beta_i) = \frac{e\hbar}{4mc} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(\tau, \alpha_i, \beta_i) \psi(\tau, \alpha_i, \beta_i).$$

Тогда из сравнения этого уравнения с уравнениями (12.3.8) и (12.3.10) легко заключить, что биспинор $\varphi_0 \equiv \varphi_0(x, \alpha_i)$ может быть получен из биспинора $\psi(\tau, \alpha_i, \beta_i)$, если выразить в нем τ и β_i через x_μ и α_i :

$$\varphi_0(x_\mu, \alpha_i) = \psi(\tau(x_\mu, \alpha_i), \alpha_i, \beta_i(x_\mu, \alpha_i)). \quad (12.3.11)$$

§ 13. Релятивистски инвариантные уравнения полей

13.1. Конечномерные представления собственной группы Лоренца.

В предыдущих параграфах мы изучали уравнения Максвелла, описывающие электромагнитное поле, и уравнения Дирака, описывающие электронно-позитронное поле. Поставим теперь вопрос о виде уравнений, описывающих другие возможные поля. Чтобы ответить на него, напомним, что волновая функция $\psi(x)$, описывающая электронно-позитронное поле, и 4-потенциал $A_\mu(x)$, описывающий электромагнитное поле, преобразуются по вполне определенным законам при преобразованиях Лоренца. Это значит, что каждому полю свойствен свой закон преобразования волновой функции. Поэтому прежде всего нужно установить возможные законы преобразования волновых функций, описывающих различные поля. С другой стороны, мы знаем, что преобразования волновой функции образуют представления группы Лоренца. Таким образом, мы приходим к задаче о нахождении всех возможных неприводимых представлений группы Лоренца.

Для решения этой задачи достаточно рассмотреть бесконечно малые преобразования Лоренца, которым соответствуют в представлениях группы инфинитезимальные операторы $I^{\mu\nu}$. Эти операторы удовлетворяют, как

было указано в § 8.5, перестановочным соотношениям

$$[I^{\mu\nu}, I^{\lambda\rho}] = \delta_{\mu\rho} I^{\nu\lambda} + \delta_{\nu\lambda} I^{\mu\rho} - \delta_{\nu\rho} I^{\mu\lambda} - \delta_{\mu\lambda} I^{\nu\rho}, \quad (13.1.1)$$

одинаковым для всех представлений группы Лоренца. Вопрос сводится поэтому к нахождению всех неприводимых матриц, удовлетворяющих этим соотношениям. Мы рассмотрим здесь только *конечномерные представления* группы Лоренца, когда эти матрицы (квадратные) содержат конечное число строк и столбцов.

Перепишем соотношения (13.1.1) порознь для $\mu, \nu = 1, 2, 3$ и $\mu = 4, \nu = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} [I^{kl}, I^{mn}] &= \delta_{kn} I^{lm} + \delta_{lm} I^{kn} - \delta_{ln} I^{km} - \delta_{km} I^{ln}, \\ [I^{4k}, I^{mn}] &= \delta_{km} I^{4n} - \delta_{kn} I^{4m}, \\ [I^{4k}, I^{4m}] &= -I^{km}, \end{aligned} \quad (13.1.2)$$

где $k, l, m = 1, 2, 3$. Так как лоренцевы преобразования можно рассматривать как вращения в четырехмерном пространстве, то операторы $I^{mn} = -I^{nm}$ представляют собой инфинитезимальные операторы группы вращений в обычном пространстве. Эти операторы с точностью до множителя i совпадают с операторами проекций момента M_l

$$I^{mn} = i\varepsilon_{mnl} M_l, \quad (13.1.3)$$

где ε_{mnl} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга. Действительно, подставляя выражение (13.1.3) в первое из соотношений (13.1.2), получим известные перестановочные соотношения для операторов проекций момента

$$[M_l, M_p] = i\varepsilon_{lpr} M_r.$$

Второе и третье соотношения (13.1.2), выраженные через M_l и I^{4s} , имеют вид

$$\begin{aligned} [I^{4p}, M_r] &= i\varepsilon_{prs} I^{4s}, \\ [I^{4p}, I^{4r}] &= -i\varepsilon_{prs} M_s. \end{aligned} \quad (13.1.4)$$

Если ввести вместо M_p и I^{4p} новые операторы

$$X_p = \frac{1}{2}(M_p + iI^{4p}), \quad Y_p = \frac{1}{2}(M_p - iI^{4p}), \quad (13.1.5)$$

то они, как легко убедиться, будут удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} [X_p, X_s] &= i\varepsilon_{psr} X_r, \\ [Y_p, Y_s] &= i\varepsilon_{psr} Y_r, \\ [X_p, Y_r] &= 0. \end{aligned} \quad (13.1.6)$$

Таким образом, инфинитезимальные операторы группы Лоренца $I^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) сводятся к двум независимым векторным операторам \mathbf{X} (X_1, X_2, X_3) и \mathbf{Y} (Y_1, Y_2, Y_3), удовлетворяющим перестановочным соотношениям моментов. Поэтому, взяв в качестве \mathbf{X} и \mathbf{Y} известные в квантовой механике матрицы для моментов, мы получим все неприводимые конечномерные представления собственной группы Лоренца. Так как квадрат момента коммутирует с каждой его проекцией

$$[\mathbf{X}^2, X_p] = 0, \quad [\mathbf{Y}^2, Y_p] = 0,$$

где $\mathbf{X}^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, $\mathbf{Y}^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2$, то матрицы \mathbf{X}^2 , X_3 и \mathbf{Y}^2 , Y_3 можно выбрать диагональными и, в соответствии с квантовомеханической

теорией момента, положить

$$\begin{aligned} X_3 &= \begin{pmatrix} -j & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -j+1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -j+2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots j \end{pmatrix}, & X^2 &= j(j+1)I_{(2j+1)}, \\ Y_3 &= \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -k+1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -k+2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots k \end{pmatrix}, & Y^2 &= k(k+1)I_{(2k+1)}, \end{aligned} \quad (13.1.7)$$

где j и k — произвольные положительные целые или полуцелые числа и $I_{(2j+1)}$ и $I_{(2k+1)}$ — единичные матрицы, содержащие $2j+1$ и $2k+1$ строк и столбцов.

Мы видим, что каждое неприводимое представление собственной группы Лоренца характеризуется двумя целыми или полуцелыми числами k, j . Это представление, обозначаемое через (j, k) , имеет, очевидно, размерность $(2j+1)(2k+1)$, так как в нем участвует $(2j+1)(2k+1)$ собственных векторов ψ_{m_j, m_k} операторов X^2, X_3, Y^2, Y_3 ,

$$\begin{aligned} X_3 \psi_{m_j, m_k} &= m_j \psi_{m_j, m_k}, \\ X^2 \psi_{m_j, m_k} &= j(j+1) \psi_{m_j, m_k}, \\ Y_3 \psi_{m_j, m_k} &= m_k \psi_{m_j, m_k}, \\ Y^2 \psi_{m_j, m_k} &= k(k+1) \psi_{m_j, m_k}, \end{aligned}$$

где m_j, m_k — «проекции моментов» X и Y , $m_j = -j, -j+1, \dots, j$; $m_k = -k, -k+1, \dots, k$.

Представление группы Лоренца (j, k) является неприводимым.

Если $\psi_{m_{j_1}, m_{k_1}}^{(1)}$ и $\psi_{m_{j_2}, m_{k_2}}^{(2)}$ представляют собой совокупности $(2j_1+1)(2k_1+1)$ и $(2j_2+1)(2k_2+1)$ функций, преобразующихся соответственно по представлениям (j_1, k_1) и (j_2, k_2) , то функции $\psi_{m_{j_1}, m_{k_1}}^{(1)} \psi_{m_{j_2}, m_{k_2}}^{(2)}$ будут также осуществлять некоторое представление группы Лоренца. Но это представление, которое называется *прямым произведением* представлений (j_1, k_1) и (j_2, k_2) и обозначается через $(j_1, k_1) \otimes (j_2, k_2)$, уже не будет неприводимым. Оно может быть разложено на неприводимые представления (j, k) , что символически записывается в виде равенства

$$(j_1, k_1) \otimes (j_2, k_2) = \Sigma(j, k), \quad (13.1.8)$$

где

$$\begin{aligned} j &= |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2, \\ k &= |k_1 - k_2|, |k_1 - k_2| + 1, \dots, k_1 + k_2, \end{aligned}$$

и каждое представление (j, k) встречается только один раз. В частности,

$$(j, 0) \otimes (0, k) = (j, k).$$

Выясним, как связаны представления, по которым преобразуются комплексно-сопряженные волновые функции. Написав бесконечно малые

преобразования

$$\begin{aligned}\psi'_i(x') &= \psi_i(x) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I_{ik}^{\mu\nu} \psi_k(x), \\ \psi_i^*(x') &= \psi_i^*(x) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}^* I_{ik}^{\mu\nu*} \psi_k^*(x)\end{aligned}$$

и учитывая, что $\varepsilon_{nm}^* = \varepsilon_{nm}$ ($n, m = 1, 2, 3$) и $\varepsilon_{im}^* = -\varepsilon_{im}$, мы видим, что преобразованиям комплексно-сопряженной функции соответствуют инфинитезимальные операторы I^{mn*} и $-I^{4n*}$ (элементы матрицы A^* являются комплексно-сопряженными по отношению к элементам матрицы A). Отсюда следует, что при переходе от преобразований $\psi(x)$ к преобразованиям $\psi^*(x)$ операторы X_n заменяются на $-Y_n^*$, а операторы Y_n на $-X_n^*$. Это значит, что если $\psi(x)$ преобразуется по представлению (j, k) , то $\psi^*(x)$ будет преобразовываться по представлению (k, j) .

Неприводимое представление собственной группы Лоренца (j, k) можно рассматривать также как некоторое представление группы вращений в обычном пространстве, но это представление будет в общем случае приводимым. Неприводимыми представлениями являются только представления $(j, 0)$ и $(0, k)$, которые обычно обозначаются через D_j и D_k .

Представление D_l осуществляется $2l+1$ собственными векторами ψ_m операторов проекции момента M_3 и квадрата момента $M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$:

$$\begin{aligned}M_3 \psi_m &= m \psi_m, \\ M^2 \psi_m &= l(l+1) \psi_m,\end{aligned}$$

где $m = -l, -l+1, \dots, l$ и l — целое или полуцелое число.

Так как

$$M_i = X_i + Y_i,$$

то собственные векторы ψ_m могут быть образованы с помощью суперпозиции билинейных комбинаций собственных векторов ψ_{m_j} операторов X^2, X_3 и собственных векторов ψ_{m_k} операторов Y^2, Y_3 при условии, что

$$m = m_j + m_k.$$

Но $m_j = -j, -j+1, \dots, j$; $m_k = -k, -k+1, \dots, k$; поэтому для m мы получим значения $m = -l, -l+1, \dots, l$, где

$$l = |j-k|, |j-k|+1, \dots, j+k.$$

Иными словами, представление (j, k) , имеющее вид прямого произведения $D_j \otimes D_k$, распадается с точки зрения группы вращения на неприводимые представления D_l :

$$D_j \otimes D_k = \sum D_l, \quad (13.1.9)$$

с $l = |j-k|, \dots, j+k$. Каждое представление D_l входит сюда только один раз, и общее число представлений равно $2j+1$, если $j \leq k$, и $2k+1$, если $k \leq j$.

Неприводимые представления собственной группы Лоренца (j, k) следует различать в зависимости от того, имеют ли числа $2j$ и $2k$ одинаковую или разную четность. В первом случае пространственному вращению на угол 2π соответствует тождественное преобразование I , а во втором случае этому соответствует $-I$.

Представления, для которых числа $2j$ и $2k$ имеют одинаковую четность, называются однозначными или *тензорными*, а представления с разной четностью $2j$ и $2k$ — двузначными или *спинорными*. Величины, преобразую-

щиеся по тензорным представлениям, называются *тензорами*, а величины, преобразующиеся по спинорным представлениям, — *спинорами*.

Простейшим тензором является скаляр, которому соответствует представление $(0, 0)$. Вектору соответствует представление $(1/2, 1/2)$. Симметричному тензору второго ранга со следом, равным нулю, соответствует представление $(1, 1)$, а антисимметричному тензору второго ранга — представление $(1, 0)$ и $(0, 1)$ (указание на равенство нулю следа тензора необходимо потому, что этот след является инвариантом, и, следовательно, если он не равен нулю, то тензор будет преобразовываться по приводимому представлению). Наконец, волновая функция Дирака $\psi(x)$ состоит из двух спиноров, преобразующихся по представлениям $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$.

Величины, преобразующиеся по неприводимым представлениям (j, k) , можно разделить на четыре класса — с целыми j и k , с полуцелыми j и k , с целым j и полуцелым k и, наконец, с полуцелым j и целым k . Этим классам мы будем приписывать соответственно индексы $+1, -1, +\varepsilon, -\varepsilon$.

Выше мы говорили, что если величина $\psi(x)$ преобразуется по представлению (j, k) , то комплексно-сопряженная величина $\psi^*(x)$ будет преобразовываться по представлению (k, j) . Отсюда следует, что если $\psi(x)$ принадлежит к классам ± 1 , то к таким же классам будет принадлежать и $\psi^*(x)$, если же $\psi(x)$ принадлежит к классам $\pm\varepsilon$, то $\psi^*(x)$ будет принадлежать к классам $\mp\varepsilon$.

Если величина $\psi(x)$ преобразуется по приводимому представлению группы Лоренца и представима в виде суммы величин, принадлежащих к одному и тому же классу, то говорят, что и $\psi(x)$ принадлежит к этому же классу.

Легко видеть, что тензоры четного ранга принадлежат к классу $+1$, а тензоры нечетного ранга — к классу -1 .

Если некоторая величина $\psi(x)$ преобразуется по приводимому представлению, которое является прямым произведением неприводимых представлений (j, k) , то при перемножении величин, принадлежащих к различным классам, следует просто перемножать индексы классов, имея в виду, что $\varepsilon\varepsilon = +1$.

13.2. Функция Лагранжа свободного поля. Мы будем рассматривать свободные поля, которые подчиняются принципу суперпозиции и описываются поэтому линейными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения в силу однородности пространства — времени должны быть однородными уравнениями с постоянными коэффициентами, причем, не нарушая общности, можно считать их, так же как и уравнения Дирака, уравнениями первого порядка (уравнения высших порядков могут быть сведены к уравнениям первого порядка, если включить производные от волновой функции в число компонент волновой функции).

Сформулируем прежде всего уравнения поля, вытекающие из вариационного принципа. Введем для этого плотность функции Лагранжа поля L , квадратичную относительно волновой функции поля ψ ,

$$L = -\frac{1}{2} \left(\psi^* B_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu} B_\mu \psi \right) - \kappa \psi^* B_5 \psi, \quad (13.2.1)$$

где B_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) — некоторые квадратные матрицы, число строк и столбцов в которых равно числу компонент волновой функции и κ — отличная от нуля вещественная постоянная.

Из вещественности L следует, что матрицы B_μ должны удовлетворять условиям

$$B_k^\dagger = -B_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad B_4^\dagger = B_4, \quad B_5^\dagger = B_5.$$

Считая матрицу B_5 несингулярной, можно ввести матрицы

$$\Gamma_\mu = B_5^{-1} B_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

и представить L в виде

$$L = -\frac{1}{2} \left(\bar{\psi} \Gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \Gamma_\mu \psi \right) - \kappa \bar{\psi} \psi, \quad (13.2.2)$$

где

$$\bar{\psi} = \psi^* B_5.$$

Варьируя независимо ψ и $\bar{\psi}$, легко получить уравнения [22]

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \kappa \psi &= 0, \\ \Gamma_\mu^T \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} - \kappa \bar{\psi} &= 0, \end{aligned} \quad (13.2.3)$$

являющиеся обобщением уравнений Дирака.

Установим теперь условия релятивистской инвариантности обобщенных уравнений Дирака, или, что то же самое, плотности функции Лагранжа (13.1.2). Полагая

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= S \psi(x), \\ \bar{\psi}'(x') &= \bar{\psi}(x) S^{-1}, \end{aligned} \quad (13.2.4)$$

где $x' = ax$ и S — некоторая матрица, зависящая от матрицы лоренцева преобразования a , получим, повторяя рассуждения § 8,

$$\begin{aligned} S^{-1} \Gamma_\mu a_{\mu\nu} S &= \Gamma_\nu, \\ S^+ B_5 S &= B_5. \end{aligned} \quad (13.2.5)$$

Достаточно, очевидно, чтобы эти условия выполнялись для бесконечно малых преобразований Лоренца $x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu$, которым соответствует матрица преобразования

$$S = I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} I^{\mu\nu}, \quad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}, \quad |\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1,$$

где $I^{\mu\nu}$ — инфинитезимальные операторы. Подстановка этого выражения в (13.2.5) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} [\Gamma_\mu, I^{\nu\lambda}] &= \delta_{\mu\lambda} \Gamma_\nu - \delta_{\mu\nu} \Gamma_\lambda, \quad \mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3, 4, \\ (I^{kl})^+ B_5 + B_5 I^{kl} &= 0, \\ (I^{4k})^+ B_5 - B_5 I^{4k} &= 0, \quad k, l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (13.2.6)$$

Отсюда, в частности, следует

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= [\Gamma_4, I^{k4}], \\ M_k^+ B_5 - B_5 M_k &= 0, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (13.2.7)$$

Зная инфинитезимальные операторы $I^{\mu\nu}$, можно найти преобразование волновой функции $\psi(x)$ при бесконечно малом преобразовании Лоренца, которое в свою очередь позволяет найти матрицу S при произвольном конечном преобразовании Лоренца. Например, преобразованию Лоренца, переводящему частицу из состояния покоя в состояние с импульсом p , соответствует преобразование волновой функции

$$S = e^{i\kappa\phi}, \quad (13.2.8)$$

где $K = \frac{p_j A^j}{|p|}$ и $\text{sh } \vartheta = \frac{|p|}{m}$ (m — масса частицы). Эта формула является обобщением формулы (8.6.8) для преобразования волновой функции электрона.

13.3. Тензор энергии-импульса, тензор моментов и вектор плотности тока. Имея выражение для плотности функции Лагранжа поля L , можно по общим формулам § 1.7 найти тензор энергии-импульса и тензор момента поля. При этом нужно учитывать, что волновые функции поля могут быть вещественными и комплексными. В последнем случае функции $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ должны рассматриваться как независимые. Поэтому для тензора энергии-импульса мы получим выражение

$$T_{\mu\nu} = L\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial\psi_{,\nu}}\psi_{,\mu} - \bar{\psi}_{,\mu}\frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}_{,\nu}}, \quad (13.3.1)$$

а для тензора моментов — выражение

$$M_{\mu\nu,\rho} = x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho} - \frac{\partial L}{\partial\psi_{,\rho}}I^{\mu\nu}\psi + \bar{\psi}I^{\mu\nu}\frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}_{,\rho}}, \quad (13.3.2)$$

где $\psi_{,\mu} = \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}$. Подстановка сюда выражения (13.2.2) для плотности функции Лагранжа дает

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}\Gamma_\nu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu} \Gamma_\nu\psi \right), \quad (13.3.3)$$

$$M_{\mu\nu,\rho} = x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho} + \frac{1}{2} \bar{\psi}(\Gamma_\rho I^{\mu\nu} + I^{\mu\nu}\Gamma_\rho)\psi. \quad (13.3.4)$$

При $\mu, \nu = 1, 2, 3$ компоненты тензора $M_{\mu\nu,\rho}$ могут быть записаны также в виде

$$M_{kl,\rho} = x_k T_{l\rho} - x_l T_{k\rho} + \frac{i}{2} \epsilon_{klm} \bar{\psi}(\Gamma_\rho M_m + M_m \Gamma_\rho)\psi, \quad k, l, m = 1, 2, 3. \quad (13.3.5)$$

Плотность функции Лагранжа (13.2.1) инвариантна, очевидно, относительно преобразования

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i\alpha}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\alpha}, \quad (13.3.6)$$

где α — произвольная вещественная постоянная.

Рассмотрим, в частности, бесконечно малое преобразование

$$\delta\psi = i\delta\alpha\psi, \quad \delta\bar{\psi} = -i\delta\alpha\bar{\psi}$$

и определим соответствующую вариацию действия

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial\psi_{,\mu}} \right) \delta\psi + \delta\bar{\psi} \left(\frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}_{,\mu}} \right) \right\} d^4x + \\ + \oint_{\Sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{,\mu}} \delta\psi + \delta\bar{\psi} \frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}_{,\mu}} \right) d\sigma_\mu. \end{aligned}$$

Приравнявая δJ нулю и считая, что волновые функции удовлетворяют уравнениям «движения» поля, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial\psi_{,\mu}} = 0,$$

получим

$$\delta J = i\delta\alpha \oint_{\Sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial\psi_{,\mu}} \psi - \bar{\psi} \frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}_{,\mu}} \right) d\sigma_\mu = 0.$$

Из равенства нулю поверхностного интеграла вытекает равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} \psi - \bar{\psi} \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_{,\mu}} \right) = 0.$$

Иными словами, если определить четырехмерный вектор

$$j_\mu = -ie \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\mu}} \psi - \bar{\psi} \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_{,\mu}} \right), \quad (13.3.7)$$

где e — некоторая постоянная, то его дивергенция будет равна нулю

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (13.3.8)$$

Из этого соотношения вытекает закон сохранения

$$\int j_\mu d^3x = \text{const.}$$

Мы будем интерпретировать вектор j_μ как четырехмерный вектор плотности электрического тока, связанного с полем; его пространственные составляющие \mathbf{j} образуют объемную плотность тока, а временная составляющая — плотность заряда ρ . Далее мы убедимся, что e представляет собой заряд частиц, связанных с полем.

В случае действительных волновых функций вектор плотности тока равен нулю. Поэтому действительные ψ , не допускающие преобразования (13.3.6), описывают нейтральные частицы. Заряженные частицы описываются комплексными волновыми функциями, допускающими преобразование (13.3.6) (оно носит название *калибровочного преобразования второго рода*).

Используя для плотности функции Лагранжа выражение (13.2.2), получим следующую формулу для j_μ :

$$j_\mu = ie \bar{\psi} \Gamma_\mu \psi. \quad (13.3.9)$$

Эта формула имеет, очевидно, такую же структуру, как и формула (7.5.2) для плотности тока электронов.

13.4. Масса и спин частицы. Перейдем теперь к выяснению некоторых общих свойств уравнений (13.2.3). Заметим прежде всего, что одному и тому же уравнению (13.2.2) могут удовлетворять волновые функции, описывающие различные поля, например скалярное и псевдоскалярное. Поэтому поле характеризуется не только матрицами Γ_μ , но и тем представлением D , по которому преобразуются волновые функции $\psi(x)$.

Производные $\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}$ преобразуются, очевидно, по представлению, которое является прямым произведением представления D и представления $(1/2, 1/2)$, по которому преобразуется четырехмерный вектор x . С другой стороны, согласно уравнению (13.2.3) величины $\Gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}$ преобразуются по тому же представлению, что и ψ , т. е. по представлению D . Иными словами, представление D должно содержаться в представлении $D \otimes (1/2, 1/2)$. Отсюда следует, что если какое-либо неприводимое представление (j, k) группы Лоренца содержится в представлении D , то D содержит также по крайней мере одно из следующих четырех неприводимых представлений:

$$\left(j - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \right), \quad \left(j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right), \quad \left(j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \right), \quad \left(j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, представление D не может быть неприводимым представлением, за исключением случая $k = 0$. Например, в случае уравнения

Дирака (при $\kappa \neq 0$) представление D распадается на два неприводимых представления $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$.

Если разложить представление D на неприводимые представления (j, k) , то можно утверждать, что сумма $j + k$ во всех представлениях будет либо целым, либо полуцелым числом.

Определим теперь массы частиц, описываемых уравнением (13.2.3). Рассмотрим с этой целью решения в виде плоских волн в системе покоя частицы

$$\psi(x) = \psi^{(0)} e^{-i\varepsilon_0 t},$$

где ε_0 — энергия покоя частицы и $\psi^{(0)}$ — амплитуда волны. Подстановка этого выражения в (13.2.3) дает

$$\varepsilon_0 \Gamma_4 \psi^{(0)} - \kappa \psi^{(0)} = 0, \quad (13.4.1)$$

откуда

$$\varepsilon_0 = \frac{\kappa}{\lambda},$$

где λ — какое-либо не равное нулю собственное значение матрицы Γ_4 . Эта формула показывает, что возможные значения массы частиц, описываемых уравнением (13.2.3), определяются формулой

$$\mu_i = \frac{\kappa}{\lambda_i}, \quad (13.4.2)$$

где λ_i пробегает все отличные от нуля собственные значения матрицы Γ_4 .

Таким образом, уравнение (13.2.3) описывает в принципе частицы с различными массами. Для того чтобы оно описывало частицы только с одним значением массы, необходимо, чтобы матрица Γ_4 имела только одно отличное от нуля собственное значение.

Матрица Γ_4 коммутирует с инфинитезимальными операторами I^{ik} ($i, k = 1, 2, 3$). Поэтому Γ_4 и один из этих операторов, например $I^{12} = iM_3$, имеют общие собственные функции. Мы будем обозначать их через φ_{λ_i}, m_i , где m_i — какое-либо собственное значение M_3 . Эта величина может принимать, как мы знаем, значения $m_i = -l_i, \dots, l_i$, где l_i определяет квадрат «полного момента» $M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$.

Таким образом, собственные значения λ_i , вообще говоря, вырождены относительно «магнитных» квантовых чисел m_i , причем кратность вырождения собственного значения λ_i равна $2l_i + 1$.

Пространственным вращениям соответствуют, как уже указывалось, линейные преобразования собственных функций оператора M_3 , т. е. $2l_i + 1$ функций φ_{λ_i}, m_i (с различными значениями m_i и одним и тем же значением λ_i). Эти преобразования образуют неприводимые представления группы вращений D_{l_i} . Мы можем поэтому утверждать, что частицы с массой $\mu_i = \frac{\kappa}{\lambda_i}$ обладают спином l_i .

Таким образом, спин определяется кратностью вырождения отличных от нуля собственных значений матрицы Γ_4 , причем в принципе каждому значению массы соответствует свое значение спина. Можно сказать и иначе, а именно, что спин определяется числом независимых решений системы уравнений (13.4.1), соответствующих определенному значению ε_0 , т. е. определенному собственному значению λ_i . Число этих решений равно, очевидно, $2l_i + 1$. Например, в случае уравнения Дирака число независимых решений равно двум в соответствии с тем, что спин электрона равен $1/2$.

Так как представление (j, k) , рассматриваемое как представление группы вращений, распадается на представления D_l , где l заключено между

$|j - k|$ и $j + k$, то спин будет целым или полуцелым в зависимости от того, будет ли целым или полуцелым число $j + k$.

Покажем теперь, что спин частиц определяется слагаемым $-\frac{\partial L}{\partial \psi_{,\rho}} I^{\mu\nu} \psi$ в выражении (13.3.2) или слагаемым $\frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma_{\rho} I^{\mu\nu} \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} I^{\mu\nu} \Gamma_{\rho} \psi$ в выражении (13.3.4) для тензоров моментов. Определим для этого энергию и момент поля в том случае, когда поле содержит только одну покоящуюся частицу.

Согласно (13.3.4) энергия поля равна

$$E = - \int T_{44} d^3x = - \frac{1}{2} \int \left(\bar{\psi} \Gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_4} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_4} \Gamma_4 \psi \right) d^3x.$$

Подставляя сюда $\psi = \psi^{(0)} e^{-i\varepsilon_0 t}$ и предполагая, что объем поля равен единице, получим

$$E = \varepsilon_0 \int \bar{\psi} \Gamma_4 \psi d^3x = \varepsilon_0 \bar{\psi}^0 \Gamma_4 \psi^{(0)}.$$

Так как поле содержит одну частицу, то функция $\psi^{(0)}$ должна быть пронормирована согласно условию

$$\bar{\psi}^0 \Gamma_4 \psi^{(0)} = 1.$$

Легко видеть, что при этом условии мы получим для заряда поля значение $\pm e$. Действительно, заряд поля Q равен, согласно (13.3.9),

$$Q = \frac{1}{i} \int j_4 d^3x = e \int \bar{\psi} \Gamma_4 \psi d^3x = \pm e.$$

Таким образом, как и утверждалось, константа e в выражении (13.3.7) для вектора плотности тока имеет смысл заряда частицы.

Найдем теперь проекцию момента количества движения поля на ось x_3 . Ее можно представить в виде

$$M_{12} = -i \int M_{12,4} d^3x = \frac{1}{2} \int \bar{\psi} (\Gamma_4 \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \Gamma_4) \psi d^3x,$$

так как первое слагаемое в выражении (13.3.5) для $M_{\mu\nu, \rho}$ в случае покоящейся частицы обращается в нуль. Но матрицы Γ_4 и \mathbf{M}_3 коммутируют между собой, поэтому

$$M_{12} = \int \bar{\psi} \Gamma_4 \mathbf{M}_3 \psi d^3x.$$

Поскольку ψ является общей собственной функцией Γ_4 и \mathbf{M}_3 , то

$$M_{12} = m \int \bar{\psi} \Gamma_4 \psi d^3x = m,$$

где m — собственное значение \mathbf{M}_3 или проекция спина на ось x_3 .

13.5. Неопределенный характер заряда при целом спине и энергии при полуцелом спине. Покажем, что для волнового поля, описывающего частицы с целым спином, невозможно ввести положительно определенную плотность заряда, а для волнового поля, описывающего частицы с полуцелым спином, невозможно ввести положительно определенную плотность энергии [23].

Рассмотрим прежде всего поля, описывающие частицы с целым спином. В этом случае ψ преобразуется по представлению D , распадающемуся на представления (j, k) с целым $j + k$. Поэтому ψ содержит функции только классов $+1$ и -1 , которые мы будем обозначать соответственно через $\psi^{(+1)}$ и $\psi^{(-1)}$.

Уравнение поля, записанное для компонент Фурье ψ ,

$$(i\Gamma_\mu k_\mu + \kappa)\psi = 0,$$

где k_μ — волновой 4-вектор, может быть разбито на два уравнения:

$$\begin{aligned} i(\Gamma_\mu)_{+1, +1} k_\mu \psi^{(+1)} + i(\Gamma_\mu)_{+1, -1} k_\mu \psi^{(-1)} + \kappa \psi^{(+1)} &= 0, \\ i(\Gamma_\mu)_{-1, -1} k_\mu \psi^{(-1)} + i(\Gamma_\mu)_{-1, +1} k_\mu \psi^{(+1)} + \kappa \psi^{(-1)} &= 0, \end{aligned}$$

где $(\Gamma_\mu)_{\pm 1, \pm 1}$ — элементы матрицы Γ_μ , действующие на функции $\psi^{(\pm 1)}$. Легко видеть, что

$$(\Gamma_\mu)_{+1, +1} = (\Gamma_\mu)_{-1, -1} = 0.$$

Действительно, так как волновой вектор принадлежит классу -1 , то при отличных от нуля $(\Gamma_\mu)_{+1, +1}$ и $(\Gamma_\mu)_{-1, -1}$ первое и третье слагаемые в каждом уравнении принадлежали бы к различным классам, что невозможно.

Таким образом, уравнения в случае целого спина имеют вид

$$\begin{aligned} i(\Gamma_\mu)_{+1, -1} k_\mu \psi^{(-1)} + \kappa \psi^{(+1)} &= 0, \\ i(\Gamma_\mu)_{-1, +1} k_\mu \psi^{(+1)} + \kappa \psi^{(-1)} &= 0. \end{aligned} \quad (13.5.1)$$

Эти уравнения инвариантны относительно преобразования

$$k_\mu \rightarrow -k_\mu, \quad \psi^{(+1)} \rightarrow \alpha \psi^{(+1)}, \quad \psi^{(-1)} \rightarrow -\alpha \psi^{(-1)},$$

где α — произвольная постоянная. Легко видеть, что ее можно считать вещественной. Действительно, функции $\psi^{(+1)*}$ и $\psi^{(-1)*}$ преобразуются так же, как и функции $\psi^{(+1)}$ и $\psi^{(-1)}$. Поэтому с точки зрения релятивистской инвариантности возможны условия вещественности $\psi^{(+1)}$ или $\psi^{(-1)}$ вида

$$\psi^{(+1)*} = \psi^{(+1)}, \quad \psi^{(-1)*} = \psi^{(-1)}.$$

Чтобы эти соотношения выполнялись при рассматриваемом преобразовании, величина α должна быть, очевидно, вещественной. Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha = 1$, и записать преобразование в виде

$$k_\mu \rightarrow -k_\mu, \quad \psi^{(+1)} \rightarrow \psi^{(+1)}, \quad \psi^{(-1)} \rightarrow -\psi^{(-1)}. \quad (13.5.2)$$

С помощью функций $\psi^{(+1)}$ и $\psi^{(-1)}$ и их производных можно строить различные тензорные величины. Для дальнейшего существенна структура тензоров, квадратичных относительно ψ .

Рассмотрим сначала тензор четного ранга $T^{(2n)}$. Так как он принадлежит классу $+1$, то $T^{(2n)}$ должен иметь структуру

$$T^{(2n)} \sim \sum k^{2N} \psi^{(+1)} \psi^{(+1)} + \sum k^{2N} \psi^{(-1)} \psi^{(-1)} + \sum k^{2N+1} \psi^{(+1)} \psi^{(-1)}. \quad (13.5.3)$$

Здесь через k^{2N} схематически обозначено произведение $2N$ произвольных компонент 4-вектора k_μ (т. е. $k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2N}}$); N — некоторые целые числа (мы не выписываем членов, содержащих $(\psi^{(+1)*})$ и $(\psi^{(-1)*})$, так как они тоже принадлежат классам $+1$ и -1).

Тензор нечетного ранга $T^{(2n+1)}$ принадлежит классу -1 и имеет поэтому структуру

$$T^{(2n+1)} \sim \sum k^{2N+1} \psi^{(+1)} \psi^{(+1)} + \sum k^{2N+1} \psi^{(-1)} \psi^{(-1)} + \sum k^{2N} \psi^{(+1)} \psi^{(-1)}. \quad (13.5.4)$$

Посмотрим теперь, как ведут себя эти тензоры при преобразовании (13.5.2). Ясно, что это преобразование не меняет $T^{(2n)}$ и изменяет знак $T^{(2n+1)}$. В частности, преобразование (13.5.3) изменяет знак вектора плот-

ности тока j_μ . Иными словами, каждому решению уравнений поля с определенной плотностью тока соответствует другое решение с противоположными по знаку компонентами плотности тока. Поэтому для частиц с целым спином нельзя ввести положительно определенную плотность частиц, преобразующуюся как четвертая компонента вектора.

Итак, мы доказали неопределенный характер плотности заряда, а следовательно, и полного заряда в случае частиц с целым спином.

Рассмотрим теперь поля, описывающие частицы с полуцелым спином. В этом случае $j+k$ — полуцелое число и функции ψ принадлежат классам $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$. Мы будем обозначать их соответственно через $\psi^{(+\varepsilon)}$ и $\psi^{(-\varepsilon)}$.

Взамен уравнений (13.5.1) мы получим теперь уравнения

$$\begin{aligned} i(\Gamma_\mu)_{+\varepsilon, -\varepsilon} k_\mu \psi^{(-\varepsilon)} + \kappa \psi^{(+\varepsilon)} &= 0, \\ i(\Gamma_\mu)_{-\varepsilon, +\varepsilon} k_\mu \psi^{(+\varepsilon)} + \kappa \psi^{(-\varepsilon)} &= 0, \end{aligned} \quad (13.5.5)$$

где $(\Gamma_\mu)_{\pm\varepsilon, -\varepsilon}$ — элементы матрицы Γ_μ , действующей на функции $\psi^{(\pm\varepsilon)}$. Эти уравнения, так же как и уравнения (13.5.1), инвариантны по отношению к преобразованиям вида

$$k_\mu \rightarrow -k_\mu, \quad \psi^{(+\varepsilon)} \rightarrow \alpha \psi^{(+\varepsilon)}, \quad \psi^{(-\varepsilon)} \rightarrow -\alpha \psi^{(-\varepsilon)},$$

но, в отличие от случая целого спина, когда α была вещественной, теперь α следует считать чисто мнимой величиной. Действительно, в случае полуцелого спина с точки зрения релятивистской инвариантности возможны условия вещественности вида

$$(\psi^{(+\varepsilon)})^* = \psi^{(-\varepsilon)}, \quad (\psi^{(-\varepsilon)})^* = \psi^{(+\varepsilon)}$$

и невозможны условия

$$(\psi^{(+\varepsilon)})^* = \psi^{(+\varepsilon)}, \quad (\psi^{(-\varepsilon)})^* = \psi^{(-\varepsilon)},$$

так как $(\psi^{(+\varepsilon)})^*$ принадлежит классу $-\varepsilon$, а $(\psi^{(-\varepsilon)})^*$ — классу $+\varepsilon$. Отсюда следует, что $\alpha = -\alpha^*$. Не нарушая общности, можно, очевидно, считать, что $\alpha = i$, и записать рассматриваемое преобразование в виде

$$k_\mu \rightarrow -k_\mu, \quad \psi^{(+\varepsilon)} \rightarrow i\psi^{(+\varepsilon)}, \quad \psi^{(-\varepsilon)} \rightarrow -i\psi^{(-\varepsilon)}. \quad (13.5.6)$$

Выясним теперь структуру тензоров, которые можно построить с помощью $\psi^{(\pm\varepsilon)}$ и k_μ , предполагая по-прежнему, что они квадратичны относительно ψ . Используя правило умножения величин, принадлежащих к различным классам, легко заключить, что эти тензоры должны иметь следующую структуру:

$$\begin{aligned} T^{(2n)} &\sim \sum k^{2N} \psi^{(+\varepsilon)} \psi^{(+\varepsilon)} + \sum k^{2N} \psi^{(-\varepsilon)} \psi^{(-\varepsilon)} + \sum k^{2N+1} \psi^{(+\varepsilon)} \psi^{(-\varepsilon)}, \\ T^{(2n+1)} &\sim \sum k^{2N+1} \psi^{(+\varepsilon)} \psi^{(+\varepsilon)} + \sum k^{2N+1} \psi^{(-\varepsilon)} \psi^{(-\varepsilon)} + \sum k^{2N} \psi^{(+\varepsilon)} \psi^{(-\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (13.5.7)$$

Ясно, что преобразование (13.5.6) не меняет $T^{(2n+1)}$ и изменяет знак $T^{(2n)}$, в отличие от преобразования (13.5.2), которое не меняет тензоров четного ранга и изменяет знак тензоров нечетного ранга.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что для частиц с полуцелым спином невозможно введение положительно определенной плотности энергии, а следовательно, и положительно определенной полной энергии.

Из доказанных утверждений не следует, что при целом спине всегда существует положительно определенная плотность энергии, а при полуцелом спине — положительно определенная плотность заряда. Напротив, оказывается, что только в случае спина $1/2$ можно ввести положительно

определенную плотность заряда и только в случае спинов 0 и 1 можно ввести положительно определенную плотность энергии (при этом предполагается, что матрица Γ_4 приводится к диагональному виду).

13.6. Уравнения для частиц со спином нуль и единица. Простейшим примером релятивистски инвариантных уравнений поля является уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - m^2\right) \varphi \equiv \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2\right) \varphi = 0, \quad (13.6.1)$$

где φ — скалярная функция координат и времени. Такое уравнение описывает в силу скалярного характера φ частицы, спин которых равен нулю; масса частиц равна, очевидно, m .

Покажем, что это уравнение можно привести к виду (13.2.3). Введем для этого наряду с φ четырехмерный вектор

$$\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

Тогда уравнение (13.6.1) заменится системой уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\mu} + m\psi_0 &= 0, \\ -\frac{\partial \psi_0}{\partial x_\mu} + m\psi_\mu &= 0, \end{aligned} \quad (13.6.2)$$

где $\psi_0 = \sqrt{m} \varphi$. Эта система может быть представлена в общем виде (13.2.3)

$$\left(\beta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) \psi = 0,$$

где ψ — пятикомпонентная волновая функция, состоящая из ψ_0 и ψ_μ , и β_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) — четыре пятирядные матрицы, которые, как нетрудно убедиться, удовлетворяют соотношениям [24]

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \beta_\rho + \delta_{\rho\nu} \beta_\mu. \quad (13.6.3)$$

В данном случае представление D состоит из представления $(0, 0)$, по которому преобразуется скаляр ψ_0 , и представления $(1/2, 1/2)$, по которому преобразуется вектор ψ_μ .

Уравнение для φ может быть получено из вариационного принципа, если в качестве плотности функции Лагранжа взять

$$L = -\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + m^2 \varphi^* \varphi\right).$$

Полагая

$$L = -\left(\frac{\partial \psi_0^*}{\partial x_\mu} \psi_\mu + \psi_\mu^* \frac{\partial \psi_0}{\partial x_\mu} - m \psi_\mu^* \psi_\mu + m \psi_0^* \psi_0\right)$$

и считая при варьировании ψ_0 , ψ_μ , ψ_0^* , ψ_μ^* независимыми, мы получим уравнения (13.6.2).

Рассматриваемой функции Лагранжа соответствует тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + L \delta_{\mu\nu}$$

и вектор плотности тока

$$j_\mu = ie \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \varphi - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right).$$

Заметим, что подобно скалярному можно рассматривать также псевдоскалярное поле. При этом следует лишь под φ понимать не скаляр, а псевдоскаляр.

Рассмотрим теперь волновое поле, описывающее частицы со спином, равным единице [25]. Такое поле характеризуется четырехмерным вектором φ_μ , компоненты которого удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - m^2\right) \varphi_\nu = 0, \quad \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (13.6.4)$$

Благодаря дополнительному условию $\partial \varphi_\nu / \partial x_\nu = 0$, накладываемому на φ_ν , это поле описывает только частицы со спином 1. Действительно, рассмотрим свободное поле, имеющее вид плоской волны,

$$\varphi_\mu = \varphi_\mu^{(0)} e^{ipx},$$

где, согласно (13.6.3),

$$p^2 + m^2 = 0, \quad p_\mu \varphi_\mu^{(0)} = 0.$$

Перейдя в систему отсчета, где частица покоится ($\mathbf{p} = 0$), мы получим $\varphi_4^{(0)} = 0$. Таким образом, в этой системе волновое поле описывается трехмерным вектором, который при пространственных вращениях преобразуется по представлению D_1 и описывает, следовательно, частицы со спином 1.

Если ввести антисимметричный тензор

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} \right),$$

то уравнения (13.6.4) примут вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + m \psi_\mu &= 0, \\ -\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu} + m \psi_{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (13.6.5)$$

где $\psi_\mu = \sqrt{m} \varphi_\mu$. Эта система в свою очередь может быть представлена в общем виде (13.2.3)

$$\left(\beta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi \equiv (\hat{\partial} + m) \psi = 0, \quad \hat{\partial} = \beta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (13.6.6)$$

где ψ — десятикомпонентная волновая функция, состоящая из вектора ψ_μ и антисимметричного тензора $\psi_{\mu\nu}$, и β_μ — четыре десятирядные матрицы, удовлетворяющие тем же соотношениям (13.6.3), что и пятирядные матрицы β_μ , входящие в уравнения для частицы со спином нуль (уравнения (13.6.6) называются уравнениями Дuffина — Кеммера)

Приведем явный вид матриц β_μ .

Спин 0

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \begin{pmatrix} & 0 & & & \\ & 1 & & & \\ 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \beta_2 &= \begin{pmatrix} & 0 & & & \\ & 0 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \beta_3 &= \begin{pmatrix} & 0 & & & \\ & 0 & & & \\ & 0 & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \beta_4 &= \begin{pmatrix} & & & & -i \\ & & & & 0 \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Спин 1

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что детерминант каждой из матриц β_μ равен нулю. Поэтому не существует матриц, обратных матрицам β_μ . В этом можно убедиться, не прибегая к явному виду матриц β_μ , а исходя только из их алгебры. Действительно, из (13.6.3) следует, что

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\mu = 0 \quad (\mu \neq \nu), \quad \beta_\mu^3 = \beta_\mu$$

(здесь не подразумевается суммирование по μ). Поэтому, если бы существовали матрицы, обратные β_μ , то из второго соотношения следовало бы, что $\beta_\mu^2 = I$, а отсюда и из первого соотношения следовало бы, что $\beta_\nu \beta_\mu = 0$ ($\mu \neq \nu$) и $\beta_\mu = 0$.

Уравнения (13.6.5) могут быть получены из вариационного принципа, если в качестве плотности функции Лагранжа взять

$$L = -\frac{1}{2} \Psi_{\mu\nu}^* \left(\frac{\partial \Psi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Psi_\nu}{\partial x_\mu} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi_\mu^*}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Psi_\nu^*}{\partial x_\mu} \right) \Psi_{\mu\nu} + \frac{m}{2} \Psi_{\mu\nu}^* \Psi_{\mu\nu} - m \Psi_\mu^* \Psi_\mu$$

и при варьировании считать величины Ψ_μ , Ψ_μ^* , $\Psi_{\mu\nu}$, $\Psi_{\mu\nu}^*$ независимыми. Этой плотности функции Лагранжа соответствует тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = L \delta_{\mu\nu} + \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial x_\mu} \Psi_{\rho\nu}^* + \frac{\partial \Psi_\rho^*}{\partial x_\mu} \Psi_{\rho\nu}$$

и вектор плотности тока

$$j_\mu = ie (\Psi_{\rho\mu}^* \Psi_\rho - \Psi_\rho^* \Psi_{\rho\mu}).$$

Уравнения для частиц со спином единица и со спином нуль могут быть также получены, если пользоваться в качестве плотности функции Лагранжа выражением

$$L = -\frac{1}{2} \left(\bar{\Psi} \beta_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} \beta_\mu \Psi \right) - m \bar{\Psi} \Psi, \quad \bar{\Psi} = \Psi^* (2\beta_4^2 - 1), \quad (13.6.7)$$

одинаковым для обоих видов частиц.

Этой плотности функции Лагранжа соответствует тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\bar{\Psi} \beta_\nu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} \beta_\nu \Psi \right) \quad (13.6.8)$$

и вектор плотности тока

$$j_\mu = ie \bar{\Psi} \beta_\mu \Psi. \quad (13.6.9)$$

13.7. Уравнения для частиц с произвольным спином. Изложенная в предыдущих разделах теория свободных полей, основанная на лагранжевом формализме, не дает общего метода получения релятивистски инвариантных уравнений для частиц с заданными массой и спином. Напротив, уравнения (13.2.3) описывают, вообще говоря, частицы с разными значениями массы и спина.

Чтобы получить релятивистски инвариантные уравнения для частиц с заданными значениями массы и спина, достаточно заметить, что если спин частицы равен s , то частицу можно представить себе состоящей из $2s$ частиц со спином, равным $1/2$. В соответствии с этим мы будем описывать частицу со спином s , «комбинированным» биспинором $\Psi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2s}}$, в котором каждый из $2s$ индексов α_n пробегает независимо от других индексов четыре значения, $\alpha_n = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, \dots, 2s$. Число компонент такого биспинора (будем называть его биспинором ранга $2s$) равно, очевидно, 4^{2s} .

Мы примем, что биспинор $\Psi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2s}} \equiv \Psi$ является полностью симметричным относительно перестановок индексов α_n и удовлетворяет обобщенным уравнениям Дирака [26]

$$(i\gamma_\mu^{(n)} p_\mu + m) \Psi = 0, \quad (13.7.1)$$

где p_μ — четырехмерный импульс частицы, m — ее масса (предполагается, что $m \neq 0$) и $\gamma_\mu^{(n)}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$; $n = 1, 2, \dots, 2s$) — дираковские матрицы, действующие на индекс α_n волновой функции $\Psi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2s}}$ и не затрагивающие

других ее индексов; для каждого значения n ($n = 1, 2, \dots, 2s$) матрицы $\gamma_\mu^{(n)}$ удовлетворяют соотношениям (7.3.5)

$$\gamma_\mu^{(n)} \gamma_\nu^{(n)} + \gamma_\nu^{(n)} \gamma_\mu^{(n)} = 2\delta_{\mu\nu} I.$$

Покажем, что эти уравнения (они называются *уравнениями Баргмана — Вигнера*) описывают частицы с массой m и спином s . Подсчитаем с этой целью число независимых компонент волновой функции покоящейся частицы с определенным знаком частоты (например, положительным). Будем считать, что у матриц $\gamma_4^{(n)}$ отличны от нуля только диагональные элементы (они равны $+1, +1, -1, -1$). Тогда из (13.7.1) следует, что отличными от нуля будут те компоненты $\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2s}}$, которые соответствуют первым двум строкам $\gamma_4^{(n)}$. Для определенности будем считать, что для этих компонент $\alpha_i = 1, 2$. Число таких компонент равно 2^{2s} . Остальные из 4^{2s} компонент ψ равны нулю.

Учтем теперь свойство симметрии величины $\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2s}}$. Пусть среди $2s$ индексов α_n какие-то k индексов равны 1 и $2s - k$ остальных индексов равны 2. В силу свойства симметрии ψ все компоненты ψ с такими значениями индексов α_n будут одинаковыми. Поэтому число независимых компонент ψ равно числу возможных разбиений числа $2s$ на числа k и $2s - k$, т. е. равно $2s + 1$, как и должно быть для частицы со спином s (напомним, что знак частоты считается заданным).

Инфинитезимальные операторы четырехмерных вращений для уравнений (13.7.1) определяются формулами

$$I^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{2s} (\gamma_\mu^{(n)} \gamma_\nu^{(n)} - \gamma_\nu^{(n)} \gamma_\mu^{(n)}),$$

которые являются обобщением формулы (8.5.9) для уравнений Дирака. С помощью этих формул легко показать, что возможные значения проекции спина частицы на какую-либо ось равны $-s, -s + 1, \dots, s$. При пространственных вращениях $2s + 1$ компонент ψ преобразуются по представлению D_s , как и требуется для частицы со спином s .

Покажем, что уравнения Дuffина — Кеммера для частиц со спином 1 вытекают из уравнений Баргмана — Вигнера. Если $s = 1$, то частица описывается биспинором второго ранга $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}$, имеющим в силу свойства симметрии $\psi_{\alpha_1 \alpha_2} = \psi_{\alpha_2 \alpha_1}$ десять независимых компонент. Уравнения Баргмана — Вигнера при $s = 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} (i\gamma_\mu^{(1)} p_\mu + m) \psi_{\alpha_1 \alpha_2} &= 0, \\ (i\gamma_\mu^{(2)} p_\mu + m) \psi_{\alpha_1 \alpha_2} &= 0. \end{aligned} \quad (13.7.2)$$

Взяв полусумму этих уравнений и вводя обозначение

$$\beta_\mu = \frac{1}{2} (\gamma_\mu^{(1)} + \gamma_\mu^{(2)}),$$

мы получим уравнения Дuffина — Кеммера для 10-компонентной функции ψ

$$\left(\beta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0.$$

Действительно, легко убедиться, что матрицы β_μ удовлетворяют соотношениям (13.6.3)

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \beta_\rho + \delta_{\nu\rho} \beta_\mu.$$

Рассмотрим еще частицы со спином $s=3/2$. Уравнения Баргмана — Вигнера для них имеют вид

$$\begin{aligned}(\hat{\partial}^{(1)} + m)\psi &= 0, \\(\hat{\partial}^{(2)} + m)\psi &= 0, \\(\hat{\partial}^{(3)} + m)\psi &= 0,\end{aligned}\tag{13.7.3}$$

где $\hat{\partial}^{(n)} = i\gamma_{\nu}^{(n)} p_{\nu}$ и $\psi \equiv \psi_{\alpha\beta\gamma}$ — волновая функция частицы, симметричная относительно индексов α, β, γ и содержащая 4^3 компонент.

Введем в рассмотрение четыре биспинора $\psi^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) с компонентами

$$\psi_{\gamma}^{(\mu)} = \psi_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{C}^{-1}\gamma_{\mu})_{\alpha\beta},\tag{13.7.4}$$

где \mathbf{C} — матрица зарядового сопряжения. Тогда из третьего уравнения (13.7.3) следуют уравнения

$$(i\gamma_{\nu} p_{\nu} + m)\psi^{(\mu)} = 0.\tag{13.7.5}$$

Легко видеть, что четыре биспинора $\psi^{(\mu)}$ связаны между собой соотношением

$$\gamma_{\mu}\psi^{(\mu)} = 0.\tag{13.7.6}$$

Действительно, используя соотношения (8.4.6) и свойство симметрии $\psi_{\alpha\beta\gamma}$, имеем

$$\begin{aligned}(\gamma_{\mu}\psi^{(\mu)})_{\delta} &= \psi_{\alpha\beta\gamma} (\gamma_{\mu})_{\delta\gamma} (\mathbf{C}^{-1})_{\alpha\lambda} (\gamma_{\mu})_{\lambda\beta} = \\&= \psi_{\alpha\beta\gamma} (I)_{\delta\gamma} (\mathbf{C}^{-1})_{\alpha\lambda} (I)_{\lambda\beta} - \psi_{\alpha\beta\gamma} (\gamma_5)_{\delta\gamma} (\mathbf{C}^{-1})_{\alpha\lambda} (\gamma_5)_{\lambda\beta} = \\&= \psi_{\alpha\beta\gamma} (I)_{\delta\gamma} (\mathbf{C}^{-1})_{\alpha\beta} - \psi_{\alpha\beta\gamma} (\gamma_5)_{\delta\gamma} (\mathbf{C}^{-1}\gamma_5)_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Но

$$(\mathbf{C}^{-1})_{\alpha\beta} = -(\mathbf{C}^{-1})_{\beta\alpha}, \quad (\mathbf{C}^{-1}\gamma_5)_{\alpha\beta} = -(\mathbf{C}^{-1}\gamma_5)_{\beta\alpha}.$$

Поэтому последняя строка равна нулю, и мы получаем

$$(\gamma_{\mu}\psi^{(\mu)})_{\delta} = 0.\tag{13.7.7}$$

Мы видим, что уравнение (13.7.5) вместе с соотношением (13.7.6) вытекает из уравнений Баргмана — Вигнера (13.7.3). Можно показать, что и, наоборот, уравнения (13.7.3) следуют из (13.7.5) и (13.7.6). Поэтому последние два уравнения могут служить для описания частиц со спином $3/2$ [27].

Легко проверить, что число независимых компонент у четырех биспиноров $\psi^{(\mu)}$ в системе покоя частицы равно четырем, как и должно быть в случае спина $s = 3/2$.

§ 14. Квантование электронно-позитронного поля

14.1. Условия квантования. В предыдущих параграфах рассматривалась задача об одном электроном (свободном или находящемся в заданном внешнем поле); теперь мы перейдем к рассмотрению системы не взаимодействующих между собой электронов и позитронов. Такую систему можно описывать с помощью волновой функции в конфигурационном пространстве. Практически более удобно, однако, пользоваться методом вторичного квантования и описывать состояние системы волновой функцией в пространстве чисел частиц. Существенное преимущество такого метода состоит в том, что он допускает простое обобщение на случай взаимодействующих частиц.

Мы будем рассматривать уравнения Дирака не как квантово-механические уравнения движения отдельной частицы, а как уравнения поля;

в этом смысле роль их аналогична роли уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Это поле мы будем называть электронно-позитронным (или просто электронным). Оно характеризуется биспинорами $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, которые, подобно потенциалам $A_\mu(x)$ в теории квантованного электромагнитного поля, следует считать операторами, действующими на волновую функцию (вектор состояния) системы в пространстве чисел частиц и удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям.

Наша задача заключается в установлении этих соотношений, которые носят название *условий квантования* электронно-позитронного поля.

Введем с этой целью в рассмотрение совокупность стационарных решений уравнений Дирака для электрона в произвольном, но достаточно слабом постоянном внешнем электромагнитном поле,

$$\psi_s(x) = \psi_s(\mathbf{r}) e^{-i\omega_s t},$$

где индекс s служит для обозначения различных решений. В этом случае возможно разделение решений на решения с положительными и решения с отрицательными частотами, причем первым соответствуют, как мы знаем (§ 9.1), электронные, а вторым — позитронные состояния. Функции $\psi_s(x)$ образуют ортонормированную систему функций

$$\int \psi_s^*(x) \psi_{s'}(x) d^3x = \delta_{ss'},$$

и поэтому произвольное решение уравнений Дирака в рассматриваемом поле может быть представлено в виде суперпозиции $\psi_s(x)$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\omega_s > 0} \mathbf{a}_s \psi_s(x) + \sum_{\omega_s < 0} \mathbf{b}_s^+ \psi_s(x), \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{\omega_s > 0} \mathbf{a}_s^\dagger \bar{\psi}_s(x) + \sum_{\omega_s < 0} \mathbf{b}_s \bar{\psi}_s(x), \end{aligned} \quad (14.1.1)$$

где \mathbf{a}_s , \mathbf{b}_s — некоторые постоянные коэффициенты разложения. Эти величины мы будем теперь, так же как и величины $\mathbf{c}_{k\lambda}$ в разложении электромагнитных потенциалов (5.1.1), считать не обычными числами, а операторами, действующими в пространстве чисел частиц — электронов и позитронов.

Чтобы установить свойства этих операторов, определим энергию и заряд электронно-позитронного поля. Эти величины определяются формулами (8.8.3) и (8.8.4)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2i} \int \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^+ \right) \psi - \psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) d^3x, \\ Q &= e \int \psi^+ \psi d^3x. \end{aligned} \quad (14.1.2)$$

Подставляя сюда разложения (14.1.1) и используя условие ортонормированности функций $\psi_s(\mathbf{r})$, получим

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\omega_s > 0} \epsilon_s \mathbf{a}_s^\dagger \mathbf{a}_s - \sum_{\omega_s < 0} \epsilon_s \mathbf{b}_s \mathbf{b}_s^+, \\ Q &= e \sum_{\omega_s > 0} \mathbf{a}_s^\dagger \mathbf{a}_s + e \sum_{\omega_s < 0} \mathbf{b}_s \mathbf{b}_s^+, \end{aligned} \quad (14.1.3)$$

где $\epsilon_s = |\omega_s|$.

Рассмотрим сначала первые слагаемые в выражениях (14.1.3), которые связаны с электронными состояниями. Эти слагаемые должны, очевидно, представлять собой суммарные энергию и заряд системы электронов. Поэто-

му величину $\mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_s$ мы должны интерпретировать как оператор числа электронов в квантовомеханическом состоянии s . Этот оператор мы обозначим через n_s^+ :

$$n_s^{(+)} = \mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_s.$$

Согласно принципу Паули, его собственные значения n_s^+ не должны превышать единицы,

$$n_s^{(+)} = 0, 1.$$

Поэтому операторы $\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_s^+$ должны удовлетворять таким перестановочным условиям, которые приводили бы только к этим двум собственным значениям $n_s^{(+)}$.

Мы примем, что \mathbf{a}_s и \mathbf{a}_s^+ являются эрмитовски сопряженными операторами, удовлетворяющими следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{s'}^+\} &= \delta_{ss'}, \\ \{\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{s'}\} &= 0, \\ \{\mathbf{a}_s^+, \mathbf{a}_{s'}^+\} &= 0, \end{aligned} \quad (14.1.4)$$

где скобка $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ обозначает

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \mathbf{AB} + \mathbf{BA}$$

и называется *антикоммутатором* операторов \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Покажем, что условия квантования (14.1.4) приводят к принципу Паули. Возведем для этого оператор $n_s^{(+)} = \mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_s$ в квадрат

$$(n_s^{(+)})^2 = \mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_s \mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_s = \mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_s (1 - \mathbf{a}_s \mathbf{a}_s^+).$$

Но, согласно (14.1.4),

$$\mathbf{a}_s^2 = 0,$$

поэтому

$$(n_s^{(+)})^2 = \mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_s = n_s^{(+)},$$

откуда следует, что собственные значения оператора $n_s^{(+)}$ равны, как и утверждалось выше, 0 и 1.

Возвратимся теперь к общим выражениям (14.1.3) для суммарной энергии и суммарного заряда электронно-позитронного поля и рассмотрим вторые слагаемые, связанные с решениями уравнений Дирака с отрицательными частотами. Эти слагаемые должны определять энергию и заряд позитронов. Чтобы такая интерпретация была возможной, примем, что \mathbf{b}_s и \mathbf{b}_s^+ являются эрмитовски сопряженными операторами, удовлетворяющими тем же перестановочным соотношениям, что и $\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_s^+$:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{b}_s, \mathbf{b}_{s'}^+\} &= \delta_{ss'}, \\ \{\mathbf{b}_s, \mathbf{b}_{s'}\} &= 0, \\ \{\mathbf{b}_s^+, \mathbf{b}_{s'}^+\} &= 0, \end{aligned} \quad (14.1.5)$$

а также соотношениям

$$\{\mathbf{a}_s, \mathbf{b}_{s'}\} = \{\mathbf{a}_s, \mathbf{b}_{s'}^+\} = \{\mathbf{a}_s^+, \mathbf{b}_{s'}\} = \{\mathbf{a}_s^+, \mathbf{b}_{s'}^+\} = 0, \quad (14.1.6)$$

и будем считать, что число позитронов в состоянии s есть собственное значение оператора $n_s^{(-)}$

$$n_s^{(-)} = \mathbf{b}_s^+ \mathbf{b}_s.$$

Ясно, что собственные значения оператора $n_s^{(-)}$ в силу перестановочных условий (14.1.5), так же как и оператора $n_s^{(+)}$, равны 0, 1:

$$n_s^{(-)} = 0, 1.$$

Используя определение оператора $n_s^{(\pm)}$ и условия квантования (14.1.4), (14.1.5), можно переписать выражения (14.1.3) для суммарных энергии и заряда электронно-позитронного поля в виде

$$H = \sum_s (n_s^{(+)} \epsilon_s^{(+)} + n_s^{(-)} \epsilon_s^{(-)}) + E_0,$$

$$Q = e \sum_s (n_s^{(+)} - n_s^{(-)}) + Q_0,$$

где $\epsilon_s^{(\pm)} = \pm \omega_s$ при $\omega_s \geq 0$ и

$$E_0 = - \sum_s \epsilon_s^{(-)}, \quad Q_0 = e \sum_{\omega_s < 0} 1.$$

Эти выражения показывают, что условия квантования (14.1.4) и (14.1.5) приводят к правильной корпускулярной картине электронного поля. Действительно, как и должно быть, каждое занятое электронное состояние вносит в суммарную энергию поля вклад $\epsilon_s^{(+)}$ и в суммарный заряд — вклад e , а каждое занятое позитронное состояние вносит в эти величины соответственно вклады $\epsilon_s^{(-)}$ и $-e$.

Недостатком полученных выражений является наличие в них бесконечных констант E_0 и Q_0 . Они представляют собой энергию и заряд в состоянии *вакуума*, т. е. в состоянии поля с минимальной энергией, отвечающей значениям $n_s^{(\pm)} = 0$ для всех s .

Однако лишённые физического смысла константы E_0 и Q_0 могут быть, как мы сейчас покажем, устранены простым изменением в определениях операторов энергии и заряда электронного поля. Напомним с этой целью, что использованное нами определение вектора плотности тока $j_\mu(x) = ie (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x)$ базировалось на том, что это — единственная квадратичная форма, построенная из компонент биспиноров $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, представляющая собой четырехмерный вектор и удовлетворяющая уравнению непрерывности. Другая возможная форма $ie (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\beta(x) \psi_\alpha(x)$ отличается только порядком множителей $\bar{\psi}_\alpha(x)$ и $\psi_\beta(x)$ и совпадает с первой, если $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ рассматриваются как обычные числа. Ситуация, однако, существенно меняется, если $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ считаются не обычными числами, а операторами. В этом случае обе формы отличаются, и возникает возможность определения оператора плотности электрического тока с помощью соотношения

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x) - \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\alpha(x)).$$

Этот вектор по-прежнему удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0$$

и приводит, как легко проверить, к полному заряду поля

$$Q = -i \int j_4(x) d^3x = \frac{e}{2} \sum_s ([a_s^+, a_s] - [b_s^+, b_s]) = e \sum_s (n_s^{(+)} - n_s^{(-)}).$$

Мы видим, что теперь заряд вакуума равен нулю, $Q_0 = 0$. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться именно этим определением оператора плотности тока, которое может быть сокращенно записано в виде

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)], \quad (14.1.7)$$

где $[A, B]$ означает коммутатор операторов A и B .

Вводя зарядово-сопряженные операторы поля

$$\psi^c(x) = \mathbf{C}\bar{\psi}(x), \quad \bar{\psi}^c(x) = \mathbf{C}^{-1}\psi(x)$$

и вспоминая, что

$$\psi(x) \gamma_\mu^T \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^c(x) \gamma_\mu \psi^c(x),$$

можно оператор плотности тока представить также в виде

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \bar{\psi}^c(x) \gamma_\mu \psi^c(x)). \quad (14.1.8)$$

Это выражение остается неизменным, если заменить операторы $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ зарядово-сопряженными операторами $\psi^c(x)$ и $\bar{\psi}^c(x)$ и изменить при этом знак заряда e .

Кроме оператора плотности тока, можно формально непротиворечивым и релятивистски инвариантным образом переопределить оператор энергии поля, понимая под произведением операторов полей в формуле (14.1.2) их так называемое нормальное произведение (см. § 14.4). При этом в формуле (14.1.3) для \mathbf{H} величина $b_s b_s^+$ заменяется на $-b_s^+ b_s$ и исчезает константа E_0 .

Итак, после переопределения операторов плотности тока и энергии электронного поля энергия и заряд поля становятся равными

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_s (n_s^{(+)} \epsilon_s^{(+)} + n_s^{(-)} \epsilon_s^{(-)}), \\ \mathbf{Q} &= e \sum_s (n_s^{(+)} - n_s^{(-)}), \end{aligned} \quad (14.1.9)$$

в полном соответствии с корпускулярной картиной поля.

14.2. Операторы испускания и поглощения электронов и позитронов.

Выясним теперь физический смысл операторов a_s , a_s^+ и b_s , b_s^+ . Воспользуемся для этого представлением, в котором диагональны операторы $n_s^{(+)} = a_s^+ a_s$ и $n_s^{(-)} = b_s^+ b_s$. Обозначая через $|n_s^{(+)}\rangle$ собственный вектор состояния оператора n_s^+ , отвечающий собственному значению этого оператора n_s^+ , и учитывая, что возможные значения $n_s^{(+)}$ равны 0 и 1, имеем

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_s^+ | 0 \rangle \langle 0 | a_s | 0 \rangle + \langle 0 | a_s^+ | 1 \rangle \langle 1 | a_s | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 1 | a_s^+ | 0 \rangle \langle 0 | a_s | 1 \rangle + \langle 1 | a_s^+ | 1 \rangle \langle 1 | a_s | 1 \rangle &= 1, \end{aligned}$$

а так как операторы a_s и a_s^+ эрмитовски сопряжены, т. е.

$$\langle i | a_s | k \rangle = \langle k | a_s^+ | i \rangle; \quad i, k = 0, 1,$$

то

$$\begin{aligned} |\langle 0 | a_s^+ | 0 \rangle|^2 + |\langle 0 | a_s^+ | 1 \rangle|^2 &= 0, \\ |\langle 1 | a_s^+ | 0 \rangle|^2 + |\langle 1 | a_s^+ | 1 \rangle|^2 &= 1 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\langle 0 | a_s^+ | 0 \rangle = \langle 0 | a_s^+ | 1 \rangle = 0.$$

Из условия $a_s^+ a_s^+ = 0$ легко заключить, что

$$\langle 1 | a_s^+ | 1 \rangle = 0,$$

и поэтому

$$\langle 1 | a_s^+ | 0 \rangle = 1.$$

Таким образом, с точностью до множителя, равного по модулю единице, справедливы формулы

$$\begin{aligned} \langle 1_s^{(+)} | \mathbf{a}_s^+ | 0_s^{(+)} \rangle &= 1, & \langle 0_s^{(+)} | \mathbf{a}_s | 1_s^{(+)} \rangle &= 1, \\ \langle 1_s^{(+)} | \mathbf{a}_s | 0_s^{(+)} \rangle &= 0, & \langle 0_s^{(+)} | \mathbf{a}_s^+ | 1_s^{(+)} \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (14.2.1)$$

где знак плюс над 0 и 1 означает, что мы имеем дело с электроном, и индекс s служит для обозначения состояния, в котором находится электрон. Эти формулы показывают, что операторы \mathbf{a}_s^+ и \mathbf{a}_s можно интерпретировать как операторы рождения (или испускания) и уничтожения (или поглощения) электрона в состоянии s .

Аналогичный смысл имеют операторы \mathbf{b}_s^+ и \mathbf{b}_s для позитрона: они представляют собой операторы рождения и уничтожения позитрона в состоянии s :

$$\begin{aligned} \langle 1_s^{(-)} | \mathbf{b}_s^+ | 0_s^{(-)} \rangle &= 1, & \langle 0_s^{(-)} | \mathbf{b}_s | 1_s^{(-)} \rangle &= 1, \\ \langle 1_s^{(-)} | \mathbf{b}_s | 0_s^{(-)} \rangle &= 0, & \langle 0_s^{(-)} | \mathbf{b}_s^+ | 1_s^{(-)} \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (14.2.2)$$

где знак минус над 0 и 1 означает, что мы имеем дело с позитроном.

Легко установить матричный вид операторов \mathbf{a}_s^+ , \mathbf{a}_s и \mathbf{b}_s^+ , \mathbf{b}_s . Расположим для этого все электронные и позитронные состояния в определенном порядке и перенумеруем их единым образом. Из предыдущего ясно, что мы можем положить

$$\mathbf{a}_s = \eta_s \alpha_s, \quad \mathbf{a}_s^+ = \eta_s^+ \alpha_s^+, \quad \mathbf{b}_s = \eta_s \alpha_s, \quad \mathbf{b}_s^+ = \eta_s^+ \alpha_s^+, \quad (14.2.3)$$

где α_s , α_s^+ — двухрядные матрицы

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_s^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

действующие на переменные, относящиеся к состоянию s (s определяет любое из электронных и позитронных состояний), и η_s — некоторая унитарная матрица, не действующая на переменные, относящиеся к состоянию s ,

$$\eta_s^+ \eta_s = I.$$

Для нахождения этой матрицы воспользуемся перестановочными соотношениями

$$\{\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{s'}\} = \{\mathbf{a}_s, \mathbf{b}_{s''}\} = \{\mathbf{b}_{s''}, \mathbf{b}_{s'''}\} = 0,$$

справедливыми для различающихся состояний s , s' , s'' , s''' . Чтобы удовлетворить этим соотношениям, положим

$$\eta_s = \prod_{(s' < s)} \zeta(s'),$$

где $\zeta(s')$ — матрица, действующая на переменные, относящиеся к состоянию s' , и произведение берется по всем состояниям s' , предшествующим состоянию s (напомним, что все электронные и позитронные состояния перенумерованы единым образом). Так как матрицы $\alpha_{s'}$ и $\alpha_{s''}$ при $s' \neq s''$ действуют на разные переменные и поэтому коммутируют между собой, то из написанных перестановочных соотношений следует, что матрицы α_s и $\zeta(s)$ антикоммутируют

$$\{\alpha_s, \zeta(s)\} = 0.$$

Аналогичное соотношение справедливо для α_s^+ ,

$$\{\alpha_s^+, \zeta(s)\} = 0.$$

Поэтому $\zeta(s)$ коммутирует с $\alpha_s^+ \alpha_s$,

$$[\zeta(s), \alpha_s^+ \alpha_s] = 0,$$

и, следовательно, матрица $\zeta(s)$ диагональна в том представлении, в котором диагональны $n_s^{(+)} = a_s^+ a_s$ и $n_s^{(-)} = b_s^+ b_s$. Отсюда легко заключить, что

$$\zeta(s) = (-1)^{n_s},$$

где n_s — число частиц (электронов или позитронов) в состоянии s .

Итак,

$$\eta_s = (-1)^{\sum_{s' < s} n_{s'}}, \quad (14.2.4)$$

т. е. η_s равно $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли суммарное число частиц в состояниях, предшествующих данному состоянию (согласно установленному порядку в их нумерации) четным или нечетным.

С помощью операторов рождения и уничтожения можно формально строить векторы различных состояний системы электронов и позитронов. Введем с этой целью вектор состояния вакуума электронно-позитронного поля, который обозначим через $|0\rangle$. Так как в этом состоянии нет частиц, то

$$[n_s^{(+)} |0\rangle = a_s^+ a_s |0\rangle = 0, \quad [n_s^{(-)} |0\rangle = b_s^+ b_s |0\rangle = 0.$$

Применим к этим уравнениям операторы a_s и b_s :

$$a_s a_s^+ a_s |0\rangle = 0, \quad b_s b_s^+ b_s |0\rangle = 0.$$

Так как $a_s a_s^+ = 1 - a_s^+ a_s$ и $b_s b_s^+ = 1 - b_s^+ b_s$, то последние уравнения приобретают вид

$$a_s |0\rangle - a_s^+ a_s a_s |0\rangle = 0, \quad b_s |0\rangle - b_s^+ b_s b_s |0\rangle = 0.$$

Но $a_s^2 = 0$, $b_s^2 = 0$, и, следовательно, вектор состояния вакуума удовлетворяет уравнениям

$$a_s |0\rangle = 0, \quad b_s |0\rangle = 0. \quad (14.2.5)$$

Построим теперь векторы одночастичных состояний. Для этого нужно подействовать на вектор состояния вакуума каждым из операторов рождения частиц. Например, вектор

$$|1_s^{(+)}\rangle = a_s^+ |0\rangle \quad (14.2.6)$$

представляет собой вектор состояния электронного поля с одним электроном, находящимся в состоянии s . Действительно, этот вектор является собственным вектором оператора числа электронов с квантовыми числами s , принадлежащим собственному значению $n_s^{(+)} = 1$:

$$n_s^{(+)} |1_s^{(+)}\rangle = a_s^+ a_s a_s^+ |0\rangle = a_s^+ |0\rangle - a_s a_s^+ a_s^+ |0\rangle = |1_s^{(+)}\rangle.$$

Аналогично вектор

$$|1_s^{(-)}\rangle = b_s^+ |0\rangle \quad (14.2.7)$$

представляет собой вектор состояния электронного поля с одним позитроном, находящимся в состоянии s .

Учитывая условие нормировки этих векторов

$$\langle 1_s^{(+)} | 1_s^{(+)} \rangle = 1, \quad \langle 1_s^{(-)} | 1_s^{(-)} \rangle = 1,$$

мы получим формулы (14.2.2), (14.1.3) для матричных элементов операторов рождения и уничтожения частиц.

Заметим, что из этих формул вытекают следующие соотношения для средних по состоянию вакуума от произведений операторов рождения и уничтожения частиц:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_s | 0 \rangle &= 0, & \langle 0 | \mathbf{b}_s^+ \mathbf{b}_s | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 0 | \mathbf{a}_s \mathbf{a}_s^+ | 0 \rangle &= 1, & \langle 0 | \mathbf{b}_s \mathbf{b}_s^+ | 0 \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (14.2.8)$$

Построим теперь векторы многочастичных состояний. Для этого нужно подействовать на вектор состояния вакуума не одним, а несколькими (по числу присутствующих частиц) операторами рождения частиц. Например, вектор

$$| 1_s^{(+)}, 1_{s'}^{(+)} \rangle = \mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_{s'}^+ | 0 \rangle$$

представляет собой вектор состояния поля с двумя электронами, обладающими квантовыми числами s и s' , а вектор

$$| 1_s^{(+)}, 1_{s'}^{(-)} \rangle = \mathbf{a}_s^+ \mathbf{b}_{s'}^+ | 0 \rangle$$

представляет собой вектор состояния поля с одним электроном, обладающим квантовыми числами s , и одним позитроном, обладающим квантовыми числами s' .

Так как $\mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_s^+ = 0$, то

$$| 1_s^{(+)}, 1_s^{(+)} \rangle \equiv | 2_s^{(+)} \rangle = 0,$$

т. е. не существует состояний поля с двумя электронами, обладающими одинаковыми квантовыми числами.

При построении векторов двухчастичных и многочастичных состояний следует иметь в виду, что операторы \mathbf{a}_s^+ и $\mathbf{a}_{s'}^+$ при $s \neq s'$, а также операторы \mathbf{a}_s^+ и $\mathbf{b}_{s'}^+$ антикоммутируют между собой, поэтому необходимо условиться, какое из выражений $\mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_{s'}^+ | 0 \rangle$ или $\mathbf{a}_{s'}^+ \mathbf{a}_s^+ | 0 \rangle$, отличающихся только знаком, брать в качестве вектора двухэлектронного состояния. Аналогичный вопрос возникает относительно выражений $\mathbf{a}_s^+ \mathbf{b}_{s'}^+ | 0 \rangle$ и $\mathbf{b}_{s'}^+ \mathbf{a}_s^+ | 0 \rangle$, также отличающихся только знаком.

Мы условимся при построении векторов состояний располагать операторы рождения частиц, действующие на состояние вакуума, в том порядке, в каком перенумерованы соответствующие им состояния; иными словами, под вектором состояния $\Phi_{n^{(+)}, n^{(-)}}$, описывающим $n^{(+)}$ электронов и $n^{(-)}$ позитронов, мы будем понимать вектор

$$\Phi_{n^{(+)}, n^{(-)}} \equiv | 1_{s_1^{(+)}}^{(+)} \dots 1_{s_2^{(+)}}^{(+)} 1_{s_1^{(-)}}^{(-)} \dots 1_{r_1^{(-)}}^{(-)} \rangle = \mathbf{a}_{s_1^{(+)}}^+ \dots \mathbf{a}_{s_2^{(+)}}^+ \mathbf{b}_{r_1^{(-)}}^+ \dots \mathbf{b}_{r_1^{(-)}}^+ | 0 \rangle,$$

где расположение индексов $r_1, r_2, \dots, r_{n^{(-)}}, s_1, s_2, \dots, s_{n^{(+)}}$ соответствует тому порядку, который принят при их нумерации. Ясно, что при таком определении мы получим

$$\mathbf{a}_{s_j}^+ \Phi_{n^{(+)}, n^{(-)}} = (-1)^{\nu} \Phi_{n^{(+) + 1, n^{(-)}},$$

$$\mathbf{b}_{r_j}^+ \Phi_{n^{(+)}, n^{(-)}} = (-1)^{\nu'} \Phi_{n^{(+)}, n^{(-) + 1},$$

где ν — число состояний, входящих в совокупность $r_1, r_2, \dots, r_{n^{(-)}}$, $s_1, s_2, \dots, s_{n^{(+)}}$, порядковые номера которых следуют за состоянием s_j ; аналогичный смысл имеет число ν' .

Возвратимся теперь к разложению (14.1.1). В соответствии со смыслом операторов $\mathbf{a}_s^+ \mathbf{a}_s$ и $\mathbf{b}_s^+ \mathbf{b}_s$, можно сказать, что $\bar{\Psi}(x)$ объединяет операторы

рождения электронов и уничтожения позитронов, а $\psi(x)$ — операторы уничтожения электронов и рождения позитронов. Используя формулы (14.2.1) и (14.2.2), можно найти матричные элементы операторов $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, соответствующие рождению и поглощению электронов и позитронов,

$$\begin{aligned} \langle 1_s^{(+)} | \bar{\psi}(x) | 0_s^{(+)} \rangle &= \bar{\psi}_s^{(+)}(x), & \langle 0_s^{(+)} | \psi(x) | 1_s^{(+)} \rangle &= \psi_s^{(+)}(x), \\ \langle 0_s^{(-)} | \bar{\psi}(x) | 1_s^{(-)} \rangle &= \bar{\psi}_s^{(-)}(x), & \langle 1_s^{(-)} | \psi(x) | 0_s^{(-)} \rangle &= \psi_s^{(-)}(x), \end{aligned} \quad (14.2.9)$$

где $\psi_s^{(+)}(x) = \psi_s^{(+)}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_s t}$ и $\psi_s^{(-)}(x) = \psi_s^{(-)}(\mathbf{r}) e^{i\omega_s t}$ — решения уравнения Дирака для электрона в постоянном внешнем поле, соответствующие положительным и отрицательным частотам и нормированные согласно условию

$$\int \psi_s^{(q)}(\mathbf{r}) (\psi_s^{(q')}(\mathbf{r}))^* d^3x = \delta_{ss'} \delta_{qq'}, \quad q = +, -.$$

В этих формулах постоянное внешнее электромагнитное поле может быть произвольным, лишь бы оно было достаточно слабым. Поэтому, в частности, они относятся и к случаю свободных частиц, который мы рассмотрим ввиду его важности отдельно.

В этом случае можно ввести состояния частиц с определенным импульсом и определенной поляризацией, т. е. в качестве собственных функций $\psi_s^{(\pm)}(x)$ взять плоские волны, подробно изученные в § 9.2.3:

$$\Psi_{p\mu}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} u^\mu(\pm p) e^{\pm i p x}.$$

При этом разложение (14.1.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p, \mu} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} [a_{p\mu} u^\mu(p) e^{i p x} + b_{p\mu}^+ u^\mu(-p) e^{-i p x}], \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{p, \mu} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} [a_{p\mu}^+ \bar{u}^\mu(p) e^{-i p x} + b_{p\mu} \bar{u}^\mu(-p) e^{i p x}], \end{aligned} \quad (14.2.10)$$

где $a_{p\mu}^{\mp}$ представляет собой оператор рождения электрона с 4-импульсом p и поляризацией μ , $a_{p\mu}$ — оператор уничтожения электрона с импульсом p и поляризацией μ ; $b_{p\mu}^{\mp}$ — оператор рождения позитрона с импульсом p и поляризацией μ и $b_{p\mu}$ — оператор уничтожения позитрона с импульсом p и поляризацией μ .

Формулы (14.2.9) для матричных элементов полей $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$, соответствующих рождению и уничтожению частиц, приобретают вид

$$\langle 1_{p\mu}^{(+)} | \bar{\psi}(x) | 0_{p\mu}^{(+)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \bar{u}^\mu(p) e^{-i p x}, \quad \langle 0_{p\mu}^{(+)} | \psi(x) | 1_{p\mu}^{(+)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} u^\mu(p) e^{i p x}, \quad (14.2.11)$$

$$\langle 0_{p\mu}^{(-)} | \bar{\psi}(x) | 1_{p\mu}^{(-)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \bar{u}^\mu(-p) e^{i p x}, \quad \langle 1_{p\mu}^{(-)} | \psi(x) | 0_{p\mu}^{(-)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} u^\mu(-p) e^{-i p x}.$$

Эти формулы аналогичны формулам (5.2.8) для матричных элементов операторов потенциала электромагнитного поля, соответствующих испусканию и поглощению фотона.

14.3. Антиккоммутаторы электронного поля. Зная алгебру операторов рождения и уничтожения частиц, т. е. имея соотношения (14.1.4), (14.1.5), (14.1.6) и используя разложение (14.1.1), легко установить перестановочные

соотношения для операторов электронного поля $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x')$:

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} &= 0, \\ \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} &= 0, \\ \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} &= S_{\alpha\beta}(x, x'), \end{aligned} \quad (14.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}(x, x') &= S_{\alpha\beta}^+(x, x') + S_{\alpha\beta}^-(x, x'), \\ S_{\alpha\beta}^+(x, x') &= \sum_s \psi_{s\alpha}^{(+)}(x) \bar{\psi}_{s\beta}^{(+)}(x'), \\ S_{\alpha\beta}^-(x, x') &= \sum_s \psi_{s\alpha}^{(-)}(x) \bar{\psi}_{s\beta}^{(-)}(x'). \end{aligned} \quad (14.3.2)$$

Если внешнее электромагнитное поле отсутствует, то функции $S_{\alpha\beta}^+(x, x')$ и $S_{\alpha\beta}^-(x, x')$ имеют вид

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^+(x-x') &= \sum_{p, \mu} \frac{1}{2V\epsilon_p} u_\alpha^\mu(p) \bar{u}_\beta^\mu(p) e^{ip(x-x')}, \\ S_{\alpha\beta}^-(x-x') &= \sum_{p, \mu} \frac{1}{2V\epsilon_p} u_\alpha^\mu(-p) \bar{u}_\beta^\mu(-p) e^{-ip(x-x')}, \end{aligned} \quad (14.3.3)$$

а так как, согласно (9.4.11),

$$\begin{aligned} \sum_\mu u_\alpha^\mu(p) \bar{u}_\beta^\mu(p) &= (m - i\hat{p})_{\alpha\beta}, \\ \sum_\mu u_\alpha^\mu(-p) \bar{u}_\beta^\mu(-p) &= -(m + i\hat{p})_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (14.3.4)$$

то

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^+(x) &= - \sum_p \frac{1}{2V\epsilon_p} (i\hat{p} - m)_{\alpha\beta} e^{ipx} = - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right)_{\alpha\beta} \sum_p \frac{1}{2V\epsilon_p} e^{ipx}, \\ S_{\alpha\beta}^-(x) &= - \sum_p \frac{1}{2V\epsilon_p} (i\hat{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ipx} = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right)_{\alpha\beta} \sum_p \frac{1}{2V\epsilon_p} e^{-ipx} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^+(x) &= - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right)_{\alpha\beta} \Delta_+(x), \\ S_{\alpha\beta}^-(x) &= \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right)_{\alpha\beta} \Delta_-(x), \end{aligned} \quad (14.3.5)$$

где $\Delta_+(x)$ и $\Delta_-(x)$ — функции, введенные в § 6.5,

$$\begin{aligned} \Delta_+(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{ipx} \frac{d^3p}{\epsilon_p}, \\ \Delta_-(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{-ipx} \frac{d^3p}{\epsilon_p}. \end{aligned}$$

Вспомня определение функции

$$\Delta_0(x) = i(\Delta_+(x) - \Delta_-(x)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ipr} \frac{\sin \epsilon_p t}{\epsilon_p} d^3p.$$

получим окончательно

$$S_{\alpha\beta}(x) = i \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right)_{\alpha\beta} \Delta_0(x) \quad (14.3.6)$$

или сокращенно

$$S(x) = i(i\hat{p} - m)\Delta_0(x).$$

В § 6.5 мы видели, что функция $\Delta_0(x)$ обращается в нуль всюду вне светового конуса, т. е. при $x^2 \equiv r^2 - t^2 > 0$. Поэтому антикоммутирует $\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}$ равен нулю, если точки x и x' разделены пространственно-подобным интервалом $(x - x')^2 > 0$.

Если $t = t'$, то

$$S_{\alpha\beta}(r, 0) = (\gamma_4)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_0(x)|_{t=0} = (\gamma_4)_{\alpha\beta} \delta(r), \quad (14.3.7)$$

и антикоммутирует $\{\psi_\alpha, \psi_\beta^\dagger\}$ приобретает вид

$$\{\psi_\alpha(r, t), \psi_\beta^\dagger(r', t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(r - r'). \quad (14.3.8)$$

Разъясним физический смысл функций $S^+(x)$ и $S^-(x)$. Легко убедиться, что они определяют средние значения в состоянии вакуума произведений компонент $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') | 0 \rangle &= S_{\alpha\beta}^+(x - x'), \\ \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) | 0 \rangle &= S_{\alpha\beta}^-(x - x'). \end{aligned} \quad (14.3.9)$$

14.4. Хронологическое и нормальное произведения операторов электронного поля. В § 6.2 мы изучали определенным образом упорядоченные — хронологические и нормальные — произведения операторов потенциалов электромагнитного поля. Аналогичные произведения можно определить также и для операторов электронно-позитронного поля.

Рассмотрим сначала *хронологическое произведение* (или *T-произведение*) операторов электронного поля.

Если $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ — какие-либо две компоненты операторов поля ψ и $\bar{\psi}$, то их хронологическое произведение определяется следующим образом:

$$T(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)) = \begin{cases} \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2), & t_1 < t_2, \\ -\varphi_2(x_2)\varphi_1(x_1), & t_1 > t_2. \end{cases} \quad (14.4.1)$$

Отметим, что, в отличие от хронологического произведения операторов электромагнитного поля, хронологическое произведение операторов электронного поля меняет знак при перестановке операторов φ_1 и φ_2 . Это находится в соответствии с разными условиями коммутации электромагнитного и электронного полей.

Хронологическое произведение произвольного числа компонент поля $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)$ определяется формулой

$$T(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n)) = \delta_P \varphi_{i_1}(x_{i_1})\varphi_{i_2}(x_{i_2})\dots\varphi_{i_n}(x_{i_n}),$$

где операторы $\varphi_{i_1}(x_{i_1}), \dots, \varphi_{i_n}(x_{i_n})$ расставлены в хронологическом порядке, т. е. так, что $t_{i_1} > t_{i_2} > \dots > t_{i_n}$, и δ_P равно $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли перестановка $(1, 2, \dots, n) \rightarrow (i_1, i_2, \dots, i_n)$ четной или нечетной.

Легко видеть, что определение хронологического произведения операторов поля релятивистски инвариантно. Действительно, если интервал между точками является временноподобным, то это утверждение очевидно, так как в этом случае неравенство $t_1 > t_2$ в системе K влечет за собой неравенство $t'_1 > t'_2$ в другой системе K' . Рассмотрим поэтому тот случай,

когда интервал между x_1 и x_2 является пространственноподобным, причем пусть в системе отсчета K имеет место неравенство $t_1 > t_2$, а в системе K' — неравенство $t'_1 < t'_2$. Тогда в системе K T -произведение операторов $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ запишется в виде

$$T(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2), \quad t_1 > t_2,$$

а в системе K' — в виде

$$T(\varphi'_1(x'_1)\varphi'_2(x'_2)) = \varphi'_1(x'_1)\varphi'_2(x'_2),$$

где φ'_1 и φ'_2 — значения операторов поля в системе K' . Это выражение на первый взгляд противоречит определению T -произведения, так как, если в системе K' $t'_1 < t'_2$, то, согласно (14.4.1), T -произведение в системе K' следует писать в виде

$$T(\varphi'_1(x'_1)\varphi'_2(x'_2)) = -\varphi'_2(x'_2)\varphi'_1(x'_1), \quad t'_1 < t'_2.$$

В действительности, однако, оба выражения тождественны, так как при пространственноподобном интервале операторы $\varphi'_1(x'_1)$ и $\varphi'_2(x'_2)$ антикоммутируют.

Рассмотрим теперь *нормальное произведение* (или N -произведение) операторов электронного поля, в котором операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения частиц.

Если каждый из операторов $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ содержит только операторы рождения или только операторы уничтожения частиц, то нормальное произведение операторов $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ определяется соотношением

$$N(\chi_1\chi_2\dots\chi_n) = \delta_P\chi_{i_1}\chi_{i_2}\dots\chi_{i_n}, \quad (14.4.2)$$

где операторы $\chi_{i_1}, \chi_{i_2}, \dots, \chi_{i_n}$ представляют собой те же операторы $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$, только расположенные таким образом, что операторы рождения стоят слева от операторов поглощения частиц, и δ_P равно $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли перестановка $(1, 2, \dots, n) \rightarrow (i_1, i_2, \dots, i_n)$ четной или нечетной.

В общем случае, когда операторы χ_i содержат как операторы рождения, так и операторы уничтожения частиц, для нахождения нормального произведения нужно каждый из операторов χ_i представить в виде суммы $\chi_i = \chi_i^c + \chi_i^a$, где χ_i^c содержит только операторы рождения, а χ_i^a — только операторы поглощения, и, записав N -произведение в виде суммы

$$N(A\chi_i B) = N(A\chi_i^c B) + N(A\chi_i^a B),$$

воспользоваться далее формулой (14.4.2).

Рассмотрим несколько примеров.

Полагая

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x), \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x),$$

где $\psi^{(+)}(x)$ и $\psi^{(-)}(x)$ объединяют соответственно операторы уничтожения электронов и рождения позитронов, а $\bar{\psi}^{(+)}(x)$ и $\bar{\psi}^{(-)}(x)$ — операторы рождения электронов и уничтожения позитронов, имеем

$$\begin{aligned} N(\psi(x)\psi(y)) &= N[(\psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x))(\psi^{(+)}(y) + \psi^{(-)}(y))] = \\ &= \psi^{(+)}(x)\psi^{(+)}(y) + \psi^{(-)}(x)\psi^{(+)}(y) - \psi^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)\psi^{(-)}(y), \end{aligned}$$

а так как

$$\psi^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x) = -\psi^{(+)}(x)\psi^{(-)}(y),$$

то

$$N(\psi(x)\psi(y)) = \psi(x)\psi(y). \quad (14.4.3)$$

Аналогичное соотношение имеет место для операторов $\bar{\psi}(x)$ и $\bar{\psi}(y)$

$$N(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)) = \bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y). \quad (14.4.4)$$

Нормальное произведение операторов $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(y)$ имеет более сложный вид

$$\begin{aligned} N(\psi(x)\bar{\psi}(y)) &= \\ &= -\bar{\psi}^{(+)}(y)\psi^{(+)}(x) + \psi^{(+)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(y) + \psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(y) + \psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(y), \\ N(\bar{\psi}(y)\psi(x)) &= \\ &= \bar{\psi}^{(+)}(y)\psi^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(+)}(y)\psi^{(-)}(x) - \psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(y). \end{aligned}$$

Так как

$$\psi^{(+)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(y) = -\bar{\psi}^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x), \quad \bar{\psi}^{(+)}(y)\psi^{(-)}(x) = -\psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(y),$$

то

$$N(\bar{\psi}(y)\psi(x)) = -N(\psi(x)\bar{\psi}(y)).$$

Покажем, что разность между хронологическим и нормальным произведениями операторов электронного поля, которую мы будем называть *связью* или *сверткой* этих операторов, не содержит, так же как и в случае электромагнитного поля, операторов поглощения и испускания частиц, т. е. представляет собой c -число.

Вычислим прежде всего связь операторов $\psi(x)$ и $\psi(x')$. В соответствии с определениями (14.4.1) и (14.4.2), имеем

$$\begin{aligned} T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')) - N(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')) &= \\ &= \begin{cases} 0, & t' < t, \\ -\psi_\beta(x')\psi_\alpha(x) - \psi_\alpha(x)\psi_\beta(x'), & t' > t, \end{cases} \end{aligned}$$

а так как, согласно (14.3.1), антикоммутатор $\psi_\alpha(x)$ и $\psi_\beta(x')$ равен нулю, то связь операторов $\psi_\alpha(x)$ и $\psi_\beta(x')$ равна нулю:

$$\psi_\alpha^a(x)\psi_\beta^a(x') = 0, \quad (14.4.5)$$

где для обозначения связи операторов принято обозначение

$$T(\Phi_1\Phi_2) - N(\Phi_1\Phi_2) \equiv \Phi_1^a\Phi_2^a.$$

(Вместо буквы a сверху над операторами мы будем писать также любую букву латинского алфавита, которая должна быть только одинаковой у связуемых операторов.)

Аналогичным образом легко убедиться, что

$$\bar{\psi}_\alpha^a(x)\bar{\psi}_\beta^a(x') = 0. \quad (14.4.6)$$

Найдем, наконец, связь операторов $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x')$. Используя (14.4.1), (14.4.2) и (14.1.1), получим

$$\psi_\alpha^a(x)\bar{\psi}_\beta^a(x') = -\bar{\psi}_\beta^a(x')\psi_\alpha^a(x) = S_{\alpha\beta}(x, x'), \quad (14.4.7)$$

где

$$S_{\alpha\beta}(x, x') = \begin{cases} S_{\alpha\beta}^+(x, x'), & t' < t, \\ -S_{\alpha\beta}^-(x, x'), & t' > t, \end{cases}$$

и $S_{\alpha\beta}^+(x, x')$ и $S_{\alpha\beta}^-(x, x')$ — функции, определяемые формулами (14.3.2).

$$S_{\alpha\beta}^+(x, x') = \sum_s \Psi_{s\alpha}^{(+)}(x) \overline{\Psi_{s\beta}^{(+)}(x')},$$

$$S_{\alpha\beta}^-(x, x') = \sum_s \Psi_{s\alpha}^{(-)}(x) \overline{\Psi_{s\beta}^{(-)}(x')}.$$

В отсутствие внешнего электромагнитного поля функция $S_{\alpha\beta}(x - x')$, зависящая только от разности аргументов, может быть, согласно (14.3.5), представлена в виде

$$S_{\alpha\beta}(x) = - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right)_{\alpha\beta} \Delta_c(x)$$

или сокращенно

$$S_c(x) = - (i\hat{p} - m) \Delta_c(x), \quad (14.4.8)$$

где $\hat{p} = \frac{1}{i} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ и

$$\Delta_c(x) = \theta(x) \Delta_+(x) + \theta(-x) \Delta_-(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{i(p^r - \varepsilon_p |t|)} \frac{d^3p}{\varepsilon_p}. \quad (14.4.9)$$

Из сравнения формул (14.3.3) и (14.3.5) следует

$$S_{\alpha\beta}(x) = \sum_{p, \mu} \frac{1}{2V\varepsilon_p} u_{\alpha}^{\mu}(p) \overline{u_{\beta}^{\mu}(p)} e^{i(p^r - \varepsilon_p |t|)}. \quad (14.4.10)$$

Применив к уравнению (14.4.8) оператор $i\hat{p} + m$ и учитывая, что, согласно (6.5.2),

$$(\square - m^2) \Delta_c(x) = i\delta(x),$$

получим

$$(i\hat{p} + m) S_c(x) = -i\delta(x), \quad (14.4.11)$$

т. е. $S_c(x)$ является функцией Грина уравнений Дирака для свободного электрона. Таким же свойством обладает функция $S_{\alpha\beta}(x, x')$ для уравнений Дирака при наличии постоянного внешнего электромагнитного поля.

Используя интегральное представление функции $\Delta_c(x)$,

$$\Delta_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_C \frac{e^{i p x}}{p^2 + m^2} d^4 p,$$

можно найти аналогичное представление функции $S_c(x)$:

$$S_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C S_c(p) e^{i p x} d^4 p, \quad (14.4.12)$$

где

$$S_c(p) = i \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}, \quad (14.4.13)$$

и интегрирование по p_0 совершается вдоль контура C , изображенного на рис. 6.3. Контур интегрирования можно совместить с вещественной осью, добавив $-i\eta$ в знаменателе $S_c(p)$, где η — бесконечно малая положительная величина; такое добавление эквивалентно замене

$$m \rightarrow m - i0.$$

Учитывая это, мы будем записывать формулу (14.4.12) также в виде

$$S_c(p) = \frac{1}{i} \frac{1}{i\hat{p} + m - i0}. \quad (14.4.14)$$

Эта формула будет играть в дальнейшем особенно важную роль.

Используя свойства операторов поглощения и испускания частиц, рассмотренные в § 14.2, легко убедиться, что среднее значение любого N -произведения операторов полей в состоянии вакуума равно нулю:

$$\langle 0 | N(\Phi_1 \Phi_2 \dots) | 0 \rangle = 0. \quad (14.4.15)$$

Отсюда следует, что

$$\langle 0 | T(\Phi_1 \Phi_2) | 0 \rangle = \Phi_1^a \Phi_2^a, \quad (14.4.16)$$

т. е. среднее значение хронологического произведения двух операторов полей равно связи между этими операторами.

Покажем в заключение этого раздела, что оператор плотности электрического тока, который мы определили как

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \psi(x) \gamma_\mu^T \bar{\psi}(x)),$$

можно представить в виде нормального произведения

$$j_\mu(x) = ieN(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)). \quad (14.4.17)$$

Будем исходить из соотношений

$$\begin{aligned} N(\bar{\psi}(x+\eta) \gamma_\mu \psi(x)) - T(\bar{\psi}(x+\eta) \gamma_\mu \psi(x)) &= \\ &= N(\bar{\psi}(x+\eta) \gamma_\mu \psi(x) - \bar{\psi}(x+\eta) \gamma_\mu \psi(x)) = \text{Sp}(\gamma_\mu S_c(-\eta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x+\eta)) - T(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x+\eta)) &= \\ &= N(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x+\eta) + \psi(x+\eta) \gamma_\mu^T \bar{\psi}(x)) = \text{Sp}(\gamma_\mu S_c(\eta)), \end{aligned}$$

где η — времениподобный вектор с положительной временной составляющей, $\eta^2 < 0$, $\eta_0 > 0$, который мы устремим далее к нулю, $\eta_\mu \rightarrow 0$. Сложив эти соотношения, получим

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= \frac{ie}{2} (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \psi(x) \gamma_\mu^T \bar{\psi}(x)) = \\ &= ieN(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)) - \frac{ie}{2} \text{Sp}\{\gamma_\mu (S_c(-\eta) + S_c(\eta))\}_{\eta_\mu \rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что последнее слагаемое обращается в нуль. Действительно, согласно (14.4.8)

$$\text{Sp}\{\gamma_\mu (S_c(-\eta) + S_c(\eta))\} = 4 \cdot \frac{\partial}{\partial \eta_\mu} \{\Delta_c(-\eta) - \Delta_c(\eta)\}.$$

Подстановка сюда вместо $\Delta_c(\eta)$ интегрального представления (14.4.9) дает

$$\text{Sp}\{\gamma_\mu (S_c(\eta) + S_c(-\eta))\} = \frac{4}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \eta_\mu} \int e^{i\eta p} \frac{\cos(\eta_0 \sqrt{p^2 + m^2})}{\sqrt{p^2 + m^2}} d^3 p,$$

откуда

$$\lim_{\eta_\mu \rightarrow 0} \text{Sp}\{\gamma_\mu (S_c(\eta) + S_c(-\eta))\} = 0.$$

14.5. Связь спина со статистикой. В предыдущих разделах мы установили условие квантования электронного поля и показали, что антикоммутаторы операторов этого поля представляют собой c -числа, обращающиеся в нуль, если интервал, разделяющий точки, в которых рассматриваются операторы полей, является пространственноподобным. В отличие от элек-

тронного поля, для электромагнитного поля не антикоммутаторы, а коммутаторы операторов полей представляют собой c -числа, также обращающиеся в нуль, если интервал между точками определения операторов является пространственноподобным. Такое различие в условиях квантования электронного и электромагнитного полей связано с тем, что электроны, обладающие спином $1/2$, представляют собой фермионы, т. е. частицы, подчиняющиеся статистике Ферми — Дирака, а фотоны, обладающие спином 1 , являются бозонами, т. е. частицами, подчиняющимися статистике Бозе — Эйнштейна. (Принадлежность к той или иной статистике означает, что, если исходить из рассмотрения индивидуальных состояний частицы, то в каждом индивидуальном состоянии может находиться произвольное число бозонов и не больше одного фермиона.) Мы покажем теперь, что в этом проявляется общая связь между спином и статистикой, а именно что любые частицы с целым спином должны подчиняться статистике Бозе — Эйнштейна, а любые частицы с полуцелым спином — статистике Ферми — Дирака.

Чтобы доказать эту фундаментальную теорему (она называется *теоремой Паули* [23]), будем рассматривать волновые функции $\psi_\alpha(x)$ произвольных полей, так же как и в случаях электромагнитного и электронного полей, не только как функции координат и времени, но и как операторы, действующие в пространстве чисел частиц, связанных с полем. Обобщая результаты, полученные для электромагнитного и электронного полей, мы будем предполагать, что либо коммутаторы $[\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(x')]_- = G_{\alpha\beta}(x-x')$ операторов полей $\psi_\alpha(x)$ и $\psi_\beta^\dagger(x')$ ($\psi_\beta^\dagger(x')$ обозначает оператор, сопряженный с $\psi_\beta(x')$), либо антикоммутаторы $[\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(x')]_+ = G_{\alpha\beta}^\pm(x-x')$ этих операторов представляют собой некоторые c -числа, которые обращаются в нуль, если точки, в которых действуют операторы, разделены пространственноподобными интервалами.

Последнее условие можно интерпретировать как следствие принципа причинности. В самом деле, рассмотрим какую-либо физическую величину (например, плотность энергии или плотность тока) в двух точках x и x' , разделенных пространственноподобным интервалом $(x-x')^2 = (r-r')^2 - (t-t')^2 > 0$. Тогда операторы $f(x)$ и $f(x')$, соответствующие этой величине в точках x и x' , должны коммутировать между собой:

$$[f(x), f(x')]_- = 0, \quad (x-x')^2 > 0.$$

Действительно, за время $|t-t'|$ возмущение, распространяющееся из первой точки со скоростью света, пройдет расстояние $|t-t'|$, которое меньше $|r-r'|$, и вторая точка не сможет испытать воздействия со стороны первой точки. Поэтому измерения в двух точках, разделенных пространственноподобным интервалом, не могут влиять друг на друга, и, следовательно, операторы, соответствующие величинам $f(x)$ и $f(x')$ при $(x-x')^2 > 0$, должны коммутировать между собой.

С другой стороны, операторы, соответствующие различным физическим величинам, строятся с помощью операторов поля. Поэтому, если операторы поля сами по себе имеют непосредственный физический смысл (такая ситуация имеет место, например, для электромагнитного поля), то для них должны при $(x-x')^2 > 0$ обращаться в нуль коммутаторы. Такие поля мы называем *бозонными*. Но операторы поля могут сами по себе не иметь непосредственного физического смысла. Такая ситуация имеет место, например, для электронного поля, для которого имеют непосредственный физический смысл только величины, квадратичные относительно $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$. Коммутативность этих величин при $(x-x')^2 > 0$ может в принципе

достигаться за счет обращения в нуль либо коммутатора, либо антикоммутатора операторов полей при $(x - x')^2 > 0$. В случае электронного поля осуществляется вторая возможность. Мы будем называть поля, для которых обращается в нуль антикоммутатор операторов полей при $(x - x')^2 > 0$, *фермионными*.

Таким образом, мы дали определения бозонных и фермионных полей и соответственно бозонов и фермионов как частиц, связанных с этими полями. Наша задача заключается теперь в том, чтобы доказать, что спин бозонов должен быть целым, а спин фермионов — полуцелым. Определение спина при этом базируется на свойствах преобразований операторов $\psi_\alpha(x)$ и $\psi_\beta^\dagger(x)$, рассматриваемых как функции координат и времени при преобразованиях Лоренца. Именно, мы будем предполагать, что $\psi_\alpha(x)$ и $\psi_\beta^\dagger(x)$ преобразуются при этих преобразованиях по одному из представлений (j, k) , рассмотренных в § 13. Тогда в случае целого спина, когда сумма чисел j и k представляет собой целое число, величины $\psi_\alpha(x)$ относятся к классам $+1$ и -1 ; в случае же полуцелого спина, когда сумма чисел j и k представляет собой полуцелое число, величины $\psi_\alpha(x)$ относятся к классам $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$. Так как комплексное сопряжение оставляет величины, принадлежащие классам $+1$ и -1 , в этих же классах и переводит величины класса $+\varepsilon$ в класс $-\varepsilon$ и обратно, то в случае целого спина величины $\psi_\alpha(x)$ и $\psi_\beta^\dagger(x)$ принадлежат классу $+1$, а в случае полуцелого спина классу -1 . Отсюда следует, что независимо от того, каково соответствие между спином и статистикой, та из величин $G_{\alpha\beta}^+(x - x')$ и $G_{\alpha\beta}^-(x - x')$, которая соответствует целому спину, должна быть тензором четного ранга, величина же, соответствующая полуцелому спину, — тензором нечетного ранга.

Переходя теперь к доказательству теоремы Паули, покажем прежде всего, как находить тензоры $G_{\alpha\beta}^\pm(x)$, которые в рассматриваемом нами случае свободных полей, так же как и в рассмотренных ранее случаях электромагнитного и электронного полей, являются не операторами, а обычными функциями. Будем предполагать, что поле $\psi_\alpha(x)$ описывает частицы с одним значением массы m . Тогда, согласно результатам § 6.5, в нашем распоряжении имеется только одна скалярная функция $\Delta_0(x)$, обращающаяся в нуль при $x^2 > 0$,

$$\Delta_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i p r} \frac{\sin \varepsilon_p t}{\varepsilon_p} d^3 p, \quad \varepsilon_p = \sqrt{p^2 + m^2}.$$

Дифференцируя эту функцию по координате x один раз, мы получим вектор, два раза — тензор второго ранга и т. д. Поэтому тензоры $G_{\alpha\beta}^\pm(x)$ имеют следующую структуру:

$$G_{\alpha\beta}^\pm(x) = F_{\alpha\beta}^{(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(x), \quad (14.5.1)$$

где $F_{\alpha\beta}^{(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ — некоторый полином относительно $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ с постоянными коэффициентами, степень которого совпадает с рангом тензора n и который содержит производные только четного или нечетного порядка — четного в случае целого спина и нечетного в случае полуцелого спина.

В частности, при $\alpha = \beta$

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\alpha^\dagger(x')]_\pm = \begin{cases} F_{\alpha\alpha}^{(2n)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(x - x'), & j + k = N, \\ F_{\alpha\alpha}^{(2n+1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(x - x'), & j + k = N + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (14.5.2)$$

где верхняя строчка относится к случаю целого, а нижняя — к случаю полуцелого спина (N — целое число).

Рассмотрим теперь симметричную относительно x и x' комбинацию $[\psi_\alpha(x), \psi_\alpha^\dagger(x')]_\pm + [\psi_\alpha(x'), \psi_\alpha^\dagger(x)]_\pm$. Так как $\Delta_0(x)$ представляет собой четную функцию пространственных координат и нечетную функцию времени

$$\Delta_0(\mathbf{r}, t) = \Delta_0(-\mathbf{r}, t) = -\Delta_0(\mathbf{r}, -t),$$

то эта комбинация должна содержать четное число производных от $\Delta_0(x - x')$ по пространственным координатам и нечетное число производных по времени, т. е. всего нечетное число производных. Это возможно, как видно из (14.5.2), для полуцелого спина и невозможно для целого спина, если только $F_{\alpha\alpha}^{(2n)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ отлично от нуля. Поэтому мы приходим к выводу, что в случае целого спина должно выполняться равенство

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\alpha^\dagger(x')]_\pm + [\psi_\alpha(x'), \psi_\alpha^\dagger(x)]_\pm = 0, \quad j + k = N.$$

Но это равенство не может, очевидно, выполняться, если в него будут входить антикоммутирующие операторы, так как левая часть равенства в этом случае при $x = x'$ существенно положительна.

Итак, мы доказали, что при целом спине перестановочные соотношения для операторов поля должны содержать коммутаторы, т. е. иметь вид

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(x')]_- = F_{\alpha\beta}^{(2n)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta_0(x - x'). \quad (14.5.3)$$

Отсюда, используя результаты квантования электромагнитного поля, можно заключить, что число частиц, связанных с рассматриваемым полем и находящихся в определенном состоянии, может быть произвольным, т. е. частицы с целым спином подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна.

Из приведенных рассуждений нельзя заключить, что при полуцелом спине антикоммутирующий оператор полей должен быть c -числом, т. е. нельзя заключить, что частицы с полуцелым спином должны подчиняться статистике Ферми — Дирака. Формально и в этом случае коммутатор может быть c -числом, т. е. формально можно проводить квантование полей при полуцелом спине согласно статистике Бозе — Эйнштейна. Однако следует иметь в виду, что энергия поля при полуцелом спине не является положительно определенной, а так как энергия частиц должна быть положительно определенной, то отсюда вытекает, что квантование при полуцелом спине должно проводиться, согласно статистике Ферми — Дирака, в сочетании с требованием, чтобы все или почти все состояния с отрицательной частотой (речь идет о состояниях отдельной частицы) были заняты; иначе говоря, должно быть с самого начала введено понятие вакуума поля, в котором заняты все индивидуальные состояния частиц с отрицательной частотой.

Таким образом, при полуцелом спине перестановочные соотношения для операторов свободного поля должны содержать антикоммутирующие операторы, т. е. иметь вид

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(x')]_+ = F_{\alpha\beta}^{(2n+1)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta_0(x - x'), \quad j + k = N + \frac{1}{2}. \quad (14.5.4)$$

§ 15. Основные уравнения квантовой электродинамики

15.1. Система уравнений квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении. До сих пор мы изучали главным образом свойства свободных частиц — фотонов и электронов. Только в §§ 10 и 11 рассматривалось движение электрона в электромагнитном поле, но это поле считалось заданным внешним полем. В этом случае (если внешнее поле не зависит от времени) существуют индивидуальные стационарные состояния электронов (и позитронов), характеризующиеся определенными значениями энергии и некоторых других величин (например, в случае центрального поля — момента и четности).

Теперь мы перейдем к изучению взаимодействия между электронами, позитронами и фотонами. Ясно, что это взаимодействие приведет к тому, что состояния, считавшиеся нами стационарными, в действительности перестанут быть стационарными, так как станут возможными различные переходы между ними, при которых будут изменяться значения энергии, импульса, момента взаимодействующих частиц. Но, кроме того, будут изменяться сами числа частиц, так как благодаря взаимодействию будут испускаться и поглощаться фотоны, образовываться и уничтожаться электронно-позитронные пары.

Несохранение числа частиц подсказывает метод описания взаимодействия между частицами; ясно, что удобнее всего пользоваться понятиями квантовых полей [1] — электромагнитного и электронно-позитронного (для краткости мы будем говорить просто об электронном поле). Это значит, что 4-потенциал электромагнитного поля и волновую функцию электрона следует считать не только функциями координат и времени, но и некоторыми операторами, действующими в пространстве векторов состояния системы взаимодействующих полей.

Наша основная задача заключается теперь в том, чтобы установить уравнения для этих операторов, которые должны, естественно, учитывать взаимодействие между частицами.

Напомним с этой целью предварительно, как описываются состояния физических систем в нерелятивистской квантовой механике.

Как известно, обычно используются для этого два метода. В первом методе вектор состояния, характеризующий систему, предполагается постоянным, а операторы, соответствующие различным физическим величинам, — изменяющимися со временем (в этом случае говорят о *гейзенберговском представлении* квантовой механики).

Во втором методе операторы, соответствующие физическим величинам, предполагаются не зависящими от времени, а вектор состояния — изменяющимся со временем (в этом случае говорят о *шредингеровском представлении* квантовой механики).

Уравнения движения для операторов в гейзенберговском представлении имеют формально такой же вид, как и уравнения классической

механики для соответствующих величин. Поэтому естественно при установлении уравнений для взаимодействующих электронного и электромагнитного полей, т. е. уравнений квантовой электродинамики, исходить из гейзенберговского представления и считать, что эти уравнения формально совпадают с уравнениями Дирака для волновой функции электрона во внешнем электромагнитном поле и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля, создаваемого электронным током, который определяется волновой функцией электрона.

Иными словами, мы примем в качестве основных уравнений квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении для операторов электромагнитного и электронного полей, которые будем обозначать через $A_\mu(x)$, $\Psi(x)$ и $\bar{\Psi}(x)$, уравнения

$$\begin{aligned} \left\{ \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x) \right) + m \right\} \Psi(x) &= 0, \\ \left\{ \gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu(x) \right) - m \right\} \bar{\Psi}(x) &= 0, \\ \square A_\mu(x) &= -j_\mu(x). \end{aligned} \quad (15.1.1)$$

Здесь $\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x) \gamma_4$ и $j_\mu(x)$ — плотность четырехмерного электронного тока, равная, согласно (14.1.7),

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} [\bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x)] = \frac{ie}{2} (\bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) - \bar{\Psi}^c(x) \gamma_\mu \Psi^c(x)), \quad (15.1.2)$$

и $\Psi^c(x)$, $\bar{\Psi}^c(x)$ — зарядово-сопряженные операторы электронного поля:

$$\Psi^c(x) = \mathbf{C} \bar{\Psi}(x), \quad \bar{\Psi}^c(x) = \mathbf{C}^{-1} \Psi(x)$$

(эти операторы удовлетворяют уравнениям (15.1.1), в которых заряд e заменен на $-e$).

Кроме системы дифференциальных уравнений для операторов полей, должны быть сформулированы еще перестановочные соотношения между этими операторами. Так как изменение операторов со временем определяется уравнениями движения, то перестановочные соотношения могут быть заданы только для некоторого определенного начального момента времени.

Задание начальных перестановочных соотношений эквивалентно заданию их в совпадающие моменты времени $t = t'$. Мы примем в качестве таких соотношений условия

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), \frac{\partial}{\partial t'} A_\nu(x')]_{t=t'} &= i\delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [A_\mu(x), A_\nu(x')]_{t=t'} &= 0, \\ \{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^\dagger(x')\}_{t=t'} &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(x')\}_{t=t'} &= \{\Psi_\alpha^\dagger(x), \Psi_\beta^\dagger(x')\}_{t=t'} = 0, \\ [\Psi_\alpha(x), A_\mu(x')]_{t=t'} &= 0, \quad [\bar{\Psi}_\alpha(x), \frac{\partial}{\partial t'} A_\mu(x')]_{t=t'} = 0. \end{aligned} \quad (15.1.3)$$

В случае свободных полей эти соотношения эквивалентны общим соотношениям (5.3.1), (14.3.1) для произвольных моментов времени t и t' . В случае же взаимодействующих полей общие перестановочные соотношения для произвольных значений $t \neq t'$ сформулировать заранее невозможно, так как для этого нужно было бы найти общее решение уравнений движения связанных полей.

Операторы полей действуют на векторы состояния в пространстве чисел частиц. Эти векторы, которые мы будем обозначать через Φ , не зависят в рассматриваемом нами гейзенберговском представлении от времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0, \quad (15.1.4)$$

и, так же как в случае свободных полей, ограничены добавочным условием

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_\mu(x) \right)_+ \Phi = 0, \quad (15.1.5)$$

где $\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_\mu(x) \right)_+$ — часть оператора $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_\mu(x)$, содержащая положительные частоты. Возможность релятивистски инвариантным образом выделить эту часть связана с тем, что оператор $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_\mu(x)$ при учете взаимодействия полей удовлетворяет в силу непрерывности тока

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{j}_\mu(x) = 0 \quad (15.1.6)$$

такому же уравнению

$$\square \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_\mu(x), \quad (15.1.7)$$

как и в случае свободных полей.

15.2. Функция Лагранжа, тензор энергии-импульса и тензор моментов для взаимодействующих квантовых полей. Основные уравнения квантовой электродинамики могут быть получены с помощью вариационного принципа, если в качестве плотности функции Лагранжа взять оператор

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie \mathbf{A}_\mu \right) + m \right] \Psi - \\ &\quad - \frac{1}{2} \bar{\Psi}^c \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ie \mathbf{A}_\mu \right) + m \right] \Psi^c = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \Psi - \\ &\quad - \frac{1}{2} \bar{\Psi}^c \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \Psi^c + \mathbf{j}_\mu \mathbf{A}_\mu \quad (15.2.1) \end{aligned}$$

и при варьировании действия независимыми переменными считать \mathbf{A}_μ , Ψ , $\bar{\Psi}$ (или \mathbf{A}_μ , Ψ^c , $\bar{\Psi}^c$). Замечая, что

$$\bar{\Psi}^c \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ie \mathbf{A}_\mu \right) + m \right] \Psi^c = \Psi \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ie \mathbf{A}_\mu \right) - m \right] \bar{\Psi},$$

мы получим, варьируя и отбрасывая несущественные члены, имеющие вид дивергенций,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{L} &= \frac{1}{2} \delta \mathbf{A}_\mu (\square \mathbf{A}_\mu + \mathbf{j}_\mu) + \frac{1}{2} (\square \mathbf{A}_\mu + \mathbf{j}_\mu) \delta \mathbf{A}_\mu - \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta \bar{\Psi} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie \mathbf{A}_\mu \right) + m \right] \Psi + \frac{1}{2} \Psi \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie \mathbf{A}_\mu \right) + m \right] \delta \bar{\Psi} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta \Psi \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ie \mathbf{A}_\mu \right) - m \right] \bar{\Psi} + \frac{1}{2} \bar{\Psi} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ie \mathbf{A}_\mu \right) - m \right] \delta \Psi, \end{aligned}$$

откуда и следуют уравнения (15.1.1).

Предполагая при варьировании L независимыми переменными Ψ^c и $\bar{\Psi}^c$, а не Ψ и $\bar{\Psi}$, мы получим взамен первых двух уравнений (15.1.1) уравнения для зарядово-сопряженных операторов Ψ^c и $\bar{\Psi}^c$.

Зная плотность функции Лагранжа квантованных полей, можно по общим формулам (§ 13.3) определить тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \right) + \\ + \frac{1}{4} \left(\bar{\Psi} \gamma_\nu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\nu \Psi \right) + \frac{1}{4} \left(\bar{\Psi}^c \gamma_\nu \frac{\partial \Psi^c}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\Psi}^c}{\partial x_\mu} \gamma_\nu \Psi^c \right) \quad (15.2.2)$$

и тензор моментов

$$M_{\mu\nu, \rho} = x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} A_\nu - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho} A_\mu + A_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} - A_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho} \right) + \\ + \frac{1}{16} \bar{\Psi} \{ \gamma_\rho, [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \} \Psi + \frac{1}{16} \bar{\Psi}^c \{ \gamma_\rho, [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \} \Psi^c \quad (15.2.3)$$

для взаимодействующих электромагнитного и электронного полей.

Эти величины представляют собой самосопряженные операторы (в смысле индефинитной метрики, использованной при определении операторов электромагнитного поля) и удовлетворяют уравнениям непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu} = 0, \quad (15.2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} M_{\mu\nu, \rho} = 0.$$

Действительно, в силу уравнений поля (15.1.1)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu} = -j_\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{2} (\bar{\Psi} \gamma_\nu \Psi - \bar{\Psi}^c \gamma_\nu \Psi^c) \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} M_{\mu\nu, \rho} = T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} - j_\mu A_\nu + j_\nu A_\mu + \\ + \frac{1}{16} \frac{\partial}{\partial x_\rho} (\bar{\Psi} \{ \gamma_\rho, [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \} \Psi) + \frac{1}{16} \frac{\partial}{\partial x_\rho} (\bar{\Psi}^c \{ \gamma_\rho, [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \} \Psi^c)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} (\bar{\Psi} \{ \gamma_\rho, [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \} \Psi) = \\ = -2ie A_\rho \bar{\Psi} [\gamma_\rho, [\gamma_\mu, \gamma_\nu]] \Psi + 4 \left(\bar{\Psi} \gamma_\nu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\nu \Psi - \bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\nu} \gamma_\mu \Psi \right).$$

Написав аналогичное выражение для Ψ^c , $\bar{\Psi}^c$, легко убедиться после сравнения с (15.2.2), что

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} (\bar{\Psi} \{ \gamma_\rho, [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \} \Psi) + \frac{\partial}{\partial x_\rho} (\bar{\Psi}^c \{ \gamma_\rho, [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \} \Psi^c) = \\ = 16(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} + j_\mu A_\nu - j_\nu A_\mu).$$

Поэтому, как и утверждалось, $\frac{\partial}{\partial x_\rho} M_{\mu\nu, \rho} = 0$.

Из уравнений непрерывности (15.2.4) вытекают законы сохранения 4-вектора энергии-импульса

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3x = \text{const} \quad (15.2.5)$$

и тензора моментов

$$M_{\mu\nu} = -i \int M_{\mu\nu, 4} d^3x = \text{const} \quad (15.2.6)$$

взаимодействующих полей.

15.3. Уравнения поля в форме коммутаторов. Как известно, гейзенберговские операторы \mathbf{F} в нерелятивистской квантовой механике удовлетворяют уравнению движения

$$\dot{\mathbf{F}} = i [\mathbf{H}, \mathbf{F}], \quad (15.3.1)$$

где \mathbf{H} — гамильтониан системы и $\dot{\mathbf{F}} = \frac{d\mathbf{F}}{dt}$. Аналогичный закон справедлив и в теории квантованных полей. Поскольку при этом мы имеем дело с операторами, действующими в пространстве чисел заполнения и зависящими от координат точки в том же смысле, в каком квантовомеханические гейзенберговские операторы (например, импульс, момент и т. д.) зависят от времени, то возникает обобщение уравнения движения (15.3.1) и на пространственные координаты. Именно, любой оператор \mathbf{F} , являющийся произвольной функцией переменных поля, т. е. произвольной функцией операторов $A_\mu(x)$, $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{F}(x) = i [\mathbf{F}(x), \mathbf{P}_\mu], \quad (15.3.2)$$

где \mathbf{P}_μ — четырехмерный вектор энергии-импульса поля, введенный в предыдущем разделе.

Убедимся сначала в справедливости этих уравнений для самих операторов полей, т. е. покажем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu(x) &= i [A_\mu(x), \mathbf{P}_\nu], \\ \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi_\alpha(x) &= i [\psi_\alpha(x), \mathbf{P}_\nu]. \end{aligned} \quad (15.3.3)$$

Используя определение тензора энергии-импульса и перестановочные соотношения (15.1.3), имеем

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), T_{\nu 4}(x')]_{t=t'} &= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x'_\nu} A_\sigma(x') \left[A_\mu(x), \frac{\partial}{\partial t'} A_\sigma(x') \right] + \right. \\ &+ \left[A_\mu(x), \frac{\partial}{\partial x'_\nu} A_\sigma(x') \right] \frac{\partial}{\partial t'} A_\sigma(x') - \\ &- i \delta_{4\nu} \frac{\partial}{\partial x'_\rho} A_\sigma(x') \left[A_\mu(x), \frac{\partial}{\partial x'_\rho} A_\sigma(x') \right]_{t=t'} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x'_\nu} A_\sigma(x') \delta_{\mu\sigma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i \delta_{\mu\sigma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\nu 4} \frac{\partial}{\partial t'} A_\sigma(x') - \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\nu 4} \delta_{\mu\sigma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\rho 4} \frac{\partial}{\partial x'_\rho} A_\sigma(x') \right)_{t=t'}, \end{aligned}$$

т. е.

$$[A_\mu(x), T_{\nu 4}(x')]_{t=t'} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu(x). \quad (15.3.3')$$

Интегрируя это соотношение по \mathbf{r}' , получим первую из формул (15.3.3).

Вычислим далее $[\Psi_\alpha(x), T_{\mu 4}(x')]_{t=t'}$:

$$\begin{aligned} [\Psi_\alpha(x), T_{\mu 4}(x')]_{t=t'} &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\Psi_\alpha(x), \left(\Psi_\beta^\dagger(x') \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \Psi_\beta(x') - \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \Psi_\beta^\dagger(x') \Psi_\beta(x') \right) \right]_{t=t'} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^\dagger(x')\} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \Psi_\beta(x') - \Psi_\beta^\dagger(x') \left\{ \Psi_\alpha(x), \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \Psi_\beta(x') \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \Psi_\alpha(x), \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \Psi_\beta^\dagger(x') \right\} \Psi_\beta(x') + \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \Psi_\beta^\dagger(x') \{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(x')\} \right)_{t=t'}. \end{aligned}$$

Но

$$\left\{ \Psi_\alpha(x), \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \Psi_\beta(x') \right\}_{t'=t} = 0.$$

Поэтому

$$[\Psi_\alpha(x), T_{\mu 4}(x')]_{t'=t} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \Psi_\alpha(x') - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} (\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^\dagger(x')\} \Psi_\beta(x'))_{t'=t}. \quad (15.3.4)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_4} (\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^\dagger(x')\} \Psi_\beta(x'))_{t'=t} &= \\ &= -\gamma_4 \gamma_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi_\alpha(x), \quad k = 1, 2, 3, \quad (15.3.4') \end{aligned}$$

легко заключить, что интеграл от второго слагаемого в $[\Psi_\alpha(x), T_{\mu 4}(x)]$ по \mathbf{r}' при всех μ равен нулю, и мы приходим ко второй формуле (15.3.3).

Возвратимся теперь к общим соотношениям (15.3.2). Чтобы убедиться в их справедливости, достаточно лишь заметить, что если $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2$, то

$$[\mathbf{F}, \mathbf{P}_\mu] = [\mathbf{F}_1, \mathbf{P}_\mu] \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 [\mathbf{F}_2, \mathbf{P}_\mu],$$

и воспользоваться доказанными соотношениями (15.3.3).

В частности, полагая в (15.3.2) $\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_\mu(x)$ или $\mathbf{F} = \boldsymbol{\psi}(x)$ и раскрывая коммутаторы, мы приходим к уравнениям поля (15.1.1).

Покажем, что оператор полного заряда системы

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{i} \int \mathbf{j}_4(x) d^3x = \frac{e}{2} \int (\boldsymbol{\psi}^\dagger(x) \boldsymbol{\psi}(x) - \boldsymbol{\psi}(x) \boldsymbol{\psi}^\dagger(x)) d^3x$$

коммутирует с каждым из операторов \mathbf{P}_μ . Найдем прежде всего коммутатор $[\mathbf{Q}, \boldsymbol{\psi}(x)]$:

$$[\mathbf{Q}, \boldsymbol{\psi}_\alpha(x)] = \frac{e}{2} \int [(\boldsymbol{\psi}_\beta^\dagger(x') \boldsymbol{\psi}_\beta(x') - \boldsymbol{\psi}_\beta(x') \boldsymbol{\psi}_\beta^\dagger(x')), \boldsymbol{\psi}_\alpha(x)]_{t'=t} d^3x'.$$

Замечая, что

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{C}] = \mathbf{A}\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\} - \{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}\mathbf{B},$$

и используя перестановочные соотношения (15.1.3), найдем

$$[\mathbf{Q}, \boldsymbol{\psi}(x)] = -e\boldsymbol{\psi}(x). \quad (15.3.5)$$

Отсюда

$$[\mathbf{Q}, \boldsymbol{\psi}(x)]^+ = -[\mathbf{Q}, \boldsymbol{\psi}^\dagger(x)] = -e\boldsymbol{\psi}^\dagger(x)$$

и, следовательно,

$$[\mathbf{Q}, \bar{\boldsymbol{\psi}}(x)] = e\bar{\boldsymbol{\psi}}(x). \quad (15.3.6)$$

Из этих формул следует, что \mathbf{Q} коммутирует с любой формой вида $\overline{\Psi}(x)\Gamma\Psi(x)$, где Γ — произвольная матрица, построенная из матриц γ_μ и дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$,

$$[\mathbf{Q}, \overline{\Psi}(x)\Gamma\Psi(x)] = 0. \quad (15.3.7)$$

В частности,

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}, j_\mu(x)] &= 0, \\ [\mathbf{Q}, P_\mu] &= 0. \end{aligned} \quad (15.3.8)$$

Последние соотношения показывают, что имеет место закон сохранения заряда

$$\mathbf{Q} = \text{const.} \quad (15.3.9)$$

15.4. Стационарные состояния системы взаимодействующих полей.

Как и всякая квантовомеханическая система, система взаимодействующих электронного и электромагнитного полей может находиться в состояниях с определенной энергией. Такие состояния называются, как известно, *стационарными*.

Существование коммутирующих интегралов движения — энергии-импульса и заряда системы — позволяет характеризовать стационарные состояния системы взаимодействующих полей не только определенным значением энергии, но и определенными значениями импульса и заряда. Это значит, что векторы стационарных состояний, которые мы будем обозначать в гейзенберговском представлении через Φ_r , где r — совокупность квантовых чисел, определяющих состояние, являются собственными векторами операторов P_μ и \mathbf{Q}

$$\left. \begin{aligned} P_\mu \Phi_r &= p_\mu^{(r)} \Phi_r, \\ \mathbf{Q} \Phi_r &= Q^{(r)} \Phi_r, \end{aligned} \right\} \quad (15.4.1)$$

где $p_\mu^{(r)}$ и $Q^{(r)}$ — значения энергии-импульса и заряда в состоянии r .

Наинижнее энергетическое состояние системы взаимодействующих полей называется *состоянием вакуума*. Мы примем, что в этом состоянии, вектор которого будем обозначать через Φ_0 , энергия-импульс равен нулю,

$$p_\mu^{(0)} = 0,$$

так как это — единственные значения, обеспечивающие релятивистскую инвариантность состояния вакуума.

Электрический заряд вакуума мы также считаем равным нулю:

$$Q^{(0)} = 0.$$

Для возбужденных состояний системы энергия должна быть положительной, $p_0^{(r)} > 0$. Чтобы это свойство было релятивистски инвариантным, очевидно, должно выполняться соотношение $(p^{(r)})^2 < 0$.

Рассмотрим какой-либо гейзенберговский оператор $\mathbf{F}(x)$, являющийся произвольной функцией переменных поля в точке x . Определив метрику пространства векторов состояния (используемая нами метрика является индефинитной, см. § 5.2), мы можем сопоставить этому оператору совокупность величин

$$(\Phi_{r'}, \mathbf{F}(x) \Phi_r) \equiv \langle r' | \mathbf{F}(x) | r \rangle,$$

которые называются матричными элементами оператора $\mathbf{F}(x)$.

Легко убедиться, что зависимость матричных элементов от координат и времени может быть найдена в общем виде. Действительно, из уравнений движения (15.3.2) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \langle r' | F(x) | r \rangle = i(p_\mu^{(r')} - p_\mu^{(r)}) \langle r' | F(x) | r \rangle,$$

где $p_\mu^{(r)}$ — 4-вектор энергии-импульса в состоянии r . Поэтому

$$\langle r' | F(x) | r \rangle = F_{r'r} e^{ix_\mu(p_\mu^{(r')} - p_\mu^{(r)})}, \quad (15.4.2)$$

где величины $F_{r'r}$ уже не зависят от x_μ .

В частности, матричный элемент оператора $F(x)$, связывающий состояние вакуума с состоянием r , имеет вид

$$\langle 0 | F(x) | r \rangle = F_{0r} e^{ix_\mu p_\mu^{(r)}}. \quad (15.4.3)$$

Если $F(x)$ — самосопряженный оператор (в смысле используемой метрики), то

$$\langle r' | F(x) | r \rangle = \langle r | F(x) | r' \rangle^*$$

и, следовательно,

$$F_{r'r'} = F_{r'r}^*.$$

Выясним теперь общие свойства матричных элементов операторов полей. Установим прежде всего физический смысл операторов $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$.

Обозначим через Φ_Q собственный вектор оператора заряда системы Q , принадлежащий значению заряда Q ,

$$Q\Phi_Q = Q\Phi_Q.$$

Поддействуем на это уравнение оператором $\psi(x)$

$$\psi(x) Q\Phi_Q = Q\psi(x) \Phi_Q.$$

Так как, согласно (15.3.5),

$$[\psi(x), Q] = e\psi(x),$$

то

$$Q\psi(x) \Phi_Q = (Q - e)\psi(x) \Phi_Q.$$

Мы видим, что вектор $\psi(x) \Phi_Q$ является собственным вектором оператора Q , принадлежащим значению заряда $Q - e$, т. е. $\psi(x)$ представляет собой оператор уменьшения заряда системы на величину заряда электрона. Поступая аналогичным образом, можно показать, что $\bar{\psi}(x)$ представляет собой оператор увеличения заряда системы на величину заряда электрона.

Так как по своим трансформационным свойствам относительно преобразований Лоренца оператор $\psi(x)$ является биспинором, то биспинорами будут и его матричные элементы $\langle r' | \psi(x) | r \rangle$. Поэтому матричные элементы операторов $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, связывающие состояние вакуума с каким-либо состоянием r , в котором заряд системы равен $Q^{(r)} = e$ (такие состояния называются *однозарядовыми*), можно в соответствии с (15.4.3) представить в виде

$$\langle 0 | \psi(x) | r \rangle = \xi_{r\mu}(p) e^{ipx}, \quad \langle r | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle = \xi_r^* \bar{u}(p) e^{-ipx}, \quad (15.4.4)$$

где $p, (\mathbf{p}, ip_0)$ — 4-вектор энергии-импульса системы в состоянии r , $u(p)$ — нормированная биспинорная амплитуда плоской волны и ξ_r — некоторая инвариантная функция квантовых чисел r . Так как при заданном p суще-

ствует четыре линейно независимых биспинора, то $u(p) \equiv u^\mu(qp)$ можно считать собственной функцией операторов $iq\hat{p}$ и $\frac{1}{2}\Sigma p$:

$$(iq\hat{p} + M)u^\mu(qp) = 0, \\ \frac{1}{2}\sum_{|p|} \frac{p}{|p|} u^\mu(qp) = \mu u^\mu(qp),$$

где $M = \sqrt{-p^2}$, $q = \pm 1$, $\mu = \pm \frac{1}{2}$, и нормировать $u(p)$, так же как и в случае свободного электронно-позитронного поля,

$$u^\mu(qp)\bar{u}^{\mu'}(q'p) = 2qM\delta_{qq'}\delta_{\mu\mu'}.$$

Мы видим, что в набор квантовых чисел r , помимо 4-импульса p и заряда $Q^{(r)} = e$, следует включить также квантовые числа q и μ , второе из которых характеризует поляризацию состояния r . Но, кроме p , $Q^{(r)}$, q и μ состояние r может характеризоваться и другими квантовыми числами (мы будем обозначать их через s). Инвариант ξ_r является функцией p^2 , q и s , но не зависит от μ .

Заметим, что для отличных от нуля матричных элементов $\langle 0 | \bar{\psi}(x) | r' \rangle$ и $\langle r' | \psi(x) | 0 \rangle$ состояния r' отличается от состояния r в (15.4.4) только знаком квантовых чисел Q и μ .

Опыт показывает, что однозарядовые состояния не могут иметь энергию, меньшую чем m , где m — масса электрона. Это значит, что 4-импульс p однозарядовых состояний удовлетворяет условию

$$-p^2 \geq m^2.$$

Состояния r , для которых $p^2 = -m^2$, являются состояниями реального свободного электрона. В этом случае число q имеет одно определенное значение $q = 1$ и совокупность квантовых чисел p , $Q^{(r)} = e$, $q = 1$, $\mu = \pm \frac{1}{2}$ является полной.

Однозарядовые состояния, для которых $-p^2 > m^2$, можно наглядно интерпретировать как совокупность одного электрона и некоторого числа фотонов и электронно-позитронных пар. Такая система должна, помимо p , $Q^{(r)} = e$, q и μ , характеризоваться дополнительными квантовыми числами и, в частности, может иметь произвольную четность.

Матричный элемент $\langle 0 | \psi(x) | r \rangle$ при $p^2 = -m^2$ мы будем записывать в виде

$$\langle 0 | \psi(x) | r \rangle = Z_1^{1/2} u(p) e^{ipx}, \quad p^2 = -m^2, \quad (15.4.5)$$

где $Z_1^{1/2}$ — значение ξ_r при $p^2 = -m^2$. Этот матричный элемент отличается от матричного элемента оператора $\psi(x)$ свободного электронно-позитронного поля множителем $Z_1^{1/2}$ (и, кроме того, значением массы электрона, см. § 22.1).

Рассмотрим теперь матричные элементы оператора электромагнитного поля $A_\mu(x)$.

Так как оператор $A_\mu(x)$ коммутирует с оператором заряда системы Q :

$$[A_\mu(x), Q] = 0, \quad (15.4.6)$$

то отличными от нуля будут только те матричные элементы $A_\mu(x)$, которые связывают состояния с одинаковым значением заряда.

Матричные элементы оператора $A_\mu(x)$, связывающие состояние вакуума с некоторым беззарядовым состоянием g ($Q^{(g)} = 0$), мы запишем в виде,

аналогичном (15.4.4),

$$\begin{aligned}\langle 0 | \mathbf{A}_\mu(x) | g \rangle &= \eta_g a_\mu(k) e^{ikhx}, \\ \langle g | \mathbf{A}_\mu(x) | 0 \rangle &= \eta_g^* a_\mu(k) e^{-ikhx},\end{aligned}\quad (15.4.7)$$

где $k(k, i\omega)$ — 4-вектор энергии-импульса в состоянии g , $a_\mu(k)$ — амплитуда плоской волны, нормированная так же, как и в случае свободного поля (см. § 5):

$$a_\mu(k) = \frac{e_\mu^\lambda}{\sqrt{2\omega V}},$$

и η_g — некоторая инвариантная функция квантовых чисел g ; в частности, величина η_g зависит от инвариантов k^2 и ke^λ и, следовательно, имеет различные значения для поперечных и продольной поляризацій.

Легко убедиться, что при $k^2 \neq 0$ все матричные элементы оператора $\mathbf{A}_\mu(x)$ обладают свойством поперечности. Действительно, из уравнения

$$\square \mathbf{A}_\mu(x) = -\mathbf{j}_\mu(x)$$

и соотношения (15.4.2) следует

$$\begin{aligned}k^2 \langle 0 | \mathbf{A}_\mu(x) | g \rangle &= \langle 0 | \mathbf{j}_\mu(x) | g \rangle, \\ k^2 \langle g | \mathbf{A}_\mu(x) | 0 \rangle &= \langle g | \mathbf{j}_\mu(x) | 0 \rangle,\end{aligned}$$

а так как оператор тока $\mathbf{j}_\mu(x)$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{j}_\mu(x) = 0,$$

то

$$k_\mu \langle 0 | \mathbf{j}_\mu(x) | g \rangle = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}k_\mu \langle 0 | \mathbf{A}_\mu(x) | g \rangle &= 0, \\ k_\mu \langle g | \mathbf{A}_\mu(x) | 0 \rangle &= 0,\end{aligned}\quad (15.4.8)$$

если только $k^2 \neq 0$.

Состояния с $k^2 = 0$ мы отождествляем с состояниями свободного фотона. При $k^2 < 0$ состояние g можно интерпретировать как совокупность некоторого числа фотонов и электронно-позитронных пар, суммарный спин которых равен 1 и четность равна -1 .

Если $k^2 = 0$ и состояние g является физическим (т. е. не содержит продольных и скалярных фотонов), то матричный элемент $\langle 0 | \mathbf{A}_\mu(x) | g \rangle$ можно записать в виде

$$\langle 0 | \mathbf{A}_\mu(x) | g \rangle = Z^{1/2} a_\mu(k) e^{ikhx}, \quad k^2 = 0, \quad (15.4.9)$$

где $Z^{1/2}$ — значение η_g при $k^2 = 0$ и $k_\mu a_\mu = 0$. Этот матричный элемент отличается от матричного элемента оператора свободного электромагнитного поля $\mathbf{A}_\mu(x)$ множителем $Z^{1/2}$.

Подчеркнем, что в то время как для свободных полей матричные элементы операторов $\Psi(x)$, $\bar{\Psi}(x)$ и $\mathbf{A}_\mu(x)$ связывают вакуум только с одночастичными состояниями, для которых $p^2 = -m^2$ и $k^2 = 0$, матричные элементы операторов $\Psi(x)$, $\bar{\Psi}(x)$ и $\mathbf{A}_\mu(x)$ связывают вакуум с самыми различными состояниями, для которых соответственно $p^2 \leq -m^2$, $Q = \pm e$ и $k^2 \leq 0$, $Q = 0$.

15.5. Представление взаимодействия. Совершив над гейзенберговскими операторами \mathbf{F} каноническое преобразование

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^{(s)} = e^{-i\mathbf{H}t} \mathbf{F} e^{i\mathbf{H}t}, \quad (15.5.1)$$

мы перейдем к шредингеровскому представлению квантовой механики, в котором операторы не изменяются с течением времени:

$$\dot{\mathbf{F}}^{(s)} = 0$$

(это соотношение немедленно вытекает из (15.5.1)).

Преобразованию операторов (15.5.1) соответствует преобразование вектора состояния

$$\Phi \rightarrow \Psi^{(s)}(t) = e^{-i\mathbf{H}t} \Phi, \quad (15.5.2)$$

где Φ — не зависящий от времени вектор состояния в гейзенберговском представлении. Ясно, что вектор состояния в шредингеровском представлении $\Psi^{(s)}(t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(s)}(t) = \mathbf{H}^{(s)} \Psi^{(s)}(t), \quad (15.5.3)$$

где $\mathbf{H}^{(s)}$ — гамильтониан рассматриваемой динамической системы в шредингеровском представлении, совпадающий, согласно (15.5.1), с гамильтонианом в гейзенберговском представлении,

$$\mathbf{H}^{(s)} = \mathbf{H}.$$

Шредингеровским представлением можно пользоваться не только в нерелятивистской квантовой механике, но и в теории квантованных полей. Однако гораздо удобнее пользоваться не шредингеровским и не гейзенберговским, а некоторым промежуточным представлением — так называемым *представлением взаимодействия*, к рассмотрению которого мы теперь и перейдем.

Рассмотрим произвольную квантовомеханическую систему с гамильтонианом $\mathbf{H}^{(s)}$ (в шредингеровском представлении). Разобьем его на два слагаемых $\mathbf{H}_0^{(s)}$ и $\mathbf{V}^{(s)}$:

$$\mathbf{H}^{(s)} = \mathbf{H}_0^{(s)} + \mathbf{V}^{(s)},$$

которые будем условно называть свободным гамильтонианом и гамильтонианом взаимодействия, и произведем каноническое преобразование шредингеровских операторов

$$\mathbf{F}^{(s)} \rightarrow \mathbf{F} = e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} \mathbf{F}^{(s)} e^{-i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} \quad (15.5.4)$$

и векторов состояния

$$\Psi^{(s)}(t) \rightarrow \Phi(t) = e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} \Psi^{(s)}(t) \quad (15.5.5)$$

(предполагается, что в момент времени $t = t_0$ совпадают операторы $\mathbf{F}^{(s)}$ и \mathbf{F} и векторы состояний $\Psi^{(s)}(t)$ и $\Phi(t)$). Будем теперь характеризовать квантовомеханическую систему векторами состояний $\Phi(t)$ и сопоставлять физическим величинам операторы \mathbf{F} . Такой метод квантовомеханического описания и называется представлением взаимодействия.

Выясним, как изменяются со временем операторы и векторы состояний в этом представлении.

Замечая, что $\dot{\mathbf{F}}^{(s)} = 0$, получим из (15.5.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F} = i\mathbf{H}_0^{(s)} e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} \mathbf{F}^{(s)} e^{-i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} - i e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} \mathbf{F}^{(s)} \mathbf{H}_0^{(s)} e^{-i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F} = i [\mathbf{H}_0, \mathbf{F}], \quad (15.5.6)$$

где, согласно (15.5.4),

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0^{(s)}.$$

Таким образом, в представлении взаимодействия операторы изменяются в соответствии с общим квантовомеханическим законом движения для гейзенберговских операторов, в который, однако, входит не полный гамильтониан системы, а лишь одна его часть — свободный гамильтониан.

Определим далее $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t)$. Учитывая (15.5.5), получим

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = -\mathbf{H}_0^{(s)} e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} \Psi^{(s)}(t) + e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} (\mathbf{H}_0^{(s)} + \mathbf{V}^{(s)}) \Psi(t),$$

а так как

$$\Psi^{(s)}(t) = e^{-i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} \Phi(t),$$

то

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = \mathbf{H}_I(t) \Phi(t), \quad (15.5.7)$$

где

$$\mathbf{H}_I(t) = e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} \mathbf{V}^{(s)} e^{-i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)}.$$

Таким образом, вектор состояния в представлении взаимодействия удовлетворяет уравнению Шредингера с гамильтонианом $\mathbf{H}_I(t)$.

Итак, в представлении взаимодействия изменяются как операторы, так и векторы состояний, причем в закон изменения операторов входит одна часть, а в уравнение Шредингера — другая часть исходного гамильтониана системы.

Полагая в (15.5.5)

$$\Psi^{(s)}(t) = e^{-i\mathbf{H}^{(s)}(t-t_0)} \Phi,$$

мы свяжем вектор состояния $\Phi(t)$ в представлении взаимодействия с вектором состояния Φ в гейзенберговском представлении:

$$\Phi(t) = \mathbf{S}(t, t_0) \Phi, \quad (15.5.8)$$

где

$$\mathbf{S}(t, t_0) = e^{i\mathbf{H}_0^{(s)}(t-t_0)} e^{-i\mathbf{H}^{(s)}(t-t_0)}$$

(предполагается, что вектор состояния $\Phi(t)$ совпадает с Φ в момент времени $t = t_0$).

Так как $\Phi = \text{const}$, то оператор $\mathbf{S}(t, t_0)$ удовлетворяет такому же уравнению, как и $\Phi(t)$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S}(t, t_0) = \mathbf{H}_I(t) \mathbf{S}(t, t_0), \quad \mathbf{S}(t_0, t_0) = 1. \quad (15.5.9)$$

Этот же оператор (мы будем называть его *оператором преобразования*) связывает операторы, соответствующие различным физическим величинам, в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия. Действительно, подставляя в (15.5.4)

$$\mathbf{F}^{(s)} = e^{-i\mathbf{H}^{(s)}(t-t_0)} \mathbf{F} e^{i\mathbf{H}^{(s)}(t-t_0)},$$

получим

$$F = S(t, t_0) F S^{-1}(t, t_0). \quad (15.5.10)$$

Из определения (15.5.8) оператора $S(t, t_0)$ следует, во-первых, что

$$S(t, t_0) = S(t, t_1) S(t_1, t_0) \quad (15.5.11)$$

и, во-вторых, что оператор $S(t, t_0)$ является унитарным

$$S(t, t_0) S^+(t, t_0) = I,$$

если только операторы $H^{(s)}$ и $H_0^{(s)}$ эрмитовы.

Отсюда и из (15.5.9) в свою очередь следует, что

$$H_I(t) = i \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} S^+(t, t_0)$$

и

$$H_I^\dagger(t) = H_I(t).$$

Используя это выражение для $H_I(t)$ и соотношение (15.5.10), легко убедиться, что

$$\frac{\partial F}{\partial t} = S(t, t_0) \frac{\partial F}{\partial t} S^{-1}(t, t_0) + i [F, H_I(t)]. \quad (15.5.12)$$

Заметим, наконец, что при любом выборе момента времени t_1

$$\Phi(t) = S(t, t_1) \Phi(t_1). \quad (15.5.13)$$

15.6. Представление взаимодействия в квантовой электродинамике.

В квантовой электродинамике использование представления взаимодействия имеет особые преимущества [2]. Действительно, разбив гамильтониан системы взаимодействующих полей на два слагаемых — гамильтониан свободных полей и гамильтониан взаимодействия, мы получим, в соответствии с законом изменения операторов в представлении взаимодействия, для операторов полей уравнения, совпадающие с уравнениями для операторов свободных полей. Это значит, что в представлении взаимодействия можно считать известным явный вид операторов полей, а также перестановочные соотношения между ними в любой момент времени.

Напомним в этой связи, что исходные уравнения квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении, — формально наиболее близком к классической теории, — представляют собой сложную систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для операторных функций с известными только в начальный момент времени перестановочными соотношениями.

Исключив взаимодействие между полями из уравнений движения для операторов полей, мы переносим его из этих уравнений в уравнение Шредингера для вектора состояния в представлении взаимодействия.

Для получения основных уравнений квантовой электродинамики в представлении взаимодействия воспользуемся формулой (15.2.2) для оператора плотности энергии $-T_{44}$ в гейзенберговском представлении. Выражая в этой формуле временные производные от операторов электроно-позитронного поля через их пространственные производные и вспоминая определение плотности тока (15.1.2), представим $-T_{44}$ в виде

$$-T_{44} = -T_{44}^0 - T'_{44},$$

где

$$\begin{aligned} T_{44}^0 = & \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \mathbf{A}_\sigma}{\partial x_4} \frac{\partial \mathbf{A}_\sigma}{\partial x_4} - \frac{\partial \mathbf{A}_\sigma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \mathbf{A}_\sigma}{\partial x_\lambda} \right) - \frac{1}{4} \bar{\Psi} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r} + m \right) \Psi + \\ & + \frac{1}{4} \bar{\Psi} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r} - m \right) \Psi - \frac{1}{4} \bar{\Psi}^c \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r} + m \right) \Psi^c + \frac{1}{4} \bar{\Psi}^c \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r} - m \right) \Psi^c, \\ & T'_{44} = j_\mu \mathbf{A}_\mu. \end{aligned}$$

Гамильтониан системы полей \mathbf{H} представляет собой пространственный интеграл от $-T_{44}$

$$\mathbf{H} = - \int T_{44} d^3x = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_I,$$

где

$$\mathbf{H}_0 = - \int T_{44}^0 d^3x, \quad \mathbf{H}_I = - \int T'_{44} d^3x = - \int j_\mu \mathbf{A}_\mu d^3x.$$

Перейдем теперь к представлению взаимодействия, рассматривая \mathbf{H}_0 как гамильтониан свободных полей, а \mathbf{H}_I — как гамильтониан взаимодействия полей в гейзенберговском представлении.

Операторы полей в представлении взаимодействия $\mathbf{A}_\mu(x)$ и $\psi(x)$ связаны, согласно (15.5.10), с операторами полей $\mathbf{A}_\mu(x)$ и $\psi(x)$ в гейзенберговском представлении соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu(x) &= \mathbf{S}(t, t_0) \mathbf{A}_\mu(x) \mathbf{S}^{-1}(t, t_0), \\ \psi(x) &= \mathbf{S}(t, t_0) \psi(x) \mathbf{S}^{-1}(t, t_0), \end{aligned} \quad (15.6.1)$$

где $\mathbf{S}(t, t_0)$ — оператор преобразования, удовлетворяющий уравнению

$$i \frac{\partial \mathbf{S}(t, t_0)}{\partial t} = \mathbf{H}_I(t) \mathbf{S}(t, t_0)$$

и $\mathbf{H}_I(t)$ — гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия:

$$\mathbf{H}_I(t) = \mathbf{S}(t, t_0) \mathbf{H}_I \mathbf{S}^{-1}(t, t_0).$$

Последнее выражение можно, очевидно, переписать в виде

$$\mathbf{H}_I(t) = - \int j_\mu(x) \mathbf{A}_\mu(x) d^3x, \quad (15.6.2)$$

где $j_\mu(x)$ — оператор плотности тока в представлении взаимодействия, выражающийся через $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ так же, как $j_\mu(x)$ выражается через $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$:

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= \mathbf{S}(t, t_0) j_\mu(x) \mathbf{S}^{-1}(t, t_0) = \\ &= \frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] = \frac{ie}{2} (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \bar{\psi}^c(x) \gamma_\mu \psi^c(x)). \end{aligned}$$

Мы видим, что гамильтониан взаимодействия $\mathbf{H}_I(t)$ в представлении взаимодействия равен взятому с обратным знаком объемному интегралу от плотности функции Лагранжа $L_I(x) = j_\mu(x) \mathbf{A}_\mu(x)$, описывающей взаимодействие между полями:

$$\mathbf{H}_I(t) = - \int L_I(x) d^3x.$$

Используя (15.6.1), легко убедиться, что гамильтониан свободных полей в представлении взаимодействия \mathbf{H}_0 выражается через $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$,

$A_\mu(x)$ так же, как оператор H_0 выражается через $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$:

$$H_0 = - \int T_{44}^0 d^3x,$$

$$T_{44}^0 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_4} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_4} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \right) - \frac{1}{4} \bar{\psi} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r} + m \right) \psi + \\ + \frac{1}{4} \bar{\psi} \left(\gamma \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial r} - m \right) \psi - \frac{1}{4} \bar{\psi}^c \left(\gamma \frac{\partial}{\partial r} + m \right) \psi^c + \frac{1}{4} \bar{\psi}^c \left(\gamma \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial r} - m \right) \psi^c.$$

Имея выражение для H_0 и используя формулу (15.5.6), можно установить, как изменяются операторы полей со временем в представлении взаимодействия. Повторяя выкладки § 15.3 и учитывая при этом, что операторы полей в представлении взаимодействия удовлетворяют в совпадающие моменты времени таким же перестановочным соотношениям, как и операторы в гейзенберговском представлении, мы получим, как и следовало ожидать, уравнения, совпадающие с уравнениями для операторов свободных полей в гейзенберговском представлении

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi(x) &= 0, \\ \left(\gamma_\mu^T \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \bar{\psi}(x) &= 0, \\ \square A_\mu(x) &= 0. \end{aligned} \quad (15.6.3)$$

Покажем теперь, что перестановочные соотношения для операторов полей в представлении взаимодействия совпадают с перестановочными соотношениями для операторов свободных полей.

Как уже указывалось выше, перестановочные соотношения для операторов полей в представлении взаимодействия в совпадающие моменты времени имеют такой же вид, как и соответствующие соотношения в гейзенберговском представлении. Поэтому, чтобы получить общие перестановочные соотношения в представлении взаимодействия (в несовпадающие моменты времени), нужно иметь формулы, определяющие развитие операторов полей в представлении взаимодействия со временем. Такие формулы легко вывести, учитывая, что операторы полей в представлении взаимодействий удовлетворяют уравнениям для операторов свободных полей.

Рассмотрим сперва оператор $A_\mu(x)$. Этот оператор, удовлетворяющий уравнению (15.6.3), однозначно определяется в любой момент времени в любой точке пространства заданием $A_\mu(x)$ и $\frac{\partial}{\partial t} A_\mu(x)$ на произвольной гиперплоскости $t = t_0$:

$$A_\mu(x) = \int_{t'=t_0} \left(D_0(x-x') \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial t'} - A_\mu(x') \frac{\partial D_0(x-x')}{\partial t'} \right) d^3x'. \quad (15.6.4)$$

Чтобы убедиться в справедливости этой формулы, достаточно вспомнить, что, согласно (5.3.6),

$$D_0(\mathbf{r}, 0) = \frac{\partial^2 D_0(x)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial D_0(x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \delta(\mathbf{r}).$$

Аналогичным образом решение уравнения (15.6.3), для $\psi(x)$ однозначно определяется заданием $\psi(x)$ на гиперплоскости $t = t_0$

$$\psi(x) = -i \int_{t'=t_0} S(x-x') \gamma_4 \psi(x') d^3x'. \quad (15.6.5)$$

Эта формула немедленно вытекает из того, что, согласно (14.3.6),

$$S(\mathbf{r}, 0) = i\gamma_4 \delta(\mathbf{r}).$$

Выведем теперь общие перестановочные соотношения для операторов полей в представлении взаимодействия, исходя из перестановочных соотношений для этих операторов в один и тот же момент времени.

Используя (15.6.4), имеем

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), A_\nu(x')] = & \int_{t''=t} D_0(x' - x'') \left[A_\mu(x), \frac{\partial A_\nu(x'')}{\partial t''} \right] d^3x'' - \\ & - \int_{t''=t} [A_\mu(x), A_\nu(x'')] \frac{\partial D_0(x' - x'')}{\partial t''} d^3x''. \end{aligned}$$

Подставляя сюда вместо коммутаторов, входящих под знаком интеграла, выражения (15.1.3), получим

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -i\delta_{\mu\nu} D_0(x - x'). \quad (15.6.6)$$

Вычислим далее антикоммутатор $\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}$. Используя (15.6.5) и (15.1.3), имеем

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(x')\} = & -i \int_{t''=t'} S_{\alpha\rho}(x - x'') (\gamma_4)_{\rho\lambda} \{\psi_\lambda(x''), \psi_\beta^\dagger(x')\} d^3x'' = \\ & = -i S_{\alpha\rho}(x - x') (\gamma_4)_{\rho\beta}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = -i S_{\alpha\beta}(x - x'). \quad (15.6.7)$$

Используя эти соотношения и определение 4-вектора плотности тока $j_\mu(x)$, легко показать, что

$$[j_\mu(x), j_\nu(x')] = ie^2 (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu S(x - x') \gamma_\nu \psi(x') - \bar{\psi}(x') \gamma_\nu S(x' - x) \gamma_\mu \psi(x)).$$

Отсюда, в частности, вытекает важное соотношение *)

$$[j_4(x), j_\nu(x')]_{t=t'} = 0. \quad (15.6.8)$$

Нам остается вывести добавочное условие для вектора состояния в представлении взаимодействия.

В гейзенберговском представлении это условие имеет вид

$$\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right)_+ \Phi = 0,$$

а так как вектор состояния $\Phi(t)$ в представлении взаимодействия связан с вектором состояния Φ в гейзенберговском представлении соотношением

$$\Phi(t) = S(t, t_0) \Phi,$$

*) Заметим, что при вычислении коммутаторов токов возникает неоднозначность, связанная с тем, что эти выражения содержат произведения четырех операторов поля. Если аргументы всех четырех операторов считать первоначально разными, то при переходе к пределу попарно равных аргументов получится результат, отличающийся от (15.6.8) [3], а именно, в правую часть (15.6.8) будут входить члены, пропорциональные $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta(x - x')$. Однако такие члены не будут иметь значения в тех случаях, когда мы будем пользоваться соотношением (15.6.8) (см. § 16.5).

то добавочное условие можно записать в виде

$$\mathbf{S}(t', t_0) \left(\frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right)_+ \mathbf{S}^{-1}(t', t_0) \Phi(t') = 0, \quad (15.6.9)$$

где t' произвольно.

Найдем входящий сюда оператор $\mathbf{S}(t', t_0) \left(\frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right) \mathbf{S}^{-1}(t', t_0)$. Заметим с этой целью, что

$$\square \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0.$$

Поэтому $\frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu}$ можно записать, согласно (16.6.4), в виде

$$\frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x')}{\partial x'_\mu} \frac{\partial D_0(x-x')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x')}{\partial x'_\mu} D_0(x-x') \right) d^3x' \quad (15.6.10)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x')}{\partial x_\mu} \right)_+ = \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x')}{\partial x'_\mu} \frac{\partial D_+(x-x')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x')}{\partial x'_\mu} D_+(x-x') \right) d^3x',$$

где функция $D_+(x)$ определяется формулой (6.1.3). Отсюда следует, что интересующий нас оператор можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t', t_0) \left(\frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right)_+ \mathbf{S}^{-1}(t', t_0) &= \\ &= \int \left(\mathbf{S}(t', t_0) \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x')}{\partial x'_\mu} \mathbf{S}^{-1}(t', t_0) \frac{\partial D_+(x-x')}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{S}(t', t_0) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x')}{\partial x'_\mu} \mathbf{S}^{-1}(t', t_0) D_+(x-x') \right) d^3x'. \end{aligned}$$

Определим $\mathbf{S}(t, t_0) \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial t} \mathbf{S}^{-1}(t, t_0)$. Согласно (15.5.12)

$$\mathbf{S}(t, t_0) \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial t} \mathbf{S}^{-1}(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial t} - i [\mathbf{A}_\mu(x), \mathbf{H}_I(t)].$$

Но операторы электромагнитного поля в совпадающие моменты времени коммутируют, и поэтому второе слагаемое обращается в нуль,

$$\mathbf{S}(t, t_0) \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial t} \mathbf{S}^{-1}(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial t}.$$

Определим далее $\mathbf{S}(t, t_0) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} \mathbf{S}^{-1}(t, t_0)$. Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}_0(x)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}_k(x)}{\partial x_k} = \boldsymbol{\rho}(x) + \Delta \mathbf{A}_0(x) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}_k(x)}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\boldsymbol{\rho}(x)$ — оператор плотности заряда в гейзенберговском представлении, имеем

$$\mathbf{S}(t, t_0) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} \mathbf{S}^{-1}(t, t_0) = \boldsymbol{\rho}(x) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu},$$

где $\boldsymbol{\rho}(x)$ — оператор плотности заряда в представлении взаимодействия. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t', t_0) \left(\frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right)_+ \mathbf{S}^{-1}(t', t_0) &= \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x')}{\partial x'_\mu} \frac{\partial D_+(x-x')}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x')}{\partial x'_\mu} D_+(x-x') + \boldsymbol{\rho}(x') D_+(x-x') \right) d^3x'. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых дают, очевидно, $\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)_+$, и, следовательно, дополнительное условие (15.6.9), окончательно приобретает вид

$$\left(\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)_+\right) + \int D_+(x-x') \rho(x') d^3x' \Phi(t') = 0. \quad (15.6.11)$$

Подчеркнем, что времена t и t' здесь независимы и могут быть выбраны произвольно.

Используя формулу (15.6.10) и перестановочные соотношения (15.1.3) для гейзенберговских операторов в один и тот же момент времени, легко убедиться, что для произвольных моментов времени t и t' справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}, \mathbf{A}_\nu(x')\right] &= -i \frac{\partial D_0(x-x')}{\partial x_\nu}, \\ \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}, \Psi(x')\right] &= -e D_0(x-x') \Psi(x'), \\ \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}, \bar{\Psi}(x')\right] &= e D_0(x-x') \bar{\Psi}(x'). \end{aligned} \quad (15.6.12)$$

Вычислим в заключение этого раздела коммутатор $\left[\frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu}, \mathbf{S}(t, t_0)\right]$, знание которого нам будет в дальнейшем необходимо. Вводя обозначение $\chi(x) = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}$, имеем, согласно (15.5.9),

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} [\chi(x'), \mathbf{S}(t, t_0)] &= [\chi(x'), H_I(t) \mathbf{S}(t, t_0)] = \\ &= [\chi(x'), H_I(t)] \mathbf{S}(t, t_0) + H_I(t) [\chi(x'), \mathbf{S}(t, t_0)], \end{aligned}$$

где, как следует из (15.6.6) и (15.6.12),

$$[\chi(x'), H_I(t)] = -i \int j_\mu(x) \frac{\partial D_0(x'-x)}{\partial x_\mu} d^3x = i \frac{\partial}{\partial t} \int \rho(x) D_0(x-x') d^3x.$$

Представив интересующий нас коммутатор в виде

$$[\chi(x'), \mathbf{S}(t, t_0)] = \mathbf{R}(t, x') \mathbf{S}(t, t_0) - \mathbf{S}(t, t_0) \mathbf{R}(t_0, x'),$$

получим для $\mathbf{R}(t, x')$ уравнение

$$i \frac{\partial \mathbf{R}(t, x')}{\partial t} = [H_I(t), \mathbf{R}(t, x')] + i \frac{\partial}{\partial t} \int \rho(x) D_0(x-x') d^3x.$$

Учитывая, что, согласно (15.6.8), оператор плотности заряда коммутирует с операторами всех компонент плотности тока в один и тот же момент времени, легко заключить, что решение уравнения для $\mathbf{R}(t, x')$ имеет вид

$$\mathbf{R}(t, x') = - \int \rho(x) D_0(x'-x) d^3x.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu}, \mathbf{S}(t, t_0)\right] &= \\ &= \mathbf{S}(t, t_0) \int_{t=t_0} \rho(x) D_0(x'-x) d^3x - \int \rho(x) D_0(x'-x) d^3x \mathbf{S}(t, t_0). \end{aligned} \quad (15.6.13)$$

§ 16. Матрица рассеяния

16.1. Проблема рассеяния частиц в квантовой электродинамике. Установив основные уравнения квантовой электродинамики, мы можем перейти теперь к постановке основных ее задач. Такими задачами являются задача о спектрах связанных состояний (например, о спектре атома водорода или позитрония) и задача о рассеянии частиц. (Последняя включает в себя исследование как упругого рассеяния, так и процессов превращения частиц.) Мы начнем с исследования проблемы рассеяния, с которой тесно связана также проблема нахождения энергетических уровней электродинамических систем.

Напомним прежде всего, как ставится задача о рассеянии частиц в нерелятивистской квантовой механике. Как известно, при этом предполагается, что при $t = -\infty$ частицы являются свободными. Далее частицы взаимодействуют между собой и при $t = \infty$ расходятся и снова становятся свободными. Задача заключается в том, чтобы, задав вектор состояния свободных частиц при $t = -\infty$, найти вектор состояния системы частиц при $t = \infty$. Разложив затем этот вектор состояния по векторам состояний свободных частиц, мы найдем амплитуды различных процессов рассеяния.

Такая постановка вопроса соответствует разделению гамильтониана системы на гамильтониан свободных частиц H_0 и гамильтониан их взаимодействия H_I ,

$$H = H_0 + H_I,$$

и предположению, что при $t = \pm \infty$ гамильтониан взаимодействия обращается в нуль:

$$H_I(\pm \infty) = 0,$$

и что начальный и конечный векторы состояний Φ_i и Φ_f являются собственными векторами гамильтониана свободных частиц:

$$\begin{aligned} H_0 \Phi_i &= E_i \Phi_i, \\ H_0 \Phi_f &= E_f \Phi_f, \end{aligned}$$

где E_i и E_f — значения энергии системы частиц в начальном и конечном состояниях. Условие $H_I(\pm \infty) = 0$ оправдывается тем, что при $t = \pm \infty$ частицы находятся далеко друг от друга и поэтому не взаимодействуют между собой.

Ситуация, однако, осложняется, когда мы пытаемся перенести эту постановку задачи о рассеянии частиц в квантовую электродинамику. Действительно, как бы мы ни удаляли друг от друга сталкивающиеся частицы, мы не можем считать, что гамильтониан взаимодействия H_I — в данном случае это гамильтониан взаимодействия между электронным и электромагнитным полями — стремится к нулю, так как всегда имеет место взаимодействие между электронами и электромагнитным полем в состоянии вакуума. Единственная формальная возможность обратить в нуль гамильтониан взаимодействия заключается в том, чтобы одновременно обратить в нуль заряд электрона, играющий роль константы связи между электронным и электромагнитным полями. Но изменяя заряд электрона, мы изменяем также и его массу. Действительно, масса электрона — это энергия наинизшего состояния взаимодействующих полей, обладающего электронным зарядом, и нет никаких оснований считать, что эта величина должна совпадать с массой гипотетического электрона, не взаимодействующего с электромагнитным полем (такой электрон мы будем называть в дальнейшем «голым» электроном).

Таким образом, предельный переход $H_I \rightarrow 0$ соответствует, строго говоря, переходу от реальных физических частиц к идеальным «голым» частицам, спектр масс которых и другие их свойства отличаются от спектра масс и соответствующих свойств реальных частиц.

Векторы состояний «голых» частиц являются собственными векторами гамильтониана H_0 , что же касается «свободных» реальных частиц, то их векторы состояний не являются собственными векторами этого гамильтониана. Поэтому в рамках изложенной схемы решения задачи о рассеянии частиц мы можем, строго говоря, исследовать только процессы рассеяния «голых», а не реальных частиц.

Тем не менее можно, зная вероятности процессов рассеяния «голых» частиц, непосредственно находить вероятности процессов рассеяния реальных частиц. Это достигается благодаря тому, что имеется полное соответствие между состояниями «голых» и реальных частиц, а следовательно, и между процессами рассеяния тех и других. Действительно, если «выключение» и «включение» взаимодействия между полями производится достаточно медленно, то можно предполагать, что состояния системы полей будут испытывать лишь адиабатическое изменение, не приводящее к возникновению новых и уничтожению старых состояний.

Переходя теперь к исследованию проблемы рассеяния частиц в квантовой электродинамике, мы не будем вначале принимать во внимание различия между «голыми» и реальными частицами, и только позже (в § 22) вернемся к изучению этого вопроса.

Мы будем пользоваться представлением взаимодействия, в котором состояние полей описывается вектором состояния $\Phi(t)$, удовлетворяющим уравнению (15.5.7). Наша задача формулируется следующим образом. Задано состояние полей при $t \rightarrow -\infty$, когда они предполагаются невзаимодействующими; требуется определить возможные состояния полей при $t \rightarrow +\infty$, когда они вновь предполагаются невзаимодействующими.

Как мы видели, формальное решение уравнения (15.5.7) имеет вид

$$\Phi(t) = \mathbf{S}(t, t_0) \Phi(t_0),$$

где $\mathbf{S}(t, t_0)$ — оператор преобразования, удовлетворяющий уравнению (15.5.6). Полагая здесь $t_0 = -\infty$ и $t = +\infty$, найдем интересующую нас связь между векторами начального и конечного состояний системы полей [4]:

$$\Phi(\infty) = \mathbf{S}(\infty, -\infty) \Phi(-\infty). \quad (16.1.1)$$

Входящий сюда оператор $\mathbf{S}(\infty, -\infty)$, переводящий вектор начального состояния $\Phi(-\infty)$ в вектор конечного состояния $\Phi(\infty)$, называется *матрицей рассеяния* и обозначается просто через \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}(\infty, -\infty). \quad (16.1.2)$$

Будем обозначать векторы состояний свободных полей через Φ_r , где r — набор квантовых чисел, определяющих энергии, импульсы, поляризации и другие величины отдельных электронов и фотонов. Так как $H_I(-\infty) = 0$, то эти векторы являются векторами состояний в представлении взаимодействия при $t_0 = -\infty$. С другой стороны, при $t_0 = -\infty$ векторы состояний в представлении взаимодействия совпадают с векторами состояний в гейзенберговском представлении. Предполагая, что взаимодействие между полями выключается при $t = \pm\infty$ достаточно медленно, мы можем характеризовать состояния полей в гейзенберговском представлении теми же наборами квантовых чисел r , что и в случае свободных полей,

и обозначать соответствующие векторы состояний в гейзенберговском представлении через Φ_r . Таким образом, предположение о медленности выключения взаимодействия может быть сформулировано в виде равенства

$$\Phi_r = \Phi_r$$

(адиабатическая гипотеза).

Возвращаясь к формуле (16.1.1), положим в ней

$$\Phi(-\infty) = \Phi_i,$$

где индекс i обозначает начальное состояние системы электронов и фотонов. Тогда вектор конечного состояния (при $t = \infty$) будет иметь вид

$$\Phi(\infty) = \mathbf{S}\Phi_i. \quad (16.1.3)$$

Его можно, очевидно, представить в виде суперпозиции различных векторов состояния Φ_f свободных полей:

$$\Phi(\infty) = \sum_f a_f \Phi_f, \quad (16.1.4)$$

где коэффициенты a_f в силу ортонормированности системы векторов состояния Φ_f (они являются собственными векторами гамильтониана H_0) равны

$$a_f = (\Phi_f, \Phi(\infty)). \quad (16.1.5)$$

Подставляя сюда вместо $\Phi(\infty)$ выражение (16.1.3), найдем амплитуду вероятности перехода системы электронов и фотонов из состояния i в состояние f :

$$a_f = (\Phi_f, \mathbf{S}\Phi_i) \equiv \langle f | \mathbf{S} | i \rangle, \quad (16.1.6)$$

Мы видим, таким образом, что амплитуды вероятности различных процессов рассеяния определяются элементами матрицы рассеяния, связывающими соответствующие начальные и конечные состояния.

16.2. Инвариантная теория возмущений. Покажем теперь, как найти матрицу рассеяния.

Будем исходить из уравнения (15.5.6) для оператора преобразования

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S}(t, t_0) = H_I(t) \mathbf{S}(t, t_0), \quad \mathbf{S}(t_0, t_0) = I, \quad (16.2.1)$$

где $H_I(t)$ — гамильтониан взаимодействия между полями

$$H_I(t) = - \int L_I(x) d^3x \quad (16.2.2)$$

и $L_I(x)$ — плотность лагранжиана взаимодействия,

$$L_I(x) = j_\mu(x) A_\mu(x). \quad (16.2.3)$$

Оператор плотности тока $j_\mu(x)$ пропорционален заряду электрона, который играет роль константы связи между электронным и электромагнитным полями. Так как эта константа, точнее говоря, величина

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137,0388}$$

мала по сравнению с единицей, то решение уравнения (16.2.1) можно искать, пользуясь методом последовательных приближений, в виде разложения в ряд по степеням малого параметра α . Перепишем с этой целью уравнение

(16.2.1) в виде интегрального уравнения

$$\mathbf{S}(t, t_0) = I - i \int_{t_0}^t \mathbf{H}_I(t) \mathbf{S}(t, t_0) dt$$

и положим в нем

$$\mathbf{S}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{S}^{(n)}(t, t_0),$$

где $\mathbf{S}^{(n)}(t, t_0)$ пропорционально e^n (e — заряд электрона).

Легко убедиться, что

$$\mathbf{S}^{(n)}(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2) \dots \mathbf{H}_I(t_n).$$

Преобразуем входящий сюда n -кратный интеграл.

Рассмотрим сначала двукратный интеграл

$$\mathbf{S}^{(2)}(t, t_0) = - \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2).$$

Областью интегрирования является здесь, очевидно, треугольник, расположенный ниже биссектрисы координатного угла в плоскости (t_1, t_2) (рис. 16.1). Поменяв местами переменные t_1 и t_2 ,

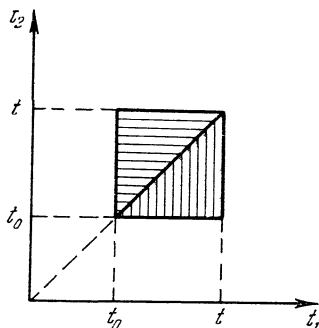


Рис. 16.1.

$$\mathbf{S}^{(2)}(t, t_0) = - \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \mathbf{H}_I(t_2) \mathbf{H}_I(t_1)$$

и считая по-прежнему t_1 абсциссой, а t_2 ординатой, мы получим в качестве области интегрирования треугольник, расположенный выше биссектрисы координатного угла

Если бы операторы $\mathbf{H}_I(t_1)$ и $\mathbf{H}_I(t_2)$ коммутировали между собой, то оба подынтегральных выражения совпадали бы и $\mathbf{S}^{(2)}(t, t_0)$ можно было бы представить как половину интеграла по всему квадрату. Но это можно

сделать и в случае некоммутирующих операторов $\mathbf{H}_I(t_1)$ и $\mathbf{H}_I(t_2)$, если ввести хронологический оператор,

$$T(\mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2)) = \begin{cases} \mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2), & t_2 < t_1, \\ \mathbf{H}_I(t_2) \mathbf{H}_I(t_1), & t_1 < t_2, \end{cases} \quad (16.2.4)$$

или иначе

$$T(\mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2)) = \theta(t_1 - t_2) \mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2) + \theta(t_2 - t_1) \mathbf{H}_I(t_2) \mathbf{H}_I(t_1), \quad (16.2.5)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{S}^{(2)}(t, t_0) = - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T(\mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2)).$$

Аналогично можно показать, что в общем случае $\mathbf{S}^{(n)}(t, t_0)$ имеет вид

$$\mathbf{S}^{(n)}(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)),$$

где T — хронологический оператор, располагающий множители таким образом, чтобы временные аргументы операторов $H_I(t_k)$ убывали слева направо.

Таким образом [5],

$$\mathbf{S}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)).$$

Этот ряд можно записать символически в виде

$$\mathbf{S}(t, t_0) = T \left(\exp \left(-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right) \right). \quad (16.2.6)$$

Формула (16.2.6) допускает следующую интерпретацию. Запишем формально решение уравнения Шредингера для вектора состояния в представлении взаимодействия в виде

$$\Phi(t) = e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'} \Phi(t_0).$$

Это выражение было бы правильным решением уравнения для $\Phi(t)$, если бы значения оператора $H_I(t)$ в различные моменты времени коммутировали между собой. Если же два оператора \mathbf{A} и \mathbf{B} не коммутируют, то $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$, и этой формулой нельзя поэтому непосредственно пользоваться в том случае, когда операторы $H_I(t_1)$, $H_I(t_2)$, ... не коммутируют между собой. Чтобы выяснить, как поступать в этом случае, заметим, что решение уравнения для $\Phi(t)$ всегда можно представить в виде

$$\Phi(t) = \lim_{\tau_n \rightarrow \tau_{n+1}} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - i \int_{\tau_{n+1}}^{\tau_n} H_I(t) dt \right) \Phi(t_0),$$

где τ_n — моменты времени, убывающие с ростом n и стремящиеся к t_0 :

$$\tau_0 = t > \tau_1 > \tau_2 \dots > \tau_{\infty} = t_0.$$

Это выражение показывает, что на функцию $\Phi(t_0)$ прежде всего действует оператор $H_I(t)$ в момент времени $t = t_0$, а затем уже действуют операторы $H_I(t_1)$, $H_I(t_2)$, ... в более поздние моменты времени. Поэтому им можно пользоваться, но следует только соблюдать правильную последовательность действия операторов $H_I(t_i)$ в различные моменты времени: раньше должны действовать операторы, относящиеся к более ранним моментам времени. Чтобы учесть это обстоятельство, мы и поставили перед правой частью формулы (16.2.6) хронологический оператор T .

Полагая в формуле (16.2.6) $t_0 = -\infty$, $t = \infty$ получим следующее общее выражение для матрицы рассеяния

$$\mathbf{S} = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(t) dt \right),$$

или после подстановки вместо $H_I(t)$ выражения (16.2.2)

$$S = T \exp \left(i \int L_I(x) d^4x \right). \quad (16.2.7)$$

Элементы матрицы рассеяния (для краткости ее называют также *S-матрицей*) определяют, как было разъяснено выше, амплитуды вероятности различных процессов рассеяния электронов и фотонов.

Наша задача заключается теперь в том, чтобы показать, как находить эти матричные элементы. Разложим с этой целью матрицу рассеяния в ряд по степеням заряда электрона e ,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, \quad (16.2.8)$$

где матрица $S^{(n)}$, пропорциональная e^n , имеет вид

$$S^{(n)} = \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots \int d^4x_n T(L_I(x_1) L_I(x_2) \dots L_I(x_n)), \quad (16.2.9)$$

причем интегрирование по каждой переменной x_i производится по всему четырехмерному пространству.

16.3. Матричные элементы операторов полей. Входящее в формулу (16.2.9) подынтегральное выражение представляет собой произведение операторов электромагнитного поля $A_\mu(x)$ и операторов электронного поля $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ в представлении взаимодействия, взятых в разных точках x_1, x_2, \dots, x_n . Поэтому прежде всего нужно найти матричные элементы этих операторов. Для этого достаточно заметить, что операторы полей в представлении взаимодействия удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям, как и операторы свободных полей. Поэтому мы можем воспользоваться для них теми же разложениями на плоские волны (5.1.1), (14.2.10), что и для свободных полей:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \sum_{k\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} (e_\mu^{(\lambda)} c_{k\lambda} e^{ikx} + e_\mu^{(\lambda)*} c_{k\lambda}^+ e^{-ikx}), \\ \psi(x) &= \sum_{p\mu} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} (a_{p\mu} u^\mu(p) e^{ipx} + b_{p\mu}^+ u^\mu(-p) e^{-ipx}), \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{p\mu} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} (a_{p\mu}^+ \bar{u}^\mu(p) e^{-ipx} + b_{p\mu} \bar{u}^\mu(-p) e^{ipx}), \end{aligned} \quad (16.3.1)$$

где операторы c , a , b удовлетворяют перестановочным соотношениям (5.1.2), (14.1.4) и (14.1.5).

Напомним, что $c_{k\lambda}^+$ представляет собой оператор испускания, а $c_{k\lambda}$ — оператор поглощения фотона с импульсом k и поляризацией λ ; аналогичным образом $a_{p\mu}$ и $a_{p\mu}^+$ представляют собой операторы поглощения и испускания электрона с импульсом p и поляризацией μ и, наконец, $b_{p\mu}$ и $b_{p\mu}^+$ представляют собой операторы поглощения и испускания позитрона с импульсом p и поляризацией μ .

Таким образом, так же как и в случае свободных полей, $A_\mu(x)$ представляет собой сумму операторов поглощения и испускания фотонов, $\psi(x)$ представляет собой сумму операторов поглощения электронов и испускания позитронов и $\bar{\psi}(x)$ представляет собой сумму операторов испускания электронов и поглощения позитронов.

Используя формулы (5.1.3), (14.2.1), (14.2.2) для матричных элементов операторов c , a , b можно найти матричные элементы операторов $A_\mu(x)$, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, которые не будут ничем отличаться от матричных элементов операторов свободных полей. Приведем здесь для удобства формулы для этих матричных элементов.

Матричные элементы $A_\mu(x)$, соответствующие поглощению и испусканию фотона с 4-импульсом k и поляризацией λ , равны

$$\begin{aligned}\langle 0_{k\lambda} | A_\mu(x) | 1_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_\mu^{(\lambda)} e^{ikhx}, \\ \langle 1_{k\lambda} | A_\mu(x) | 0_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_\mu^{(\lambda)*} e^{-ikhx},\end{aligned}\quad (16.3.2)$$

где e_μ^λ — единичный четырехмерный вектор поляризации, $e_\mu^{(\lambda)} e_\mu^{(\lambda')*} = \delta_{\lambda\lambda'}$.

Состояние фотона не обязательно характеризовать импульсом и поляризацией, а можно характеризовать также моментом и четностью. Матричные элементы оператора $A_\mu(x)$, соответствующие испусканию и поглощению такого фотона, равны

$$\begin{aligned}\langle 1_{jM\lambda} | A_\mu(x) | 0_{jM\lambda} \rangle &= (A_{jM\lambda})_\mu^*, \\ \langle 0_{jM\lambda} | A_\mu(x) | 1_{jM\lambda} \rangle &= (A_{jM\lambda})_\mu,\end{aligned}\quad (16.3.3)$$

где $A_{jM\lambda}$ — нормированные потенциалы состояний фотона с определенными моментом и четностью (см. § 3.8).

Матричные элементы операторов $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, соответствующие поглощению и испусканию электрона с 4-импульсом p и поляризацией μ , равны

$$\begin{aligned}\langle 0_{p\mu}^+ | \psi(x) | 1_{p\mu}^+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} u^\mu(p) e^{ipx}, \\ \langle 1_{p\mu}^+ | \bar{\psi}(x) | 0_{p\mu}^+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \bar{u}^\mu(p) e^{-ipx},\end{aligned}\quad (16.3.4)$$

где биспинор $\bar{u}^\mu(p)$ предполагается нормированным согласно условию

$$\bar{u}^\mu(p) u^\mu(p) = 2m.$$

Наконец, матричные элементы операторов $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(x)$, соответствующие поглощению и испусканию позитрона с импульсом p и поляризацией μ , равны

$$\begin{aligned}\langle 0_{p\mu}^+ | \bar{\psi}(x) | 1_{p\mu}^- \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \bar{u}^\mu(-p) e^{ipx}, \\ \langle 1_{p\mu}^- | \psi(x) | 0_{p\mu}^- \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} u^\mu(-p) e^{-ipx},\end{aligned}\quad (16.3.5)$$

где биспинор $u^\mu(-p)$ нормирован согласно условию

$$\bar{u}^\mu(-p) u^\mu(-p) = -2m.$$

Формулы (16.2.8), (16.2.9), определяющие разложение матрицы рассеяния в ряд по степеням малого параметра e , вместе с формулами (16.3.2), (16.3.4), (16.3.5) для матричных элементов операторов полей составляют основу теории возмущений в квантовой электродинамике.

Чрезвычайно важной чертой этой теории является ее релятивистская инвариантность, непосредственно вытекающая из того, что лагранжиан взаимодействия между полями $L_I(x)$ представляет собой релятивистский инвариант, и, кроме того, как было разъяснено в § 14.4, релятивистски

инвариантной является операция хронологического упорядочения операторов

Мы будем говорить, что процесс рассеяния, т. е. взаимодействия между полями, является эффектом n -го порядка теории возмущения, если элемент \mathbf{S} -матрицы, соответствующий этому процессу, пропорционален $e^{(n)}$. Очевидно, все процессы n -го порядка описываются матрицей \mathbf{S}^n , являющейся n -м членом в разложении \mathbf{S} -матрицы в ряд по степеням заряда электрона

До сих пор мы предполагали, что при $t = \mp \infty$ электроны являются полностью свободными. Но в рамках формализма матрицы рассеяния можно также решать задачи о взаимодействии электронов, движущихся в заданном внешнем электромагнитном поле $A_\mu^{(e)}(x)$ (которое считается классическим), с квантованным электромагнитным полем $A_\mu(x)$. В этом случае следует лишь под $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ понимать не разложения (16.3.1) по плоским волнам, а разложения (14.1.1) по собственным функциям электрона $\psi_s^{(+)}(x)$, $\psi_r^{(-)}(x)$ во внешнем поле $A_\mu^{(e)}(x)$ (индексы \perp и $-$ обозначают состояния с положительными и отрицательными частотами)

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_s a_s \psi_s^{(+)}(x) + \sum_r b_r^+ \psi_r^{(-)}(x), \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_s a_s^+ \bar{\psi}_s^{(+)}(x) + \sum_r b_r \bar{\psi}_r^{(-)}(x).\end{aligned}\tag{16.3.6}$$

Поэтому матричные элементы этих операторов, соответствующие поглощению и испусканию электронов и позитронов, определяются теперь, взамен (16.3.4), (16.3.5), формулами

$$\begin{aligned}\langle 0_s^+ | \psi(x) | 1_s^+ \rangle &= \psi_s^{(+)}(x), \\ \langle 1_s^+ | \bar{\psi}(x) | 0_s^+ \rangle &= \bar{\psi}_s^{(+)}(x), \\ \langle 0_r^- | \bar{\psi}(x) | 1_r^- \rangle &= \bar{\psi}_r^{(-)}(x), \\ \langle 1_r^- | \psi(x) | 0_r^- \rangle &= \psi_r^{(-)}(x).\end{aligned}\tag{16.3.7}$$

Во многих случаях внешнее поле является слабым и его можно учитывать с помощью теории возмущений. Для этого следует заменить $A_\mu(x)$ в выражении для $L_I(x)$ суммой $A_\mu(x) + A_\mu^{(e)}(x)$, где $A_\mu(x)$ — потенциал квантованного электромагнитного поля, а $A_\mu^{(e)}(x)$ — потенциал внешнего поля, представляющий собой, в отличие от $A_\mu(x)$, c -число, и далее пользоваться разложением (16.2.9). Что касается вектора плотности тока $j_\mu(x)$, то он должен строиться с помощью разложений $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ по собственным функциям свободной частицы.

Возможен также и промежуточный способ учета внешнего поля, когда одну его часть следует учитывать точно с помощью уравнения Дирака для электрона во внешнем поле, а другую часть — приближенно прибавлением ее к потенциалу квантованного потенциала. Операторы $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ при этом определяются с помощью разложений по собственным функциям уравнения Дирака, содержащего только первую часть внешнего поля.

16.4. Унитарность матрицы рассеяния. В § 15.5 мы показали, что если гамильтониан системы является самосопряженным, то оператор преобразования $\mathbf{S}(t, t_0)$ будет унитарным. Отсюда следует унитарность матрицы рассеяния в случае самосопряженного гамильтониана,

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^+ = I, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0^+, \quad \mathbf{H}_I = \mathbf{H}_I^+.\tag{16.4.1}$$

Это соотношение является общим и применимо также и к квантовой электродинамике, но следует помнить, что понятие самосопряженного оператора связано с определением метрики в пространстве векторов состояний, в квантовой же электродинамике, благодаря нереальности продольных и скалярных фотонов, приходится пользоваться индефинитной метрикой. Поэтому в квантовой электродинамике соотношение (16.4.1) справедливо, строго говоря, в этой метрике.

Чтобы записать его в явном виде, напомним, как строятся векторы состояний $\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}$ ($N_{k\lambda}$ — число фотонов с импульсом \mathbf{k} и поляризацией λ). Если Φ_0 обозначает вектор состояния вакуума,

$$c_{k\lambda}\Phi_0 = 0, \quad (\Phi_0, \Phi_0) = 1, \quad \lambda = 1, 2, 3, 0,$$

где $c_{k\lambda}$ — оператор уничтожения фотона (\mathbf{k}, λ), то, подействовав на него операторами рождения фотонов $c_{k\lambda}^\dagger$, мы получим векторы состояний $\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}$,

$$\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}} = \prod_{\lambda} \frac{1}{\sqrt{N_{k\lambda}!}} (c_{k\lambda}^\dagger)^{N_{k\lambda}} \Phi_0. \quad (16.4.2)$$

Операторы $c_{k\lambda}^\dagger$, $c_{k\lambda}$ удовлетворяют соотношениям

$$[c_{k\lambda}, c_{k\lambda}^\dagger] = \begin{cases} 1, & \lambda = 1, 2, 3, \\ -1, & \lambda = 0, \end{cases}$$

а векторы состояний $\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}$ — соотношениям

$$\begin{aligned} c_{k\lambda}^\dagger \Phi_{\dots N_{k\lambda} \dots} &= \sqrt{N_{k\lambda} + 1} \Phi_{\dots N_{k\lambda} + 1 \dots}, \quad \lambda = 1, 2, 3, 0, \\ c_{k\lambda} \Phi_{\dots N_{k\lambda} \dots} &= \begin{cases} \sqrt{N_{k\lambda}} \Phi_{\dots N_{k\lambda} - 1 \dots}, & \lambda = 1, 2, 3, \\ -\sqrt{N_{k\lambda}} \Phi_{\dots N_{k\lambda} - 1 \dots}, & \lambda = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (16.4.3)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} -\sqrt{N_{k0}} (\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}, \Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}) &= \\ &= - (c_{k0}^\dagger \Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}-1}, \Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}) = \\ &= - (\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}-1}, c_{k0} \Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}) = \\ &= \sqrt{N_{k0}} (\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}-1}, \Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}-1}), \end{aligned}$$

т. е.

$$(\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}, \Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}) = (-1)^{N_{k0}}.$$

Наличие в этом условии нормировки вектора состояния знакопеременного множителя и является выражением индефинитности метрики.

Вернемся теперь к условию унитарности матрицы рассеяния (16.4.1).

Пусть $\Phi^a \equiv \Phi_{N_{k1}^a N_{k2}^a N_{k3}^a N_{k0}^a}$ и $\Phi^b \equiv \Phi_{N_{k1}^b N_{k2}^b N_{k3}^b N_{k0}^b}$ обозначают векторы каких-либо двух физических состояний. Это значит, что они удовлетворяют соотношению

$$(c_{k3} - c_{k0}) \Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}} = 0.$$

Из унитарности матрицы рассеяния следует

$$\begin{aligned}
 (\Phi^a, \mathbf{S}\mathbf{S}^+\Phi^b) = & \sum_{N_{k1}N_{k2}} (\Phi^a, \mathbf{S}\Phi_{N_{k1}N_{k2}00}) (\Phi_{N_{k1}N_{k2}00}, \mathbf{S}^+\Phi^b) + \\
 & + \sum_{N_{k1}N_{k2}} \sum_{\substack{N_{k3}N_{k0} \\ (N_{k3}+N_{k0} \neq 0)}} (\Phi^a, \mathbf{S}\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}) (-1)^{N_{k0}} \times \\
 & \times (\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}, \mathbf{S}^+\Phi^b) = \delta_{ab}, \quad (16.4.4)
 \end{aligned}$$

где суммирование производится по всем значениям чисел фотонов всех поляризацій в промежуточных состояниях $\Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}$.

Покажем, что

$$\begin{aligned}
 A_{ab}(N_{k1}, N_{k2}) \equiv & \sum_{\substack{N_{k3}N_{k0} \\ (N_{k3}+N_{k0} \neq 0)}} (\Phi^a, S\chi_{N_{k3}N_{k0}}) (-1)^{N_{k0}} \times \\
 & \times (\chi_{N_{k3}N_{k0}}, \mathbf{S}^+\Phi^b) = 0, \quad (16.4.5)
 \end{aligned}$$

где

$$\chi_{N_{k3}N_{k0}} \equiv \Phi_{N_{k1}N_{k2}N_{k3}N_{k0}}$$

Воспользуемся для этого формулой (15.6.13), из которой следует, что матрица рассеяния коммутирует с оператором $\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}$:

$$\left[\mathbf{S}, \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right] = 0. \quad (16.4.6)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что матрица рассеяния коммутирует с операторами $c_{k3} - c_{k0}$ и $c_{k3}^\dagger - c_{k0}^\dagger$:

$$[\mathbf{S}, c_{k3} - c_{k0}] = 0, \quad [\mathbf{S}, c_{k3}^\dagger - c_{k0}^\dagger] = 0 \quad (16.4.7)$$

(последнее соотношение можно получить из первого и условия унитарности (16.4.1)).

Из второго соотношения (16.4.6) вытекает равенство

$$(\Phi^a, \mathbf{S}(c_{k3}^\dagger - c_{k0}^\dagger)\chi_{N_{k3}N_{k0}}) = 0. \quad (16.4.8)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 (\Phi^a, \mathbf{S}(c_{k3}^\dagger - c_{k0}^\dagger)\chi_{N_{k3}N_{k0}}) &= (\Phi^a, (c_{k3}^\dagger - c_{k0}^\dagger)\mathbf{S}\chi_{N_{k3}N_{k0}}) = \\
 &= ((c_{k3} - c_{k0})\Phi^a, \mathbf{S}\chi_{N_{k3}N_{k0}}).
 \end{aligned}$$

Но Φ^a является, по определению, вектором физического состояния, и поэтому последнее скалярное произведение обращается в нуль.

Используя теперь (16.4.3), найдем из (16.4.8)

$$(\Phi^a, \mathbf{S}\chi_{N_{k3}+1, N_{k0}}) \sqrt{N_{k3}+1} = (\Phi^a, \mathbf{S}\chi_{N_{k3}, N_{k0}+1}) \sqrt{N_{k0}+1}.$$

Если поэтому ввести обозначение

$$(\Phi^a, \mathbf{S}\chi_{N_{k3}N_{k0}}) = \frac{1}{\sqrt{N_{k3}! N_{k0}!}} f_a(N_{k3}, N_{k0}),$$

то мы получим

$$f_a(N_{k3}+1, N_{k0}) = f_a(N_{k3}, N_{k0}+1),$$

откуда

$$f_a(N_{k3}, N_{k0}) = f_a(N_{k3}+N_{k0}).$$

Мы можем теперь переписать $A_{ab}(N_{k1}, N_{k2})$ в ∇_a виде

$$A_{ab}(N_{k1}, N_{k2}) = \sum_{\substack{N_{k3} N_{k0} \\ (N_{k3} + N_{k0} \neq 0)}} \frac{(-1)^{N_{k0}}}{N_{k3}! N_{k0}!} f_a(N_{k3} + N_{k0}) f_b^*(N_{k3} + N_{k0})$$

или

$$\begin{aligned} A_{ab}(N_{k1}, N_{k2}) &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{N_{k0}=0}^N \frac{(-1)^{N_{k0}}}{N_{k0}! (N - N_{k0})!} f_a(N) f_b^*(N) = \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} f_a(N) f_b^*(N) \sum_{N_{k0}=0}^N \frac{(-1)^{N_{k0}} N!}{N_{k0}! (N - N_{k0})!}. \end{aligned}$$

Но последняя сумма равна нулю и, следовательно,

$$A_{ab}(N_{k1}, N_{k2}) = 0.$$

Таким образом, условие унитарности матрицы рассеяния (16.3.5) для физических состояний a, b можно записать в виде

$$(\Phi^a, S S^+ \Phi^b) = \sum_{N_{k1} N_{k2}} (\Phi^a, S \Phi_{N_{k1} N_{k2} 0}) (\Phi_{N_{k1} N_{k2} 0}, S^+ \Phi^b) = \delta_{ab}. \quad (16.4.9)$$

Мы видим, что в условие унитарности матрицы рассеяния для физических начальных и конечных состояний не вносят вклада нефизические промежуточные состояния, содержащие произвольные числа продольных и скалярных фотонов, а вносят вклад только физические состояния, для которых унитарность имеет обычный смысл.

16.5. Представление матрицы рассеяния в виде суммы нормальных произведений. Возвратимся к разложению (16.2.8) матрицы рассеяния. Так как операторы $A_{\mu}(x)$, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ представляют собой сумму операторов испускания и поглощения отдельных частиц, то каждый член в этом разложении можно представить в виде суммы произведений операторов испускания и поглощения электронов, позитронов и фотонов в различных состояниях. Мы хотим выяснить, при каких условиях такого рода произведения имеют отличные от нуля матричные элементы, отвечающие какому-либо интересующему нас процессу $i \rightarrow f$. Если, например, в начальном состоянии i имеется один электрон и ни одного позитрона и фотона, а в конечном состоянии f — электрон и фотон, то, очевидно, один из операторов поглощения должен «уничтожить» электрон в состоянии i , два оператора испускания должны «создать» электрон и фотон в состоянии f , а все остальные операторы должны подразделиться на пары, причем операторы каждой пары «создают» и «уничтожают» одну и ту же частицу.

Такого рода виртуальные процессы испускания и последующего поглощения одной и той же частицы сильно усложняют вычисление элементов матрицы рассеяния. Мы постараемся поэтому преобразовать матрицу рассеяния таким образом, чтобы виртуальные процессы не нужно было рассматривать.

Задача сводится, очевидно, к тому, чтобы представить матрицу рассеяния в виде суммы нормальных произведений операторов испускания и поглощения частиц, в которых операторы испускания стоят слева от операторов поглощения. При вычислении матричных элементов таких произведений операторы поглощения будут «уничтожать» только те частицы, которые

находятся в начальном состоянии, а операторы испускания будут «создавать» только те частицы, которые должны быть в конечном состоянии. Что же касается виртуальных процессов испускания и поглощения частиц, то явным образом они не будут входить в рассмотрение.

Чтобы представить матрицу рассеяния в таком виде, заметим, что, согласно (14.1.7),

$$j_{\mu}(x) = ieN(\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x)),$$

и поэтому

$$L_I(x) = j_{\mu}(x)A_{\mu}(x) = ieN(\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x)), \quad \hat{A}(x) = \gamma_{\mu}A_{\mu}(x).$$

Отсюда следует, что n -й член в разложении S -матрицы можно записать в виде

$$S^{(n)} = \frac{(-e)^n}{n!} \int T(N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)) \times \\ \times N(\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)) \dots N(\bar{\psi}(x_n)\hat{A}(x_n)\psi(x_n))) d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n. \quad (16.5.1)$$

Отдельные множители T -произведения, входящего в эту формулу, представляют собой N -произведения операторов полей, относящихся к одному и тому же моменту времени. Такого рода T -произведение мы будем называть смешанным T -произведением.

Наша задача состоит в представлении смешанного T -произведения в виде суммы N -произведений. Это может быть сделано с помощью следующих двух правил (*правила Вика*) [6]:

I. T -произведение операторов полей равно сумме их N -произведений, в которых операторы связаны всеми возможными связями.

II. Смешанное T -произведение операторов полей равно сумме их N -произведений, в которых операторы связаны всеми возможными связями, за исключением связей между операторами в пределах одного и того же N -произведения.

Разъясним эти правила.

Если $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ обозначают операторы полей $A_{\mu}, \psi, \bar{\psi}$, то, согласно правилу 1,

$$T(\chi_1\chi_2 \dots \chi_n) \equiv \delta_P \chi_1\chi_2 \dots \chi_n = N(\chi_1\chi_2 \dots \chi_n) + \\ + N(\chi_1^a\chi_2^a\chi_3 \dots \chi_n) + N(\chi_1^a\chi_2\chi_3^a \dots \chi_n) + \dots, \quad (16.5.2)$$

где первое равенство является определением T -произведения (операторы $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ расположены в хронологическом порядке, т. е. так, что время возрастает справа налево; δ_P представляет собой четность произведенной при этом перестановки электронно-позитронных операторов) и различные буквы над операторами во втором равенстве обозначают различные связи. При этом для соседних операторов они определяются как

$$\chi_i^a\chi_k^a = T(\chi_i\chi_k) - N(\chi_i\chi_k).$$

Связи между несоседними операторами определяются следующим образом. Если связуемые операторы являются фотонными, то их можно просто поставить рядом; если же они являются электронно-позитронными операторами, то их можно поставить рядом, умножив предварительно N -произведение на четность произведенной перестановки электронно-позитронных операторов. Например, если χ_1, χ_2, \dots — электронно-позитронные операторы, то

$$N(\chi_1^a\chi_2\chi_3^b\chi_4^b\chi_5^a\chi_6) = -(\chi_1^a\chi_5^a)(\chi_3^b\chi_4^b)N(\chi_2\chi_6)$$

(так как $\chi_1^a \chi_5^a$ и $\chi_3^b \chi_4^b$ представляют собой c -числа, то они вынесены за знак N -произведения).

Проиллюстрируем теперь правило II. Если смешанное T -произведение имеет, например, вид $T(\chi_1 N(\chi_2 \chi_3 \chi_4))$, то, согласно правилу II,

$$T(\chi_1 N(\chi_2 \chi_3 \chi_4)) = N(\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4) + N(\chi_1^a \chi_2^a \chi_3 \chi_4) + \\ + N(\chi_1^a \chi_2 \chi_3^a \chi_4) + N(\chi_1^a \chi_2 \chi_3 \chi_4^a). \quad (16.5.3)$$

В эту сумму не входят связи $\chi_2^a \chi_3^a$, $\chi_2^a \chi_4^a$, $\chi_3^a \chi_4^a$.

Чтобы доказать правило I, заметим предварительно, что одновременной одинаковой перестановкой множителей внутри T и N -произведений в (16.5.2) мы не нарушаем этого соотношения, поэтому без ограничения общности можно предположить, что операторы в (16.5.2) уже расположены в хронологическом порядке.

Расположим теперь множители в (16.5.2) таким образом, чтобы все операторы испускания стояли слева от операторов поглощения (для простоты предполагается, что каждый из операторов χ_i является либо оператором испускания, либо оператором поглощения). Такое расположение операторов мы будем называть N -упорядоченным. Возьмем для этого самый левый N -неупорядоченный оператор испускания и будем последовательно переставлять его со всеми операторами поглощения, стоящими левее этого оператора. При этом появятся дополнительные члены со связями между переставляемыми операторами в соответствии с формулой

$$\chi_1 \chi_2 = T(\chi_1 \chi_2) = N(\chi_1 \chi_2) + \chi_1^a \chi_2^a = \pm \chi_2 \chi_1 + \chi_1^a \chi_2^a.$$

Такую же операцию упорядочения мы проделаем и с другими неупорядоченными операторами испускания. В результате мы выразим исходное T -произведение в виде суммы N -произведений. Эти N -произведения могут входить как с положительным, так и с отрицательным знаком, но если под знаком N -произведений переставить множители таким образом, чтобы они снова стали T -упорядоченными, т. е. расположенными в хронологическом порядке, то, очевидно, все N -произведения будут входить с положительным знаком и мы получим представление T -произведения в виде суммы N -произведений (16.5.2). В эту сумму будут, очевидно, входить не все возможные связи, а только связи между всеми парами N -неупорядоченных операторов; так как, однако, связи между N -упорядоченными операторами, являющимися одновременно T -упорядоченными операторами, равны нулю, то можно считать, что в сумму входят все возможные связи. Таким образом, мы доказали справедливость правила I.

Аналогичным образом может быть доказано правило II. При доказательстве следует лишь иметь в виду, что не нужно менять местами операторы, стоящие под знаком одного и того же N -произведения, так как эти операторы уже N -упорядочены; поэтому соответствующие им связи должны отсутствовать.

Используя эти правила, можно представить $S^{(n)}$, как мы и хотим, в виде суммы интегралов, содержащих только N -произведения операторов полей

$$S^{(n)} = e^n \sum \int F^{(r, n-r)}(x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}, \dots, x_{i_n}) \times \\ \times N(\bar{\psi}(x_{i_1}) \hat{A}(x_{i_2}) \psi(x_{i_3}) \dots \bar{\psi}(x_{i_{r-2}}) \hat{A}(x_{i_{r-1}}) \psi(x_{i_r})) d^4 x_1 \dots d^4 x_n, \quad (16.5.4)$$

где под знаком N -произведения входят операторы в точках $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$, и величины $F^{(r, n-r)}$ определяются связями между операторами в остальных

из n точек x_1, x_2, \dots, x_n (суммирование распространяется на все возможные разбиения совокупности чисел $1, 2, \dots, n$ на две совокупности i_1, i_2, \dots, i_r и $i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_n$).

Связи между операторами полей определяются формулами (6.2.8), (14.4.7), которые мы выпишем здесь для удобства снова

$$\begin{aligned} A_\mu^\alpha(x) A_\nu^\alpha(x') &= D_c(x-x') \delta_{\mu\nu}, \\ \psi_\alpha^\alpha(x) \psi_\beta^\alpha(x') &= 0, \\ \bar{\psi}_\alpha^\alpha(x) \bar{\psi}_\beta^\alpha(x') &= 0, \\ \psi_\alpha^\alpha(x) \bar{\psi}_\beta^\alpha(x') &= S_{\alpha\beta}(x-x'), \\ \bar{\psi}_\beta^\alpha(x') \psi_\alpha^\alpha(x) &= -S_{\alpha\beta}(x-x'), \end{aligned} \quad (16.5.5)$$

где

$$D_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D_c(k) e^{ikx} d^4k, \quad D_c(k) = \frac{1}{i(k^2 - i0)}, \quad (16.5.6)$$

$$S_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_{\alpha\beta}(p) e^{ipx} d^4p, \quad S_{\alpha\beta}(p) = i \frac{(\hat{p}\gamma - m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i0}.$$

Покажем, что к связи между операторами электромагнитного поля $A_\mu(x)$ и $A_\nu(x')$ можно прибавить величину $\frac{\partial^2 \varphi((x-x')^2)}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, где $\varphi(x^2)$ — произвольная скалярная функция x^2 , и при этом матрица рассеяния не изменится.

Заметим с этой целью, что так как операторы $A_\mu(x)$ и $j_\nu(x)$ коммутируют между собой, то матрицу $S^{(n)}$ можно записать в виде

$$S^{(n)} = \int K_{\mu\nu} \dots (x_1, x_2, \dots) T(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \dots) d^4x_1 \dots d^4x_n,$$

где $K_{\mu\nu} \dots (x_1, x_2, \dots)$ — хронологическое произведение операторов тока,

$$K_{\mu\nu} \dots (x_1, x_2, \dots) = \frac{(-e)^n}{n!} T(j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) \dots).$$

Прибавление к связи между операторами $A_\mu(x_1)$, $A_\nu(x_2)$ величины $\frac{\partial^2 \varphi(x_1 - x_2)}{\partial x_{1\mu} \partial x_{2\nu}}$ соответствует прибавлению к $S^{(n)}$ величины

$$\begin{aligned} \int K_{\mu\nu} \dots (x_1, x_2, \dots) \frac{\partial^2 \varphi(x_1 - x_2)}{\partial x_{1\mu} \partial x_{2\nu}} T(A_\lambda(x_3) \dots) d^4x_1 \dots d^4x_n = \\ = \int \frac{\partial^2 K_{\mu\nu} \dots (x_1, x_2)}{\partial x_{1\mu} \partial x_{2\nu}} \varphi(x_1 - x_2) T(A_\lambda(x_3) \dots) d^4x_1 \dots d^4x_n. \end{aligned}$$

Но легко видеть, что

$$\frac{\partial K_{\mu\nu} \dots (x_1, x_2, \dots)}{\partial x_{1\mu}} = \frac{\partial K_{\mu\nu} \dots (x_1, x_2, \dots)}{\partial x_{2\nu}} = \dots = 0.$$

Действительно,

$$T(j_\mu(x_1) j_\nu(x_2)) = \theta(t_1 - t_2) j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) + \theta(t_2 - t_1) j_\nu(x_2) j_\mu(x_1),$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} T(j_\mu(x_1) j_\nu(x_2)) = T\left(\frac{\partial j_\mu(x_1)}{\partial x_{1\mu}} j_\nu(x_2)\right) + \frac{1}{i} [j_\mu(x_1), j_\nu(x_2)] \delta(t_1 - t_2).$$

Замечая, что $\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0$, и учитывая соотношение (15.6.8), получим

$$\frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} T(j_\mu(x_1) j_\nu(x_2)) = 0. \quad (16.5.7)$$

Таким образом, мы можем считать, что связь между операторами $A_\mu(x)$ и $A_\nu(x')$ определяется формулой*)

$$A_\mu^a(x) A_\nu^a(x') = D_{c\mu\nu}(x - x'),$$

где

$$D_{c\mu\nu}(x) = D_c(x) \delta_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 \varphi(x^2)}{\partial x_{1\mu} \partial x_\nu}. \quad (16.5.8)$$

Преобразование Фурье функции $D_{c\mu\nu}(x)$ имеет вид

$$D_{c\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D_{c\mu\nu}(k) e^{ikx} d^4k,$$

где

$$D_{c\mu\nu}(k) = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 - i0} \left(\delta_{\mu\nu} + d_l(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (16.5.9)$$

и $d_l(k^2)$ — произвольная функция от k^2 , связанная с произвольной функцией $\varphi(x^2)$.

16.6. Функциональная форма представления матрицы рассеяния в виде N -упорядоченного оператора. Покажем, что не только отдельные члены разложения матрицы рассеяния, но и вся она в целом может быть представлена в виде N -упорядоченного оператора [7].

Рассмотрим прежде всего функционал от операторов электромагнитного поля

$$F\{A\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int K_{v_1}^{(n)} \dots v_n(x_1, \dots, x_n) A_{v_1}(x_1) \dots A_{v_n}(x_n) d^4x_1 \dots d^4x_n, \quad (16.6.1)$$

где $K_{v_1}^{(n)} \dots v_n(x_1, \dots, x_n)$ — некоторые c -функции от x_1, \dots, x_n и суммирование производится, помимо n , также по всем v_k , пробегающим значения $v_k = 1, 2, 3, 4$, и покажем, что

$$TF\{A\} = N(e^{\Delta F}\{A\}), \quad (16.6.2)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \int D_c(x - x') \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta}{\delta A_\nu(x')} \delta_{\mu\nu} d^4x d^4x'. \quad (16.6.3)$$

Функциональная производная по оператору $A_\mu(x)$ определяется при этом следующим образом. Если $[\delta A_\mu, A_\mu] = 0$, где $\delta A_\mu(x)$ — приращение оператора $A_\mu(x)$, то вариация функционала $F\{A\}$, равная

$$\delta F\{A_\mu(x)\} = F\{A_\mu(x) + \delta A_\mu(x)\} - F\{A_\mu(x)\},$$

*) Отметим, что это соотношение остается в силе и при учете члена типа $\frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta(r - r')$, стоящего в правой части (15.6.8). Действительно, в этом случае к $S^{(n)}$ прибавляется слагаемое $\int \frac{\partial^2}{\partial x_{1\mu} \partial x_{2\nu}} \delta(r_1 - r_2) \varphi(|r_1 - r_2|) d^3x_1 d^3x_2$, которое, очевидно, равно нулю, так как φ есть функция от x^2

связана с функциональной производной $\frac{\delta F \{A_\mu(x)\}}{\delta A_\mu(x)}$ соотношением

$$\delta F \{A_\mu(x)\} = \int \frac{\delta F \{A_\mu(x)\}}{\delta A_\nu(x')} \delta A_\nu(x') d^4x'.$$

Чтобы доказать формулу (16.6.2), убедимся сначала в том, что $\Delta F \{A\}$ получается из $F \{A\}$, если в каждом числе разложения (16.6.1) образовать всеми возможными способами одну связь между операторами $A_\mu(x)$ и просуммировать затем полученные выражения. Для этого достаточно проверить соотношение

$$\Delta (A_\lambda(x_1) A_\sigma(x_2)) = A_\lambda^a(x_1) A_\sigma^a(x_2),$$

которое немедленно вытекает из (16.6.3) и (6.2.5)

$$\begin{aligned} \Delta (A_\lambda(x_1) A_\sigma(x_2)) &= \\ &= \frac{1}{2} \int D_c(x-x') \frac{\delta}{\delta A_\nu(x)} \frac{\delta}{\delta A_\nu(x')} A_\lambda(x_1) A_\sigma(x_2) d^4x d^4x' = \\ &= \frac{1}{2} \int D_c(x-x') \{ \delta_{\lambda\nu} \delta_{\sigma\nu} \delta(x-x_1) \delta(x'-x_2) + \\ &\quad + \delta_{\lambda\nu} \delta_{\sigma\nu} \delta(x'-x_1) \delta(x-x_2) \} d^4x d^4x' = A_\lambda^a(x_1) A_\sigma^a(x_2). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно проверить, что функционал $\frac{\Delta^k}{k!} F \{A\}$ получается из функционала $F \{A\}$, если в каждом члене разложения (16.6.1) образовать всеми возможными способами k связей между операторами A_μ и просуммировать затем полученные выражения.

Отсюда вытекает, что сформулированное выше правило I о разложении T -произведения на N -произведения можно, в применении к операторам A_μ , записать в виде

$$TF \{A\} = \sum_{k=0}^{\infty} N \left(\frac{\Delta^k}{k!} F \{A\} \right).$$

Замечая, что $\sum \Delta^k/k! = e^\Delta$, мы получим формулу (16.6.2).

Формула такого же типа справедлива и для электронно-позитронных операторов, а именно, если $F \{\psi, \bar{\psi}\}$ — функционал от операторов $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x')$ вида

$$\begin{aligned} F \{\psi, \bar{\psi}\} &= \sum_{n_1, n_2} \int K^{(n_1, n_2)}(x_1, \dots, x_{n_1}; x'_1 \dots x'_{n_2}) \psi(x_1) \bar{\psi}(x'_1) \dots \\ &\quad \dots \psi(x_{n_1}) \bar{\psi}(x'_{n_2}) d^4x_1 \dots d^4x'_{n_2}, \end{aligned}$$

где суммирование производится, помимо n_1 и n_2 , и по спинорным индексам, от которых зависит $K^{(n_1, n_2)}$, то

$$TF \{\psi, \bar{\psi}\} = N (e^{\Sigma} F \{\psi, \bar{\psi}\}), \quad (16.6.4)$$

где

$$\Sigma = \int \frac{\delta}{\delta \psi_\alpha(x)} S_{\alpha\beta}(x-x') \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_\beta(x')} d^4x d^4x'$$

и функциональные производные по ψ и $\bar{\psi}$ определяются следующим образом. Если $\delta\psi(x)$ и $\delta\bar{\psi}(x)$ — приращения операторов $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, то вариаци-

ция функционала $F\{\psi, \bar{\psi}\}$, равная

$$\delta F\{\psi, \bar{\psi}\} = F\{\psi + \delta\psi, \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}\} - F\{\psi, \bar{\psi}\},$$

связана с функциональными производными соотношением

$$\delta F\{\psi, \bar{\psi}\} = \int \frac{\delta F}{\delta\psi_\alpha(x)} \delta\psi_\alpha(x) d^4x + \int \delta\bar{\psi}_\beta(x) \frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}_\beta(x)} d^4x.$$

Чтобы правильно учесть перемену знака при перестановке электронно-позитронных операторов, на приращения операторов ψ и $\bar{\psi}$ накладываются при этом условия

$$\{\delta\psi, \psi\} = \{\delta\psi, \bar{\psi}\} = \{\delta\bar{\psi}, \psi\} = \{\delta\bar{\psi}, \bar{\psi}\} = 0$$

или эквивалентные им условия

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\delta}{\delta\psi_\alpha(x)}, \bar{\psi}_\beta(x') \right\} &= \left\{ \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\beta(x)}, \psi_\alpha(x') \right\} = 0, \\ \left\{ \frac{\delta}{\delta\psi_\alpha(x)}, \psi_\beta(x') \right\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta(x-x'), \\ \left\{ \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\alpha(x)}, \bar{\psi}_\beta(x') \right\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta(x-x'). \end{aligned}$$

Из формул (16.6.2) и (16.6.4) следует, что если мы имеем общий функционал $F\{A, \psi, \bar{\psi}\}$ от операторов $A_\mu(x)$, $\psi_\alpha(x)$, $\bar{\psi}_\beta(x)$, то

$$TF\{A, \psi, \bar{\psi}\} = N(e^{\Delta+\Sigma} F\{A, \psi, \bar{\psi}\}). \quad (16.6.5)$$

Полагая

$$F\{A, \psi, \bar{\psi}\} = \exp i \left(\int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x \right)$$

и вспоминая, что

$$S = TF\{A, \psi, \bar{\psi}\} = T_\psi T_A F\{A, \psi, \bar{\psi}\}$$

(T_ψ и T_A обозначают T -упорядочения операторов $\psi, \bar{\psi}$ и A), получим следующее общее выражение для матрицы рассеяния в виде N -упорядоченного оператора

$$S = N \left(e^{\Delta+\Sigma} \exp \left(i \int j_\mu A_\mu(x) d^4x \right) \right). \quad (16.6.6)$$

Согласно доказанному выше

$$T_A F\{A, \psi, \bar{\psi}\} = N_A \left(e^\Delta \exp \left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x \right) \right)$$

(N_A обозначает N -упорядочение операторов A_μ). Замечая, что

$$N_A \frac{\delta}{\delta A_\nu(x')} \exp \left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x \right) = i N_A \left(j_\nu(x') \exp \left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x \right) \right),$$

легко убедиться, что

$$\begin{aligned} N_A \left(\Delta \exp \left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x \right) \right) &= \\ &= -N_A \left(\frac{1}{2} \int D_c(x'-x'') j_\nu(x') j_\nu(x'') d^4x' d^4x'' \exp \left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x \right) \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$T_A F \{A, \psi, \bar{\psi}\} = \\ = \exp \left(-\frac{1}{2} \int j_v(x') D_c(x' - x'') j_v(x'') d^4x' d^4x'' \right) N_A \exp \left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x \right).$$

Отсюда следует:

$$S = T_\psi \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} \int j_\mu(x') D_c(x' - x'') j_\mu(x'') d^4x' d^4x'' \right) \times \right. \\ \left. \times N_A \exp \left(i \int j_v(x) A_v(x) d^4x \right) \right\}. \quad (16.6.7)$$

Для процессов без участия фотонов последний множитель в (16.6.7) равен единице, и матрица рассеяния приобретает вид

$$S = T_\psi \exp \left(-\frac{1}{2} \int j_\mu(x') D_c(x' - x'') j_\mu(x'') d^4x' d^4x'' \right). \quad (16.6.8)$$

Если движение электронов можно считать заданным, то плотность тока можно рассматривать как заданную c -функцию $j_\mu(x)$. Из (16.6.7) следует, что в таком приближении матрица рассеяния приобретает вид

$$S = \exp \left(-\frac{1}{2} \int j_v(x') D_c(x' - x'') j_v(x'') d^4x' d^4x'' \right) N \exp \left(i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x \right), \quad (16.6.9)$$

где операторами являются только электромагнитные потенциалы $A_\mu(x)$.

16.7. Мюонный и адронный токи. В § 15 были сформулированы уравнения, описывающие электромагнитное и электронное поля, взаимодействующие между собой. Формально это полная совокупность уравнений замкнутой динамической системы. Однако физически такая система не замкнута.

Во-первых, электроны подвержены, кроме электромагнитного, еще слабому взаимодействию. Кроме того, и электроны и фотоны взаимодействуют с гравитационным полем. Но так как оба этих взаимодействия значительно менее интенсивны, чем электромагнитное, то мы вправе рассматривать только электромагнитное взаимодействие, пренебрегая слабым и гравитационным взаимодействиями. Это будет всегда в дальнейшем подразумеваться. И в таком приближении можно считать уравнения Дирака точными уравнениями электронного поля.

Во-вторых, фотоны взаимодействуют не только с электронами, но и с другими частицами. Поэтому уравнения, описывающие электромагнитное поле, нельзя считать правильными, если понимать под плотностью тока только электронный ток. Такие уравнения будут справедливы лишь в тех случаях, когда другие (неэлектронные) токи отсутствуют или малы.

Точные уравнения электромагнитного поля мы получим, если в правую часть уравнения $\square A_\mu = -j_\mu$ подставим полный электрический ток, обусловленный всеми частицами.

Помимо электронов, существует два класса частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем: *мюоны* и *адроны*. Таким образом, под плотностью полного тока мы должны понимать сумму трех плотностей токов

$$j_\mu(x) = j_\mu^{(e)}(x) + j_\mu^{(\mu)}(x) + j_\mu^{(h)}(x), \quad (16.7.1)$$

где $j_\mu^{(e)}(x)$, $j_\mu^{(\mu)}(x)$ и $j_\mu^{(h)}(x)$ — плотности электронного, мюонного и адронного токов в гейзенберговском представлении.

Каждый из этих трех токов в отдельности удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial j_{\nu}^{(e)}(x)}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad \frac{\partial j_{\nu}^{(\mu)}(x)}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad \frac{\partial j_{\nu}^{(h)}(x)}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad (16.7.2)$$

если пренебречь слабым взаимодействием.

Таким образом, рассматриваемая нами динамическая система станет замкнутой только в том случае, если включить в нее мюоны и адроны. Это значит, что совокупность уравнений квантовой электродинамики надо дополнить уравнениями движения этих частиц.

Очень легко написать уравнения мюонного поля. С оговоренной выше точностью мюон ничем, кроме массы, не отличается от электрона. Он также имеет спин $1/2$ и заряд e , и, как электрон, взаимодействует только с электромагнитным полем. (Мы, как отмечалось, пренебрегаем слабым и гравитационным взаимодействиями.) Поэтому мюонное поле удовлетворяет уравнениям Дирака (с другим значением массы m), которые должны быть присоединены к системе уравнений взаимодействующих полей. Мюонный ток, как и электронный, имеет структуру, определяемую выражениями (14.1.7), в которых под ψ и $\bar{\psi}$ следует понимать операторы мюонного поля.

Иначе обстоит дело для адронов, т. е. сильно взаимодействующих частиц. Очевидно, нельзя составить уравнения, определяющие электромагнитные взаимодействия адронов, без учета более интенсивных сильных взаимодействий. Но уравнений, описывающих сильные взаимодействия, мы не знаем. Поэтому мы не можем написать в явном виде уравнение для адронного тока. Адронный ток в квантовой электродинамике остается полуфеноменологическим понятием, наподобие молекулярных токов в макроскопической электродинамике. Это значит, что мы можем получать решения уравнений электромагнитного поля, если зададим ток, но мы не знаем теоретически вида этого тока.

Тем не менее мы можем формально записать лагранжиан системы (т. е. плотность ее функции Лагранжа) в виде

$$L(x) = L_0(x) + L_I(x),$$

где $L_0(x)$ — лагранжиан системы в отсутствие электромагнитных взаимодействий и $L_I(x)$ — лагранжиан электромагнитного взаимодействия. Лагранжиан $L_0(x)$ является суммой четырех членов

$$L_0(x) = L_0^{(\gamma)}(x) + L_0^{(e)}(x) + L_0^{(\mu)}(x) + L_0^{(h)}(x),$$

где $L_0^{(\gamma)}$ и $L_0^{(e)}(x)$ — прежние лагранжианы свободных электромагнитного и электронно-позитронного полей, определяемые формулами (1.6.6), (8.8.1); лагранжиан мюонного поля $L_0^{(\mu)}(x)$ имеет тот же вид (8.8.1), если под $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ понимать операторы мюонного поля, а под m — массу мюона; наконец, $L_0^{(h)}(x)$ — лагранжиан, который должен описывать адроны с учетом их сильных взаимодействий. Мы не знаем вида $L_0^{(h)}(x)$. Однако это обстоятельство не имеет существенного значения для того полуфеноменологического описания электромагнитных взаимодействий адронов, которым мы будем в дальнейшем пользоваться.

Лагранжиан электромагнитного взаимодействия мы можем записать в прежней форме (8.8.12):

$$L_I(x) = j_{\mu}(x) A_{\mu}(x), \quad (16.7.3)$$

где $\hat{j}_\mu(x)$ — оператор плотности полного тока частиц в гайзенберговском представлении.

На основе этого лагранжиана можно построить теорию возмущений для электромагнитных взаимодействий, так же как это было сделано в § 16.2. Наличие сильно взаимодействующих адронов не меняет схемы построения теории возмущений, так как их электромагнитные взаимодействия можно рассматривать как возмущение. Для этого следует перейти к представлению взаимодействия, в котором операторы F связаны с операторами $F^{(s)}$ в шредингеровском представлении соотношением (15.5.4)

$$F = e^{iH_0 t} F^{(s)} e^{-iH_0 t},$$

где H_0 — гамильтониан без учета электромагнитного взаимодействия в шредингеровском представлении.

В данном случае под H_0 нужно понимать гамильтониан свободных электронов, фотонов, мюонов и гамильтониан адронов, не учитывающий электромагнитных взаимодействий, но содержащий сильные взаимодействия. По этой причине правильнее называть рассматриваемое представление не представлением взаимодействия, а представлением электромагнитного взаимодействия.

Перейдя к этому представлению, можно построить, согласно (16.2.7), матрицу рассеяния

$$S = T \exp \left(i \int \hat{j}_\mu(x) A_\mu(x) d^4x \right), \quad (16.7.4)$$

где $\hat{j}_\mu(x)$ — оператор плотности полного тока частиц в представлении электромагнитного взаимодействия, и исследовать с помощью нее различные электромагнитные процессы с участием сильно взаимодействующих частиц.

В дальнейших параграфах этой главы мы не будем изучать эффектов, связанных с наличием адронного и мюонного токов, и вернемся к изучению этих эффектов в главе IV.

§ 17. Графическое представление элементов матрицы рассеяния

17.1. Графическое представление нормальных произведений. В § 16.5 было показано, что матрицу рассеяния можно представить в виде суммы нормальных произведений операторов полей, соответствующих различным процессам рассеяния частиц.

Каждое такое нормальное произведение, а следовательно, и любой процесс рассеяния, можно изображать графически [8], если условиться сопоставлять 4-векторам x_1, x_2, \dots, x_n , по которым производится интегрирование в матрице $S^{(n)}$, точки диаграммы, а операторам полей — линии, проходящие через эти точки (называемые вершинами диаграммы). Оператор $A_\mu(x)$ мы будем изображать пунктирным лучом без определенного направления с началом в вершине x ; оператор $\psi(x)$ — направленным сплошным лучом, идущим к вершине x , и оператор $\bar{\psi}(x)$ — направленным сплошным лучом, идущим из вершины x . Все эти лучи, которые называются *внешними линиями*, предполагаются уходящими за пределы диаграммы.

Так как $A_\mu(x)$ представляет собой сумму операторов поглощения и испускания фотонов, то пунктирной внешней линией будет изображаться фотон, испущенный или поглощенный в результате процесса рассеяния (кроме того, пунктирной внешней линией мы будем изображать также внешнее электромагнитное поле). Аналогичным образом, поскольку $\psi(x)$

представляет собой сумму операторов уничтожения электронов и рождения позитронов, то сплошная внешняя линия, направленная к вершине, будет служить для изображения электрона, существовавшего до процесса рассеяния, или позитрона, образовавшегося в результате процесса рассеяния. Наконец, так как $\bar{\psi}(x)$ представляет собой сумму операторов рождения электронов и уничтожения позитронов, то сплошная внешняя линия, направленная от вершины, будет служить для изображения позитрона, существовавшего до процесса рассеяния, или электрона, образовавшегося в результате процесса рассеяния.

Кроме операторов полей, мы должны графически изображать также связи между операторами. Условимся сопоставлять связям между операторами внутренние линии диаграммы, соединяющие ее вершины, а именно, будем изображать связь между фотонными операторами $A_\mu(x)$ и $A_\nu(y)$ пунктирной линией (не имеющей определенного направления), соединяющей вершины x и y и связь между электронными операторами $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(y)$ — сплошной линией, соединяющей вершины x и y и имеющей направление от вершины x к вершине y .

Так как в выражении для $S^{(n)}$ каждая точка x является аргументом трех операторов — одного фотонного и двух электронных, то через каждую вершину диаграммы проходит одна фотонная и две электронные линии.

Диаграммы, изображающие отдельные нормальные произведения, входящие в матрицу $S^{(n)}$, содержат n вершин. Мы будем называть их диаграммами n -го порядка. Они могут служить для изображения эффектов n -го приближения теории возмущений.

17.2. Простейшие диаграммы. Приведем несколько примеров.

Начнем с эффектов первого порядка. В этом случае имеется, очевидно, только одна диаграмма, представленная на рис. 17.1. Она изображает рассеяние электрона или позитрона во внешнем поле, излучение или поглощение фотона электроном (позитроном), а также образование или поглощение электронно-позитронной пары. (Справа от диаграммы символически указано подынтегральное выражение матричного элемента $S^{(1)}$ без знака нормального произведения.)

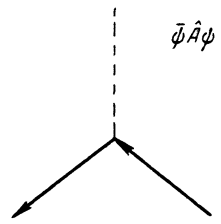


Рис. 17.1.

Рассмотрим теперь эффекты второго порядка. В этом случае возможно всего шесть топологически различных диаграмм, изображенных на рис. 17.2. Рядом с диаграммами символически указано подынтегральное выражение элемента матрицы $S^{(2)}$ (без знака нормального произведения). Линии, соединяющие различные множители \hat{A} , ψ , $\bar{\psi}$, служат для обозначения связей между операторами.

Рассмотрим подробнее диаграммы 2 и 3 рис. 17.2. Первой из этих

диаграмм соответствует одно нормальное произведение $N(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$

а второй диаграмме — два нормальных произведения $N((\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi))$, и

$N((\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi))$. Оба последних N -произведения, отличающихся местом наложения одной связи между электронными операторами, после интегрирования до d^4x_1 и d^4x_2 вносят, как легко убедиться, одинаковый вклад в элемент матрицы $S^{(2)}$, соответствующий диаграмме 3. Поэтому достаточно

рассматривать только одно из этих нормальных произведений и вносимый им вклад в элемент матрицы $S^{(2)}$ умножить на 2.

Аналогичная ситуация имеет место и для других диаграмм. Каждой из них может соответствовать несколько нормальных произведений, отличающихся только местами наложения связей между операторами полей и вносящих одинаковый вклад в элемент матрицы рассеяния. Они называются эквивалентными нормальными произведениями.

Перейдем к перечислению диаграмм третьего порядка. Легко убедиться, что всего существует 15 топологически различных диаграмм, соответствующих различным эффектам третьего порядка (рис. 17.3).

Например, диаграмме 8 рис. 17.3 соответствует шесть эквивалентных N -произведений:

$$\begin{aligned}
 & 1) N((\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)), & 2) N((\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)), \\
 & 3) N((\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)), & 4) N((\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)), \\
 & 5) N((\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)), & 6) N((\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi))
 \end{aligned}$$

Учитывая, что в N -произведении можно менять местами электронные операторы, умножая при этом N -произведение на четность произведенной перестановки и используя выражения (16.5.5) для связей, легко убедиться, что все шесть N -произведений вносят одинаковый вклад в элемент матрицы $S^{(3)}$, соответствующий изображенному на диаграмме 8 процессу рассеяния.

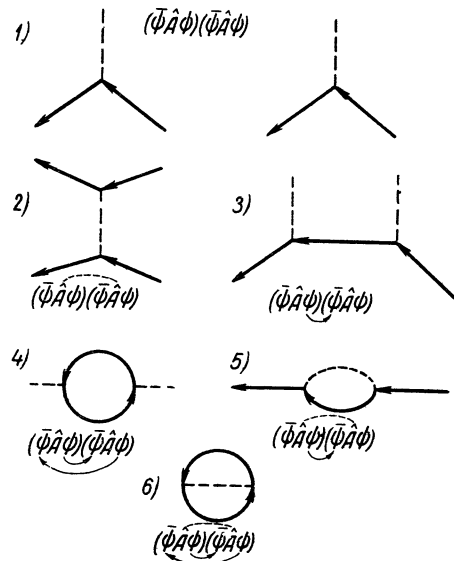


Рис. 17.2.

Заметим, что число эквивалентных N -произведений, соответствующих данной диаграмме, можно определять следующим простым способом. Нужно, перенумеровав вершины диаграммы числами 1, 2, . . . , n , определить число перестановок этих чисел, не меняющих вида диаграммы. Если это число равно g ($g = 2$ для диаграммы 2 рис. 17.2 и $g = 1$ для диаграммы 3 рис. 17.2), то число эквивалентных N -произведений будет

$$r = \frac{n!}{g}.$$

Приведенные на рис. 17.2 диаграммы изображают нормальные произведения операторов полей в общем виде и описывают одновременно ряд процессов. Эти операторы представляют собой суммы операторов испускания и поглощения частиц в различных

состояниях; поэтому нормальное произведение, отвечающее какому-либо конкретному физическому процессу, может быть представлено в виде суммы нескольких слагаемых, которые содержат произведения операторов испускания и поглощения частиц, участвующих в рассматриваемом процессе. и отличаются друг от друга только порядком расположения опе-

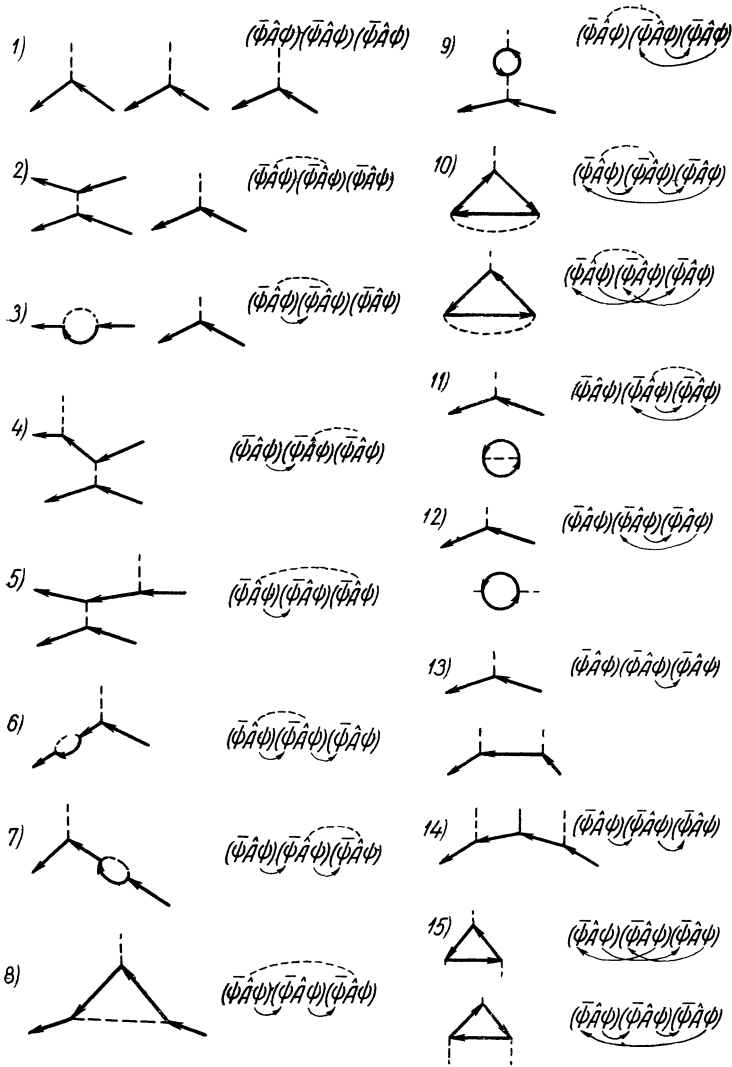


Рис. 17.3.

раторов. Эти слагаемые можно изображать диаграммами, которые топологически эквивалентны и отличаются друг от друга только порядком расположения электронных и фотонных линий.

Рассмотрим, например, излучение фотона электроном во внешнем поле. Это — процесс второго порядка, и отвечающее ему нормальное произведение в подынтегральном выражении $S^{(2)}$ имеет вид

$$N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\overrightarrow{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)).$$

Вместо $\hat{A}(x)$ мы должны подставить сюда

$$\hat{A}(x) = \hat{A}^{(e)}(x) + \hat{A}_k(x),$$

где $A^{(e)}$ — внешнее поле и A_k — оператор испускания фотона с 4-импульсом k . Нормальное произведение разобьется на два члена:

$$N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}^{(e)}(x_1)\overrightarrow{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}_k(x_2)\psi(x_2)) + N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}_k(x_1)\overrightarrow{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}^{(e)}(x_2)\psi(x_2)),$$

которым соответствуют две диаграммы (рис. 17.4), отличающиеся друг от друга только порядком расположения фотонных линий, изображающих $A^{(e)}$ и A_k .

Если в процессе участвуют n фотонов, то после разбиения нормального произведения на слагаемые, содержащие операторы поглощения и испускания отдельных фотонов, мы получим $n!$ членов, которым соответствуют диаграммы, отличающиеся друг от друга только порядком расположения фотонных линий.

Аналогичным образом, если в процессе участвует несколько электронов и позитронов, то нормальное произведение может быть представлено в виде суммы членов, которые содержат одни и те же операторы испускания и поглощения электронов

и позитронов и отличаются только порядком расположения этих операторов, а соответствующие этим членам диаграммы отличаются друг от друга только порядком расположения электронных линий.

Например, процессу рассеяния электрона электроном соответствуют две диаграммы (рис. 17.5); на этих диаграммах p_1 ,

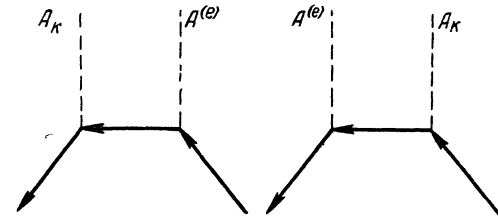


Рис. 17.4.

p_2 и p'_1, p'_2 обозначают 4-импульсы электронов до и после рассеяния, k и k' — 4-импульсы виртуальных фотонов, которыми обмениваются оба электрона.

В отличие от процессов с участием нескольких фотонов, для которых отдельным диаграммам соответствуют матричные элементы, имеющие один и тот же знак, для процессов с участием нескольких электронов отдельным диаграммам соответствуют матричные элементы, могущие иметь разные знаки. Это связано с тем, что операторы испускания и поглощения электронов и позитронов, находящихся в различных состояниях, в отличие от коммутирующих операторов испускания и поглощения фотонов, не коммутируют между собой.

Например, двум диаграммам рис. 17.5 соответствуют матричные элементы, имеющие разные знаки. Действительно, подынтегральное выражение части матрицы $S^{(2)}$, описывающей рассеяние электрона электроном, равно

$$N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2))^{1/2}$$

Подставляя сюда

$$\bar{\psi}(x) = a_{p_1}^+ \bar{\psi}_{p_1}(x) + a_{p_2}^+ \bar{\psi}_{p_2}(x),$$

$$\psi(x) = a_{p_1} \psi_{p_1}(x) + a_{p_2} \psi_{p_2}(x),$$

где a_p^+ и a_p — операторы испускания и поглощения электрона с 4-импульсом p и $\psi_p(x)$ — волновая функция электрона с 4-импульсом p , мы получим четыре отличных от нуля члена:

$$\begin{aligned} N(a_{p_1}^+ a_{p_1} a_{p_2}^+ a_{p_2}) \bar{\psi}_{p_1}(x_1) \psi_{p_1}(x_1) \bar{\psi}_{p_2}(x_2) \psi_{p_2}(x_2) + \\ + N(a_{p_2}^+ a_{p_2} a_{p_1}^+ a_{p_1}) \bar{\psi}_{p_1}(x_2) \psi_{p_1}(x_2) \bar{\psi}_{p_2}(x_1) \psi_{p_2}(x_1) + \\ + N(a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_2}^+ a_{p_1}) \bar{\psi}_{p_1}(x_1) \psi_{p_2}(x_1) \bar{\psi}_{p_2}(x_2) \psi_{p_1}(x_2) + \\ + N(a_{p_2}^+ a_{p_1} a_{p_1}^+ a_{p_2}) \bar{\psi}_{p_2}(x_1) \psi_{p_1}(x_1) \bar{\psi}_{p_1}(x_2) \psi_{p_2}(x_2) \end{aligned}$$

Первые два члена представляют собой два эквивалентных нормальных произведения, соответствующих первой диаграмме рис. 17.5, а вторые два члена — два эквивалентных нормальных произведения, соответствующих второй диаграмме.

Переставляя в третьем члене операторы a и a^+ , легко убедиться, что

$$N(a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_2}^+ a_{p_1}) = -N(a_{p_1}^+ a_{p_1} a_{p_2}^+ a_{p_2}),$$

поэтому, как и утверждалось, матричные элементы, соответствующие обеим диаграммам, имеют разные знаки.

Этот результат может быть обобщен следующим образом. Пусть в процессе участвует z электронов, импульсы которых до и после рассеяния равны соответственно p_1, p_2, \dots, p_z и p'_1, p'_2, \dots, p'_z ; тогда процессу будут соответствовать $z!$ диаграммы, которые отличаются обозначениями электронных линий после рассеяния. Если на двух диаграммах электронные линии после рассеяния (являющиеся продолжением электронных линий до рассеяния) обозначены соответственно через p'_1, p'_2, \dots и $p'_{j_1}, p'_{j_2}, \dots$, то относительный знак матричных элементов, отвечающих обеим диаграммам, будет определяться четностью перестановки

$$p = (1, 2, \dots, z)_{(j_1, j_2, \dots, j_z)}.$$

Таким образом, матричный элемент, соответствующий какому-либо физическому процессу, всегда можно после разбиения нормального

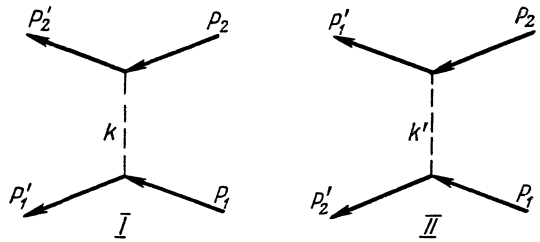


Рис. 17.5.

произведения представить в виде

$$\langle f | \mathbf{S}^{(n)} | i \rangle \equiv S_{i \rightarrow f}^{(n)} = \sum \mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}, \quad (17.2.1)$$

где отдельные слагаемые $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ отличаются друг от друга порядком расположения операторов поглощения и испускания частиц, участвующих в процессе; диаграммы, изображающие эти слагаемые, топологически эквивалентны и отличаются только порядком расположения электронных и фотонных линий.

17.3. Импульсное представление. Чтобы найти величины $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$, удобно перейти к импульсному пространству. Представим для этого связи между операторами полей $D_{\mu\nu}(x)$ и $S_{\alpha\beta}(x)$, а также 4-потенциал внешнего электромагнитного поля $A_{\mu}^{(e)}(x)$ в виде интегралов Фурье

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int D_{\mu\nu}(k) e^{ikx} d^4k, \\ D_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{i(k^2 - i0)} \left(\delta_{\mu\nu} + d_l \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \\ S_{\alpha\beta}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_{\alpha\beta}(p) e^{ipx} d^4p, \\ S_{\alpha\beta}(p) &= i \frac{(i\hat{p} - m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i0}, \\ A_{\mu}^{(e)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int A_{\mu}^{(e)}(q) e^{iqx} d^4q \end{aligned}$$

и подставим их вместе с выражениями для матричных элементов операторов полей

$$\begin{aligned} \langle 0_{k\lambda} | A_{\mu}(x) | 1_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_{\mu}^{(\lambda)} e^{ikhx}, \\ \langle 1_{k\lambda} | A_{\mu}(x) | 0_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_{\mu}^{(\lambda)} e^{-ikhx}, \\ \langle 0_{p\mu}^{(+)} | \Psi(x) | 1_{p\mu}^{(+)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u^{\mu}(p) e^{ipx}, \\ \langle 1_{p\mu}^{(+)} | \bar{\Psi}(x) | 0_{p\mu}^{(+)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \bar{u}^{\mu}(p) e^{-ipx}, \\ \langle 0_{p\mu}^{(-)} | \bar{\Psi}(x) | 1_{p\mu}^{(-)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \bar{u}^{\mu}(-p) e^{ipx}, \\ \langle 1_{p\mu}^{(-)} | \Psi(x) | 0_{p\mu}^{(-)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u^{\mu}(-p) e^{-ipx} \end{aligned}$$

в то из нормальных произведений под знаком интеграла для $\mathbf{S}^{(n)}$, которое соответствует $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$. Собирая множители e^{ipx_j} , e^{ikhx_j} , e^{iqx_j} с определенным x_j ($j=1, 2, \dots, n$) и выполняя интегрирование по $d^4x_1 \dots d^4x_n$, мы получим произведение n четырехмерных δ -функций $\delta(\sum p)$, умноженное на $(2\pi)^{4n}$, где p служит для обозначения 4-векторов p, k, q (число слагаемых под знаком δ -функции равно, очевидно, трем — по числу линий, проходящих через каждую вершину диаграммы).

Очевидно, в импульсном представлении каждой линии диаграммы будет соответствовать некоторый четырехмерный вектор p . Но функции $D_{\mu\nu}(x_j - x_l)$, $S_{\alpha\beta}(x_j - x_l)$, связанные с внутренними линиями диаграм-

мы, зависят от разности координат x_j , x_i концов линии; поэтому в двух δ -функциях, возникающих при интегрировании по d^4x_j и d^4x_i , 4-вектор p , связанный с линией x_jx_i , будет входить с разными знаками. Это дает возможность интерпретировать векторы p , соответствующие внутренним линиям диаграммы, как четырехмерные импульсы *виртуальных* «частиц», «испускаемых» в одном конце и «поглощаемых» в другом конце внутренних линий. При этом, очевидно, между временной и пространственной составляющими четырехмерного импульса виртуальной частицы не существует никакой связи, $p^2 \mp m^2 \neq 0$, $k^2 \neq 0$.

Что касается внешних линий диаграммы, то им соответствуют, очевидно, четырехмерные импульсы реальных частиц, участвующих в процессе.

Чтобы получить окончательное выражение для $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$, необходимо расположить матрицы, действующие на спинорные индексы, в определенном порядке, произвести интегрирование по импульсам виртуальных частиц и переменным q (происходящим от разложения внешних потенциалов в интеграл Фурье) и просуммировать полученное выражение по поляризациям виртуальных фотонов.

Выясним прежде всего, в каком порядке должны быть расположены спинорные матрицы. Рассмотрим для этого пример — процесс рассеяния электрона во внешнем поле, изображенный на рис. 17.6. Соответствующее этому процессу нормальное произведение (под знаком интеграла в выражении для $S^{(3)}$) равно

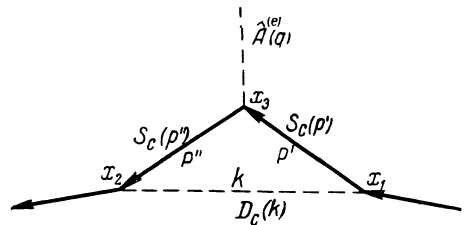


Рис. 17.6.

$$B = N(\psi_\alpha(x_1) (\gamma_\mu)_{\beta\alpha} A_\mu(x_1) \psi_\beta(x_2) \bar{\psi}_\lambda(x_2) (\gamma_\nu)_{\lambda\epsilon} A_\nu(x_2) \psi_\epsilon(x_2) \psi_\rho(x_3) (\gamma_\delta)_{\rho\sigma} A_\delta^{(e)}(x_3) \psi_\sigma(x_3)).$$

Переставив местами $\bar{\psi}_\lambda$ и ψ_β , а затем $\bar{\psi}_\lambda$ и $\bar{\psi}_\alpha$, что не изменяет знака B , и используя (16 5.5), перепишем B в виде

$$B = N(\bar{\psi}_\lambda(x_2) (\gamma_\nu)_{\lambda\epsilon} S_{\epsilon\beta} (x_2 - x_3) A_\delta^{(e)}(x_3) (\gamma_\delta)_{\rho\sigma} S_{\sigma\alpha} (x_3 - x_1) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x_1)) \times \\ \times D_{\epsilon\mu\nu} (x_1 - x_2) = N(\bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu S_c(x_2 - x_3) \hat{A}^{(e)}(x_3) S_c(x_3 - x_1) \gamma_\mu \psi(x_1)) \times \\ \times D_{\epsilon\mu\nu} (x_1 - x_2)$$

(перестановка операторов ψ_α и ψ_β приводит к дополнительному умножению на -1). Это выражение показывает, что внутренней фотонной линии соответствует функция $D_{\epsilon\mu\nu}$ и две матрицы γ_ν и γ_μ , которые должны быть сопоставлены ее концам (вершинам x_2 и x_1). При этом матрицы, действующие на спинорные индексы, т. е. матрицы γ_μ и S_c , должны быть расположены в такой последовательности, считая слева направо, в которой они встречаются, если двигаться против направления электронной линии (см. рис. 17.6).

Выяснив, как должны быть расположены спинорные матрицы, мы можем теперь написать следующее общее выражение для $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ в виде

интеграла в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)} = & \delta_P (-1)^{n+l} \xi (2\pi)^{4(n-F)} e^n \int d^4 p_1 \dots d^4 p_{F_e} \int d^4 k_1 \dots d^4 k_{F_\gamma} \int d^4 q_1 \dots \\ & \dots d^4 q_s \sum_{\nu} \prod_1^n \delta(\sum p) O \left(\prod \left(\frac{u(p_i^+)}{\sqrt{2\varepsilon_i^+}} \frac{\bar{u}(-p_i^-)}{\sqrt{2\varepsilon_i^-}} \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}} \right) \times \right. \\ & \times \prod \left(\frac{\bar{u}(p_f^+)}{\sqrt{2\varepsilon_f^+}} \frac{u(-p_f^-)}{\sqrt{2\varepsilon_f^-}} \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} \right) \prod_1^s \left(\frac{\hat{A}^{(e)}(q)}{(2\pi)^4} \right) \prod_1^{F_e} \left(i \frac{\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \right) \times \\ & \left. \times \prod_1^{F_\gamma} \left(\gamma_\nu \frac{1}{ik^2} \left(\delta_{\mu\nu} + d_l \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \gamma_\mu \right) \right). \quad (17.3.1) \end{aligned}$$

Здесь интегрирование производится по четырехмерным импульсам виртуальных частиц, т. е. по $4F_e$ переменным p_1, p_2, \dots, p_{F_e} , происходящим от множителей типа $S_c(p)$, и $4F_\gamma$ переменным $k_1, k_2, \dots, k_{F_\gamma}$, происходящим от множителей типа $D_c(k)$, а также по $4s$ переменным q_1, q_2, \dots, q_s , происходящим от разложения внешних потенциалов в интеграл Фурье (F_e и F_γ — числа внутренних электронных и фотонных линий, т. е. числа виртуальных электронов и фотонов, $F = F_e + F_\gamma$, s — число вершин, в которых действуют внешние потенциалы), l — число замкнутых электронных петель с четным числом электронных линий, δ_P — четность перестановки электронных операторов (см. ниже), $\xi = \frac{r}{nl}$.

Кроме интегрирования, в этой формуле производится суммирование по четырем значениям индексов ν , обозначающим различные поляризации виртуальных фотонов, причем каждому виртуальному фотону соответствует свой индекс ν , принимающий значения $\nu = 1, 2, 3, 4$.

Отдельные множители в формуле имеют следующее значение.

Произведение $\prod \frac{u(p_i^+) \bar{u}(-p_i^-)}{\sqrt{2\varepsilon_i^+} \sqrt{2\varepsilon_i^-}} \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}}$ представляет собой произведение биспиноров $u(p)/\sqrt{2\varepsilon}$, $\bar{u}(-p)/\sqrt{2\varepsilon}$ и величин $\hat{e}/\sqrt{2\omega}$, описывающих электроны, позитроны и фотоны в начальном состоянии i ; произведение $\prod \frac{\bar{u}(p_f^+)}{\sqrt{2\varepsilon_f^+}} \frac{u(-p_f^-)}{\sqrt{2\varepsilon_f^-}} \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}}$ обозначает аналогичное произведение для конеч-

ного состояния f . Множители $i \frac{\hat{p} - m}{p^2 + m^2}$ и $\gamma_\nu \frac{1}{ik^2} \left(\delta_{\mu\nu} + d_l \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \gamma_\mu$ происходят от связей электронных и фотонных операторов, причем число первых равно F_e , а вторых равно F_γ . Наконец, символ O служит для обозначения определенного порядка в расположении спинорных матриц, а именно, матрицы γ_μ и S_c , действующие на спинорные индексы, должны быть расположены, считая справа налево, в такой последовательности, в какой они встречаются, если двигаться по направлению электронной линии диаграммы.

Специфическая особенность возникает в том случае, если диаграмма содержит замкнутые электронные петли с четным числом электронных линий (при нечетном числе электронных линий матричный элемент, как будет показано далее, в § 17.4, равен нулю). В этом случае каждой электронной петле соответствует в выражении $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ взятый со знаком минус след произведения матриц γ_μ и S_c , относящихся к петле.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим часть диаграммы, содержащую замкнутую электронную петлю, изображенную на рис. 17.7 (квадратики A

и B обозначают произвольные сколь угодно сложные диаграммы, вид которых не существен.) Множитель, связанный с этой петлей, в общем выражении для нормального произведения, соответствующего рис. 17.7, имеет следующий вид: $B = N (\psi_\alpha^a(x_1) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta^b(x_1) \bar{\psi}_\delta^b(x_2) (\gamma_\nu)_{\delta\rho} \psi_\rho^a(x_2))$. Используя выражения для связей операторов, получим

$$B = -(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} S_{c\beta\delta}(x_1 - x_2) (\gamma_\nu)_{\delta\rho} S_{c\rho\alpha}(x_2 - x_1) = -\text{Sp} (\gamma_\mu S_c(x_1 - x_2) \gamma_\nu S_c(x_2 - x_1)),$$

что и утверждалось выше.

Если диаграмма содержит l замкнутых электронных петель с четным числом линий, то $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ приобретает множитель $(-1)^l$, который входит в (17.3.1) наряду с множителем $(-1)^n \delta_P$, где δ_P определяет относительный знак $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ в том случае, если в процессе участвует несколько электронов. Как было разъяснено выше, δ_P представляет собой четность перестановки индексов электронов,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ i_1 & i_2 & \dots \end{pmatrix},$$

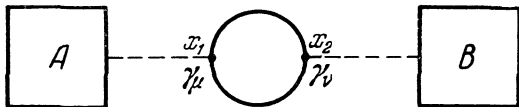


Рис. 17.7.

где числа 1, 2, ... нумеруют на диаграмме импульсы электронов до рассеяния, а числа i_1, i_2, \dots — после рассеяния.

В качестве примера применения общей формулы (17.3.1) приведем выражение для матричного элемента, соответствующего диаграмме рис. 17.6:

$$\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(3)} = i^3 e^3 \bar{u}_2 \left(\int \gamma_\nu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \frac{\hat{A}^{(e)}(q)}{(2\pi)^4} \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{d^4 k}{k^2} \right) u_1. \quad (17.3.2)$$

Здесь u_1 и \bar{u}_2 — биспинорные амплитуды электрона с импульсами p_1 и p_2 до и после рассеяния, $q = p_2 - p_1$. Входящие в общее выражение для $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ три четырехмерные δ -функции мы устранили интегрированием по q и по импульсам виртуальных электронов, заменив q на $p_2 - p_1$ и импульсы внутренних электронных линий — на $p_1 - k$ и $p_2 - k$. По этой причине интегрирование в (17.3.2) производится только по четырехмерному импульсу виртуального фотона k ; кроме того, в (17.3.2) производится суммирование по четырем значениям индекса ν , что соответствует суммированию по четырем состояниям поляризации виртуального фотона. Произвольная величина d_l взята равной нулю.

17.4. Теорема Фарри. Покажем теперь, что диаграммам, содержащим замкнутые внутренние электронные петли, состоящие из нечетного числа отрезков, соответствует суммарный матричный элемент, равный нулю (теорема Фарри) [9].

Если некоторая диаграмма G_1 содержит внутреннюю замкнутую электронную петлю I (рис. 17.8), то наряду с этой диаграммой нужно, очевидно, рассмотреть также другую диаграмму G_2 , отличающуюся от первой только направлением обхода замкнутой электронной петли (петля II). Сумма матричных элементов, соответствующих этим диаграммам, \mathfrak{M}_{G_1} и \mathfrak{M}_{G_2} , определяет

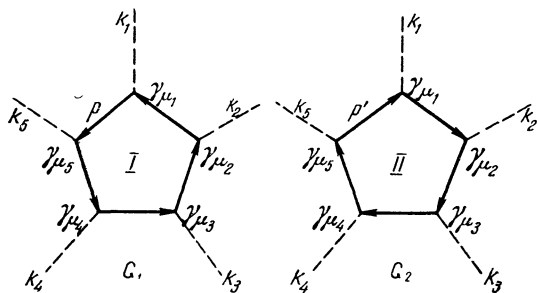


Рис. 17.8.

суммарный матричный элемент процесса

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{G_1} + \mathfrak{M}_{G_2}.$$

Согласно (17.3.1) петлям I и II соответствуют следующие части в матричных элементах \mathfrak{M}_{G_1} и \mathfrak{M}_{G_2} :

$$B_I = \int \text{Sp} (\gamma_{\mu_1} S_c(p+k_1) \gamma_{\mu_2} S_c(p+k_1+k_2) \dots S_c(p-k_N) \gamma_{\mu_N} S_c(p)) d^4p,$$

$$B_{II} = \int \text{Sp} (S_c(p') \gamma_{\mu_N} S_c(p'+k_N) \dots S_c(p'-k_2-k_1) \gamma_{\mu_2} S_c(p'-k_1) \gamma_{\mu_1}) d^4p',$$

входящие в \mathfrak{M}_{G_1} и \mathfrak{M}_{G_2} в виде сомножителей (N — число вершин в петле).

Замечая, что

$$\text{Sp } \mathbf{Y} = \text{Sp } \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{C},$$

где \mathbf{Y} и \mathbf{C} — произвольные матрицы, представим B_{II} в виде

$$B_{II} = \int \text{Sp} (\mathbf{C}^{-1} S_c(p') \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} \gamma_{\mu_N} \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} S_c(p'+k_N) \mathbf{C} \dots \dots \mathbf{C}^{-1} S_c(p'-k_1) \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} \gamma_{\mu_1} \mathbf{C}) d^4p'.$$

Выберем теперь в качестве \mathbf{C} матрицу зарядового сопряжения (см. § 8.6). Тогда

$$\mathbf{C}^{-1} \gamma_{\mu} \mathbf{C} = -\gamma_{\mu}^T,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{C}^{-1} S_c(p) \mathbf{C} = S_c^T(-p).$$

Используя эти соотношения, получим

$$B_{II} = (-1)^N \int \text{Sp} (S_c^T(-p') \gamma_{\mu_N}^T S_c^T(-p'-k_N) \dots S_c^T(-p'+k_1) \gamma_{\mu_1}^T) d^4p'.$$

Сделав, далее, замену переменной $p' = -p$ и замечая, что для любой матрицы \mathbf{X} справедливо соотношение $\text{Sp } \mathbf{X} = \text{Sp } \mathbf{X}^T$, найдем окончательно

$$B_{II} = (-1)^N \int \text{Sp} (\gamma_{\mu_1} S_c(p+k_1) \gamma_{\mu_2} S_c(p+k_1+k_2) \dots \dots S_c(p-k_N) \gamma_{\mu_N} S_c(p)) d^4p = (-1)^N B_I.$$

Так как суммарный матричный элемент \mathfrak{M} содержит в виде сомножителя сумму выражений B_I и B_{II} , то из последней формулы следует, что при нечетном N матричный элемент \mathfrak{M} обращается в нуль

Таким образом, диаграммы, содержащие замкнутые петли, которые состоят из нечетного числа электронных линий, можно вовсе не рассматривать.

Заметим, что теорема Фарри является следствием закона сохранения зарядовой четности (см. § 19.3). Действительно, замкнутой электронной петле с N вершинами, т. е. с N подходящими к ней фотонными линиями, соответствует нейтральная система из реальных и виртуальных фотонов, общее число которых равно N . Так как четность фотона равна -1 , то нечетное N означает разную зарядовую четность начального и конечного состояний системы, что невозможно

17.5. Правила Фейнмана. Сформулируем теперь окончательно общие правила написания матричного элемента, соответствующего любой диаграмме (*правила Фейнмана* [8]).

1) Каждой внешней электронной линии соответствует биспинор одного из типов $\frac{u^{\mu}(p)}{\sqrt{2\varepsilon}}$, $\frac{\bar{u}^{\mu}(p)}{\sqrt{2\varepsilon}}$, $\frac{u^{\mu}(-p)}{\sqrt{2\varepsilon}}$, $\frac{\bar{u}^{\mu}(-p)}{\sqrt{2\varepsilon}}$, причем $u^{\mu}(p)$ и $\bar{u}^{\mu}(p)$ соответ-

ствуют поглощению и испусканию электронов с импульсом p и поляризацией μ , а $u^\mu(-p)$ и $\bar{u}^\mu(-p)$ — поглощению и испусканию позитрона с импульсом p и поляризацией μ .

2) Каждой внешней фотонной линии, изображающей фотон, соответствует матрица $\frac{\hat{e}}{\sqrt{2\omega}}$, где ω — частота и e_μ — единичный 4-вектор поляризации фотона.

Каждой внешней фотонной линии, изображающей внешнее электромагнитное поле, соответствует матрица $\frac{\hat{A}^{(e)}(q)}{(2\pi)^4}$.

3) Каждой внутренней электронной линии с импульсом p соответствует матрица $i \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}$.

4) Каждой внутренней фотонной линии с импульсом k соответствует множитель $\frac{1}{i} \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} + d_l(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$, а ее концам — матрицы γ_μ и γ_ν .

5) Каждой вершине графика соответствует δ -функция, содержащая импульсы всех линий, сходящихся в эту вершину, причем импульсы на обоих концах внутренней линии берутся с противоположными знаками.

6) Все матрицы, действующие на спинорные индексы, располагаются справа налево в такой последовательности, в которой они встречаются, если двигаться по направлению электронной линии.

7) Если диаграмма содержит замкнутую электронную петлю с четным числом электронных линий, то в $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ входит в качестве сомножителя взятый с обратным знаком след произведения матриц $i \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}$ и γ_μ , относящихся к отдельным линиям петли и ее вершинам.

Матричные элементы диаграмм, содержащих замкнутые электронные петли с нечетным числом электронных линий, равны нулю.

8) Численный множитель, стоящий в $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ перед произведением биспиноров $\frac{u^\mu(\pm p)}{\sqrt{2\varepsilon}}$ и матриц $\frac{\hat{e}}{\sqrt{2\omega}}$, γ_μ , S_c , равен $(-1)^{n+l} \xi \delta_P (2\pi)^{4(n-F)}$, где F — общее число внутренних линий, l — число электронных петель с четным числом электронных линий, δ_P — четность перестановки индексов импульсов электронов $\left(\begin{matrix} 1, & 2, & \dots \\ j_1, & j_2, & \dots \end{matrix} \right)$ ($1, 2, \dots$ нумеруют начальные, а j_1, j_2, \dots — конечные импульсы электронов), $\xi = \frac{r}{n!}$ (r — число эквивалентных нормальных произведений, соответствующих рассматриваемой диаграмме).

9) По четырехмерным импульсам внутренних линий, изображающих виртуальные частицы, и по переменным q , связанным с внешними потенциалами, производятся интегрирование, а по четырехмерным поляризациям виртуальных фотонов — суммирование.

Рассмотрим в качестве примера рассеяние фотона электроном во втором приближении теории возмущений. Этому процессу (подробно он будет изучен в § 26) соответствуют две диаграммы, изображенные на рис. 17.9 и отличающиеся друг от друга только последовательностью действия фотонных операторов.

Элемент матрицы $\mathbf{S}^{(2)}$, соответствующий процессу рассеяния фотона электроном, может быть сразу написан на основании правил Фейнмана $\langle 1_{p_2}^+ 1_{k_2} | \mathbf{S}^{(2)} | 1_{p_1}^+ 1_{k_1} \rangle =$

$$= ie^2 (2\pi)^4 \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \left(\frac{\hat{e}_2}{\sqrt{2\omega_2}} \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) - m}{(p_1 + k_1)^2 + m^2} \frac{\hat{e}_1}{\sqrt{2\omega_1}} + \frac{\hat{e}_1}{\sqrt{2\omega_1}} \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k}_2) - m}{(p_1 + k_2)^2 + m^2} \frac{\hat{e}_2}{\sqrt{2\omega_2}} \right) \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \delta(p_2 - p_1 + k_2 - k_1),$$

где p_1 и k_1 — 4-импульсы электрона фотона до рассеяния, p_2 и k_2 — аналогичные величины после рассеяния, e_1 и e_2 — единичные 4-векторы поляризации фотонов и, наконец, $u_1 = u(p_1)$, $\bar{u}_2 = \bar{u}(p_2)$.

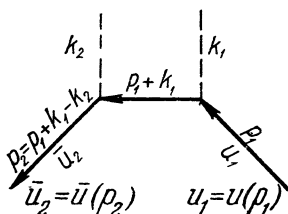


Рис. 17.9.

Топологически такие же диаграммы соответствуют двухфотонной аннигиляции электрон-позитронной пары (рис. 17.10).

Элемент матрицы $\mathbf{S}^{(2)}$, соответствующий этому процессу, равен, согласно правилам Фейнмана,

$$\langle 1_{k_1} 1_{k_2} | \mathbf{S}^{(2)} | 1_{p^+} 1_{p^-} \rangle = ie^2 (2\pi)^4 \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon^-}} \left(\frac{\hat{e}_2}{\sqrt{2\omega_2}} \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_1) - m}{(p_1 - k_1)^2 + m^2} \frac{\hat{e}_1}{\sqrt{2\omega_1}} + \frac{\hat{e}_1}{\sqrt{2\omega_1}} \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) - m}{(p_1 - k_2)^2 + m^2} \frac{\hat{e}_2}{\sqrt{2\omega_2}} \right) \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon^+}} \delta(p_2 - p_1 + k_1 + k_2),$$

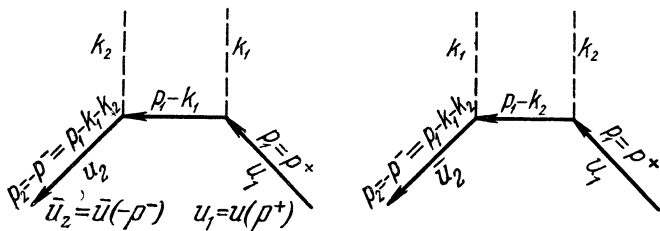


Рис. 17.10.

где $p_1 \equiv p^+$ — 4-импульс электрона и $-p_2 \equiv p^-$ — 4-импульс позитрона (подробно двухфотонная аннигиляция пары будет изучена в § 30).

§ 18. Вероятность и эффективное сечение

18.1. Амплитуда рассеяния и вероятность. В отсутствие взаимодействия, когда состояния частиц не меняются, матрица рассеяния \mathbf{S} совпадает, очевидно, с единичной матрицей I . Поэтому удобно положить

$$\mathbf{S} = I + iT \tag{18.1.1}$$

и связывать вероятности различных процессов $P_{i \rightarrow f}$ с элементами матрицы T ;

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | T | i \rangle|^2,$$

где i и f служат для обозначения начального и конечного состояний системы взаимодействующих полей (фазовый множитель перед T может быть выбран произвольно; сделанный в (18.1.1) выбор соответствует выбору фазового множителя в матричных элементах в нерелятивистской квантовомеханической теории рассеяния).

Если в процессе участвуют только свободные частицы, то из матричного элемента $\langle f | T | i \rangle$ можно выделить δ -функцию, содержащую разности 4-импульсов частиц в начальном (p_i) и конечном (p_f) состояниях,

$$\langle f | \dot{T} | i \rangle = (2\pi)^4 M_{i \rightarrow f} \delta \left(\sum p_i - \sum p_f \right)$$

(величину $M_{i \rightarrow f}$ называют *амплитудой рассеяния* для соответствующего процесса). Поэтому вероятность процесса $P_{i \rightarrow f}$ будет пропорциональна квадрату $\delta \left(\sum p_i - \sum p_f \right)$. Заменяв одну из этих δ -функций интегралом

$$\delta(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{iqx}, \quad q = \sum p_i - \sum p_f,$$

мы будем считать область интегрирования в нем ограниченной, т. е. заменим δ -функцию на $V \Delta t / (2\pi)^4$, где Δt — интервал интегрирования по времени и V — пространственный объем интегрирования.

Таким образом, вероятность процесса $i \rightarrow f$ пропорциональна времени Δt , и мы можем поэтому ввести вероятность, отнесенную к единице времени,

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{P_{i \rightarrow f}}{\Delta t} = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta \left(\sum p_i - \sum p_f \right) \quad (18.1.2)$$

(объем V , т. е. объем, на который нормированы волновые функции частиц, считаем для простоты равным единице).

Так как в рассматриваемом процессе начальное и конечное состояния частиц относятся к непрерывному спектру, то практический интерес представляет знание вероятности того, что трехмерные импульсы частиц p_f в конечном состоянии находятся в заданных интервалах d^3p_f . Чтобы найти эту вероятность, которую мы обозначим через $dw_{i \rightarrow f}$, нужно умножить $W_{i \rightarrow f}$ на $\prod \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}$, где $\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}$ — число состояний частицы с определенной поляризацией, для которой импульс p_f лежит в интервале d^3p_f (напомним, что нормировочный объем равен единице):

$$dw_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta \left(\sum p_i - \sum p_f \right) \prod \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}. \quad (18.1.3)$$

Выполнив интегрирование по одному из импульсов p_f , мы устраним в $dw_{i \rightarrow f}$ три пространственные δ -функции:

$$dw_{i \rightarrow f} = 2\pi |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta \left(\sum \varepsilon_i - \sum \varepsilon_f \right) \prod' \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}, \quad (18.1.4)$$

где штрих над произведением означает, что из него исключен один из множителей $\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}$; ε_i и ε_f представляют собой энергии частиц в начальном и конечном состояниях.

Чтобы устранить δ -функцию от энергии, представим какой-либо из множителей, входящих в произведение \prod' , в виде

$$\frac{d^3p'_f}{(2\pi)^3} = \frac{|p'_f| \varepsilon'_f}{(2\pi)^3} d\varepsilon'_f d\omega,$$

где do — элемент телесного угла, в котором лежит вектор \mathbf{p}'_f . Выполнив интегрирование по $d\varepsilon'_f$, получим

$$dw_{i \rightarrow f} = 2\pi |M_{i \rightarrow f}|^2 \rho \prod'' \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}, \quad (18.1.5)$$

где

$$\rho = \int \frac{|\mathbf{p}'_f| \varepsilon'_f}{(2\pi)^3} \delta \left(\sum \varepsilon_i - \sum \varepsilon_f \right) d\varepsilon'_f,$$

и Π'' обозначает произведение Π' , но без одного из множителей $\frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3}$.

Если в процессе участвуют частицы, находящиеся в постоянном внешнем поле, то импульс не сохраняется, а сохраняется только энергия. В этом случае из $\langle f | \mathbf{T} | i \rangle$ можно выделить только δ -функцию, содержащую энергию частиц:

$$\langle f | \mathbf{T} | i \rangle = 2\pi M_{i \rightarrow f} \delta \left(\sum \varepsilon_i - \sum \varepsilon_f \right).$$

Поступая так же, как и выше, найдем вероятность процесса $i \rightarrow f$, отнесенную к единице времени:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{P_{i \rightarrow f}}{\Delta t} = 2\pi |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta \left(\sum \varepsilon_i - \sum \varepsilon_f \right). \quad (18.1.6)$$

Наконец, умножив $W_{i \rightarrow f}$ на $\prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}$, получим вероятность того, что импульсы частиц \mathbf{p}_f лежат в интервалах $d^3 p_f$:

$$dw_{i \rightarrow f} = 2\pi |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta \left(\sum \varepsilon_i - \sum \varepsilon_f \right) \prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (18.1.7)$$

Это выражение, в отличие от (18.1.4), содержит под знаком произведения импульсы всех частиц в конечном состоянии.

18.2. Суммирование по состояниям поляризации электронов и фотонов.

Во многих случаях нас не интересует определенное состояние поляризации возникающих частиц (т. е. ориентации спинов электронов и направления поляризации фотонов). В этих случаях вероятность $dw_{i \rightarrow f}$ должна быть просуммирована по возможным состояниям поляризации частиц в конечном состоянии. Если, кроме того, в начальном состоянии частицы не поляризованы, то вероятность $dw_{i \rightarrow f}$ должна быть еще усреднена по поляризациям частиц в начальном состоянии.

Покажем, как производится суммирование и усреднение по поляризациям частиц. Рассмотрим сначала тот случай, когда в начальном и в конечном состояниях имеется только один электрон. Амплитуда рассеяния $M_{i \rightarrow f}$ имеет тогда вид

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{u}_f Q u_i,$$

где $u_i \equiv u(p_i)$ и $u_f \equiv u(p_f)$ — спинорные амплитуды электрона в начальном и конечном состояниях и Q — некоторая матрица. Нас интересует величина $\frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |M_{i \rightarrow f}|^2$ (μ_i и μ_f — проекции спина электрона в начальном и конечном состояниях), которая может быть найдена согласно (9.4.8):

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |\bar{u}_f Q u_i|^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} \{ Q (m - i\hat{p}_i) \bar{Q} (m - i\hat{p}_f) \}, \quad (18.2.1)$$

где $\bar{Q} = \gamma_4 Q^+ \gamma_4$.

Аналогично, если в начальном и конечном состояниях имеется только один позитрон, то

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{v}_i Q v_f,$$

где $v_i \equiv u(-p_i)$ и $v_f \equiv u(-p_f)$ — спинорные амплитуды позитрона в начальном и конечном состояниях (p_i и p_f — импульсы позитрона в этих состояниях). В этом случае, согласно (§ 9.4),

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |\bar{v}_i Q v_f|^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} \{Q(m + i\hat{p}_f) \bar{Q}(m + i\hat{p}_i)\}. \quad (18.2.2)$$

Наконец, если одно из состояний является электронным, а другое позитронным, то, очевидно,

$$M_{i \rightarrow f} = \begin{cases} \bar{u}_f Q v_f & \text{в случае образования пары,} \\ \bar{v}_i Q u_i & \text{в случае аннигиляции пары} \end{cases}$$

и соответствующие величины определяются формулами

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |\bar{u}_f Q v_f|^2 = -\frac{1}{2} \text{Sp} \{Q(m + i\hat{p}^-) \bar{Q}(m - i\hat{p}^+)\}, \quad (18.2.3)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |\bar{v}_i Q u_i|^2 = -\frac{1}{2} \text{Sp} \{Q(m - i\hat{p}^+) \bar{Q}(m + i\hat{p}^-)\},$$

где p^+ и p^- — 4-импульсы электрона и позитрона,

Аналогичным образом можно производить суммирование по поляризации и в более сложных случаях, когда в процессе участвует несколько электронов и позитронов. При этом нужно пользоваться приведенными формулами, считая, что матрица Q содержит сама по себе спинорные амплитуды, и производить суммирование по относящимся к ним поляризациям снова по формулам (18 2 1) — (18 2 3).

Покажем теперь, как производить суммирование и усреднение по поляризациям фотонов. Пусть, например, в конечном состоянии имеется фотон с импульсом \mathbf{k} и поляризацией λ ($\lambda = 1, 2$). Элемент матрицы рассеяния, соответствующий переходу $i \rightarrow f$, можно в этом случае записать в виде

$$(\Phi_f, \mathbf{S}\Phi) = (c_{k\lambda}^+ \Phi_f, \mathbf{S}\Phi_i),$$

где Φ_i, Φ_f — векторы начального и конечного состояний и Φ_f — вектор состояния, не содержащий фотонов с импульсом \mathbf{k} и поляризацией λ . Состояния Φ_i, Φ_f мы будем считать физическими, так что

$$(c_{k3} + i c_{k4}) \Phi_i = 0.$$

Вспомня, что

$$(c_{k3} + i c_{k4}) \mathbf{S} = \mathbf{S} (c_{k3} + i c_{k4}),$$

легко заключить, что

$$(c_{k3}^+ \Phi_f, \mathbf{S}\Phi_i) = -i (c_{k4}^+ \Phi_f, \mathbf{S}\Phi_i).$$

Поэтому интересующая нас величина

$$\sum_{\lambda=1, 2} |(\Phi_f, \mathbf{S}\Phi_i)|^2 = \sum_{\lambda=1, 2} |(c_{k\lambda}^+ \Phi_f, \mathbf{S}\Phi_i)|^2$$

может быть представлена в виде

$$\sum_{\lambda=1, 2} |(\Phi_f, \mathbf{S}\Phi_i)|^2 = \sum_{\lambda=1, 2, 3} |(\mathbf{c}_{k\lambda}^+ \Phi_f, \mathbf{S}\Phi_i)|^2 - |(\mathbf{c}_{k4}^+ \Phi_f, \mathbf{S}\Phi_i)|^2. \quad (18.2.4)$$

Если в состояниях i и f имеется электрон, то величину $M_{i \rightarrow f}$, соответствующую элементу матрицы рассеяния $(\Phi_f, \mathbf{S}\Phi_i)$, можно представить в виде

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{u}_f Q \hat{e}^{(\lambda)} Q' u_i,$$

где u_i, u_f — спинорные амплитуды электрона в начальном и конечном состояниях, Q и Q' — некоторые матрицы и $\hat{e}^{(\lambda)} = e_\mu^{(\lambda)} \gamma_\mu$ ($e_\mu^{(\lambda)}$ — единичный вектор поляризации фотона). Мы видим, таким образом, что

$$\sum_{\lambda=1, 2} |M_{i \rightarrow f}|^2 = \sum_{\lambda=1, 2, 3} |\bar{u}_f Q \hat{e}^{(\lambda)} Q' u_i|^2 - |\bar{u}_f Q \hat{e}^{(4)} Q' u_i|^2.$$

Но

$$M_{i \rightarrow f}^* = \bar{u}_i \bar{Q}' \gamma_4 \hat{e}^{(\lambda)} \gamma_4 \bar{Q} u_f,$$

где $\bar{Q} = \gamma_4 Q^+ \gamma_4$. Поэтому

$$\sum_{\lambda=1, 2} |M_{i \rightarrow f}|^2 = - \sum_{\lambda=1}^4 (\bar{u}_f Q \hat{e}^{(\lambda)} Q' u_i) (\bar{u}_i \bar{Q}' \hat{e}^{(\lambda)} \bar{Q} u_f).$$

Замечая, что

$$\sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu},$$

получим окончательно

$$\sum_{\lambda=1, 2} |M_{i \rightarrow f}|^2 = - (\bar{u}_f Q \gamma_\mu Q' u_i) (\bar{u}_i \bar{Q}' \gamma_\mu \bar{Q} u_f). \quad (18.2.5)$$

Это важное соотношение показывает, что суммирование по двум поперечным поляризациям фотона может быть заменено суммированием по четырем поляризациям, включающим поляризации продольного и скалярного фотонов.

Суммирование по четырем поляризациям производится с помощью формул

$$\begin{aligned} \gamma_\mu s \gamma_\mu &= 4s, \\ \gamma_\mu \hat{a} \gamma_\mu &= -2\hat{a}, \end{aligned} \quad (18.2.6)$$

$$\gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \gamma_\mu = 4ab,$$

$$\gamma_\mu \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma_\mu = -2\hat{c} \hat{b} \hat{a},$$

где s — скаляр, а a, b, c — 4-векторы и $ab = a_\mu b_\mu$.

Если выражение (18.2.5) должно быть просуммировано по ориентациям спина электрона, то это может быть сделано с помощью формул (18.2.1), (18.2.2), (18.2.3).

Соотношения, аналогичные (18.2.5), могут быть записаны, очевидно, и для произвольного числа фотонов.

18.3. Эффективное сечение. До сих пор мы характеризовали процесс рассеяния его вероятностью. Вероятность является физической, реально измеримой характеристикой процесса в том случае, когда начальное состоя-

ние является одночастичным. Но легко видеть, что если сталкиваются две свободные частицы, то эта величина будет обратно пропорциональна нормировочному объему V , который может быть выбран произвольно. Чтобы получить величину, характеризующую процесс рассеяния и не зависящую от V , нужно разделить дифференциальную вероятность рассеяния $d\omega_{i \rightarrow f}$ на плотность потока сталкивающихся частиц j , которая также обратно пропорциональна V . Определенная таким образом величина называется *дифференциальным эффективным сечением рассеяния* и обозначается через $d\sigma$:

$$d\sigma = \frac{d\omega_{i \rightarrow f}}{j}. \quad (18.3.1)$$

Дадим теперь определение величине плотности потока сталкивающихся частиц. Естественное определение мы имеем в том случае, когда одна из частиц (рассеиватель) до столкновения покоилась. В этом случае

$$j^{(0)} = n_1^{(0)} v_1^{(0)}, \quad v_2^{(0)} = 0,$$

где $n_1^{(0)}$ и $v_1^{(0)}$ — плотность и скорость движущихся частиц в системе покоя рассеивателя (значок 0 служит для обозначения этой системы, а индекс 2 — для обозначения величин, относящихся к рассеивателю). Поэтому в системе покоя рассеивателя дифференциальное эффективное сечение рассеяния определяется как

$$d\sigma^{(0)} = \frac{d\omega_{i \rightarrow f}^{(0)}}{n_1^{(0)} v_1^{(0)}}.$$

В системе отсчета, в которой рассеиватель движется со скоростью \mathbf{v}_2 , отличной от нуля (система K) определение плотности потока j , вообще говоря, неоднозначно. Мы можем лишь написать

$$j = n_1 v',$$

где v' — произвольная величина, переходящая при $v_2 = 0$ в $v_1^{(0)}$.

Можно, однако, как мы сейчас покажем, определить v' таким образом, чтобы эффективное сечение рассеяния было релятивистским инвариантом.

Заметим с этой целью, что общее число процессов рассеяния в объеме V за время Δt должно быть, очевидно, инвариантом, т. е.

$$d\omega_{i \rightarrow f}^{(0)} n_2^{(0)} \Delta t^{(0)} V^{(0)} = d\omega_{i \rightarrow f} n_2 \Delta t V,$$

где n_2 — плотность рассеивателей в системе K . Но $\Delta t^{(0)} V^{(0)} = \Delta t V$ и, следовательно,

$$d\sigma^{(0)} n_1^{(0)} n_2^{(0)} v_1^{(0)} = d\sigma j n_2.$$

Подставляя сюда $j = n_1 v'$, получим

$$d\sigma^{(0)} n_1^{(0)} n_2^{(0)} v_1^{(0)} = d\sigma n_1 n_2 v'.$$

Учтем теперь, что величины $(n_1 \mathbf{v}_1, i n_1)$ и $(n_2 \mathbf{v}_2, i n_2)$ образуют 4-векторы. Поэтому

$$n_1 n_2 (1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) = n_1^{(0)} n_2^{(0)},$$

и написанное соотношение приобретает вид

$$d\sigma^{(0)} v_1^{(0)} (1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) = d\sigma v'.$$

Мы видим, таким образом, что если положить

$$v' = v_1^{(0)} (1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2),$$

т. е. определить j как

$$j = n_1 v_1^{(0)} (1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2), \quad (18.3.2)$$

то эффективное сечение рассеяния будет инвариантом

$$d\sigma = d\sigma^{(0)}.$$

Этим определением мы и будем в дальнейшем пользоваться.

Если скорости \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 коллинеарны, то

$$\mathbf{v}_1^{(0)} = \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}$$

$$v' = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|, \quad j = n_1 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|.$$

В том случае, если падающей частицей является фотон, $v_1 = 1$ и

$$v' = 1 - v_2 \cos \vartheta, \quad j = n_1 (1 - v_2 \cos \vartheta),$$

где ϑ — угол между векторами \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 .

Легко видеть, что

$$v_1^{(0)} = \frac{-\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{p_1 p_2},$$

где p_1, p_2 — 4-векторы импульсов сталкивающихся частиц и m_1, m_2 — их массы. Отсюда следует:

$$v' = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}, \quad (18.3.3)$$

где ε_1 и ε_2 — энергии сталкивающихся частиц.

Заметим, что эта формула применима также и в том случае, когда сталкивающимися частицами являются два фотона.

Используя эту формулу и определения (18.3.1) и (18.1.3), получим следующее общее выражение для дифференциального эффективного сечения процесса рассеяния $i \rightarrow f$:

$$d\sigma = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta(p_1 + p_2 - \sum p_f) \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}, \quad (18.3.4)$$

где индексы 1, 2 относятся к частицам в начальном состоянии и индекс f — к частицам в конечном состоянии (при вычислении $M_{i \rightarrow f}$ считается, что $V = 1$).

Выражение для $d\sigma$ можно переписать так, чтобы оно содержало только инвариантные величины. Выделим с этой целью из $M_{i \rightarrow f}$ те множители, которые не инвариантны. Эти множители происходят от матричных элементов операторов полей и имеют, согласно (16.3.2), (16.3.5), вид $\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}}$, где ε_k — энергия фотона или электрона (позитрона). Если поэтому записать $M_{i \rightarrow f}$ в виде

$$M_{i \rightarrow f} = A_{i \rightarrow f} \prod \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}}, \quad (18.3.5)$$

где произведение распространяется на все частицы как в начальном, так и в конечном состояниях, то величина $A_{i \rightarrow f}$ будет релятивистским инвариантом.

Подставив это выражение в (18.3.4) и используя соотношение

$$\int \frac{d^3 p_f}{\varepsilon_f} = 2 \int d^4 p_f \delta(p_f^2 + m_f^2) \theta(\varepsilon_f), \quad (18.3.6)$$

где

$$\theta(\varepsilon_f) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_f > 0, \\ 0, & \varepsilon_f < 0 \end{cases}$$

(величина $\theta(\varepsilon_f)$ является, очевидно, релятивистским инвариантом), получим

$$d\sigma = (2\pi)^4 |A_{i \rightarrow f}|^2 \frac{\delta(p_1 + p_2 - \sum_f p_f)}{4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod_f \left(\frac{d^4 p_f \delta(p_f^2 + m_f^2) \theta(\varepsilon_f)}{(2\pi)^3} \right). \quad (18.3.7)$$

Это и есть релятивистски инвариантная форма эффективного сечения рассеяния.

18.4. Вероятность процессов рассеяния поляризованных частиц. Покажем, как вычислять вероятности и сечения рассеяния частично поляризованных частиц. Начнем с рассмотрения электронов, причем будем сначала предполагать, что в начальном и конечном состояниях имеется только один электрон. В этом случае амплитуда рассеяния, так же как и в § 18.2, определяется формулой

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{u}_f Q u_i,$$

и вероятность процесса пропорциональна

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 = (\bar{u}_f Q u_i) (\bar{u}_i \bar{Q} u_f) = u_{i\alpha} \bar{u}_{i\alpha'} \bar{Q}_{\alpha'\beta'} u_{f\beta} \bar{u}_{f\beta} Q_{\beta\alpha}, \quad (18.4.1)$$

где $\bar{Q} = \gamma_4 Q^+ \gamma_4$ (α, β обозначают спинорные индексы).

Если электрон в начальном состоянии характеризуется определенной поляризацией, то эта формула является окончательной. Если же начальное состояние является не полностью, а частично поляризованным, то в формуле (18.4.1) следует произвести замену

$$u_{i\alpha} \bar{u}_{i\alpha'} \rightarrow (\rho_i)_{\alpha\alpha'},$$

где ρ_i — матрица плотности электрона в начальном состоянии, определяемая формулой (9.4.8),

$$\rho_i = \frac{1}{2} (m - i \hat{p}_i) (I + i \gamma_5 \hat{s}_i) \quad (18.4.2)$$

и s_i — 4-вектор поляризации электрона в начальном состоянии. Согласно (9.4.10) он связан с вектором поляризации ξ_i в системе покоя соотношением

$$s_i = \xi_i + \frac{(\xi_i p_i) p_i}{m(\varepsilon_i + m)}, \quad s_{i0} = \frac{p_i \xi_i}{m}$$

(индекс i служит для обозначения величин в начальном состоянии).

Что касается определения поляризации электрона в конечном состоянии, то здесь возможны две постановки задачи. нахождение вероятности того, что электрон в конечном состоянии будет обладать определенной поляризацией, и нахождение поляризационного состояния образовавшейся частицы, т. е. нахождение матрицы плотности электрона в конечном состоянии.

Первая постановка задачи отвечает определенному типу измерения, которое производится с помощью детектора, выделяющего определенное поляризационное состояние. Если это состояние характеризуется вектором ξ_d , то для решения задачи нужно в (18.4.1) произвести замену

$$\bar{u}_{f\beta} u_{f\beta'} \rightarrow (\rho_d)_{\beta\beta'},$$

где ρ_d — матрица плотности, характеризующая детектор и имеющая ту же структуру, что и матрица ρ_i ,

$$\rho_d = \frac{1}{2} (m - i\hat{p}_f) (I + i\gamma_5 \hat{s}_d). \quad (18.4.3)$$

Здесь p_f — 4-импульс электрона в конечном состоянии и s_d — 4-вектор поляризации, характеризующий детектор,

$$s_d = \xi_d + \frac{(\xi_d p_f) p_f}{m(\epsilon_f + m)}, \quad s_{d0} = \frac{p_f \xi_d}{m},$$

и удовлетворяющий условию $s_d p_f = 0$.

Таким образом, для нахождения вероятности того, что электрон в конечном состоянии будет обладать поляризацией ξ_d , нужно в формуле (18.1.3) произвести замену

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 \rightarrow \text{Sp}(\rho_i \bar{Q} \rho_d Q). \quad (18.4.4)$$

Обратимся теперь ко второй постановке задачи — нахождению матрицы плотности электрона в конечном состоянии ρ_f . Заметим с этой целью, что вероятность того, что электрон, описываемый биспинором u_f , обладает определенной поляризацией, которой соответствует биспинор u_d , пропорциональна $|\bar{u}_d u_f|^2 = u_{d\alpha} \bar{u}_{d\beta} u_{f\alpha} u_{f\beta}$. Поскольку мы имеем дело не с чистыми, а со смешанными состояниями, соответствующими частичной поляризации, то в этом выражении нужно произвести замену

$$u_{d\alpha} \bar{u}_{d\beta} \rightarrow (\rho_d)_{\alpha\beta}, \quad u_{f\alpha} \bar{u}_{f\beta} \rightarrow (\rho_f)_{\alpha\beta}.$$

Поэтому интересующая нас вероятность будет пропорциональна $\text{Sp}(\rho_f \rho_d)$. С другой стороны, эта вероятность, согласно (18.4.4), пропорциональна $\text{Sp}(\rho_i \bar{Q} \rho_d Q)$, т. е.

$$\text{Sp}(\rho_f \rho_d) \sim \text{Sp}(\rho_i \bar{Q} \rho_d Q). \quad (18.4.5)$$

Это соотношение позволяет найти матрицу ρ_f , так как она определяется только 4-вектором поляризации s_f электрона в конечном состоянии,

$$\rho_f = \frac{1}{2} (m - i\hat{p}_f) (I + i\gamma_5 \hat{s}_f), \quad s_f p_f = 0.$$

Действительно, подставляя это выражение и аналогичное выражение для ρ_d в (18.4.5) и учитывая, что $s_d p_f = 0$, мы получим слева величину, пропорциональную $(I + s_{f\mu} s_{d\mu})$, а справа — величину, пропорциональную $(I + b_\mu s_{d\mu})$, где b — некоторый 4-вектор, зависящий от s_i , ρ_i и p_f . Так как $s_d p_f = 0$, то, не изменяя величины $I + b_\mu s_{d\mu}$, можно выбрать b таким образом, чтобы $b p_f = 0$. В этом случае, согласно (18.4.5), 4-вектор b будет совпадать с 4-вектором s_f . Легко убедиться, что

$$s_{f\mu} = \frac{1}{2m} \frac{\text{Sp}\{\rho_i \bar{Q} (m - i\hat{p}_f) i\gamma_5 \gamma_\mu (m - i\hat{p}_f) Q\}}{\text{Sp}\{\rho_i \bar{Q} (m - i\hat{p}_f) Q\}}. \quad (18.4.6)$$

Отсюда можно найти матрицу плотности электрона в конечном состоянии

$$\rho_f = \frac{\{(m - i\hat{p}_f) Q \rho_i \bar{Q} (m - i\hat{p}_f)\}}{\text{Sp}\{(m - i\hat{p}_f) Q \rho_i \bar{Q}\}}. \quad (18.4.7)$$

Мы предполагали до сих пор, что начальное и конечное состояния являются электронными. Аналогичным образом можно рассмотреть также случаи, когда начальное и конечное состояния являются позитронными

либо одно из состояний является электронным, а другое позитронным. В первом из этих случаев амплитуда рассеяния имеет вид

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{v}_i Q v_f,$$

и вместо (18.4.4) мы получим формулу

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 \rightarrow \text{Sp} \{ \rho_i^{(-)} \bar{Q} \rho_f^{(-)} Q \}, \quad (18.4.8)$$

где $\rho_i^{(-)}$ — матрица плотности позитрона в начальном состоянии, определяемая формулой (9.4.8),

$$\rho_i^{(-)} = \frac{1}{2} (-m - i\hat{p}_i) (I + i\gamma_5 \hat{s}_i^-),$$

\hat{s}_i^- — 4-вектор поляризации позитрона в начальном состоянии и $\rho_f^{(-)}$ — аналогичная матрица, характеризующая свойства детектора.

Нетрудно видеть, что 4-вектор поляризации позитрона в конечном состоянии определяется формулой

$$s_{i\mu}^{(-)} = \frac{1}{2m} \frac{\text{Sp} \{ (m + i\hat{p}_f) \bar{Q} \rho_i^{(-)} Q (m + i\hat{p}_f) i\gamma_5 \gamma_\mu \}}{\text{Sp} \{ (m + i\hat{p}_f) \bar{Q} \rho_i^{(-)} Q \}}, \quad (18.4.9)$$

а матрица плотности в конечном состоянии имеет вид

$$\rho_f^{(-)} = - \frac{\{ (m + i\hat{p}_f) \bar{Q} \rho_i^{(-)} Q (m + i\hat{p}_f) \}}{\text{Sp} \{ (m + i\hat{p}_f) \bar{Q} \rho_i^{(-)} Q \}}. \quad (18.4.10)$$

Эти результаты легко обобщаются на случай многих электронов и позитронов.

Перейдем теперь к рассмотрению процессов рассеяния, в которых участвуют частично поляризованные фотоны. Пусть для простоты в начальном и конечном состояниях имеется только по одному фотону. Тогда амплитуда рассеяния будет иметь вид

$$M_{i \rightarrow f} = e_{i\alpha} Q_{\alpha\beta} e_{f\beta}^*,$$

где e_i и e_f — векторы поляризаций фотонов в начальном и конечном состояниях и Q — некоторая матрица. Для нахождения вероятности процесса $i \rightarrow f$ в случае частичной поляризации фотона в начальном состоянии нужно, найдя $|M_{i \rightarrow f}|^2$,

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 = e_{i\alpha} Q_{\alpha\beta} e_{f\beta}^* e_{i\alpha'}^* Q_{\alpha'\beta'} e_{f\beta'},$$

заменить $e_{i\alpha} e_{i\alpha'}^*$ элементом $(\rho_i^p)_{\alpha\alpha'}$ матрицы плотности фотона в начальном состоянии,

$$e_{i\alpha} e_{i\alpha'}^* \rightarrow (\rho_i^p)_{\alpha\alpha'}.$$

Напомним, что если пользоваться двумерными векторами поляризации фотона, то матрица плотности ρ_i^p имеет, согласно (2.4.3), вид

$$\rho_i^p = \frac{1}{2} (1 + \xi_i \tau),$$

где τ — матрицы Паули и ξ_i — параметры Стокса фотона в начальном состоянии.

При использовании 4-векторов поляризации матрицу плотности фотона можно определить следующим образом. Введем два единичных 4-вектора $n_\mu^{(1)}$ и $n_\mu^{(2)}$, ортогональных друг к другу и к 4-вектору импульса фотона,

$$\begin{aligned} kn^{(l)} &= 0, \\ n^{(l)} n^{(l')*} &= \delta_{ll'}, \quad (l = 1, 2). \end{aligned}$$

Тогда, очевидно,

$$e_\alpha = (en^{(l)*}) n_\alpha^{(l)}, \quad e_\alpha e_{\alpha'}^* = (en^{(l)*}) (e^* n^{(l')}) n_\alpha^{(l)} n_{\alpha'}^{(l')*},$$

и, следовательно, матрица плотности фотона ρ^p может быть представлена в виде

$$\rho_{\alpha\alpha'}^p = \overline{e_\alpha e_{\alpha'}^*} = \overline{(en^{(l)*}) (e^* n^{(l')})} n_\alpha^{(l)} n_{\alpha'}^{(l')*} = \frac{1}{2} (1 + \xi \tau)_{ll'} n_\alpha^{(l)} n_{\alpha'}^{(l')}. \quad (18.4.11)$$

Легко убедиться, что

$$\frac{1}{2} (1 + \xi \tau)_{ll'} = \rho_{\alpha\alpha'}^p n_\alpha^{(l)*} n_{\alpha'}^{(l')}. \quad (18.4.12)$$

Что касается определения поляризации фотона в конечном состоянии, то так же, как и в случае электронов, здесь возможны две постановки задачи: нахождение вероятности того, что фотон в конечном состоянии будет обладать определенной поляризацией, и нахождение матрицы плотности фотона в конечном состоянии.

Первая постановка задачи связана с определенным типом измерения, которое производится с помощью детектора, выделяющего определенное поляризационное состояние. Если это состояние характеризуется параметрами Стокса ξ_d , то для решения задачи нужно лишь произвести в выражении для $|M_{i \rightarrow f}|^2$ замену

$$e_{f\beta'} e_{f\beta}^* \rightarrow (\rho_d^p)_{\beta'\beta},$$

где ρ_d^p — матрица плотности, характеризующая детектор,

$$(\rho_d^p)_{\beta'\beta} = \frac{1}{2} (1 + \xi_d \tau)_{m'm} (n_d^{(m')})_\beta (n_d^{(m)*})_{\beta'}$$

и $n_d^{(m)}$ — два 4-вектора, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} n_d^{(m)} k_f &= 0, \\ n_d^{(m)} n_d^{(m')*} &= \delta_{mm'} \quad (m = 1, 2). \end{aligned}$$

Таким образом, искомая вероятность пропорциональна

$$P(\xi_d) = \text{Sp} (\rho_i^p Q^* \rho_d^p Q^T) = \text{Sp} \left\{ \frac{1}{2} (1 + \xi_i \tau) q^* \frac{1}{2} (1 + \xi_d \tau) q^T \right\}, \quad (18.4.13)$$

где

$$\begin{aligned} q_{i'm'}^* &= (n_i^{(l')*})_{\alpha'} Q_{\alpha}^*{}_{\beta'} (n_d^{(m')})_{\beta'}, \\ q_{ml}^T &= (n_d^{(m)*})_{\beta} Q_{\beta\alpha}^T (n_i^{(l)})_{\alpha}. \end{aligned}$$

Для решения задачи в ее второй постановке следует исходить из того, что если фотон в конечном состоянии характеризуется вектором поляризации e_f , то вероятность того, что с помощью детектора будет обнаружена поляризация e_d , определяется величиной $|e_f e_d^*|^2 = e_{f\alpha} e_{d\alpha}^* e_{f\alpha}^* e_{d\alpha}$. Производя в этом выражении замены

$$e_{d\alpha} e_{d\alpha}^* \rightarrow (\rho_d^p)_{\alpha'\alpha}, \quad e_{f\alpha} e_{f\alpha}^* \rightarrow (\rho_f^p)_{\alpha\alpha'},$$

где ρ_f^p — матрица плотности фотона в конечном состоянии,

$$(\rho_f^p)_{\beta\beta'} = \frac{1}{2} (1 + \xi_f \tau)_{mm'} (n_f^{(m)})_\beta (n_f^{(m')*})_{\beta'},$$

ξ_f — параметры Стокса фотона в конечном состоянии и $n_f^{(m)} \equiv n_d^{(m)}$, получим

$$P(\xi_d) \sim \text{Sp} (\rho_f^p \rho_d^p) \sim \frac{1}{2} (1 + \xi_d \xi_f). \quad (18.4.14)$$

Эта формула означает, что если сечение процесса, просуммированное по состояниям поляризации фотона в конечном состоянии, равно σ , то сечение, соответствующее образованию фотона с данными параметрами поляризации ξ_d , будет равно

$$\sigma_d = \frac{1}{2} \sigma (1 + \xi_f \xi_d).$$

Сравнивая выражения (18.4.13) и (18.4.14) для $P(\xi_d)$, можно найти параметры Стокса для фотона в конечном состоянии

$$\xi_f = \frac{\text{Sp} \{ (1 + \xi_i \tau) q^* \tau q^T \}}{\text{Sp} \{ (1 + \xi_i \tau) q^* q^T \}}, \quad (18.4.15)$$

где

$$q_{l^* m^*} = (n_i^{(l^*)})_{\alpha} Q_{\alpha^* \beta^*}^* (n_f^{(m^*)})_{\beta^*},$$

$$q_{ml}^T = (n_f^{(m)})_{\beta} Q_{\beta\alpha}^T (n_i^{(l)})_{\alpha}.$$

Легко видеть, что матрица плотности фотона в конечном состоянии имеет вид

$$\rho_f^P = \frac{Q^T \rho_i^P Q^*}{\text{Sp} (Q^T \rho_i^P Q^*)}. \quad (18.4.16)$$

Полученные результаты могут быть просто обобщены на тот случай, когда в начальном и конечном состояниях имеется не один, а произвольное число фотонов.

18.5. Использование обозначений, соответствующих псевдоевклидовой метрике. Наряду с принятыми в этой книге обозначениями, соответствующими евклидовой метрике 4-пространства (с мнимой четвертой компонентой 4-векторов), часто используются также обозначения, соответствующие псевдоевклидовой метрике с вещественной четвертой компонентой 4-векторов [8]. При этом скалярное произведение двух 4-векторов a и b определяется не как

$$ab = \sum_{\mu=1}^4 a_{\mu} b_{\mu} = \mathbf{ab} + a_4 b_4,$$

а как

$$\underline{ab} = a_0 b_0 - \mathbf{ab},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{i} a_4.$$

При таком определении скалярного произведения удобно вместо матриц γ_{μ} ($\mu = 1, 2, 3, 4$) применять другие матрицы, которые мы будем обозначать через γ_{μ}^F ($\mu = 0, 1, 2, 3$) и которые связаны с матрицами γ_{μ} соотношениями

$$\gamma_0^F = \gamma_4 = \beta, \quad \gamma_j^F = i\gamma_j = \beta\alpha_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (18.5.1)$$

Ясно, что матрица γ_0^F эрмитова, а матрицы γ_j^F ($j = 1, 2, 3$) антиэрмитовы:

$$(\gamma_0^F)^+ = \gamma_0^F, \quad (\gamma_j^F)^+ = -\gamma_j^F, \quad j = 1, 2, 3.$$

Матрицы γ_{μ}^F удовлетворяют, очевидно, соотношениям

$$\gamma_{\mu}^F \gamma_{\nu}^F + \gamma_{\nu}^F \gamma_{\mu}^F = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ 1, & \mu = \nu = 0, \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (18.5.2)$$

По аналогии с величиной

$$\hat{a} = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{a} + \gamma_4 a_4$$

теперь вводится величина

$$\underline{\hat{a}} = \underline{\boldsymbol{\gamma}^F} \mathbf{a} = \gamma_0^F a_0 - \boldsymbol{\gamma}^F \mathbf{a} = -i \hat{a}. \quad (18.5.3)$$

Используя (18.5.2), легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}^F \boldsymbol{\gamma}^F &= 4, & \underline{\hat{a}} \underline{\hat{b}} + \underline{\hat{b}} \underline{\hat{a}} &= 2 \underline{ab}, \\ \boldsymbol{\gamma}^F \underline{\hat{a}} \boldsymbol{\gamma}^F &\equiv \gamma_0^F \underline{\hat{a}} \gamma_0^F - \boldsymbol{\gamma}^F \underline{\hat{a}} \boldsymbol{\gamma}^F = -2 \underline{\hat{a}}, \\ \boldsymbol{\gamma}^F \underline{\hat{a}} \underline{\hat{b}} \boldsymbol{\gamma}^F &= 4 \underline{ab}, \\ \boldsymbol{\gamma}^F \underline{\hat{a}} \underline{\hat{b}} \underline{\hat{c}} \boldsymbol{\gamma}^F &= -2 \underline{\hat{c}} \underline{\hat{b}} \underline{\hat{a}}, \\ \frac{1}{4} \text{Sp } \underline{\hat{a}} \underline{\hat{b}} &= \underline{ab}, \\ \frac{1}{4} \text{Sp } \underline{\hat{a}} \underline{\hat{b}} \underline{\hat{c}} \underline{\hat{d}} &= \underline{ab} \cdot \underline{cd} + \underline{ad} \cdot \underline{cb} - \underline{ac} \cdot \underline{bd}. \end{aligned} \quad (18.5.4)$$

Уравнения Дирака в новых обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} (\hat{p} - e \underline{\hat{A}} - m) \psi &= 0, \\ \bar{\psi} (\hat{p} + e \underline{\hat{A}} + m) &= 0, \end{aligned} \quad (18.5.5)$$

где

$$\hat{p} = -i \left(\gamma_0^F \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\gamma}^F \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \equiv -i \underline{\boldsymbol{\gamma}^F} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0^F.$$

Легко видеть, что матрица зарядового сопряжения \mathbf{C} связана с матрицами γ_μ^F такими же соотношениями, как и с матрицами γ_μ

$$\mathbf{C} \gamma_\mu^F = -(\gamma_\mu^F)^T \mathbf{C}.$$

Прежний вид имеют определение оператора плотности тока

$$\mathbf{j}_\mu = eN [\bar{\psi}, \gamma_\mu^F \psi], \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

а также определения других билинейных форм; в них нужно лишь заменить γ_μ на γ_μ^F и γ_5 на

$$\gamma_5^F = i \gamma_0^F \gamma_1^F \gamma_2^F \gamma_3^F.$$

Для получения формул суммирования по поляризациям в новых обозначениях нужно в формулах (18.2.1), (18.2.2) и (18.2.3) произвести замену

$$i \hat{p} = -\underline{\hat{p}}.$$

Например, формула (18.2.1) приобретает теперь вид

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu_i, \mu_f} |\bar{u}_f Q u_i|^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} \{ Q (m + \underline{\hat{p}}_i) \bar{Q} (m + \underline{\hat{p}}_f) \},$$

где $\bar{Q} = \gamma_0^F Q^+ \gamma_0^F$.

Матрица плотности электрона, определяемая формулой (18.4.2), в новых обозначениях имеет вид

$$\rho_i = \frac{1}{2} (m + \underline{\hat{p}}_i) (I - \gamma_5^F \underline{\hat{S}}_i)$$

Наконец, чтобы переписать элементы \mathbf{S} -матрицы в новых обозначениях, нужно в прежних формулах произвести замены

$$\hat{e} = i\hat{e}, \quad \hat{p} = i\hat{p}, \quad \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{\underline{k}^2}.$$

В частности, функции $D_c(k)$ и $S_c(p)$ определяются теперь формулами

$$D_c(k) = \frac{i}{\underline{k}^2}, \quad S_c(p) = \frac{i}{\underline{p}-m} = i \frac{\hat{p}+m}{\underline{p}^2-m^2}.$$

§ 19. Свойства симметрии электромагнитного взаимодействия

19.1. Релятивистская инвариантность уравнений квантовой электродинамики. Электромагнитное взаимодействие обладает рядом свойств симметрии, которые проявляются в инвариантности уравнений квантовой электродинамики относительно соответствующих преобразований координат и операторов полей. Именно, уравнения квантовой электродинамики инвариантны по отношению к собственным преобразованиям Лоренца, преобразованиям отражения пространственных координат и обращения времени, преобразованию зарядового сопряжения и калибровочным преобразованиям.

Разъясним прежде всего релятивистскую инвариантность уравнений квантовой электродинамики.

Что касается уравнений движения квантовой электродинамики (15.1.1), то их релятивистская инвариантность, а также инвариантность по отношению к преобразованию пространственного отражения непосредственно следует из того, что операторы полей $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $A_\mu(x)$ преобразуются как функции координат и времени так же, как и соответствующие некантованные величины; сами же уравнения движения квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении не отличаются формально от классических уравнений Максвелла и Дирака, которые инвариантны по отношению к рассматриваемым преобразованиям. Добавочное условие (15.1.5) также имеет инвариантный вид. Поэтому нам остается рассмотреть перестановочные соотношения между операторами полей.

Форма (15.1.3) этих соотношений не является инвариантной, так как в них операторы полей берутся в один и тот же момент времени. Но перестановочным соотношениям может быть придана релятивистски инвариантная форма. Заметим с этой целью, что сформулированные нами перестановочные соотношения являются по существу выражением кинематической независимости переменных поля в различных точках пространства в заданный момент времени. С другой стороны, ясно, что это свойство полей должно иметь место не только в различных точках пространства в один и тот же момент времени, но и в более общем случае мировых точек, не связанных световым сигналом, т. е. точек $x_\mu(r, it)$, $x'_\mu(r', it')$, для которых

$$(x_\mu - x'_\mu)^2 = (r - r')^2 - (t - t')^2 > 0.$$

Отсюда следует, что те из перестановочных соотношений, которые выражают обращение в нуль коммутаторов или антикоммутаторов полей в один и тот же момент времени, могут быть переформулированы в следующем общем виде:

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), A_\nu(x')] &= 0, \\ \{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(x')\} &= \{\bar{\Psi}_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(x')\} = 0, \\ [A_\mu(x), \Psi_\alpha(x')] &= [A_\mu(x), \bar{\Psi}_\beta(x')] = 0, \quad (x - x')^2 > 0. \end{aligned} \quad (19.1.1)$$

Эти соотношения являются релятивистски инвариантными.

Рассмотрим, наконец, перестановочные соотношения, содержащие δ -функцию. Интегрируя их по произвольному трехмерному объему V , содержащему точку x , получим

$$\int_V \left[A_\mu(r, t), \frac{\partial}{\partial t} A_\nu(r', t) \right] d^3x' = i\delta_{\mu\nu},$$

$$\int_V \{ \Psi_\alpha(r, t), (\bar{\Psi}(r', t) \gamma_{\lambda})_\beta \} d^3x' = \delta_{\alpha\beta}.$$

Но эти соотношения можно переписать в релятивистски инвариантной форме:

$$\int_\sigma \left[A_\mu(x), \frac{\partial}{\partial x'_\lambda} A_\nu(x') \right] d\sigma'_\lambda = \delta_{\mu\nu},$$

$$\int_\sigma \{ \Psi_\alpha(x), (\bar{\Psi}(x') \gamma_\lambda)_\beta \} d\sigma'_\lambda = \frac{1}{i} \delta_{\alpha\beta},$$

где $d\sigma'_\lambda$ — четырехмерный вектор элемента гиперповерхности

$$d\sigma'_\lambda = \left(dx'_2 dx'_3 dt', dx'_1 dx'_3 dt', dx'_1 dx'_2 dt', \frac{1}{i} dx'_1 dx'_2 dx'_3 \right),$$

и интегрирование совершается по произвольной части пространственно-подобной гиперповерхности σ , включающей точку x .

Таким образом, в квантовой электродинамике как сами уравнения движения, так и перестановочные соотношения между операторами полей релятивистски инвариантны.

Ясно, что это доказательство является одновременно доказательством инвариантности уравнений квантовой электродинамики относительно преобразования отражения пространственных координат.

Релятивистская инвариантность уравнений квантовой электродинамики означает, что операторы полей $\Psi_\alpha(x)$, $A_\mu(x)$ и $\Psi'_\alpha(x)$, $A'_\mu(x)$ в разных системах отсчета, удовлетворяющие одинаковым уравнениям движения и одинаковым перестановочным соотношениям, должны быть связаны между собой каноническим преобразованием

$$\begin{aligned} \Psi'_\alpha(x) &= U \Psi_\alpha(x) U^{-1}, \\ A'_\mu(x) &= U A_\mu(x) U^{-1}, \end{aligned} \quad (19.1.3)$$

где U — некоторый унитарный оператор в пространстве чисел частиц,

$$U U^\dagger = I,$$

не зависящий от x , но зависящий от вида преобразования, связывающего рассматриваемые системы отсчета.

Мы будем рассматривать одновременно как преобразования смещения, так и преобразования вращения четырехмерного пространства, которым соответствуют неоднородные преобразования Лоренца (группу этих преобразований называют также *группой Пуанкаре*)

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu. \quad (19.1.4)$$

В этом случае оператор U будет функцией от $a_{\mu\nu}$ и a_μ ,

$$U = \dot{U}(a_{\mu\nu}, a_\mu).$$

Если преобразование $x_\mu \rightarrow x'_\mu$ является бесконечно малым, т. е.

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}, \quad a_\mu = \varepsilon_\mu,$$

где $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$, $|\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1$, $|\varepsilon_\mu| \ll 1$, то оператор U с точностью до квадратичных по $\varepsilon_{\mu\nu}$ и ε_μ членов может быть представлен в виде

$$U = I - iF, \quad (19.1.5)$$

где F — эрмитов оператор,

$$F^+ = F,$$

линейный относительно бесконечно малых величин $\varepsilon_{\mu\nu}$ и ε_μ :

$$F = \varepsilon_\mu P_\mu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M_{\mu\nu}. \quad (19.1.6)$$

Входящие сюда величины P_μ и $M_{\mu\nu}$ представляют собой 4-вектор энергии-импульса и 4-тензор моментов квантованных электронно-позитронного и электромагнитного полей. Мы убедимся в этом несколько позже, пока же заметим, что соотношение (19.1.6), определяющее бесконечно малое каноническое преобразование U (оператор F называется *генератором* этого преобразования), может по сути дела рассматриваться как наиболее общее определение 4-вектора энергии импульса и 4-тензора моментов для любой квантовомеханической системы.

При бесконечно малом преобразовании Лоренца соотношения (19.1.3) с учетом (19.1.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha(x) - \psi_\alpha(x) &\equiv \delta\psi_\alpha(x) = -i[F, \psi_\alpha(x)], \\ A'_\mu(x) - A_\mu(x) &\equiv \delta A_\mu(x) = -i[F, A_\mu(x)]. \end{aligned} \quad (19.1.7)$$

Отсюда могут быть получены важные соотношения для операторов полей, если заметить, что эти операторы должны преобразовываться согласно законам

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha(x') &= S_{\alpha\beta} \psi_\beta(x), \\ A'_\mu(x') &= a_{\mu\nu} A_\nu(x), \end{aligned} \quad (19.1.8)$$

где $S_{\alpha\beta}$ — матрица, определяющая преобразование биспинора $\psi(x)$ при лоренцевом преобразовании $x \rightarrow x' = ax$. В случае бесконечно малого преобразования

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}, \quad S_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} I_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}, \quad I_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]_{\alpha\beta}$$

эти формулы приобретают вид

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha(x) - \psi_\alpha(x) &= \frac{1}{2} \left[I_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \psi_\beta(x) - \left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi_\alpha(x) \right] \varepsilon_{\mu\nu} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_\alpha(x) \varepsilon_\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'_\lambda(x) - A_\lambda(x) &= \frac{1}{2} \left[(\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} - \delta_{\nu\lambda} \delta_{\mu\rho}) A_\rho(x) - \right. \\ &\left. - \left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) A_\lambda(x) \right] \varepsilon_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\lambda(x) \varepsilon_\nu \end{aligned}$$

Сравнение этих формул с формулами (19.1.7), (19.1.6) приводит к следующим выражениям для коммутаторов операторов

полей с P_μ и $M_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} i[\Psi_\alpha(x), P_\mu] &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Psi_\alpha(x), \\ i[A_\lambda(x), P_\mu] &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\lambda(x), \\ i[\Psi_\alpha(x), M_{\mu\nu}] &= \left\{ \left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]_{\alpha\beta} \right\} \Psi_\beta(x), \\ i[A_\lambda(x), M_{\mu\nu}] &= \left\{ \left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \delta_{\lambda\rho} + (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda}) \right\} A_\rho(x). \end{aligned} \quad (19.1.9)$$

Первые два из этих соотношений совпадают с соотношениями (15.3.3), в которых P_μ представляет собой 4-вектор энергии-импульса полей. Поэтому, чтобы убедиться в справедливости высказанного утверждения о том, что операторы P_μ и $M_{\mu\nu}$, входящие в выражение для генератора F , представляют собой 4-вектор энергии-импульса и 4-тензор моментов взаимодействующих полей, нам остается проверить, что коммутаторы операторов полей с 4-тензором моментов, определяемым формулой (15.2.3), совпадают с двумя последними выражениями (19.1.9).

Используя выведенное ранее соотношение (15.3.3')

$$[A_\lambda(x), T_{\mu 4}(x')]_{t=t'} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\lambda(x)$$

и соотношение

$$\left[A_\lambda(x), \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_4} A_\rho(x') - \frac{\partial A_\rho(x')}{\partial x'_4} A_\mu(x') \right]_{t=t'} = (A_\rho(x) \delta_{\mu\lambda} - A_\mu(x) \delta_{\rho\lambda}) \delta(x - x'),$$

а также определения (15.2.3), (15.2.6) тензоров $M_{\mu\nu, \rho}$ и $M_{\mu\nu}$, немедленно получим последнее выражение (19.1.9).

Используя далее выведенные ранее соотношения (15.3.4) и (15.3.4'), легко убедиться, что

$$\begin{aligned} i[\Psi(x), M_{\mu\nu}^{(0)}] &= \left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \Psi(x) + \\ &+ \begin{cases} 0 & (\mu, \nu = 1, 2, 3), \\ \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi(x) & (\mu = 1, 2, 3; \nu = 4), \end{cases} \end{aligned} \quad (19.1.10)$$

где

$$M_{\mu\nu}^{(0)} = -i \int M_{\mu\nu, 4}^{(0)} d^3x, \quad M_{\mu\nu, \rho}^{(0)} = x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho}.$$

Замечая, наконец, что

$$\begin{aligned} i[\Psi(x), M_{\mu\nu}^{(s)}] &= \frac{1}{8} \gamma_4 \{ \gamma_4, [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \} \Psi(x) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \Psi(x) & (\mu, \nu = 1, 2, 3), \\ 0 & (\mu = 1, 2, 3, \nu = 4), \end{cases} \end{aligned} \quad (19.1.11)$$

где

$$M_{\mu\nu}^{(s)} = -i \int M_{\mu\nu, 4}^{(s)} d^3x, \quad M_{\mu\nu, \rho}^{(s)} = \frac{1}{8} \bar{\Psi} \{ \gamma_\rho, [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \} \Psi,$$

и складывая (19.1.10) и (19.1.11), получим третью формулу (19.1.9).

Таким образом, мы доказали тождественность определений 4-вектора энергии-импульса и 4-тензора моментов, основывающихся на вариационном принципе и на свойствах преобразований операторов полей.

В заключение этого раздела выведем еще перестановочные соотношения между операторами \mathbf{P}_μ и $\mathbf{M}_{\mu\nu}$. Заметим с этой целью, что, с одной стороны, операторы \mathbf{P}_μ и $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ должны преобразовываться при лоренцевых преобразованиях согласно законам

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_\mu &= a_{\mu\nu} \mathbf{P}_\nu, \\ \mathbf{M}'_{\mu\nu} &= a_{\mu\rho} a_{\nu\lambda} \mathbf{M}_{\rho\lambda}, \end{aligned} \quad (19.1.12)$$

с другой же стороны, так как условия коммутации между операторами \mathbf{P}_μ , $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ должны быть одинаковыми во всех системах отсчета, то операторы \mathbf{P}'_μ , $\mathbf{M}'_{\mu\nu}$ и \mathbf{P}_μ , $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ должны быть связаны между собой каноническим преобразованием

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_\mu &= \mathbf{U} \mathbf{P}_\mu \mathbf{U}^{-1}, \\ \mathbf{M}'_{\mu\nu} &= \mathbf{U} \mathbf{M}_{\mu\nu} \mathbf{U}^{-1}, \end{aligned} \quad (19.1.13)$$

где \mathbf{U} — тот же унитарный оператор, который входит в (19.1.3). Для бесконечно малого преобразования (19.1.4) мы получим отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_\mu - \mathbf{P}_\mu &= -i [\mathbf{F}, \mathbf{P}_\mu], \\ \mathbf{M}'_{\mu\nu} - \mathbf{M}_{\mu\nu} &= -i [\mathbf{F}, \mathbf{M}_{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (19.1.14)$$

где по-прежнему

$$\mathbf{F} = \varepsilon_\mu \mathbf{P}_\mu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{M}_{\mu\nu}.$$

Переписав формулы (19.1.12) для бесконечно малого преобразования и сравнив их с (19.1.14), получим искомые перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_\mu, \mathbf{P}_\nu] &= 0, \\ i [\mathbf{M}_{\mu\nu}, \mathbf{P}_\lambda] &= \delta_{\nu\lambda} \mathbf{P}_\mu - \delta_{\mu\lambda} \mathbf{P}_\nu, \\ i [\mathbf{M}_{\mu\nu}, \mathbf{M}_{\lambda\sigma}] &= \delta_{\lambda\nu} \mathbf{M}_{\mu\sigma} + \delta_{\lambda\mu} \mathbf{M}_{\sigma\nu} + \delta_{\sigma\nu} \mathbf{M}_{\lambda\mu} + \delta_{\sigma\mu} \mathbf{M}_{\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (19.1.15)$$

Эти соотношения являются самыми общими соотношениями между операторами энергии-импульса и моментов любой квантовомеханической системы, не связанными с конкретным их видом и конкретной структурой лагранжиана системы.

19.2. Инвариантность уравнений квантовой электродинамики относительно преобразования обращения времени. В предыдущем разделе мы доказали инвариантность уравнений квантовой электродинамики относительно группы непрерывных преобразований Лоренца и преобразования отражения пространственных координат. Докажем теперь, что уравнения квантовой электродинамики инвариантны также относительно преобразования обращения времени.

Заметим с этой целью, что операторы квантованных полей преобразуются при лоренцевых преобразованиях так же, как и соответствующие некантованные величины. С другой стороны, имеет место, как было показано в § 8, инвариантность уравнений Дирака для одной частицы, движущейся в классическом электромагнитном поле, и уравнений классического электромагнитного поля относительно преобразования обращения времени. Поэтому ясно, что если определить преобразование операторов $\psi(x)$ и $\mathbf{A}_\mu(x)$ при обращении времени, $t \rightarrow -t$, таким же образом, как и преобразование некантованных величин $\psi(x)$, $\mathbf{A}_\mu(x)$, то преобразованные операторы будут удовлетворять таким же уравнениям движения, как и исходные операторы

$\psi(x)$, $A_\mu(x)$ Инвариантными останутся также и перестановочные соотношения между операторами полей.

Однако в теории квантованных полей можно определить еще одно преобразование обращения времени, по отношению к которому уравнения квантовой электродинамики также оказываются инвариантными. Основное отличие этого преобразования, которое мы будем называть преобразованием *сильного обращения времени* [10], от преобразования, аналогичного рассмотренному в § 8, которое мы будем называть преобразованием *слабого обращения времени* [11], заключается в том, что преобразование сильного обращения времени производится без перехода к комплексно-сопряженным операторам, в то время как в преобразовании слабого обращения времени этот переход является существенным элементом.

Мы разъясним теперь преобразование сильного обращения времени, а в следующем разделе установим связь этого преобразования с преобразованием слабого обращения времени.

Удобно с этой целью рассматривать преобразование сильного обращения времени вместе с преобразованием отражения пространственных координат. Такое комбинированное преобразование мы будем называть преобразованием *сильного отражения* или *R-преобразованием*.

Будем пользоваться представлением взаимодействия, в котором уравнения движения и перестановочные соотношения для операторов полей имеют такой же вид, как и для свободных полей.

Рассмотрим сначала электромагнитное поле, операторы которого $A_\mu(x)$ удовлетворяют уравнениям движения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} A_\mu(x) = 0$$

и перестановочным соотношениям

$$[A_\mu(x_1), A_\nu(x_2)] = -i\delta_{\mu\nu}D_0(x_1 - x_2),$$

и произведем преобразование

$$\begin{aligned} x_\mu &\rightarrow x'_\mu = -x_\mu, \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu^R(x') = -A_\mu^T(x), \end{aligned} \quad (19.2.1)$$

где значок T служит для обозначения транспонированного оператора. Это значит, что если определить $A_\mu(x)$ разложением

$$A_\mu(x) = \sum_{k, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} (e_\mu^{(\lambda)} c_{k\lambda} e^{ikx} + e_\mu^{(\lambda)} c_{k\lambda}^\dagger e^{-ikx}),$$

то разложение $A_\mu^T(x)$ будет иметь вид

$$A_\mu^T(x) = \sum_{k, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} (e_\mu^{(\lambda)} c_{k\lambda}^T e^{ikx} + e_\mu^{(\lambda)} c_{k\lambda}^{T\dagger} e^{-ikx}),$$

где, согласно (5.1.3),

$$c_{k\lambda}^T = c_{k\lambda}^\dagger.$$

Легко убедиться, что преобразование (19.2.1), которое и представляет собой R -преобразование для электромагнитного поля, оставляет инвариантными как уравнения движения, так и перестановочные соотношения для операторов поля. Инвариантность уравнений движения очевидна. Что же касается инвариантности перестановочных соотношений, то она следует из того, что

$$D_0(-x) = -D_0(x)$$

и

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

где A и B — произвольные операторы.

Рассмотрим теперь электронно-позитронное поле, операторы которого удовлетворяют уравнениям движения

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi(x) &= 0, \\ \left(\gamma_\mu^T \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \bar{\psi}(x) &= 0 \end{aligned}$$

и перестановочным соотношениям

$$\{\psi(x_1), \bar{\psi}(x_2)\} = i \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} - m \right) \Delta_0(x_1 - x_2).$$

Произведем преобразование

$$\begin{aligned} x_\mu &\rightarrow x'_\mu = -x_\mu, \\ \psi(x) &\rightarrow \psi^R(x') = (O\psi(x))^T, \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}^R(x') = (\bar{\psi}(x)\bar{O})^T, \end{aligned} \quad (19.2.2)$$

где T — символ перехода к транспонированным операторам, означающий, что если

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p, \mu} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} (a_{p\mu} u^\mu(p) e^{ipx} + b_{p\mu}^+ u^\mu(-p) e^{-ipx}), \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{p, \mu} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} (a_{p\mu}^+ \bar{u}^\mu(p) e^{-ipx} + b_{p\mu} \bar{u}^\mu(-p) e^{ipx}), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \psi^T(x) &= \sum_{p, \mu} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} (a_{p\mu}^+ u^\mu(p) e^{ipx} + b_{p\mu} u^\mu(-p) e^{-ipx}), \\ \bar{\psi}^T(x) &= \sum_{p, \mu} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} (a_{p\mu} \bar{u}^\mu(p) e^{-ipx} + b_{p\mu}^+ \bar{u}^\mu(-p) e^{ipx}) \end{aligned}$$

и O, \bar{O} — некоторые матрицы (построенные с помощью матриц γ_μ , которые мы подберем так, чтобы преобразование (19.2.2) (оно и представляет собой R -преобразование для электронно-позитронного поля) не меняло ни уравнений движения, ни перестановочных соотношений для операторов электронно-позитронного поля, т. е.

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi^R(x) &= 0, \\ \left(\gamma_\mu^T \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \bar{\psi}^R(x) &= 0, \end{aligned} \quad (19.2.3)$$

$$\{\psi^R(x_1), \bar{\psi}^R(x_2)\} = i \left\{ \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} - m \right\} \Delta_0(x_1 - x_2).$$

Покажем, как найти матрицы O и \bar{O} .

Полагая $\psi^R(x) = (\psi'(x))^T$, $\bar{\psi}^R(x) = (\bar{\psi}'(x))^T$, где

$$\psi'(x) = O\psi(-x), \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(-x)\bar{O},$$

и замечая, что операторы $\psi^T(x)$ и $\bar{\psi}^T(x)$ удовлетворяют таким же уравнениям, как и операторы $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, мы можем, согласно (19.2.3), написать

уравнения, которым должны удовлетворять операторы $\psi'(x)$ и $\bar{\psi}'(x)$:

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) \psi'(x) &= 0, \\ \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) \bar{\psi}'(x) &= 0. \end{aligned} \quad (19.2.4)$$

Достаточно рассмотреть первое из этих уравнений. Для того чтобы оно удовлетворялось, должны, очевидно, выполняться условия

$$\gamma_\mu O + O\gamma_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (19.2.5)$$

Кроме того, матрица O должна удовлетворять еще двум условиям: во-первых, так как при двойном преобразовании $x_\mu \rightarrow -x_\mu$ биспинор должен восстанавливаться с точностью до знака, то

$$O^2 = \pm 1, \quad (19.2.6)$$

и, во-вторых, так как преобразование полного отражения должно, очевидно, коммутировать с собственными лоренцевыми преобразованиями биспинора, то матрица O должна коммутировать с инфинитезимальными операторами группы Лоренца

$$[O, I^{\mu\nu}] = 0, \quad I^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \quad (19.2.7)$$

Условия (19.2.5), (19.2.6), (19.2.7) определяют матрицу O с точностью до фазового множителя

$$O = \xi \gamma_5, \quad \xi = \pm 1, \pm i \quad (19.2.8)$$

Легко видеть, что

$$\bar{O} = \gamma_4 O^+ \gamma_4 = -\xi^* \gamma_5. \quad (19.2.9)$$

Поэтому

$$O\bar{O} = -1, \quad O\gamma_\mu \bar{O} = \gamma_\mu \quad (19.2.10)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x) \psi'(x) &= -\bar{\psi}(-x) \psi(-x), \\ \bar{\psi}'(x) \gamma_\mu \psi'(x) &= \bar{\psi}(-x) \gamma_\mu \psi(-x). \end{aligned} \quad (19.2.11)$$

Убедимся теперь, что операторы $\bar{\psi}'(x)$ и $\psi'(x)$ удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям, как и операторы $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(x)$. Заменим для этого в перестановочных соотношениях для $\psi(x_1)$ и $\bar{\psi}(x_2)$ x на $-x$ и подставим в них

$$\psi(-x) = O^{-1} \psi'(x), \quad \bar{\psi}(-x) = \bar{\psi}'(x) \bar{O}^{-1}.$$

Используя (19.2.10) и нечетность функции $\Delta_0(x)$, получим

$$\begin{aligned} \{\psi'(x_1), \bar{\psi}'(x_2)\} &= i O \left(-\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} - m \right) \bar{O} \Delta_0(-x_1 + x_2) = \\ &= i \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} - m \right) \Delta_0(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

что и утверждалось

Так как $\psi^R(x) = (\psi'(x))^T$, а переход $\psi(x) \rightarrow (\psi(x))^T$ не изменяет ни уравнений движения, ни перестановочных соотношений для операторов электронно-позитронного поля (поскольку в них входят, в отличие от перестановочных соотношений для операторов электромагнитного поля, антикоммуторы, а не коммутаторы), то операторы $\psi^R(x)$ и $\bar{\psi}^R(x)$, определяемые

формулами (19.2.2), будут удовлетворять таким же уравнениям движения и таким же перестановочным соотношениям, как и операторы $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$.

Таким образом, мы доказали инвариантность уравнений движения и перестановочных соотношений для операторов электромагнитного и электронно-позитронного полей относительно преобразования сильного отражения.

Нам остается доказать еще инвариантность по отношению к этому преобразованию уравнения Шредингера для вектора состояния $\Phi(t)$ системы полей в представлении взаимодействия

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = H_I(t) \Phi(t), \quad (19.2.12)$$

где

$$H_I(t) = - \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^3x.$$

Для этого мы выясним прежде всего, как преобразуется при R -преобразовании гамильтониан взаимодействия $H_I(t)$.

Вспоминая определение 4-вектора плотности тока

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)],$$

мы должны определить R -преобразованную плотность тока как

$$j_\mu^R(x) = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}^R(x), \gamma_\mu \psi^R(x)]. \quad (19.2.13)$$

Замечая, что

$$[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)]^T = - [\bar{\psi}^T(x), \gamma_\mu \psi^T(x)], \quad (19.2.14)$$

и учитывая (19.2.11), получим

$$j_\mu^R(x) = -j_\mu^T(-x), \quad (19.2.15)$$

а так как

$$A_\mu^R(x) = -A_\mu^T(-x),$$

то

$$j_\mu^R(x) A_\mu^R(x) = (j_\mu(-x) A_\mu(-x))^T. \quad (19.2.16)$$

Поэтому, определив R -преобразованный гамильтониан взаимодействия как

$$H_I^R(t) = - \int j_\mu^R(x) A_\mu^R(x) d^3x,$$

мы получим соотношение

$$H_I^R(t) = H_I^T(-t) = H_I^*(-t) \quad (19.2.17)$$

(гамильтониан является эрмитовским оператором).

Возвратимся теперь к уравнению Шредингера (19.2.12). Мы хотим, чтобы из этого уравнения вытекало уравнение

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi^R(t) = H_I^R(t) \Phi^R(t), \quad (19.2.18)$$

где $\Phi^R(t)$ — надлежащим образом преобразованный при R -преобразовании вектор состояния взаимодействующих полей. Закон преобразования вектора состояния легко найти, заменив в (19.2.12) t на $-t$ и переходя к комплексно-сопряженным величинам

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi^*(-t) = H_I^*(-t) \Phi^*(-t)$$

Используя соотношение (19.2.17) и сравнивая с (19.2.18), получим

$$\Phi^R(t) = \Phi^*(-t). \quad (19.2.19)$$

Мы доказали инвариантность уравнений квантовой электродинамики при R -преобразовании в представлении взаимодействия. Но легко также убедиться в инвариантности уравнений квантовой электродинамики при R -преобразовании в гейзенберговском представлении. Операторы полей в этом представлении преобразуются при R -преобразовании следующим образом

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi^R(x') = (O\psi(x))^T, \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}^R(x') = (\bar{\psi}(x)\bar{O})^T, \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu^R(x') = -A_\mu^T(x), \end{aligned}$$

где $x'_\mu = -x_\mu$. Легко убедиться, используя (15.2.1), что имеет место соотношение

$$(L\{A_\mu(-x), \psi(-x)\})^T = L\{A_\mu^R(x), \psi^R(x)\}, \quad (19.2.20)$$

откуда на основании вариационного принципа вытекает, что операторы $A_\mu^R(x)$ и $\psi^R(x)$ удовлетворяют таким же уравнениям, как и операторы $A_\mu(x)$, $\psi(x)$.

Подчеркнем, что преобразование сильного отражения не содержит, в отличие от преобразования слабого отражения, перехода к комплексно-сопряженным операторам поля, но зато содержит переход к транспонированным операторам. Это значит, что при преобразовании сильного отражения происходит перестановка местами начального и конечного состояний в матричных элементах операторов полей. Необходимость включения в преобразование сильного отражения перехода к транспонированным операторам наглядно видна на примере уравнения

$$\square A_\mu(x) = -j_\mu(x),$$

левая часть которого при преобразовании

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x') = -A_\mu(x), \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x') = O\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\bar{O}, \end{aligned}$$

где $x'_\mu = -x_\mu$, изменяет свой знак, а правая, согласно (15.1.2), знака не изменяет. Переход к транспонированным операторам приводит, согласно (15.1.2), к изменению знака плотности тока, в результате чего рассматриваемое уравнение сохраняет свой вид

$$\square A_\mu^R(x) = -j_\mu^R(x),$$

где

$$j_\mu^R(x) = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}^R(x), \gamma_\mu \psi^R(x)] = -(j_\mu(-x))^T. \quad (19.2.21)$$

Легко убедиться, что, в отличие от 4-вектора плотности тока, который изменяет знак при преобразовании сильного отражения, 4-тензор энергии-импульса при преобразовании знака не изменяет:

$$T_{\mu\nu}^R(x) = (T_{\mu\nu}(-x))^T, \quad (19.2.22)$$

тензор же моментов меняет знак,

$$M_{\mu\nu,\rho}^R(x) = -(M_{\mu\nu,\rho}(-x))^T \quad (19.2.23)$$

(величины $T_{\mu\nu}^R(x)$ и $M_{\mu\nu,\rho}^R(x)$ выражаются через операторы $\psi^R(x)$ и $A_\mu^R(x)$ так же, как величины $T_{\mu\nu}(x)$ и $M_{\mu\nu,\rho}(x)$ — через операторы $\psi(x)$ и $A_\mu(x)$).

Такие же соотношения справедливы, очевидно, и в представлении взаимодействия. С помощью этих соотношений легко установить соответствие между собственными значениями операторов заряда, энергии-импульса и момента и собственными значениями соответствующих R -преобразованных операторов.

Рассмотрим какой-либо из этих операторов, для которых будем пользоваться общим обозначением $F\{\psi(x), A_\mu(x)\}$,

$$F\{\psi(x), A_\mu(x)\} = \int f(\psi(x), A_\mu(x)) d^3x,$$

где f — один из операторов $j_4(x)$, $T_{\mu 4}(x)$, $M_{\mu\nu, 4}(x)$. Пусть собственное значение оператора $F\{\psi(x), A_\mu(x)\}$ в состоянии $\Phi(t)$ равно φ :

$$F\{\psi(x), A_\mu(x)\}\Phi(t) = \varphi\Phi(t).$$

Сделаем здесь замену $x_\mu \rightarrow -x_\mu$ и перейдем к комплексно-сопряженным величинам

$$(F\{\psi(-x), A_\mu(-x)\})^* \Phi^*(-t) = \varphi^* \Phi^*(-t).$$

Так как оператор $F\{\psi(x), A_\mu(x)\}$ эрмитов, то это выражение можно переписать в виде

$$(F\{\psi(-x), A_\mu(-x)\})^T \Phi^*(-t) = \varphi \Phi^*(-t),$$

откуда, согласно (19.2.21) — (19.2.23) и (19.2.19), следует соотношение

$$F\{\psi^R(x), A_\mu^R(x)\}\Phi^R(t) = \varphi^R \Phi^R(t), \quad (19.2.24)$$

где

$$\varphi^R = \pm \varphi,$$

и стоит знак плюс, если F представляет собой оператор энергии-импульса, и знак минус, если F представляет собой оператор заряда или оператор момента.

Операторы $\psi^R(x)$, $A_\mu^R(x)$ и операторы $\psi(x)$, $A_\mu(x)$ удовлетворяют, как мы показали, одинаковым уравнениям движения и одинаковым перестановочным соотношениям. Поэтому они связаны между собой каноническим преобразованием

$$\begin{aligned} \psi^R(x) &= U_R \psi(x) U_R^{-1}, \\ \bar{\psi}^R(x) &= U_R \bar{\psi}(x) U_R^{-1}, \\ A_\mu^R(x) &= U_R A_\mu(x) U_R^{-1}, \end{aligned} \quad (19.2.25)$$

где U_R — некоторый унитарный оператор, действующий в пространстве чисел частиц. Эти соотношения можно переписать также в виде

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= O \psi(-x) = U^{-1} \psi^T(x) U, \\ \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(-x) \bar{O} = U^{-1} \bar{\psi}^T(x) U, \\ A_\mu'(x) &= -A_\mu(-x) = U^{-1} A_\mu^T(x) U, \end{aligned} \quad (19.2.26)$$

где $U = U_R^T$, $UU^+ = I$.

Аналогичные соотношения могут быть написаны для любых операторов, построенных с помощью операторов $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$. Легко, например,

убедиться, используя свойства матриц O и \bar{O} и определения операторов $j_\mu(x)$, $T_{\mu\nu}(x)$, $M_{\mu\nu,\rho}(x)$ в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} -j_\mu(-x) &= U^{-1}j_\mu^T(x)U, \\ j_\mu(-x)A_\mu(-x) &= U^{-1}(j_\mu(x)A_\mu(x))^T U, \\ T_{\mu\nu}(-x) &= U^{-1}T_{\mu\nu}^T(x)U, \\ -M_{\mu\nu,\rho}(-x) &= U^{-1}M_{\mu\nu,\rho}^T(x)U. \end{aligned} \quad (19.2.27)$$

Выясним, к каким свойствам матрицы рассеяния приводит инвариантность уравнений квантовой электродинамики относительно преобразования сильного отражения.

Покажем прежде всего, что

$$S = U^{-1}S^T U. \quad (19.2.28)$$

Используя разложение

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int T \{L_I(x_1) \dots L_I(x_n)\} d^4x_1 \dots d^4x_n$$

и соотношение

$$U L_I(x) U^{-1} = L_I^T(-x),$$

имеем

$$\begin{aligned} USU^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int T \{L_I^T(-x_1) \dots L_I^T(-x_n)\} d^4x_1 \dots d^4x_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \bar{T} \{L_I^T(x_1) \dots L_I^T(x_n)\} d^4x_1 \dots d^4x_n, \end{aligned}$$

где \bar{T} — антихронологический оператор, располагающий операторы полей, считая справа налево, в порядке убывания времен действия операторов. Последнее выражение можно, очевидно, переписать в виде

$$USU^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int (T \{L_I(x_1) \dots L_I(x_n)\})^T d^4x_1 \dots d^4x_n = S^T,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь элемент матрицы рассеяния $(\Phi_f, S\Phi_i)$, связывающий какие-либо состояния i и f системы полей. Согласно (19.2.28) его можно представить в виде

$$(\Phi_f, S\Phi_i) = (U\Phi_f, S^T U\Phi_i) = ((U\Phi_i)^*, S(U\Phi_f)^*)$$

или

$$\langle f | S | i \rangle = \langle f_R | S | i_R \rangle, \quad (19.2.29)$$

где

$$\Phi_{f_R} = (U\Phi_f)^*. \quad (19.2.30)$$

Состояния i_R и f_R мы будем называть *обращенными* по отношению к состояниям i и f . Из унитарности оператора U следует, что векторы обращенных состояний удовлетворяют тому же условию нормировки

$$(\Phi, \Phi) = 1,$$

что и векторы исходных состояний.

Мы видим, таким образом, что элемент матрицы рассеяния, связывающий какие-либо состояния i и f , равен элементу матрицы рассеяния, связывающему соответствующие обращенные состояния i_R и f_R . В этом и заключается свойство симметрии матрицы рассеяния по отношению к преобразованию сильного отражения.

Выясним физический смысл обращенных состояний. Определим для этого собственные значения операторов заряда, энергии-импульса и момента в этих состояниях.

Пусть собственные значения какого-либо из этих операторов $F \{ \psi(x), A(x) \}$ в состояниях i и f равны соответственно φ_i и φ_f ,

$$\begin{aligned} F \{ \psi(x), A(x) \} \Phi_i &= \varphi_i \Phi_i, \\ F \{ \psi(x), A(x) \} \Phi_f &= \varphi_f \Phi_f. \end{aligned} \quad (19.2.31)$$

Производя здесь замену $x \rightarrow -x$ и используя соотношения (19.2.27), получим

$$\begin{aligned} \pm U^{-1} (F \{ \psi(x), A(x) \})^T U \Phi_i &= \varphi_i \Phi_i, \\ \pm U^{-1} (F \{ \psi(x), A(x) \})^T U \Phi_f &= \varphi_f \Phi_f, \end{aligned}$$

причем стоит знак плюс в случае оператора энергии-импульса и знак минус в случае операторов заряда и момента. Так как все эти операторы эрмитовы, то написанные соотношения после умножения на U можно представить в виде

$$\begin{aligned} \pm (F \{ \psi(x), A(x) \})^* U \Phi_i &= \varphi_i U \Phi_i, \\ \pm (F \{ \psi(x), A(x) \})^* U \Phi_f &= \varphi_f U \Phi_f. \end{aligned}$$

Переходя, наконец, к комплексно-сопряженным величинам, получим отсюда

$$\begin{aligned} F \{ \psi(x), A(x) \} (U \Phi_i)^* &= \pm \varphi_i (U \Phi_i)^*, \\ F \{ \psi(x), A(x) \} (U \Phi_f)^* &= \pm \varphi_f (U \Phi_f)^* \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} F \{ \psi(x), A(x) \} \Phi_{f_R} &= \pm \varphi_i \Phi_{f_R}, \\ F \{ \psi(x), A(x) \} \Phi_{i_R} &= \pm \varphi_f \Phi_{i_R}. \end{aligned} \quad (19.2.32)$$

Мы видим, таким образом, что если Φ_i и Φ_f представляют собой собственные векторы оператора $F \{ \psi(x), A(x) \}$, принадлежащие его собственным значениям φ_i и φ_f , то Φ_{i_R} и Φ_{f_R} будут также собственными векторами этого оператора, причем соответствующие им собственные значения φ_{i_R} и φ_{f_R} будут равны

$$\varphi_{i_R} = \pm \varphi_f, \quad \varphi_{f_R} = \pm \varphi_i. \quad (19.2.33)$$

Знак плюс, как уже отмечалось, относится к случаю, когда F представляет собой оператор энергии-импульса, а знак минус — к случаю, когда F представляет собой оператор заряда или оператор момента.

Учитывая эти соотношения, можно записать равенство элементов матрицы рассеяния, связывающих состояния i , f и обращенные состояния i_R , f_R , в виде

$$\langle p_f, e_f, \mu_f | \mathbf{S} | p_i, e_i, \mu_i \rangle = \langle p_i, -e_i, -\mu_i | \mathbf{S} | p_f, -e_f, -\mu_f \rangle, \quad (19.2.34)$$

где p_i , p_f — четырехмерные импульсы частиц, e_i , e_f — заряды частиц и μ_i , μ_f — проекции спинов частиц на направления их импульсов в состояниях i и f .

Таким образом, если поменять местами 4-импульсы, заряды и проекции спинов частиц в начальном (i) и конечном (f) состояниях и изменить при этом знаки зарядов и проекций спинов, то элемент матрицы рассеяния не изменится.

19.3. Инвариантность уравнений квантовой электродинамики относительно преобразования зарядового сопряжения. Покажем теперь, что уравнения квантовой электродинамики инвариантны относительно преобразования зарядового сопряжения, под которым понимается следующее преобразование операторов полей:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi^c(x) = \mathbf{C}\bar{\psi}(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}^c(x) = \mathbf{C}^{-1}\psi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu^c(x) = -A_\mu(x),\end{aligned}\quad (19.3.1)$$

где \mathbf{C} — матрица зарядового сопряжения, удовлетворяющая условиям

$$\mathbf{C}^+\mathbf{C} = I, \quad \mathbf{C}^T = -\mathbf{C}, \quad \mathbf{C}^{-1}\gamma_\mu\mathbf{C} = -\gamma_\mu^T = -\gamma_\mu^*.$$

Уравнения для зарядово-сопряженных биспиноров $\psi^c(x)$ и $\bar{\psi}^c(x)$ мы уже писали:

$$\begin{aligned}\left[\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu(x)\right) + m\right]\psi^c(x) &= 0, \\ \left[\gamma_\mu^T\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu(x)\right) - m\right]\bar{\psi}^c(x) &= 0.\end{aligned}$$

Заменяя в них $A_\mu(x)$ на $-A_\mu^c(x)$, мы получим уравнения, не отличающиеся по форме от уравнений движения для $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$.

Рассмотрим далее уравнение для $A_\mu(x)$. Вспомня определение плотности тока

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2}(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) - \bar{\psi}^c(x)\gamma_\mu\psi^c(x)),$$

мы видим, что

$$j_\mu^c(x) = \frac{ie}{2}(\bar{\psi}^c(x)\gamma_\mu\psi^c(x) - \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)) = -j_\mu(x), \quad (19.3.2)$$

и поэтому третье уравнение (15.1.1) также сохраняет свою форму при преобразовании (19.3.1).

Легко, наконец, убедиться в инвариантности перестановочных соотношений (15.1.3) относительно преобразований (19.3.1), например:

$$\begin{aligned}\{\psi_\alpha^c(x), (\bar{\psi}^c(x')\gamma_4)_\beta\}_{t=t'} &= \{(\mathbf{C}\gamma_4^T\gamma_4^T\bar{\psi}(x))_\alpha, (\psi(x')(\mathbf{C}^T)^{-1}\gamma_4)_\beta\}_{t=t'} = \\ &= (\gamma_4\mathbf{C})_{\alpha\alpha'}\{(\bar{\psi}(x)\gamma_4)_{\alpha'}, \psi_{\beta'}(x')\}_{t=t'} (\mathbf{C}^{-1}\gamma_4)_{\beta'\beta} = \delta_{\alpha\beta}\delta(t-t').\end{aligned}$$

Отметим также инвариантность плотности функции Лагранжа и тензоров $T_{\mu\nu}(x)$ и $M_{\mu\nu,\rho}(x)$ относительно преобразования зарядового сопряжения или, как мы будем для краткости говорить, \mathbf{C} -преобразования.

Инвариантность уравнений квантовой электродинамики относительно \mathbf{C} -преобразования является математической формулировкой симметрии электромагнитных взаимодействий относительно замены электрона позитроном

Мы доказали инвариантность уравнений квантовой электродинамики относительно \mathbf{C} -преобразования в гейзенберговском представлении, но эта

инвариантность имеется, естественно, и в представлении взаимодействия. При этом операторы полей преобразуются так же, как и соответствующие операторы в гейзенберговском представлении

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi^c(x) = \mathbf{C}\bar{\psi}(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}^c(x) = \mathbf{C}^{-1}\psi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu^c(x) = -A_\mu(x),\end{aligned}$$

но одновременно с ними преобразуется и вектор состояния $\Phi(t)$, удовлетворяющий уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H_I(t) \Phi(t), \quad H_I(t) = - \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^3x.$$

Чтобы установить закон преобразования $\Phi(t)$, заметим, что так как операторы $\psi^c(x)$, $\bar{\psi}^c(x)$, $A_\mu^c(x)$ удовлетворяют таким же уравнениям движения и таким же перестановочным соотношениям, как и операторы $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$, то они должны быть связаны между собой каноническим преобразованием

$$\begin{aligned}\psi^c(x) &= U_c \psi(x) U_c^{-1}, \\ \bar{\psi}^c(x) &= U_c \bar{\psi}(x) U_c^{-1}, \\ A_\mu^c(x) &= U_c A_\mu(x) U_c^{-1},\end{aligned} \tag{19.3.3}$$

где U_c — некоторый унитарный оператор

$$U_c U_c^\dagger = I,$$

действующий в пространстве чисел частиц.

Из этих соотношений следует, что

$$j_\mu(x) A_\mu(x) = U_c^{-1} j_\mu^c(x) A_\mu^c(x) U_c,$$

и поэтому уравнение Шредингера (15.5.7) можно представить в виде

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = U_c^{-1} H_I^c(t) U_c \Phi(t),$$

где

$$H_I^c(t) = - \int j_\mu^c(x) A_\mu^c(x) d^3x.$$

Предполагая, что S -преобразованию операторов полей (19.3.3) соответствует преобразование вектора состояния

$$\Phi(t) \rightarrow \Phi^c(t) = U_c \Phi(t), \tag{19.3.4}$$

мы сохраним форму уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi^c(t) = H_I^c(t) \Phi^c(t), \tag{19.3.5}$$

как того и требует инвариантность теории относительно S -преобразования.

Заметим, что из этой инвариантности вытекает, что элементы матрицы рассеяния не изменяются при изменении знаков зарядов всех частиц

$$\langle p_f, e_f, \mu_f | \mathbf{S} | p_i, e_i, \mu_i \rangle = \langle p_f, -e_f, \mu_f | \mathbf{S} | p_i, -e_i, \mu_i \rangle. \tag{19.3.6}$$

Комбинируя это соотношение с соотношением (19.2.34), получим

$$\langle p_f, e_f, \mu_f | \mathbf{S} | p_i, e_i, \mu_i \rangle = \langle p_i, e_i, -\mu_i | \mathbf{S} | p_f, e_f, -\mu_f \rangle. \tag{19.3.7}$$

Определим теперь вид оператора U_c , который мы будем называть *оператором зарядового сопряжения*. Подставим для этого в соотношения

$$\begin{aligned} U_c \psi(x) U_c^{-1} &= C \bar{\psi}(x), \\ U_c \bar{\psi}(x) U_c^{-1} &= C^{-1} \psi(x), \\ U_c A_\mu(x) U_c^{-1} &= -A_\mu(x), \end{aligned}$$

вытекающие из (19.3.3) и (19.3.1), разложения (5.1.1), (14.2.10) для операторов $A_\mu(x)$, $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$. В результате мы получим соотношения

$$\begin{aligned} U_c c_{k\lambda} &= -c_{k\lambda} U_c, & U_c c_{k\lambda}^+ &= -c_{k\lambda}^+ U_c, \\ U_c a_{p\mu} &= b_{p\mu} U_c, & U_c a_{p\mu}^+ &= b_{p\mu}^+ U_c, \\ U_c b_{p\mu} &= a_{p\mu} U_c, & U_c b_{p\mu}^+ &= a_{p\mu}^+ U_c, \end{aligned} \quad (19.3.8)$$

связывающие оператор зарядового сопряжения U_c с операторами рождения и поглощения фотонов ($c_{k\lambda}^+$, $c_{k\lambda}$), электронов ($a_{p\mu}^+$, $a_{p\mu}$) и позитронов ($b_{p\mu}^+$, $b_{p\mu}$).

Эти соотношения полностью определяют действие оператора U_c на вектор состояния системы полей $\Phi(t)$, если предположить, что вектор состояния вакуума Φ_0 не меняется под действием оператора зарядового сопряжения

$$U_c \Phi_0 = \Phi_0. \quad (19.3.9)$$

Определим, например, действие U_c на вектор состояния, в котором имеется один фотон с 4-импульсом k и поляризацией λ . Этот вектор состояния, который мы будем обозначать через $\Phi_{1k\lambda}$, можно, очевидно, представить в виде

$$\Phi_{1k\lambda} = c_{k\lambda}^+ \Phi_0.$$

Поэтому в силу (19.3.8)

$$U_c \Phi_{1k\lambda} = U_c c_{k\lambda}^+ \Phi_0 = -c_{k\lambda}^+ U_c \Phi_0;$$

используя далее (19.3.9), получим

$$U_c \Phi_{1k\lambda} = -\Phi_{1k\lambda}.$$

Если имеется $N_{k\lambda}$ фотонов с квантовыми числами k , λ , то вектор состояния можно, согласно (5.2.5), представить в виде

$$\Phi_{N_{k\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{N_{k\lambda}!}} (c_{k\lambda}^+)^{N_{k\lambda}} \Phi_0.$$

Применяя к этому вектору оператор U_c , получим, согласно (19.3.8), (19.3.9)

$$U_c \Phi_{N_{k\lambda}} = (-1)^{N_{k\lambda}} \Phi_{N_{k\lambda}}. \quad (19.3.10)$$

В общем случае, когда имеются фотоны с разными импульсами и поляризациями, мы получим, очевидно,

$$U_c \Phi_{N_{k_1 \lambda_1} N_{k_2 \lambda_2} \dots} = (-1)^{N_{k_1 \lambda_1} + N_{k_2 \lambda_2} \dots} \cdot \Phi_{N_{k_1 \lambda_1} N_{k_2 \lambda_2} \dots}. \quad (19.3.11)$$

Рассмотрим теперь действие оператора U_c на вектор состояния, в котором имеется один электрон с квантовыми числами p , μ . Вектор такого состояния можно представить в виде

$$\Phi_{1p\mu}^+ = a_{p\mu}^+ \Phi_0.$$

Поэтому в силу (19.3.8) и (19.3.9)

$$U_c \Phi_{1_{p\mu}^{(+)}} = U_c a_{p\mu}^+ \Phi_0 = b_{p\mu}^+ U_c \Phi_0 = b_{p\mu}^+ \Phi_0,$$

но $b_{p\mu}^+ \Phi_0 = \Phi_{1_{p\mu}^{(-)}}$ представляет собой, очевидно, вектор состояния, в котором имеется один позитрон с квантовыми числами p, μ , так что

$$U_c \Phi_{1_{p\mu}^{(+)}} = \Phi_{1_{p\mu}^{(-)}}. \quad (19.3.12)$$

Аналогично легко убедиться, что

$$U_c \Phi_{1_{p\mu}^{(-)}} = \Phi_{1_{p\mu}^{(+)}}.$$

Таким образом, оператор зарядового сопряжения переводит каждое занятое электроном состояние в состояние, занятое позитроном (с тем же импульсом), и не затрагивает незанятых состояний.

Легко убедиться, что оператор зарядового сопряжения коммутирует с операторами энергии-импульса P_μ и момента $M_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} U_c P_\mu &= P_\mu U_c, \\ U_c M_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu} U_c, \end{aligned} \quad (19.3.13)$$

и антикоммутирует с оператором заряда Q :

$$U_c Q = -Q U_c. \quad (19.3.14)$$

Поэтому только в том случае, когда заряд системы равен нулю, вектор состояния системы может быть собственным вектором оператора U_c :

$$U_c \Phi = \Lambda \Phi, \quad Q \Phi = 0, \quad (19.3.15)$$

где Λ — собственное значение оператора U_c . Так как двукратное применение оператора U_c представляет собой, очевидно, тождественное преобразование

$$U_c^2 = I, \quad (19.3.16)$$

то собственные значения U_c равны

$$\Lambda = \pm 1. \quad (19.3.17)$$

Величина Λ называется *зарядовой четностью*. Мы видим, что при заданных значениях энергии, импульса и проекции момента нейтральной системы следует различать два состояния, соответствующих различным значениям зарядовой четности. Состояние называется зарядово-четным, если $\Lambda = +1$, и зарядово-нечетным, если $\Lambda = -1$.

Если нейтральная система характеризуется определенной зарядовой четностью, то для нее имеет место закон сохранения зарядовой четности.

Соотношение (19.3.10) показывает, что система, состоящая из четного числа фотонов, является зарядово-четной, а система, состоящая из нечетного числа фотонов, — зарядово-нечетной. Поэтому произвольная нейтральная система, если она обладает определенной зарядовой четностью, может распасться либо только на четное, либо только на нечетное число фотонов. Например, π^0 -мезон распадается на два фотона, поэтому π^0 -мезон является зарядово-четным.

Рассмотрим систему, состоящую из электрона и позитрона [12]. Вектор состояния такой системы можно, очевидно, представить в следующем общем виде:

$$\Phi = \sum_{p, \mu_1, \mu_2} A(p, \mu_1, \mu_2) a_{p\mu_1}^+ b_{-p\mu_2}^+ \Phi_0, \quad (19.3.18)$$

где \mathbf{p}, μ_1 и $-\mathbf{p}, \mu_2$ — импульсные и спиновые переменные обеих частиц (суммарный импульс частиц предполагается равным нулю) и A — некоторая функция этих переменных.

Действие оператора U_c на Φ дает, согласно (19.3.8),

$$\begin{aligned} U_c \Phi &= \sum_{\mathbf{p}\mu_1\mu_2} A(\mathbf{p}, \mu_1, \mu_2) U_c a_{\mathbf{p}\mu_1}^+ U_c^{-1} U_c b_{-\mathbf{p}\mu_2}^+ U_c^{-1} U_c \Phi_0 = \\ &= \sum_{\mathbf{p}\mu_1\mu_2} A(\mathbf{p}, \mu_1, \mu_2) b_{\mathbf{p}\mu_1}^+ a_{-\mathbf{p}, \mu_2}^+ \Phi_0, \end{aligned} \quad (19.3.19)$$

а так как операторы $a_{\mathbf{p}\mu}^+$ и $b_{\mathbf{p}\mu}^+$ антикоммутируют, то

$$U_c \Phi = - \sum_{\mathbf{p}\mu_1\mu_2} A(\mathbf{p}, \mu_1, \mu_2) a_{-\mathbf{p}\mu_2}^+ b_{\mathbf{p}\mu_1}^+ \Phi_0 = - \sum_{\mathbf{p}\mu_1\mu_2} A(-\mathbf{p}, \mu_2, \mu_1) a_{\mathbf{p}\mu_1}^+ b_{-\mathbf{p}\mu_2}^+ \Phi_0$$

Переписав $U_c \Phi$ в виде

$$U_c \Phi = \sum_{\mathbf{p}\mu_1\mu_2} A^c(\mathbf{p}, \mu_1, \mu_2) a_{\mathbf{p}\mu_1}^+ b_{-\mathbf{p}\mu_2}^+ \Phi_0,$$

мы видим, что

$$A^c(\mathbf{p}, \mu_1, \mu_2) = -A(-\mathbf{p}, \mu_2, \mu_1). \quad (19.3.20)$$

Величину $A(\mathbf{p}, \mu_1, \mu_2)$ можно, очевидно, рассматривать как волновую функцию системы электрон — позитрон в импульсном пространстве и пространстве спиновых переменных. Полученное соотношение означает, что при преобразовании зарядового сопряжения изменяется знак этой функции и, кроме того, происходит обмен импульсами и проекциями спинов обеих частиц.

Если Φ является собственным вектором оператора U_c с зарядовой четностью Λ

$$U_c \Phi = \Lambda \Phi,$$

то

$$A^c(\mathbf{p}, \mu_1, \mu_2) = \Lambda A(\mathbf{p}, \mu_1, \mu_2) \quad (19.3.21)$$

и соотношение (19.3.20) приобретает вид

$$A(-\mathbf{p}, \mu_2, \mu_1) = -\Lambda A(\mathbf{p}, \mu_1, \mu_2). \quad (19.3.22)$$

Аналогичные соотношения можно написать и для волновой функции системы электрон — позитрон в конфигурационном пространстве $\psi(1, 2)$, где 1, 2 — совокупности переменных, относящихся к обеим частицам. Взамен (19.3.20) мы, очевидно, получим

$$\psi^c(1, 2) = -\psi(2, 1); \quad (19.3.23)$$

соотношению же (19.3.22) соответствует соотношение

$$\psi(2, 1) = -\Lambda \psi(1, 2). \quad (19.3.24)$$

Это соотношение означает, что симметричные состояния системы электрон-позитрон являются зарядово-нечетными ($\Lambda = -1$), а антисимметричные состояния — зарядово-четными ($\Lambda = +1$).

Заметим, что если бы мы имели дело с двумя электронами или двумя позитронами, то в последней формуле отсутствовал бы в силу принципа Паули множитель Λ . Поэтому соотношение (19.3.24) можно рассматривать как формулировку обобщенного принципа Паули для нейтральной системы электронов и позитронов, в котором электрон и позитрон выступают не как различные частицы, а как два различных зарядовых состояния одной части-

цы, подобно тому как два электрона с различными ориентациями спина рассматриваются не как различные частицы, а как два различных спиновых состояния одной и той же частицы.

Из (19.3.24) следует, что если l — относительный момент электрона и позитрона и s — суммарный спин системы ($s = 0, 1$), то

$$\Lambda = (-1)^{l+s}. \quad (19.3.25)$$

В частности, система электрон — позитрон, находящаяся в состоянии 1S ($l = 0, s = 0$), может превращаться только в четное число фотонов, а та же система в состоянии 3S ($l = 0, s = 1$) — только в нечетное число фотонов.

19.4. CPT-теорема. Так как уравнения квантовой электродинамики инвариантны относительно преобразований сильного отражения и зарядового сопряжения, то они инвариантны также и относительно преобразования, представляющего собой произведение R - и C -преобразований. Такое преобразование мы будем называть преобразованием *слабого отражения* и обозначать через

$$R_w = CR. \quad (19.4.1)$$

Согласно (19.3.1), (19.2.2), (19.2.8) операторы полей преобразуются при слабом отражении следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi^{Rw}(x') = (O_w \bar{\psi}(x))^T, \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}^{Rw}(x') = (\psi(x) O_w^{-1})^T, \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu^{Rw}(x') = A_\mu^T(x), \end{aligned} \quad (19.4.2)$$

где $x'_\mu = -x_\mu$ и

$$O_w = OC = \xi \gamma_5 C \quad (\xi = \pm 1, \pm i).$$

Эта матрица, очевидно, унитарна и удовлетворяет условиям

$$O_w^T = -O_w, \quad O_w^{-1} \gamma_\mu O_w = \gamma_\mu^T.$$

Обратим внимание на то, что преобразование слабого отражения содержит фактически только переход к комплексно сопряженным операторам полей, так как операция транспонирования в преобразование $\psi(x)$ входит дважды, оператор же $A_\mu(x)$ эрмитов, и поэтому для него транспонирование эквивалентно комплексному сопряжению.

Выше мы видели, что при преобразовании сильного отражения 4-вектор плотности тока изменяет свой знак:

$$j_\mu^R(x) = -j_\mu^T(-x).$$

При слабом же отражении знак вектора плотности тока не изменяется. Действительно, построив с помощью операторов $\psi^{Rw}(x)$ и $\bar{\psi}^{Rw}(x)$ 4-вектор плотности тока, получим, согласно (19.2.15),

$$j_\mu^{Rw}(x) = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}^{Rw}(x), \gamma_\mu \psi^{Rw}(x)] = j_\mu^T(-x). \quad (19.4.3)$$

Это связано с тем, что плотность тока изменяет знак как при R -преобразовании, так и при C -преобразовании.

Отсюда можно заключить, что преобразование слабого отражения аналогично отражению пространства — времени в классической электродинамике. Действительно, так как при преобразовании $x_\mu \rightarrow -x_\mu$ скорость

частиц не изменяется, то не меняет знака и плотность тока, а отсюда в свою очередь следует, что при преобразовании $x_\mu \rightarrow -x_\mu$ не должен меняться потенциал поля $A_\mu(x)$, так как должна быть инвариантной функция Лагранжа частицы

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi$$

(φ — скалярный потенциал, \mathbf{v} — скорость и m — масса частицы).

Легко показать, используя выражение для 4-тензора энергии-импульса и 4-тензора моментов, что

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^R(x) &= T_{\mu\nu}^T(-x), \\ M_{\mu\nu, \rho}^R(x) &= -M_{\mu\nu, \rho}^T(-x) \end{aligned} \quad (19.4.4)$$

(тензоры $T_{\mu\nu}^R(x)$ и $M_{\mu\nu, \rho}^R(x)$ выражаются через $\psi^{Rw}(x)$, $\bar{\psi}^{Rw}(x)$, $A_\mu^R(x)$ так же, как тензоры $T_{\mu\nu}(x)$ и $M_{\mu\nu, \rho}(x)$ выражаются через $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$). Сравнение с (19.2.22), (19.2.23) показывает, что

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^R(x) &= T_{\mu\nu}^R(x), \\ M_{\mu\nu, \rho}^R(x) &= M_{\mu\nu, \rho}^R(x). \end{aligned} \quad (19.4.5)$$

Поэтому основное физическое различие между преобразованиями сильного и слабого отражения касается только плотности тока. первое из них изменяет знак плотности тока, а второе знака плотности тока не изменяет. Отсюда и из (19.2.34) следует, что должно иметь место следующее соотношение между элементами матрицы рассеяния

$$\langle p_f, e_f, \mu_f | \mathbf{S} | p_i, e_i, \mu_i \rangle = \langle p_i, e_i, -\mu_i | \mathbf{S} | p_f, e_f, -\mu_f \rangle. \quad (19.4.6)$$

Из преобразования слабого отражения, так же как и из преобразования сильного отражения, можно выделить преобразование отражения пространственных координат (P -преобразование)

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi^P(x') = i\gamma_4 \psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}^P(x') = -i\bar{\psi}(x) \gamma_4, \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu^P(x') = \begin{cases} -A_j(x) & (j = 1, 2, 3), \\ A_4(x) \end{cases} \end{aligned} \quad (19.4.7)$$

($x = (\mathbf{r}, it)$, $x' = (-\mathbf{r}, it)$) и представить его в виде

$$R_w = PT, \quad (19.4.8)$$

где T обозначает преобразование обращения времени, которое называется преобразованием *слабого обращения времени*.

Из инвариантности уравнений квантовой электродинамики по отношению к P -преобразованию следует соотношение

$$\begin{aligned} \langle p_f, \varepsilon_f, e_f, \mu_f | \mathbf{S} | p_i, \varepsilon_i, e_i, \mu_i \rangle &= \\ &= \langle -\mathbf{p}_f, \varepsilon_f, e_f, -\mu_f | \mathbf{S} | -\mathbf{p}_i, \varepsilon_i, e_i, -\mu_i \rangle, \end{aligned} \quad (19.4.9)$$

где \mathbf{p} обозначает 3-импульсы, а ε — энергии частиц. Комбинируя это соотношение с (19.4.6), получим соотношение

$$\begin{aligned} \langle p_f, \varepsilon_f, e_f, \mu_f | \mathbf{S} | p_i, \varepsilon_i, e_i, \mu_i \rangle &= \\ &= \langle -\mathbf{p}_i, \varepsilon_i, e_i, \mu_i | \mathbf{S} | -\mathbf{p}_f, \varepsilon_f, e_f, \mu_f \rangle, \end{aligned} \quad (19.4.10)$$

выражающее инвариантность матрицы рассеяния относительно преобразования слабого обращения времени.

Сравнение определения R_w -преобразования (19.4.1) с определением (19.4.8) показывает, что

$$CR = PT,$$

а так как двойное применение C -преобразования представляет собой тождественное преобразование, то

$$R = CPT. \quad (19.4.11)$$

Уравнения квантовой электродинамики инвариантны относительно каждого из преобразований R , C , P и T . Эта инвариантность является, как мы уже говорили, математическим выражением симметрии электромагнитного взаимодействия электронов и фотонов относительно отражений пространства и времени и замены электрона позитроном.

Другие взаимодействия в принципе могут не обладать всеми свойствами симметрии, присущими электромагнитному взаимодействию электронов и фотонов. Поэтому от уравнений, описывающих эти взаимодействия, нельзя, вообще говоря, требовать, чтобы они были инвариантными относительно тех же преобразований, которые оставляют инвариантными уравнения квантовой электродинамики электронов и фотонов. Исключения представляют непрерывные преобразования Лоренца, по отношению к которым должны быть инвариантны уравнения любой физической теории.

Укажем в качестве примера на слабые взаимодействия, в которых нарушается закон сохранения четности. Поэтому уравнения, описывающие слабые взаимодействия, не инвариантны относительно P -преобразования операторов электронного и нейтринного полей.

Несмотря, однако, на возможные нарушения инвариантности уравнений, описывающих те или иные волновые поля, относительно одного из преобразований C , P или T , любая релятивистски инвариантная теория с локальным взаимодействием должна быть инвариантной относительно R -преобразования, представляющего собой произведение C -, P - и T -преобразований. Эта инвариантность является следствием только теоремы Паули о связи спина со статистикой и составляет содержание так называемой *CPT-теоремы* [13].

Мы ограничимся здесь доказательством обратной теоремы, согласно которой из инвариантности теории относительно R -преобразования вытекает теорема Паули о связи между спином и статистикой [14].

Будем пользоваться представлением взаимодействия, в котором операторы полей, обозначаемые далее через $\psi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяют таким же уравнениям движения и таким же перестановочным соотношениям, как и соответствующие операторы свободных полей; взаимодействие же между полями учитывается тем, что вектор состояния системы полей $\Phi(t)$ считается функцией времени. Так же, как и в случае квантовой электродинамики, он удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H_I \{ \psi_i(x) \} \Phi(t), \quad (19.4.12)$$

где H_I — гамильтониан взаимодействия между полями. Считая взаимодействие локальным, можно представить H_I в виде объемного интеграла от произведений операторов полей в одной и той же точке

$$H_I \{ \psi_i(x) \} = \int_P \sum (A_P \psi_{i_1}(x) \psi_{i_2}(x) \dots \psi_{i_n}(x) + A_P^* \psi_{i_1}^+(x) \psi_{i_2}^+(x) \dots \psi_{i_n}^+(x)) d^3x, \quad (19.4.13)$$

где каждый из операторов полей $\psi_i(x)$ принадлежит одному из классов $+1, -1, +\varepsilon, -\varepsilon$, суммирование производится по всем перестановкам индексов i_1, \dots, i_n , $P = (1, 2, \dots, n)$ и, наконец, постоянные A_P подобраны так, что стоящая под знаком интеграла сумма симметрична относительно бозонных и антисимметрична относительно фермионных операторов, т. е. не меняет знака при перестановке любой пары первых и меняет знак при перестановке любой пары вторых операторов (второе слагаемое под знаком суммы прибавлено потому, что оператор H_I должен быть эрмитовым).

Определим теперь преобразование сильного отражения полей, или, как мы будем его называть, R -преобразование. Обобщая результаты § 19.3, R -преобразование нужно определить следующим образом

$$\psi(x) \rightarrow (\psi(x'))^R = (O\psi(x))^T, \quad (19.4.14)$$

где $x'_\mu = -x_\mu$ и O — некоторая матрица (матрица отражения), аналогичная матрице O , введенной в § 19.3 для электронно-позитронного поля. Так как каждый из операторов $\psi_i(x)$ мы предполагаем принадлежащим одному из классов $+1, -1, +\varepsilon, -\varepsilon$, то в соответствии с (13.5.2) и (13.5.6) действие матрицы O сводится к умножению на $+1, -1, +i, -i$ в зависимости от того, к какому из четырех классов $+1, -1, +\varepsilon, -\varepsilon$ — относится компонента поля $\psi_i(x)$:

$$O\psi_i^{(\alpha)}(x) = r_\alpha \psi_i^{(\alpha)}(x), \quad (19.4.15)$$

где α обозначает класс и

$$r_\alpha = \begin{cases} +1, & \alpha = +1, \\ -1, & \alpha = -1, \\ +i, & \alpha = +\varepsilon, \\ -i, & \alpha = -\varepsilon. \end{cases}$$

Как следует из результатов § 14, уравнения движения для свободных полей инвариантны относительно этого преобразования. Поэтому мы должны потребовать еще инвариантности по отношению к R -преобразованию уравнения Шредингера для вектора состояния и перестановочных соотношений для операторов свободных полей. Что касается уравнения Шредингера, то его инвариантность относительно R -преобразования будет обеспечена, если гамильтониан $H_I\{\psi_i(x)\}$ удовлетворяет условию

$$(H_I\{\psi_i(x)\})^T = H_I\{\psi_i^R(x)\}. \quad (19.4.16)$$

Действительно, в этом случае из уравнения (19.4.12) в силу эрмитовости $H_I\{\psi_i(x)\}$ вытекает уравнение

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi^*(-t) = (H_I\{\psi_i(-x)\})^T \Phi^*(-t),$$

которое с учетом (19.4.16) может быть переписано в виде

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi^R(t) = H_I\{\psi_i^R(x)\} \Phi^R(t),$$

где

$$\Phi^R(t) = \Phi^*(-t).$$

Поэтому, если трактовать $\Phi^R(t)$ как R -преобразованный вектор состояния, то уравнение Шредингера (19.4.12), как и требуется, будет инвариантным относительно R -преобразования.

Нам остается, таким образом, рассмотреть перестановочные соотношения для операторов свободных полей. Эти соотношения имеют, согласно результатам § 14.5, следующий вид:

$$[\psi_i^{(\alpha)}(x), \psi_j^{(\beta)}(x')]_{\pm} = F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(x - x'), \quad (19.4.17)$$

где $[\]_-$ обозначает коммутатор, $[\]_+$ — антикоммутатор и $F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ представляет собой некоторый полином относительно $\frac{\partial}{\partial x}$ с численными коэффициентами. При этом существенным является следующее его свойство. В случае целого спина ($j + k = N$, N — целое число, j и k — квантовые числа, определяющие представление (j, k) лоренцевой группы) $F_{ij}^{(1, 1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ и $F_{ij}^{(-1, -1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ содержат производные только четного порядка, а $F_{ij}^{(+1, -1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ и $F_{ij}^{(-1, +1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ — производные только нечетного порядка; в случае полуцелого спина ($j + k = N + \frac{1}{2}$) $F_{ij}^{(+\varepsilon, +\varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ и $F_{ij}^{(-\varepsilon, -\varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ содержат производные только четного порядка, а $F_{ij}^{(+\varepsilon, -\varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ и $F_{ij}^{(-\varepsilon, +\varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ — производные только нечетного порядка. Учитывая (19.4.15), эти свойства можно записать в виде одного соотношения

$$r_{\alpha} r_{\beta} F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) = \begin{cases} F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right), & j + k = N, \\ -F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right), & j + k = N + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (19.4.18)$$

Вернемся теперь к перестановочным соотношениям (19.4.17). Инвариантность теории относительно R -преобразования требует, чтобы из этих соотношений вытекали перестановочные соотношения

$$[(\psi_i^{(\alpha)}(x))^R, (\psi_j^{(\beta)}(x'))^R]_{\pm} = F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(x - x') \quad (19.4.19)$$

для R -преобразованных операторов полей. Поэтому мы должны выяснить, совместны ли эти соотношения с соотношениями (19.4.17).

Заменяя в (19.4.17) x и x' на $-x$ и $-x'$ и переходя к транспонированным операторам, получим

$$[(\psi_j^{(\beta)+}(-x'))^T, (\psi_i^{(\alpha)}(-x))^T]_{\pm} = F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(-x + x'),$$

а так как

$$\Delta_0(-x) = -\Delta_0(x),$$

то

$$[(r_{\alpha} \psi_i^{(\alpha)}(-x))^T, (r_{\beta} \psi_j^{(\beta)+}(-x'))^T]_{\pm} = \mp r_{\alpha} r_{\beta} F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(x - x')$$

или, учитывая (19.4.18) и определение $\psi_i^R(x)$,

$$\begin{aligned} [(\psi_i^{(\alpha)}(x))^R, (\psi_j^{(\beta)+}(x'))^R]_{\pm} &= \mp r_{\alpha} r_{\beta} F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(x - x') = \\ &= \begin{cases} \mp F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(x - x'), & j + k = N, \\ \pm F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(x - x'), & j + k = N + \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Но в правую часть последнего равенства, согласно (19.4.19), должно всегда входить $F_{ij}^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_0(x - x')$. Это значит, что слева должен стоять коммутатор в случае целого спина и антикоммутатор в случае полуцелого спина, как того требует теорема Паули о связи между спином и статистикой.

Таким образом, мы доказали, что при локальном взаимодействии между полями из релятивистской инвариантности теории и инвариантности ее относительно R -преобразования вытекает теорема Паули о связи между спином и статистикой.

Может быть доказана также и обратная теорема, заключающаяся в том, что из теоремы Паули о связи между спином и статистикой вытекает инвариантность теории волновых полей по отношению к преобразованию сильного отражения.

19.5. Калибровочная инвариантность уравнений квантовой электродинамики. Как известно, тензор электромагнитного поля в классической электродинамике не изменяется, если подвергнуть 4-потенциал поля $A_\mu(x)$ преобразованию

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu},$$

где $\Lambda(x)$ — произвольная скалярная функция x . Если эта функция такова, что

$$\frac{\partial^2 \Lambda(x)}{\partial x_\mu^2} \equiv \square \Lambda(x) = 0,$$

то преобразованные потенциалы $A'_\mu(x)$ будут удовлетворять таким же уравнениям, как и исходные потенциалы $A_\mu(x)$:

$$\square A_\mu(x) = -j_\mu(x),$$

где $j_\mu(x)$ — 4-вектор плотности тока.

Такого рода преобразования, называемые *калибровочными* (или *градиентными*), имеют место и в квантовой электродинамике, но здесь они затрагивают не только операторы электромагнитного, но и операторы электронно-позитронного поля.

Простейшие калибровочные преобразования в гейзенберговском представлении квантовой электродинамики имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Lambda(x), \\ \Psi(x) &\rightarrow \Psi'(x) = e^{-ie\Lambda(x)} \Psi(x), \\ \bar{\Psi}(x) &\rightarrow \bar{\Psi}'(x) = e^{ie\Lambda(x)} \bar{\Psi}(x), \end{aligned} \quad (19.5.1)$$

где $\Lambda(x)$ — произвольная скалярная c -функция, удовлетворяющая единственному условию

$$\square \Lambda(x) = 0. \quad (19.5.2)$$

Чтобы убедиться в инвариантности уравнений квантовой электродинамики относительно этих преобразований, построим с помощью преобразованных операторов полей, согласно (15.2.1), плотность функции Лагранжа $L \{A'_\mu(x), \Psi'(x), \bar{\Psi}'(x)\}$. Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} L \{A'_\mu(x), \Psi'(x), \bar{\Psi}'(x)\} - L \{A_\mu(x), \Psi(x), \bar{\Psi}(x)\} = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\left(A_\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right] + \left(A_\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_\mu^2}. \end{aligned}$$

Но первое слагаемое, стоящее в правой части этого равенства, имеет вид 4-дивергенции вектора и поэтому не влияет на уравнения движения, второе же слагаемое в силу (19.5.2) обращается в нуль.

Мы назвали преобразования (19.5.1) простейшими, так как они определяются c -функцией $\Lambda(x)$. Но существуют также общие градиентные преобразования, которые определяются не c -функцией, а операторной функцией $\Lambda(x)$, по-прежнему, однако, удовлетворяющей уравнению $\square \Lambda(x) = 0$. Мы не будем изучать здесь таких общих преобразований, а ограничимся только преобразованиями (19.5.1).

Поскольку операторы $A'_\mu(x)$, $\psi'(x)$, $\bar{\psi}'(x)$ и $A_\mu(x)$, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ удовлетворяют одинаковым уравнениям движения и одинаковым перестановочным соотношениям, то они должны быть связаны между собой каноническим преобразованием

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= U A_\mu(x) U^{-1}, \\ \psi'(x) &= U \psi(x) U^{-1}, \\ \bar{\psi}'(x) &= U \bar{\psi}(x) U^{-1}, \end{aligned} \quad (19.5.3)$$

где U — некоторый унитарный оператор,

$$U U^+ = I.$$

Этот оператор можно представить в виде

$$U = e^{iF}, \quad (19.5.4)$$

где F — некоторый самосопряженный оператор,

$$F = F^+.$$

Покажем, что оператор F имеет следующий вид:

$$F = \int \left\{ \Lambda(x) \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial t} \chi \right\} d^3x, \quad (19.5.5)$$

где

$$\chi = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}.$$

Заметим предварительно, что F не зависит от времени. Действительно,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int \left\{ \Lambda(x) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Lambda(x)}{\partial t^2} \chi \right\} d^3x;$$

но

$$\square \chi = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \square A_\mu(x) = -\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0,$$

поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int \left\{ \Lambda(x) \Delta \chi - \frac{\partial^2 \Lambda(x)}{\partial t^2} \chi \right\} d^3x = \int \chi(x) \square \Lambda(x) d^3x = 0$$

Калибровочные преобразования образуют, очевидно, группу. Поэтому достаточно убедиться в справедливости соотношения (19.5.5) для бесконечно малого калибровочного преобразования, которому соответствует бесконечно малая функция $\Lambda(x)$. В этом случае

$$U = I + iF,$$

и формулы (19.5.3) приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_{\mu}(x) &= \mathbf{A}_{\mu}(x) + i[\mathbf{F}, \mathbf{A}_{\mu}(x)], \\ \Psi'(x) &= \Psi(x) + i[\mathbf{F}, \Psi(x)], \\ \bar{\Psi}'(x) &= \bar{\Psi}(x) + i[\mathbf{F}, \bar{\Psi}(x)]. \end{aligned}$$

Сравнение этих формул с формулами (19.5.1) показывает, что должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} i[\mathbf{F}, \mathbf{A}_{\mu}(x)] &= -\frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_{\mu}}, \\ i[\mathbf{F}, \Psi(x)] &= -ie\Lambda(x)\Psi(x), \\ i[\mathbf{F}, \bar{\Psi}(x)] &= ie\Lambda(x)\bar{\Psi}(x), \end{aligned} \quad (19.5.6)$$

в справедливости которых можно убедиться, используя формулы (15.1.3).

Оператор \mathbf{F} имеет особенно простой вид, если $\Lambda = \text{const}$. В этом случае

$$\mathbf{F} = \Lambda \int \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} d^3x = -i\Lambda \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_4(x) d^3x$$

или

$$\mathbf{F} = i\Lambda \int \square \mathbf{A}_4(x) d^3x = -i\Lambda \int \mathbf{j}_4(x) d^3x,$$

т. е.

$$\mathbf{F} = \Lambda \mathbf{Q}, \quad (19.5.7)$$

где \mathbf{Q} — оператор заряда электронно-позитронного поля.

Таким образом, если $\Lambda = \text{const}$, то

$$\mathbf{U} = e^{i\Lambda \mathbf{Q}}. \quad (19.5.8)$$

§ 20. Структура диаграмм матрицы рассеяния

20.1. Собственно энергетические и вершинные диаграммы. Диаграммы матрицы рассеяния в высших приближениях имеют, вообще говоря, сложную структуру. Изучение их облегчается, однако, благодаря тому, что диаграммы, соответствующие самым различным процессам, содержат общие структурные блоки, которые могут быть предварительно выделены и исследованы [15]. Ясно, что, найдя, согласно правилам Фейнмана, величины, отвечающие этим блокам, мы получим возможность решать широкий круг квантовоэлектродинамических задач.

Наибольшее значение имеют три типа структурных блоков — электронные собственно энергетические диаграммы, фотонные собственно энергетические диаграммы и вершинные диаграммы. К рассмотрению этих трех типов диаграмм мы теперь перейдем. Дадим прежде всего их определения.

Электронной собственно энергетической диаграммой (сокращенно ЭСЭД) называется такая часть произвольной диаграммы, которая связана с другими ее частями только двумя электронными линиями. Простейшей ЭСЭД является ЭСЭД второго порядка, изображенная на рис. 20.1, 1. Более сложные ЭСЭД четвертого порядка изображены на рис. 20.1, 2—5.

Фотонной собственно энергетической диаграммой (сокращенно ФСЭД) называется такая часть некоторой произвольной диаграммы, которая связана с ее остальными частями только двумя фотонными линиями. Простейшей

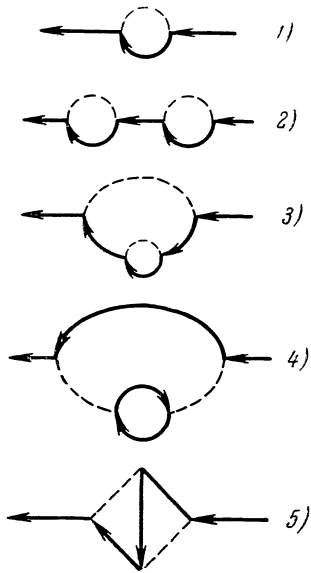


Рис. 20.1.

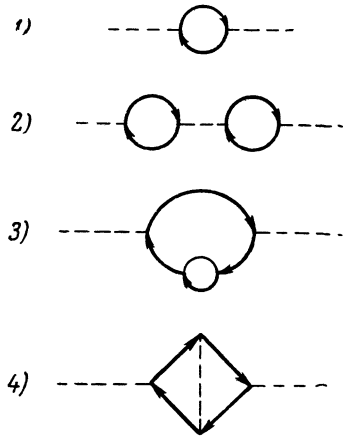


Рис. 20.2.

ФСЭД является ФСЭД второго порядка, изображенная на рис. 20.2, 1. Более сложные ФСЭД четвертого порядка изображены на рис. 20.2, 3, 4.

Наконец, *вершинной диаграммой* (сокращенно ВД) называется такая часть произвольной диаграммы, которая связана с другими ее частями только двумя электронными и одной фотонной линиями. Простейшей ВД является ВД третьего порядка, изображенная на рис. 20.3, 1. Более сложные ВД пятого порядка изображены на рис. 20.3, 2—8.

Следует различать компактные и некомпактные, а также неприводимые и приводимые собственно энергетические и вершинные диаграммы.

Компактной ЭСЭД называется такая ЭСЭД, которую нельзя разбить на части, соединенные только одной электронной линией. В противном случае ЭСЭД называется некомпактной. На рис. 20.1 диаграмма 2 является некомпактной, так как она состоит из двух ЭСЭД, соединенных одной электронной линией, все же остальные диаграммы компактные.

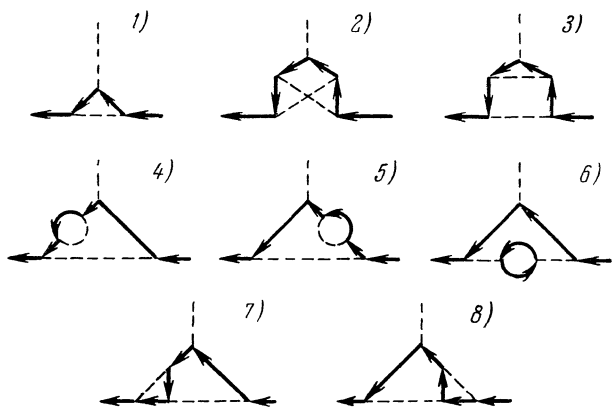


Рис. 20.3.

Компактной ФСЭД называется такая ФСЭД, которую нельзя разбить на части, соединенные только одной фотонной линией; в противном случае ФСЭД называется некомпактной. На рис. 20.2 все диаграммы, кроме 2, являются компактными, диаграмма же 2 некомпактна, так как она состоит из двух ФСЭД, соединенных между собой одной фотонной линией.

Наконец, *компактной ВД* называется такая ВД, которую нельзя разделить на части, соединенные между собой только электронной или фотонной линией; в противном случае ВД называется некомпактной. Изображенные на рис. 20.3 ВД являются, очевидно, компактными. Некомпактная ВД пятого порядка изображена на рис. 20.4.

Определим теперь неприводимые и приводимые диаграммы.

Неприводимой называется такая диаграмма, которая не содержит внутри себя собственно энергетических и вершинных диаграмм; в противном случае она называется *приводимой*.

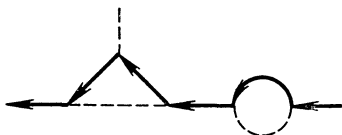


Рис. 20.4.



Рис. 20.5.

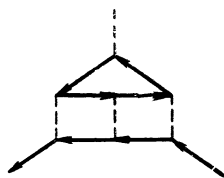


Рис. 20.6.

Существует, очевидно, только одна неприводимая ЭСЭД, а именно ЭСЭД второго порядка, изображенная на рис. 20.1, 1. Легко видеть, например, что остальные диаграммы рис. 20.1 являются приводимыми. Так, диаграмма 2 содержит две ЭСЭД, диаграммы 3 и 4 содержат собственно энергетические диаграммы, а диаграмма 5 содержит вершинную диаграмму. Диаграмму 5 можно представить в одном из видов, изображенных на рис. 20.5, где треугольниками обозначены ВД.

Аналогично существует только одна неприводимая ФСЭД, а именно ФСЭД второго порядка, изображенная на рис. 20.2, 1.

Неприводимых ВД существует бесконечное множество. Из диаграмм, приведенных на рис. 20.3, неприводимыми являются диаграммы 1 и 2. Пример более сложной неприводимой ВД приведен на рис. 20.6.

20.2. Эффективные линии. Рассмотрим какую-либо диаграмму, содержащую внутреннюю электронную линию. В высших приближениях появятся, очевидно, диаграммы со всевозможными ЭСЭД, включенными в эту линию. Всю совокупность таких диаграмм (вместе с исходной электронной линией) мы будем графически изображать в виде сплошной жирной линии и называть ее *эффективной электронной линией*. Величина, соответствующая этой линии, называется *электронной функцией Грина* и обозначается через $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$ или $S'_{\alpha\beta}(p)$, где p — 4-импульс электронной линии (величина $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$ содержит, так же как и $S_{\alpha\beta}(p)$, два спинорных индекса α, β , которые мы обычно будем опускать)

На рис. 20.7 изображены несколько первых диаграмм, соответствующих эффективной электронной линии. Из этого рисунка следует, очевидно, что

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(p) = S_{\alpha\beta}(p) + S_{\alpha\beta'}(p) K_{\beta'\gamma'}^{(2,0)}(p) S_{\gamma'\beta}(p) \quad (20.2.1),$$

или сокращенно, опуская спинорные индексы,

$$G^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) K^{(2,0)}(p) S_c(p),$$

где $K_{\alpha\beta}^{(2,0)}(p) \equiv K^{(2,0)}(p)$ представляет собой сумму величин, соответствующих всем возможным ЭСЭД — как компактным, так и некомпактным — с данным импульсом p . Эта сумма (представляющая собой спин-тензор второго ранга) называется *электронной собственно энергетической функцией*.

Аналогичным образом можно определить *эффективную фотонную линию* как внутреннюю фотонную линию со всевозможными включенными в нее ФСЭД. Мы будем графически изображать ее в виде жирной пунктирной линии. Величина, соответствующая этой линии, называется *фотонной функцией Грина* и обозначается через $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k)$ или $D'_{c\mu\nu}(k)$, где k — 4-импульс фотонной линии (величина $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k)$, так же как и $D_{c\mu\nu}(k)$, содержит два тензорных индекса μ, ν , которые мы будем часто опускать).

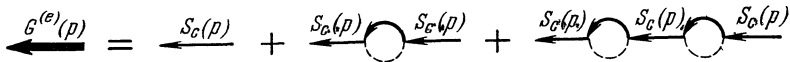


Рис. 20.7.

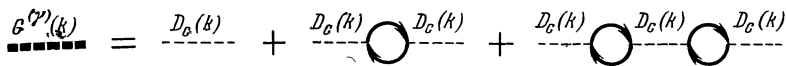


Рис. 20.8.

Из рис. 20.8, на котором изображены несколько первых диаграмм, соответствующих эффективной фотонной линии, следует, что

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) = D_{c\mu\nu}(k) + D_{c\mu\nu'}(k) K_{\nu'\nu}^{(0,2)}(k) D_{c\nu''\nu}(k), \quad (20.2.2)$$

или сокращенно, опуская тензорные индексы,

$$G^{(\gamma)}(k) = D_c(k) + D_c(k) K^{(0,2)}(k) D_c(k),$$

где $K_{\mu\nu}^{(0,2)}(k) \equiv K^{(0,2)}(k)$ — сумма величин, соответствующих всем возможным ФСЭД — как компактным, так и некомпактным — с данным импульсом k . Эта сумма (представляющая собой тензор второго ранга) называется *фотонной собственно энергетической функцией*.

Введение эффективных электронных и фотонных линий позволяет, очевидно, не рассматривать некомпактные вершинные диаграммы. Действительно, некомпактные вершинные диаграммы представляют собой совокупности компактных вершинных диаграмм и эффективных электронных и фотонных линий. Поэтому в дальнейшем под вершинными диаграммами всегда будут подразумеваться компактные вершинные диаграммы.

Если образовать сумму величин, соответствующих всем возможным компактным вершинным диаграммам с заданными импульсами p_1, p_2 и k выходящих электронных и фотонной линий, то мы получим *вершинную функцию*, которую будем обозначать через $\Gamma_{\mu, \alpha\beta}(p_1, p_2; k)$, где μ — векторный и α, β — спинорные индексы. На диаграммах вершинная функция изображается в виде жирной точки, которая называется *эффективной вершиной*. Так как в силу законов сохранения 4-импульса $k = p_1 - p_2$, то в числе аргументов $\Gamma_{\mu, \alpha\beta}(p_1, p_2; k)$ может быть опущен импульс фотонной линии; мы будем обычно также опускать спинорные индексы α, β .

Наряду с эффективными внутренними электронными и фотонными линиями мы должны ввести в рассмотрение также *эффективные внешние электронные и фотонные линии*, представляющие собой внешние электронные и фотонные линии со включенными в них всеми возможными собственно энергетическими диаграммами.

Величину, соответствующую внешней эффективной электронной линии с импульсом p , мы будем обозначать через $u_\alpha(p)$. Эта величина, так же как и $u_\alpha(p)$, является биспинором и может быть, согласно рис. 20.9, представлена в виде

$$u(p) = u(p) + S_c(p) K^{(2,0)}(p) u(p)$$

(спинорные индексы опущены).

Аналогичное равенство может быть написано (рис. 20.10) для величины $a_\mu(k)$, соответствующей эффективной внешней фотонной линии с импульсом k

$$a(k) = a(k) + D_c(k) K^{(0,2)}(k) a(k).$$

Внешние линии служат, как мы знаем, для изображения реальных частиц. Выражаясь более точно, можно сказать, что они служат для изображения матричных элементов

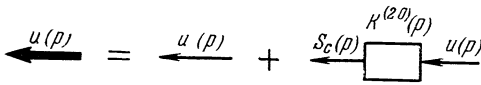


Рис. 20.9.

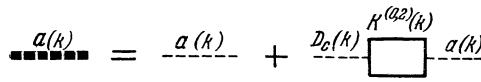


Рис. 20.10.

операторов полей, связывающих состояние вакуума с состояниями, в которых присутствует один фотон или один электрон (позитрон). Поэтому обычным внешним линиям мы сопоставляли величины $u(\pm p) e^{\pm ipx}$ и $a_\mu(k) e^{\pm ikx}$, являющиеся матричными элементами операторов свободных полей $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $A_\mu(x)$, эффективным же электронной и

фотонной линиям мы должны сопоставить матричные элементы операторов взаимодействующих полей $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $A_\mu(x)$. Но согласно (15.4.5) и (15.4.9) матричные элементы этих операторов, связывающие состояние

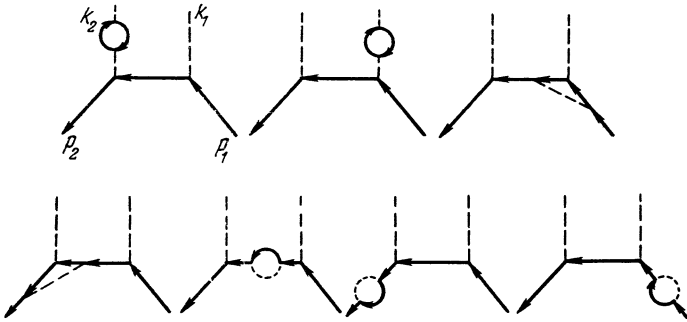


Рис. 20.11.

вакуума с одночастичными состояниями, только множителями $Z_1^{1/2}$ и $Z^{1/2}$ отличаются от матричных элементов $u(\pm p) e^{\pm ipx}$ и $a_\mu(k) e^{\pm ikx}$ для свободных полей. Поэтому мы можем положить

$$u(\pm p) = Z_1^{1/2} u(\pm p), \quad \bar{u}(\pm p) = Z_1^{1/2} \bar{u}(\pm p), \quad a_\mu(k) = Z^{1/2} a_\mu(k).$$

Эти важные соотношения, к которым мы еще вернемся в § 22, показывают, что вместо эффективных внешних линий достаточно рассматривать обычные внешние линии (без собственно энергетических вставок), вводя при этом в элемент матрицы рассеяния на каждую внешнюю электронную

линию множитель $Z_1^{1/2}$ и на каждую внешнюю фотонную линию — множитель $Z_1^{1/2}$.

Используя понятия эффективных линий и эффективных вершин, можно заменить сложные диаграммы, встречающиеся при рассмотрении высших приближений, эффективными — скелетными диаграммами, которые представляют собой неприводимые диаграммы с эффективными линиями и эффективными вершинами вместо обычных линий и обычных вершин.

Рассмотрим в качестве примера диаграммы комpton-эффекта, изображенные на рис. 20.11. Совокупность этих диаграмм сводится к одной эффективной скелетной диаграмме, изображенной на рис. 20.12. Этой диаграмме соответствует, очевидно, величина

$$S_{i \rightarrow f} = Z_1 Z e^2 a_\nu(k_1) a_\mu(k_2) \bar{u}(p_2) \Gamma_\mu(p_2 + k_2, p_2) G^{(e)}(p_2 + k_2) \Gamma_\nu(p_1, p_1 + k_1) u(p_1).$$

Если иметь выражения для $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ и $G^{(e)}(p)$ с точностью до членов второго порядка по e^2 , то достаточно подставить их в $S_{i \rightarrow f}$, отбросив в произведении члены, содержащие e^6 и e^8 , и мы получим сумму величин, соответствующих диаграммам рис. 20.11.

Мы видим, таким образом, что возникает задача нахождения электронной и фотонной функций Грина $G^{(e)}(p)$ и $G^{(v)}(k)$ и вершинной функции $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$.

20.3. Уравнения Дайсона для функций Грина и графическое уравнение для вершинной функции. Попробуем с этой целью установить уравнения, которым удовлетворяют электронная и фотонная функции Грина и вершинная функция.

Рассмотрим сначала электронную функцию Грина $G^{(e)}(p)$. Согласно (20.2.1) она определяется электронной собственно энергетической функцией

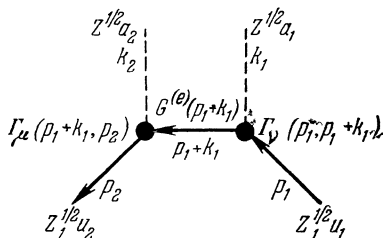


Рис. 20.12.

$$K^{(2,0)}(p) = \Sigma(p) + \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) + \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) + \dots$$

Рис. 20.13.

$K_{\alpha\beta}^{(2,0)}(p)$, которую, как легко видеть, можно выразить через сумму величин, соответствующих всем компактным ЭСЭД с данным импульсом p . Эту сумму мы будем называть *массовым оператором* и обозначать через $\Sigma_{\alpha\beta}(p)$. Графически связь между $K_{\alpha\beta}^{(2,0)}(p)$ и $\Sigma_{\alpha\beta}(p)$ изображена на рис. 20.13, на котором прямоугольник служит для обозначения массового оператора. Мы видим, что

$$K^{(2,0)}(p) = \Sigma(p) + \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) + \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) S_c(p) \Sigma(p) + \dots$$

Суммируя этот бесконечный ряд, мы получим, очевидно,

$$K^{(2,0)}(p) = \Sigma(p) [1 - S_c(p) \Sigma(p)]^{-1}. \tag{20.3.1}$$

Подставляя это выражение в (20.2.1), найдем

$$G^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) \Sigma(p) [1 - S_c(p) \Sigma(p)]^{-1} S_c(p),$$

откуда

$$G^{(e)}(p) = [1 - S_c(p) \Sigma(p)]^{-1} S_c(p), \tag{20.3.2}$$

и, следовательно,

$$G^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) \Sigma(p) G^{(e)}(p). \tag{20.3.3}$$

Это уравнение, связывающее электронную функцию Грина с массовым оператором, называется *уравнением Дайсона для электронной функции Грина* [15]. Заметим, что из (20.3.2) следует соотношение

$$[G^{(e)}(p)]^{-1} = S_c^{-1}(p) - \Sigma(p). \tag{20.3.4}$$

Рассмотрим теперь фотонную функцию Грина $G^{(\nu)}(k)$. Она определяется, согласно (20.2.2), фотонной собственно энергетической функцией $K^{(0,2)}(k)$, которую, как легко убедиться, можно выразить через сумму величин, соответствующих всем компактным ФСЭД с данным импульсом k .

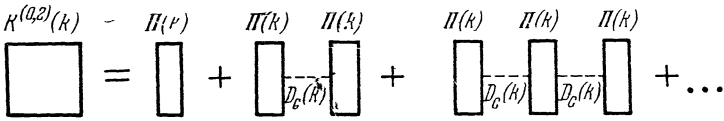


Рис. 20.14.

Эту сумму мы будем называть *поляризационным оператором* и обозначать через $\Pi_{\mu\nu}(k)$. Графически связь между $K^{(0,2)}(k)$ и $\Pi(k)$ изображена на рис. 20.14, из которого следует, что

$$K^{(0,2)}(k) = \Pi(k) + \Pi(k) D_c(k) \Pi(k) + \Pi(k) D_c(k) \Pi(k) D_c(k) \Pi(k) + \dots$$

Суммируя этот бесконечный ряд, получим

$$K^{(0,2)}(k) = \Pi(k) [1 - D_c(k) \Pi(k)]^{-1}.$$

Подставляя это выражение в (20.2.2), найдем

$$G^{(\nu)}(k) = D_c(k) + D_c(k) \Pi(k) G^{(\nu)}(k) \tag{20.3.5}$$

или

$$[G^{(\nu)}(k)]^{-1} = D_c^{-1}(k) - \Pi(k).$$

Это уравнение, называемое *уравнением Дайсона для фотонной функции Грина*, связывает фотонную функцию Грина с поляризационным оператором так же, как уравнение (20.3.3) связывает электронную функцию Грина с массовым оператором.

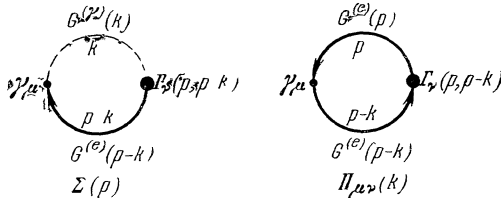


Рис. 20.15

Выясним теперь, как в принципе можно определить массовый и поляризационный операторы. Напомним с этой целью, что существует только одна неприводимая ЭСЭД и одна неприводимая ФСЭД. Поэтому мы имеем только одну скелетную диаграмму, соответствующую массовому оператору $\Sigma(p)$, и одну скелет-

ную диаграмму, соответствующую поляризационному оператору $\Pi(k)$. Эти диаграммы изображены на рис. 20.15. Обратим внимание на то, что только одной из вершин этих диаграмм должна сопоставляться вершинная функция $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ (эту вершину мы назвали выше эффективной вершиной), второй же вершине — обычной — должна сопостав-

ляться матрица γ_μ . Чтобы понять причину этого, рассмотрим, например, ФСЭД, изображенную на рис. 20.16, которая содержит две ВД Y_1 и Y_2 . Эта диаграмма показывает, казалось бы, что эффективными должны быть обе вершины 1 и 2. В действительности, однако, мы можем обе внутренние фотонные линии отнести к одной — правой эффективной вершине, левую же вершину считать обычной.

Применяя правила написания матричных элементов к скелетным диаграммам, соответствующим массовому и поляризованному операторам, мы получим, очевидно, следующие выражения для $\Sigma(p)$ и $\Pi(k)$:

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_\mu G^{(e)}(p-k) \Gamma_\nu(p, p-k) G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) d^4k, \\ \Pi_{\mu\nu}(k) &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int \gamma_\mu G^{(e)}(p) \Gamma_\nu(p, p-k) G^{(e)}(p-k) d^4p. \end{aligned} \quad (20.3.6)$$

Подставляя далее эти выражения в уравнения Дайсона, получим интегральные уравнения для определения функций Грина $G^{(e)}(p)$ и $G^{(\gamma)}(k)$:

$$\begin{aligned} G^{(e)}(p) &= S_c(p) + \\ &+ \frac{e^2}{(2\pi)^4} S_c(p) \int \gamma_\mu G^{(e)}(p-k) \Gamma_\nu(p, p-k) G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) d^4k G^{(e)}(p), \\ G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) &= D_{c\mu\nu}(k) - \\ &- \frac{e^2}{(2\pi)^4} D_{c\mu\lambda}(k) \text{Sp} \int \gamma_\lambda G^{(e)}(p) \Gamma_\rho(p, p-k) G^{(e)}(p-k) d^4p G_{\rho\nu}^{(\gamma)}(k). \end{aligned} \quad (20.3.7)$$

В эти уравнения входит неизвестная вершинная функция $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$. Поэтому мы должны еще установить уравнение для вершинной функции.

Напомним с этой целью, что вершинная функция представляет собой сумму величин, соответствующих всем компактным ВД с заданными импульсами выходящих электронных и фотонной линий. Поэтому мы должны, так же как и при установлении уравнений для фотонной и электронной функций Грина, рассмотреть неприводимые ВД и заменить в них все линии эффективными линиями и все вершины эффективными вершинами. Но неприводимых ВД, в отличие от неприводимых ЭСЭД и ФСЭД, существует бесчисленное множество (неприводимые ВД 3-го, 5-го и 7-го порядков изображены на рис. 20.3, 1, 2) и 20.6). Поэтому мы получим для $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ интегральное уравнение, содержащее бесконечное число слагаемых



Рис. 20.16.

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p_1, p_2) &\equiv \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2) = \\ &= \gamma_\mu + \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \Gamma_\lambda(p_1, p_1-k) G^{(e)}(p_1-k) \Gamma_\mu(p_1-k, p_2-k) \times \\ &\times G^{(e)}(p_2-k) \Gamma_\nu(p_2-k, p_2) G_{\lambda\nu}^{(\gamma)}(k) d^4k + \dots \end{aligned} \quad (20.3.8)$$

Таким образом, мы не получили для трех функций $G^{(e)}(p)$, $G^{(\gamma)}(k)$, $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$, определяющих точные матричные элементы квантовоэлектродинамических процессов, замкнутой системы интегральных уравнений. Это обстоятельство связано с тем, что, как будет показано в § 21.4, уравнения для $G^{(e)}(p)$, $G^{(\gamma)}(k)$ и $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ являются в действительности не интегральными, а функциональными.

Заметим в заключение этого раздела, что хотя связь между вершинной функцией и электронной и фотонной функциями Грина носит крайне сложный характер, в частном случае, когда аргументы в вершинной функции

совпадают, имеет место простое соотношение

$$\Gamma_{\mu}(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} (G^{(e)}(p))^{-1}. \quad (20.3.9)$$

Это соотношение, называемое *соотношением Уорда* [16], в соответствии с (20.3.4) эквивалентно соотношению

$$\Lambda_{\mu}(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_{\mu}} \Sigma(p), \quad (20.3.10)$$

которое легко доказать. Воспользуемся с этой целью тождеством

$$\frac{\partial S_c(p)}{\partial p_{\mu}} = -S_c(p) \frac{\partial (S_c(p))^{-1}}{\partial p_{\mu}} S_c(p) = S_c(p) \gamma_{\mu} S_c(p), \quad (20.3.11)$$

допускающим простую графическую интерпретацию. Действительно, так как функция $S_c(p)$ изображается электронной линией, а матрица γ_{μ} — вершиной диаграммы, то функция $\frac{\partial S_c(p)}{\partial p_{\mu}}$ должна изображаться вершинной диаграммой с фотонным импульсом, равным нулю (рис. 20.17).

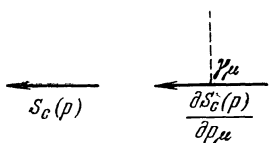


Рис. 20.17.

Отсюда следует, что если мы имеем некоторую компактную ЭСЭД и дифференцируем соответствующую ей величину по импульсу внешней электронной линии (для краткости мы будем говорить просто о дифференцировании ЭСЭД), то этой производной будет соответствовать совокупность диаграмм, каждая из которых отличается от исходной диаграммы включением в одну из внутренних электронных линий вершины с равным нулю фотонным импульсом. Например, если компактная ЭСЭД W имеет вид, изображенный на рис. 20.18 сверху, то $\frac{\partial W}{\partial p_{\mu}}$ будет соответствовать совокупность диаграмм, изображенных на рис. 20.18 внизу. Эти диаграммы представляют собой,

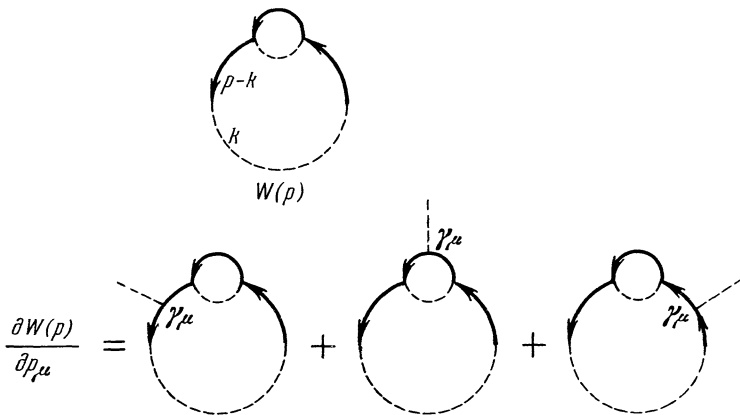


Рис. 20.18.

очевидно, полный набор ВД, которые можно построить, присоединяя фотонные линии к различным электронным линиям, образующим рассматриваемую ЭСЭД.

Если ЭСЭД содержит замкнутую электронную линию, то ее импульсы можно считать не зависящими от импульса внешней электронной линии. Поэтому замкнутая электронная линия не будет участвовать в дифферен-

цировании по импульсу внешней электронной линии. (Это следует также из теоремы Фарри, согласно которой надо учитывать только замкнутые петли с четным числом вершин; дифференцирование же добавляет лишнюю вершину, и поэтому совокупность таких диаграмм можно отбросить).

Итак, взяв совокупность всех компактных ЭСЭД, мы получим при их дифференцировании по импульсу внешней электронной линии совокупность всех компактных ВД в соответствии с соотношением (20.3.10).

§ 21. Функции Грина взаимодействующих полей

21.1. Функции Грина как вакуумные средние. В предыдущем параграфе мы определили функции Грина как величины, соответствующие эффективным электронным и фотонным линиям, т. е. линиям со всевозможными собственно энергетическими вставками. Дадим теперь строгие определения функциям Грина, связав их с операторами полей.

Напомним прежде всего, что функции $D_c(k)$ и $S_c(p)$, в которые, согласно (20.2.1) и (20.2.2), переходят функции $G^{(\nu)}(k)$ и $G^{(e)}(p)$ в предположении об отсутствии взаимодействия между полями, представляют собой средние значения хронологических произведений операторов свободных полей $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ в состоянии вакуума. Поэтому естественно ожидать, что функции $G^{(\nu)}(k)$ и $G^{(e)}(p)$, учитывающие взаимодействие между полями, должны определяться средними от хронологических произведений операторов взаимодействующих полей, т. е. операторов полей $A_\mu(x)$, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ в гейзенберговском представлении. И действительно, как мы далее убедимся, функции $G_{\mu\nu}^{(\nu)}(k)$, и $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$ представляют собой компоненты Фурье функций

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(\nu)}(x_1, x_2) &= (\Phi_0, T \{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)\} \Phi_0), \\ G_{\alpha\beta}^{(e)}(x_1, x_2) &= (\Phi_0, T \{\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2)\} \Phi_0), \end{aligned} \quad (21.1.1)$$

где Φ_0 — вектор состояния вакуума взаимодействующих полей.

Эти функции принадлежат к функциям типа

$$\begin{aligned} G_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\Phi_0, T \{F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n)\} \Phi_0) \equiv \\ &\equiv \langle 0 | T \{F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n)\} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (21.1.2)$$

где $\Phi_0 \equiv |0\rangle$ и $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ — операторы полей в гейзенберговском представлении, носящем общее название *квантовоелектродинамических функций Грина*.

Данное выше определение функции $G_{\mu\nu}^{(\nu)}(x_1, x_2)$ — фотонной функции Грина — относится к тому случаю, когда отсутствует внешнее электромагнитное поле. Если же такое поле имеется (оно рассматривается не как оператор, а как c -число), то фотонная функция Грина определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(\nu)}(x_1, x_2) &= (\Phi_0, T \{A_\mu(x_1), A_\nu(x_2)\} \Phi_0) - \\ &- (\Phi_0, A_\mu(x_1) \Phi_0) (\Phi_0, A_\nu(x_2) \Phi_0). \end{aligned} \quad (21.1.3)$$

Ясно, что в отсутствие внешнего поля

$$(\Phi_0, A_\mu(x) \Phi_0) = 0,$$

и мы приходим к определению (21.1.1). В этом случае, очевидно, функции Грина будут зависеть не от координат x_1, x_2, \dots порознь, а только от их разностей.

Наряду с функциями Грина $G_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, построенными с помощью операторов $A_\mu(x)$, $\psi_\alpha(x)$, $\psi_\beta(x)$, можно таким же образом построить функции Грина с помощью зарядово-сопряженных операторов $A_\mu^c(x)$, $\psi_\alpha^c(x)$, $\overline{\psi}_\beta^c(x)$; мы будем обозначать такие функции Грина через $G_{12\dots n}^c(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Чтобы связать функции Грина с матрицей рассеяния, выразим их через операторы полей в представлении взаимодействия. Предположим с этой целью, что операторы полей $F(x)$ и векторы состояний $\Phi(t)$ в представлении взаимодействия совпадают с операторами полей $F(x)$ и векторами состояний Φ в гейзенберговском представлении в момент времени $t = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{S}(t, 0) F(x) \mathbf{S}^{-1}(t, 0), \\ \Phi(t) &= \mathbf{S}(t, 0) \Phi. \end{aligned} \quad (21.1.4)$$

Будем далее считать, что при $t = \pm\infty$ взаимодействие между полями адиабатически выключается. При таком выключении должно иметь место однозначное соответствие между стационарными состояниями взаимодействующих и свободных полей (предполагается, что отсутствуют связанные состояния взаимодействующих полей). Это значит, что если Φ_n — вектор стационарного состояния взаимодействующих полей, то векторы

$$\Phi_n(\pm\infty) = \mathbf{S}(\pm\infty, 0) \Phi_n$$

будут собственными векторами гамильтониана свободных полей.

В частности, полагая $\Phi_n = \Phi_0$, мы получим векторы состояния вакуума свободных полей

$$\Phi_0(\pm\infty) = \mathbf{S}(\pm\infty, 0) \Phi_0.$$

Поскольку существует одно состояние вакуума, то векторы $\Phi_0(\infty)$ и $\Phi_0(-\infty)$ могут отличаться только численным множителем, по модулю равным единице,

$$\Phi_0(\infty) = S_{\text{vac}} \Phi_0(-\infty),$$

где

$$S_{\text{vac}} = (\Phi_0(-\infty), \mathbf{S}\Phi_0(-\infty))$$

(так как $\mathbf{S}\mathbf{S}^+ = I$, то, очевидно, $|S_{\text{vac}}| = 1$). Мы будем далее называть вектором состояния вакуума свободных полей вектор $\Phi_0(-\infty)$, который будем обозначать через Φ_0 ,

$$\Phi_0 \equiv \Phi_0(-\infty).$$

Таким образом,

$$\Phi_0 = \mathbf{S}(-\infty, 0) \Phi_0 = \frac{1}{S_{\text{vac}}} \mathbf{S}(\infty, 0) \Phi_0. \quad (21.1.5)$$

Покажем теперь, что

$$\begin{aligned} (\Phi_0, T\{F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n)\} \Phi_0) &= \\ = \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T\{F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \mathbf{S}\} \Phi_0). \end{aligned} \quad (21.1.6)$$

Считая для простоты, что $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ и используя формулы (21.1.5) и соотношения

$$|S_{\text{vac}}| = 1, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}(\infty, t_1) \mathbf{S}(t_1, 0) \mathbf{S}(0, t_2) \dots \mathbf{S}(0, t_n) \mathbf{S}(t_n, -\infty),$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T \{F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \mathbf{S}\} \Phi_0) = \\ = (\Phi_0, \mathbf{S}(0, \infty) \mathbf{S}(\infty, t_1) F_1(x_1) \mathbf{S}(t_1, 0) \mathbf{S}(0, t_2) F_2(x_2) \mathbf{S}(t_2, 0) \dots \\ \dots \mathbf{S}(0, t_n) F_n(x_n) \mathbf{S}(t_n, -\infty) \mathbf{S}(-\infty, 0) \Phi_0), \end{aligned}$$

откуда в силу (21.1.4) следует (21.1.6).

Формулы типа (21.1.6) справедливы также и для матричных элементов операторов полей. Рассмотрим, например, матричный элемент оператора $\psi(x)$ между состоянием вакуума Φ_0 и одноэлектронным состоянием Φ_1 . Используя (21.1.4) и (21.1.5), имеем

$$\begin{aligned} (\Phi_0, \psi(x) \Phi_1) = S_{\text{vac}}^* (\Phi_0, \mathbf{S}(\infty, 0) S(0, t) \psi(x) \mathbf{S}(t, 0) \mathbf{S}(0, -\infty) \Phi_1) = \\ = \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T \{\psi(x) \mathbf{S}\} \Phi_1), \quad (21.1.7) \end{aligned}$$

где $\Phi_1 = \Phi_1(-\infty)$ и $\Phi_1(t)$ — вектор одноэлектронного состояния в представлении взаимодействия.

Поступая аналогичным образом, можно убедиться в справедливости общего соотношения

$$\begin{aligned} (\Phi_r, F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \Phi_{r'}) = \\ = \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_r, T \{F_1(x_1) \dots F_n(x_n) \mathbf{S}\} \Phi_{r'}), \quad (21.1.8) \end{aligned}$$

где Φ_r и $\Phi_{r'}$ — векторы некоторых состояний r и r' в гейзенберговском представлении, $\Phi_r(t)$ и $\Phi_{r'}(t)$ — соответствующие им векторы состояний в представлении взаимодействия и $\Phi_r = \Phi_r(-\infty)$.

Нам остается убедиться в эквивалентности двух определений функций Грина — аналитического и графического.

Заметим с этой целью, что каждому процессу взаимодействия электронов и фотонов соответствует определенное нормальное произведение операторов полей, и поэтому в принципе матрица рассеяния может быть представлена в виде разложения по различным нормальным произведениям операторов полей

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_{\text{vac}}} = \sum_{n, \nu} \int K^{(2n, \nu)}(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu) \times \\ \times N(\bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_n) \psi(y_1) \dots \psi(y_n) A(\xi_1) \dots A(\xi_\nu)) d^4x_1 \dots d^4\xi_\nu, \quad (21.1.9) \end{aligned}$$

где $K^{(2n, \nu)}$ — некоторый спинор $2n$ -го ранга и тензор ν -го ранга, т. е. величина, содержащая $2n$ спинорных и ν векторных индексов (для краткости они опущены), причем, очевидно,

$$K^{(0, 0)} = 1.$$

Такое разложение можно в принципе получить из разложения матрицы рассеяния в ряд по степеням заряда электрона, если в каждом из членов этого ряда выделить определенное нормальное произведение и сложить множители, стоящие перед ним, во всех членах ряда. Ясно, что коэффициент $K^{(2n, \nu)}$ определяет точное значение (с учетом высших приближений теории возмущений) матричного элемента, соответствующего процессу, в котором участвует в начальном и конечном состояниях $2n$ электронов и позитронов и ν фотонов. Например, эффекту Комптона соответствует

матричный элемент

$$\frac{\langle f | \mathbf{S} | i \rangle}{S_{\text{vac}}} = a_{\mu}(k_1) a_{\nu}(k_2) \bar{u}(p_2) \{ K_{\mu\nu}^{(2,2)}(-p_2, p_1, k_1, -k_2) + \\ + K_{\mu\nu}^{(2,2)}(-p_2, p_1, -k_2, k_1) \} u(p_1),$$

где $a_{\mu}(k_1)$, $a_{\nu}(k_2)$, $u(p_1)$ и $\bar{u}(p_2)$ — амплитуды начальных и конечных фотонных и электронных состояний и

$$K_{\mu\nu}^{(2,2)}(q_1, q_2, f_1, f_2) = \int K_{\mu\nu}^{(2,2)}(x, y, \xi_1, \xi_2) e^{i(q_1x + q_2y + f_1\xi_1 + f_2\xi_2)} d^4x d^4y d^4\xi_1 d^4\xi_2$$

(мы выписали явно векторные индексы μ, ν).

Из разложения (21 1 9) и графической интерпретации элементов матрицы рассеяния следует, очевидно, что введенные в § 20 2 электронная и фотонная собственно энергетические функции $K^{(2,0)}(p)$ и $K^{(0,2)}(k)$ представляют собой компоненты Фурье $K^{(2,0)}(x, y)$ и $K^{(0,2)}(\xi_1, \xi_2)$ (следует иметь в виду, что в отсутствие внешнего поля аргументы в этих функциях входят не порознь, а в виде разностей $x - y$ и $\xi_1 - \xi_2$).

Чтобы убедиться в эквивалентности обоих определений функций Грина, достаточно подставить разложение (21 1 9) в (21 1 8)

Рассмотрим сначала электронную функцию Грина

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x-y) = \left(\Phi_0, T \left\{ \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times N \left[1 - \int K_{\gamma\delta}^{(2,0)}(x'-y') \psi_{\delta}(y') \bar{\psi}_{\gamma}(x') d^4x' d^4y' + \dots \right] \right\} \Phi_0 \right)$$

(для простоты мы считаем, что внешнее электромагнитное поле отсутствует). Входящие сюда смешанные T -произведения можно разложить, согласно правилам Вика, по N -произведениям. Так как среднее от любого N -произведения по состоянию вакуума равно нулю, то все члены в разложении \mathbf{S} по нормальным произведениям, кроме выписанных здесь, не дадут вклада в $G^{(e)}(x-y)$. Используя далее равенства

$$(\Phi_0, T \{ \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \} \Phi_0) = S_{c\alpha\beta}(x-y),$$

$$(\Phi_0, T \{ \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) N [\psi_{\delta}(y') \bar{\psi}_{\gamma}(x')] \} \Phi_0) = -S_{c\alpha\gamma}(x-x') S_{c\delta\beta}(y'-y),$$

получим

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x-y) = S_{c\alpha\beta}(x-y) + \int S_{c\alpha\gamma}(x-x') K_{\gamma\delta}^{(2,0)}(x'-y') S_{c\delta\beta}(y'-y) d^4x' d^4y'$$

или в импульсном представлении

$$G^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) K^{(2,0)}(p) S_c(p)$$

(спинорные индексы опущены) Это соотношение совпадает с (20 2 1), откуда и вытекает эквивалентность двух определений электронной функции Грина

Поступая аналогично с фотонной функцией Грина, получим

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x-y) = D_{c\mu\nu}(x-y) + \\ + \int D_{c\mu\lambda}(x-x') K_{\lambda\nu}^{(0,2)}(x'-y') D_{c\gamma\nu}(y'-y) d^4x' d^4y'$$

или в импульсном представлении

$$G^{(\nu)}(k) = D_c(k) + D_c(k) K^{(0,2)}(k) D_c(k),$$

что совпадает с (20.2.2).

Разъясним в заключение этого раздела понятие вершинной функции. Введем для этого функцию Грина

$$G_{\alpha\beta, \mu}^{(e, \nu)}(x_1, x_2; x) = (\Phi_0, T\{\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) A_\mu(x)\} \Phi_0) - \\ - (\Phi_0, T\{\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2)\} \Phi_0) (\Phi_0, A_\mu(x) \Phi_0).$$

В отсутствие внешнего электромагнитного поля (мы будем для простоты рассматривать далее этот случай) второе слагаемое обращается в нуль и $G^{(e, \nu)}$ становится функцией двух аргументов $G_{\alpha\beta, \mu}^{(e, \nu)} = G_{\alpha\beta, \mu}^{(e, \nu)}(x_1 - x, x - x_2)$. Используя общее выражение (21.1.6) для функций Грина, связывающее их с операторами полей в представлении взаимодействия, и разложение матрицы рассеяния (21.1.9), легко убедиться, что

$$G_{\alpha\beta, \mu}^{(e, \nu)}(x_1 - x, x - x_2) = \\ = \int S_{c\alpha\gamma}(x - x'_1) K_{\gamma\delta, \nu}^{(2,1)}(x'_1 - x', x'_2 - x') S_{c\delta\beta}(x'_2 - x_2) \times \\ \times D_{c\mu\nu}(x' - x) d^4x'_1 d^4x'_2 d^4x'$$

или в компонентах Фурье

$$G_{\mu}^{(e, \nu)}(p, p') = S_c(p) K_{\nu}^{(2,1)}(p, p') S_c(p') D_{c\nu\mu}(p - p') \quad (21.1.10)$$

(спинорные индексы опущены).

Входящая в эту формулу величина $K^{(2,1)}(p, p')$ представляет собой, очевидно, сумму величин, соответствующих совокупности всех вершинных диаграмм — как компактных, так и некомпактных. В этом отношении формула (21.1.10) аналогична формулам (20.2.1) и (20.2.2) для функций Грина $G^{(e)}(p)$ и $G^{(\nu)}(k)$, в которые входят функции $K^{(2,0)}(p)$ и $K^{(0,2)}(k)$, представляющие собой суммы величин, соответствующих всем ЭСЭД и ФСЭД — как компактным, так и некомпактным.

Рассматривая электронную и фотонную функции Грина, мы перешли от функций $K^{(2,0)}(p)$ и $K^{(0,2)}(k)$ к массовому и поляризованному операторам $\Sigma(p)$ и $\Pi(k)$, представляющим собой суммы величин, соответствующих только компактным ЭСЭД и ФСЭД. Подобно этому мы можем перейти от функции $K^{(2,1)}(p, p')$ к вершинной функции $\Gamma_{\mu}(p, p')$, представляющей собой сумму величин, соответствующих только компактным ВД. Формула (21.1.10) примет тогда вид

$$G_{\mu}^{(e, \nu)}(p, p') = -G^{(e)}(p) e\Gamma_{\nu}(p, p') G^{(e)}(p') G_{\nu\mu}^{(\nu)}(p - p'). \quad (21.1.11)$$

Эта формула означает, что функции $G_{\mu}^{(e, \nu)}(p, p')$ соответствует блок, содержащий две эффективные электронные линии, одну эффективную фотонную линию и одну эффективную вершину (рис 21.1).

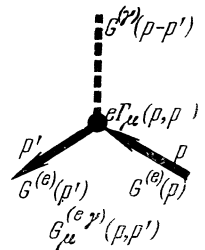


Рис. 21.1.

В координатном представлении формула (21.1.11) имеет вид

$$\begin{aligned} G_{\mu}^{(e, \gamma)}(x_1, x_2; x) &= \\ &= -e \int G^{(e)}(x_1, x_1) \Gamma_{\nu}(x'_1, x'_2; x') G^{(e)}(x'_2, x_2) G_{\nu\mu}^{(\gamma)}(x', x) d^4x'_1 d^4x'_2 d^4x'. \end{aligned} \quad (21.1.12)$$

21.2. Следствия из условия Лоренца. Перейдем к исследованию общих свойств функций Грина

Заметим предварительно, что продольная часть среднего по вакууму от оператора электромагнитного поля $(\Phi_0, \mathbf{A}_{\mu}(x) \Phi_0)$ — величины, отличной от нуля при наличии внешнего поля, — всегда равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\Phi_0, \mathbf{A}_{\mu}(x) \Phi_0) = 0. \quad (21.2.1)$$

В этом легко убедиться, разбив оператор $\chi(x) = \frac{\partial \mathbf{A}_{\mu}}{\partial x_{\mu}}$ на положительно- и отрицательно-частотные части $\chi(x) = \chi_+(x) + \chi_-(x)$ и используя соотношение

$$\chi_+(x) \Phi_0 = 0. \quad (21.2.2)$$

Покажем прежде всего, что взаимодействие между полями не оказывает влияния на продольную часть фотонной функции Грина, так что имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} D_{c\mu\nu}(x - x'), \quad (21.2.3)$$

где

$$D_{c\mu\nu}(x) = D_c(x) \delta_{\mu\nu},$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} D_c(x - x').$$

Замечая, что операторы электромагнитного поля $\mathbf{A}_{\mu}(x)$ и $\mathbf{A}_{\nu}(x')$ коммутируют друг с другом в один и тот же момент времени, имеем, очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') = (\Phi_0, T \{ \chi(x) \mathbf{A}_{\nu}(x') \} \Phi_0).$$

Учитывая далее (21.2.2) и предполагая для определенности, что $t > t'$, перепишем это равенство в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') = (\Phi_0, [\chi_+(x), \mathbf{A}_{\nu}(x')] \Phi_0).$$

Принимая, наконец, во внимание соотношение (15.6.12)

$$[\chi_+(x), \mathbf{A}_{\nu}(x')] = -i \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} D_+(x - x')$$

и вспоминая формулу (6.4.9)

$$D_c(x) = i\theta(-t) D_-(x) - i\theta(t) D_+(x),$$

мы получим (21.2.3).

Если внешнее поле отсутствует, то в импульсном представлении соотношение (21.2.3) имеет вид

$$k_{\nu} G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) = k_{\mu} D_c(k). \quad (21.2.4)$$

Отсюда вытекает свойство поперечности поляризационного оператора

$$k_\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0, \quad (21.2.5)$$

означающее в свою очередь, что $\Pi_{\mu\nu}(k)$ имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (21.2.6)$$

где $\Pi(k)$ — некоторая скалярная функция от k^2 .

Так как продольная часть фотонной функции Грина не затрагивается взаимодействием между полями, то ее можно вовсе не рассматривать, а ограничиться рассмотрением только поперечной части фотонной функции Грина. Эта часть, которую мы будем обозначать через $G_{\mu\nu}^{(\gamma)t}(k)$, удовлетворяет условию

$$k_\mu G_{\mu\nu}^{(\gamma)t}(k) = 0$$

и имеет, очевидно, вид

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)t}(k) = G^{(\gamma)}(k) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$

где $G^{(\gamma)}(k)$ — некоторая скалярная функция k^2 .

Покажем, наконец, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} G_\mu^{(e,\gamma)}(x_1, x_2; x) = ie (D_c(x-x_2) - D_c(x-x_1)) G^{(e)}(x_1, x_2). \quad (21.2.6)$$

Так как оператор $A_\mu(x)$ коммутирует с операторами $\Psi(x')$ и $\bar{\Psi}(x')$ при $t=t'$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} G_\mu^{(e,\gamma)}(x_1, x_2; x) = (\Phi_0, T \{ \chi(x) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \} \Phi_0).$$

Разбивая $\chi(x)$ на положительно- и отрицательно-частотные части $\chi(x) = \chi_+(x) + \chi_-(x)$ и учитывая формулу (6.4.9), а также соотношения (15.6.12)

$$[\chi_\pm(x), \Psi(x_1)] = -e D_\pm(x-x_1) \Psi(x_1),$$

$$[\chi_\pm(x), \bar{\Psi}(x_2)] = e D_\pm(x-x_2) \bar{\Psi}(x_2),$$

мы приходим, согласно (21.2.2), к формуле (21.2.6).

Подставляя в (21.2.6) вместо $G_\mu^{(e,\gamma)}$ выражение (21.1.12) и используя (21.2.3), получим

$$\begin{aligned} -e \int G^{(e)}(x_1, x_1') \frac{\partial \Gamma_\nu(x_1', x_2'; x')}{\partial x_\nu'} G^{(e)}(x_2', x_2) D_c(x-x') d^4 x_1' d^4 x_2' d^4 x' = \\ = ie (D_c(x-x_2) - D_c(x-x_1)) G^{(e)}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Применяя к обеим частям этого соотношения оператор \square и замечая, что

$$\square D_c(x) = i \delta(x),$$

найдем

$$\begin{aligned} i (\delta(x-x_1) - \delta(x-x_2)) G^{(e)}(x_1, x_2) = \\ = \int G^{(e)}(x_1, x_1') \frac{\partial \Gamma_\nu(x_1', x_2'; x)}{\partial x_\nu} G^{(e)}(x_2', x_2) d^4 x_1' d^4 x_2'. \quad (21.2.7) \end{aligned}$$

Если внешнее поле отсутствует, то $G^{(e)}$ и $G^{(\gamma)}$ будут функциями только

разностей координат. Переходя в этом случае к импульсному представлению, получим

$$G^{(e)}(p') - G^{(e)}(p) = -(p - p')_{\mu} G^{(e)}(p) \Gamma_{\mu}(p, p') G^{(e)}(p')$$

или

$$[G^{(e)}(p)]^{-1} - [G^{(e)}(p')]^{-1} = -(p - p')_{\mu} \Gamma_{\mu}(p, p'). \quad (21.2.8)$$

Из этой формулы следует, в частности, что

$$\Gamma_{\mu}(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} [G^{(e)}(p)]^{-1}. \quad (21.2.9)$$

Это соотношение было получено в § 20.3 путем непосредственного рассмотрения диаграмм, соответствующих массовому оператору $\Sigma(p)$.

21.3. Спектральное представление функций Грина. Покажем, что функции Грина взаимодействующих полей можно представить в виде суперпозиции функций Грина свободных полей с различными массами частиц [17], [18].

Рассмотрим сначала фотонную функцию Грина $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x - x')$, считая для определенности, что $t > t'$. В этом случае $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x - x')$ определяется выражением

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x - x') = \langle 0 | \mathbf{A}_{\mu}(x) \mathbf{A}_{\nu}(x') | 0 \rangle,$$

которое, согласно правилу умножения матриц (при использовании индефинитной метрики), может быть представлено в виде

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x - x') = \sum_{k, g'} \langle 0 | \mathbf{A}_{\mu}(x) | k g' \rangle \langle k g' | \mathbf{A}_{\nu}(x') | 0 \rangle (-1)^{N_0},$$

где суммирование производится по различным беззарядовым состояниям $k g' \equiv g$ системы взаимодействующих полей, N_0 обозначает число «скалярных» фотонов в состоянии g и матричные элементы $\langle 0 | \mathbf{A}_{\mu}(x) | k g' \rangle$ и $\langle k g' | \mathbf{A}_{\nu}(x') | 0 \rangle$ определяются формулами (15.4.7).

В § 15.4 мы видели, что при $k^2 < 0$ матричные элементы оператора $\mathbf{A}_{\mu}(x)$ удовлетворяют условию поперечности. Поэтому «скалярные фотоны» не вносят вклада в $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}$ при $k^2 < 0$, т. е. должно иметь место соотношение

$$\sum_{g'} \eta_g a_{\mu}(k) \eta_g^* a_{\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) \frac{f(-k^2)}{2V\omega}, \quad k^2 < 0,$$

где $f(-k^2)$ — некоторая существенно положительная функция от k^2 . Это соотношение позволяет представить соответствующую часть суммы, определяющей $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x - x')$, в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k, g' \\ (k^2 < 0)}} \langle 0 | \mathbf{A}_{\mu}(x) | k g' \rangle \langle k g' | \mathbf{A}_{\nu}(x') | 0 \rangle = \\ = \sum_{k^2 < 0} f(-k^2) \sum_k \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) \frac{1}{2V\omega} e^{ik(r-r') - i\omega|t-t'|}, \end{aligned} \quad (21.3.1)$$

где суммирование по k производится в два этапа — сначала по пространственным составляющим \mathbf{k} , при заданном $-k^2 \equiv M^2$, а затем по различным значениям $M > 0$; поэтому под ω здесь следует понимать $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}$ (мы написали в экспоненте не $t - t'$, а $|t - t'|$ для того, чтобы формула была справедливой как при $t > t'$, так и при $t < t'$).

Как было показано в § 21.2, взаимодействие между полями не оказывает влияния на продольную часть фотонной функции Грина. Поэтому можно ограничиться рассмотрением только поперечной части фотонной функции Грина $G_{\mu\nu}^{(\nu)t}(x-x')$, которая в соответствии с (21.3.1) определяется формулой

$$G_{\mu\nu}^{(\nu)t}(x-x') = \sum_M f(M^2) \sum_{\substack{\kappa \\ (k^2 = -M^2)}} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{e^{ik(r-r') - i\sqrt{k^2 + M^2}|t-t'|}}{2V\sqrt{k^2 + M^2}},$$

где M принимает все положительные значения, а также значение, равное нулю.

Используя интегральное представление (6.3.2) функции $\frac{1}{\omega} e^{-i\omega|t|}$, можно, очевидно, представить $G_{\mu\nu}^{(\nu)t}(x-x')$ в виде

$$G_{\mu\nu}^{(\nu)t}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) G^{(\nu)}(k) e^{ik(x-x')} d^4k, \quad (21.3.2)$$

где

$$G^{(\nu)}(k) = \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{\sigma(M^2) dM^2}{k^2 + M^2 - i0} \quad (21.3.3)$$

и

$$\sigma(M^2) dM^2 = \sum_{M^2 \leq k^2 \leq M^2 + dM^2} f(k^2).$$

Как было показано в § 6.5, функция

$$\Delta_c(x; M) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Delta_c(k; M) e^{ikx} d^4k,$$

где

$$\Delta_c(k; M) = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 + M^2 - i0},$$

является функцией Грина свободного скалярного поля, с которым связаны частицы с массой M . Поэтому формула (21.3.3) означает, что поперечная часть фотонной функции Грина представляет собой суперпозицию функций Грина свободных частиц с различными массами

$$G^{(\nu)}(k) = \int_0^\infty \sigma(M^2) \Delta_c(k; M) dM^2. \quad (21.3.4)$$

Так как величина $\sigma(M^2)$ существенно положительна, то ее можно интерпретировать как плотность состояний с данной массой.

Разложение (21.3.4) мы будем называть *спектральным представлением фотонной функции Грина*, а функцию $\sigma(M^2)$ — *спектральной плотностью*.

Если бы электромагнитное поле было свободным, то матричные элементы $\langle 0 | \mathbf{A}_\mu(x) | kg' \rangle$ были бы отличные от нуля только для однофотонных состояний, т. е. при $k^2 = 0$, и спектральная плотность равнялась бы $\delta(M^2)$. Так как электромагнитное поле не является свободным, но с ним связан только один сорт стабильных частиц — фотоны, то спектральная плотность должна иметь вид

$$\sigma(M^2) = Z \{ \delta(M^2) + \rho(M^2) \}, \quad (21.3.5)$$

где Z — константа, введенная в § 15.4, и $\rho(M^2)$ — некоторая положительная определенная функция, не имеющая δ -образных особенностей. Подстановка этого выражения в (21.3.3) приводит к следующему спектральному представлению поперечной части фотонной функции Грина:

$$G^{(\nu)}(k) = \frac{Z}{i} \left\{ \frac{1}{k^2 - i0} + \int_0^{\infty} \frac{\rho(M^2) dM^2}{k^2 + M^2 - i0} \right\}. \quad (21.3.6)$$

Это важное соотношение позволяет выяснить аналитические свойства функции $G^{(\nu)}(k)$. Действительно, вспоминая, что

$$\Delta_c(k; M) = \pi \delta(k^2 + M^2) - iP \frac{1}{k^2 + M^2},$$

имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G^{(\nu)}(k) &= \pi Z \{ \delta(k^2) + \rho(-k^2) \theta(-k^2) \}, \\ \operatorname{Im} G^{(\nu)}(k) &= -ZP \left\{ \frac{1}{k^2} + \int_0^{\infty} \frac{\rho(M^2) dM^2}{k^2 + M^2} \right\}, \end{aligned} \quad (21.3.7)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Мы видим, таким образом, что реальная часть фотонной функции Грина обращается в нуль при $k^2 > 0$; при $k^2 < 0$ она отлична от нуля и положительна.

Из (21.3.7) следуют, очевидно, соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} G^{(\nu)}(k) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} G^{(\nu)}(k') dk'^2}{k'^2 - k^2}, \\ G^{(\nu)}(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} G^{(\nu)}(k') dk'^2}{k'^2 - k^2 + i0}, \end{aligned} \quad (21.3.8)$$

показывающие, что $G^{(\nu)}(k)$ как функция k^2 не имеет особенностей в верхней полуплоскости переменной k^2 .

Спектральное представление фотонной функции Грина позволяет сделать также некоторые заключения о характере асимптотического поведения функции $G^{(\nu)}(k)$ при $k^2 \rightarrow \infty$. Введем для этого в рассмотрение интеграл

$$J = \int_0^{\infty} \rho(M^2) dM^2$$

и предположим сначала, что величина J конечна. Тогда, так как $\rho(M^2) > 0$, то, очевидно,

$$G^{(\nu)}(k) \sim \frac{Z}{i} (1 + J) \frac{1}{k^2}, \quad k^2 \rightarrow \infty,$$

т. е. в этом случае функция $G^{(\nu)}(k)$ ведет себя в области больших k^2 так же, как функция $D_c(k)$, являющаяся функцией Грина свободного электромагнитного поля.

Если величина J бесконечна, то, как легко видеть, функция $G^{(\nu)}(k)$ убывает при $k^2 \rightarrow \infty$ медленнее, чем $\frac{1}{k^2}$.

Покажем теперь, что постоянная Z и спектральная плотность $\rho(M)$ связаны между собой определенным соотношением

Воспользуемся для этого перестановочными соотношениями для операторов электромагнитного поля, из которых следует, в частности, что

$$\langle 0 | \left[A_j(x), \frac{\partial A_{j'}(x')}{\partial t'} \right] | 0 \rangle_{t=t'} = -i \delta_{jj'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad j, j' = 1, 2, 3. \quad (21.3.9)$$

С другой стороны, дифференцируя (21.3.2) по t' и полагая затем $t' = t$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ G_{jj'}^{(\gamma)t}(x-x') - G_{j'j}^{(\gamma)t}(x'-x) \right\} \Big|_{t'=t} &= \langle 0 | \left[A_j(x), \frac{\partial A_{j'}(x')}{\partial t'} \right] | 0 \rangle_{t=t'} = \\ &= i \sum_M f(M^2) \sum_{\substack{k \\ (k^2 = -M^2)}} \left(\delta_{jj'} - \frac{k_j k_{j'}}{k^2} \right) \frac{1}{V} e^{ik \cdot (r-r')}, \end{aligned}$$

откуда

$$\int \langle 0 | \left[A_j(x), \frac{\partial A_{j'}(x')}{\partial t'} \right] | 0 \rangle_{t=t'} d^3x = i \delta_{jj'} \sum_M f(M^2).$$

Сравнение этого выражения с (21.3.9) дает $\sum_M f(M^2) = 1$, откуда, согласно (21.3.5) и (21.3.3), следует соотношение

$$\frac{1}{Z} = 1 + \int_0^\infty \rho(M^2) dM^2, \quad (21.3.10)$$

а так как $\rho(M^2) \geq 0$, то

$$0 \leq Z \leq 1. \quad (21.3.10')$$

Перейдем к выводу спектрального представления электронной функции Грина $G_{\alpha\beta}^{(e)}(x-x')$. Считая для определенности, что $t > t'$, и поступая так же, как и при выводе спектрального представления фотонной функции Грина, имеем

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x-x') = \sum_{pq\mu s} \langle 0 | \Psi_\alpha(x) | pq\mu s \rangle (-1)^{N_0^{(r)}} \langle pq\mu s | \bar{\Psi}_\beta(x') | 0 \rangle,$$

где $p q \mu s \equiv r$ служит для обозначения различных однозарядовых состояний системы взаимодействующих полей, $N_0^{(r)}$ представляет собой число скалярных фотонов в состоянии r и матричные элементы $\langle 0 | \Psi_\alpha(x) | pq\mu s \rangle$ и $\langle pq\mu s | \bar{\Psi}_\beta(x') | 0 \rangle$ определяются формулами (15.4.4)

Выполняя суммирование по r в два этапа — сначала по p и μ при заданном $p^2 = -M^2$, а затем по M и q , перепишем это выражение в виде

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x-x') = \sum_{Mq} f(M^2, q) \sum_{pu} u_\alpha^\mu(qp) \bar{u}_\beta^\mu(qp) e^{i p \cdot (r-r') - i \sqrt{p^2 + M^2} |t-t'|}, \quad (21.3.11)$$

где

$$f(M^2, q) = \sum_s (-1)^{N_0^{(r)}} \xi(p, q, s) |_{p^2 = -M^2}$$

(мы написали в экспоненте $|t-t'|$ вместо $t-t'$ для того, чтобы формула была справедливой как при $t > t'$, так и при $t < t'$).

Входящая сюда сумма по p и μ при $q = 1$ была вычислена в § 14. Повторяя эти вычисления, легко показать, что

$$\sum_{p\mu} u_{\alpha}^{\mu}(qp) \bar{u}_{\beta}^{\mu}(qp) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}-i\sqrt{p^2+M^2}|t|} = S_{c\alpha\beta}(x; M, q),$$

где

$$S_c(x; M, q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_c(p; M, q) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} d^4p$$

и

$$S_c(p; M, q) = -\frac{i}{i\hat{p} + M - i0}.$$

Поэтому окончательно получим для $G_{\alpha\beta}^{(e)}(x - x')$ выражение

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_{\alpha\beta}^{(e)}(p) e^{i\mathbf{p}(x-x')} d^4p, \quad (21.3.12)$$

где

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(p) = \sum_q \int_m^{\infty} S_{c\alpha\beta}(p; M, q) \sigma(M^2, q) dM \quad \text{и} \quad \sigma(M^2, q) dM = \sum_{M \leq \kappa \leq M+dM} f(\kappa^2, q).$$

Таким образом, электронная функция Грина, так же как и фотонная функция Грина, допускает спектральное представление, т. е. разложение по функциям Грина свободных частиц. Однако, в отличие от поперечной фотонной функции Грина, определяемой одной существенно положительной спектральной функцией, разложение электронной функции Грина определяется двумя спектральными функциями $\sigma(M^2, q)$, $q = \pm 1$, причем эти функции не являются существенно положительными.

Так как с электронно-позитронным полем связана одна реальная частица — электрон, для которой $q = +1$ и $p^2 = -m^2$, где m — масса реального электрона, то из функции $\sigma(M^2, +1)$ можно выделить δ -образное слагаемое

$$\sigma(M^2, +1) = Z_1 \{ \delta(M - m) + \rho_+(M^2) \},$$

где Z_1 — константа, входящая в (15.4.5), и $\rho_+(M^2)$ — некоторая функция от M^2 , не содержащая δ -образных особенностей. Поэтому спектральному представлению электронной функции Грина можно придать вид

$$G^{(e)}(p) = \frac{Z_1}{i} \left\{ \frac{1}{i\hat{p} + m - i0} + \int_m^{\infty} \frac{\rho_+(M^2) dM}{i\hat{p} + M - i0} + \int_m^{\infty} \frac{\rho_-(M^2) dM}{-i\hat{p} - M - i0} \right\}, \quad (21.3.13)$$

где $Z_1 \rho_-(M^2) \equiv \sigma(M^2, -1)$. Здесь отчетливо видно, что электронная функция Грина имеет простой полюс при $p^2 = -m^2$, т. е. в точке, соответствующей состоянию реального электрона.

Поступая так же, как и в случае фотонной функции Грина, можно связать константу Z_1 со спектральными плотностями $\rho_+(M^2)$ и $\rho_-(M^2)$. Для этого нужно воспользоваться перестановочными соотношениями (15.1.3) для операторов электронно-позитронного поля в один и тот же момент времени, из которых, в частности, следует, что

$$\langle 0 | \{ \Psi_{\alpha}(x), \bar{\Psi}_{\beta}(x') \} | 0 \rangle_{t=t'} = (\gamma_4)_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

С другой стороны, повторяя выкладки, приводящие к (21.3.13), легко убедиться, что

$$\langle 0 | \{ \Psi_{\alpha}(x), \bar{\Psi}_{\beta}(x') \} | 0 \rangle = (\gamma_4)_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') Z_1 \left\{ 1 + \int_m^{\infty} [\rho_+(M^2) + \rho_-(M^2)] dM \right\}.$$

Поэтому

$$Z_1^{-1} = 1 + \int_m^{\infty} [\rho_+(M^2) + \rho_-(M^2)] dM. \quad (21.3.14)$$

21.4. Уравнения для функций Грина в функциональных производных.

В предыдущих разделах мы дали определения функций Грина и выяснили некоторые их общие свойства. Установим теперь уравнения, которым удовлетворяют эти функции.

В § 20.3, исходя из графических определений функций Грина, были выведены уравнения для электронной и фотонной функций Грина. В эти уравнения входит, однако, неизвестная вершинная функция, уравнение для которой содержит бесконечное число интегральных операторов, соответственно бесконечному числу неприводимых вершинных диаграмм. Это значит, что уравнение для вершинной функции, а следовательно, и уравнения для электронной и фотонной функций Грина нельзя сформулировать в замкнутом виде, используя только операции дифференцирования и интегрирования по пространственно-временным координатам.

Мы покажем теперь, что уравнения для функций Грина могут быть сформулированы в замкнутом виде, если использовать операцию функционального дифференцирования [19].

Введем с этой целью в рассмотрение, наряду с оператором плотности электронно-позитронного тока

$$j_{\mu}(x) = \frac{ie}{2} (\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x) - \bar{\psi}^c(x) \gamma_{\mu} \psi^c(x)),$$

плотность сторонних токов $J_{\mu}(x)$, которая, в отличие от оператора $j_{\mu}(x)$, является c -числом. Введение стороннего тока означает, что гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия мы предполагаем теперь имеющим вид

$$H_I(t) = - \int A_{\mu}(x) j_{\mu}(x) d^3x - \int A_{\mu}(x) J_{\mu}(x) d^3x. \quad (21.4.1)$$

Благодаря включению стороннего тока матрица рассеяния, а следовательно, и квантовоэлектродинамические функции Грина становятся некоторыми функционалами $J_{\nu}(x)$, изменения которых при варьировании стороннего тока характеризуются функциональными производными по $J_{\mu}(x)$.

Напомним, что если $F\{J_{\nu}(x)\}$ — некоторый функционал от $J_{\nu}(x)$, то функциональная производная от $F\{J_{\nu}(x)\}$ по $J_{\mu}(x)$, обозначаемая через $\frac{\delta F\{J_{\nu}(x)\}}{\delta J_{\mu}(x)}$, определяется соотношением

$$\delta F\{J_{\nu}(x)\} = \int \frac{\delta F\{J_{\nu}(x)\}}{\delta J_{\mu}(x')} \delta J_{\mu}(x') d^4x', \quad (21.4.2)$$

где $\delta J_{\mu}(x)$ — вариация стороннего тока и $\delta F\{J_{\nu}(x)\}$ — связанная с ней вариация функционала $F\{J_{\nu}(x)\}$. При этом величины $\delta J_{\mu}(x)$ следует считать независимыми. Это значит, в частности, что плотность тока $J_{\mu}(x)$ не должна удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial J_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} \neq 0.$$

Так как в определении функций Грина в представлении взаимодействия входит оператор $\mathbf{S}(t_1, t_2)$, то мы прежде всего найдем функциональную производную от него по стороннему току.

Покажем, что

$$\frac{\delta \mathbf{S}(t_1, t_2)}{\delta J_\mu(x)} = i\theta(t_1 - t)\theta(t - t_2) \mathbf{S}(t_1, t) A_\mu(x) \mathbf{S}(t, t_2), \quad (21.4.3)$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Для доказательства воспользуемся уравнением

$$i \frac{\partial}{\partial t_1} \mathbf{S}(t_1, t_2) = H_I(t_1) \mathbf{S}(t_1, t_2), \quad \mathbf{S}(t_1, t_1) = I,$$

из которого следует, что

$$\mathbf{S}(t_1, t_2) = I - i \int_{t_2}^{t_1} H_I(t') \mathbf{S}(t', t_2) dt'.$$

Дифференцируя это соотношение по $J_\mu(x)$ и используя (21.4.1), получим

$$\frac{\delta \mathbf{S}(t_1, t_2)}{\delta J_\mu(x)} = i\theta(t_1 - t)\theta(t - t_2) A_\mu(x) \mathbf{S}(t, t_2) - i \int_{t_2}^{t_1} H_I(t') \frac{\delta \mathbf{S}(t', t_2)}{\delta J_\mu(x)} dt'.$$

Решение этого уравнения относительно $\frac{\delta \mathbf{S}(t_1, t_2)}{\delta J_\mu(x)}$ будем искать в виде

$$\frac{\delta \mathbf{S}(t_1, t_2)}{\delta J_\mu(x)} = i\mathbf{R}(t_1) \theta(t - t_2) A_\mu(x) \mathbf{S}(t, t_2).$$

Тогда для $\mathbf{R}(t_1)$ мы получим уравнение

$$\mathbf{R}(t_1) = \theta(t_1 - t) - i \int_{t_2}^{t_1} H_I(t') \mathbf{R}(t') dt',$$

откуда

$$\mathbf{R}(t_1) = \theta(t_1 - t) \mathbf{S}(t_1, t),$$

что и доказывает (21.4.3).

Из (21.4.3) следует, в частности, что

$$\frac{\delta S_{\text{vac}}}{\delta J_\mu(x)} = i \langle \Phi_0, \mathbf{S}(\infty, t) A_\mu(x) \mathbf{S}(t, -\infty) \Phi_0 \rangle = i S_{\text{vac}} \langle A_\mu(x) \rangle, \quad (21.4.4)$$

т. е.

$$\langle A_\mu(x) \rangle \equiv \frac{1}{S_{\text{vac}}} \langle \Phi_0, T \{ A_\mu(x) \mathbf{S} \} \Phi_0 \rangle = -i \frac{\delta \ln S_{\text{vac}}}{\delta J_\mu(x)}.$$

С помощью (21.4.3) и (21.4.4) легко убедиться в справедливости следующего общего соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \langle F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \rangle &= i \langle F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) A_\mu(x) \rangle - \\ &- i \langle F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \rangle \langle A_\mu(x) \rangle, \end{aligned} \quad (21.4.5)$$

где

$$\langle F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \rangle = \frac{1}{S_{\text{vac}}} \langle \Phi_0, T \{ F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \mathbf{S} \} \Phi_0 \rangle.$$

В частности, вспоминая определение фотонной функции Грина $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}$, имеем

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu(x_2)} \langle A_\nu(x_1) \rangle = i \langle A_\nu(x_1) A_\mu(x_2) \rangle - i \langle A_\nu(x_1) \rangle \langle A_\mu(x_2) \rangle, \quad (21.4.6)$$

т. е.

$$G_{\mu\nu}^{(\nu)}(x_1, x_2) = - \frac{\delta^2 \ln S_{\text{vac}}}{\delta J_\mu(x_1) \delta J_\nu(x_2)}.$$

Из (21.4.5) следует:

$$-i \frac{\delta G_{\alpha\beta}^{(e, \nu)}(x_1, x_2)}{\delta J_\mu(x)} = \langle A_\mu(x) \Psi_\alpha(x_1) \bar{\Psi}_\beta(x_2) \rangle - \langle A_\mu(x) \rangle \langle \Psi_\alpha(x_1) \bar{\Psi}_\beta(x_2) \rangle.$$

Правая часть этого равенства представляет собой функцию Грина $G_{\alpha\beta, \mu}^{(e, \nu)}(x_1, x_2; x)$, поэтому

$$G_{\alpha\beta, \mu}^{(e, \nu)}(x_1, x_2; x) = -i \frac{\delta G_{\alpha\beta}^{(e, \nu)}(x_1, x_2)}{\delta J_\mu(x)}. \quad (21.4.7)$$

Мы будем записывать это соотношение в виде

$$G_\mu^{(e, \nu)}(x) = -i \frac{\delta G^{(e, \nu)}}{\delta J_\mu(x)}, \quad (21.4.8)$$

рассматривая $G_{\alpha\beta, \mu}^{(e, \nu)}(x_1, x_2; x)$ и $G_{\alpha\beta}^{(e, \nu)}(x_1, x_2)$ как матричные элементы операторов $G_\mu^{(e, \nu)}(x)$ и $G^{(e, \nu)}$ в координатном представлении.

Аналогичное соотношение может быть записано для зарядово-сопряженных функций Грина

$$[G_\mu^{(e, \nu)}(x)]^c = i \frac{\delta \langle G^{(e, \nu)} \rangle^c}{\delta J_\mu(x)}. \quad (21.4.9)$$

Используя эти формулы, можно найти вершинную функцию. Введем для этого в рассмотрение обратную электронную функцию Грина $(G^{(e)})^{-1}$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_\beta \int G_{\alpha\beta}^{(e)}(x_1, x_3) G_{\beta\gamma}^{(e)-1}(x_3, x_2) d^4x_3 = \delta_{\alpha\gamma} \delta(x_1 - x_2) \quad (21.4.10)$$

или сокращенно

$$G^{(e)} (G^{(e)})^{-1} = I.$$

Взяв от этого равенства функциональную производную по $J_\mu(x)$, получим

$$\frac{\delta G^{(e)}}{\delta J_\mu(x)} (G^{(e)})^{-1} + G^{(e)} \frac{\delta (G^{(e)})^{-1}}{\delta J_\mu(x)} = 0,$$

откуда

$$\frac{\delta G^{(e)}}{\delta J_\mu(x)} = -G^{(e)} \frac{\delta (G^{(e)})^{-1}}{\delta J_\mu(x)} G^{(e)} = - \int G^{(e)} \frac{\delta (G^{(e)})^{-1}}{\delta \langle A_\nu(x') \rangle} G^{(e)} \frac{\delta \langle A_\nu(x') \rangle}{\delta J_\mu(x)} d^4x'.$$

Учитывая (21.4.10), найдем отсюда

$$G_\mu^{(e, \nu)}(x) = - \int G^{(e)} \frac{\delta (G^{(e)})^{-1}}{\delta \langle A_\nu(x') \rangle} G^{(e)} G_{\nu\mu}^{(\nu)}(x', x) d^4x'. \quad (21.4.11)$$

В § 21.1 мы получили соотношение (21.1.12), связывающее функцию Грина $G_\mu^{(e, \nu)}(x)$ с вершинной функцией $\Gamma_\mu(x)$ в том случае, когда отсутствует внешнее поле. В общем случае при наличии внешнего поля справедливо такое же соотношение

$$G_\mu^{(e, \nu)}(x) = -e \int G^{(e)} \Gamma_\nu(x') G^{(e)} G_{\nu\mu}^{(\nu)}(x', x) d^4x', \quad (21.4.12)$$

сравнение которого с (21.4.11) показывает, что

$$\Gamma_{\mu}(x) = \frac{\delta (G^{(e)})^{-1}}{e \delta \langle A_{\mu}(\tau) \rangle}. \quad (21.4.13)$$

Поступая аналогичным образом, легко убедиться, что

$$[\Gamma_{\mu}^{(e, \nu)}(x)]^c = e \int (G^{(e)})^c \Gamma_{\nu}^c(x') (G^{(e)})^c G_{\nu\mu}^{(\nu)}(x', x) d^4 x',$$

где

$$\Gamma_{\mu}^c(x) = -\frac{\delta (G^{(e)c})^{-1}}{e \delta \langle A_{\mu}(x) \rangle}. \quad (21.4.14)$$

Отметим, что в отсутствие внешнего поля

$$G^{(e)} = (G^{(e)})^c, \quad \Gamma_{\mu}(x) = \Gamma_{\mu}^c(x).$$

, Установим теперь уравнения для электронной и фотонной функций Грина [19]. Будем для этого исходить из определений (21.1.1) и (21.1.3) этих функций, в которых операторы полей $\Psi(x)$, $\bar{\Psi}(x)$, $A_{\mu}(x)$ в гейзенберговском представлении удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left\{ \gamma_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ie A_{\mu}(x) \right) + m \right\} \Psi(x) &= 0, \\ \square A_{\mu}(x) &= -j_{\mu}(x) - J_{\mu}(x). \end{aligned} \quad (21.4.15)$$

Используя первое из этих уравнений и замечая, что $\frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = \delta(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + m \right) G^{(e)}(x, x') &= \\ &= -i \gamma_4 \langle \Phi_0, \{ \Psi(x), \bar{\Psi}(x') \} \Phi_0 \rangle \delta(t-t') + ie \gamma_{\mu} \langle \Phi_0, \Psi(x) \bar{\Psi}(x') A_{\mu}(x) \Phi_0 \rangle. \end{aligned}$$

Но, согласно (15.1.3),

$$\gamma_4 \{ \Psi(x), \bar{\Psi}(x') \} \delta(t-t') = \delta(x-x').$$

Поэтому

$$\left\{ \gamma_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ie \langle A_{\mu}(x) \rangle \right) + m \right\} G^{(e)}(x, x') = -i \delta(x-x') + ie \gamma_{\mu} G_{\mu}^{(e, \nu)}(x, x'; x).$$

Учитывая, что

$$G_{\mu}^{(e, \nu)}(x, x'; x) = \frac{1}{i} \frac{\delta G^{(e)}(x, x')}{\delta J_{\mu}(x)},$$

получим

$$\left\{ \gamma_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ie \langle A_{\mu}(x) \rangle \right) + m - e \gamma_{\mu} \frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x)} \right\} G^{(e)}(x, x') = -i \delta(x-x'). \quad (21.4.16)$$

Используя (21.4.8) и (21.4.12), можно представить это уравнение в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \gamma_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ie \langle A_{\mu}(x) \rangle \right) + m \right\} G^{(e)}(x, x') &+ \\ &+ i \int \Sigma(x, x_1) G^{(e)}(x_1, x') d^4 x_1 = -i \delta(x-x'), \end{aligned} \quad (21.4.17)$$

где

$$\Sigma(x, x') = e^2 \gamma_{\mu} \int G^{(e)}(x, x_1) \Gamma_{\nu}(x_1, x'; \xi) G_{\nu\mu}^{(\nu)}(\xi, x) d^4 x_1 d^4 \xi.$$

Величина $\Sigma(x, x')$, как следует из сравнения с формулой (20.3.6), представляет собой массовый оператор в координатном представлении, уравнение же (21.4.16) по существу совпадает с уравнением (20.3.7) для $G^{(e)}(x, x')$: только первое написано в координатном, а второе — в импульсном представлении.

Аналогичное уравнение имеет место для функций Грина $[G^{(e)}(x, x')]^c$:

$$\left\{ \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ie \langle A_\mu(x) \rangle \right) + m \right\} [G^{(e)}(x, x')]^c + \\ + i \int \Sigma^c(x, x_1) [G^{(e)}(x_1, x')]^c d^4 x_1 = -i \delta(x - x'), \quad (21.4.18)$$

где

$$\Sigma^c(x, x') = e^2 \gamma_\mu \int [G^{(e)}(x, x_1)]^c \Gamma_\nu^c(x_1, x'; \xi) G_{\nu\mu}^{(\gamma)}(\xi, x) d^4 x_1 d^4 \xi.$$

Получим теперь уравнение для $\langle A_\mu(x) \rangle$. Согласно второй из формул (21.4.15) имеем

$$\square \langle A_\mu(x) \rangle = -J_\mu(x) - \langle j_\mu(x) \rangle.$$

Используя далее определение оператора плотности тока

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} \{ \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) - \bar{\Psi}^c(x) \gamma_\mu \Psi^c(x) \},$$

получим

$$\langle j_\mu(x) \rangle = -\frac{ie}{2} \text{Sp} \gamma_\mu \{ G^{(e)}(x, x + \varepsilon) - [G^{(e)}(x, x + \varepsilon)]^c \}, \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

и, следовательно,

$$\square \langle A_\mu(x) \rangle = -J_\mu(x) + \\ + \frac{ie}{2} \text{Sp} \gamma_\mu \{ G^{(e)}(x, x + \varepsilon) - [G^{(e)}(x, x + \varepsilon)]^c \}, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (21.4.19)$$

Выведем, наконец, уравнение для фотонной функции Грина $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x')$.

Используя второе из уравнений (21.4.15) и замечая, что $[A_\mu(x), A_\nu(x')]_{t=t'} = 0$, имеем

$$\square \langle A_\mu(x) A_\nu(x') \rangle = \\ = \delta(t - t') (\Phi_0, [A_\mu(x), \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial t'}] \Phi_0) - J_\mu(x) \langle A_\nu(x') \rangle - \langle j_\mu(x) A_\nu(x') \rangle.$$

Замечая далее, что

$$\delta(t - t') [A_\mu(x), \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial t'}] = i \delta_{\mu\nu} \delta(x - x'),$$

и вспоминая определение фотонной функции Грина, получим

$$\square G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') + \langle j_\mu(x) A_\nu(x') \rangle - \langle j_\mu(x) \rangle \langle A_\nu(x') \rangle = i \delta_{\mu\nu} \delta(x - x').$$

Но, согласно (21.1.5),

$$\langle j_\mu(x) A_\nu(x') \rangle - \langle j_\mu(x) \rangle \langle A_\nu(x') \rangle = -\frac{\delta \langle j_\mu(x) \rangle}{\delta J_\nu(x')},$$

а в силу (21.4.6)

$$\frac{\delta \langle j_\mu(x) \rangle}{\delta J_\nu(x')} = i \int \frac{\delta \langle j_\mu(x) \rangle}{\delta \langle A_\lambda(x_1) \rangle} G_{\lambda\nu}^{(\gamma)}(x_1, x') d^4 x_1.$$

Поэтому

$$\square G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') - i \int \Pi_{\mu\lambda}(x, x_1) G_{\lambda\nu}^{(\gamma)}(x_1, x') d^4 x_1 = i \delta_{\mu\nu} \delta(x - x'), \quad (21.4.20)$$

где

$$\Pi_{\mu\lambda}(x, x') = i \frac{\delta \langle j_{\mu}(x) \rangle}{\delta \langle A_{\lambda}(x') \rangle}.$$

Вспоминая, что

$$\frac{\delta G^{(e)}}{\delta \langle A_{\mu}(x) \rangle} = -G^{(e)} \frac{\delta (G^{(e)})^{-1}}{\delta \langle A_{\mu}(x) \rangle} G^{(e)} = -e G^{(e)} \Gamma_{\mu}(x) G^{(e)},$$

$$\frac{\delta (G^{(e)})^c}{\delta \langle A_{\mu}(x) \rangle} = -(G^{(e)})^c \frac{\delta (G^{(e)})^{c-1}}{\delta \langle A_{\mu}(x) \rangle} (G^{(e)})^c = e (G^{(e)})^c \Gamma_{\mu}^c(x) (G^{(e)})^c,$$

и учитывая (21.4.19), получим

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\lambda}(x, x') = & -\frac{e^2}{2} \text{Sp } \gamma_{\mu} \int \{G^{(e)}(x, x_1) \Gamma_{\lambda}(x_1, x_2; x') G^{(e)}(x_2, x_3) + \\ & + [G^{(e)}(x, x_1)]^c \Gamma_{\lambda}^c(x_1, x_2; x') [G^{(e)}(x_2, x_3)]^c\}_{\lambda_3=x+\varepsilon} d^4x_1 d^4x_2, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (21.4.21)$$

Величина $\Pi_{\mu\lambda}(x, x')$, как видно из сравнения с формулой (20.3.6), представляет собой поляризационный оператор в координатном представлении, уравнение же (21.4.20) совпадает с уравнением (20.3.7) для $G_{\mu\nu}^{(\nu)}(x, x')$, только первое написано в координатном, а второе — в импульсном представлении.

21.5. Представление функций Грина в виде функциональных интегралов. Покажем, что функции Грина можно представить в замкнутом виде, используя функциональное интегрирование [20].

Как мы знаем, функции Грина представляют собой средние по состоянию вакуума от произведений операторов полей. Поэтому мы рассмотрим прежде всего среднее значение по состоянию вакуума матрицы рассеяния

$$\mathbf{S} = T(\sigma), \quad \sigma = e^{i \int (j_{\mu}(x) + J_{\mu}(x)) A_{\mu}(x) d^4x},$$

где $T = T_{\psi} T_A$ — хронологический оператор (T_{ψ} и T_A — хронологические операторы для электронно-позитронного и электромагнитного полей) и $J_{\mu}(x)$ — плотность стороннего тока (рассматриваемая как c -число). Так как среднее по состоянию вакуума от нормальных произведений операторов полей равно нулю, то мы перейдем в выражении для \mathbf{S} от T -упорядочения к N -упорядочению. Воспользуемся с этой целью формулами § 16.6

$$T_A(\sigma) = N_A(e^{\Delta\sigma}), \quad T_{\psi}(\sigma) = N_{\psi}(e^{\Sigma\sigma}), \quad (21.5.1)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \int D_{c\mu\nu}(\xi - \eta) \frac{\delta^2}{\delta A_{\mu}(\xi) \delta A_{\nu}(\eta)} d^4\xi d^4\eta,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} \int S_c(\xi - \eta) \frac{\delta^2}{\delta \psi(\xi) \delta \psi(\eta)} d^4\xi d^4\eta$$

и N_A и N_{ψ} — символы нормальных произведений операторов электромагнитного и электронно-позитронного полей. Особенно полезной является первая из этих формул, так как операторы $A_{\mu}(x)$ переставимы под знаком T -произведения, т. е. ведут себя как обычные числа.

Для упрощения дальнейших выкладок разобьем 4-пространство на дискретные ячейки объема d^4x и перейдем формально от интегрирования

по 4-пространству к суммированию по этим ячейкам. Вводя обозначения

$$j_\mu(x) \sqrt{dx} = j_x, \quad A_\mu(x) \sqrt{dx} = A_x, \quad J_\mu(x) \sqrt{dx} = J_x,$$

$$D_{c\mu\nu}(\xi - \eta) \sqrt{d\xi d\eta} = D_{c\xi\eta},$$

мы будем рассматривать функционал как функцию бесконечного числа переменных A_x, j_x, J_x

$$\sigma \equiv \sigma(A_x, j_x; J_x) = e^{i(A_x j_x + A_x J_x)}$$

(по дважды встречающемуся индексу производится суммирование).

Рассмотрим сначала $T_A(\sigma)$. В соответствии с (21.5.1) этот оператор можно представить в виде

$$T_A(\sigma) = N_A \left(e^{\frac{1}{2} D_{c\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial A_\xi \partial A_\eta}} \sigma(A_x, j_x; J_x) \right).$$

Это выражение, в свою очередь, можно упростить, перейдя к преобразованию Фурье функции $\sigma(A_x, j_x; J_x)$ по переменным A_x :

$$\sigma(A_x, j_x; J_x) = \int \sigma(\Lambda_x, j_x) e^{i(J_x + \Lambda_x) A_x} \prod_x d\Lambda_x,$$

где

$$\sigma(\Lambda_x, j_x) = \int \sigma(A_x, j_x) e^{-i A_x \Lambda_x} \prod_x \frac{dA_x}{2\pi}, \quad \sigma(A_x, j_x) \equiv \sigma(A_x, j_x; 0)$$

(в этом выражении A_x можно рассматривать, очевидно, как c -числа).

В результате мы получим для $T_A(\sigma)$ выражение

$$T_A(\sigma) = N_A \int \sigma(\Lambda_x, j_x) e^{-\frac{1}{2} D_{c\xi\eta} (\Lambda_\xi + J_\xi) (\Lambda_\eta + J_\eta)} e^{i(\Lambda_x + J_x) A_x} \prod_x d\Lambda_x,$$

и, следовательно, среднее по состоянию вакуума электромагнитного поля от $T_A(\sigma)$ будет равно

$$\langle T_A(\sigma) \rangle_A = \int \sigma(\Lambda_x - J_x, j_x) e^{-\frac{1}{2} D_{c\xi\eta} \Lambda_\xi \Lambda_\eta} \prod_x d\Lambda_x$$

или

$$\langle T_A(\sigma) \rangle_A = \int \prod_x \frac{dA_x}{2\pi} \sigma(A_x, j_x) \int e^{-\frac{1}{2} D_{c\xi\eta} \Lambda_\xi \Lambda_\eta - (\Lambda_x - J_x) A_x} \prod_x d\Lambda_x. \quad (21.5.2)$$

Стоящую в экспоненте в этом выражении квадратичную форму по Λ_ξ можно привести к главным осям ортогональным преобразованием, не меняющим скалярного произведения $\Lambda_\xi A_\xi$,

$$\frac{1}{2} D_{c\xi\eta} \Lambda_\xi \Lambda_\eta + i \Lambda_x A_x \rightarrow \frac{1}{2} D_{c\xi} \left(\Lambda_\xi + \frac{i}{D_{c\xi}} A_x \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{A_x^2}{D_{c\xi}},$$

где $D_{c\xi}$ — собственные значения матрицы $D_{c\xi\eta}$. После этого легко выполнить интегрирование по $d\Lambda_\xi$:

$$\langle T_A(\sigma) \rangle_A = C \int \prod_x \frac{dA_x}{2\pi} \sigma(A_x, j_x) e^{-\frac{1}{2} D_{c\xi}^{-1} A_x^2 + i A_x J_x}, \quad (21.5.3)$$

где

$$C = \prod_\xi \int e^{-\frac{1}{2} D_{c\xi} \Lambda_\xi^2} d\Lambda_\xi.$$

Применив к этому выражению оператор T_ψ и взяв затем от него среднее по состоянию вакуума электронно-позитронного поля, найдем S_{vac} :

$$S_{\text{vac}} = C \int S_0(A) e^{-\frac{1}{2} D_{c\xi\eta}^{-1} A_\xi A_\eta + i A_\nu J_\nu} \prod_x \frac{dA_x}{2\pi}, \quad (21.5.4)$$

где

$$S_0(A) = \langle T_\psi \{ \sigma(A_x, j_x) \} \rangle_\psi, \quad (21.5.5)$$

и символ $\langle \dots \rangle_\psi$ служит для обозначения среднего по состоянию вакуума электронно-позитронного поля.

Так как в этих выражениях величины A_x представляют собой c -числа, то оператор

$$\mathbf{S}(A) = T_\psi \{ \sigma(A_x, j_x) \}$$

можно рассматривать как матрицу рассеяния, в которой операторы электромагнитного поля заменены c -числами, величина же $S_0(A)$ представляет собой среднее вакуумное от этой матрицы.

Имея выражение для S_{vac} , можно, согласно (21.4.6), найти фотонную функцию Грина

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, y) = - \frac{\delta \ln S_{\text{vac}}}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)}.$$

Подставляя сюда (21.5.4) и полагая после выполнения дифференцирования по внешнему току $J_x = 0$, получим

$$G^{(\gamma)}(x, y) = \frac{\int A_x A_y e^{-\frac{1}{2} D_{c\xi\eta}^{-1} A_\xi A_\eta} S_0(A) \prod_x dA_x}{\int e^{-\frac{1}{2} D_{c\xi\eta}^{-1} A_\xi A_\eta} S_0(A) \prod_x dA_x}. \quad (21.5.6)$$

Рассмотрим теперь электронную функцию Грина

$$G^{(e)}(x, y) = \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \mathbf{S} \} \Phi_0).$$

Переписав это выражение в виде

$$G^{(e)}(x, y) = \frac{1}{S_{\text{vac}}} \langle T_\psi \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} \langle T_A(\sigma) \rangle_A \rangle_\psi,$$

где $\langle \dots \rangle_\psi$ и $\langle \dots \rangle_A$ служат по-прежнему для обозначения средних по электронно-позитронному и электромагнитному вакууму, и используя (21.5.4), получим

$$G^{(e)}(x, y) = \frac{\int G^{(e)}(x, y; A) d\Gamma(A)}{\int d\Gamma(A)}, \quad (21.5.7)$$

где

$$G^{(e)}(x, y; A) = \frac{1}{S_0(A)} \langle T_\psi \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \sigma(A_x, j_x) \} \rangle_\psi \quad (21.5.8)$$

и

$$d\Gamma(A) = e^{-\frac{1}{2} D_{c\xi\eta}^{-1} A_\xi A_\eta} S_0(A) \prod_x dA_x.$$

Легко убедиться, что $G^{(e)}(x, y; A)$ удовлетворяет уравнению

$$(i\hat{p} + m - ie\hat{A}(x)) G^{(e)}(x, y; A) = -i\delta(x-y),$$

где $A_\mu(x)$, так же как и в (21.5.4), рассматривается не как оператор, а как c -число. Иными словами, $G^{(e)}(x, y; A)$ представляет собой функцию Грина уравнения Дирака в заданном внешнем электромагнитном поле.

Мы видим, таким образом, что электронную функцию Грина $G^{(e)}(x, y)$ можно найти, если известна функция Грина $G^{(e)}(x, y; A)$ уравнения Дирака в заданном внешнем электромагнитном поле, путем усреднения $G^{(e)}(x, y; A)$ по всем полям с весом $d\Gamma(A)$.

Обратимся теперь к определению величины $S_0(A)$. Дифференцируя выражение (21.5.5) по e и учитывая, что $j_\mu(x) = ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$, получим

$$\frac{\partial S_0(A)}{\partial e} = - \int \langle T_\psi \{ \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x) \sigma(A_x, j_x) \} \rangle_\psi (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} A_\mu(x) d^4x.$$

Вспоминая далее определение (21.5.8) функции $G^{(e)}(x, y; A)$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\frac{\partial}{\partial e} \ln S_0(A) = \int \text{Sp } G^{(e)}(x, x; A) \hat{A}(x) d^4x$$

(операция Sp берется по спинорным индексам), откуда

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln S_0(\lambda A) = e \int \text{Sp } G^{(e)}(x, x; \lambda A) \hat{A}(x) d^4x.$$

Интегрируя это уравнение и замечая, что $S_0(0) = 1$, получим окончательно

$$S_0(A) = \exp \left\{ e \int_0^1 d\lambda \int \text{Sp } G^{(e)}(x, x; \lambda A) \hat{A}(x) d^4x \right\}. \quad (21.5.9)$$

Таким образом, мы видим, что общая задача квантовой электродинамики — нахождение функций Грина — сводится к нахождению функции Грина уравнения Дирака в произвольном внешнем поле и последующему усреднению путем функционального интегрирования.

Решая уравнение для $G^{(e)}(x, y; A)$ посредством разложения в ряд по степеням eA и подставляя решение в (21.5.9), можно построить теорию возмущений, эквивалентную обычной теории возмущений квантовой электродинамики. При этом в нулевом приближении $G^{(e)}(x, y)$ совпадает с $S_c(x-y)$, $G^{(\gamma)}(x, y)$ — с $D_c(x-y)$ и $S_0(A) = 1$.

Заметим, что величина $S_0(A)$ является функцией только от произведения eA . Поэтому, выбрав в качестве переменных интегрирования в (21.5.6) вместо A_x переменные $B_x = eA_x$, можно записать фотонную функцию Грина в виде

$$e^2 G^{(\gamma)}(x, y) = \frac{\int_{B_x B_y} e^{-\frac{1}{2e^2} D_c^{-1} B_\xi^B \eta_{S_0}(B)} \prod_z dB_z}{\int e^{-\frac{1}{2e^2} D_c^{-1} B_\xi^B \eta_{S_0}(B)} \prod_z dB_z}. \quad (21.5.10)$$

Эта формула показывает, что если

$$\int_{B_x B_y} S_0(B) \prod_z dB_z < \infty,$$

то существует конечный предел $e^2 G^{(\gamma)}(x, y)$ при $e^2 \rightarrow \infty$.

21.6. Калибровочные преобразования функций Грина. В § 16.5 мы видели, что при изменении фотонных связей

$$D_{c\mu\nu}(x-x') \rightarrow D_{c\mu\nu}(x-x') + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_\nu} \chi(x-x'), \quad (21.6.1)$$

где $\chi(x)$ — произвольная функция, матрица рассеяния S остается неизменной. Этого, однако, нельзя сказать об операторе $S(t_1, t_2)$, который изменится при таком преобразовании. Поэтому при преобразовании (21.6.1) будет изменяться также и функции Грина [21].

Мы рассмотрим теперь преобразования функций Грина, связанные с преобразованием фотонных связей (21.6.1). Эти преобразования носят название калибровочных преобразований функций Грина.

Рассмотрим сначала бесконечно малую вариацию $\delta D_{c\mu\nu}(x, x')$ фотонных связей и найдем связанную с ней вариацию электронной функции Грина

$$\delta G^{(e)}(x, x') = \delta \frac{1}{S_{\text{vac}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int (\Phi_0, T \{ \psi(x) \bar{\psi}(x') \times \\ \times j_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_1}(x_1) \dots j_{\mu_n}(x_n) A_{\mu_n}(x_n) \} \Phi_0) d^4x_1 \dots d^4x_n.$$

Используя правила Вика и замечая, что $\delta S_{\text{vac}} = 0$, имеем

$$\delta G^{(e)}(x, x') = \frac{1}{S_{\text{vac}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} C_n^2 \int \delta D_{c\mu_1\mu_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \times \\ \times \int \langle j_{\mu_1}(x_1) j_{\mu_2}(x_2) \psi(x) \bar{\psi}(x') j_{\mu_3}(x_3) A_{\mu_3}(x_3) \dots j_{\mu_n}(x_n) A_{\mu_n}(x_n) \rangle d^4x_3 \dots d^4x_n,$$

где $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Это выражение можно, очевидно, переписать в виде

$$\delta G^{(e)}(x, x') = -\frac{1}{2} \int \delta D_{c\mu\nu}(x_1, x_2) \langle j_{\mu}(x_1) j_{\nu}(x_2) \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle d^4x_1 d^4x_2.$$

Полагая

$$\delta D_{c\mu\nu}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_{1\mu} \partial x_{2\nu}} \delta \chi(x_1 - x_2),$$

получим

$$\delta G^{(e)}(x, x') = -\frac{1}{2} \int \delta \chi(x_1 - x_2) \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial x_{1\mu} \partial x_{2\nu}} \langle j_{\mu}(x_1) j_{\nu}(x_2) \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle d^4x_1 d^4x_2. \quad (21.6.2)$$

Вычислим входящую сюда величину $\frac{\partial^2}{\partial x_{1\mu} \partial x_{2\nu}} \langle j_{\mu}(x_1) j_{\nu}(x_2) \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle$.

Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \langle j_4(x_1) j_{\nu}(x_2) \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle = \delta(t_1 - t_2) (\Phi_0, [j_4(x_1), j_{\nu}(x_2)] \psi(x) \bar{\psi}(x') \Phi_0) + \\ + \delta(t_1 - t) (\Phi_0, j_{\nu}(x_2) [j_4(x_1) \psi(x)] \bar{\psi}(x') \Phi_0) + \\ + \delta(t_1 - t') (\Phi_0, j_{\nu}(x_2) \psi(x) [j_4(x_1), \bar{\psi}(x')] \Phi_0) + (\Phi_0 \frac{\partial j_4(x_1)}{\partial t_1} j_{\nu}(x_2) \psi(x) \bar{\psi}(x') \Phi_0),$$

и используя перестановочные соотношения

$$[j_4(x_1), \psi(x)]_{t_1=t} = -ie\psi(x) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad [j_4(x_1), \bar{\psi}(x)]_{t_1=t} = ie\bar{\psi}(x) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \\ [j_4(x_1), j_{\nu}(x_2)]_{t_1=t_2} = 0,$$

найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{1\mu} \partial x_{2\nu}} \langle j_{\mu}(x_1) j_{\nu}(x_2) \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle = \\ = e^2 \{ \delta(x - x_1) - \delta(x' - x_1) \} \{ \delta(x - x_2) - \delta(x' - x_2) \} G^{(e)}(x, x').$$

Подстановка этого выражения в (21.6.2) дает

$$\delta G^{(e)}(x, x') = e^2 \{ \delta \chi(x - x') - \delta \chi(0) \} G^{(e)}(x, x'). \quad (21.6.3)$$

Эта формула определяет бесконечно малое калибровочное преобразование электронной функции Грина. Конечное калибровочное преобразование этой функции имеет, как легко видеть, следующий вид:

$$G^{(e)}(x, x') \rightarrow G^{(e)'}(x, x') = G^{(e)}(x, x') e^{e^2 \{ \chi(x-x') - \chi(0) \}}. \quad (21.6.4)$$

Поступая аналогичным образом, можно показать, что калибровочные преобразования фотонной функции Грина и функции $G_{\mu\nu}^{(e, \gamma)}(x_1, x_2; x)$ определяются формулами

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') \rightarrow G_{\mu\nu}^{(\gamma)'}(x, x') = G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') + \frac{\partial^2 \chi(x-x')}{\partial x_\mu \partial x'_\nu},$$

$$\begin{aligned} G_{\mu}^{(e, \gamma)}(x_1, x_2; x) &\rightarrow G_{\mu}^{(e, \gamma)'}(x_1, x_2; x) = \\ &= \left\{ G_{\mu}^{(e, \gamma)}(x_1, x_2; x) - ie G^{(e)}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_\mu} [\chi(x-x_2) - \chi(x-x_1)] \right\} e^{e^2 [\chi(x-x_1) - \chi(0)]}. \end{aligned}$$

§ 22. Перенормировка массы и заряда электрона

22.1. Перенормировка массы электрона. При установлении основных уравнений квантовой электродинамики мы исходили из уравнений Дирака для электрона в заданном электромагнитном поле, в которые входили две константы: m и e . Эти константы мы интерпретировали как массу и заряд электрона. Однако мы должны теперь внести уточнения в эти понятия. Действительно, по самой идее исходных классических уравнений Дирака и Максвелла константы m и e представляют собой массу и заряд «свободного» электрона, т. е. электрона, полностью изолированного от воздействий электромагнитного поля. Иными словами, m и e являются характеристиками некоторого гипотетического объекта — будем называть его «голым» электроном, — не взаимодействующего с электромагнитным полем.

Взаимодействие между полями должно приводить к отличию энергетического спектра взаимодействующих полей от энергетического спектра свободных полей. Поэтому масса «голого» электрона должна отличаться от массы реального электрона, т. е. минимальной энергии однозарядового состояния взаимодействующих полей.

В следующем разделе мы увидим, что и заряд гипотетического «голого» электрона отличается от заряда реального электрона. Поэтому возникает важнейшая задача о выяснении связи между массой и зарядом голого электрона m и e и массой и зарядом реального, физического, электрона, которые мы будем обозначать в этом параграфе через m_R и e_R .

Установим прежде всего связь между массами m и m_R . Воспользуемся для этого спектральным представлением (21.3.13) электронной функции Грина. Предполагая, что $p^2 \approx -m_R^2$, мы можем сохранить в (21.3.13) только первое, полюсное слагаемое

$$-(G^{(e)}(p))^{-1} \approx Z_1^{-1} (\hat{p} - im_R), \quad \hat{p} \sim im_R. \quad (22.1.1)$$

С другой стороны, согласно (20.3.4),

$$-(G^{(e)}(p))^{-1} = \hat{p} - im + \Sigma(p), \quad (22.1.2)$$

где $\Sigma(p)$ — массовый оператор, который можно рассматривать как функцию матрицы \hat{p} . Поэтому

$$-(G^{(e)}(p))^{-1} = \hat{p} - im + \Sigma(im_R) + (\hat{p} - im_R) \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p} = im_R} + \dots \quad (22.1.3)$$

Сравнение формул (22.1.3) и (22.1.1) дает

$$m_R = m + i \Sigma(im_R),$$

$$Z_1^{-1} = 1 + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p} = im_R}. \quad (22.1.4)$$

Разность масс реального и гипотетического «голового» электронов

$$\delta m = m_R - m,$$

обусловленную взаимодействием электрона с электромагнитным полем, мы будем называть *электромагнитной массой* электрона, а величину m — механической массой электрона. Вводя биспинор $u_R(p)$, удовлетворяющий уравнению Дирака

$$(i\hat{p} + m_R) u_R(p) = 0, \quad \bar{u}_R(p) u_R(p) = 2m_R$$

для реального электрона, можно, очевидно, представить электромагнитную массу электрона в виде

$$\delta m = i \frac{\bar{u}_R(p) \Sigma(p) u_R(p)}{\bar{u}_R(p) u_R(p)}, \quad p^2 + m_R^2 = 0. \quad (22.1.5)$$

Так как электромагнитная масса δm обусловлена взаимодействием между полями, то естественно рассматривать ее вместе с другими процессами, обусловленными этим взаимодействием; теорию же взаимодействующих полей строить с самого начала таким образом, чтобы в нее входила не фиктивная масса «голового» электрона, а истинная масса реального электрона.

Рассмотрим с этой целью гамильтониан системы полей в представлении взаимодействия

$$H = H_0\{m\} - \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^3x,$$

где $H_0\{m\}$ — гамильтониан свободных полей, в который входит масса «голового» электрона (выражение для $H_0\{m\}$ приведено в § 15.6). Заменяя в $H_0\{m\}$ массу голового электрона на $m_R - \delta m$, перепишем гамильтониан H в виде

$$H = H_0\{m_R\} - \int (j_\mu(x) A_\mu(x) + \bar{\psi}(x) \psi(x) \delta m) d^3x$$

и будем интерпретировать $H_0\{m_R\}$ (а не $H_0\{m\}$) как гамильтониан свободных полей и

$$H_I(t) = - \int (j_\mu(x) A_\mu(x) + \bar{\psi}(x) \psi(x) \delta m) d^3x \quad (22.1.6)$$

(а не $-\int j_\mu(x) A_\mu(x) d^3x$) как гамильтониан взаимодействия.

Эта процедура носит название *перенормировки массы электрона*.

Изменив гамильтониан взаимодействия, мы изменим также матрицу рассеяния, которая принимает теперь вид

$$S = T \left\{ e^{i \int (\jmath_{\mu}(x) A_{\mu}(x) + \bar{\psi}(x) \psi(x) \delta m) d^4x} \right\}. \quad (22.1.7)$$

Благодаря дополнительному слагаемому $\bar{\psi}(x) \psi(x) \delta m$ в гамильтониане взаимодействия при графическом представлении элементов S -матрицы возникают новые — двухлучевые вершины, в которых сходятся две электронные линии.

Двухлучевые вершины приводят к дополнительным ЭСЭД, причем существует только одна неприводимая дополнительная ЭСЭД (рис. 22.1, двухлучевая вершина обозначена крестиком).

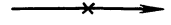


Рис. 22.1.

Всякая диаграмма, содержащая неприводимую ЭСЭД, дополняется теперь такой же диаграммой, в которой неприводимая ЭСЭД заменена диаграммой рис. 22.1.

Очевидно, совокупности двух диаграмм — неприводимой ЭСЭД и диаграммы рис. 22.1 — соответствует величина

$$\bar{\Sigma}^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) + i \delta m^{(2)},$$

где $\delta m^{(2)}$ — электромагнитная масса электрона во втором приближении теории возмущений. Отсюда следует, что вместо того, чтобы вводить двухлучевые вершины, можно сопоставлять всем внутренним неприводимым ЭСЭД в любой компактной ЭСЭД функцию $\bar{\Sigma}^{(2)}(p)$, а не функцию $\Sigma^{(2)}(p)$ (кроме того, необходимо дополнить всю компактную ЭСЭД в целом диаграммой рис. 22.1).

Мы видим, таким образом, что перенормировка массы электрона означает замену массового оператора $\Sigma(p)$ *перенормированным по массе* массовым оператором

$$\bar{\Sigma}(p) = \Sigma(p) + i \delta m. \quad (22.1.8)$$

Согласно (22.1.3) и (22.1.4),

$$\bar{\Sigma}(p) = (\hat{p} - i m_R) \left(\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p} = i m_R} + \dots = (Z_1^{-1} - 1) (\hat{p} - i m_R) + \dots \quad (22.1.9)$$

Отсюда следует, что если $u_R(p)$ — биспинор, удовлетворяющий уравнению Дирака с массой реального электрона, то

$$\bar{u}_R(p) \bar{\Sigma}(p) u_R(p) = 0, \quad p^2 = -m_R^2.$$

Перенормированный по массе массовый оператор можно выразить через функцию

$$\Lambda_{\mu}(p) = \Gamma_{\mu}(p, p) - \gamma_{\mu},$$

связанную, согласно (20.3.10), с $\Sigma(p)$ соотношением

$$\Lambda_{\mu}(p) = \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_{\mu}}.$$

Из этого соотношения и выражения (22.1.9) следует, очевидно, что [22]

$$\bar{\Sigma}(p) = \int_{p_0}^p \Lambda_\mu(q) dq_\mu + \bar{\Sigma}(p_0), \tag{22.1.10}$$

где p_0 — 4-импульс свободного электрона, $p_0^2 = -m_R^2$.

22.2. Физический заряд электрона. В предыдущем разделе мы разъяснили, что благодаря взаимодействию электрона с электромагнитным полем масса электрона m_R не совпадает с постоянной m , входящей в уравнения квантовой электродинамики. Теперь мы покажем, что и постоянная e , входящая в уравнения квантовой электродинамики и матрицу рассеяния, не есть в действительности заряд электрона, и установим соотношение между постоянной e и зарядом электрона.

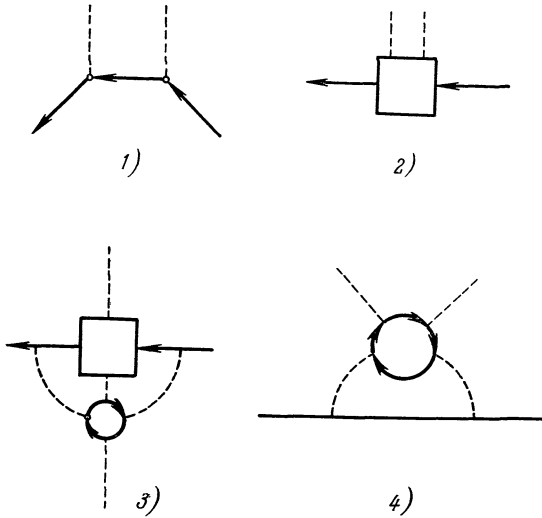


Рис. 22.2.

Физический заряд электрона можно определить с помощью исследования рассеяния электромагнитных волн малой частоты на покоящемся электроне. Этот процесс является чисто классическим, и никакие квантовые поправки не должны иметь места в предельном случае $k \rightarrow 0$. Поэтому естественно определить физический заряд электрона e_R как коэффициент, входящий в формулу Томсона для эффективного сечения рассеяния фотона при $k = 0$,

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e_R^2}{4\pi m_R c^2} \right)^2.$$

Мы покажем, что точное решение этой задачи в квантовой электродинамике приводит к формуле Томсона со следующим значением заряда e_R , выраженного через постоянную e :

$$e_R = Z^{1/2} e. \tag{22.2.1}$$

Для доказательства [23] этого фундаментального положения рассмотрим всевозможные диаграммы, описывающие рассеяние фотона электроном. Мы разделим такие диаграммы на три класса (рис. 22.2): 1) диаграммы, которые могут быть сведены к скелетной диаграмме рис. 20.12; 2) диаграммы, представляющие собой компактные ЭСЭД, к электронным линиям которых присоединены две внешние фотонные линии; 3) диаграммы, в которых внешние фотонные линии присоединены к замкнутым электронным петлям.

Диаграммы последнего типа не дают вклада в матричный элемент. Действительно, те из диаграмм, которые содержат петли с нечетным числом вершин, можно не рассматривать на основании теоремы Фарри. Диаграммы же этого типа, содержащие четное число вершин (см., например, рис. 22.2, 3, 4), при $k = 0$ связаны соотношением (20.3.1) с диаграммами, содержащими петли с нечетным числом вершин, и также не дают вклада в матричный элемент.

Матричный элемент, соответствующий диаграмме первого типа, может быть, очевидно, представлен в виде

$$\mathfrak{M}_1 = ZZ_1 e^2 \bar{u}_2 (\Gamma_\mu G^{(e)} \Gamma_\nu + \Gamma_\nu G^{(e)} \Gamma_\mu) u_1 a_{1\mu} a_{2\nu},$$

причем, так как мы рассматриваем рассеяние фотона нулевой частоты покоящимся электроном, то в этом выражении нужно положить

$$G^{(e)} = G^{(e)}(p), \quad \Gamma_\mu = \Gamma_\mu(p, p), \quad u_1 = u(p), \quad \bar{u}_2 = \bar{u}(p),$$

где $p \equiv (0, im_R)$; выбирая скалярный потенциал равным нулю, мы можем считать, что

$$a_{1\mu} p_\mu = a_{2\nu} p_\nu = 0.$$

Рассмотрим теперь матричный элемент, соответствующий диаграмме второго типа. Используя тождество Уорда, его можно представить в виде

$$\mathfrak{M}_2 = ZZ_1 e^2 \bar{u}_2 \frac{\partial^2 \Sigma(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} u_1 a_{1\mu} a_{2\nu},$$

где, согласно (20.3.9) и (20.3.10),

$$\frac{\partial^2 \Sigma(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = - \frac{\partial^2 (G^{(e)}(p))^{-1}}{\partial p_\mu \partial p_\nu}.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial G^{(e)}(p)}{\partial p_\mu} = G^{(e)}(p) \Gamma_\mu(p, p) G^{(e)}(p),$$

имеем

$$\frac{\partial^2 G^{(e)}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = G^{(e)} \Gamma_\nu G^{(e)} \Gamma_\mu G^{(e)} + G^{(e)} \Gamma_\mu G^{(e)} \Gamma_\nu G^{(e)} - G^{(e)} \frac{\partial^2 (G^{(e)})^{-1}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} G^{(e)}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_\mu \partial p_\nu} + \Gamma_\mu G^{(e)} \Gamma_\nu + \Gamma_\nu G^{(e)} \Gamma_\mu = (G^{(e)})^{-1} \frac{\partial^2 G^{(e)}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} (G^{(e)})^{-1}.$$

Таким образом, сумма матричных элементов \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 равна

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = ZZ_1 e^2 \bar{u}_2 (G^{(e)})^{-1} \frac{\partial^2 G^{(e)}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} (G^{(e)})^{-1} u_1 a_{1\mu} a_{2\nu}.$$

Подставим теперь сюда вместо $G^{(e)}$ выражение

$$G^{(e)}(p) = Z_1 S_c(p) \{1 + C_1(-p^2) + \hat{p} C_2(-p^2)\},$$

вытекающее из (21.3.13), где C_1 и C_2 — две скалярные функции p^2 , исчезающие при $p^2 = -m_R^2$:

$$C_1(m_R^2) = C_2(m_R^2) = 0$$

(в $S_c(p)$ в качестве массы входит m_R , а не m). В результате мы получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 &= Ze^2 \bar{u}_2 S_c^{-1} \frac{\partial^2 S_c}{\partial p_\mu \partial p_\nu} S_c^{-1} u_1 a_{1\mu} a_{2\nu} + \\ &\quad + 2Ze^2 C'_1(m_R^2) \bar{u}_2 (\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu p_\mu) u_1 a_{1\mu} a_{2\nu}, \end{aligned}$$

где $C'_1(m_R^2) = \left. \frac{dC_1(-p^2)}{dp^2} \right|_{p^2 = -m_R^2}$. Так как $a_{1\mu} p_\mu = a_{2\nu} p_\nu$, то второе слагаемое исчезает; первое же может быть, очевидно, переписано в виде

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = Ze^2 \bar{u}_2 (\gamma_\mu S_c \gamma_\nu + \gamma_\nu S_c \gamma_\mu) u_1 a_{1\mu} a_{2\nu}.$$

Это выражение только множителем Z отличается от элемента S -матрицы, соответствующего рассеянию фотона нулевой частоты покоящимся электроном в первом приближении теории возмущений.

Вычисление $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ и нахождение соответствующего сечения рассеяния может быть произведено согласно правилам Фейнмана. Мы не будем здесь этого делать, так как в § 26 будет вычислено сечение комптон-эффекта в общем случае для малых частот (но в первом приближении теории возмущений). Мы убедимся тогда, что при $Z = 1$ для сечения получается формула Томсона, в которую в качестве заряда входит величина e . Поэтому, как и утверждалось, если учитывать высшие приближения, то для сечения рассеяния фотонов нулевой частоты покоящимся электроном мы получим формулу Томсона, в которую, однако, будет входить в качестве заряда не e , а e_R .

22.3. Перенормировка функций Грина и вершинной функции. Выяснив смысл постоянной Z , мы должны будем доказать, что в выражении для элементов S -матрицы, соответствующих любым квантовоэлектродинамическим процессам с учетом высших приближений теории возмущений, постоянная Z всегда входит только в комбинации Ze^2 [15].

Введем с этой целью перенормированные функции Грина

$$\begin{aligned} G_R^{(e)} &= Z_1^{-1} G^{(e)}, \\ G_R^{(\gamma)} &= Z^{-1} G^{(\gamma)}, \end{aligned} \quad (22.3.1)$$

перенормированную вершинную функцию

$$\Gamma_{R\mu} = Z_1 \Gamma_\mu \quad (22.3.2)$$

и функцию

$$\Lambda_{1\mu} = Z_1 \Lambda_\mu, \quad \Lambda_\mu = \Gamma_\mu - \gamma_\mu. \quad (22.3.3)$$

Между этими функциями можно установить ряд соотношений, аналогичных соотношениям, имеющим место между исходными, перенормированными функциями.

Покажем прежде всего, что

$$\Gamma_{R\mu}(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_{R\mu}(p_1, p_2), \quad (22.3.4)$$

где

$$\Lambda_{R\mu}(p_1, p_2) = \Lambda_{1\mu}(p_1, p_2) - \Lambda_{1\mu}(p_0, p_0), \quad \Lambda_{1\mu}(p_0, p_0) \equiv \Lambda_{1\mu}(p, p) \Big|_{\hat{p} = im_R}.$$

Используя (20.3.9) и (21.3.13), имеем

$$\Gamma_\mu(p_0, p_0) = Z_1^{-1} \gamma_\mu. \quad (22.3.5)$$

Поэтому

$$\Lambda_{1\mu}(p_0, p_0) = Z_1 (\Gamma_\mu(p_0, p_0) - \gamma_\mu) = (1 - Z_1) \gamma_\mu$$

и, следовательно, формула (22.3.4) приобретает вид

$$\Gamma_{R\mu}(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_{1\mu}(p_1, p_2) + (Z_1 - 1) \gamma_\mu = Z_1 \gamma_\mu + \Lambda_{1\mu}(p_1, p_2).$$

Подставляя сюда $\Lambda_1 = Z_1 \Lambda$, мы придем к формуле (22.3.2), что и подтверждает справедливость соотношения (22.3.4).

Докажем далее, что перенормированная электронная функция Грина удовлетворяет уравнению

$$G_R^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) \Sigma_R(p) G_R^{(e)}(p), \quad (22.3.6)$$

где $\Sigma_R(p)$ — регуляризованный массовый оператор, определяемый формулой

$$\Sigma_R(p) = Z_1 \left\{ \bar{\Sigma}(p) - \bar{\Sigma}(im_R) - (p - im_R) \left(\frac{\partial \bar{\Sigma}(p)}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p} = im_R} \right\}, \quad (22.3.7)$$

(для более симметричной формы записи мы сохранили здесь величину $\bar{\Sigma}(im_R)$, равную нулю). Заметим, что это выражение можно представить также в виде

$$\Sigma_R(p) = \int_{p_0}^p \Lambda_{R\mu}(q, q) dq_\mu + \Sigma_R(p_0). \quad (22.3.8)$$

Чтобы доказать (22.3.6), воспользуемся уравнением (20.3.4) для электронной функции Грина, в котором, однако, произведем перенормировку массы электрона, т. е. заменим массовый оператор $\Sigma(p)$ перенормированным по массе оператором $\bar{\Sigma}(p)$ и под $S_c(p)$ будем понимать

$$S_c(p) = \frac{1}{i\hat{p} + m_R - i0}$$

Такое перенормированное по массе уравнение для $G^{(e)}(p)$ имеет вид

$$G^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) \bar{\Sigma}(p) G^{(e)}(p). \quad (22.3.9)$$

Переписав это уравнение в форме

$$Z_1^{-1} G^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) \bar{\Sigma}(p) G^{(e)}(p) + (1 - Z_1) Z_1^{-1} G^{(e)}(p)$$

и вспоминая (22.3.1), получим

$$G_R^{(e)}(p) = S_c(p) + S_c(p) \Sigma_R(p) G_R^{(e)}(p),$$

где

$$\Sigma_R(p) = Z_1 \bar{\Sigma}(p) + (1 - Z_1) S_c^{-1}(p).$$

Но последняя величина в силу (22.1.4) совпадает с величиной (22.3.7).

Докажем, наконец, что перенормированная поперечная фотонная функция Грина $G_R^{(\gamma)}(k)$ удовлетворяет уравнению

$$G_R^{(\gamma)}(k) = D_c(k) + D_c(k) \Pi_R(k^2) G_R^{(\gamma)}(k), \quad (22.3.10)$$

где $\Pi_R(k^2)$ — регуляризованный поляризационный оператор — определяется формулой

$$\Pi_R(k^2) = Z \left\{ \Pi(k^2) - \Pi(0) - k^2 \left(\frac{d\Pi(k^2)}{dk^2} \right)_{k^2=0} \right\} \quad (22.3.11)$$

(напомним, что величина $\Pi(k^2)$ связана с поляризационным оператором $\Pi_{\mu\nu}(k)$ соотношением $\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k^2) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$).

Для доказательства (22.3.10) воспользуемся уравнением (20.3.5) для поперечной части фотонной функции Грина $G^{(\gamma)}(k)$:

$$G^{(\gamma)}(k) = D_c(k) + D_c(k) \Pi(k^2) G^{(\gamma)}(k)$$

или

$$\frac{1}{G^{(\gamma)}(k)} = ik^2 - \Pi(k^2). \quad (22.3.12)$$

Из спектрального представления (21.3.6) фотонной функции Грина следует, очевидно, что при $k^2 \rightarrow 0$

$$\frac{1}{G^{(\gamma)}(k)} \approx \frac{1}{Z} ik^2.$$

С другой стороны, формула (22.3.12) дает при $k^2 \rightarrow 0$

$$\frac{1}{G^{(\gamma)}(k)} = ik^2 - \Pi(0) - k^2 \Pi'(0),$$

где $\Pi'(0) = \left(\frac{d\Pi(k^2)}{dk^2} \right)_{k^2=0}$. Поэтому должны выполняться равенства

$$\Pi(0) = 0, \quad \frac{1}{Z} = 1 + i\Pi'(0). \quad (22.3.13)$$

Следует подчеркнуть, что если бы первое из этих равенств не выполнялось, то фотонная функция Грина имела бы полюс не при $k^2 = 0$, а при $k^2 = \frac{-i\Pi(0)}{1+i\Pi'(0)}$, что означало бы ненулевую массу фотона.

Подставляя (22.3.11) в (22.3.10) и переходя к неперенормированной фотонной функции Грина, получим

$$\frac{1}{Z} G^{(\gamma)}(k) = D^c(k) + D^c(k) Z \left\{ \Pi(k^2 + ik^2 \left(\frac{1}{Z} - 1 \right) \right\} \frac{1}{Z} G^{(\gamma)}(k).$$

Но $D^c(k) k^2 = -i$, поэтому это равенство совпадает с исходным уравнением (20.3.5).

22.4. Трехфотонная вершинная функция. Регуляризованный поляризационный оператор удобно представить в виде [22]

$$\Pi_R(k^2) = - \int_0^k V_{R\mu}(q) dq_\mu, \quad (22.4.1)$$

где

$$V_{R\mu}(q) = V_{1\mu}(q) - q_\nu \left(\frac{\partial V_{1\mu}(q)}{\partial q_\nu} \right)_{q=0},$$

и

$$V_{1\mu}(q) = ZV_\mu(q), \quad V_\mu(q) = - \frac{\partial}{\partial q_\mu} \Pi(q^2). \quad (22.4.2)$$

Функция $V_\mu(q)$ аналогична функции

$$\Lambda_\mu(p) \equiv \Gamma_\mu(p, p) - \gamma_\mu = \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu}$$

и допускает простую графическую интерпретацию. Именно она представляет собой сумму величин, соответствующих компактным *трехфотонным вершинным диаграммам*, т. е. диаграммам, заканчивающимся тремя фотонными линиями и происходящим от всех компактных ФСЭД. (Напомним, что при вычислении элементов S -матрицы трехфотонные вершинные диаграммы можно не рассматривать, так как вклады в S -матрицу от двух трехфотонных вершинных диаграмм, отличающихся только направлением замкнутых электронных петель, взаимно компенсируются в силу теоремы Фарри.)

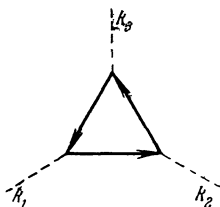


Рис. 22.3.

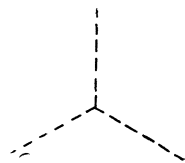


Рис. 22.4.

Простейшая трехфотонная вершинная диаграмма — трехфотонная вершинная диаграмма третьего порядка — изображена на рис. 22.3. Соответствующая ей величина $V_{\mu\nu\lambda}^{(3)}(k_1, k_2, k_3)$, где k_1, k_2, k_3 — 4-импульсы фотонных линий, сумма которых равна нулю, просто связана с величиной $\Pi_{\nu\lambda}^{(2)}(k) = i_1^{(2)}(k^2) \left(\delta_{\nu\lambda} - \frac{k_\nu k_\lambda}{k^2} \right)$, соответствующей ФСЭД 2-го порядка (см. рис. 20.2, 1). Действительно, считая, что $k_1 = -k_2 = k, k_3 = 0$, и используя соотношение (20.3.11), легко убедиться, что

$$V_{\mu}^{(3)}(k) = \frac{1}{3} V_{\mu\nu\nu}^{(3)}(k, -k, 0) = -\frac{\partial \Pi^{(2)}(k^2)}{\partial k_{\mu}}. \tag{22.4.3}$$

Это соотношение может быть обобщено на произвольные компактные ФСЭД и соответствующие им трехфотонные вершинные диаграммы. Определим с этой целью, по аналогии с обычной вершиной, в которой сходятся

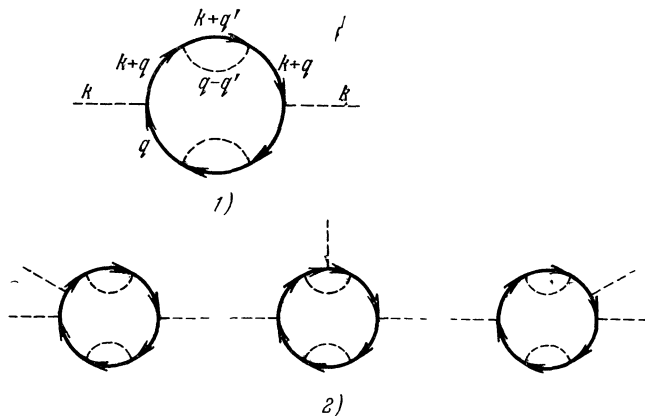


Рис. 22.5.

две электронные и одна фотонная линии, трехфотонную вершину, которую будем изображать фиктивной диаграммой рис. 22.4 с тремя сходящимися фотонными линиями. Обычной вершине сопоставляется величина

$$\gamma_{\mu} = -\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} (S_c(p))^{-1},$$

трехфотонной же вершине мы будем сопоставлять величину

$$2ik_{\mu} = \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} (D_c(k))^{-1}.$$

Рассмотрим теперь какую-либо компактную ФСЭД. Если в ней внешние фотонные линии исходят из одной электронной петли (рис. 22.5, 1),

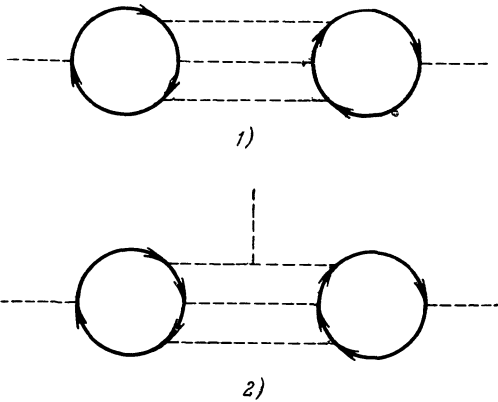


Рис. 22.6.

то можно считать, что внешний импульс k несут только электронные линии одной половины петли. Дифференцируя по k величину, соответствующую такой ФСЭД, мы получим (в соответствии с (20.3.11)) ряд слагаемых, которые изобразятся трехфотонными диаграммами рис. 22.5, 2.

Если в ФСЭД внешние фотонные линии исходят из разных электронных петель (рис. 22.6, 1), то внешний фотонный импульс k несут также и внутренние фотонные линии, например верхняя фотонная линия, соединяющая электронные петли на

рис. 22.6, 1. В этом случае при дифференцировании по k величины, соответствующей ФСЭД, возникнут члены, содержащие

$$\frac{\partial D_c(k)}{\partial k_\mu} = D_c(k) 2ik_\mu D_c(k),$$

которым соответствуют трехфотонные вершины (рис. 22.6, 2).

Таким образом, каждой компактной ФСЭД Y можно сопоставить совокупность трехфотонных вершинных диаграмм. Если $V_{\mu\nu\lambda}^Y(k_1, k_2, k_3)$ обозначает сумму величин, соответствующих этим трехфотонным диаграммам, то величина

$$V_\mu(k) = \frac{1}{3} \sum_Y V_{\mu\nu\nu}^Y(k, -k, 0)$$

будет связана с поляризационным оператором $\Pi(k^2)$ соотношением

$$V_\mu(k) = - \frac{\partial \Pi(k^2)}{\partial k_\mu}$$

в соответствии с (22.4.2).

По аналогии с $\Gamma_\mu(p, p, 0)$ можно ввести трехфотонную вершинную функцию

$$\Delta_\mu(k) = 2ik_\mu + V_\mu(k) \quad (22.4.4)$$

и перенормированную трехфотонную вершинную функцию

$$\Delta_{R\mu}(k) = Z\Delta_\mu(k) = 2ik_\mu + V_{R\mu}(k). \quad (22.4.5)$$

22.5. Перенормировка элементов матрицы рассеяния. В § 20 мы показали, что для учета высших приближений теории возмущений внутренним линиям и внутренним вершинам неприводимых диаграмм нужно сопоставлять функции Грина $G^{(e)}(p)$, $G^{(v)}(k)$ и вершинную функцию $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$, а внешним линиям — амплитуды a и u . Иными словами, если рассматривается некоторая неприводимая диаграмма n -го порядка, то соответствующий ей элемент S -матрицы может быть схематически представлен в виде

$$\mathfrak{M} \sim e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{F_e} (G^{(v)})^{F_v} (u)^{N_e} (a)^{N_v}, \quad (22.5.1)$$

где F_e и F_γ — числа внутренних электронных и фотонных линий, N_e и N_γ — числа внешних электронных и фотонных линий и $(K)^m$ служит для обозначения того, что величина типа K входит под знаком интеграла m раз.

Матричный элемент \mathfrak{M} выражен через неперенормированные величины. Посмотрим теперь, какой вид будет иметь \mathfrak{M} , если перейти к перенормированным величинам $e = Z^{-1/2}e_R$, $G^{(e)} = Z_1 G_R^{(e)}$, $G^{(\gamma)} = Z G_R^{(\gamma)}$, $\Gamma = Z_1^{-1} \Gamma_R$, $u = Z_1^{1/2} u$, $a = Z^{1/2} a$ (подчеркнем, что в перенормированные величины входит масса реального, а не «голового» электрона).

Легко видеть, что

$$\mathfrak{M} \sim Z_1^{-n+F_e+\frac{1}{2}N_e} Z^{-\frac{n}{2}+F_\gamma+\frac{1}{2}N_\gamma} e_R^n \int (\Gamma_R)^n (G_R^{(e)})^{F_e} (G_R^{(\gamma)})^{F_\gamma} (u)^{N_e} (a)^{N_\gamma}. \quad (22.5.2)$$

Но в каждой вершине сходятся две электронные и одна фотонная линия, причем внутренняя линия входит в две вершины, а внешняя линия — в одну вершину. Поэтому

$$n = F_e + \frac{1}{2} N_e = 2F_\gamma + N_\gamma \quad (22.5.3)$$

и, следовательно, показатели степеней Z и Z_1 равны нулю

$$\mathfrak{M} \sim e_R^n \int (\Gamma_R)^n (G_R^{(e)})^{F_e} (G_R^{(\gamma)})^{F_\gamma} (u)^{N_e} (a)^{N_\gamma}. \quad (22.5.4)$$

Таким образом, матричные элементы выражаются одинаково через неперенормированные (e , m , $G^{(e)}$, $G^{(\gamma)}$, Γ) и через перенормированные (e_R , m_R , $G_R^{(e)}$, $G_R^{(\gamma)}$, Γ_R) величины. Это фундаментальное свойство S -матрицы носит название *перенормируемости* квантовой электродинамики [15]. Оно, очевидно, базируется на соотношении (22.5.3), связывающем числа вершин и линий в неприводимых диаграммах.

Так как постоянные Z и Z_1 не входят в выражение (22.5.4) для перенормированного матричного элемента \mathfrak{M} , то его можно вычислять по тем же правилам, что и исходный матричный элемент (выраженный через неперенормированные величины). При этом желательно с самого начала пользоваться перенормированными величинами Γ_R , $G_R^{(e)}$, $G_R^{(\gamma)}$. Эти величины, как мы видели в § 22.3, определяются величинами Σ_R и Π_R , которые в свою очередь определяются величинами $\Lambda_1 = Z_1 \Lambda$ и $V_1 = ZV$; последние же выражаются через перенормированные величины так же, как величины Λ и V выражаются через неперенормированные величины. Действительно, рассмотрим, например, неприводимую диаграмму n -го порядка для величины Λ (диаграммы 3-го и 5-го порядков изображены на рис. 20.3). Соответствующая ей величина может быть схематически записана в виде

$$\Lambda^{(n)} \sim e^{n-1} \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{n-1} (G^{(\gamma)})^{\frac{n-1}{2}}. \quad (22.5.5)$$

Переходя к перенормированным величинам, получим

$$\Lambda_1^{(n)} \sim e_R^{n-1} \int (\Gamma_R)^n (G_R^{(e)})^{n-1} (G_R^{(\gamma)})^{\frac{n-1}{2}}. \quad (22.5.6)$$

Таким образом, Λ_1 можно вычислять по тем же правилам, что и Λ , заменив исходные функции Γ , $G^{(e)}$, $G^{(\nu)}$ и величины m и e перенормированными функциями Γ_R , $G_R^{(e)}$, $G_R^{(\nu)}$ и истинными массой и зарядом электрона m_R и e_R .

Аналогичное заключение можно сделать и о функции V_1 , рассматривая неприводимые скелетные диаграммы для трехфотонной вершинной функции. Функция V_1 выражается через e_R , m_R , Γ_R , $G_R^{(e)}$, $G_R^{(\nu)}$ так же, как функция V выражается через e , m , Γ , $G^{(e)}$, $G^{(\nu)}$.

Такой же вывод справедлив и для функции $\Sigma(p)$ (при этом только одной из вершин в неприводимой диаграмме должна сопоставляться функция Γ),

$$\Sigma(e, \Gamma, G^{(e)}, G^{(\nu)}) = \Sigma(e_R, \Gamma_R, G_R^{(e)}, G_R^{(\nu)}).$$

Что же касается функции $\Pi(k)$, то для нее справедливо соотношение

$$Z \Pi(e, \Gamma, G^{(e)}) = \Pi(e_R, \Gamma_R, G_R^{(e)}).$$

Используя соотношение (22.5.6) для $\Lambda_1^{(n)}$ и аналогичное соотношение для $V_1^{(n)}$, можно в принципе получить разложения функций Γ_R , $G_R^{(e)}$ и $G_R^{(\nu)}$ в ряды по степеням истинного заряда электрона e_R . Подстановка этих рядов в выражение (22.5.4) для перенормированного матричного элемента \mathfrak{M} даст также ряд по степеням e_R . Таким образом, может быть построена теория возмущений, содержащая ряды по степеням заряда реального, а не «голового» электрона.

§ 23. Расходимости в матрице рассеяния и их устранение

23.1. Расходимости в интегральных выражениях, сопоставляемых неприводимым диаграммам. При вычислении элементов матрицы рассеяния в высших приближениях мы встречаемся с принципиальными трудностями, заставившими в течение многих лет думать, что применимость квантовой электродинамики вообще ограничена первым приближением. Эти трудности заключаются в том, что выражения для матричных элементов в высших приближениях содержат интегралы, расходящиеся в области больших импульсов виртуальных частиц.

В настоящем параграфе мы рассмотрим детально вопрос об этих расходимостях и о методах их устранения. При этом мы не будем рассматривать встречающиеся в ряде случаев расходимости в области малых импульсов («инфракрасная катастрофа»), которые связаны с неприменимостью теории возмущений при малых частотах фотонов.

Рассмотрим некоторую неприводимую диаграмму. Ей соответствует в общем случае многократный интеграл по импульсам виртуальных частиц

$$J = \int F(p_1, \dots, p_n) d^4 p_1 \dots d^4 p_n,$$

где $F(p_1, \dots, p_n)$ — некоторая рациональная функция, представляющая собой отношение двух полиномов. Так как каждой внутренней электронной линии диаграммы соответствует множитель $S_c(p)$, содержащий импульс в степени -1 , а каждой внутренней фотонной линии — множитель $D_c(p)$, содержащий импульс в степени -2 , то разность степеней полиномов, стоящих в числителе и знаменателе F , будет равна $-(F_e + 2F_\nu)$, где F_e и F_ν — числа внутренних электронных и фотонных линий.

Подсчитаем теперь число переменных интегрирования. Число различных импульсов равно числу внутренних линий, т. е. $F_e + F_\gamma$. Но они не независимы, так как три импульса линий, сходящихся в каждой из n вершин диаграммы, связаны законом сохранения. Один из законов сохранения можно отнести к внешним линиям, поэтому всего число независимых импульсов, по которым производится интегрирование, равно $F_e + F_\gamma - n + 1$. Если записать интеграл схематически в виде

$$J \sim \int \frac{(d^4 p)^{K_1}}{(p)^{K_2}},$$

то, используя приведенный подсчет и соотношения (22.5.3), мы получим

$$K_1 = \frac{1}{2}n + 1 - \frac{1}{2}N_e - \frac{1}{2}N_\gamma,$$

$$K_2 = 2n - \frac{1}{2}N_e - N_\gamma,$$

где N_e и N_γ — числа внешних электронных и фотонных линий.

Поскольку мы рассматриваем неприводимую диаграмму, то подынтегральная функция не распадается на множители, содержащие независимые переменные. Поэтому сходимость интеграла определяется разностью

$$K = K_2 - 4K_1 = \frac{3}{2}N_e + N_\gamma - 4. \tag{23.1.1}$$

При $K > 0$ интеграл сходится, при $K \leq 0$ — расходится. Замечательно, что величина K зависит только от числа внешних линий.

Из (23.1.1) следует, что имеется ограниченное число типов расходящихся интегралов, соответствующих следующим значениям чисел N_e и N_γ [15]:

1) $N_e = 2, N_\gamma = 1, K = 0;$	5) $N_e = 0, N_\gamma = 2, K = -2;$	(23.1.2)
2) $N_e = 2, N_\gamma = 0, K = -1;$	6) $N_e = 0, N_\gamma = 1, K = -3;$	
3) $N_e = 0, N_\gamma = 4, K = 0;$	7) $N_e = 0, N_\gamma = 0, K = -4.$	
4) $N_e = 0, N_\gamma = 3, K = -1;$		

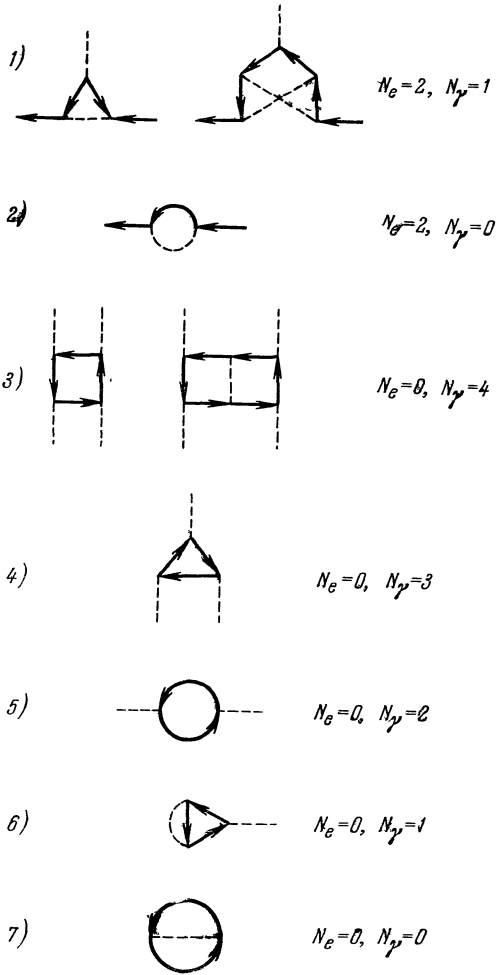


Рис. 23.1.

На рис. 23.1 изображены простейшие неприводимые диаграммы, соответствующие этим расходимостям. Не все из них, однако, вносят вклад в матричные элементы. Ясно, что диаграмму 7, представляющую собой

вакуумную петлю, можно вовсе не принимать во внимание. Можно также, согласно теореме Фарри, не рассматривать диаграмм 4 и 6, представляющих собой замкнутые электронные петли с нечетным числом вершин. (Мы сохраним, однако, диаграмму 4 с одним направлением обхода электронной петли, так как она определяет трехфотонную вершинную функцию V .)

Таким образом, основными неприводимыми диаграммами, приводящими к расходимостям в матрице рассеяния, является ЭСЭД и ФСЭД 2-го порядка, ВД любого порядка и диаграмма рассеяния света светом (диаграмма 3 на рис. 23.1). Первой из них соответствует $K = -1$, второй — $K = -2$ и остальным — $K = 0$.

23.2. Введение граничного импульса. Появление расходимостей в матрице рассеяния указывает на неудовлетворительность теории. Ясно, что ряд теории возмущений, строго говоря, не имеет смысла, если второй член ряда бесконечен. Таким образом, возникает следующая проблема важнейшего принципиального значения. С одной стороны, результаты применения теории возмущений в первом приближении прекрасно подтверждаются опытом. С другой стороны, для того чтобы первое приближение имело какой-либо теоретический смысл, следующие приближения должны приводить лишь к малым поправкам.

Идея выхода из этого противоречия подсказывается уже классической электродинамикой. Как хорошо известно, классическая электродинамика не является логически замкнутой теорией. Последовательное ее применение приводит к противоречиям, проявляющимся, например, в бесконечной электромагнитной массе электрона. Смысл этих противоречий сводится к неприменимости уравнений классической электродинамики на расстояниях, меньших классического радиуса электрона $\frac{e^2}{mc^2}$ (фактически классическая электродинамика из-за квантовых эффектов неприменима уже при расстояниях порядка $\frac{\hbar}{mc}$).

Квантовая электродинамика правильно описывает взаимодействие между электронами и фотонами в области достаточно больших пространственно-временных интервалов или соответственно в области достаточно малых импульсов частиц, но в области малых пространственно-временных интервалов, т. е. больших импульсов, становится неприменимой. Не рассматривая здесь вопроса о том, связано ли это ограничение с пороком основных идей и уравнений квантовой электродинамики или с неприменимостью теории возмущений, можно, однако, утверждать, что если рассматривать процессы, в которых частицы обмениваются импульсами, малыми по сравнению с некоторым граничным импульсом L , то область импульсов виртуальных частиц, превосходящих L , не будет играть практически никакой роли. В этих условиях величина граничного импульса не должна входить в выражения для элементов S -матрицы. Поэтому, хотя мы точно и не знаем L , тем не менее мы можем варьировать эту величину и выбрать ее таким образом, чтобы, с одной стороны, выполнялось условие $\Delta p \ll L$, где Δp — величина, характеризующая изменение импульса частиц при столкновениях, а с другой стороны, была применимой теория возмущений.

Введение граничного импульса математически означает, что при вычислении интегральных величин, сопоставляемых диаграммам Фейнмана, мы будем производить интегрирование не по бесконечной, а по некоторой конечной области 4-импульсного пространства. Эта область должна быть, естественно, инвариантной относительно преобразований Лоренца (подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 36.1).

Вместо интегрирования по конечной области в 4-импульсном пространстве можно пользоваться также другим, эквивалентным методом, состоящим в введении в подынтегральные выражения некоторого «обрезающего фактора», т. е. множителя $f(p, L)$ [8], равного единице при $|p^2| \ll L^2$ и обращаемого в нуль при $|p^2| \gg L^2$. Такими свойствами обладает, например, функция

$$f(p, L) = \left(\frac{L^2}{p^2 + L^2} \right)^n,$$

где $n > 1$.

23.3 Регуляризация функций, соответствующих неприводимым диаграммам. Мы покажем теперь, что, последовательно применяя процедуру перенормировки массы и заряда электрона, можно сделать элементы S -матрицы не зависящими от величины граничного импульса L , т. е. устранить все встречающиеся в матричных элементах расходимости.

Начнем с исследования расходимостей у функций, соответствующих неприводимым ВД (будем называть эти функции вершинными функциями соответствующих порядков).

Простейшей неприводимой ВД 3-го порядка (рис. 20.3) соответствует функция

$$\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) = \int_{\Omega_m} R_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q) d^4q, \quad (23.3.1)$$

где

$$R_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \gamma_\nu S_c(p_1 - q) \gamma_\mu S_c(p_2 - q) \gamma_\nu D_c(q),$$

и интегрирование совершается по 4-объему Ω_m , определяемому граничным импульсом L . При $L \rightarrow \infty$ интеграл (23.3.1), очевидно, расходится логарифмически.

Регуляризованная функция $\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ (будем называть ее регуляризованной вершинной функцией 3-го порядка) определяется, согласно (22.3.4), формулой

$$\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) - \Lambda_\mu^{(3)}(p_0, p_0), \quad (23.3.2)$$

где p_0 — 4-импульс свободного реального электрона, $p_0^2 = -m_R^2$. Покажем, что функция $\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ не содержит расходимостей, т. е. что в выражении для $\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ можно произвести предельный переход $L \rightarrow \infty$.

Заметим с этой целью, что

$$\begin{aligned} R_\mu^{(3)}(p_1, p_2; q) - R_\mu^{(3)}(p_0, p_0; q) &= (p_1 - p_0)_\nu \left(\frac{\partial R_\mu^{(3)}}{\partial p_{1\nu}} \right)_{p_1=p_1', p_2=p_2'} + \\ &+ (p_2 - p_0)_\nu \left(\frac{\partial R_\mu^{(3)}}{\partial p_{2\nu}} \right)_{p_1=p_1', p_2=p_2'}, \end{aligned}$$

где $p_{1\nu}'$ и $p_{2\nu}'$ — некоторые величины, лежащие соответственно между $p_{1\nu}$ и $p_{0\nu}$ и $p_{2\nu}$ и $p_{0\nu}$. При $|q^2| \rightarrow \infty$ функция $R_\mu^{(3)}$ ведет себя, очевидно, как $(q)^{-4}$, а так как q входит в $R_\mu^{(3)}$ только в комбинациях $p_1 - q$ и $p_2 - q$, то $\frac{\partial R_\mu^{(3)}}{\partial p_{1\nu}}$ и $\frac{\partial R_\mu^{(3)}}{\partial p_{2\nu}}$ будут вести себя при $|q^2| \rightarrow \infty$ не как $(q)^{-4}$, а как $(q)^{-5}$, благодаря чему интеграл, определяющий функцию $\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ будет сходиться при $L \rightarrow \infty$. Это обстоятельство и оправдывает введение термина регуляризованная функция (под регуляризацией обычно понимают процедуру устранения расходимостей).

Ясно, что приведенное доказательство сходимости интеграла, определяющего $\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$, немедленно обобщается на произвольные неприводимые ВД. Действительно, рассмотрим вершинную функцию $\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2)$, соответствующую неприводимой ВД $(2n+1)$ -го порядка

$$\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2) = \int_{\Omega_m} R_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2; q_1, q_2, \dots, q_n) d^4q_1 d^4q_2 \dots d^4q_n,$$

где $R_{\mu}^{(2n+1)}$ — отношение двух полиномов, которое ведет себя при $|q_i^2| \rightarrow \infty$ как $(q)^{-4n}$ ($i=1, \dots, n$) и Ω_m — некоторая конечная область интегрирования, определяющаяся граничным импульсом L (при $L \rightarrow \infty$ интеграл $\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ расходится логарифмически).

Образовав разность

$$\begin{aligned} R_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2; q_1, \dots, q_n) - R_{\mu}^{(2n+1)}(p_0, p_0; q_1, \dots, q_n) = \\ = (p_1 - p_0)_{\nu} \left(\frac{\partial R_{\mu}^{(2n+1)}}{\partial p_{1\nu}} \right)_{p_1=p'_1, p_2=p'_2} + (p_2 - p_0)_{\nu} \left(\frac{\partial R_{\mu}^{(2n+1)}}{\partial p_{2\nu}} \right)_{p_1=p'_1, p_2=p'_2}, \end{aligned}$$

интеграл от которой дает $\Lambda_{R\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2)$, и, замечая, что p_1 и p_2 входят в $R_{\mu}^{(2n+1)}$ в линейных комбинациях с q_i , легко заключить, что эта разность ведет себя при $|q_i^2| \rightarrow \infty$ как $(q)^{-(4n+1)}$, что и обеспечивает сходимость выражения для $\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ при $L \rightarrow \infty$.

Рассмотрим функции, соответствующие неприводимым трехфотонным диаграммам (будем называть их трехфотонными вершинными функциями соответствующего порядка).

Простейшей трехфотонной вершинной диаграмме 3-го порядка соответствует функция

$$V_{\mu}^{(3)}(k) = \int_{\Omega_m} Q_{\mu}^{(3)}(k; q) d^4q, \quad (23.3.3)$$

где

$$Q_{\mu}^{(3)}(k; q) = \frac{e^2}{3(2\pi)^2} \text{Sp } \gamma_{\nu} S_c(q-k) \gamma_{\mu} S_c(q-k) \gamma_{\nu} S_c(q).$$

Интеграл (23.3.2) расходится, очевидно, линейно при $L \rightarrow \infty$. Однако ввиду инвариантности области интегрирования Ω_m члены, пропорциональные L , должны обратиться в нуль. Действительно, для исследования расходящейся части $V_{\mu}^{(3)}(k)$ можно считать, что $k_{\mu} \ll q_{\mu}$. Если положить $k_{\mu} = 0$, то после интегрирования и вычисления следа не останется векторного параметра, через который могла бы быть выражена векторная величина $V_{\mu}^{(3)}$, т. е.

$$V_{\mu}^{(3)}(0) = \int_{\Omega_m} Q_{\mu}^{(3)}(0; q) d^4q = 0.$$

Поэтому отличный от нуля результат могут дать только линейные по k_{μ} члены в $Q_{\mu}^{(3)}$, но они будут приводить не к линейной, а к логарифмической расходимости.

Покажем, что регуляризованная трехфотонная вершинная функция 3-го порядка

$$V_{R\mu}^{(3)}(k) = V_{\mu}^{(3)}(k) - k_{\nu} \left(\frac{\partial V_{\mu}^{(3)}(k)}{\partial k_{\nu}} \right)_{k=0} \quad (23.3.4)$$

не зависит от величины граничного импульса, т. е. не содержит расходимостей.

Так как $V_{\mu}^{(3)}(0) = 0$, то $V_{R\mu}^{(3)}(k)$ можно представить в виде

$$V_{R\mu}^{(3)}(k) = \int_{\Omega_m} \left\{ Q_{\mu}^{(3)}(k; q) - Q_{\mu}^{(3)}(0; q) - k_{\nu} \left(\frac{\partial Q_{\mu}^{(3)}(k; q)}{\partial k_{\nu}} \right)_{k_{\nu}=0} \right\} d^4 q.$$

Замечая, что

$$Q_{\mu}^{(3)}(k; q) = Q_{\mu}^{(3)}(0; q) + k_{\nu} \left(\frac{\partial Q_{\mu}^{(3)}(k; q)}{\partial k_{\nu}} \right)_{k_{\nu}=0} + \frac{1}{2} k_{\nu} k_{\lambda} \left(\frac{\partial^2 Q_{\mu}^{(3)}(k; q)}{\partial k_{\nu} \partial k_{\lambda}} \right)_{k_{\nu}=k'_{\nu}}, \quad 0 < k'_{\nu} < k_{\nu},$$

и учитывая, что величины k_{ν} и q_{ν} входят в $Q_{\mu}^{(3)}(k; q)$ не порознь, а в виде линейной комбинации, легко убедиться, что интеграл, определяющий $V_{R\mu}^{(3)}(k)$, сходится при $L \rightarrow \infty$. Действительно, подынтегральное выражение в $V_{R\mu}^{(3)}(k)$ при $|q^2| \rightarrow \infty$ ведет себя как $(q)^{-5}$, что и обеспечивает сходимость интеграла.

Аналогичным образом можно убедиться в отсутствии расходимостей у трехфотонных вершинных функций, соответствующих другим неприводимым трехвершинным диаграммам.

Перейдем к рассмотрению функций $\Sigma^{(2)}(p)$ и $\Pi^{(2)}(k^2)$, соответствующих неприводимым ЭСЭД и ФСЭД (эти функции называются массовым и поляризационным операторами 2-го порядка). Регуляризованные функции $\Sigma_R^{(2)}(p)$ и $\Pi_R^{(2)}(k^2)$ можно найти с помощью формул (22.3.7) и (22.4.1), подставляя в последние вместо $\Lambda_{R\mu}(q, q)$ и $V_{R\mu}(q)$ функции $\Lambda_{R\mu}^{(3)}(q, q)$ и $V_{R\mu}^{(3)}(q)$. Ясно, что полученные таким образом функции $\Sigma_R^{(2)}(p)$ и $\Pi_R^{(2)}(k^2)$ не будут содержать расходимостей. Но можно производить регуляризацию массового и поляризационного операторов 2-го порядка, исходя непосредственно из выражений для $\Sigma^{(2)}(p)$ и $\Pi^{(2)}(k^2)$ в виде интегралов по 4-объему Ω_m , определяемому граничным импульсом L . Согласно результатам § 22.4 регуляризованные значения этих величин определяются формулами

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(im_R) - (\hat{p} - im_R) \left(\frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p}=im_R},$$

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \Pi^{(2)}(k^2) - \Pi^{(2)}(0) - k^2 \Pi^{(2)'}(0). \quad (23.3.5)$$

Эти формулы (вместе с формулами (23.3.2) и (23.3.4)) отчетливо разъясняют математическую процедуру регуляризации. Мы видим, что она состоит в вычитании из регуляризуемой функции нескольких первых членов ее разложения в ряд Тейлора по степеням $\hat{p} - im_R$ или k^2 . Количество отнимаемых членов должно быть минимальным для обеспечения сходимости остатка; тот же факт, что остаток не будет содержать расходимостей, следует из того, что регуляризуемая функция представляет собой интеграл, в котором в случае неприводимых диаграмм внешние импульсы входят в виде линейной комбинации с переменными интегрирования, и поэтому каждое дифференцирование увеличивает степень полинома, стоящего в знаменателе подынтегральной функции, на единицу.

Физический смысл этой «вычитательной» процедуры заключается, как следует из предыдущего анализа, в том, что она эквивалентна перенормировке констант e и m — заряда и массы электрона.

Нам остается показать, как производится регуляризация матричного элемента, соответствующего рассеянию света светом (диаграмма 3 на рис. 23.1).

Согласно результатам § 23.1 этот матричный элемент

$$\mathfrak{M}^{(\nu\nu)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \int_{\Omega_m} G(k_1, k_2, k_3, k_4; q_1, \dots, q_n) d^4 q_1 \dots d^4 q_n, \quad (23.3.6)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — 4-импульсы фотонов и G — некоторая функция, которая может быть найдена по правилам Фейнмана, расходится логарифмически при $L \rightarrow \infty$. В частности, логарифмически расходящуюся константу представляет собой и величина $\mathfrak{M}^{(\nu\nu)}(0, 0, 0, 0)$. Но из соображений калибровочной инвариантности эта величина должна, очевидно, равняться нулю. Тот факт, что мы получили величину, отличную от нуля, связан с тем, что введение конечного граничного импульса L нарушает калибровочную инвариантность теории. Для восстановления калибровочной инвариантности мы должны заменить функцию $G(k_1, k_2, k_3, k_4; q_1, \dots, q_n)$ под знаком интеграла (23.3.6) функцией

$$G(k_1, k_2, k_3, k_4; q_1, \dots, q_n) - G(0, 0, 0, 0; q_1, \dots, q_n).$$

Таким образом, мы получим следующее выражение для регуляризованного матричного элемента рассеяния света светом:

$$\mathfrak{M}_R^{(\nu\nu)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \int \{G(k_1, k_2, k_3, k_4; q_1, \dots, q_n) - G(0, 0, 0, 0; q_1, \dots, q_n)\} d^4 q_1 \dots d^4 q_n. \quad (23.3.7)$$

Ясно, что это выражение не будет содержать расходимостей (подробно вопрос о рассеянии фотона фотоном рассматривается в § 41).

23.4. Регуляризация функций, соответствующих приводимым диаграммам. В предыдущем разделе мы показали, что процедура перенормировки массы и заряда электрона позволяет однозначным образом устранить расходимости в функциях, соответствующих неприводимым диаграммам.

Мы покажем теперь, что эта же процедура позволяет однозначно регуляризовать функции, соответствующие приводимым диаграммам.

В этом случае задача сильно усложняется. Действительно, рассмотрим, например, приводимую ВД 11-го порядка, изображенную на рис. 23.2. Ясно, что интегральное выражение $\Lambda_{\mu}^{(11)}(p_1, p_2)$, соответствующее этой ВД, расходится при $L \rightarrow \infty$ как при интегрировании по переменным q_1, q_2 , относящимся к диаграмме как к целому, так и при интегрировании по переменным q', q'', q''' , относящимся к внутренним частям диаграммы, т. е. к функциям $\Sigma^{(2)}(q_1), \Sigma^{(2)}(q_2), \Pi^{(2)}(q), \Lambda^{(3)}(q_2, p_2)$.

Чтобы регуляризовать функцию $\Lambda^{(11)}(p_1, p_2)$, мы вначале произведем регуляризацию функций, соответствующих внутренним частям диаграммы, т. е. заменим в интеграле, определяющем $\Lambda^{(11)}(p_1, p_2)$ величины $\Sigma^{(2)}(q_1)$,

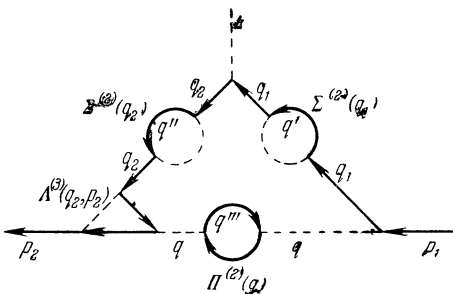


Рис. 23.2.

$\Sigma_R^{(2)}(q_2)$, $\Pi^{(2)}(q)$, $\Lambda^{(3)}(q_2, p_2)$ их регуляризованными значениями $\Sigma_R^{(2)}(q_1)$, $\Sigma_R^{(2)}(q_2)$, $\Pi_R^{(2)}(q)$, $\Lambda_R^{(3)}(q_2, p_2)$. Интеграл по остающимся переменным q_1, q_2 , относящимся к диаграмме как к целому (функции $\Sigma_R^{(2)}(q)$, $\Pi_R^{(2)}(q^2)$, $\Lambda_R^{(3)}(q, p)$) предполагаются при этом известными), будет по-прежнему расходящимся, и вопрос сводится к тому, каков характер этой расходимости. Мы покажем, что расходимость будет такой же, как и расходимость вершинной функции третьего порядка $\Lambda^{(3)}(p_1, p_2)$, т. е. логарифмической. Благодаря этому замечательному обстоятельству регуляризация «внутренних» функций не ухудшает расходимости интеграла, определяющего $\Lambda^{(11)}(p_1, p_2)$ и последний (после регуляризации «внутренних» функций) может быть регуляризован так же, как и функция $\Lambda^{(3)}(p_1, p_2)$, путем вычитания из $\Lambda^{(11)}(p_1, p_2)$ величины $\Lambda^{(11)}(p_0, p_0)$

$$\Lambda_R^{(11)}(p_1, p_2) = \Lambda^{(11)}(p_1, p_2) - \Lambda^{(11)}(p_0, p_0).$$

Чтобы убедиться в справедливости сделанного утверждения, выясним характер асимптотики регуляризованных функций $\Sigma_R^{(2)}(p)$, $\Pi_R^{(2)}(k^2)$, $\Lambda_R^{(3)}(p_1, p_2)$ в области больших значений аргументов (полностью задача о нахождении вида этих функций будет решена в § 36). Рассмотрим сначала вершинную функцию $\Lambda^{(3)}(q, p)$. В интересующей нас области $|q^2| \rightarrow \infty$ можно, очевидно, считать функцию $\Lambda^{(3)}(q, p)$ зависящей только от q_2 . С другой стороны, интеграл, определяющий $\Lambda^{(3)}$, расходится при $L \rightarrow \infty$ логарифмически. Поэтому из соображений размерности можно заключить, что

$$\Lambda^{(3)}(q, 0) \sim \ln \frac{L^2}{q^2}, \quad |q^2| \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, регуляризованная функция $\Lambda_R^{(3)}(q, 0)$ при $|q^2| \rightarrow \infty$ ведет себя как

$$\Lambda_R^{(3)}(q, 0) \sim \ln \frac{q^2}{m_R^2}, \quad |q^2| \rightarrow \infty. \quad (23.4.1)$$

Имея это выражение и используя соотношение

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = \int_{p_0}^p \Lambda_{R\mu}^{(3)}(q, q) dq_\mu,$$

легко заключить, что при $|p^2| \rightarrow \infty$ функция $\Sigma_R^{(2)}(p)$ ведет себя как

$$\Sigma_R^{(2)}(p) \sim \hat{p} \ln \frac{p^2}{m_R^2}, \quad |p^2| \rightarrow \infty. \quad (23.4.2)$$

Выясним, наконец, характер асимптотики функции $\Pi_R^{(2)}(k^2)$. Напомним с этой целью, что трехфотонная вершинная функция $V_\mu^{(3)}(k)$ логарифмически расходится при $L \rightarrow \infty$. Поэтому из соображений размерности следует, что в области больших импульсов

$$V_\mu^{(3)}(k) \sim k_\mu \ln \frac{L^2}{k^2}, \quad |k^2| \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, регуляризованная функция $V_{R\mu}^{(3)}(k)$ имеет вид

$$V_{R\mu}^{(3)}(k) \sim k_\mu \ln \frac{k^2}{m_R^2}, \quad |k^2| \rightarrow \infty. \quad (23.4.3)$$

Отсюда, используя соотношение (22.4.1)

$$\Pi_R^{(2)}(k) = - \int_0^k V_{R\mu}^{(3)}(q) dq_\mu,$$

можно найти $\Pi_R^{(2)}(k)$ при $|k^2| \rightarrow \infty$

$$\Pi_R^{(2)}(k) \sim k^2 \ln \frac{k^2}{m_R^2}, \quad |k^2| \rightarrow \infty. \quad (23.4.4)$$

Полученные формулы показывают, что если перейти от диаграммы рис. 23.2 к скелетной диаграмме рис. 21.1 с эффективными вершиной и эффективными электронными и фотонными линиями, то соответствующие им величины будут вести себя в области больших импульсов как

$$\Gamma \sim \ln \frac{q^2}{m_R^2}, \quad G^{(e)} \sim \frac{1}{q} \ln \frac{q^2}{m_R^2}, \quad G^{(\gamma)} \sim \frac{1}{q^2} \ln \frac{q^2}{m_R^2}, \quad |q^2| \rightarrow \infty.$$

Поэтому, как и утверждалось, интеграл, соответствующий скелетной диаграмме в целом

$$\Lambda^{(11)}(p_1, p_2) \sim e_R^2 \int_{\Omega_m} \Gamma (G^{(e)})^2 G^{(\gamma)} d^4q,$$

будет расходиться при $L \rightarrow \infty$ так же, как и $\Lambda^{(3)}(p_1, p_2)$, т. е. логарифмически, и для его регуляции достаточно из $\Lambda^{(11)}(p_1, p_2)$ вычистить $\Lambda^{(11)}(p_0, p_0)$

$$\Lambda_R^{(11)}(p_1, p_2) \sim e_R^2 \int \{ \Gamma (G^{(e)})^2 G^{(\gamma)} - [\Gamma (G^{(e)})^2 G^{(\gamma)}]_{p=p_0} \} d^4q.$$

Нам остается показать, что изложенный метод постепенного устранения расходимостей — от внутренних неприводимых диаграмм к охватывающим их ЭСЭД, ФСЭД и ВД и от последних ко всей диаграмме в целом — применим в случае сколь угодно сложной приводимой диаграммы.

Так как массовый и поляризационный операторы различных порядков $\Sigma^{(n)}(p)$ и $\Pi^{(n)}(k^2)$ выражаются через вершинные и трехфотонные вершинные функции $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ и $V^{(2n+1)}(q)$, то достаточно, очевидно, ограничиться рассмотрением функций $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ и $V^{(2n+1)}(q)$, соответствующих различным приводимым диаграммам.

Переходя от этих приводимых диаграмм к соответствующим неприводимым скелетным диаграммам с эффективными линиями и эффективными вершинами, мы получим для $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ и $V^{(2n+1)}(q)$ интегралы, в которые будут входить регуляризованные функции $\Lambda_R^{(2n'+1)}(p_1, p_2)$ и $V_R^{(2n'+1)}(q)$ более низких порядков, $n' < n$. Но, как можно убедиться, повторяя рассуждения, приводящие к (23.4.1) — (23.4.4), функции $\Lambda_R^{(2n'+1)}$, $V_R^{(2n'+1)}$, $\Sigma_R^{(n')}$, $\Pi_R^{(n')}$ в области больших импульсов q только множителями типа $(\ln \frac{q^2}{m_R^2})^N$, где N — некоторое целое число, будут отличаться от функций $\Lambda_R^{(3)}$, $V_R^{(3)}$, $\Sigma_R^{(2)}$, $\Pi_R^{(2)}$. Поэтому характер расходимости интегралов, определяющих функции $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ и $V^{(2n+1)}(q)$ (с регуляризованными «внутренними» частями), будет таким же, как и в случае простейших неприводимых диаграмм, т. е. логарифмическим. Иными словами, после регуляризации «внутренних» частей мы не приходим к расходимостям новых типов и сможем произвести окончательную регуляризацию функций $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ и $V^{(2n+1)}(q)$ так же, как и функций $\Lambda^{(3)}(p_1, p_2)$ и $V^{(3)}(q)$, т. е. путем вычитания из $\Lambda^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ величины $\Lambda^{(2n+1)}(p_0, p_0)$ и вычитания из $V^{(2n+1)}(q)$ величины $k_\nu \left(\frac{\partial V^{(2n+1)}}{\partial k_\nu} \right)_{k=0}$.

Зная регуляризованные функции $\Lambda_R(p_1, p_2)$ и $V_R(q)$, можно по формулам (22.3.7), (22.4.1) найти регуляризованные массовый и поляризационный операторы $\Sigma_R(p)$ и $\Pi_R(k)$, а зная последние, по формулам (22.3.6),

(22.3.10) определить перенормированные функции Грина. Существенно подчеркнуть, что по самой идее изложенного метода постепенного устранения расходимостей, базирующегося на последовательном применении процедуры перенормировки массы и заряда электрона, мы получим для всех перенормированных и регуляризованных функций не замкнутые выражения, а ряды по степеням перенормированного заряда электрона e_R .

Имея выражения для перенормированных функций Грина и вершинной функции, можно определить регуляризованное значение матричного элемента, соответствующего произвольной приводимой диаграмме. Действительно, согласно § 22.5 матричный элемент сохраняет свой вид при переходе к перенормированным величинам

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{F_e} (G^{(\gamma)})^{F_\gamma} (u)^{N_e} (a)^{N_\gamma} = \\ &= e_R^n \int (\Gamma_R)^n (G_R^{(e)})^{F_e} (G_R^{(\gamma)})^{F_\gamma} (u)^{N_e} (a)^{N_\gamma}, \end{aligned} \quad (23.4.5)$$

а так как перенормированные функции Γ_R , $G_R^{(e)}$ и $G_R^{(\gamma)}$ не содержат расходимостей, то регуляризация \mathfrak{M} необходима только в том случае, когда интеграл (23.4.5) расходится. С другой стороны, в области больших импульсов q функции $\Gamma_{R\mu}$, $G_R^{(e)}$, $G_R^{(\gamma)}$ ведут себя с точностью до множителя типа $\ln \left(\frac{q^2}{m_R^2} \right)^N$

так же, как и функции γ_μ , S_e , D_e (речь идет каждый раз о диаграммах сколь угодно большого, но конечного порядка!). Поэтому матричные элементы \mathfrak{M} могут обладать расходимостями только тех типов, которые свойственны величинам, соответствующим неприводимым диаграммам, и, следовательно, применяя к интегралу (23.4.5) в целом процедуру регуляризации величин, соответствующих неприводимым диаграммам, мы однозначным образом устраним встречающиеся в \mathfrak{M} расходимости.

Остановимся в заключение этого раздела на определении регуляризованных значений массового и поляризованного операторов.

Если исходить непосредственно из интегральных выражений, соответствующих приводимым ЭСЭД и ФСЭД, то при регуляризации возникает сложность, связанная с тем, что ВД, включенная в одну из внешних вершин ЭСЭД или ФСЭД, может проявиться и как ВД, включенная во вторую внешнюю вершину этой ЭСЭД или ФСЭД. (Поэтому расходимости, связанные с такими ВД, можно назвать перекрывающимися [24].)

На рис. 23.3 приведена ЭСЭД 4-го порядка, и здесь отчетливо видно, что ВД у вершины a является одновременно ВД у вершины b (эту ЭСЭД можно представить в одном из двух видов, изображенных на рис. 20.5).

По правилам Фейнмана изображенной диаграмме соответствует функция

$$\Sigma^{(4)}(p) = \frac{e^4}{(2\pi)^8} \int F_\mu(p, q_1) K_{\nu\mu}(p, q_1, q_2) H_\nu(p, q_2) d^4 q_1 d^4 q_2,$$

где

$$F_\mu(p, q_1) = \frac{1}{q_1^2} \gamma_\mu \frac{i(\hat{p} - \hat{q}_1) - m}{(p - q_1)^2 + m^2}, \quad K_{\nu\mu}(p, q_1, q_2) = \gamma_\nu \frac{i(\hat{p} - \hat{q}_1 - \hat{q}_2) - m}{(p_1 - q_1 - q_2)^2 + m^2} \gamma_\nu,$$

$$H_\nu(p, q_2) = \frac{i(\hat{p} - \hat{q}_2) - m}{(p - q_2)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{1}{q_2^2}.$$

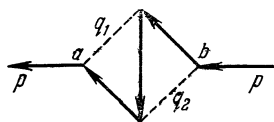


Рис. 23.3.

Регуляризованная функция $\Sigma_R^{(4)}(p)$ имеет вид

$$\Sigma_R^{(4)}(p) = \int R(p; q_1, q_2) - R(p_0; q_1, q_2) - (p - p_0)_\mu \left(\frac{\partial R(p; q_1, q_2)}{\partial p_\mu} \right)_{p=p_0} d^4 q_1 d^4 q_2,$$

где

$$R(p; q_1, q_2) = F_\mu(p, q_1) K_{\nu\mu}(p, q_1, q_2) H_\nu(p, q_2) - F_\mu(p_0, q_1) K_{\nu\mu}(p_0, q_1, 0) H_\nu(p, q_2) - F_\mu(p, q_1) K_{\nu\mu}(p_0, 0, q_2) H_\nu(p_0, q_2).$$

Чтобы избежать рассмотрения перекрывающихся расходимостей, удобно определить сначала регуляризованные вершинные и трехфотонные функции разных порядков $\Lambda_R^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ и $V_R^{(2n+1)}(q)$ и, зная их, по формулам (22.3.7) и (22.4.1) находить соответствующие функции $\Sigma_R^{(n)}(p)$ и $\Pi_R^{(n)}(k^2)$.

§ 24. Асимптотические свойства функций Грина и границы применимости квантовой электродинамики

24.1. Структура функций Грина в области больших импульсов.
В § 22.5 мы показали, что матричный элемент, соответствующий какому-либо процессу, с учетом высших приближений теории возмущений

$$\mathfrak{M} = e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{F_e} (G^{(v)})^{F_v} (u)^{N_u} (a)^{N_a}$$

сохраняет свой вид при переходе от перенормированных к перенормированным величинам

$$e \rightarrow e_R = Z^{1/2} e, \\ G^{(e)} \rightarrow G_R^{(e)} = Z_1^{-1} G^{(e)}, \quad G^{(v)} \rightarrow G_R^{(v)} = Z^{-1} G^{(v)}, \quad \Gamma \rightarrow \Gamma_R = Z_1 \Gamma, \quad (24.1.1) \\ u \rightarrow u = Z_1^{-1/2} u, \quad a \rightarrow a = Z^{-1/2} a.$$

Это важнейшее свойство электромагнитного взаимодействия электронов и фотонов, называемое перенормируемостью, было использовано нами в предыдущем параграфе для установления правил регуляризации различных квантовоэлектродинамических величин.

Теперь мы покажем, что, используя свойство перенормируемости, можно выяснить структуру и получить асимптотические представления функций Грина в области больших импульсов [18].

Рассмотрим прежде всего фотонную функцию Грина. Предполагая выполненной перенормировку массы электрона, запишем $G^{(v)}(k^2)$ в виде

$$G^{(v)}(k) = D_e(k^2) d,$$

где d — некоторая функция квадрата 4-импульса k^2 , граничного импульса L и перенормированного заряда электрона

$$d \equiv d \left(\frac{L^2}{k^2}, \frac{m_R^2}{k^2}, e^2 \right).$$

Перенормированная функция d , которую мы будем обозначать через d_R и которая является функцией $\frac{k^2}{m_R^2}$ и e_R^2 :

$$d_R \equiv d_R \left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right),$$

связана, согласно (24.1.1), с неперенормированной функцией d соотношением

$$d\left(\frac{L^2}{k^2}, \frac{m_R^2}{k^2}, e^2\right) = Zd_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right), \quad (24.1.2)$$

где Z является некоторой функцией $\frac{L^2}{m_R^2}$ и e_R^2

$$Z \equiv Z\left(\frac{L^2}{m_R^2}, e_R^2\right),$$

и e^2 и e_R^2 связаны между собой соотношением

$$e^2 = Z^{-1}e_R^2. \quad (24.1.3)$$

Как видно из структуры выражений, сопоставляемых различным фейнмановским диаграммам, они допускают предельный переход $m \rightarrow 0$ (речь идет о неперенормированных выражениях). Предельный переход к нулевой массе возможен и после перенормировки массы (но не после перенормировки заряда!). Поэтому, интересуясь поведением функций Грина в области больших импульсов, мы можем в неперенормированной (по заряду) функции d вычеркнуть второй из аргументов

$$d\left(\frac{L^2}{k^2}, \frac{m_R^2}{k^2}, e^2\right) \sim d\left(\frac{L^2}{k^2}, 0, e^2\right) \equiv d\left(\frac{L^2}{k^2}, e^2\right), \quad |k^2| \gg m_R^2.$$

Из (24.1.2) и (24.1.3) следуют тогда соотношения

$$\frac{d\left(\frac{L^2}{k^2}, e^2\right)}{d\left(\frac{L^2}{q^2}, e^2\right)} = \frac{d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right)}{d_R\left(\frac{q^2}{m_R^2}, e_R^2\right)}, \quad (24.1.4)$$

$$e^2 d\left(\frac{L^2}{\lambda^2}, e^2\right) = e_R^2 d_R\left(\frac{\lambda^2}{m_R^2}, e_R^2\right) \equiv e_\lambda^2.$$

Разрешая второе из этих соотношений относительно e^2 и e_R^2 :

$$e^2 = e^2\left(\frac{L^2}{\lambda^2}, e_\lambda^2\right), \quad e_R^2 = e_R^2\left(\frac{\lambda^2}{m_R^2}, e_\lambda^2\right),$$

перепишем первое соотношение в виде

$$\frac{d\left(\frac{L^2}{k^2}, e^2\left(\frac{L^2}{\lambda^2}, e_\lambda^2\right)\right)}{d\left(\frac{L^2}{q^2}, e^2\left(\frac{L^2}{\lambda^2}, e_\lambda^2\right)\right)} = \frac{d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\left(\frac{\lambda^2}{m_R^2}, e_\lambda^2\right)\right)}{d_R\left(\frac{q^2}{m_R^2}, e_R^2\left(\frac{\lambda^2}{m_R^2}, e_\lambda^2\right)\right)}. \quad (23.1.5)$$

В левую часть этого равенства не входит масса m_R , а в правую — граничный импульс L . Это значит, что при фиксированном e_λ^2 обе части написанного равенства не зависят ни от m_R , ни от L . Иными словами,

$$\frac{d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right)}{d_R\left(\frac{q^2}{m_R^2}, e_R^2\right)} = f\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{q^2}{\lambda^2}, e_\lambda^2\right)$$

или

$$e_R^2 d_R \left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) = e_R^2 d_R \left(\frac{q^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) f \left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{q^2}{\lambda^2}, e_R^2 d_R \left(\frac{\lambda^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) \right),$$

где f — некоторая функция трех аргументов.

При фиксированном e_R^2 левая сторона этого равенства не зависит от λ^2 ; поэтому, в частности, можно положить $\lambda^2 = q^2$ и переписать равенство в виде

$$g(x, e_R^2) = G \left(\frac{x}{y}, g(y, e_R^2) \right),$$

где

$$x = \frac{k^2}{m_R^2}, y = \frac{q^2}{m_R^2}, g(x, e_R^2) = e_R^2 d_R(x, e_R^2).$$

Вводя далее обозначения

$$g_1 = g(x, e_R^2), g_2 = g(y, e_R^2),$$

получим отсюда

$$g_1 = G \left(\frac{h(g_1, e_R^2)}{h(g_2, e_R^2)}, g_2 \right).$$

где $h(g, e_R^2)$ есть решение уравнения $g(x, e_R^2) = g$ относительно x . Так как слева величина e_R^2 не входит, то должно иметь место соотношение

$$h(g, e_R^2) = \frac{\chi(g)}{\Phi(e_R^2)},$$

т. е.

$$\chi(g) = x \Phi(e_R^2)$$

и, следовательно, [18]

$$e_R^2 d_R \left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) = \Phi \left(\Phi(e_R^2) \frac{k^2}{m_R^2} \right), \quad |k^2| \gg m_R^2, \quad (24.1.6)$$

где Φ и ϕ — некоторые неизвестные функции одного аргумента. Мы видим, что в области больших импульсов величина $e_R^2 d_R \left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right)$ является функцией не двух, а только одного аргумента $\Phi(e_R^2) \frac{k^2}{m_R^2}$.

Отсюда можно получить важное следствие, касающееся эффективной плотности заряда в облаке электронно-позитронных пар, окружающих в вакууме какой-либо пробный заряд.

Как следует из (21.4.6), внешний потенциал $A_\mu^{(e)}(x)$ и порождающий его ток $J_\mu(x)$ связаны между собой в вакууме соотношением

$$A_\mu^{(e)}(x) = i \int G_{\mu\nu}^{(v)}(x, x') J_\nu(x') d^4x'. \quad (24.1.7)$$

В случае покоящегося пробного заряда Q

$$J_\nu(x) = iQ \delta_{\nu 4} \delta(\mathbf{r})$$

и, следовательно, потенциал, порождаемый зарядом Q в вакууме, имеет

вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = iQ \int_{-\infty}^{\infty} G_R^{(\gamma)}(x) dt \quad (24.1.8)$$

(мы, естественно, заменили функцию Грина ее регуляризованным значением).

Последнее соотношение можно, очевидно, переписать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{iQ}{(2\pi)^3} \int G_R^{(\gamma)}(k) |_{\hbar\omega=0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k, \quad (24.1.9)$$

откуда следует, что плотность заряда в облаке электронно-позитронных пар, окружающих пробный заряд, определяется формулой

$$\rho(\mathbf{r}) = -\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{iQ}{(2\pi)^3} \int d_R\left(\frac{\mathbf{k}^2}{m_R^2}, e_R^2\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k. \quad (24.1.10)$$

Мы видим, что функция $d_R\left(\frac{\mathbf{k}^2}{m_R^2}, e_R^2\right)$ имеет наглядный физический смысл: с точностью до постоянного множителя она представляет собой компоненту Фурье плотности заряда в облаке пар, окружающих «точечный» заряд Q . Иначе можно сказать, что $d_R\left(\frac{\mathbf{k}^2}{m_R^2}, e_R^2\right)$ представляет собой формфактор «точечного» заряда.

На очень малых расстояниях от пробного заряда ($r \ll \frac{\hbar}{m_{RC}}$) в (24.1.10) можно подставить вместо функции $d_R\left(\frac{\mathbf{k}^2}{m_R^2}, e_R^2\right)$ ее асимптотическое представление (24.1.6)

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{iQ}{(2\pi)^3 e_R^2} \int \Phi\left(\varphi(e_R^2) \frac{\mathbf{k}^2}{m_R^2}\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k.$$

Сделав здесь замену переменной $\sqrt{\varphi(e_R^2) \frac{\mathbf{k}^2}{m_R^2}} = \mathbf{k}'$ и вводя обозначение

$$f(\mathbf{r}) = \int \Phi(\mathbf{k}'^2) e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} d^3k',$$

получим

$$\rho(\mathbf{r}) = f\left(\mathbf{r} \frac{m_R}{\sqrt{\varphi(e_R^2)}}\right).$$

Эта формула показывает, что на расстояниях, меньших чем $\frac{\hbar}{m_{RC}}$, форма распределения заряда не зависит от постоянной связи e_R^2 , которая входит лишь в масштабный множитель $\varphi(e_R^2)$.

Поведение функции $\Phi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ тесно связано с величиной заряда «голого» электрона или, как мы будем говорить, первичного заряда e . Если $\Phi(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, то сингулярность в центре распределения заряда будет более сильной, чем δ -образная, и, следовательно, первичный заряд будет бесконечным, $e = \infty$. Если же при $x \rightarrow \infty$ функция $\Phi(x)$ стремится к конечному пределу $\Phi(\infty)$, то и первичный заряд будет конечным, причем его величина, определяемая этим пределом, не будет зависеть от e_R .

Подчеркнем, что все эти выводы, так же как и соотношение (24.1.6), определяющее структуру фотонной функции Грина в области больших

импульсов или малых расстояний, основаны только на свойстве перенормируемости и существовании у неперенормированных матричных элементов конечных пределов при $m \rightarrow 0$.

Соотношения, аналогичные (24.1.6), могут быть получены также для перенормированной вершинной функции. Для этого удобно предварительно выразить $G_R^{(e)}(p)$ и $\Gamma_R(p_1, p_2)$ через различные скалярные функции и величины типа $\gamma_\mu \rho_\mu \equiv \hat{p}$, которые можно построить с помощью 4-векторов p, p_1, p_2 . Например, $G_R^{(e)}(p)$ может быть представлена в виде

$$G_R^{(e)}(p) = \frac{s_1(p^2) \hat{p} + s_2(p^2) m_R}{p^2 + m_R^2},$$

где $s_1(p^2)$ и $s_2(p^2)$ — некоторые функции p^2 , не имеющие полюсов при конечных значениях p^2 . Аналогичное, но более сложное выражение может быть написано и для перенормированной вершинной функции.

Скаляры s_1 и s_2 и аналогичные скаляры для вершинной функции (будем их обозначать через $\gamma^{(i)}$) зависят не только от 4-импульсов p и перенормированного заряда e_R , но еще и от так называемой «массы фотона» λ , вводимой для устранения инфракрасной расходимости, возникающей в результате регуляризации функций (подробно вопрос о «массе» фотона обсуждается в § 29). Таким образом, скалярные функции, входящие в $G_R^{(e)}(p)$, зависят от трех переменных: $\frac{p^2}{m_R^2}$, e_R^2 и $\frac{\lambda^2}{m_R^2}$

$$s_i = s_i \left(\frac{p^2}{m_R^2}, e_R^2, \frac{\lambda^2}{m_R^2} \right), \quad i = 1, 2,$$

а скалярные функции, входящие в $\Gamma_R(p_1, p_2)$, — от пяти переменных $\frac{p_1^2}{m_R^2}$, $\frac{p_2^2}{m_R^2}$, $\frac{p_1 p_2}{m_R^2}$, e_R^2 и $\frac{\lambda^2}{m_R^2}$,

$$\gamma^{(i)} \equiv \gamma^{(i)} \left(\frac{p_1^2}{m_R^2}, \frac{p_2^2}{m_R^2}, \frac{p_1 p_2}{m_R^2}, e_R^2, \frac{\lambda^2}{m_R^2} \right).$$

Упрощения наступают в области больших импульсов. Поступая так же, как и при выводе (24.1.6), можно показать, что в области больших импульсов функции s_i и $\gamma^{(i)}$ имеют следующую структуру

$$s_i \left(\frac{p^2}{m_R^2}, e_R^2, \frac{\lambda^2}{m_R^2} \right) = r \left(\frac{\lambda^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) H \left(\varphi(e_R^2) \frac{p^2}{m_R^2} \right), \quad (24.1.11)$$

$$\gamma^{(i)} \left(\frac{p_1^2}{m_R^2}, \frac{p_2^2}{m_R^2}, \frac{p_1 p_2}{m_R^2}, e_R^2, \frac{\lambda^2}{m_R^2} \right) = A(e_R^2) \frac{B \left(\varphi(e_R^2) \frac{p_1^2}{m_R^2}, \varphi(e_R^2) \frac{p_2^2}{m_R^2}, \varphi(e_R^2) \frac{p_1 p_2}{m_R^2} \right)}{r \left(\frac{\lambda^2}{m_R^2}, e_R^2 \right)},$$

где $\varphi(e_R^2)$ — та же функция, которая входит в (24.1.6), и A, H, B и r — некоторые функции одного, трех и двух аргументов. Обратим внимание на то обстоятельство, что во все скалярные функции s_i и $\gamma^{(i)}$ входит одна и та же функция $r \left(\frac{\lambda^2}{m_R^2}, e_R^2 \right)$, определяющая их зависимость от «массы фотона».

Эти соотношения, так же как и соотношение (24.1.6), основываются на свойстве перенормируемости и существовании конечного предела у матричных элементов при $m \rightarrow 0$.

Из перенормируемости вытекает также существование некоторой группы преобразований, по отношению к которым инвариантны матричные

элементы. Именно, если обозначить перенормированный заряд и перенормированные функции Грина и вершинную функцию соответственно через e_1 , $G_1^{(e)}$, $G_1^{(\gamma)}$, Γ_1 и перейти от этих величин к величинам e_2 , $G_2^{(e)}$, $G_2^{(\gamma)}$, Γ_2 , связанным с e_1 , $G_1^{(e)}$, $G_1^{(\gamma)}$, Γ_1 соотношениями

$$e_2 = Z^{1/2}e_1, \quad G_2^{(e)} = Z_1^{-1}G_1^{(e)}, \quad G_2^{(\gamma)} = Z^{-1}G_1^{(\gamma)}, \quad \Gamma_2 = Z_1\Gamma_1, \quad (24.1.12)$$

где Z и Z_1 — произвольные величины, то матричные элементы \mathfrak{M} , вычисленные с помощью первой и второй систем величины, будут одинаковы:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2.$$

Такие преобразования образуют, очевидно, группу, которая носит название *ренормализационной группы*. Можно показать, что изучение ренормализационной группы также позволяет выяснить асимптотические свойства функций Грина [25].

24.2. Асимптотические выражения для функций Грина. До сих пор мы конкретно не пользовались теорией возмущений (если не считать того обстоятельства, что в самой перенормируемости мы убеждались из анализа структуры элементов S -матрицы). Теперь же мы предположим, что функция $d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right)$ разложима в ряд по степеням перенормированного заряда электрона

$$d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e_R^{2n} d_n(z), \quad (24.2.1)$$

где $d_0(z) = 1$ и вместо k введена новая переменная $z = \ln \frac{k^2}{m_R^2}$.

Выясним, какой вид имеет этот ряд в асимптотической области больших импульсов, $z \gg 1$. Воспользуемся для этого соотношением (24.1.6), которое перепишем в виде [26]

$$e_R^2 d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right) = F(z + \chi(e_R^2)), \quad (24.2.2)$$

где $\chi(e_R^2) = \ln \varphi(e_R^2)$. Из этого соотношения следует, что

$$\frac{\partial}{\partial z} (e_R^2 d_R) = \frac{\partial}{\partial e_R^2} (e_R^2 d_R) \frac{1}{\chi'(e_R^2)}. \quad (24.2.3)$$

Поэтому, если функция $e_R^2 d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right)$ разложима в ряд по степеням e_R^2 , то этим же свойством будет обладать и функция $[\chi'(e_R^2)]^{-1}$:

$$[\chi'(e_R^2)]^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} e_R^{2m} a_m. \quad (24.2.4)$$

Подставляя это разложение и разложение (24.2.1) в (24.2.3), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_R^{2(n+1)} d'_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_R^{2(m+k)} (m+1) a_k d_m(z),$$

откуда

$$a_0 = 0, \quad d'(z) = \sum_{m=0}^n (m+1) a_{n-m+1} d_m(z),$$

а так как $d_0(z) = 1$, то $a_1 = 0$, и окончательно мы получим следующую систему рекуррентных уравнений для определения функций $d_n(z)$:

$$d'_n(z) = \sum_{m=0}^{n-1} (m+1) a_{n-m+1} d_m(z). \quad (24.2.5)$$

Легко видеть, что в области больших z решение этой системы имеет вид

$$d_n(z) = (a_2 z)^n + O(z^{n-1}). \quad (24.2.6)$$

Это выражение показывает, что параметром разложения (24.2.1) при $z \gg 1$ является в действительности не e_R^2 , а $e_R^2 z$, т. е. величина $e_R^2 \ln \frac{k^2}{m_R^2}$. Аналогичная ситуация имеет место и в разложениях других величин в области больших импульсов.

Подставляя (24.2.6) в (24.2.1), мы получим для $d_R \left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right)$ ряд вида геометрической прогрессии. Если $a_2 e_R^2 \ln \frac{k^2}{m_R^2} < 1$, то этот ряд сходится, и его сумма равна [27]

$$d_R \left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) = \frac{1}{1 - a_2 e_R^2 \ln \frac{k^2}{m_R^2}}.$$

Чтобы найти входящую сюда численную константу a_2 , достаточно найти фотонную функцию Грина во втором приближении теории возмущений. Эта задача будет решена в § 36.3, где мы покажем, что

$$a_2 = \frac{1}{12\pi^2}.$$

Таким образом, окончательно d_R имеет вид [26]

$$d_R \left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2 \right) = \frac{1}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{k^2}{m_R^2}}. \quad (24.2.7)$$

Это асимптотическое выражение для d_R справедливо при выполнении двух условий

$$\frac{k^2}{m_R^2} \gg 1, \quad \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{k^2}{m_R^2} < 1. \quad (24.2.8)$$

Формула (24.2.7) имеет, очевидно, структуру соотношения (24.1.6), если считать в нем

$$\Phi(x) = -\frac{12\pi^2}{\ln x}, \quad \varphi(x) = e^{-\frac{12\pi^2}{x}}. \quad (24.2.9)$$

Отметим, что функции $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ являются обратными $\Phi(\varphi(x)) = x$.

Установим теперь связь между неперенормированным и перенормированным зарядами. Заметим с этой целью, что левая и правая части уравнений (24.1.4) имеют одинаковую структуру. Поэтому, повторяя рассуждения, приводящие к (24.2.7), можно убедиться, что для неперенормированной

функции $d\left(\frac{L^2}{k^2}, e^2\right)$ имеет место асимптотическое выражение [26]

$$d\left(\frac{L^2}{k^2}, e^2\right) = \frac{1}{1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{k^2}}. \quad (24.2.10)$$

Оно справедливо, если

$$\frac{L^2}{k^2} \gg 1, \quad \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{k^2} < 1.$$

Согласно (24.1.2) и (24.1.3)

$$e^2 = e_R^2 Z\left(\frac{L^2}{m_R^2}, e_R^2\right) = e_R^2 \frac{d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right)}{d\left(\frac{L^2}{k^2}, e^2\right)}.$$

Подставляя сюда вместо d_R и d выражения (24.2.7) и (24.2.10), получим

$$e^2 = e_R^2 \frac{1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{k^2}}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{k^2}{m_R^2}},$$

откуда

$$e^2 = e_R^2 \left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{m_R^2}\right)^{-1}, \quad e_R^2 = e^2 \left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{m_R^2}\right)^{-1}. \quad (24.2.11)$$

Мы видим, что

$$e^2 > e_R^2.$$

Это неравенство имеет простой физический смысл. Заряд реального электрона меньше заряда «голового» электрона, так как последний окружен облаком электронно-позитронных пар, экранирующих первичный заряд e ; внешний же наблюдатель воспринимает действие экранированного заряда.

В 24.1 мы показали, что $d_R\left(\frac{k^2}{m_R^2}, e_R^2\right)$ представляет собой формфактор «точечного» заряда, т. е. фурье-образ пространственного распределения заряда «точечного» электрона. Согласно (24.2.7) этот формфактор превосходит единицу при $|\mathbf{k}| > m_R$, т. е. на расстояниях от «центра» электрона, меньших $\frac{\hbar}{m_{RC}}$. С уменьшением расстояния формфактор увеличивается. На расстояниях порядка $\frac{\hbar}{m_{RC}}$ формфактор практически не отличается от единицы, иными словами, на этих и больших расстояниях уже не чувствуется экранирование первичного заряда e .

Выясним теперь, как ведет себя в области больших импульсов электронная функция Грина.

Согласно (24.1.11) зависимость $s_i\left(\frac{p^2}{m_R^2}, e_R^2, \frac{\lambda^2}{m_R^2}\right)$ от p^2 при $p^2 \gg m_R^2$ определяется функцией одного аргумента $H\left(\varphi\left(e_R^2\right) \frac{p^2}{m_R^2}\right)$. Предполагая, что функция $s_i\left(\frac{p^2}{m_R^2}, e_R^2, \frac{\lambda^2}{m_R^2}\right)$ разложима в ряд по степеням e_R^2 , и

поступая так же, как и при выводе (24.2.7), можно показать, что

$$H \left(\varphi \left(e_R^2 \frac{p^2}{m_R^2} \right) \right) = \left[1 - c \frac{e_R^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{p^2}{m_R^2} \right)^{-1} \right], \quad (24.2.12)$$

где c — некоторая численная константа, которая может быть найдена из сравнения (24.2.12) с результатом вычисления во втором приближении теории возмущений:

$$c = \frac{3}{27}.$$

В отличие от фотонной и электронной функций Грина, вершинная функция в области больших импульсов зависит, согласно (24.1.11), не от одного, а от трех аргументов $\varphi(e_R^2) \frac{p_1^2}{m_R^2}$, $\varphi(e_R^2) \frac{p_2^2}{m_R^2}$, $\varphi(e_R^2) \frac{p_1 p_2}{m_R^2}$. Поэтому, не делая определенных предположений об этих инвариантах, из одного только предположения о разложимости функций $\gamma^{(i)}$ в ряд по степеням e_R^2 , нельзя получить соотношений, аналогичных (22.2.7) и (22.2.12). В дальнейшем (§ 36.4) мы еще вернемся к вопросу об асимптотике вершинной функции.

24.3. Асимптотический характер регуляризованных разложений матрицы рассеяния. Изложенный в § 23 метод регуляризации устраняет расходимость в отдельных матричных элементах, т. е. в отдельных членах разложения матрицы рассеяния в ряд по степеням заряда электрона, а не сразу во всей матрице рассеяния. Возникает поэтому вопрос, будет ли сходящимся полученный таким образом ряд теории возмущений, состоящий из регуляризованных слагаемых.

Можно высказать соображения, указывающие на расходимость этого ряда, который является, по-видимому, асимптотическим. Эти соображения заключаются в следующем [28].

Взаимодействие между двумя электронами, не связанное с процессами излучения и поглощения фотонов, определяется функцией $e_R^2 D_c(x)$. Вычислив с помощью этой функции некоторую физическую величину $F(p; e_R^2)$, мы получим бесконечный ряд по степеням e_R^2

$$F(p; e_R^2) = \sum_{n=0}^{\infty} e_R^{2n} f_n(p), \quad (24.3.1)$$

где $f_n(p)$ — некоторые функции 4-импульсов частиц. Допустим, что этот ряд, отдельные члены которого регуляризованы согласно методу § 23, сходится при некотором значении e_R^2 . Тогда $F(p; e_R^2) \equiv F(e_R^2)$ будет аналитической функцией e_R^2 при $e_R^2 \sim 0$, а следовательно, и $F(-e_R^2)$ при достаточно малых значениях заряда также будет аналитической функцией, представимой в виде степенного ряда. Но $F(-e_R^2)$ допускает простую физическую интерпретацию. Именно, $F(-e_R^2)$ представляла бы собой изучаемую нами величину F в том случае, если бы взаимодействие двух зарядов определялось функцией $-e_R^2 D_c(x)$, а не $e_R^2 D_c(x)$, иными словами, если бы одноименные заряды притягивались, а не отталкивались.

Легко видеть, что при этом обычное определение вакуума не соответствует состоянию с наименьшей энергией. Действительно, представим себе, что образовано N электронно-позитронных пар и что все электроны сосредоточены в одной области пространства, а позитроны — в другой. Если эти области достаточно малы и достаточно отдалены друг от друга, то при большом N отрицательная кулоновская энергия притягивающихся одно-

именных зарядов будет больше энергии покоя частиц и их кинетической энергии. Назовем такие состояния «патологическими».

Предполагая, что взаимодействие между зарядами определяется функцией $-e_R^2 D_c(x)$, рассмотрим некоторое обычное состояние, характеризующееся наличием нескольких частиц. Это состояние отделено потенциальным барьером от «патологического» состояния с такой же энергией, причем высота барьера определяется энергией, необходимой для создания N пар, т. е. энергией покоя $2N$ частиц.

В силу туннельного эффекта существует конечная вероятность перехода из обычного в «патологическое» состояние. Это значит, что каждое физическое состояние является неустойчивым по отношению к спонтанному рождению большого числа частиц.

«Патологическое» состояние, в которое перейдет система, не будет стационарным, так как в нем будет образовываться все большее и большее число частиц, т. е. будет происходить как бы дезинтеграция вакуума. В силу этих эффектов нельзя предполагать, чтобы квантовая электродинамика с функцией взаимодействия $-e_R^2 D_c(x)$ приводила к вполне определенным аналитическим функциям. Скорее следует считать, что функция $F(-e_R^2)$ не может быть аналитической и что поэтому ряд (24.3.1) не сходится при $e_R^2 \neq 0$.

В связи с этим возникает естественный вопрос — какой же смысл имеет ряд (24.3.1) и почему квантовая электродинамика, оперирующая с такими рядами, находится в соответствии с экспериментальными данными. Ответ на этот вопрос заключается в том, что ряд (24.3.1) является асимптотическим рядом. Как известно, такие ряды в некоторых условиях могут быть использованы для описания поведения функций, которые они представляют, с очень большой, но всегда конечной точностью. В отличие от сходящихся рядов члены асимптотического ряда $e_R^{2n} f_n(p)$ сначала с ростом номера n падают, а затем, начиная с некоторого значения n , которое мы обозначим через n_0 , начинают расти и, вообще говоря, расти неограниченно. При этом максимальная точность, с которой асимптотический ряд может аппроксимировать функцию F , определяется величиной f_{n_0} . Чем величина f_{n_0} меньше, тем точность больше. В случае квантовой электродинамики есть основания предполагать, что в ряде (24.3.1) величины f_n будут падать вплоть до n

порядка $n_0 \approx \frac{\hbar c}{e_R^2} = 137$. Так как это значение n_0 велико, то точность,

с которой в квантовой электродинамике ряд (24.3.1) должен соответствовать реальности, очень велика. По всей вероятности, неточность ряда (24.3.1)

порядка $\exp\left(-\frac{\hbar c}{e_R^2}\right)$ (см. § 24.4), что является ничтожно малой величиной.

Для практических целей квантовой электродинамики такая точность более чем достаточна. Однако вопрос радикально меняется при переходе от электродинамики, где взаимодействие в силу малости $\frac{e_R^2}{\hbar c}$ является слабым,

к теориям сильного взаимодействия. Вместо $\frac{e_R^2}{\hbar c}$ здесь фигурирует величина

на $\frac{g^2}{\hbar c} \sim 10$, благодаря чему $n_0 \sim 1$, и уже с самого начала начинается рост членов ряда.

24.4. Проблема замкнутости квантовой электродинамики. Для устранения расходимостей в матрице рассеяния мы вводили граничный импульс L и предполагали, что область импульсов $p > L$ не играет роли, если

изменения импульсов реальных частиц малы по сравнению с L . Получаемые при этом выводы и предсказания квантовой электродинамики находятся в прекрасном согласии с экспериментальными данными.

Однако ясно, что строгий смысл имеет лишь предельный случай $L \rightarrow \infty$; поэтому возникает вопрос, к каким выводам мы придем, полагая $L = \infty$. Для решения этого вопроса, очевидно, непригодна теория возмущений, в которой параметр $e^2 \ln \frac{L^2}{m_R^2}$ предполагается малым, и мы можем попытаться выяснить интересующий нас вопрос, обращаясь к формулам (24.2.11), которые представляют собой результат суммирования ряда теории возмущений.

Если считать во второй из формул (24.2.11) второе слагаемое в знаменателе достаточно большим, то мы придем к результату

$$e_R^3 = \frac{16\pi^2}{\ln \frac{L^2}{m_R^2}}. \quad (24.4.1)$$

Эта формула очень показательна. Граничный импульс, который до сих пор фигурировал в теории как вспомогательный параметр, оказывается при $\frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{L^2}{m_R^2} \gg 1$ однозначно связанным с физическим зарядом e_R . Если взять для e_R^2 его реальное значение $e_R^2 = 4\pi/137$, то для граничного импульса мы получим значение

$$L_0 = m_R e^{\frac{3\pi}{2} \cdot 137}. \quad (24.4.2)$$

При $L > L_0$ величина $e_R^2/4\pi$ будет меньше $1/137$ и в пределе $L \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю.

Таким образом, хотя соотношения (24.2.11) и допускают формально предельный переход $L \rightarrow \infty$, этот переход не имеет смысла, так как он приводит к неправильному физическому результату — обращению в нуль заряда электрона.

Так как вся теория электромагнитного взаимодействия основывается на предположении о малости первичного заряда e , то можно было бы думать, что соотношение (24.4.1) связано с условием малости e^2 . Можно, однако, привести аргументы, показывающие, что соотношение (24.4.1) должно иметь место при произвольных значениях e^2 [29].

Мы приходим, таким образом, к выводу, что квантовая электродинамика не является замкнутой теорией. Она принципиально не может описывать взаимодействий в области расстояний, меньших $1/L_0$, где L_0 , во всяком случае, больше величины, определяемой формулой (24.4.2). Поэтому следует ожидать, что величина граничного импульса должна иметь глубокое физическое содержание, выражая существенное изменение свойств пространства — времени или свойств взаимодействий на малых расстояниях.

В действительности для электродинамики этот вопрос не имеет серьезного значения, так как эти расстояния столь малы, что при явлениях, связанных с расстояниями даже значительно большими, необходим учет явлений, не входящих формально в схему квантовой электродинамики (например, мезонных процессов). Этот вопрос имеет более фундаментальное значение для проблемы возможности описания сильных взаимодействий методами квантовой теории поля [30].

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 25. Излучение фотона

25.1. Общее выражение для амплитуды излучения. Приступим теперь к последовательному изучению различных конкретных процессов, обусловленных электромагнитным взаимодействием. Мы будем пользоваться теорией возмущений, причем в этой главе будем производить вычисления только в первом, приводящем к отличному от нуля результату, приближении. Поправки, связанные с высшими приближениями, будут рассмотрены в главе V.

Начнем с процессов 1-го порядка. Матрица рассеяния 1-го порядка имеет следующий вид:

$$\mathbf{S}^{(1)} = i \int \mathbf{j}_\mu(x) A_\mu(x) d^4x. \quad (25.1.1)$$

Если $A_\mu(x)$ — потенциал внешнего электромагнитного поля и $\mathbf{j}_\mu(x)$ — оператор плотности электронного тока, то матричные элементы $\mathbf{S}^{(1)}$ будут определять рассеяние электрона в этом поле в борновском приближении, которое мы рассмотрели в § 11.4. Если же $A_\mu(x)$ — оператор квантованного электромагнитного поля, то матричные элементы $\mathbf{S}^{(1)}$ будут определять испускание и поглощение фотона, так как оператор $A_\mu(x)$ входит в $\mathbf{S}^{(1)}$ линейно, а матричные элементы A_μ , отличные от нуля, соответствуют излучению и поглощению фотона.

Нетрудно убедиться, что свободный электрон не может излучать. Действительно, матричный элемент $\mathbf{S}^{(1)}$ будет отличен от нуля только при условии выполнения законов сохранения энергии и импульса

$$p_1 - k = p_2,$$

где p_1 , p_2 — начальный и конечный 4-импульсы электрона, а k — 4-импульс фотона. Возводя это равенство в квадрат и учитывая, что

$$p_1^2 = p_2^2 = -m^2, \quad k^2 = 0,$$

мы приходим к соотношению

$$p_1 k = 0,$$

или в системе покоя электрона

$$m\omega = 0,$$

где ω — энергия фотона.

Аналогично легко убедиться в том, что свободный электрон не может поглотить фотон и что невозможно превращение пары электрон — позитрон в один фотон или обратное превращение.

Поглощение или излучение фотона электроном может произойти лишь в результате «тройного столкновения», в котором существенную роль играет взаимодействие электрона с «третьим телом». В ряде важных случаев это взаимодействие может быть описано с помощью понятия внешнего поля, входящего в гамильтониан электрона. Оператор электронно-позитронного

поля может быть разложен по собственным функциям этого гамильтониана (см. (14.1.1)), и понятие состояния электрона при этом уже само по себе учитывает взаимодействие электрона с другими телами. При таком подходе становится возможным изучение процессов излучения и поглощения фотона с помощью матрицы рассеяния первого порядка.

Мы перейдем теперь к определению вероятности испускания и поглощения фотона электроном в стационарном внешнем поле.

Выпишем общее выражение для матричного элемента $\langle f | \mathbf{S}^{(1)} | i \rangle$, определяющего излучение фотона.

Пусть $\psi_1(x) = \psi_1(\mathbf{r}) e^{-ie_1 t}$ и $\psi_2(x) = \psi_2(\mathbf{r}) e^{-ie_2 t}$ — волновые функции начального и конечного состояний, $\langle 1 | \psi(x) | 0 \rangle = \psi_1(x)$, $\mathcal{A}_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ — потенциал электромагнитного поля, соответствующего определенному состоянию фотона: $\langle 1 | A_\mu(x) | 0 \rangle = \mathcal{A}_\mu^*(x)$ и $j_\mu(x) = \langle 2 | j_\mu(x) | 1 \rangle$ — ток перехода

$$j_\mu(x) = j_\mu(\mathbf{r}) e^{i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)t} = \langle 2 | j_\mu(x) | 1 \rangle = ie \bar{\psi}_2(x) \gamma_\mu \psi_1(x). \quad (25.1.2)$$

Тогда матричный элемент оператора $\mathbf{S}^{(1)}$ может быть представлен в виде

$$\langle f | \mathbf{S}^{(1)} | i \rangle = 2\pi i U \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega), \quad (25.1.3)$$

где

$$U = \int j_\mu(\mathbf{r}) \mathcal{A}_\mu^*(\mathbf{r}) d^3x. \quad (25.1.4)$$

Величину U мы будем называть *амплитудой излучения*.

Если рассматривается излучение фотона с определенным импульсом \mathbf{k} и поляризацией \mathbf{e} , то, согласно (16.3.2), амплитуда излучения имеет вид

$$U = \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int \psi_2^*(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \mathbf{e}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_1(\mathbf{r}) d^3x, \quad (25.1.5)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — матрицы Дирака.

25.2. Излучение электрического мультиполя. Рассмотрим излучение в том случае, когда начальное и конечное состояния электрона являются связанными. Если при этом длина волны испускаемого фотона λ велика по сравнению с размерами области a , в которой происходит движение электрона, то вероятность излучения простым образом связана, как мы увидим далее, с электрическим или магнитным мультипольным моментом электрона; поэтому излучение в этом случае называется *мультипольным излучением*.

Определим вероятность излучения фотона, обладающего определенным моментом количества движения L , проекцией момента M и четностью $P = (-1)^{L+\lambda+1}$ ($\lambda = 0, 1$). Напомним, что $\lambda = 1$ соответствует состояниям электрического типа, а $\lambda = 0$ — состояниям магнитного типа. Поэтому переходы с испусканием такого фотона при $\lambda = 1$ называются *электрическими 2^L -польными* или *EL-переходами*, а при $\lambda = 0$ — *магнитными 2^L -польными* или *ML-переходами*.

Начнем с рассмотрения излучения фотона электрического типа.

Потенциал, соответствующий фотону в состоянии электрического типа, определяется формулой (3.8.7). Так как размеры системы предполагаются малыми по сравнению с длиной волны, то в интеграле (25.1.4) главную роль играет область малых r , для которых $\omega r \ll 1$. Поэтому можно ограничиться первым членом в разложении входящей в выражение для потен-

циала функции $g_L(\omega r)$ по степеням ωr :

$$g_L(\omega r) \approx 4\pi \frac{(i\omega r)^L}{(2L+1)!!}, \quad \omega r \ll 1. \quad (25.2.1)$$

Удобно выбрать калибровку потенциалов в виде (3.8.8). Тогда скалярный потенциал $\Phi(\mathbf{r})$ будет содержать ωr в степени L , а векторный $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — в степени $L+1$, т. е. $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ будет малым по сравнению с $\Phi(\mathbf{r})$.

Таким образом, мы можем подставить в (25.1.4)

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\sqrt{\frac{L+1}{L}} \frac{(i\omega r)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{\omega}{R}} Y_{LM}(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (25.2.2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0,$$

что дает

$$U = (-i)^L \sqrt{\frac{L+1}{LR}} \frac{\omega^{L+1/2}}{(2L+1)!!} \int \rho(\mathbf{r}) r^L Y_{LM}^*(\mathbf{n}) d^3x, \quad (25.2.3)$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — плотность заряда перехода:

$$\rho(\mathbf{r}) = e\psi_2^*(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r}).$$

Введем электрический мультипольный момент перехода,

$$Q_{LM}^3 = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \int \rho(\mathbf{r}) r^L Y_{LM}^*(\mathbf{n}) d^3x. \quad (25.2.4)$$

Тогда амплитуда излучения (25.2.3) примет вид

$$U = \frac{(-i)^L}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{L+1}{L}} \frac{\sqrt{2L+1}}{(2L+1)!!} \omega^{L+1/2} Q_{LM}^3, \quad (25.2.5)$$

где R — радиус нормировочной сферы. Заметим, что при $M=0$ выражение для мультипольного момента перехода (25.2.4) принимает вид

$$Q_{L0}^3 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\mathbf{r}) r^L P_L(\cos\vartheta) d^3x,$$

где P_L — полином Лежандра. Если $L=1, 2$, то

$$Q_{10}^3 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\mathbf{r}) z d^3x,$$

$$Q_{20}^3 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{1}{2} \rho(\mathbf{r}) (3z^2 - r^2) d^3x$$

($z = r \cos\vartheta$). Эти формулы совпадают с обычными определениями дипольного и квадрупольного моментов (напомним, что $\rho/\sqrt{4\pi}$ — плотность заряда в гауссовых единицах).

Найдем теперь вероятность излучения ω . Для этого (см. § 18.1) надо умножить $|U|^2$ на $2\pi\rho_f d\omega$, где ρ_f — число состояний фотона с данным моментом в единичном интервале энергии. Согласно (2.2.8)

$$\rho_f = \frac{R}{\pi}.$$

Таким образом,

$$\omega = 2\pi |U|^2 \frac{R}{\pi}. \quad (25.2.6)$$

Подставив сюда выражение (25.2.4) для U , найдем вероятность излучения в единицу времени фотона с моментом L , проекцией момента M и четностью $(-1)^L$:

$$\omega = \frac{2(L+1)(2L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \omega^{2L+1} |Q_{LM}^0|^2. \quad (25.2.7)$$

В частности, при $L=1$ мы получим отсюда формулу для вероятности дипольного излучения

$$\omega_{1M} = \frac{4}{3} \omega^3 |Q_{1M}^0|^2,$$

а при $L=2$ для вероятности квадрупольного излучения

$$\omega_{2M} = \frac{1}{15} \omega^5 |Q_{2M}^0|^2.$$

25.3. Излучение магнитного мультиполя. Определим теперь вероятность излучения фотона в состоянии магнитного типа. Потенциалы определяются в этом случае формулой (3.8.6). Если использовать приближенное выражение (25.2.1) для $g_L(\omega r)$ и выражение (3.5.8) для шарового вектора, то потенциал $A(\mathbf{r})$ примет вид

$$A(\mathbf{r}) = \frac{i^{L+1}}{\sqrt{R}} \frac{\omega^{L+1/2} r^L [\nabla Y(n) \mathbf{r}]}{\sqrt{L(L+1)} (2L+1)!!}. \quad (25.3.1)$$

Подставив это выражение в (25.1.4), получим для амплитуды излучения

$$U = \frac{(-i)^{L+1}}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{L+1}{L}} \frac{\sqrt{2L+1}}{(2L+1)!!} Q_{LM}^M, \quad (25.3.2)$$

где

$$Q_{LM}^M = \frac{1}{(L+1)\sqrt{2L+1}} \int [\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r})] r^L \nabla Y_{LM}^*(n) d^3x. \quad (25.3.3)$$

Величину Q^M мы будем называть *магнитным мультипольным моментом* перехода.

Заметим, что в силу определения (25.3.3) амплитуда (25.3.2) имеет такую же форму, как и амплитуда (25.2.5), отличаясь заменой $Q_{LM}^0 \rightarrow -iQ_{LM}^M$.

При $L=1$, $M=0$ момент перехода (магнитный дипольный) имеет вид

$$Q_{10}^0 = \int \mu_z(\mathbf{r}) d^3x,$$

где величина

$$\mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{r} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{\sqrt{4\pi}} \right]$$

представляет собой плотность «магнитного момента перехода».

Вероятность излучения фотона магнитного типа (т. е. фотона с моментом L и четностью $(-1)^{L+1}$) будет выражаться аналогично (25.2.7)

$$\omega = \frac{2(L+1)(2L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \omega^{2L+1} |Q_{LM}^M|^2. \quad (25.3.4)$$

Для электрона, движущегося в атоме, условие $\lambda \gg a$ эквивалентно условию $v \ll 1$, так как $\omega a \sim v$. Поэтому при вычислении матричных

элементов мультипольных моментов можно пользоваться волновыми функциями нерелятивистского приближения. Это позволяет получить простое выражение для магнитного мультипольного момента. Действительно, записав плотность тока перехода в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = e(\varphi_2^*(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \chi_1(\mathbf{r}) + \chi_2^*(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \varphi_1(\mathbf{r})),$$

где φ и χ — спиноры, образующие волновую функцию ψ ,

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \chi = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) \varphi,$$

получим

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{-ie}{2m} (\varphi_2^*(\mathbf{r}) \nabla \varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_1(\mathbf{r}) \nabla \varphi_2^*(\mathbf{r})) + \text{rot}(\varphi_2^*(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \varphi_1(\mathbf{r})).$$

Подставляя далее это выражение в (25.3.3) и интегрируя по частям, найдем

$$Q_{LM}^M = \int \varphi_2^*(\mathbf{r}) \mathfrak{M} \varphi_1(\mathbf{r}) d^3x,$$

где

$$\mathfrak{M} = \frac{e}{m \sqrt{2L+1}} \nabla (r^L Y_{LM}^*(\mathbf{n})) \left(\frac{\mathbf{L}}{L+1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \quad (25.3.5)$$

и \mathbf{L} — оператор орбитального момента).

Таким образом, магнитный мультипольный момент в нерелятивистском приближении состоит из двух слагаемых: орбитального и спинового. Если $L = 1$, $M = 0$, то

$$\mathfrak{M} = \frac{e}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{2m} (\mathbf{L}_z + \sigma_z).$$

25.4. Излучение ядер. Правила отбора. Полученные формулы для амплитуд и вероятностей излучения пригодны для описания излучения произвольной системой, а не только электроном, если только выполняется условие $a \ll \lambda$. Действительно, общие определения мультипольных моментов (25.2.4), (25.3.5) содержат лишь токи перехода, т. е. матричные элементы оператора 4-вектора плотности тока:

$$j_\mu(\mathbf{r}) = \langle 2 | j_\mu(\mathbf{r}) | 1 \rangle,$$

состояниями же 1 и 2 могут быть не только одноэлектронные состояния, но и состояния многоэлектронных систем, а также адронных систем: ядер и элементарных частиц.

Отметим тот факт, что аргумент \mathbf{r} тока перехода является аргументом потенциала излучаемого фотона, независимо от числа степеней свободы излучающей системы. Лишь в одночастичном случае он совпадает с радиусом-вектором электрона.

В общем случае, конечно, невозможно реально вычислить матричные элементы мультипольных моментов, но определяющие их формулы позволяют сделать грубую оценку:

$$Q_{LM}^0 \sim ea^L, \quad Q_{LM}^M \sim eva^L, \quad (25.4.1)$$

где a — размеры системы, а v — скорость излучающих частиц. Для атомных систем $\omega a \sim v$, и поэтому вероятность ML -перехода имеет тот же порядок величины, что и вероятность EL' -перехода при $L' = L + 1$.

Для ядерных систем ν не находится в определенной связи с ωa . В случае элементарных частиц $\nu \sim 1$.

Для того чтобы матричный элемент соответствующего мультипольного момента был отличен от нуля, необходимо выполнение некоторых условий, вытекающих из законов сохранения момента и четности. Эти условия называются *правилами отбора* и сводятся к следующему. Если j_1 и j_2 — моменты количества движения излучающей системы и m_1 и m_2 — проекции моментов в начальном и конечном состояниях, то должны выполняться соотношения

$$m_1 - m_2 = M, \\ |j_1 - j_2| \leq L \leq |j_1 + j_2|, \quad (25.4.2)$$

где L — момент количества движения фотона и M — его проекция.

Кроме того, должно выполняться условие

$$P = P_1 \cdot P_2, \quad (25.4.3)$$

где P_1 и P_2 — четности начального и конечного состояний электрона и P — четность состояния фотона:

$$P = (-1)^{L+\lambda+1}$$

($\lambda = 0$ соответствует состояниям магнитного и $\lambda = 1$ — состояниям электрического типа).

Если соотношения (25.4.2) и (25.4.3) не выполняются, то матричный элемент соответствующего мультипольного момента обращается в нуль.

Легко видеть, что при заданных j_1 и j_2 с наибольшей вероятностью излучается фотон с моментом $L = |j_1 - j_2|$, если только это совместимо с правилом отбора для четности (25.4.3). Действительно, так как матричные элементы Q_{LM} содержат под знаком интеграла $(\omega r)^L$, причем $\omega r \ll 1$, то наибольшее значение Q_{LM} будет соответствовать наименьшему возможному значению L , равному $|j_1 - j_2|$.

Вероятность излучения ω_{2L+1} содержит, согласно (25.2.7) и (25.3.4), множитель $(\omega a)^{2L+1}$. Поэтому, если разность моментов начального и конечного состояний $|j_1 - j_2|$ велика, то вероятность излучения может оказаться очень малой, а продолжительность пребывания излучающей системы в возбужденном состоянии — большой. Такие долгоживущие возбужденные состояния называются *метастабильными*.

Оценки мультипольных моментов ядер, согласно (25.4.1), приводят к правильному порядку величины времени жизни метастабильных состояний ядер, которое при $L = 3 - 5$ может быть порядка нескольких минут, часов и более.

25.5. Токи перехода в импульсном представлении. Амплитуды мультипольного излучения можно представить в несколько иной форме, которая будет полезна в дальнейшем. Обратимся для этого к общему выражению (25.1.1) для матричного элемента $\mathbf{S}^{(1)}$, отвечающему излучению фотона с определенными импульсом и поляризацией. Подставляя в (25.1.1)

$$\langle f | A_\mu(x) | i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu^* e^{-ikx},$$

$$\langle f | j_\mu(x) | i \rangle = j_\mu(k) e^{i(p_1 - p_2)x},$$

получим

$$\langle f | \mathbf{S}^{(1)} | i \rangle = (2\pi)^4 i \delta(p_1 - p_2 - k) U,$$

где

$$U = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} j_{\mu}(k) e_{\mu}^*, \quad (25.5.1)$$

p_1 и p_2 — 4-импульсы начального и конечного состояний излучающей системы (атома, ядра, адрона) и $j_{\mu}(k)$ — ток перехода системы в импульсном представлении.

Задача об излучении длинноволновых фотонов, рассматривавшаяся в § 25.2.3, сводится к исследованию поведения тока перехода системы $j_{\mu}(k)$ при малых k_{α} . Это может быть просто сделано, если считать, что точка $k_{\alpha} = 0$ не является особенной точкой для функции $j_{\mu}(k)$, т. е. предполагать, что допустимо разложение $j_{\mu}(k)$ в ряд по степеням k_{α} . Мы будем также считать, имея в виду дальнейшие применения, все компоненты k_{α} независимыми, в частности не связанными соотношением $k^2 = 0$, т. е. рассматривать ток, относящийся к излучению не только реального, но и произвольного виртуального фотона.

При разложении тока $j_{\mu}(k)$ в ряд по степеням k_{α} надо учесть уравнение непрерывности, которое в импульсном представлении имеет вид

$$j_{\alpha}(k) k_{\alpha} = 0,$$

или

$$\mathbf{j}(k) \mathbf{k} = \omega \rho^*(k). \quad (25.5.2)$$

Если величины $\rho(k)$ и $\mathbf{j}(k)$ при $k \rightarrow 0$ конечны (причем \mathbf{k} и ω могут стремиться к нулю независимо), то соотношение (25.5.2) может удовлетворяться как при $\rho(k) = 0$, так и при $\rho(k) \neq 0$. Если $\rho(k) = 0$, то трехмерный вектор тока $\mathbf{j}(k)$ поперечен, $\mathbf{k}\mathbf{j}(k) = 0$, и может быть, следовательно, представлен в виде

$$\mathbf{j}(k) = [\mathbf{k}\mathbf{a}(k)], \quad \rho(k) = 0, \quad (25.5.3)$$

где $\mathbf{a}(k)$ — некоторый аксиальный вектор. Мы будем называть такой ток *током магнитного типа (или соленоидальным)*.

Если $\rho(k) \neq 0$, то конечность $\rho(k)$ при $\omega = 0$ требует, чтобы вектор тока $\mathbf{j}(k)$ обращался в нуль при $\omega = 0$. В этом случае величины $\mathbf{j}(k)$ и $\rho(k)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(k) &= \omega \mathbf{v}(k), \\ \rho(k) &= \mathbf{k}\mathbf{v}(k), \end{aligned} \quad (25.5.4)$$

где $\mathbf{v}(k)$ — некоторый полярный вектор. Такой ток мы будем называть *током электрического типа*.

Найдем теперь первый член разложения $j_{\mu}(k)$ по степеням k_{α} . Ток перехода должен быть, очевидно, линейным относительно волновых функций или, как мы будем говорить, амплитуд как начального, так и конечного состояний излучающей системы. Так как мы рассматриваем предельный случай малых k_{α} , то в системе покоя начальной частицы ($\mathbf{p}_1 = 0$) импульс конечной частицы $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{k}$ будет также мал. Поэтому можно пользоваться нерелятивистскими амплитудами. Из их билинейных комбинаций можно образовать трехмерные неприводимые тензоры, ранг которых L заключен в пределах $|s_1 - s_2|$ и $s_1 + s_2$, где s_1, s_2 — моменты (спины) начального и конечного состояний, $L = |s_1 - s_2|, |s_1 - s_2| + 1, \dots, s_1 + s_2$.

Таким образом, задача сводится к построению трехмерного вектора с помощью этих тензоров. Компоненты (сферические) соответствующих

неприводимых тензоров и произведений компонент вектора \mathbf{k} мы будем обозначать через q_{LM} ($-L \leq M \leq L$). Мы получим вектор, содержащий минимальную степень k_α , если возьмем тензор наименьшего ранга (с $L = |s_1 - s_2|$) и «свернем» его $L - 1$ раз с вектором \mathbf{k} , т. е. с тензором $(L - 1)$ -го ранга, построенным из компонент вектора \mathbf{k} . Последний имеет вид $\kappa^{L-1} Y_{L-1, M}(\mathbf{v})$, где $Y_{lm}(\mathbf{v})$ — шаровая функция, $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{\kappa}$, $\kappa = |\mathbf{k}|$.

Итак, мы видим, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{v} должны иметь следующую структуру:

$$\mathbf{a}, \mathbf{v} \sim f(k) q_{LM} \kappa^{L-1} Y_{L, L-1, M}(\mathbf{v}), \quad (25.5.5)$$

где $Y_{LM}(\mathbf{v})$ — шаровой вектор, определяемый формулой (3.3.3) и $f(k)$ — некоторая скалярная функция от k_α , которую мы можем, в соответствии с характером разложения, считать константой, включенной в величину q_{LM} . При этом вектор будет аксиальным или полярным в зависимости от относительной четности начального и конечного состояний и от того, является ли L четным или нечетным числом.

Из (25.5.4) и (25.5.5) следует, что ток электрического типа можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^0(k) &= 4\pi \sqrt{\frac{1}{L} \frac{\omega \kappa^{L-1}}{(2L-1)!!}} Q_{LM}^0 Y_{L, L-1, M}(\mathbf{v}), \\ \rho^0(k) &= 4\pi \sqrt{\frac{1}{2L+1} \frac{\kappa^L}{(2L-1)!!}} Q_{LM}^0 Y_{LM}(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (25.5.6)$$

а из (25.5.3) и (25.5.5) следует, что ток магнитного типа можно представить в виде

$$\mathbf{j}^M(k) = 4\pi \sqrt{\frac{1}{L} \frac{(L+1)}{(2L+1)} \frac{\kappa^L Q_{LM}^M}{(2L-1)!!}} Y_{LLM}(\mathbf{v}), \quad \rho^M(k) = 0, \quad (25.5.7)$$

где величины Q_{LM}^0 и Q_{LM}^M , как легко убедиться, совпадают (с точностью до несущественного фазового множителя) с определенными ранее мультипольными моментами перехода. Для этого нужно, исходя из (25.5.1) и (25.5.6) и (25.5.7), вычислить вероятность излучения

$$w = 2\pi \int \sum |U|^2 \frac{\omega^2 d\Omega}{(2\pi)^3}$$

(суммирование проводится по поляризациям фотона, интегрирование — по направлениям \mathbf{k}) и сравнить полученное выражение с формулами (25.2.7), (25.3.4).

В (25.5.5) подразумевается, что $L \neq 0$. Случай $L = 0$ означает, что тензор q_{LM} сводится к скаляру Q_0 . В этом случае возможна только одна структура выражения для тока, удовлетворяющая уравнению непрерывности и условию конечности при $k_\alpha = 0$:

$$\mathbf{j}(k) = Q_0 \omega \mathbf{k}, \quad \rho(k) = Q_0 k^2. \quad (25.5.8)$$

Этот ток является продольным, и поэтому амплитуда излучения (25.5.1) обращается при $L = 0$ в нуль (это отвечает отсутствию состояния фотона с моментом $L = 0$). Однако такой ток может иметь значение для процессов с участием виртуальных фотонов. Если ток имеет структуру (25.5.8), то говорят о монополярном $E0$ -переходе; величина Q_0 называется *монополярным моментом*.

Из (25.5.8) следует, что момент Q_0 должен быть истинным скаляром (т. е. не псевдоскаляром). Это значит, что начальное и конечное состояния должны иметь одинаковую четность. Если $s_1 = s_2 = 0$, то только монополяр-

ный ток может связывать эти состояния. Если же $s_1 = s_2 \neq 0$ и $P_1 = P_2$, то переходами, приводящими к излучению, будут $M1$ - или $E2$ -переходы. Монопольный ток при этом того же порядка ($\sim k^2$), что и электрический квадрупольный ток.

25.6. Угловое распределение и поляризация излучения. Состояние системы (например, ядра) с данными значениями энергии ϵ_1 и момента j_1 является вырожденным относительно квантового числа проекции момента m_1 :

$$\psi_1 = \sum_{m_1} c^{m_1} \psi_{j_1 m_1}.$$

Поэтому в общем случае состояние ядра при данном j_1 описывается поляризационной матрицей плотности

$$\langle m_1 | \rho_1 | m_1' \rangle = \overline{c^{m_1} c^{m_1'*}},$$

где черта означает некоторое усреднение (см. § 2.4).

Удобно ввести понятие *поляризационных моментов ядра*. Поляризационным моментом l -го порядка называется тензор $\mathcal{F}_m^{(l)}$, определяемый формулой

$$\mathcal{F}_m^{(l)} = \langle m_1 | \rho_1 | m_1' \rangle C_{j_1 m_1' l m}^{j_1, m_1}, \quad (25.6.1)$$

где m — индекс сферических компонент тензора, $m = -l, -l+1, \dots, l$, $C_{j_1 m_1' l m}^{j_1, m_1}$ — коэффициенты векторного сложения (см. § 3.4; по повторяющимся индексам m здесь и ниже подразумевается суммирование). В частности,

$$\mathcal{F}^{(0)} = \text{Sp } \rho_1 = 1;$$

поляризационный момент $\mathcal{F}^{(1)}$ пропорционален среднему значению оператора момента \bar{J}

$$\mathcal{F}_\alpha^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{j_1(j_1+1)}} \bar{J}_\alpha,$$

а поляризационный момент $\mathcal{F}^{(2)}$ пропорционален среднему тензору квадрупольного момента. В декартовых компонентах он имеет вид

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{3\bar{J}_\alpha \bar{J}_\beta - j_1(j_1+1) \delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{j_1(j_1+1)(2j_1-1)(2j_1+3)}}$$

и т. д. ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$ — индексы декартовых компонент).

Если матрица плотности ρ_1 диагональна:

$$\langle m_1 | \rho_1 | m_1' \rangle = \rho_1(m_1) \delta_{m_1 m_1'},$$

то поляризационные моменты имеют только одну отличную от нуля составляющую $\mathcal{F}_0^{(l)}$, которую мы обозначим через \mathcal{F}_l ,

$$\mathcal{F}_l = \sum_{m_1} \rho_1(m_1) C_{j_1 m_1 l 0}^{j_1, m_1}.$$

В частности,

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\bar{m}_1}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}, \quad \mathcal{F}_2 = \frac{3\bar{m}_1^2 - j_1(j_1+1)}{\sqrt{j_1(j_1+1)(2j_1-1)(2j_1+3)}},$$

где

$$\overline{f(m_1)} = \sum_{m_1} \rho(m_1) f(m_1).$$

Матрицу плотности $\langle m_1 | \rho_1 | m'_1 \rangle$ можно, очевидно, выразить через поляризационные моменты:

$$\langle m_1 | \rho_1 | m'_1 \rangle = \sum_{l=0}^{2j_1} C_{j_1 m_1 m'_1}^{j_1 m_1} \frac{2l+1}{2j_1+1} \mathcal{F}_m^{(l)}. \quad (25.6.2)$$

Рассмотрим излучение ядра, начальное состояние которого задано матрицей плотности ρ_1 . Обозначим через $\langle j_2 m_2 LM | \mathbf{S} | j_1 m_1 \rangle$ элемент матрицы рассеяния, соответствующий переходу ядра из состояния $j_1 m_1$ в состояние j_2, m_2 с излучением фотона, момент которого определяется квантовыми числами L, M . Мы будем считать матричный элемент $\langle j_2 m_2 LM | \mathbf{S} | j_1 m_1 \rangle$ нормированным так, чтобы вероятность перехода $j_1 m_1 \rightarrow j_2 m_2$ равнялась квадрату его модуля, тогда, согласно (25.2.6),

$$\langle j_2 m_2 LM | \mathbf{S} | j_1 m_1 \rangle = \sqrt{2RU}.$$

Для анализа процесса излучения полезно ввести матрицу

$$\mathbf{w} = \mathbf{S} \rho_1 \mathbf{S}^+,$$

т. е.

$$\langle m_2 M | \mathbf{w} | m'_2 M' \rangle = \sum_{m_1 m'_1} \langle j_2 m_2 LM | \mathbf{S} | j_1 m_1 \rangle \langle m_1 | \rho_1 | m'_1 \rangle \langle j_2 m'_2 LM' | \mathbf{S} | j_1 m'_1 \rangle^*. \quad (25.6.3)$$

Зная матрицу \mathbf{w} , можно, во-первых, определить вероятность перехода, или среднее время жизни, возбужденного состояния τ :

$$\frac{1}{\tau} = \text{Sp } \mathbf{w},$$

и, во-вторых, можно найти матрицу плотности конечного состояния:

$$\rho_2 = \tau \mathbf{w}.$$

Легко видеть, что матричный элемент $\langle j_2 m_2 LM | \mathbf{S} | j_1 m_1 \rangle$ имеет следующую структуру:

$$\langle j_2 m_2 LM | \mathbf{S} | j_1 m_1 \rangle = Q C_{j_2 m_2 LM}^{j_1 m_1}, \quad (25.6.4)$$

где Q — величина, не зависящая от m_1, m_2, M .

Подставляя это выражение в (25.6.3), получим

$$\langle m'_2 M' | \mathbf{w} | m_2 M \rangle = |Q|^2 \langle m_1 | \rho_1 | m'_1 \rangle C_{j_2 m_2 LM}^{j_1 m_1} C_{j_2 m'_2 LM}^{j_1 m'_1}, \quad (25.6.5)$$

откуда

$$\tau^{-1} = |Q|^2.$$

Таким образом, время жизни возбужденного состояния не зависит от его поляризации. Сравнивая это выражение с (25.2.7), (25.3.4), мы видим, что

$$\sum_M \omega_{LM} = |Q|^2.$$

Эта величина не зависит от m_1 .

Формула (25.6.5) определяет матрицу плотности в представлении, в котором состояние фотона характеризуется определенными значениями момента и четности (заметим, что ρ_2 от четности фотона не зависит). Удобнее, однако, перейти к представлению, в котором состояние фотона

характеризуется определенным импульсом \mathbf{k} и определенной поляризацией α . Используя разложение сферической волны на плоские волны (§ 3.8), получим

$$\langle m'_2 \mathbf{v}' \alpha' | \rho_2 | m_2 \mathbf{v} \alpha \rangle = \langle m'_2 M' | \rho_2 | m_2 M \rangle (Y_{LM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}))_\alpha (Y_{LM'}^{(\lambda)*}(\mathbf{v}'))_{\alpha'},$$

или на основании (25.6.5)

$$\langle m'_2 \mathbf{v}' \alpha' | \rho_2 | m_2 \mathbf{v} \alpha \rangle = \langle m_1 | \rho_1 | m'_1 \rangle C_{j_2 m_2 L M}^{j_1 m_1} C_{j_2 m_2 L M'}^{j_1 m_1'} (Y_{LM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}))_\alpha (Y_{LM'}^{(\lambda)*}(\mathbf{v}'))_{\alpha'}, \quad (25.6.6)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{k}/\omega$. Эта формула дает наиболее полное описание состояния системы в конечном состоянии (ядра и излучения). Пользуясь этой формулой, можно получить ответы на более частные вопросы об угловых и поляризационных характеристиках системы.

Найдем прежде всего угловое распределение излучения $W(\mathbf{v})$,

$$W(\mathbf{v}) = \sum_{m_2 \alpha} \langle m_2 \mathbf{v} \alpha | \rho_2 | m_2 \mathbf{v} \alpha \rangle = \langle m_1 | \rho_1 | m'_1 \rangle C_{j_2 m_2 L M}^{j_1 m_1} C_{j_2 m_2 L M}^{j_1 m_1'} Y_{LM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}) Y_{LM}^{(\lambda)*}(\mathbf{v}).$$

Подставив сюда выражение (25.6.2) для $\langle m_1 | \rho_1 | m'_1 \rangle$ и выполнив суммирование по m_1 , m'_1 и m_2 согласно формулам § 34, получим

$$W(\mathbf{v}) = \sum_l \alpha_l C_{LM'lm}^{LM} \mathcal{F}_m^{(l)} Y_{LM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}) Y_{LM'}^{(\lambda)*}(\mathbf{v}),$$

где $\alpha_l = \frac{(2l+1)\sqrt{2j_1+1}}{\sqrt{2L+1}} W(LL, j_1 j_1; l j_2)$, $W(LL, j_1 j_1; l j_2)$ — коэффициенты

Рака, $W(j_1, j_2 l_2 l_1 j_3 l_3) = (-1)^{j_1+l_1+j_2+l_2} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix}$. Воспользовавшись далее разложением произведения шаровых векторов по шаровым функциям (см. § 3.7), найдем

$$W(\mathbf{v}) = \sum_l \beta_l \mathcal{F}_m^{(l)} Y_{lm}(\mathbf{v}),$$

где

$$\beta_l = \alpha_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} (2L+1) C_{L0l0}^{L0} W(LL, LL; l1).$$

Если матрица ρ_1 диагональна, то $W(\mathbf{v})$ приобретает вид разложения по полиномам Лежандра

$$W(\mathbf{v}) = \sum_l \beta_l \mathcal{F}_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta),$$

где ϑ — угол между импульсом фотона и осью поляризации ядра.

Так как разложение $Y_{LM}^{(\lambda)} Y_{LM'}^{(\lambda)}$ по сферическим функциям Y_{lm} содержит Y_{lm} с четными l , то угловое распределение определяется только поляризационными моментами четного порядка. Угловое распределение инвариантно относительно замены \mathbf{v} на $-\mathbf{v}$, что является следствием закона сохранения четности в квантовой электродинамике. Четное число l должно, как следует из правил векторного сложения, удовлетворять двум условиям:

$$l \leq 2j_1; \quad l \leq 2L.$$

Поэтому, в частности, излучение ядра со спином 0 или 1/2 всегда изотропно. Если $j_1 = 1$, 3/2 или $L = 1$, то

$$W(\mathbf{v}) = 1 + \beta_2 \mathcal{F}_2^{(2)} Y_{2m}(\mathbf{v}).$$

Ясно, что излучение будет изотропным, если начальное состояние не поляризовано (в этом случае $\mathcal{F}_m^{(l)} = 0$ при $l \neq 0$).

Рассмотрим теперь поляризацию фотона Элемент поляризационной матрицы плотности фотона $\rho_{\alpha\alpha'}$, испущенного в направлении \mathbf{v} , равен

$$\rho_{\alpha\alpha'} = \frac{1}{W(\mathbf{v})} \sum_{m_2} \langle m_2 \mathbf{v} \alpha | \rho_2 | m_2 \mathbf{v} \alpha' \rangle,$$

откуда, согласно (25.6.6),

$$\rho_{\alpha\alpha'} = \frac{1}{W(\mathbf{v})} \sum_l \alpha_l C_{LM'lm}^{LM} \mathcal{F}_m^{(l)} (Y_{LM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}))_{\alpha} (Y_{LM'}^{(\lambda)*}(\mathbf{v}))_{\alpha'},$$

где α_l — те же коэффициенты, которые входят в $W(\mathbf{v})$

Найдем циркулярную поляризацию фотона ξ_2 (см. § 2 4). Будем для этого считать, что α и α' соответствуют декартовым осям в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{v} . Используя формулу (2 4.4), получим

$$\xi_2 = \frac{l}{W(\mathbf{v})} \sum_l \alpha_l C_{LM'lm}^{LM} \mathcal{F}_m^{(l)} [Y_{LM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}) Y_{LM'}^{(\lambda)*}(\mathbf{v})] \mathbf{v}, \quad (25.6.7)$$

где l — нечетные числа, удовлетворяющие неравенствам $l \leq 2L + 1$, $l \leq 2j_1$. Учитывая, что

$$[Y_{LM}^{(\lambda)}(\mathbf{v}) Y_{LM'}^{(\lambda)*}(\mathbf{v})] \mathbf{v} = i Y_{LM}^{(1-\lambda)}(\mathbf{v}) Y_{LM'}^{(\lambda)*}(\mathbf{v}),$$

и используя разложения § 3.7, можно представить (25.6.7) в виде

$$\xi_2 = \frac{1}{W(\mathbf{v})} \sum_l \gamma_l \mathcal{F}_m^{(l)} Y_{lm}(\mathbf{v}), \quad (25.6.8)$$

где

$$\gamma_l = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(2L+1)^{3/2}}{2l+1} \{ \sqrt{L+1} C_{L-1, 0l0}^{L0} W(LL, L-1, L; ll) + \\ + \sqrt{L} C_{L-1, 0l0}^{L0} W(LL, L+1, L; ll) \}.$$

Если матрица плотности ρ_2 диагональна, то

$$\xi_2 = \frac{1}{W(\mathbf{v})} \sum_l \gamma_l \mathcal{F}_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta),$$

где l — нечетные числа.

В частности, если отличен от нуля только поляризационный момент первого порядка, то

$$\xi_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{(2j_1+1)^{3/2} (2L+1)^{1/2}}{\sqrt{L(L+1)}} \mathcal{F}_1 W(LL, j_1 j_1; 1^{1/2}) \cos \vartheta.$$

Мы видим, что циркулярная поляризация, в отличие от углового распределения, определяется поляризационными моментами нечетного порядка. Поэтому, измеряя угловое распределение и циркулярную поляризацию излучения, можно полностью определить состояния поляризации излучающего ядра.

Перейдем к рассмотрению поляризации конечного состояния, т. е. состояния ядра после излучения. Она определяется матрицей плотности

$$\langle m'_2 | \rho_2 | m_2 \rangle = \int d\alpha \langle m'_2 \mathbf{v} \alpha | \rho_2 | m_2 \mathbf{v} \alpha \rangle = \sum_M \langle m'_2 M | \rho_2 | m_2 M \rangle,$$

получаемой путем усреднения матрицы плотности $\rho_2 = \tau \mathbf{w}$ по состояниям фотона. Подставляя сюда выражение (25.6.6), получим

$$\langle m_2 | \rho_2 | m_2' \rangle = \langle m_1 | \rho_1 | m_1' \rangle C_{j_2 m_2 L M}^{j_1 m_1} C_{j_2 m_2' L M}^{j_1 m_1'}. \quad (25.6.9)$$

Отсюда и из (25.6.1) следует, что между поляризационными моментами начального $\mathcal{F}_{mI}^{(l)}$ и конечного $\mathcal{F}_{mII}^{(l)}$ состояний имеет место соотношение

$$\mathcal{F}_{mII}^{(l)} = \sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} W(j_1 j_1, j_2 j_2; lL) \mathcal{F}_{mI}^{(l)}. \quad (25.6.10)$$

Если начальное состояние не поляризовано, то и конечное состояние будет, очевидно, неполяризованным. Однако в этом случае имеет место корреляционная поляризация, т. е. поляризация ядра после излучения фотона с заданным направлением импульса. Корреляционная поляризация определяется матрицей плотности

$$\langle m_2 | \rho_2(\mathbf{v}) | m_2' \rangle = \frac{1}{W(\mathbf{v})} \sum_{\alpha} \langle m_2 \mathbf{v} \alpha | \rho_2 | m_2' \mathbf{v} \alpha \rangle.$$

Подставляя сюда выражение (25.6.6) и полагая

$$\langle m_1 | \rho_1 | m_1' \rangle = \frac{1}{2j_1 + 1} \delta_{m_1 m_1'},$$

получим

$$\langle m_2 | \rho_2(\mathbf{v}) | m_2' \rangle = \sum_l a_l C_{j_2 m_2' l m}^{j_2 m_2} Y_{lm}(\mathbf{v}),$$

где

$$a_l = \frac{(2L + 1)^{3/2}}{(2j_2 + 1)^{1/2}} \sqrt{\frac{2l + 1}{4\pi}} W(LL, LL; ll) W(j_2 j_2, j_1 j_1; lL)$$

или

$$\mathcal{F}_{mII}^{(l)} = a_l \frac{2j_2 + 1}{2l + 1} Y_{lm}(\mathbf{v}).$$

Если выбрать направление импульса фотона \mathbf{v} в качестве оси z , то $\mathcal{F}_{mII}^{(l)} = \mathcal{F}_{lII} \delta_{m0}$ и

$$\mathcal{F}_{lII} = a_l \frac{2j_2 + 1}{\sqrt{4\pi}(2l + 1)}.$$

Так как здесь l — четное число, то отличны от нуля только поляризационные моменты четного порядка, причем

$$l \leq 2L, \quad l \leq 2j_2.$$

Если конечное состояние ядра также является возбужденным то может происходить вторичное излучение фотона с моментом L' с переходом ядра из состояния с моментом j_2 в состояние с моментом j_3 . При этом корреляционная поляризация состояния приводит к корреляции направлений последовательно испущенных фотонов [1].

Из формул для \mathcal{F}_{lII} и $W(\mathbf{v})$ вытекает следующая формула для угловой корреляции $W(\theta)$:

$$W(\theta) = \frac{2j_2 + 1}{4} \sum_l a_l \beta_l P_l(\cos \theta),$$

где θ — угол между импульсами фотонов, a_l — коэффициент, входящий в $\langle m_2 | \rho_2(\mathbf{v}) | m_2' \rangle$, β_l — коэффициенты, определяющие $W(\mathbf{v})$, в которых j_1 заменено на j_2 , j_2 на j_3 и L на L' .

Явление угловой корреляции γ -лучей используется как один из экспериментальных методов определения моментов ядер *) Для возможности его наблюдения необходимо, чтобы вероятность перехода из промежуточного состояния j_2 в конечное состояние j_3 была достаточно большой, иначе поляризация промежуточного состояния будет нарушена взаимодействием с электронной оболочкой атома. Очевидно, что это условие сводится к неравенству $\frac{1}{\tau} \gg \delta$, где $\frac{1}{\tau}$ — вероятность перехода $j_2 \rightarrow j_3$, а δ — величина сверхтонкого расщепления атомных уровней.

25.7. Фотоэффект. Матрица рассеяния 1-го порядка (25.1.1) определяет также поглощение фотона. Амплитуда поглощения имеет вид, отличающийся от (25.1.4) только заменой $\mathcal{A}_\mu^*(r)$ на $A_\mu(r)$

$$U = \frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega}} \int j_\mu(r) e^{i\mathbf{k}r} d^3x,$$

где $j_\mu(r) = \langle f | j_\mu(r) | i \rangle$ — ток перехода, e_μ — единичный вектор поляризации фотона и \mathbf{k} , ω — импульс и энергия фотона.

Рассмотрим поглощение фотона атомным электроном в том случае, когда энергия фотона превосходит энергию ионизации атома и электрон переходит в непрерывный спектр. Это явление называется *фотоэффектом*.

Ток перехода в этом случае определяется формулой

$$j_\mu(r) = ie\bar{\psi}_2(r) \gamma_\mu \psi_1(r),$$

где $\psi_1(r)$ и $\psi_2(r)$ — начальная и конечная волновые функции электрона. Записав амплитуду U фотоэффекта в виде (25.1.5):

$$U = \frac{e}{\sqrt{2\omega}} M, \quad M = \int \psi_2^*(r) \alpha e^{i\mathbf{k}r} \psi_1(r) d^3x, \quad (25.7.1)$$

получим следующее выражение для дифференциального эффективного сечения фотоэффекта:

$$d\sigma = \frac{e^2}{(2\pi)^2 \omega} \sum_{\mu_i, \mu_f} |M|^2 \delta(\varepsilon_1 + \omega - \varepsilon_2) d^3p, \quad (25.7.2)$$

где p — импульс вылетающего электрона, ε_1 и ε_2 — энергии электрона в начальном и конечном состояниях и суммирование производится по различным ориентациям спина электрона в начальном и конечном состояниях.

Мы ограничимся здесь вычислением сечения фотоэффекта на K -оболочке атома (формула (25.7.2) написана с учетом двух электронов в K -оболочке). Рассмотрим сначала нерелятивистский случай, когда энергия фотона мало отличается от энергии ионизации атома I [3].

Предполагая, что длина волны фотона λ значительно больше размеров атома a , мы можем заменить в (25.7.1) величину $e^{i\mathbf{k}r}$ единицей. Замечая далее, что в нерелятивистской области матрице α соответствует оператор скорости электрона \mathbf{v} , получим

$$M = e \langle 2 | \mathbf{v} | 1 \rangle = -i\omega e \langle 2 | \mathbf{r} | 1 \rangle, \quad \langle 2 | \mathbf{r} | 1 \rangle = \int \psi_2^*(r) \mathbf{r} \psi_1(r) d^3x. \quad (25.7.3)$$

Таким образом, вопрос сводится к вычислению матричного элемента проекции радиуса-вектора электрона на вектор поляризации фотона

*) Подробный обзор корреляционных явлений содержится в [2].

В качестве волновой функции начального состояния в (25.7.1) входит волновая функция K -электрона. Эта функция имеет вид

$$\psi_1(\mathbf{r}) = Ne^{-\eta r},$$

где

$$\eta = \frac{Z}{a_0}, \quad a_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{me^2} = \frac{1}{m\alpha}, \quad N = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}}.$$

Что касается волновой функции конечного состояния, то в качестве нее следует взять волновую функцию электрона в кулоновском поле ядра, относящуюся к непрерывному спектру. Так как в конечном состоянии возникает электрон, то $\psi_2(\mathbf{r})$ должна при $r \rightarrow \infty$ иметь вид суперпозиции плоской и сходящейся сферической волн (см. § 28.8). Функция с такой асимптотикой имеет вид

$$\psi_2(\mathbf{r}) = e^{\frac{\pi}{2}\xi} \Gamma(1+i\xi) \mathcal{F}(-i\xi, 1, -i(\mathbf{p}\mathbf{r} + \mathbf{p}r)) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}},$$

где $\xi = \frac{Z\alpha}{v}$.

Подстановка функций ψ_1 и ψ_2 в (25.7.3) дает

$$M = i\omega eM,$$

где

$$M = e^{\frac{\pi}{2}\xi} \Gamma(1-i\xi) N \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r} - \eta r} \mathcal{F}(i\xi, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + \mathbf{p}r)) d^3x \equiv e^{\frac{\pi}{2}\xi} \Gamma(1-i\xi) N J.$$

Замечая, что

$$J = \left\{ i \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \eta} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\mathbf{p}\mathbf{r} - \eta r} \mathcal{F}(i\xi, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + \mathbf{p}r)) \frac{d^3x}{r} \right\}_{\mathbf{q}=0},$$

и используя формулу

$$\begin{aligned} \int e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{r} - \eta r} \mathcal{F}(i\xi, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + \mathbf{p}r)) \frac{d^3x}{r} = \\ = 2\pi \left[\frac{1}{2} (\mathbf{q}-\mathbf{p})^2 + \frac{1}{2} \eta^2 \right]^{i\xi-1} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{q}-\mathbf{p})^2 + \frac{1}{2} \eta^2 + \mathbf{p}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) - i\eta\mathbf{p} \right]^{-i\xi}, \end{aligned}$$

получим

$$J = 16\pi i \eta (i\xi - 1) \frac{\mathbf{p}}{(\mathbf{p}^2 + \eta^2)^3} \left(\frac{\eta + i\mathbf{p}}{\eta - i\mathbf{p}} \right)^{i\xi}.$$

Так как при чисто мнимом n

$$\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n = e^{-2n \operatorname{arctg} |n|}, \quad n = -i|n|,$$

то окончательно получим

$$J = 16\pi i \frac{\mathbf{p}}{\rho^5} \frac{\xi (i\xi - 1)}{(\xi^2 + 1)^3} e^{-2\xi \operatorname{arctg} \xi}$$

и

$$M = -16\sqrt{\pi} \omega e^{\frac{\pi}{2}\xi} \Gamma(1-i\xi) \frac{\xi^{5/2} \rho^{3/2} (i\xi - 1)}{(\xi^2 + 1)^3} e^{-2\xi \operatorname{arctg} \xi} \frac{e\mathbf{p}}{\rho^5}. \quad (25.7.4)$$

Подставляя это выражение в (25.7.2), найдем дифференциальное сечение фотоэффекта для неполяризованного фотона:

$$d\sigma = \frac{27\alpha\omega}{\xi^4} \left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2} \right)^5 \frac{e^{-4\xi \operatorname{arctg} \xi}}{1-e^{-2\pi\xi}} \frac{1}{2} \sum (\mathbf{p}\mathbf{e})^2 \delta(\varepsilon_1 + \omega - \varepsilon_2) \frac{d^3p}{p^7},$$

где суммирование производится по поляризациям фотона. Оно может быть выполнено с помощью формулы

$$\sum (pe)^2 = p^2 - \frac{1}{\omega^2} (pk)^2 = p^2 \sin^2 \vartheta,$$

где ϑ — угол между p и k .

Устраняя δ -функцию интегрированием по энергии вылетающего электрона, получим

$$d\sigma = 2^4 \frac{\alpha\omega}{m\xi^4} \left(\frac{\xi^2}{\xi^2+1} \right)^5 \frac{e^{-4\xi \operatorname{arctg} \xi}}{1-e^{-2\pi\xi}} \frac{\sin^2 \vartheta}{I-\omega} d\omega, \quad (25.7.5)$$

где I — энергия ионизации, $d\omega$ — элемент телесного угла, в котором движется электрон.

Для получения сечения фотоэффекта в случае поляризованных фотонов нужно сделать в этой формуле замену

$$\sin^2 \vartheta \rightarrow \cos^2 \theta = \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi,$$

где θ — угол между векторами e и p , φ — угол между плоскостями p, k и k, e , и, кроме того, опустить множитель $\frac{1}{2}$ перед \sum , соответствующий усреднению для неполяризованных фотонов.

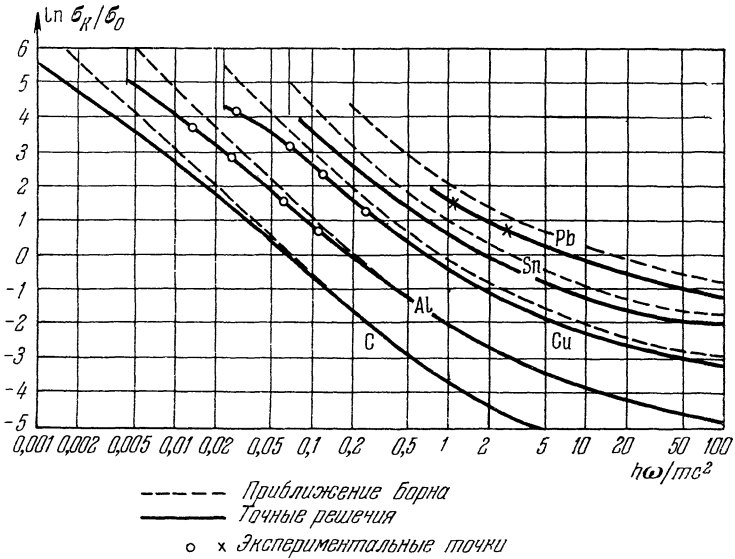


Рис. 25.1.

Таким образом, угловая зависимость фотоэффекта в нерелятивистской области определяется множителем

$$\cos^2 \theta = \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi.$$

Мы видим, что большинство фотоэлектронов вылетает в направлении поляризации падающего фотона.

Интегрируя (25.7.5) по $d\omega$, получим полное сечение фотоэффекта на K -оболочке

$$\sigma_K = \frac{128\pi}{3} \frac{\alpha}{m} \frac{I^3}{\omega^4} \frac{e^{-4\xi \operatorname{arctg} \xi}}{1-e^{-2\pi\xi}}. \quad (25.7.6)$$

В борновском приближении, когда $\xi \ll 1$, эта формула приобретает вид

$$\sigma_K = \frac{64}{3} \frac{\alpha}{mI} \left(\frac{I}{\omega} \right)^{7/2}. \quad (25.7.7)$$

[На рис. 25.1 представлена зависимость $\ln \frac{\sigma_K}{\sigma_0}$ от частоты фотона ($\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2$ — сечение томсоновского рассеяния)].

Аналогично может быть рассмотрен фотоэффект на L -оболочке. Сечение фотоэффекта определяется при этом следующими формулами: для L_I -оболочки (поглощение двумя $2s$ -электронами)

$$\sigma_{L_I} = \frac{2^{10}\pi\alpha}{3m} \frac{I_2^2}{\omega^4} \left(1 + \frac{3I_2}{\omega} \right) \frac{e^{-4 \arctg \xi/2}}{1 - e^{-2\pi\xi}} \quad (25.7.8)$$

и для L_{II} и L_{III} оболочек (поглощения шестью $2p$ -электронами)

$$\sigma_{L_{II}} + \sigma_{L_{III}} = \frac{2^{11}\pi\alpha}{3m} \frac{I_2^3}{\omega^5} \left(3 + 8 \frac{I_2}{\omega} \right) \frac{e^{-4 \arctg \xi/2}}{1 - e^{-2\pi\xi}}, \quad (25.7.9)$$

где I_2 — потенциал ионизации L -электронов.

Рассмотрим теперь фотоэффект в релятивистской области, когда энергия фотона велика по сравнению с энергией K -электрона [4, 3]. В этом случае мы должны в качестве волновых функций электрона пользоваться решениями уравнения Дирака в кулоновском поле ядра. Что касается функции $\bar{\psi}_2(\mathbf{r})$, то в качестве нее мы возьмем волновую функцию, введенную в § 11.1:

$$\bar{\psi}_2(\mathbf{r}) = N_2 \bar{u}(p) e^{-\nu r} \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon} \gamma_4 \mathbf{V} \nabla \right) \mathcal{F} [i\xi, 1, i(\mathbf{p}\mathbf{r} + pr)], \quad (25.7.10)$$

где

$$N_2 = \left(\frac{2\pi\xi}{1 - e^{-2\pi\xi}} \right)^{1/2}, \quad \xi = \frac{\alpha Z}{v}.$$

Из общего выражения для волновых функций, описывающих дискретные состояния электрона в кулоновском поле,

$$\psi_{jlm}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r) \Omega_{jlm}(\mathbf{n}) \\ i f_{\kappa}(r) \Omega_{j'l'm}(\mathbf{n}) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $l' = 2j - l$, $\Omega_{j'l'm} = -(\sigma\mathbf{n}) \Omega_{jlm}$ (см. § 10.2), следует, что волновая функция K -электрона ($j = \frac{1}{2}$, $l = 0$, $\kappa = -1$) имеет вид

$$\psi_K = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r) u \\ -i f_{\kappa}(r) (\sigma\mathbf{n}) u \end{pmatrix},$$

где u — постоянный спинор, удовлетворяющий условию нормировки

$$u^* u = 1.$$

Мы будем рассматривать легкие ядра, для которых $Z\alpha \ll 1$. В этом случае, используя (10.4.2), имеем

$$g_{\kappa}(r) = 2\eta^{3/2} e^{-\eta r}, \quad f_{\kappa}(r) = -\eta^{3/2} \alpha Z e^{-\eta r}; \quad \eta = \frac{Z}{a_0}$$

и

$$\psi_K(\mathbf{r}) = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \frac{\alpha Z}{2} \cos \vartheta \\ i \frac{\alpha Z}{2} \sin \vartheta e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{-\eta r}, \quad N_1 = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}},$$

если спин электрона ориентирован по \mathbf{n} , и

$$\psi_K(\mathbf{r}) = N_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \frac{\alpha Z}{2} \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ -i \frac{\alpha Z}{2} \cos \vartheta \end{pmatrix} e^{-\eta r},$$

если спин ориентирован против \mathbf{n} .

Вводя биспиноры u_0 с компонентами

$$u_0_{\sigma_n = \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_0_{\sigma_n = -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

можно записать волновую функцию K -электрона при $Z\alpha \ll 1$ в виде

$$\psi_K(\mathbf{r}) = N_1 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha Z \gamma_4 \boldsymbol{\gamma} \mathbf{n} \right) e^{-\eta r} u_0, \quad \alpha Z \ll 1. \quad (25.7.11)$$

Подставляя это выражение и выражение (25.7.10) для $\bar{\psi}_2(\mathbf{r})$ в (25.7.1), получим

$$e\mathbf{M} = N_1 N_2^* \bar{u}(p) \{ (e\boldsymbol{\gamma}) J_0 + (e\boldsymbol{\gamma}) \gamma_4 (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{J}_1) + (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{J}_2) \gamma_4 (e\boldsymbol{\gamma}) \} u_0,$$

где

$$\begin{aligned} J_0 &= \int e^{i(k-p)r - \eta r} \mathcal{F} [i\xi, 1, i(\mathbf{p}r + pr)] d^3x, \\ J_1 &= -\frac{1}{2} \alpha Z \int e^{i(k-p)r - \eta r} \frac{r}{r} \mathcal{F} [i\xi, 1, i(\mathbf{p}r + pr)] d^3x, \\ J_2 &= -\frac{1}{2\varepsilon} \int e^{i(k-p)r - \eta r} \nabla \mathcal{F} [i\xi, 1, i(\mathbf{p}r + pr)] d^3x. \end{aligned}$$

Используя далее формулы (18.2.1), найдем

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_1 \mu_2} |e\mathbf{M}|^2 &= \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon} |J_0|^2 + \frac{\varepsilon + m}{\varepsilon} (J_1^2 + J_2^2) - \\ &- \frac{i}{\varepsilon} \{ J_0 (\mathbf{p} \mathbf{J}_1^*) - J_0 (\mathbf{p} \mathbf{J}_2^*) - 2J_0 (e\mathbf{p}) (e\mathbf{J}_1^*) - \text{с. с.} \} + \\ &+ \frac{\varepsilon + m}{\varepsilon} \{ 2(e\mathbf{J}_1) (e\mathbf{J}_2) - \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 + \text{с. с.} \}. \end{aligned}$$

Интегралы J_0 , J_1 , J_2 могут быть вычислены с помощью формулы

$$B \equiv \int e^{i(k-p)r - \eta r} \mathcal{F} [i\xi, 1, i(\mathbf{p}r + pr)] \frac{d^3x}{r} = 4\pi \frac{a^{-i\xi}}{(a+b)^{1-i\xi}}, \quad (25.7.12)$$

где

$$a = \mathbf{k}^2 + (\eta - ip)^2, \quad a + b = (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + \eta^2.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} J_0 &= -\frac{\partial B}{\partial \eta} = \left\{ \frac{i\xi}{a} (2\eta - ip) + 2 \frac{1-i\xi}{a+b} \right\} B, \\ J_1 &= \frac{1}{2} i\alpha Z \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} B = -i\alpha Z \left\{ \mathbf{k} \frac{i\xi}{a} + (\mathbf{k} - \mathbf{p}) \frac{1-i\xi}{a+b} \right\} B, \\ J_2 &= i \frac{\alpha Z}{2} \frac{m}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right\} B = -\frac{\alpha Z}{a} \frac{m}{\varepsilon} \xi \left[\frac{i\mathbf{p}}{\eta} (\mathbf{k} - \mathbf{p}) - \mathbf{p} \right] B. \end{aligned}$$

Эти формулы сильно упрощаются, если $v \sim 1$ и $Z\alpha \ll 1$:

$$\begin{aligned} J_0 &= -\frac{\alpha Z v}{m(1-\sqrt{1-v^2})} \frac{v - \cos \vartheta}{1-v \cos \vartheta} B, \\ J_1 &= -\frac{i\alpha Z}{2m^2} \frac{1-v^2}{1-\sqrt{1-v^2}} \frac{\mathbf{k} - \mathbf{p}}{1-v \cos \vartheta} B, \\ J_2 &= -\frac{i\alpha Z}{2m^2} \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-\sqrt{1-v^2}} (\mathbf{k} - \mathbf{p}) B, \\ |B|^2 &= \frac{4\pi^2}{m^4} \left(\frac{1-v^2}{(1-\sqrt{1-v^2})(1-v \cos \vartheta)} \right)^2 \end{aligned} \quad (25.7.13)$$

(ϑ — угол между \mathbf{p} и \mathbf{k}).

Используя эти формулы, получим окончательно следующее выражение для дифференциального сечения фотоэффекта, справедливое при $\alpha Z \ll 1$, $v \sim 1$:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{2\alpha^6 Z^5}{m^2} A \frac{\sin^2 \vartheta}{(1-v \cos \vartheta)^4} \left\{ \frac{(1-\sqrt{1-v^2})^2}{(1-v^2)^{3/2}} (1-v \cos \vartheta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{1-v^2} (1-\sqrt{1-v^2}) (1-v \cos \vartheta) \cos^2 \vartheta + 4 \cos^2 \vartheta \right\} d\vartheta, \end{aligned} \quad (25.7.14)$$

где

$$A = \frac{v^3 (1-v^2)^3}{(1-\sqrt{1-v^2})^5}, \quad \sqrt{1-v^2} = \frac{m}{\omega + m}$$

(v — скорость вылетающих электронов, ϑ — угол между плоскостями (\mathbf{p}, \mathbf{k}) и (\mathbf{k}, \mathbf{e})).

Интегральное сечение фотоэффекта на K -оболочке равно при $\omega \gg I$, $\alpha Z \ll 1$

$$\sigma = 4\pi\alpha^4 Z^5 r_0^2 \left(\frac{m}{\omega} \right)^5 (\gamma^2 - 1)^{3/2} \left\{ \frac{4}{3} + \frac{\gamma(\gamma-2)}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2-1}} \ln \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2-1}} \right) \right\}, \quad (25.7.15)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\omega + m}{m}, \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi m}.$$

В крайне релятивистском случае ($\omega \gg m$) эта формула принимает вид

$$\sigma = 4\pi r_0^2 \alpha^4 Z^5 \frac{m}{\omega}, \quad \omega \gg m. \quad (25.7.16)$$

Для больших Z , когда эти формулы неприменимы, производилось численное вычисление сечения фотоэффекта. В приводимой ниже таблице

ω/m	0,69	1	2,2	5
Al	22,3	8,1	1,24	0,35
Fe	17,8	6,5	1,05	0,30
Sn	12,3	4,5	0,79	0,24
Pb	7,9	3,2	0,60	0,19

даны полученные таким образом значения сечения фотоэффекта σ при некоторых Z и ω .

§ 26. Рассеяние фотона электроном

26.1. Матричный элемент рассеяния. В § 25 мы показали, что свободный электрон не может излучать и поглощать фотон, т. е. что для свободного электрона невозможны процессы первого порядка. Поэтому простейшие процессы взаимодействия фотонов и свободных электронов описываются матрицей рассеяния второго порядка, которая, согласно (16.5.1), имеет следующий вид:

$$\mathbf{S}^{(2)} = \frac{e^2}{2} \int T \{N[\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1)] N[\bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2)]\} d^4x_1 d^4x_2.$$

Так как матрица $\mathbf{S}^{(2)}$ содержит оператор потенциала $A_\mu(x)$ билинейно, то ее элементы описывают такие процессы, в которых общее число фотонных состояний равно либо двум, либо нулю. Последний случай относится к взаимодействию электронов без участия фотонов и будет рассмотрен в § 31.

Матричные элементы $\mathbf{S}^{(2)}$ с участием двух фотонных состояний можно разделить на три типа соответственно общему числу электронов в начальном и конечном состояниях. Это число может равняться четырем, двум или нулю. Матричные элементы с четырьмя электронными состояниями представляют собой просто произведения матричных элементов первого порядка $\mathbf{S}^{(1)}$ (см. рис. 17.2, 1). Матричный элемент, не содержащий электронных состояний, определяет поляризационный оператор (см. рис. 17.2, 4), и будет исследован в 36.3.

Наибольший физический интерес представляют матричные элементы с двумя электронными состояниями. Процессы, в которых участвуют два фотонных и два электронных состояния, описываются частью матрицы рассеяния второго порядка, имеющий следующий вид:

$$\mathbf{S}^{(2)} = e^2 N \int \bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) S_c(x_2 - x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1) d^4x_1 d^4x_2, \quad (26.1.1)$$

где функция $S_c(x)$ определяется формулами (14.4.12), (14.4.13).

Простейшим процессом, описываемым матрицей (26.1.1), является рассеяние фотона свободным электроном, к подробному рассмотрению которого мы и перейдем.

Обозначим через $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ волновые функции начального и конечного состояний электрона и через $\mathcal{A}_1(x)$ и $\mathcal{A}_2(x)$ потенциалы начального и конечного фотонных состояний. Мы получим элемент матрицы $\mathbf{S}^{(2)}$, соответствующий рассеянию фотона электроном, если заменим в (26.1.1)

операторы $\bar{\psi}(x_2)$ и $\psi(x_1)$ функциями $\bar{\psi}_2(x_2)$ и $\psi_1(x_1)$, а оператор $\hat{A}(x_2)\hat{A}(x_1)$ — функцией $\hat{\mathcal{A}}_2^*(x_2)\hat{\mathcal{A}}_1(x_1) + \hat{\mathcal{A}}_1(x_2)\hat{\mathcal{A}}_2^*(x_1)$:

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = e^2 \int \bar{\psi}_2(x_2) \{ \hat{\mathcal{A}}_2^*(x_2) S_c(x_2 - x_1) \hat{\mathcal{A}}_1(x_1) + \hat{\mathcal{A}}_1(x_2) S_c(x_2 - x_1) \hat{\mathcal{A}}_2^*(x_1) \} \psi_1(x_1) d^4x_1 d^4x_2. \quad (26.1.2)$$

Функции $\psi(x)$ и $\mathcal{A}_\mu(x)$ мы выберем в виде плоских волн, нормированных на единичный объем (см. (9.2.1), (2.3.5)):

$$\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_a e^{i p x}, \quad \mathcal{A}_b(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_b e^{i k x} \quad (a, b = 1, 2),$$

где p и k — 4-импульсы электрона и фотона, ε и ω — их энергии, $u = u(p)$ и e_μ — биспинорная и 4-векторная амплитуды, удовлетворяющие условиям нормировки

$$\bar{u}u = 2m, \quad e^*e = 1.$$

Подставив эти выражения и выражение (14.4.13) для $S_c(x)$ в (26.1.2), получим следующий результат, находящийся в соответствии с общими правилами § 17.5:

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{ie^2}{4 \sqrt{\omega_1 \omega_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}} (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2), \quad (26.1.3)$$

$$\bar{u}_2 \left\{ \hat{e}_2^* \frac{i\hat{f}_1 - m}{f_1^2 + m^2} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 \frac{i\hat{f}_2 - m}{f_2^2 + m^2} \hat{e}_2^* \right\} u_1,$$

где $f_1 = p_1 + k_1 = p_2 + k_2$, $f_2 = p_1 - k_2 = p_2 - k_1$.

На рис. 26.1 изображены две диаграммы, соответствующие двум слагаемым в матричном элементе $\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle$.

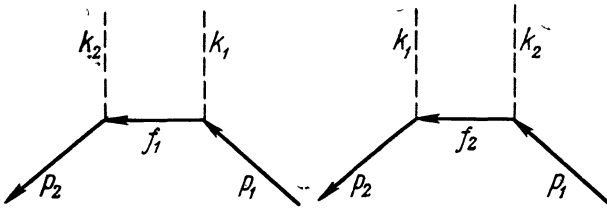


Рис. 26.1.

26.2. Применение законов сохранения. Матричный элемент (26.1.3) отличен от нуля только при выполнении законов сохранения и импульса

$$p_1 + k_1 = p_2 + k_2. \quad (26.2.1)$$

Эти законы позволяют при заданных импульсах p_1 и k_1 определить четыре из шести составляющих импульсов конечного состояния; если, кроме того, задать направление k_2 или p_2 , то можно полностью определить k_2 и p_2 .

Найдем зависимость частоты рассеянного фотона ω_2 от направления его импульса. Возводя (26.2.1) в квадрат и замечая, что

$$p_1^2 = p_2^2 = -m^2, \quad k_1^2 = k_2^2 = 0,$$

найдем

$$p_1 k_1 = p_2 k_2 = p_1 k_2 + k_1 k_2,$$

откуда

$$\omega_1(1 - v_1 \cos \vartheta_1) = \omega_2(1 - v_1 \cos \vartheta_2) + \frac{\omega_1 \omega_2}{\varepsilon_1} (1 - \cos \vartheta), \quad (26.2.2)$$

где v_1 — начальная скорость электрона, ε_1 — его начальная энергия, ϑ_1, ϑ_2 — углы, образованные импульсами первичного и рассеянного фотонов с начальным импульсом электрона, ϑ — угол между \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 .

Для случая рассеяния фотона на покоящемся электроне ($v_1 = 0, \varepsilon_1 = m$) мы получим из (26.2.2) известную формулу Комптона

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{1 + \frac{\omega_1}{m}(1 - \cos \vartheta)}. \quad (26.2.3)$$

Величины f_1 и f_2 , входящие в (26.1.3), представляют собой четырехмерные импульсы виртуальных электронов, для которых не выполняется обычное соотношение между энергией и импульсом. Отличие виртуального электронного состояния от реального можно характеризовать величиной

$$\kappa_i = \frac{f_i^2 + m^2}{m^2}, \quad i = 1, 2, \quad (26.2.4)$$

обращающейся в нуль для реального состояния. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} m^2 \kappa_1 &= 2p_1 k_1 = 2p_2 k_2, \\ m^2 \kappa_2 &= -2p_1 k_2 = -2p_2 k_1. \end{aligned} \quad (26.2.5)$$

В системе отсчета, в которой электрон до столкновения покоится,

$$\kappa_1 = -\frac{2\omega_1}{m}, \quad \kappa_2 = \frac{2\omega_2}{m}. \quad (26.2.6)$$

В системе центра инерции сталкивающихся частиц

$$\begin{aligned} m^2 \kappa_1 &= -2\varepsilon\omega(1 + v) = -2\omega(\varepsilon + \omega), \\ m^2 \kappa_2 &= 2\varepsilon\omega(1 + v \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (26.2.7)$$

26.3. Дифференциальное сечение в случае неполяризованных частиц.

В § 18.3 были сформулированы общие правила для получения дифференциальных сечений через элементы матрицы рассеяния. Применяя их к случаю рассеяния фотона электроном, получим

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} |\bar{u}_2 Q u_1|^2 \frac{d^3 p_2 d^3 k_2}{16J\varepsilon_2\omega_2} \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2), \quad (26.3.1)$$

где через Q обозначена матрица, заключенная в (26.1.3) в фигурные скобки,

$$Q = \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{e}_2^* (i\hat{f}_1 - m) \hat{e}_1 + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \hat{e}_1 (i\hat{f}_2 - m) \hat{e}_2^*, \quad (26.3.2)$$

и $J = |p_1 k_1| = \frac{1}{2} m^2 |\kappa_1|$. Наличие в (26.3.1) δ -функций дает возможность произвести интегрирование по $d^3 p_2$ и $d\omega_2$. Для этого достаточно сделать замены

$$\begin{aligned} \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) d^3 p_2 &\rightarrow 1, \\ \delta(\varepsilon_1 + \omega_1 - \varepsilon_2 - \omega_2) d^3 k_2 &\rightarrow \omega_2^2 \left| \frac{\partial}{\partial \omega_2} (\omega_2 + \varepsilon_2) \right|^{-1} d\omega_2, \end{aligned}$$

где do_2 — элемент телесного угла, в котором лежит вектор \mathbf{k}_2 . В последнем соотношении ε_2 является функцией ω_2 , так как импульс \mathbf{p}_2 связан с \mathbf{k}_2 законом сохранения

$$\varepsilon_2^2 = m_2^2 + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial \omega_2} (\omega_2 + \varepsilon_2) = -\frac{m_2^2 \kappa_1}{2\varepsilon_2 \omega_2},$$

и поэтому

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega_2^2 do_2}{m^2 \kappa_1^2} |\bar{u}_2 Q u_1|^2, \quad (26.3.3)$$

где $r_0 = \frac{\alpha}{m}$ — классический «радиус» электрона и $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

Если начальное состояние электрона не поляризовано и нас не интересует поляризация электрона в конечном состоянии, то мы должны просуммировать выражение (26.3.3) по конечным и усреднить по начальным значениям проекции спина электрона. Эту величину, т. е. $\frac{1}{2} \sum_{\mu_1 \mu_2} d\sigma$, где μ_1 и μ_2 — значения проекций спина электрона в начальном и конечном состояниях, мы будем для краткости по-прежнему обозначать через $d\sigma$. Согласно (18.2.2) такое усредненное значение дифференциального сечения равно

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{m^2 \kappa_1^2} \text{Sp} \{Q (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q} (i\hat{p}_2 - m)\} do_2, \quad (26.3.4)$$

где $\bar{Q} = \gamma_4 Q^+ \gamma_4$.

Подставляя сюда выражение для Q и замечая, что для любого 4-вектора q , пространственные составляющие которого вещественны, а четвертая составляющая мнима, $\bar{q} = -\hat{q}$, найдем

$$\begin{aligned} Q (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q} (i\hat{p}_2 - m) &= \\ &= \left\{ \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{e}_2 (i\hat{f}_1 - m) \hat{e}_1 + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \hat{e}_1 (i\hat{f}_2 - m) \hat{e}_2 \right\} (i\hat{p}_1 - m) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{e}_1 (i\hat{f}_1 - m) \hat{e}_2 + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \hat{e}_2 (i\hat{f}_2 - m) \hat{e}_1 \right\} (i\hat{p}_2 - m). \end{aligned} \quad (26.3.5)$$

Если первичный фотон также не поляризован, то мы получим сечение рассеяния относительно к поляризации рассеянного фотона, просуммировав (26.3.2) по конечным и усреднив по начальным состояниям поляризации фотонов. Эту величину, т. е. $\frac{1}{2} \sum_{\nu_1 \nu_2} d\sigma$, где ν_1 и ν_2 — поляризации фотонов, мы также будем обозначать через $d\sigma$.

Вычисление этого усредненного сечения значительно упрощается, так как суммирование можно производить не по двум, а по четырем поляризациям фотонов, включая как «продольную», так и «скалярную» поляризацию (см. § 18.2). При этом следует лишь в выражении (26.3.5) заменить \hat{e}_1 на γ_ν , \hat{e}_2 на γ_μ и просуммировать по ν и μ ($\nu, \mu = 1, 2, 3, 4$).

Таким образом, мы получим

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega_2^2 do_2}{m^2 \kappa_1^2} \frac{1}{4} \text{Sp} F, \quad (26.3.6)$$

где

$$F = \frac{1}{m^2 \kappa_1} \left\{ \frac{1}{m^2 \kappa_1} \gamma_\mu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\nu + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \gamma_\nu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\mu \right\} \times \\ \times (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_2 - m) + \\ + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \left\{ \frac{1}{m^2 \kappa_1} \gamma_\mu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\nu + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \gamma_\nu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\mu \right\} \times \\ \times (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\mu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m).$$

Легко видеть, что второе слагаемое в этом выражении получается из первого путем замены $k_1 \rightleftharpoons -k_2$, которой соответствует также замена $\hat{f}_1 \rightleftharpoons \hat{f}_2$, $\kappa_1 \rightleftharpoons \kappa_2$.

Каждое из слагаемых представляет собой, очевидно, функцию только от двух инвариантов κ_1 и κ_2 . Поэтому мы можем представить $\text{Sp } F$ в виде

$$\text{Sp } F = P(\kappa_1, \kappa_2) + P(\kappa_2, \kappa_1),$$

$$P(\kappa_1, \kappa_2) = h_1(\kappa_1, \kappa_2) + h_2(\kappa_1, \kappa_2),$$

где

$$h_1(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{m^4 \kappa_1^2} \text{Sp} \{ \gamma_\mu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\nu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_2 - m) \},$$

$$h_2(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{m^4 \kappa_1 \kappa_2} \text{Sp} \{ \gamma_\nu (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_2 - m) \}.$$

Выполнив здесь с помощью формулы (8.3.8) суммирование по μ и ν и отбросив члены с нечетным числом матриц γ_μ , получим

$$h_1(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{4}{m^4 \kappa_1^2} \text{Sp} \{ \hat{f}_1 \hat{p}_1 \hat{f}_1 \hat{p}_2 + 4m^2 (\hat{f}_1 \hat{p}_1 + \hat{f}_1 \hat{p}_2 - \hat{f}_1^2) - m^2 \hat{p}_1 \hat{p}_2 + 4m^4 \}.$$

Отсюда с помощью формул (8.3.6) легко получить

$$h_1(\kappa_1, \kappa_2) = 8 \frac{4 - 2\kappa_1 - \kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1^2}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$h_2(\kappa_1, \kappa_2) = 8 \frac{4 - \kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{8} \text{Sp } F \equiv U_0 = 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right),$$

и окончательно мы получим следующее выражение для усредненного сечения:

$$d\sigma = r_0^2 \frac{2\omega_2^2 d\omega_2}{m^2 \kappa_1^2} U_0. \quad (26.3.7)$$

Заметим, что входящие в это выражение величины κ_1 и U_0 являются релятивистскими инвариантами. Инвариантом является и величина $\omega^2 d\omega$, так как

$$\omega^2 d\omega = \frac{d^3 k}{\omega} = 2\delta(k^2) d^4 k.$$

Если электрон вначале покоился, т. е. $\mathbf{p}_1 = 0$, то, используя (26.2.3) и (26.2.5), получим

$$U_0 = \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2 \vartheta,$$

и сечение рассеяния приобретет вид [5]

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \sin^2 \vartheta \right) d\omega_2. \quad (26.3.8)$$

Отметим, что сечение рассеяния фотона содержит в знаменателе массу рассеивателя m . Поэтому при $m \rightarrow \infty$ рассеяния не происходило бы. Этот вывод, однако, неточен, так как он получен только из рассмотрения матрицы рассеяния второго порядка. Оказывается, что уже матрица рассеяния четвертого порядка содержит элементы, отвечающие рассеянию фотона на бесконечно тяжелом заряде. Соответствующее этим матричным элементам явление когерентного рассеяния фотона на ядре будет рассмотрено в § 42.

26.4. Угловое распределение рассеянных фотонов.

Воспользовавшись соотношением (26.2:3), определяющим ω_2 как функцию ω_1 и ϑ , можно выразить дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных фотонов покоящимися неполяризованными электронами через частоту падающего фотона и угол рассеяния фотона:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\left[1 + \frac{\omega_1}{m} (1 - \cos \vartheta) \right]^2} \left[1 + \frac{\frac{\omega_1^2}{m^2} (1 - \cos \vartheta)^2}{(1 + \cos^2 \vartheta) \left[1 + \frac{\omega_1}{m} (1 - \cos \vartheta) \right]} \right] d\omega_2. \quad (26.4.1)$$

Угловое распределение, даваемое этой формулой, изображено на рис. 26.2 для различных значений параметра $\gamma = \frac{\omega_1}{m}$.

При малых энергиях фотона ($\omega_1 \ll m$) формула (26.4.1) переходит в классическую формулу Томсона

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) d\omega_2, \quad \omega_1 \ll m. \quad (26.4.2)$$

Если энергия первичного фотона велика по сравнению с энергией покоя электрона, $\omega_1 \gg m$, то из (26.4.1) можно получить простые выражения для двух предельных случаев: когда $\vartheta \ll \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}$ и когда $\vartheta \gg \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}$:

$$d\sigma = r_0^2 d\omega_2, \quad \omega_1 \gg m, \quad \vartheta \ll \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}, \quad (26.4.3)$$

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \frac{m}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{1 - \cos \vartheta}, \quad \omega_1 \gg m, \quad \vartheta \gg \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}. \quad (26.4.4)$$

При $\vartheta = \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}$, $\omega_1 \gg m$ обе эти формулы приводят к одинаковым результатам. Это показывает, что формула (26.4.3) дает при $\omega_1 \gg m$ хорошую аппроксимацию углового распределения в области углов $0 \leq \vartheta \leq \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}$, а формула (26.4.4) — в области углов $\vartheta \geq \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}$.

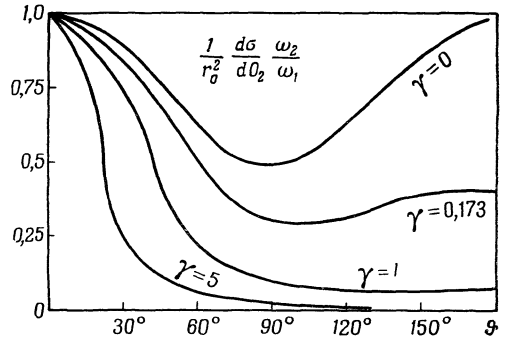


Рис. 26.2.

В предельном случае больших энергий угловое распределение имеет особенно простой вид в системе центра инерции сталкивающихся частиц. Подставив в (26.3.7) выражение (26.3.6), в котором в этом случае можно сохранить только последнюю скобку, и используя (26.2.7), легко видеть, что рассеяние происходит главным образом назад (т. е. под углом ϑ , близким к 180°); при этом

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} d\omega_2, \quad \pi - \vartheta \ll \frac{m}{\omega} \quad (26.4.5)$$

(ω — частота в системе центра инерции). В области углов, не близких к 180° , дифференциальное сечение существенно меньше:

$$d\sigma \sim r_0^2 \frac{m^2}{\omega^2} d\omega_2. \quad (26.4.6)$$

Дифференциальное сечение рассеяния покоящимся электроном может быть выражено с помощью (26.2.3) через энергию ω_2 рассеянного фотона. После интегрирования по азимутальному углу получим

$$d\sigma = \pi r_0^2 \frac{m d\omega_2}{\omega_1^2} \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + \left(\frac{m}{\omega_2} - \frac{m}{\omega_1} \right)^2 - 2m \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1} \right) \right\}, \quad (26.4.7)$$

где ω_2 , согласно (26.2.3), изменяется в пределах

$$\frac{\omega_1}{1 + 2 \frac{\omega_1}{m}} \leq \omega_2 \leq \omega_1.$$

26.5. Полное сечение. Для получения полного сечения достаточно проинтегрировать выражение (26.4.1) по углу ϑ . Выполнив интегрирование, получим

$$\sigma = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+\gamma}{\gamma^3} \left[\frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \ln(1+2\gamma) \right] + \frac{\ln(1+2\gamma)}{2\gamma} - \frac{1+3\gamma}{(1-2\gamma)^2} \right\}, \quad (26.5.1)$$

где $\gamma = \frac{\omega_1}{m}$ и ω_1 — частота падающего фотона в системе покоя электрона. Заметим, что сечение является релятивистским инвариантом, поэтому γ

также можно выразить через инвариантную величину κ_1 ; согласно (26.2.6)

$$\gamma = -\frac{\kappa_1}{2}.$$

В системе центра инерции, согласно (26.2.7),

$$\gamma = \frac{\omega(\varepsilon + \omega)}{m^2}.$$

При $\omega_1 \ll m$ разложение (26.5.1) по γ дает

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 (1 - 2\gamma + \dots), \quad (26.5.2)$$

т. е. в нерелятивистской области сечение рассеяния почти не зависит от энергии фотона.

В крайне релятивистской области ($\omega_1 \gg m$) выражение для сечения сильно упрощается:

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{m}{\omega_1} \left(\ln \frac{2\omega_1}{m} + \frac{1}{2} \right), \quad \omega_1 \gg m. \quad (26.5.3)$$

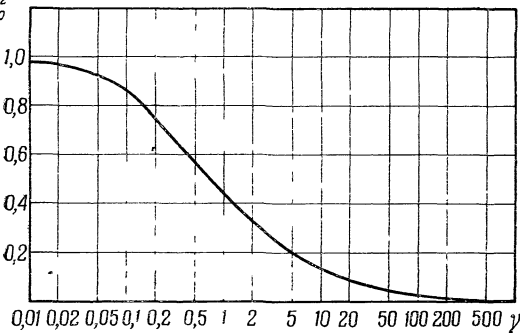
$$\frac{\sigma}{\frac{8\pi}{3} r_0^2}$$


Рис. 26.3.

В этой области сечение убывает почти обратно пропорционально энергии фотона. Часть сечения, пропорциональная $\ln \frac{2\omega_1}{m} = \ln |\kappa_1|$, возникает от области углов рассеяния, близких к 180° в системе центра инерции, в которой дифференциальное сечение выражается формулой (26.4.4).

Таким образом, в области больших энергий число рассеянных фотонов сильно уменьшается, благодаря чему проникающая способность γ -излучения возрастает с увеличением их энергии.

На рис. 26.3 представлена зависимость $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ от энергии первичного фотона. Значения $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ приведены также в таблице ($\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2$).

γ	0,05	0,1	0,2	0,33	0,5	1	2	3
$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	0,913	0,84	0,737	0,637	0,563	0,431	0,314	0,254
γ	5	10	20	50	100	200	500	1000
$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	19,1	12,3	7,54	3,76	2,15	1,22	0,556	$0,304 \times 10^{-2}$

26.6. Распределение электронов отдачи. В результате столкновения с фотоном покоящийся вначале электрон приобретает некоторую энергию. Из законов сохранения легко убедиться, что приобретаемая им энергия равна

$$\varepsilon - m = \frac{\omega_1^2 (1 - \cos \vartheta)}{m + \omega_1 (1 - \cos \vartheta)}. \quad (26.6.1)$$

Она изменяется от нуля при $\vartheta = 0$ до максимального значения $\varepsilon_{\max} - m = \frac{2\omega_1^2}{m + 2\omega_1}$ при $\vartheta = \pi$.

Угол β между импульсом рассеянного электрона и импульсом первичного фотона связан с углом ϑ соотношением

$$\cos \beta = (1 + \gamma) \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2 + \gamma(\gamma + 2)(1 - \cos \vartheta)}} \quad (26.6.2)$$

и изменяется от $\frac{\pi}{2}$ при $\vartheta = 0$ до нуля при $\vartheta = \pi$.

Воспользовавшись этим соотношением, можно выразить $d\sigma$ через β . Мы получим, таким образом, угловое распределение электронов отдачи

$$d\sigma = 4r_0^2 \frac{(1 + \gamma)^2 \cos \beta \, d\omega_e}{(1 + 2\gamma + \gamma^2 \sin^2 \beta)^2} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{2\gamma^2 \cos^4 \beta}{(1 + 2\gamma + \gamma^2 \sin^2 \beta) [1 + \gamma(\gamma + 2) \sin^2 \beta]} - \frac{2(1 + \gamma)^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}{[1 + \gamma(\gamma + 2) \sin^2 \beta]^2} \right\}, \quad (26.6.3)$$

где $d\omega_e$ — элемент телесного угла, в котором лежит импульс рассеянного электрона.

В крайне релятивистском случае ($\gamma \gg 1$) эта формула дает

$$\begin{aligned} d\sigma &= r_0^2 \frac{\gamma d\sigma_e}{\gamma^2 \beta^2 + 1}, \quad \gamma \gg 1, \quad \gamma \beta^2 \ll 1, \\ d\sigma &= 4r_0^2 \frac{\cos \beta d\sigma_e}{\gamma^2 \sin^4 \beta}, \quad \gamma \gg 1, \quad \gamma \sin^2 \beta \gg 1. \end{aligned} \quad (26.6.4)$$

26.7. Поляризационные эффекты. Перейдем теперь к рассмотрению зависимости сечения от поляризаций частиц в начальном и конечном состояниях. Согласно общим правилам, изложенным в § 18.4, для этого нужно возвести в квадрат матричный элемент (26.1.3), заменив в нем билинейные относительно амплитуд частиц величины соответствующими матрицами плотности. Таким образом, мы приходим к следующему выражению для дифференциального сечения рассеяния фотона электроном:

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega_2^2 d\omega_2}{m^2 \kappa_1^2} \text{Sp } Q_{ab} \rho^{(1)} \rho_{aa}^{(1)} \bar{Q}_{a'b'} \rho_{b'b}^{(d)} \rho^{(d)}. \quad (26.7.1)$$

Здесь $\rho^{(1)}$ и $\rho_{aa}^{(1)}$ — матрицы плотности электрона и фотона в начальных состояниях (они определяются формулами (9.4.8) и (2.4.3)), $\rho^{(d)}$ и $\rho_{b'b}^{(d)}$ — матрицы плотности конечных состояний электрона и фотона, фиксируемых детектором; наконец,

$$Q_{ab} = \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{e}_b^{(2)} (i\hat{f}_1 - m) \hat{e}_a^{(1)} + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \hat{e}_a^{(1)} (i\hat{f}_2 - m) \hat{e}_b^{(2)},$$

где $e_a^{(1)}$ ($a = 1, 2$) — пространственноподобные единичные 4-векторы, ортогональные k_1 , и $e_a^{(2)}$ — такие же векторы, ортогональные k_2 ; мы их выберем в виде трехмерных векторов

$$e_1^{(1)} = \frac{[k_1 k_2]}{[k_1 k_2]}, \quad e_2^{(1)} = \frac{[k_1 e_1^{(1)}]}{\omega_1}, \quad e_1^{(2)} = e_1^{(1)}, \quad e_2^{(2)} = \frac{[k_2 e_1^{(2)}]}{\omega_2}.$$

Заметим, что векторы $e_1^{(1)}$, $e_1^{(2)}$ перпендикулярны плоскости рассеяния, а векторы $e_2^{(1)}$, $e_2^{(2)}$ лежат в этой плоскости.

Так как матрицу ρ можно выразить через вектор поляризации электрона в его системе покоя ξ , а матрицу ρ_{ab} — через параметры Стокса фотона ξ_i (см. (9.4.8), (2.4.3)), то дифференциальное сечение $d\sigma$ является функцией от k_1 , k_2 , $\xi^{(1)}$, $\xi^{(d)}$, $\xi_i^{(1)}$, $\xi_i^{(d)}$. Из выражения (26.7.1) легко видеть, что зависимость $d\sigma$ от каждого из параметров ξ и ξ_i линейна. Поэтому можно установить общую структуру выражения для $d\sigma$:

$$\begin{aligned} d\sigma &= r_0^2 \frac{\omega_2^2 d\omega_2}{2m^2 \kappa_1^2} \left\{ F_0 + F_i \xi_i^{(1)} + F_i \xi_i^{(d)} + G \xi^{(1)} + G' \xi^{(d)} + \right. \\ &+ F_{ik} \xi_i^{(1)} \xi_k^{(d)} + G_{\alpha\beta} \xi_\alpha^{(1)} \xi_\beta^{(d)} + f_i \xi_i^{(1)} \xi^{(1)} + g' \xi_i^{(d)} \xi^{(d)} + \\ &\left. + g \xi_i^{(1)} \xi^{(d)} + f' \xi_i^{(d)} \xi^{(1)} + h_{ik} \xi_i^{(1)} \xi_k^{(d)} \xi^{(1)} + \dots \right\}. \quad (26.7.2) \end{aligned}$$

Здесь выписаны все члены, зависящие от одного и двух поляризационных параметров, и один из членов, содержащих три параметра. Остальные члены, зависящие от трех и четырех поляризационных параметров, опущены, так как практически мы их не будем рассматривать, общую же форму легко написать по образцу предшествующих членов.

Если вместо векторов поляризации электрона в системе покоя $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(d)}$ пользоваться 4-векторами поляризации $s^{(1)}$ и $s^{(d)}$, то выражение

для $d\sigma$ будет иметь следующую структуру:

$$d\sigma = \frac{r_0^2 \omega_2^2 d\omega_2}{2m^2 \kappa_1^2} \{ F_0 + F_i \xi_i^{(1)} + F'_i \xi_i^{(d)} + G_\mu S_\mu^{(1)} + G'_\mu S_\mu^{(d)} + \\ + F_{ih} \xi_i^{(1)} \xi_k^{(d)} + G_{\mu\nu} S_\mu^{(1)} S_\nu^{(d)} + (f_i)_\mu \xi_i^{(1)} S_\mu^{(d)} + (g'_i)_\mu \xi_i^{(d)} S_\mu^{(d)} + \\ + (g_i)_\mu \xi_i^{(1)} S_\mu^{(d)} + (f'_i)_\mu \xi_i^{(d)} S_\mu^{(1)} + (h_{ik})_\mu \xi_i^{(1)} \xi_k^{(d)} S_\mu^{(1)} + \dots \}. \quad (26.7.3)$$

Приведем значения коэффициентов, входящих в (26.7.2), для случая рассеяния на покоящемся электроне [6]:

$$F_0 = \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2 \vartheta, \quad F'_i = F_i, \quad F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 = \sin^2 \vartheta, \\ \mathbf{G} = \mathbf{G}' = 0, \quad F_{33} = 1 + \cos^2 \vartheta, \quad F_{11} = 2 \cos \vartheta, \\ F_{22} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \cos \vartheta, \quad F_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \\ f_1 = f_3 = 0, \quad f_2 = -\frac{1}{m} (1 - \cos \vartheta) (\mathbf{k}_1 \cos \vartheta + \mathbf{k}_2), \quad f'_1 = f'_3 = 0, \\ f'_2 = -\frac{1}{m} (1 - \cos \vartheta) (\mathbf{k}_2 \cos \vartheta + \mathbf{k}_1), \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_3 = 0, \quad (26.7.4)$$

$$\mathbf{g}_2 = -\frac{1}{m} (1 - \cos \vartheta) \left[\mathbf{k}_1 \cos \vartheta + \mathbf{k}_2 - (1 + \cos \vartheta) \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2 + 2m} (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \right],$$

$$\mathbf{g}'_1 = \mathbf{g}'_3 = 0,$$

$$\mathbf{g}_2 = -\frac{1}{m} (1 - \cos \vartheta) \left[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \cos \vartheta - (1 + \cos \vartheta) \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2 + 2m} (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \right].$$

Ковариантные формулы для поляризационных коэффициентов в (26.7.3) имеют вид:

$$F_0 = 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right), \\ F'_i = F_i, \quad F_1 = F_2 = 0, \\ F_3 = -4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 + 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right), \\ \mathbf{G} = \mathbf{G}' = 0, \\ F_{33} = 2 + 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right), \\ F_{11} = 2 - 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right), \\ F_{22} = - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \left[1 - 2 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \right], \\ F_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \\ f_1 = f_3 = 0, \quad f'_1 = f'_3 = 0, \quad g_1 = g_3 = 0, \quad g'_1 = g'_3 = 0, \\ f_2 = g_2 = -\frac{2}{m} \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \left[\kappa_1 + \kappa_2 - 2 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \kappa_1 \right], \\ f'_2 = g'_2 = -\frac{2}{m} \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \left[\kappa_1 + \kappa_2 - 2 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \kappa_2 \right]. \quad (26.7.5)$$

26.8. Рассеяние поляризованных фотонов неполяризованными электронами. Используя приведенные значения величин F_i , \mathbf{G} , \mathbf{f} и др., можно проанализировать ряд частных случаев. Пусть прежде всего $\xi_i^{(d)} = 0$, $\xi^{(d)} = 0$, $\xi^{(1)} = 0$. Тогда формула (26.7.2) (учетверенная, что отвечает суммированию по поляризациям конечных частиц) будет определять сечение рассеяния поляризованных фотонов на неполяризованных электронах. Обозначим его через $d\sigma(\xi^{(1)})$:

$$d\sigma(\xi^{(1)}) = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} F d\omega_2, \quad (26.8.1)$$

где

$$F = F_0 + F_3 \xi_3^{(1)} = \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - (1 - \xi_3^{(1)}) \sin^2 \vartheta. \quad (26.8.2)$$

Мы видим, что фотоны, поляризованные перпендикулярно плоскости рассеяния ($\xi_3^{(1)} = 1$) рассеиваются сильнее фотонов, поляризованных в плоскости рассеяния ($\xi_3^{(1)} = -1$). От циркулярной же поляризации сечение не зависит. При отсутствии линейной поляризации относительно осей $\mathbf{e}_1^{(1)}$ и $\mathbf{e}_2^{(1)}$ ($\xi_3^{(1)} = 0$) сечение (26.8.1) совпадает с сечением для неполяризованных фотонов (26.3.8).

Аналогичными свойствами обладает сечение рассеяния неполяризованных фотонов с образованием поляризованного фотона. Это сечение, которое мы обозначим через $d\sigma(\xi^{(d)})$, можно получить из сечения (26.7.2), если в последнем положить равными нулю все параметры, за исключением $\xi_i^{(d)}$ (и удвоить результат соответственно суммированию по поляризациям конечного электрона):

$$d\sigma(\xi^{(d)}) = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} F' d\omega_2,$$

где

$$F' = F_0 + F_3 \xi_3^{(d)} = \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - (1 - \xi_3^{(d)}) \sin^2 \vartheta.$$

Сечение рассеяния поляризованного фотона с образованием поляризованного фотона имеет вид

$$d\sigma(\xi^{(1)}, \xi^{(d)}) = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} d\omega_2 \{ F_0 + F_3 (\xi_3^{(1)} + \xi_3^{(d)}) + \\ + F_{11} \xi_1^{(1)} \xi_1^{(d)} + F_{22} \xi_2^{(1)} \xi_2^{(d)} + F_{33} \xi_3^{(1)} \xi_3^{(d)} \}. \quad (26.8.3)$$

Из этого выражения, согласно правилу § 18.4, можно найти параметры Стокса вторичного фотона. Они равны отношению коэффициентов при $\xi_i^{(d)}$ к члену, не содержащему $\xi_i^{(d)}$:

$$\begin{aligned} \xi_3^{(2)} &= \frac{1}{F} [\sin^2 \vartheta + (1 + \cos^2 \vartheta) \xi_3^{(1)}], \\ \xi_1^{(2)} &= \frac{1}{F} 2 \cos \vartheta \xi_1^{(1)}, \\ \xi_2^{(2)} &= \frac{1}{F} \cos \vartheta \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \xi_2^{(1)}. \end{aligned} \quad (26.8.4)$$

Из этих формул, в частности, видно, что неполяризованный фотон в результате рассеяния частично поляризуется. Действительно, полагая

в (26.8.4) $\xi_i^{(1)} = 0$, получим

$$\xi_3^{(2)} = \frac{\sin^2 \vartheta}{\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2 \vartheta}, \quad \xi_1^{(2)} = \xi_2^{(2)} = 0. \quad (26.8.5)$$

Так как $\xi_3^{(2)} > 0$, то фотон будет поляризован перпендикулярно к плоскости рассеяния. В нерелятивистском приближении $\xi_3^{(2)} = \frac{\sin^2 \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta}$, и при рассеянии на 90° излучение полностью поляризовано.

Циркулярно поляризованный фотон образуется только в том случае, когда и первичный фотон циркулярно поляризован

Рассмотрим далее тот случай, когда падающий фотон полностью поляризован линейно ($(\xi_1^{(1)})^2 + (\xi_3^{(1)})^2 = 1$, $\xi_2^{(1)} = 0$), и найдем дифференциальное сечение рассеяния, при котором рассеянный фотон также обладает линейной поляризацией. Используя (26.8.3), (26.7.3) и выражая параметры $\xi_i^{(1)}$ и $\xi_i^{(2)}$ через проекции векторов поляризации фотонов, которые мы обозначим через $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$, получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния поляризованного фотона на покоящемся электро-не:

$$d\sigma = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - 2 + 4 \cos^2 \theta \right) d\theta, \quad (26.8.6)$$

где θ — угол между поляризациями первичного и рассеянного фотонов, $\cos \theta = e^{(1)} e^{(2)}$.

Сечение рассеяния как функция θ достигает максимума при совпадающих направлениях поляризации первичного и рассеянного фотонов.

При фиксированном $e^{(1)}$ можно рассмотреть два случая поляризации рассеянного фотона, когда вектор $e^{(2)}$ перпендикулярен $e^{(1)}$ ($\cos \theta = 0$) и когда $e^{(2)}$ лежит в плоскости $(\mathbf{k}_2, e^{(1)})$,

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi,$$

где φ — угол между плоскостями $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ и $(\mathbf{k}_2, e^{(1)})$.

Если $d\sigma^{(1)}$ и $d\sigma^{(2)}$ — сечения рассеяния, соответствующие этим поляризациям, то полное сечение рассеяния будет равно $d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$. Если падающий фотон не поляризован, то сумма $d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$, усредненная по углу φ , даст сечение рассеяния неполяризованного фотона (26.3.8).

При $\omega_1 \ll m$ имеем

$$d\sigma^{(1)} = 0, \quad d\sigma^{(2)} = r_0^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) d\omega_2.$$

При $\omega_1 \gg m$ следует различать области малых и больших углов рассеяния. Если $\vartheta \ll \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}$, то

$$d\sigma^{(1)} = 0, \quad d\sigma^{(2)} = r_0^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) d\omega_2. \quad (26.8.7)$$

Если $\vartheta \gg \sqrt{\frac{m}{\omega_1}}$, то

$$d\sigma^{(1)} = d\sigma^{(2)} = \frac{r_0^2}{4} \frac{m}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{1 - \cos \vartheta}. \quad (26.8.8)$$

Мы видим, что если первичный фотон линейно поляризован, то в крайне релятивистской области при малых ϑ рассеяние происходит так же, как и в нерелятивистской области. При больших энергиях и больших углах рассеяния рассеянный фотон неполяризован, независимо от характера линейной поляризации первичного фотона

Приведем в заключение этого раздела ковариантную формулу для круговой поляризации рассеянного фотона:

$$\xi_2^{(2)} = \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \frac{1 - 2 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)}{\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} + 4 (\xi_3^{(1)} - 1) \left[\left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \right]} \xi_2^{(1)}.$$

В системе центра инерции

$$\xi_2^{(2)} = \frac{\left(\frac{\varepsilon - p}{\varepsilon + p \cos \vartheta} + \frac{\varepsilon + p \cos \vartheta}{\varepsilon + p} \right) \frac{p + \varepsilon \cos \vartheta}{\varepsilon + p \cos \vartheta}}{\left(\frac{\varepsilon + p}{\varepsilon + p \cos \vartheta} + \frac{\varepsilon + p \cos \vartheta}{\varepsilon + p} \right) + (\xi_3^{(1)} - 1) \frac{m^2}{(\varepsilon + p \cos \vartheta)^2} \sin^2 \vartheta} \xi_2^{(1)},$$

где ε и p — энергия и импульс электрона ($p = |\mathbf{p}|$) и θ — угол рассеяния. Если $\frac{\varepsilon}{m} \gg 1$, $\pi - \theta \gg \frac{m}{\varepsilon}$, то

$$\xi_2^{(2)} = \xi_2^{(1)}.$$

26.9. Рассеяние поляризованными электронами и поляризация электронов отдачи. Так как, согласно (26.7.3), $\mathbf{G} = 0$, то из (26.7.2) следует, что сечение рассеяния неполяризованного фотона поляризованным электроном $d\sigma(\xi^{(1)})$ не отличается от сечения рассеяния неполяризованным электроном,

$$d\sigma(\xi^{(1)}) = d\sigma,$$

т. е. определяется формулой (26.3.8). Далее, так как $\mathbf{G}' = 0$, то электрон отдачи не поляризуется при рассеянии неполяризованных частиц.

Рассмотрим рассеяние поляризованного фотона поляризованным электроном. Считая в (26.7.2) отличными от нуля параметры $\xi_2^{(1)}$ и $\xi^{(1)}$, получим

$$\begin{aligned} d\sigma(\xi^{(1)}, \xi^{(1)}) &= \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} (F_0 + F_3 \xi_3^{(1)} + f_2 \xi_2^{(1)} \xi^{(1)}) = \\ &= d\sigma(\xi^{(1)}) + \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} f_2 \xi_2^{(1)} \xi^{(1)}. \end{aligned} \quad (26.9.1)$$

Отметим, что во второй член в формуле (26.9.1) входит только составляющая $\xi_2^{(1)}$, описывающая круговую поляризацию падающего фотона, и составляющая вектора поляризации электрона в плоскости рассеяния.

Приведем выражение для полного сечения рассеяния в том случае, когда электрон поляризован в направлении \mathbf{k}_1 , а фотон обладает только круговой поляризацией:

$$\begin{aligned} \sigma(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}) &= \sigma + \xi_2^{(1)} \xi_3^{(1)} \sigma', \\ \sigma' &= \pi r_0^2 \left\{ \frac{1 + 4\gamma + 5\gamma^2}{\gamma(1 + 2\gamma)^2} - \frac{(1 + \gamma) \ln(1 + 2\gamma)}{2\gamma^2} \right\}, \end{aligned} \quad (26.9.2)$$

где σ — сечение рассеяния неполяризованных фотонов и $\gamma = \frac{\omega_1}{m}$.

На рис. 26.4 изображено отношение σ'/σ как функция энергии фотона ω_1 .

Аналогично, считая в (26.7.2) отличными от нуля параметры $\xi_2^{(d)}$ и $\xi^{(1)}$, получим сечение $d\sigma(\xi^{(d)}, \xi^{(1)})$ образования поляризованного фотона при рассеянии неполяризованного фотона на поляризованном электроном:

$$d\sigma(\xi^{(d)}, \xi^{(1)}) = d\sigma(\xi^{(d)}) + \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} f_2 \xi^{(1)} \xi_2^{(d)} d\omega_2. \quad (26.9.3)$$

Отсюда следует, что рассеянный фотон обладает, кроме линейной поляризации, определяемой формулой (26.8.5), еще круговой поляризацией

$$\xi_2^{(2)} = \frac{f_2}{F_0} \xi_2^{(1)}, \quad (26.9.4)$$

которая определяется проекцией вектора поляризации электрона на плоскость рассеяния.

Рассмотрим в заключение поляризацию электронов отдачи. Сохранив в (26.7.2) члены, содержащие $\xi^{(d)}$ и $\xi_2^{(1)}$, получим сечение рассеяния поляризованного фотона на неполяризованном электроном,

$$d\sigma(\xi^{(d)}, \xi^{(1)}) = d\sigma(\xi^{(1)}) + \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} d\omega_2 g_2 \xi^{(d)} \xi_2^{(1)}, \quad (26.9.5)$$

откуда находим

$$\xi_2^{(2)} = \frac{g_2}{F} \xi_2^{(1)}. \quad (26.9.6)$$

Мы видим, что электрон поляризуется только в том случае, если фотон обладает круговой поляризацией. Вектор поляризации электрона лежит в плоскости рассеяния.

Аналогичным образом могут быть исследованы другие поляризационные эффекты. Так, например, коэффициенты $h_{i,b}$ определяют поляризацию рассеянного фотона, зависящую от поляризаций первичных частиц.

§ 27. Рассеяние фотона связанным электроном

27.1. Дисперсионная формула. В § 26 мы изучили рассеяние фотонов свободными электронами. Теперь мы перейдем к изучению рассеяния фотонов связанными электронами.

Для определения сечения рассеяния в этом случае можно по-прежнему пользоваться частью матрицы рассеяния $\mathbf{S}^{(2)}$, определяемой общей формулой (26.1.1), но теперь взамен функции $S_c(x_2 - x_1)$ в выражение $\mathbf{S}^{(2)}$ должна входить функция Грина уравнения Дирака $S_c^{(e)}$ для электрона во внешнем поле,

$$\mathbf{S}^{(2)} = e^2 \int N \{ \bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) S_c^{(e)}(x_1, x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2) \} d^4x_1 d^4x_2. \quad (27.1.1)$$

Функция $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$ определяется в соответствии с (14.4.7), (14.3.2) следующим образом:

$$S_{c\alpha\beta}^{(e)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \sum_s \psi_{s\alpha}^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_{s\beta}^{(+)}(x_2), & t_1 > t_2, \\ -\sum_s \psi_{s\alpha}^{(-)}(x_1) \bar{\psi}_{s\beta}^{(-)}(x_2), & t_1 < t_2, \end{cases}$$

где

$$\psi_s^{(+)}(x) = \psi_s^{(+)}(\mathbf{r}) e^{-iE_s^{(+)}t}, \quad E_s^{(+)} > 0,$$

$$\psi_s^{(-)}(x) = \psi_s^{(-)}(\mathbf{r}) e^{-iE_s^{(-)}t}, \quad E_s^{(-)} < 0,$$

— решения уравнений Дирака с положительными и отрицательными частотами во внешнем поле.

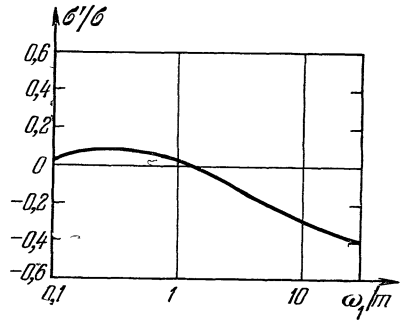


Рис. 26.4.

Функцию $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$ можно представить в более компактном виде, если заметить, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - a(1-i0)} d\omega = \begin{cases} 0, & at < 0, \\ e^{-iat}, & a > 0, t > 0, \\ -e^{-iat}, & a < 0, t < 0. \end{cases}$$

Используя эти формулы, легко убедиться, что

$$S_c^{(e)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t_1-t_2)} \sum_s \frac{\Psi_s(\mathbf{r}_1) \bar{\Psi}_s(\mathbf{r}_2)}{E_s(1-i0) \mp \omega}, \quad (27.1.2)$$

где суммирование производится по всем состояниям, соответствующим как положительным, так и отрицательным частотам.

Из формулы (27.1.2) и из уравнений Дирака следует, что $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu^{(e)}(x) \right) + m \right\} S_c^{(e)}(x, x') = -i\delta(x-x'),$$

а так как $S_c(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) S_c(x) = -i\delta(x),$$

то функция $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$S_c^{(e)}(x_1, x_2) = S_c(x_1 - x_2) - e \int S_c(x_1 - x') \hat{A}^{(e)}(x') S_c^{(e)}(x', x_2) dx_2.$$

Применим эти формулы к определению сечения рассеяния фотона связанным электроном.

Рассмотрим рассеяние фотона с частотой ω_1 , волновым вектором \mathbf{k}_1 и поляризацией \mathbf{e}_1 электроном, находящимся в состоянии с волновой функцией $\psi_1(x) = \psi_1(\mathbf{r}) e^{-iE_1 t}$. В результате рассеяния возникает фотон с частотой ω_2 , волновым вектором \mathbf{k}_2 , поляризацией \mathbf{e}_2 , а электрон переходит в состояние с волновой функцией $\psi_2(x) = \psi_2(\mathbf{r}) e^{-iE_2 t}$.

Частота рассеянного фотона ω_2 может при этом либо совпадать с частотой первичного фотона ω_1 , либо отличаться от нее (в последнем случае говорят о комбинационном рассеянии).

Замечая, что рассматриваемым состояниям фотонов соответствуют потенциалы

$$A_1(x) = \frac{e_1}{\sqrt{2\omega_1}} e^{i(k_1 r - \omega_1 t)},$$

$$A_2(x) = \frac{e_2}{\sqrt{2\omega_2}} e^{i(k_2 r - \omega_2 t)},$$

мы получим, согласно (27.1.1), следующее выражение для матричного элемента перехода:

$$\begin{aligned} \langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = & \frac{e^2}{2\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \int \{ \bar{\Psi}_2(\mathbf{r}_2) e^{-i\mathbf{k}_2 r_2} \hat{e}_2 S_c^{(e)}(x_2, x_1) \hat{e}_1 e^{i\mathbf{k}_1 r_1} \times \\ & \times \Psi_1(\mathbf{r}_1) e^{i\mathbf{k}_1 r_1} e^{i(E_2 + \omega_2)t_2 - i(E_1 + \omega_1)t_1} + \bar{\Psi}_2(\mathbf{r}_2) e^{i\mathbf{k}_1 r_2} \hat{e}_1 S_c^{(e)}(x_2, x_1) \hat{e}_2 \times \\ & \times e^{-i\mathbf{k}_2 r_1} \Psi_1(\mathbf{r}_1) e^{i\mathbf{k}_2 r_1} e^{i(E_2 - \omega_1)t_2 - i(E_1 - \omega_2)t_1} \} d^4 x_1 d^4 x_2. \end{aligned} \quad (27.1.3)$$

Обоим слагаемым в этой формуле соответствуют диаграммы, изображенные на рис 27 1. Отличие этих диаграмм от диаграмм, изображающих

рассеяние фотона свободным электроном, заключается в том, что на рис. 27.1 внешние электронные линии изображают связанные состояния, а внутренней электронной линии соответствует функция $S_c^{(e)}$.

Подставив в (27.1.3) выражение (27.1.2) для $S_c^{(e)}$, представим $\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle$ в виде

$$\begin{aligned} \langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = & \frac{\alpha}{i \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \sum_s \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \frac{\langle 2 | \hat{e}_2 e^{-ik_2 r} | s \rangle \langle s | \hat{e}_1 e^{ik_1 r} | 1 \rangle}{E_s + \omega} \times \right. \\ & \times e^{it_2(E_2 + \omega_2 + \omega) - it_1(E_1 + \omega_1 + \omega)} + \frac{\langle 2 | \hat{e}_1 e^{ik_1 r} | s \rangle \langle s | \hat{e}_2 e^{-ik_2 r} | 1 \rangle}{E_s + \omega} \times \\ & \left. \times e^{it_2(E_2 - \omega_1 + \omega) - it_1(E_1 - \omega_2 + \omega)} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\langle n | e^{ikr} \hat{e} | s \rangle = \int \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \hat{e} e^{ikr} \psi_s(\mathbf{r}) d^3x.$$

Выполнив интегрирование по t_1 , t_2 и ω , получим

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = 2\pi i U \delta(E_1 + \omega_1 - E_2 - \omega_2),$$

где

$$\begin{aligned} U = & -\frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \sum_s \left\{ \frac{1}{E_s - E_1 - \omega_1} \langle 2 | \hat{e}_2 e^{-ik_2 r} | s \rangle \langle s | \hat{e}_1 e^{ik_1 r} | 1 \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_s - E_2 + \omega_2} \langle 2 | \hat{e}_1 e^{ik_1 r} | s \rangle \langle s | \hat{e}_2 e^{-ik_2 r} | 1 \rangle \right\} \quad (27.1.4) \end{aligned}$$

и суммирование производится по всем состояниям s , соответствующим как положительным, так и отрицательным частотам.

Важнейшим применением этой формулы является рассеяние фотона атомной системой.

Рассмотрим нерелятивистский случай, когда энергии фотонов малы по сравнению с энергией покоя электрона, $\omega_1 \ll m$, $\omega_2 \ll m$ и значения энергии электрона в начальном и конечном состояниях E_1 и E_2 мало отличаются от m ,

$$|E_1 - m| \ll m, \quad |E_2 - m| \ll m.$$

Кроме того, мы будем предполагать, что в сумме (27.1.4) играют существенную роль только такие состояния s («промежуточные» состояния), энергии которых также являются нерелятивистскими, т. е. $||E_s| - m| \ll m$.

Эти предположения позволяют значительно упростить ту часть суммы (27.1.4), которая относится к отрицательным частотам. Прежде всего, в каждом члене этой части суммы, которую мы будем обозначать через $U^{(-)}$, можно заменить выражение, стоящее в знаменателе, на $2m$:

$$\begin{aligned} U^{(-)} = & \frac{\pi\alpha}{m \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \sum_{s(E_s < 0)} \left\{ \langle 2 | \hat{e}_2 e^{-ik_2 r} | s \rangle \langle s | \hat{e}_1 e^{ik_1 r} | 1 \rangle + \right. \\ & \left. + \langle 2 | \hat{e}_1 e^{ik_1 r} | s \rangle \langle s | \hat{e}_2 e^{-ik_2 r} | 1 \rangle \right\}, \end{aligned}$$

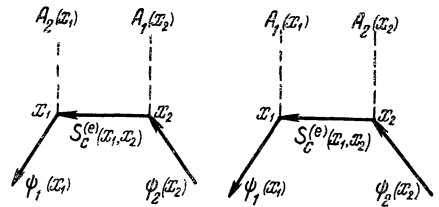


Рис. 27.1.

после чего можно преобразовать $U^{(-)}$ в сумму по всем состояниям, включающим не только отрицательные, но и положительные частоты. Для этого следует сделать в выражении матричного элемента

$$\langle 2 | \hat{e} e^{ikr} | s \rangle = \int \bar{\Psi}_2(\mathbf{r}) \hat{e} e^{ikr} \Psi_s^{(-)}(\mathbf{r}) d^3x$$

замену

$$\Psi_s^{(-)}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{m-H}{m-E_s^{(-)}} \Psi_s^{(-)}(\mathbf{r}) \approx \frac{m-H}{2m} \Psi_s^{(-)}(\mathbf{r}),$$

где H — гамильтониан электрона. В интересующем нас приближении

$$H \approx m\gamma_4, \quad H\Psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \pm m\Psi^{(\pm)}(\mathbf{r}).$$

Поэтому

$$\frac{m-H}{2m} \Psi_s^{(-)}(\mathbf{r}) = \Psi_s^{(-)}(\mathbf{r}), \quad \frac{m-H}{2m} \Psi_s^{(+)}(\mathbf{r}) = 0$$

и

$$U^{(-)} = \frac{\pi\alpha}{2m\sqrt{\omega_1\omega_2}} \sum_s \{ \langle 2 | \hat{e}_2 (1-\gamma_4) e^{-ik_2r} | s \rangle \langle s | \hat{e}_1 e^{ik_1r} | 1 \rangle + \\ + \langle 2 | \hat{e}_1 (1-\gamma_4) e^{ik_1r} | s \rangle \langle s | \hat{e}_2 e^{-ik_2r} | 1 \rangle,$$

где сумма распространяется на оба знака частоты. Воспользовавшись правилом умножения матриц, можно переписать это выражение в виде

$$U^{(-)} = \frac{\pi\alpha}{2m\sqrt{\omega_1\omega_2}} \langle 2 | \{ \hat{e}_2 (\gamma_4 - 1) e^{-i(k_2-k_1)r} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 (\gamma_4 - 1) e^{-i(k_2-k_1)r} \hat{e}_2 \} | 1 \rangle.$$

Замечая, наконец, что, выбрав $e_4 = 0$, можно заменить \hat{e} на $\hat{e} = \boldsymbol{\gamma}e$, причем

$$\gamma_4 \hat{e} = -\hat{e} \gamma_4, \quad \hat{e}_2 \hat{e}_1 + \hat{e}_1 \hat{e}_2 = 2e_1 e_2,$$

и что в нашем приближении $\gamma_4 \Psi_1 \approx \Psi_1$, получим окончательно

$$U^{(-)} = -\frac{2\pi\alpha}{m\sqrt{\omega_1\omega_2}} (e_1 e_2) \int \Psi_2^*(\mathbf{r}) \Psi_1(\mathbf{r}) e^{i(k_1-k_2)r} d^3x. \quad (27.1.5)$$

Рассмотрим теперь часть суммы (27.1.4), относящуюся к положительным частотам. В нерелятивистском приближении в числителях дробей, входящих в эту часть U , можно, согласно § 12.1, заменить $\boldsymbol{\alpha}A$ на $\frac{1}{m} \mathbf{A} \mathbf{p} + \boldsymbol{\mu} \text{rot } \mathbf{A}$ и $\boldsymbol{\alpha}e$ на $\frac{1}{m} \mathbf{e} \mathbf{p} + i\boldsymbol{\mu} [\mathbf{k}e]$, где $\boldsymbol{\mu}$ — спиновый магнитный момент электрона. Сделав эту замену и воспользовавшись формулой (27.1.5) для $U^{(-)}$, получим следующее выражение для U :

$$U = -\frac{4\pi\alpha}{m} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{s(E_s > 0)} \left(\frac{\langle 2 | \mathbf{p}' A_2^* | s \rangle \langle s | \mathbf{p}' A_1 | 1 \rangle}{E_1 - E_s + \omega_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\langle 2 | \mathbf{p}' A_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{p}' A_2^* | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right) + \langle 2 | A_2^* A_1 | 1 \rangle \right\}, \quad (27.1.6)$$

где $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + m[\boldsymbol{\mu}\nabla]$ (матричные элементы в этом выражении вычисляются с нерелятивистскими волновыми функциями).

Заметим, что матричный элемент (27.1.6) можно получить также и иным способом, а именно, если с самого начала пользоваться нерелятивистским оператором энергии взаимодействия электрона с электромагнит-

ным полем (см. (12.1.7)):

$$H_I = -\frac{e}{m} \mathbf{p}' \mathbf{A} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} + m [\boldsymbol{\mu} \nabla].$$

Квадратичный относительно \mathbf{A} член в этом операторе обуславливает «прямые переходы» и в первом приближении теории возмущений приводит к последнему члену в (27.1.6), линейный же член обуславливает переходы через «промежуточные» состояния и во втором приближении теории возмущений приводит к сумме в (27.1.6).

Если длина волны рассеиваемого фотона велика по сравнению с размерами атома, то $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$ можно считать постоянными, так как $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \approx e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}$ (\mathbf{R} — радиус-вектор центра атома). В этом случае формула (27.1.6) принимает вид

$$U = -\frac{2\pi\alpha}{m\sqrt{\omega_1\omega_2}} e^{i(k_1-k_2)\mathbf{R}} \left\{ \frac{1}{m} \sum_s \left(\frac{\langle 2 | \mathbf{p} \mathbf{e}_2 | s \rangle \langle s | \mathbf{p} \mathbf{e}_1 | 1 \rangle}{E_1 - E_s + \omega_1} + \frac{\langle 2 | \mathbf{p} \mathbf{e}_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{p} \mathbf{e}_2 | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right) + \right. \\ \left. + (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \delta_{12} \right\}. \quad (27.1.7)$$

Последний член здесь отличается от нуля только для когерентного рассеяния, когда $\psi_1 = \psi_2$.

Эту формулу, определяющую закон дисперсии, т. е. зависимость рассеивающей способности атома от частоты света, можно представить в несколько ином виде, а именно таким образом, чтобы в нее вместо матричных элементов импульса входили матричные элементы дипольного момента атома. Для этого нужно воспользоваться соотношением

$$\langle n | \mathbf{p} | s \rangle = im (E_n - E_s) \langle n | \mathbf{r} | s \rangle,$$

а также условиями коммутации между операторами импульса и координаты, из которых следует:

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = i \langle 2 | \{ (\mathbf{p} \mathbf{e}_1) (\mathbf{r} \mathbf{e}_2) - (\mathbf{r} \mathbf{e}_1) (\mathbf{p} \mathbf{e}_2) \} | 1 \rangle = \\ = i \sum_s \{ \langle 2 | \mathbf{p} \mathbf{e}_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{r} \mathbf{e}_2 | 1 \rangle - \langle 2 | \mathbf{r} \mathbf{e}_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{p} \mathbf{e}_2 | 1 \rangle \}.$$

Прибавляя, далее, в фигурной скобке в (27.1.7) равное нулю слагаемое

$$\omega_2 \sum_s \{ \langle 2 | \mathbf{r} \mathbf{e}_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{r} \mathbf{e}_2 | 1 \rangle - \langle 2 | \mathbf{r} \mathbf{e}_2 | s \rangle \langle s | \mathbf{r} \mathbf{e}_1 | 1 \rangle \} = 0,$$

получим окончательно [7]

$$U = -2\pi\alpha e^{i(k_1-k_2)\mathbf{R}} \sqrt{\omega_1\omega_2} \sum_s \left\{ \frac{\langle 2 | \mathbf{r} \mathbf{e}_2 | s \rangle \langle s | \mathbf{r} \mathbf{e}_1 | 1 \rangle}{E_1 - E_s + \omega_1} + \frac{\langle 2 | \mathbf{r} \mathbf{e}_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{r} \mathbf{e}_2 | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right\}. \quad (27.1.8)$$

Дифференциальное сечение рассеяния связано с U соотношением

$$d\sigma = 2\pi |U|^2 \delta(E_1 + \omega_1 - E_2 - \omega_2) \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}.$$

Устраняя δ -функцию интегрированием по $d\omega_2$, найдем

$$d\sigma = \omega_1 \omega_2^3 d\omega_2 \left| \sum_s \left\{ \frac{\langle 2 | \mathbf{Q} \mathbf{e}_2 | s \rangle \langle s | \mathbf{Q} \mathbf{e}_1 | 1 \rangle}{E_1 - E_s + \omega_1} + \frac{\langle 2 | \mathbf{Q} \mathbf{e}_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{Q} \mathbf{e}_2 | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right\} \right|^2, \quad (27.1.9)$$

где \mathbf{Q} — дипольный момент атома.

Если рассеивающая система содержит не один, а несколько электронов, то под Q следует понимать суммарный дипольный момент системы.

Формула (27.1.8) справедлива, если длина волны фотона велика по сравнению с размерами атома a , $\lambda \gg a$.

27.2. Резонансное рассеяние. В дисперсионную формулу (27.1.8) входит сумма по всем возбужденным состояниям атома. Если частота фотона ω_1 равна разности энергий одного из возбужденных состояний и основного состояния атома, т. е. $\omega_1 = E_s - E_1$, то сечение рассеяния обращается в бесконечность, что указывает на неприменимость полученной формулы при $\omega_1 = E_s - E_1$. Этот случай называется *резонансом*.

Мы не будем развивать здесь строгую теорию резонанса, а ограничимся лишь разъяснением физической причины неприменимости формулы (27.1.8) вблизи резонанса и укажем приближенный метод рассмотрения явления резонанса. Последовательное рассмотрение резонансного рассеяния, использующее общую теорию радиационных поправок, будет дано в § 38.5.

Причина неприменимости формулы (27.1.8) вблизи резонанса заключается в том, что мы рассматривали $\psi_s(x)$ как волновые функции стационарных состояний, содержащих время в виде $e^{-iE_s t}$. Между тем возбужденные состояния являются лишь приближенно стационарными, так как благодаря взаимодействию с электромагнитным полем существует конечная вероятность перехода атома в основное состояние (эта вероятность была определена в § 25).

Приближенно стационарные состояния можно описывать как состояния с комплексной энергией, волновые функции которых содержат время в виде

$$\psi_s \sim e^{-i(E_s - \frac{i}{2}\Gamma_s)t},$$

где Γ_s — вещественная положительная величина. Вероятность нахождения атома в возбужденном состоянии, пропорциональная $|\psi_s|^2$, убывает при этом по закону $e^{-\Gamma_s t}$. Это показывает, что

$$\Gamma_s = \omega_s,$$

где ω_s — вероятность излучения, определяемая формулами (25 2 7), (25 3 4).

При частотах, близких к резонансной, можно в формуле (27 1 8) отбросить все слагаемые, кроме резонансного, и заменить в нем E_s на $E_s - \frac{i}{2}\Gamma_s$. Таким образом, мы получим следующее выражение для амплитуды рассеяния [8].

$$U = 2\pi\alpha V \sqrt{\omega_1\omega_2} \frac{\sum \langle 2 | re_2 | s \rangle \langle s | re_1 | 1 \rangle}{E_s - E_1 - \omega_1 - \frac{i}{2}\Gamma_s},$$

где сумма распространяется на все состояния с энергией s . Соответственно дифференциальное сечение рассеяния будет

$$d\sigma = \omega_1\omega_2^3 d\omega_2 \frac{|\sum \langle 2 | Qe_2 | s \rangle \langle s | Qe_1 | 1 \rangle|^2}{(E_s - E_1 - \omega_1)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_s^2}. \quad (27.2.1)$$

Чтобы найти полное сечение рассеяния, нужно проинтегрировать выражение (27 2 1) по углам, усреднить по поляризациям падающего фотона и проецировать момента начального состояния и просуммировать по поляризациям рассеянного фотона и проецировать момента конечного состояния.

Такое сечение определяется, помимо E_1 , E_s и ω_1 , ω_2 , только шириной уровня s и значениями моментов. В случае рассеяния без изменения частоты полное сечение равно

$$\sigma = \frac{2j_s + 1}{2(2j_1 + 1)} \frac{4\pi}{\omega_2} \frac{\Gamma_s}{(E_s - E_1 - \omega)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_s^2}, \quad (27.2.2)$$

где j_s и j_1 — моменты системы в состояниях s и 1 , $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Эта формула сохраняет свой вид и в том случае, когда состояние s произвольным образом отличается от состояния 1 по моменту и четности. При этом под $\Gamma_s = \omega_s$ следует понимать вероятность излучения соответствующего мультиполя.

27.3. Излучение двух фотонов. С помощью матрицы $\mathbf{S}^{(2)}$, определяемой формулой (27.1.1), может быть также решена задача об одновременном излучении двух фотонов [9]. Для этого в выражении (27.1.6) для матричного элемента U нужно заменить A_1 на A_1^* . Амплитуда излучения двух фотонов с импульсами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 в дипольном приближении будет иметь вид, аналогичный (27.1.8):

$$U = -2\pi\alpha \sqrt{\omega_1\omega_2} \sum_s \left\{ \frac{\langle 2 | \mathbf{r}e_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{r}e_2 | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_1} + \frac{\langle 2 | \mathbf{r}e_2 | s \rangle \langle s | \mathbf{r}e_1 | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right\}. \quad (27.3.1)$$

Вероятность излучения двух фотонов с импульсами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 в интервалах d^3k_1 и d^3k_2 связана с U соотношением

$$d\omega_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = 2\pi |U|^2 \delta(E_1 - E_2 - \omega_1 - \omega_2) \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6}.$$

Устранив здесь δ -функцию интегрирования по $d\omega_2$, получим

$$d\omega_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \omega_1^3 \omega_2^2 d\omega_1 d\omega_1 d\omega_2 \left| \sum_s \left\{ \frac{\langle 2 | \mathbf{Q}e_2 | s \rangle \langle s | \mathbf{Q}e_1 | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_1} + \frac{\langle 2 | \mathbf{Q}e_1 | s \rangle \langle s | \mathbf{Q}e_2 | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right\} \right|^2, \quad (27.3.2)$$

где \mathbf{Q} — дипольный момент атома.

Проинтегрировав (27.3.2) по углам и просуммировав по поляризациям фотонов, найдем вероятность излучения двух фотонов с энергиями ω_1 и $\omega_2 = E_1 - E_2 - \omega_1$:

$$d\omega_{\omega_1\omega_2} = \frac{8}{9\pi} \omega_1^3 \omega_2^2 d\omega_1 \sum_{M_1 M_2} \left| \sum_s \left\{ \frac{\langle 2 | Q_{M_2} | s \rangle \langle s | Q_{M_1} | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_1} + \frac{\langle 2 | Q_{M_2} | s \rangle \langle s | Q_{M_1} | 1 \rangle}{E_1 - E_s - \omega_2} \right\} \right|^2, \quad (27.3.3)$$

где $Q_M \equiv Q_{1M}^0$ — составляющие дипольного момента, определенные в § 25 2.

Вероятность излучения двух фотонов с частотами ω_1 и ω_2 обычно очень мала по сравнению с вероятностью излучения одного фотона с суммарной частотой $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Исключение составляет тот случай, когда излучение одного фотона не допускается правилами отбора. Это имеет место, например, если момент количества движения излучающей системы (атома или ядра) в начальном и конечном состояниях равен нулю. При этом вероятность излучения одного фотона точно равна нулю, так как фотон не имеет состояний с моментом нуль.

Для одного электрона приближенно запрещенными являются также переходы между состояниями с орбитальным моментом, равным нулю.

Типичным случаем, в котором излучение двух фотонов значительно вероятнее излучения одного фотона, является излучение в возбужденном состоянии водорода $2s_{1/2}$. Переход из этого состояния и основное состояние $1s_{1/2}$ возможен с испусканием одного магнитодипольного фотона. Однако в нерелятивистском приближении вероятность такого перехода, определяемая формулой (25.3.4), обращается в нуль в силу ортогональности радиальных волновых функций с различными главными квантовыми числами. Отличное от нуля выражение для вероятности перехода получается только при использовании точных релятивистских волновых функций; при этом вероятность оказывается порядка 10^{-7} сек^{-1} .

Значительно более вероятен переход $2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ с испусканием двух дипольных фотонов электрического типа. Вероятность такого перехода может быть определена с помощью формулы (27.3.3).

Матричные элементы дипольного момента отличны от нуля, если разность орбитальных моментов связываемых состояний равна единице. Так как начальное и конечное состояния являются s -состояниями, то «промежуточные» состояния должны быть p -состояниями с тремя значениями магнитного квантового числа $m = -1, 0, 1$; главное же квантовое число в «промежуточном» состоянии может принимать любое значение, начиная с 2.

Волновые функции начального, конечного и промежуточного состояний имеют следующий вид:

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} R_{10}(r),$$

$$\psi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} R_{20}(r),$$

$$\psi_s(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right), \quad m = 0, \pm 1; \quad n = 2, 3, \dots,$$

где R_{nl} — радиальная волновая функция электрона (n — главное и l — орбитальное квантовые числа). Записав матричные элементы электрического дипольного момента в виде

$$\langle 2 | Q_M | s \rangle = \frac{e}{\sqrt{12\pi}} Q_{2n} \delta_{Mm},$$

$$\langle s | Q_M | 1 \rangle = \frac{e}{\sqrt{12\pi}} Q_{1n} \delta_{Mm},$$

где

$$Q_{n'n} = \int_0^{\infty} R_{n'0}(r) R_{n1}(r) r^3 dr, \quad n' = 1, 2,$$

получим для $d\omega_{\omega_1\omega_2}$ согласно (27.3.3), выражение

$$d\omega_{\omega_1\omega_2} = \frac{8\alpha^2}{27\pi} \omega_1^3 \omega_2^3 d\omega_1 \left| \sum_{n=2}^{\infty} Q_{2n} Q_{1n} \left(\frac{1}{E_1 - E_n - \omega_1} + \frac{1}{E_1 - E_n - \omega_2} \right) \right|^2. \quad (27.3.4)$$

Для интегралов Q_{2n} и Q_{1n} могут быть получены аналитические выражения, суммирование же по n может быть выполнено только численно. Полная вероятность перехода оказывается приблизительно равной [10]

$$w = \int_{\omega_1=0}^{\omega_1=E_1-E_2} d\omega_{\omega_1\omega_2} \approx 7 \text{ сек}^{-1}.$$

§ 28. Тормозное излучение

28.1. Эффективное сечение тормозного излучения. При столкновении электрона с какой-либо заряженной частицей или системой заряженных частиц, наряду с рассеянием электрона, происходит излучение фотона. Такой процесс называется *тормозным излучением*. Если столкновение электрона происходит с тяжелой частицей (ядром, атомом), то действие последней может учитываться как действие внешнего поля. В этом случае тормозное излучение описывается матричным элементом (25.1.1), в котором начальное состояние относится к непрерывному, а конечное — к непрерывному или дискретному спектру. Ввиду сложного характера волновых функций электрона в поле ядра этот матричный элемент удается вычислить только в случае малых энергий, когда можно пользоваться нерелятивистским приближением, а также в предельном случае больших энергий и малых углов рассеяния электрона.

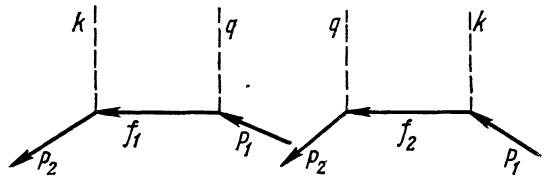


Рис. 28.1.

Если внешнее поле таково, что его можно учитывать методами теории возмущений, то для определения вероятности тормозного излучения достаточно вычислить соответствующий элемент матрицы рассеяния второго порядка $S^{(2)}$, определяемой формулой (26.1.1).

Критерий применимости такого рассмотрения совпадает, очевидно, с критерием применимости борновского приближения для кулоновского поля:

$$\frac{Ze^2}{4\pi v} \ll 1,$$

где Ze — заряд ядра и v — скорость электрона.

Мы рассмотрим сначала этот относительно простой случай, охватывающий весьма широкую область применений.

Матричный элемент, определяющий процесс тормозного излучения, может быть написан на основании правил Фейнмана (§ 17.5). Соответствующие диаграммы изображены на рис. 28.1; они отличаются от диаграмм, изображающих эффект Комптона, только тем, что первичному фотону с 4-импульсом k_1 соответствует здесь «псевдофотон» с 4-импульсом q , т. е. q -компонента Фурье внешнего потенциала, а рассеянному фотону с 4-импульсом k_2 — излучаемый фотон с 4-импульсом k и поляризацией e . Соответственно этому матричный элемент тормозного излучения отличается от матричного элемента эффекта Комптона заменой

$$k_1 \rightarrow q, \quad k_2 \rightarrow k, \quad e_1 \rightarrow A^{(e)}(q), \quad e_2 \rightarrow e$$

и имеет следующий вид:

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{ie^2}{2\sqrt{2\omega e_1 e_2}} \bar{u}_2 \left\{ \frac{1}{m^2 \kappa_1} \hat{e}(i\hat{f}_1 - m) \hat{A}^{(e)}(q) + \frac{1}{m^2 \kappa_2} \hat{A}^{(e)}(q) (i\hat{f}_2 - m) \hat{e} \right\} u_1, \quad (28.1.1)$$

где

$$f_1 = p_2 + k, \quad f_2 = p_1 - k, \quad q = p_2 + k - p_1, \\ m^2 \kappa_1 = 2p_2 k, \quad m^2 \kappa_2 = -2p_1 k.$$

Из законов сохранения энергии и импульса следует, что взятый с обратным знаком 4-импульс «псевдофотона» q равен 4-импульсу, получаемому ядром в результате процесса тормозного излучения: $-q = p_1 - p_2 - k$. Таким образом, $-q$ представляет собой трехмерный импульс отдачи ядра, а $-q_0$ — энергию, передаваемую ядру.

Если внешнее поле не зависит от времени и описывается статическим потенциалом $A_0^{(e)}(\mathbf{r})$, что имеет место для неподвижного ядра, то

$$\begin{aligned}\hat{A}^{(e)}(q) &= 2\pi i \delta(q_0) \gamma_4 A_0^{(e)}(q), \\ A_0^{(e)}(q) &= \int A_0^{(e)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3x\end{aligned}$$

(в этом случае можно сказать, что вектор поляризации «псевдофотона», в отличие от вектора поляризации реального фотона, направлен вдоль временной оси).

Для кулоновского поля ядра

$$A_0^{(e)}(q) = -\frac{Ze}{q^2}.$$

Перейдем к определению дифференциального сечения $d\sigma$ тормозного излучения в кулоновском поле ядра. Используя правила, изложенные в § 18.3, и выражение (28.1.1) для матричного элемента, получим

$$d\sigma = \frac{e^4}{8\omega\varepsilon_1\varepsilon_2} |A_0^{(e)}(q)|^2 |\bar{u}_2 Q u_1|^2 \frac{d^3p_2}{(2\pi)^5} \frac{d^3k}{v_1} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega), \quad (28.1.2)$$

где v_1 — скорость электрона в начальном состоянии, и

$$Q = \frac{1}{m^2\kappa_1} \hat{e} (i\hat{f}_1 - m) \gamma_4 + \frac{1}{m^2\kappa_2} \gamma_4 (i\hat{f}_2 - m) \hat{e}.$$

Найдем прежде всего сечение тормозного излучения, усредненное по ориентациям спина падающего электрона и просуммированное по ориентациям спина рассеянного электрона и по поляризациям излученного фотона. Такое усреднение и суммирование по поляризациям частиц сводится, согласно результатам § 18.2, к следующей замене в (28.1.2):

$$|\bar{u}_2 Q u_1|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \text{Sp } F,$$

где

$$\begin{aligned}F &= Q_\mu (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_\mu (i\hat{p}_2 - m), \\ Q_\mu &= \frac{1}{m^2\kappa_1} \gamma_\mu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_4 + \frac{1}{m^2\kappa_2} \gamma_4 (i\hat{f}_2 - m) \gamma_\mu, \quad \bar{Q}_\mu = \gamma_4 Q_\mu^+ \gamma_4.\end{aligned}$$

Величину $\text{Sp } F$ можно записать в виде

$$\text{Sp } F = F_1 + F_2, \quad (28.1.3)$$

где

$$\begin{aligned}F_1 &= \text{Sp } Q_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_4 \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \gamma_4 (i\hat{p}_2 - m), \\ F_2 &= \text{Sp } Q_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\mu \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2\kappa_2} \gamma_4 (i\hat{p}_2 - m).\end{aligned}$$

Если в выражении, определяющем F_2 , сделать замену

$$p_1 \rightleftarrows p_2, \quad q \rightarrow -q, \quad k \rightarrow -k,$$

то κ_1 и κ_2 , так же как f_1 и f_2 , меняются местами:

$$f_1 \rightleftharpoons f_2, \quad \kappa_1 \rightleftharpoons \kappa_2,$$

и мы получим под знаком Sp в выражении для F_2 те же матрицы, что и в выражении для F_1 , но только расположенные в обратном порядке. Отсюда следует:

$$F_2(\kappa_1, \kappa_2, q^2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = F_1(\kappa_2, \kappa_1, q^2, \varepsilon_2, \varepsilon_1).$$

Поэтому достаточно вычислить F_1 .

Вычисление F_1 производится просто: после суммирования по индексу μ , согласно формулам (8.3 8), следует, пользуясь правилами коммутации для матриц γ_μ , расположить их так, чтобы две матрицы γ_4 оказались рядом. Это может быть сделано с помощью очевидной формулы

$$\gamma_4 \hat{b} = -\hat{b}^* \gamma_4 \quad (\hat{b}^* = \mathbf{b}, \quad b_4^* = -b_4),$$

справедливой для любого вещественного 4-вектора b (т. е. 4-вектора с вещественной пространственной и мнимой четвертой составляющей). Так как $\gamma_4^2 = 1$, то после такого расположения матриц в каждом члене останется произведение не более чем четырех матриц γ_ν , след которых может быть легко найден. Поступая таким образом, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} F_1 = \frac{1}{\kappa_1^2} \left\{ \left(\kappa_1 \kappa_2 + 2 \frac{q^2}{m^2} \right) - \frac{4\varepsilon_1^2}{m^2} (\kappa_1 + 2) + \frac{4\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m^2} \kappa_1 \right\} + \\ + \frac{1}{\kappa_1 \kappa_2} \left\{ -\frac{q^2}{m^2} \left(\kappa_1 + \kappa_2 - \frac{q^2}{m^2} - 2 \right) + \frac{2\varepsilon_1^2}{m^2} \left(\kappa_2 - \frac{q^2}{m^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\varepsilon_2^2}{m^2} \left(\kappa_1 - \frac{q^2}{m^2} \right) - \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m^2} (\kappa_1 + \kappa_2 + 4) \right\}. \quad (28.1.4) \end{aligned}$$

Поменяв здесь местами κ_1 и κ_2 , а также ε_1 и ε_2 , найдем F_2 .

Подставив эти выражения в (28.1.2), получим

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{Z^2 e^6}{4\omega \varepsilon_1 \varepsilon_2 v_1} \frac{d^3 p_2 d^3 k}{(2\pi)^5} \frac{\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega)}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 q^4} \times \\ \times \left\{ -2\kappa_1 \kappa_2 \frac{q^2}{m^2} \left[\frac{2}{m^2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \kappa_1 + \kappa_2 - \frac{q^2}{m^2} - 2 \right] + \right. \\ \left. + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \left(\kappa_1 \kappa_2 + 2 \frac{q^2}{m^2} \right) - \frac{8}{m^2} (\kappa_1 \varepsilon_2 + \kappa_2 \varepsilon_1)^2 \right\}. \quad (28.1.5) \end{aligned}$$

В отличие от эффекта Комптона, импульс рассеянного электрона \mathbf{p}_2 и импульс фотона \mathbf{k} здесь независимы. Поэтому δ -функция может быть просто устранена, действительно, замечая, что

$$d^3 p_2 = |\mathbf{p}_2| d\varepsilon_2 d\omega_2, \quad d^3 k = \omega^2 d\omega d\omega,$$

где $d\omega_2$ и $d\omega$ — элементы телесных углов, в которых лежат векторы \mathbf{p}_2 и \mathbf{k} , имеем

$$\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega) d^3 p_2 d^3 k \rightarrow \omega^2 |\mathbf{p}_2| \varepsilon_2 d\omega_2 d\omega.$$

Используя это соотношение, получим окончательно следующее выражение для усредненного по поляризациям частиц сечения тормозного

излучения [11] ¹⁾.

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3}{(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{p}_2|}{|\mathbf{p}_1|} \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\theta}{q^4} \frac{d\theta_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2} 2\omega^2 \times \\ \times \left\{ -2\kappa_1 \kappa_2 \frac{q^2}{m^2} \left[-2 + \kappa_1 + \kappa_2 - \frac{q^2}{m^2} + \frac{2}{m^2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \left(\kappa_1 \kappa_2 + \frac{2q^2}{m^2} \right) - 8 \frac{(\kappa_1 \varepsilon_2 + \kappa_2 \varepsilon_1)^2}{m^2} \right] \right\}, \quad (28.1.6)$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}.$$

Учитывая соотношения

$$m^2 \kappa_1 = 2(\mathbf{p}_2 \mathbf{k} - \varepsilon_2 \omega) = -2\omega(\varepsilon_2 - p_2 \cos \vartheta_2),$$

$$m^2 \kappa_2 = -2(\mathbf{p}_1 \mathbf{k} - \varepsilon_1 \omega) = 2\omega(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1),$$

$$q^2 = m^2(\kappa_1 + \kappa_2 - 2) + 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - p_1 p_2),$$

где $p_1 = |\mathbf{p}_1|$, $p_2 = |\mathbf{p}_2|$, а ϑ_1 и ϑ_2 — углы между векторами \mathbf{k} и \mathbf{p}_1 и \mathbf{k} и \mathbf{p}_2 , можно переписать $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3}{(2\pi)^2} \frac{p_2}{p_1} \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\theta}{q^4} \frac{d\theta_2}{m^4} \left\{ 4 \left[\mathbf{k} \left(\frac{\varepsilon_1 \mathbf{p}_2}{\kappa_1} + \frac{\varepsilon_2 \mathbf{p}_1}{\kappa_2} \right) \right]^2 - \right. \\ \left. - q^2 \left[\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{p}_2}{\kappa_1} + \frac{\mathbf{p}_1}{\kappa_2} \right) \right]^2 - \frac{2\omega^2}{\kappa_1 \kappa_2} [\mathbf{k}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)]^2 \right\} \quad (28.1.7)$$

или

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3}{(2\pi)^2} \frac{p_2}{p_1} \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\theta}{q^4} \frac{d\theta_2}{m^4} \left\{ \frac{p_2^2 \sin^2 \vartheta_2}{(\varepsilon_2 - p_2 \cos \vartheta_2)^2} (4\varepsilon_1^2 - q^2) + \right. \\ \left. + \frac{p_1^2 \sin^2 \vartheta_1}{(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} (4\varepsilon_2^2 - q^2) + 2\omega^2 \frac{p_1^2 \sin^2 \vartheta_1 + p_2^2 \sin^2 \vartheta_2}{(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)(\varepsilon_2 - p_2 \cos \vartheta_2)} - \right. \\ \left. - \frac{2p_1 p_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi}{(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)(\varepsilon_2 - p_2 \cos \vartheta_2)} (4\varepsilon_1 \varepsilon_2 - q^2 + 2\omega^2) \right\}, \quad (28.1.8)$$

где φ — угол между плоскостями $(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1)$ и $(\mathbf{k}, \mathbf{p}_2)$.

Квадрат переданного ядру импульса q^2 связан с углами ϑ_1 , ϑ_2 , φ соотношением

$$q^2 = p_1^2 + p_2^2 + \omega^2 - 2p_1 \omega \cos \vartheta_1 + 2p_2 \omega \cos \vartheta_2 - \\ - 2p_1 p_2 (\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi).$$

Из (28.1.8) следует, что $d\sigma$ обращается в нуль при $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$

28.2. Угловое распределение излучения в кулоновском поле. Формула (28.1.8) определяет усредненное по поляризациям фотона и рассеянного электрона угловое распределение тормозного излучения для неполяризованных первичных электронов. В общем случае угловое распределение излучения имеет сложный характер. Оно становится более простым в предельных случаях малых и больших энергий электрона

¹⁾ Подробную сводку формул со ссылками, относящимися к тормозному излучению, см. [12].

В предельном случае малых энергий первичных электронов, соответствующем задаче о сплошном спектре рентгеновских лучей, импульс фотона мал по сравнению с импульсом электрона, так как

$$\omega = \frac{1}{2m} (p_1^2 - p_2^2) \ll p_1.$$

Поэтому

$$q^2 = (p_1 - p_2)^2.$$

Замечая далее, что в нерелятивистском случае

$$m^2 \kappa_2 = -m^2 \kappa_1 = 2m\omega, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = m,$$

и сохраняя в фигурных скобках (28.1.7) только первый член, получим

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3}{\pi^2} \frac{d\omega}{\omega^3} \frac{p_2}{p_1} \frac{do do_2}{(p_1 - p_2)^4} [k (p_1 - p_2)]^2, \quad p_1 \ll m. \quad (28.2.1)$$

Так как p_2 мало отличается от p_1 , то в этом выражении можно выделить множитель

$$d\sigma_s = \frac{(2mZ\alpha)^2}{(p_1 - p_2)^4} do_2, \quad (28.2.2)$$

который представляет собой резерфордское сечение упругого рассеяния электронов. Мы можем поэтому сказать, что в нерелятивистском случае сечение тормозного излучения равняется произведению сечения упругого рассеяния электрона $d\sigma_s$ на вероятность излучения фотона $d\omega_\gamma$:

$$d\sigma = d\sigma_s \cdot d\omega_\gamma, \quad (28.2.3)$$

где

$$d\omega_\gamma = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \left[\frac{k}{\omega} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \right]^2 \frac{d\omega}{\omega} do. \quad (28.2.4)$$

Интенсивность излучения достигает максимума в направлении, перпендикулярном к плоскости движения электрона (p_1, p_2) .

Полученное выражение для вероятности излучения находится в соответствии с классической теорией излучения, а именно, $d\omega_\gamma$ представляет собой отношение интенсивности дипольного излучения при малых частотах к энергии фотона, т. е. определенное классически среднее число фотонов, излучаемых в единицу времени.

Отметим, что представление сечения тормозного излучения в виде (28.2.3) возможно во всех тех случаях, когда излучаются фотоны малых частот. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 29.

Так как в (28.1.8) входят множители $(1 - v_1 \cos \vartheta_1)^{-1}$ и $(1 - v_2 \cos \vartheta_2)^{-1}$, то в случае больших энергий $\varepsilon_1 \gg m$, $\varepsilon_2 \gg m$, когда $v_1 \sim 1$ и $v_2 \sim 1$, сечение тормозного излучения имеет резкий максимум вблизи направления импульса падающего электрона. Излучение сосредоточено при этом в основном в узком конусе около этого направления с углом раствора порядка $\vartheta_1 \sim \frac{m}{\varepsilon_1}$; в этом же конусе лежит импульс рассеянного электрона.

Проинтегрировав (28.1.8) по do_2 , получим дифференциальное сечение (мы будем обозначать его через $d\sigma_\gamma$), описывающее распределение фотонов

по углам и частотам независимо от угла рассеяния электронов:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\gamma} = & \frac{Z^2\alpha^3}{8\pi} \frac{d\omega}{\omega} d\theta \frac{p_2}{p_1} \left\{ \frac{8 \sin^2 \vartheta_1 (2\varepsilon_1^2 + m^2) m^2}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^4} - \right. \\
 & - \frac{2(5\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 3m^2)}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} - \frac{2(p_1^2 - \omega^2)}{(\mathbf{p}_1\mathbf{k}) (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)} + \frac{4\varepsilon}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)} + \\
 & + \frac{1}{p_1 p_2} \ln \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + p_1 p_2 - m^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - p_1 p_2 - m^2} \left[\frac{4\varepsilon_1 \sin^2 \vartheta_1 (3\omega m^2 - p_1^2 \varepsilon_2) m^2}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^4} + \frac{4\varepsilon_1^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{(2m^2 - 2(7\varepsilon_1^2 - 3\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2))^2}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} + \frac{2\omega (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 - m^2)}{p_1^2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} \right] - \\
 & - 4 \ln \frac{\varepsilon_2 + p_2}{\varepsilon_2 - p_2} \frac{1}{p_2 (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)} + \\
 & \left. + \frac{1}{m^2} \ln \frac{\sqrt{\mathbf{p}_1\mathbf{k}} + p_2}{\sqrt{\mathbf{p}_1\mathbf{k}} - p_2} \left[\frac{4m^2}{(\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)^2} - \frac{6\omega}{\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1} - \frac{2\omega (p_1^2 - \omega^2)}{(\mathbf{p}_1\mathbf{k}) (\varepsilon_1 - p_1 \cos \vartheta_1)} \right] \right\}. \quad (28.2.5)
 \end{aligned}$$

В случае больших энергий ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 \gg m$) и малых углов ϑ эта формула принимает вид

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\gamma} = & \frac{2Z^2}{\pi} \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} d\theta \frac{1}{\left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{m^2} \vartheta_1^2\right)^2} \left\{ \frac{16\varepsilon_1^3 \varepsilon_2}{m^4} \cdot \frac{\vartheta_1^2}{\left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{m^2} \vartheta_1^2\right)^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{m^2} + 2 \ln \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m\omega} \left[\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{m^2} - \frac{4\varepsilon_1^3 \varepsilon_2}{m^4} \frac{\vartheta_1^2}{\left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{m^2} \vartheta_1^2\right)^2} \right] \right\}. \quad (28.2.6)
 \end{aligned}$$

28.3. Поляризация излучения. Рассмотрим теперь вопрос о поляризации тормозного излучения.

Если электрон в начальном состоянии характеризуется поляризацией ξ , то для нахождения сечения $d\sigma(\xi, \xi(\omega))$ образования фотона с поляризацией, определяемой параметрами $\xi^{(d)}$ нужно, согласно общим правилам § 18.4, сделать в формуле (28.1.2) замену

$$(\bar{u}_2 Q u_1)^2 \rightarrow \text{Sp} (Q_a \rho \bar{Q}_a' (m - i\hat{p}_2) \rho_{a'a}^d),$$

где ρ — матрица плотности электрона в начальном состоянии, $\rho_{a'a}^d$ — матрица плотности фотона и

$$Q_a = \frac{1}{m^2 x_1} \hat{e}_a (i\hat{f}_1 - m) \gamma_4 + \frac{1}{m^2 x_2} \gamma_4 (i\hat{f}_2 - m) \hat{e}_a.$$

Выбрав в качестве e_a ($a = 1, 2$) векторы

$$e_1 = \frac{[\mathbf{p}_1\mathbf{k}]}{|\mathbf{p}_1\mathbf{k}|}, \quad e_2 = \left[\frac{\mathbf{k}}{\omega} e_1 \right], \quad e_{a4} = 0$$

и выполнив необходимые суммирования, мы получим следующий результат [13]:

$$d\sigma(\xi, \xi^{(d)}) = \frac{Z^2\alpha}{2\pi^2} r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p_2}{p_1} d\theta d\theta_2 \frac{1}{q^4 m^2} (F_0 + F_i \xi_i^{(d)} + \mathbf{G}\xi + \mathbf{G}_i \xi_i^{(d)}), \quad (28.3.1)$$

где

$$F_0 = 4 \left[\mathbf{k} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varkappa_1} \mathbf{p}_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varkappa_2} \mathbf{p}_1 \right) \right]^2 - q^2 \left[\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{p}_2}{\varkappa_1} + \frac{\mathbf{p}_1}{\varkappa_2} \right) \right]^2 - \frac{2\omega^2}{\varkappa_1 \varkappa_2} [\mathbf{k} (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)]^2,$$

$$F_2 = 0,$$

$$F_3 = \frac{\omega^2}{\varkappa_1^2} \left(2(4\varepsilon_1^2 - q^2) (\mathbf{p}_2 \mathbf{e}_1)^2 - \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_2} [(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \mathbf{k}]^2 \right) - \omega^2 q^4,$$

$$F_1 = \frac{2\mathbf{p}_2 \mathbf{e}_1}{\varkappa_1} \omega^2 \left(\frac{4\varepsilon_1^2 - q^2}{\varkappa_1} (\mathbf{p}_2 \mathbf{e}_2) + \frac{4\varepsilon_1 \varepsilon_2 - q^2}{\varkappa_2} (\mathbf{p}_1 \mathbf{e}_2) \right),$$

$$\mathbf{G} = 0, \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} \xi \mathbf{G}_2 = & \frac{m}{2\varepsilon_1} \left\{ \left(\frac{\mathbf{p}_1}{\varkappa_2} + \frac{\mathbf{p}_2}{\varkappa_1} \right) [\mathbf{k} [\mathbf{k} (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)]] \left(\frac{\omega \mathbf{p}_1 \mathbf{a} + \varepsilon_1 \mathbf{k} \mathbf{a}}{\varkappa_1} + \frac{\omega \mathbf{p}_1 \mathbf{a} - \varepsilon_1 \mathbf{k} \mathbf{a}}{\varkappa_2} \right) + \right. \\ & + \frac{m^2 \omega}{2} \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} + \frac{4\omega}{m^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varkappa_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varkappa_2} \right) \right) \left(\frac{\varepsilon_2}{\varkappa_2} (\omega \mathbf{p}_1 \mathbf{a} - \varepsilon_1 \mathbf{k} \mathbf{a}) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varepsilon_1}{\varkappa_1} (\omega \mathbf{p}_2 \mathbf{a} - \varepsilon_2 \mathbf{k} \mathbf{a}) \right) \right\} \end{aligned}$$

и

$$\mathbf{a} = \xi + \frac{(\xi \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_1}{m(\varepsilon_1 + m)}.$$

Первое слагаемое в круглых скобках в (28.3.1) совпадает, как и следовало ожидать, с выражением в фигурных скобках в (28.1.7).

Согласно (28.3.1) фотон излучается в поляризованном состоянии, определяемом параметрами Стокса

$$\xi_3 = \frac{F_3}{F_0}, \quad \xi_1 = \frac{F_1}{F_0}, \quad \xi_2 = \frac{G_2 \xi}{F_0}. \quad (28.3.2)$$

Из (28.3.2) следует, что независимо от характера поляризации первичного электрона фотон оказывается линейно поляризованным (параметры ξ_1 и ξ_3 не зависят от ξ).

Если электрон поляризован, то возникает также круговая поляризация фотона. Поэтому, измеряя степень круговой поляризации тормозного излучения, можно определить степень поляризации электронов.

Величины ξ_i определяют поляризацию фотона при заданном импульсе \mathbf{p}_2 рассеянного электрона. Практически больший интерес представляет, однако, значение поляризации фотона безотносительно к значению \mathbf{p}_2 , т. е. значение поляризации фотона, усредненное по направлениям \mathbf{p}_2 .

Для нахождения усредненных таким образом параметров Стокса (мы будем обозначать их через $\bar{\xi}_i$) нужно проинтегрировать сечение $d\sigma(\xi, \xi^d)$ по направлениям импульса рассеянного электрона

$$d\sigma_\gamma(\xi, \xi^d) = \int \frac{d\sigma(\xi, \xi^{(d)})}{d\omega_2} d\omega_2.$$

Результат интегрирования мы приведем здесь только для предельного случая больших энергий и малых углов [14]:

$$d\sigma_\gamma(\xi, \xi^d) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi} r_0^2 \frac{d\omega'}{\omega} d\omega \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta_1^2 \varepsilon_1^2}{m^2}\right)^2} \{ \bar{F}_0 + \bar{F}_3 \bar{\xi}_3^{(d)} + \bar{G}_2 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_2^{(d)} \}, \quad (28.3.3)$$

где \bar{F}_0 совпадает с выражением в фигурной скобке в (28.2.6) и

$$\bar{F}_3 = \frac{8\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{m^4} \frac{\vartheta_1^2}{1 + \frac{\vartheta_1^2\varepsilon_1^2}{m^2}} \left(\ln \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{m\omega} - 2 \right),$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_2 = & -\frac{p_1}{p_1} \left\{ \frac{16\varepsilon_2\varepsilon_1^2\vartheta_1^2}{m^3(1 + \vartheta_1^2\varepsilon_1^2/m^2)^2} - \frac{\omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{m^2} - \frac{2\varepsilon_2}{m} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{2\omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{m} - \frac{8\varepsilon_2\varepsilon_1^2}{m^3} \frac{\vartheta_1^2}{\left(1 + \frac{\vartheta_1^2\varepsilon_1^2}{m^2}\right)^2} \right) \ln \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{m\omega} \right\} - \\ & - \frac{[p_1[kp_1]]}{|[p_1[kp_1]]|} \frac{4\omega\varepsilon_2}{m^2} \cdot \frac{\frac{\varepsilon_1^2\vartheta_1^2}{m^2} - 1}{\left(1 + \frac{\vartheta_1^2\varepsilon_1^2}{m^2}\right)^2} \left(\ln \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{m^2} - 2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда легко заключить, что усредненные значения параметров Стокса равны

$$\bar{\xi}_2(\omega) \quad \bar{\xi}_3 = \frac{\bar{F}_3}{\bar{F}_0}, \quad \bar{\xi}_2 = \frac{\bar{G}_2\bar{\zeta}}{\bar{F}_0}, \quad \bar{\xi}_1 = 0. \quad (28.3.4)$$

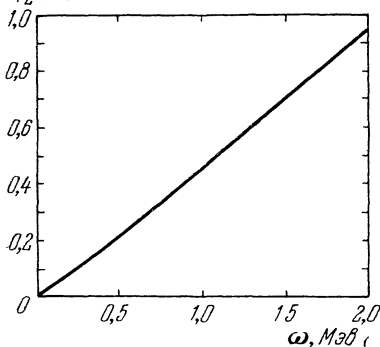


Рис. 28.2

В общем случае произвольных энергий и углов невозможно получить простые выражения для \bar{F}_3 и \bar{G}_2 . На рис. 28.2 представлена зависимость $\bar{\xi}_2$ от энергии фотона, излученного в направлении p_1 электроном с кинетической энергией $\varepsilon_1 - m = 2$ Мэв [15]. Мы видим, что на границе спектра круговая поляризация становится почти полной.

28.4. Спектр излучения. Проинтегрировав выражение (28.1.8) по углам, мы получим дифференциальное сечение излу-

чения $d\sigma_\omega$ в интервале частот ω , $\omega + d\omega$, независимо от направления импульсов фотона и электрона k и p_2 :

$$\begin{aligned} d\sigma_\omega = & \bar{\Phi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{p_2}{p_1} \left\{ \frac{4}{3} - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1^2 p_2^2} + \right. \\ & + m^2 \left(\frac{\eta_1\varepsilon_2}{p_1^3} + \frac{\eta_2\varepsilon_1}{p_2^3} - \frac{\eta_1\eta_2}{p_1 p_2} \right) - L \left[\frac{8}{3} \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{p_1 p_2} + \frac{\omega^2}{p_1^2 p_2^2} (\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + p_1^2 p_2^2) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{m^2\omega}{2p_1 p_2} \left(\eta_1 \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 - p_1^2}{p_1^3} - \eta_2 \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 - p_2^2}{p_2^3} + \frac{2\omega\varepsilon_1\varepsilon_2}{p_1^2 p_2^2} \right) \right] \right\}, \quad (28.4.1) \end{aligned}$$

где

$$\bar{\Phi} = r_0^2 Z^2 \alpha,$$

$$L = \ln \frac{p_1^2 + p_1 p_2 - \varepsilon_1 \omega}{p_1^2 - p_1 p_2 - \varepsilon_1 \omega} = 2 \ln \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + p_1 p_2 - m^2}{m\omega},$$

$$\eta_1 = \ln \frac{\varepsilon_1 - p_1}{\varepsilon_1 + p_1} = 2 \ln \frac{\varepsilon_1 - p_1}{m}, \quad \eta_2 = 2 \ln \frac{\varepsilon_2 + p_2}{m}, \quad p_{1,2} = |p_{1,2}|.$$

При малых энергиях, $p_1 \ll m$, это выражение сильно упрощается:

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3} \overline{\Phi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{m^2}{p_1^2} \ln \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} = \frac{8}{3} \overline{\Phi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{m}{T_1} \ln \frac{(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_1 - \omega})^2}{\omega}, \quad (28.4.2)$$

где $T_1 = \varepsilon_1 - m = \frac{p_1^2}{2m}$ — начальная кинетическая энергия электрона.

Мы видим, что в нерелятивистской области сечение излучения приблизительно обратно пропорционально частоте фотона. При максимально возможной частоте, $\omega = T_1$, сечение обращается в нуль.

При $\omega \rightarrow 0$ интенсивность излучения $\omega d\sigma_\omega$ логарифмически расходится. Эта расходимость связана с расходимостью резерфордского сечения при малых углах и характерна для чисто кулоновского поля. Учет экранирования поля ядра атомными электронами, как мы увидим далее, так же как и в случае упругого рассеяния, устраняет эту расходимость.

В крайне релятивистской области при $\varepsilon_1 \gg m$, $\varepsilon_2 \gg m$ сечение излучения принимает вид

$$\begin{aligned} d\sigma_\omega &= 4\overline{\Phi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{2}{3} \right) \left(\ln \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{m} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= 4\overline{\Phi} \frac{d\omega}{\omega} \left[1 + \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon_1} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon_1} \right) \right] \left[\ln \left(\frac{2\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \omega)}{m} \right) - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (28.4.3)$$

Мы видим, что вероятность излучения электроном определенной части своей энергии, т. е. вероятность излучения при заданном отношении ω/ε_1 , растет приблизительно пропорционально логарифму отношения ε_1/m .

Интенсивность излучения, т. е. произведение частоты на сечение, $\omega d\sigma_\omega$, в релятивистском, так же как и в нерелятивистском случае, логарифмически расходится при $\omega \rightarrow 0$.

28.5. Экранирование. При вычислении сечения тормозного излучения мы считали поле ядра чисто кулоновским. Такое предположение является правильным для расстояний от ядра меньших, чем радиус K -оболочки атома. На больших расстояниях поле ядра частично или полностью экранируется полем атомных электронов, благодаря чему происходит уменьшение сечения тормозного излучения. Поэтому, для того чтобы выяснить, насколько правильны наши результаты, следует оценить ту область расстояний от ядра, которая является существенной в процессе тормозного излучения.

Из вида интеграла, определяющего компоненту Фурье кулоновского потенциала, следует, что главный вклад в интеграл вносят расстояния порядка

$$R_0 \sim \frac{1}{q}, \quad q = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}|. \quad (28.5.1)$$

Действительно, большие r несут существенны из-за сильно осциллирующей функции e^{-iqr} , а малые — из-за малости соответствующего объема $4\pi^2 r^2 dr$. Поэтому можно считать, что R_0 определяет по порядку величины наиболее существенные значения прицельного параметра.

С другой стороны, как показывает формула (28.1.8), дифференциальное сечение тормозного излучения особенно велико при малых q , которым, согласно (28.5.1), соответствуют большие значения прицельного параметра. Очевидно, эффект экранирования не будет играть роли, если максимальное значение R_0 , соответствующее минимальному значению q , будет значительно меньше эффективных размеров атома a , $R_{0\max} \ll a$. Напротив, при

выполнении неравенства $R_{0 \max} \gg a$ должно иметь место полное экранирование кулоновского поля ядра.

Минимальное значение q равно, очевидно,

$$q_{\min} = p_1 - p_2 - \omega,$$

где p_1 и p_2 связаны соотношением

$$\sqrt{m^2 + p_1^2} = \sqrt{m^2 + p_2^2} + \omega.$$

При малых энергиях и малых частотах, $p_1 \ll m$, $\omega \ll p_1$, из закона сохранения энергии следует:

$$p_2 = \sqrt{p_1^2 - 2m\omega} \approx p_1 - \frac{m\omega}{p_1}.$$

Поэтому

$$q_{\min} = p_1 - p_2 - \omega \approx \frac{m\omega}{p_1} - \omega \approx \frac{m\omega}{p_1}, \quad p_1 \ll m, \quad \omega \ll p_1.$$

В крайне релятивистской области

$$q_{\min} = \sqrt{\varepsilon_1^2 - m^2} - \sqrt{\varepsilon_2^2 - m^2} - \omega \approx \frac{m^2\omega}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_1 \gg m, \quad \varepsilon_2 \gg m.$$

Таким образом, максимальное значение R_0 определяется формулами

$$R_{0 \max} \sim \begin{cases} \frac{p_1}{m\omega}, & p_1 \ll m, \quad \omega \ll p_1, \\ \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{m^2\omega}, & \varepsilon_1 \gg m, \quad \varepsilon_2 \gg m, \end{cases} \quad (28.5.2)$$

из которых следует, что при достаточно малых частотах $R_{0 \max}$ может превышать размеры атома. Иначе говоря, при $\omega \rightarrow 0$ всегда наступает полное экранирование, приводящее к значительному уменьшению сечения тормозного излучения. В частности, при $\omega \rightarrow 0$ величина $\omega d\sigma_\omega$ обращается в нуль, в отличие от случая чисто кулоновского поля, когда эта величина логарифмически расходится.

В релятивистской области $R_{0 \max}$ может быть большим и при частотах порядка первичной энергии электрона. Действительно, если $\omega \sim \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \gg m$, то

$$R_{0 \max} \sim \frac{\varepsilon_1}{m^2}.$$

Если пользоваться моделью атома Томаса — Ферми и считать эффективный радиус атома равным

$$a = a_0 Z^{-1/3},$$

где a_0 — радиус атома водорода, то при энергии электрона, превосходящей

$$\varepsilon_0 = 137m/Z^{1/3},$$

величина $R_{0 \max}$ будет больше a . Поэтому в области больших энергий всегда необходим учет экранирования.

Чтобы учесть экранирование поля ядра внешними электронами, нужно, согласно (28.1.2), определить компоненту Фурье суммарного потенциала, создаваемого как зарядом ядра, так и зарядом электронов. Этот потенциал удовлетворяет уравнению

$$\Delta A_0^{(e)} = -\rho,$$

где ρ — плотность заряда,

$$\rho = -Ze\delta(\mathbf{r}) + en(\mathbf{r})$$

и $n(\mathbf{r})$ — плотность электронов в атоме. Переходя к компонентам Фурье, получим, очевидно,

$$-q^2 A_0^{(e)}(q) = e[Z - F(q)],$$

откуда

$$A_0^{(e)}(q) = -\frac{e[Z - F(q)]}{q^2}, \quad (28.5.3)$$

где $F(q)$ — атомный формфактор,

$$F(q) = \int n(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3x.$$

Мы видим, таким образом, что для учета экранирования нужно заменить Z на $Z - F(q)$. В модели Томаса — Ферми

$$F(q) = Zf(qZ^{-1/3}), \quad (28.5.4)$$

где $f(x)$ — некоторая универсальная функция, одинаковая для всех атомов, значения которой могут быть определены с помощью численного интегрирования.

Вводя атомный формфактор в модель Томаса — Ферми, можно представить спектр излучения в релятивистской области в следующем виде [11]:

$$d\sigma_\omega = Z^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega \varepsilon_1^2} \left\{ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \left[\Phi_1(\zeta) - \frac{4}{3} \ln Z \right] - \frac{2}{3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[\Phi_2(\zeta) - \frac{4}{3} \ln Z \right] \right\}, \quad (28.5.5)$$

где

$$\zeta = 200\alpha \frac{a}{R_{0\max}} = 100 \frac{m\omega}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 Z^{1/3}}$$

и $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ — функции от ζ , изображенные на рис. 28.3. Величина ζ , пропорциональная отношению $a/R_{0\max}$, определяет эффект экранирования. Малые ζ соответствуют большому экранированию, а большие ζ — малому экранированию. Если $\zeta = 0$, то можно говорить о полном экранировании; в этом случае

$$\Phi_1(0) = 4 \ln 183, \quad \Phi_2(0) = 4 \ln 183 - \frac{2}{3}$$

и сечение (28.5.5) приобретает вид

$$\sigma_\omega d \frac{\omega}{\varepsilon_1 - m} = Z^2 \alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{4}{\varepsilon_1^2} \left\{ \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \frac{2}{3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) \ln(183Z^{-1/3}) + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{9} \right\} \quad (28.5.6)$$

$$\left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m\omega} \gg 137Z^{-1/3}, \quad \varepsilon_1 \gg 137mZ^{-1/3} \right).$$

Сечение тормозного излучения в этих условиях при заданном отношении ω/ε_1 не зависит от первичной энергии электрона ε_1 . При больших ζ этот вывод становится неправильным.

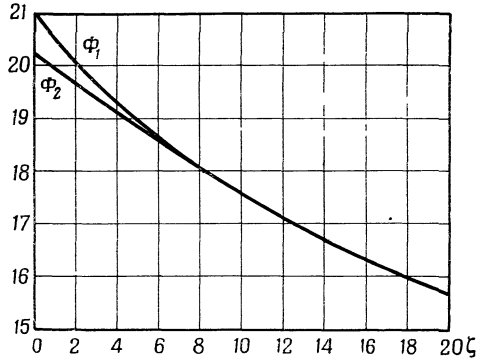


Рис. 28.3.

При $\zeta \gg 1$ эффект экранирования не играет роли. Малая поправка, вносимая им, может быть учтена, если заменить в формуле (28.4.2) в последней скобке слагаемое $\frac{1}{2}$ на $\frac{1}{2} + c(\zeta)$, где значения $c(\zeta)$ приведены в таблице.

ζ	2	2,5	3	4	5	6	8	10	15
$c(\zeta)$	0,21	0,16	0,13	0,09	0,065	0,05	0,03	0,02	0,01

На рис. 28.4 представлена зависимость интенсивности тормозного излучения от отношения энергии фотона к кинетической энергии электрона $\frac{\omega}{\varepsilon_1 - m}$ [11]. Пунктирные кривые не учитывают экранирования и справедливы для всех элементов (заряд ядра Ze содержится только в величине Φ). Рядом с кривыми указаны начальные энергии $\varepsilon_1 - m$ в единицах m . Сплошные кривые учитывают экранирование и относятся к свинцу $Z = 82$ (кроме сплошной кривой $\frac{\varepsilon_1 - m}{m} = 0,125$, которая относится к алюминию). Они приближаются в области малых частот к кривой $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$, относящейся к случаю полного экранирования. Нерелятивистская кривая для алюминия построена с учетом точных

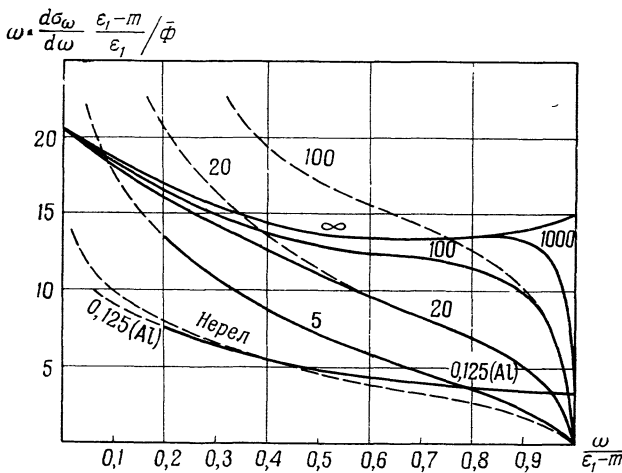


Рис. 28.4.

волновых функций электрона для сплошного спектра (см. § 28.7). Мы видим, что для легких элементов в нерелятивистской области экранирование мало существенно.

Заметим, что применение борновского приближения, которым мы пользовались, может приводить к ошибке в случае больших Z не только в нерелятивистской области. Это связано с тем, что параметр $Z\alpha/v$ в области больших энергий и больших Z не мал, а равен $Z/137$. Отклонение от борновского приближения в релятивистской области заметно только при больших значениях q , для которых экранирование не играет роли. Поэтому поправки к сечению тормозного излучения, обусловленные отклонением от борновского приближения и эффектом экранирования, просто складываются (см. § 28.7).

28.6. Потеря энергии на излучение. Зная сечение тормозного излучения, можно определить среднюю потерю энергии электрона при его движении через вещество. Эта величина, отнесенная к единице пути электрона, равна, очевидно,

$$-\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)_r = N \int_0^{\varepsilon_1 - m} \sigma_\omega \omega d\omega,$$

где N — число атомов в единице объема вещества и $\sigma_\omega = d\sigma_\omega/d\omega$. Если определить сечение Φ_r потери энергии на излучение в виде

$$\Phi_r = \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_1 - m} \omega \sigma_\omega d\omega, \quad (28.6.1)$$

то потеря энергии равна

$$-\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)_r = N\varepsilon_1\Phi_r. \quad (28.6.2)$$

Используя (28.4.1), можно вычислить Φ_r :

$$\Phi_r = \bar{\Phi} \left\{ \frac{12\varepsilon_1^2 + 4m^2}{3\varepsilon_1\rho_1} \ln \frac{\varepsilon_1 + \rho_1}{m} - \frac{(8\varepsilon_1 + 6\rho_1)m^2}{3\varepsilon_1\rho_1^2} \left(\ln \frac{\varepsilon_1 + \rho_1}{m} \right)^2 - \frac{4}{3} + \frac{2m^2}{\varepsilon_1\rho_1} F\left(\frac{2\rho_1(\varepsilon_1 + \rho_1)}{m^2}\right) \right\},$$

где

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy.$$

Замечая, что

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{(\ln x)^2}{2} - F\left(\frac{1}{x}\right)$$

и что при малых x справедливо разложение

$$F(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \dots,$$

можно определить Φ_r в двух предельных случаях малых и больших энергий:

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \frac{16}{3} \bar{\Phi}, & \varepsilon_1 \ll m, \\ \Phi_r &= 4 \left(\ln \frac{2\varepsilon_1}{m} - \frac{1}{3} \right) \bar{\Phi}, & \varepsilon_1 \gg m. \end{aligned} \quad (28.6.3)$$

Мы видим, что в нерелятивистской области отношение излученной энергии к начальной энергии электрона не зависит от начальной энергии; в релятивистском же случае Φ_r логарифмически растет с ε_1 . Этот результат справедлив, однако, только в пренебрежении эффектом экранирования. Если учитывать экранирование, то взамен второй формулы (28.6.3) мы получим постоянное сечение

$$\Phi_r = \bar{\Phi} \left(4 \ln(183Z^{-1/3}) + \frac{2}{9} \right), \quad \varepsilon_1 \gg 137mZ^{-1/3}. \quad (28.6.4)$$

Значения $\Phi_r/\bar{\Phi}$ для различных энергий приведены в таблице.

$\frac{\varepsilon_1 - m}{m}$	0	1	2	5	10	20	50	100	200	1000	∞
$\frac{\Phi_r}{\bar{\Phi}} \text{ H}_2\text{O}$	5,33	5,5	6,5	9,1	11,2	12,9	14,6	15,6	16,4	17,5	18,3
$\frac{\Phi_r}{\bar{\Phi}} \text{ Pb}$	5,33	5,5	6,5	8,75	10,3	11,4	12,6	13,6	13,8	14,5	15,2

Зависимость сечения Φ_r от энергии с учетом экранирования изображена на рис. 28.5 в логарифмическом масштабе. Прямая линия соответствует логарифмическому росту сечения, согласно второй формуле (28.6.3), без учета экранирования.

Потеря энергии электрона на единице пути, обусловленная его неупругими столкновениями с атомами, определяется формулой [10]

$$-\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)_i = 2\pi r_0^2 m N Z \ln \frac{\varepsilon_1^2}{2mI^2}, \quad (28.6.5)$$

где I — средний потенциал ионизации, равный приближению $I = 13,5Z$ эв. Отношение потерь на излучение к потерям на столкновения приблизительно равно

$$\frac{\Phi_r}{\Phi} = \frac{-\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)_r}{-\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right)_i} = \frac{1}{1600} \frac{\varepsilon_1 Z}{m} \quad (28.6.6)$$

(предполагается, что логарифмический член в обеих формулах (28.6.3) и (28.6.5) имеет примерно одно и то же значение).

Из формулы (28.6.6) следует, что потери на столкновения и излучение становятся одинаковыми при энергии, равной

$$\varepsilon_0 = 1600m/Z.$$

При больших энергиях потери на излучение превосходят потери на столкновения (ε_0 равно 10 Мэв для свинца, 55 Мэв для меди, 200 Мэв для воздуха).

28.7. Точная теория тормозного излучения в нерелятивистской области. Поправка к сечению тормозного излучения в борновском приближении при крайне релятивистских энергиях. Как уже упоминалось, матричный элемент (25.1.5), определяющий тормозное излучение в кулоновском поле ядра, может быть точно вычислен в нерелятивистской и крайне релятивистской областях.

Покажем, как производится это вычисление в нерелятивистском случае [3].

Гамильтониану взаимодействия электрона с электромагнитным полем излучения $-\alpha\mathbf{A}$ соответствует в нерелятивистском приближении (см. § 12.1) оператор $-\frac{1}{m}\mathbf{p}\mathbf{A}$, где \mathbf{p} — оператор импульса электрона. Поэтому матричный элемент (25.1.5) в нерелятивистской области приобретает вид

$$U = \frac{e}{m\sqrt{2\omega}} \int \psi_2^* e \mathbf{p} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \psi_1 d^3x dt. \quad (28.7.1)$$

Входящий сюда экспоненциальный множитель $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ можно, очевидно, заменить единицей. Действительно, в интеграле (28.7.1) существенны значения r порядка $r \sim v\tau$, где v — скорость электрона и τ — время

столкновения, равное по порядку величины $\tau \sim \frac{1}{\omega}$, поэтому

$$kr \sim \omega v \tau \sim v \ll 1$$

и

$$U = \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int \psi^*(\mathbf{r}) \frac{e\mathbf{p}}{m} \psi_1(\mathbf{r}) d^3x,$$

где $\psi_1(\mathbf{r})$ и $\psi_2(\mathbf{r})$ — волновые функции электрона в начальном и конечном состояниях без временных множителей (ε_1 и ε_2 — соответствующие энергии).

Так как матричный элемент оператора скорости $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}$ связан с матричным элементом радиуса-вектора \mathbf{r} соотношением

$$\langle 2 | \mathbf{v} | 1 \rangle = -i\omega \langle 2 | \mathbf{r} | 1 \rangle,$$

то U может быть записано в виде

$$U = -\frac{ie\omega}{\sqrt{2\omega}} \int \psi_2^*(\mathbf{r}) e\mathbf{r} \psi_1(\mathbf{r}) d^3x. \quad (28.7.2)$$

Заметим, что это выражение (28.7.2) можно было бы написать сразу на основании общей формулы (25.2.5) для мультипольного излучения.

Таким образом, вопрос сводится к вычислению матричного элемента координаты с волновыми функциями непрерывного спектра в кулоновском поле.

Волновые функции непрерывного спектра требуют для своего полного определения задания асимптотического поведения на бесконечности, которое может быть двояким, так как на бесконечности функция ψ может иметь вид либо суммы плоской волны, соответствующей определенному импульсу, и расходящейся сферической волны, либо суммы плоской волны и сходящейся сферической волны. Волновая функция, описывающая начальное состояние электрона, должна обладать асимптотикой первого вида, а волновая функция конечного состояния — асимптотикой второго вида (см. § 28.8).

В кулоновском поле в нерелятивистском приближении волновые функции с такой асимптотикой имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{r}) &= N_1 e^{i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}} \mathcal{F}[i\xi_1, 1, i(\mathbf{p}_1 \mathbf{r} - \mathbf{p}_1 \mathbf{r})], \\ \psi_2(\mathbf{r}) &= N_2 e^{i\mathbf{p}_2 \mathbf{r}} \mathcal{F}[-i\xi_2, 1, -i(\mathbf{p}_2 \mathbf{r} + \mathbf{p}_2 \mathbf{r})], \end{aligned} \quad (28.7.3)$$

где \mathcal{F} — вырожденная гипергеометрическая функция, \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 — импульсы электрона в начальном и конечном состояниях ($p_i \equiv |\mathbf{p}_i|$), $\xi = \frac{\alpha Z}{v}$ (v — скорость электрона, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}$), N_1 и N_2 — нормировочные константы. При больших r справедливы асимптотические выражения

$$\psi_1(\mathbf{r}) \approx N_1 \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\xi_1}}{\Gamma(1-i\xi_1)} \left(e^{i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}} + \frac{f_1(\theta)}{r} e^{i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}} \right),$$

$$\psi_2(\mathbf{r}) \approx N_2 \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\xi_2}}{\Gamma(1+i\xi_2)} \left(e^{i\mathbf{p}_2 \mathbf{r}} + \frac{f_2(\theta)}{r} e^{-i\mathbf{p}_2 \mathbf{r}} \right),$$

где

$$f_1(\theta) = \frac{\xi_1}{2\rho_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{2i\xi_1 \ln^2 \sin \frac{\theta}{2}} \frac{\Gamma(1-i\xi_1)}{\Gamma(1+i\xi_1)},$$

$$f_2(\theta) = \frac{\xi_2}{2\rho_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-2i\xi_2 \ln \cos \frac{\theta}{2}} \frac{\Gamma(1+i\xi_2)}{\Gamma(1-i\xi_2)}.$$

Если выбрать константы N_1 и N_2 равными

$$N_1 = e^{\frac{\pi}{2} \xi_1} \Gamma(1-i\xi_1),$$

$$N_2 = e^{\frac{\pi}{2} \xi_2} \Gamma(1+i\xi_2),$$

то волновые функции на бесконечности будут иметь единичные амплитуды. Мы в дальнейшем будем пользоваться такой нормировкой.

Согласно общим правилам § 18.3 дифференциальное сечение излучения фотона с частотой ω и поляризацией \mathbf{e} в телесном угле $d\omega_\gamma$ равно

$$d\sigma = \frac{e^2 \omega^3 d\omega}{2(2\pi)^4} \frac{p_2}{\rho_1} |\mathbf{eD}|^2 d\omega_\gamma d\omega_2,$$

где

$$\mathbf{D} = \int \psi_2^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi_1(\mathbf{r}) d^3x$$

и $d\omega_2$ — элемент телесного угла, в котором лежит импульс электрона после рассеяния.

Просуммированное по двум поляризациям фотона дифференциальное сечение тормозного излучения равно

$$d\sigma = \frac{e^2 \omega^3 d\omega}{2(2\pi)^4} \frac{p_2}{\rho_1} \left(|\mathbf{D}|^2 - \frac{(\mathbf{kD})^2}{k^2} \right). \quad (28.7.4)$$

Для вычисления \mathbf{D} мы воспользуемся следующей общей формулой [16]:

$$J \equiv \int dx e^{-\lambda r} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{r} \mathcal{F}(i\xi_1, 1, i\rho_1 r - i\mathbf{p}_1 \mathbf{r}) \mathcal{F}(i\xi_2, 1, i\rho_2 r + i\mathbf{p}_2 \mathbf{r}) =$$

$$= \frac{2\pi}{\alpha} e^{-\pi\xi_1} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{i\xi_1} \left(\frac{\alpha+\delta}{\gamma} \right)^{-i\xi_2} \mathcal{F}\left(1-i\xi_1, i\xi_2, 1, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha(\gamma+\delta)}\right),$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}(q^2 + \lambda^2), \quad \beta = \mathbf{p}_2 \mathbf{q} - i\lambda \rho_2,$$

$$\gamma = \mathbf{p}_1 \mathbf{q} + i\lambda \rho_1 - \alpha, \quad \delta = \rho_1 \rho_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 - \beta.$$

Чтобы найти \mathbf{D} , достаточно, очевидно, продифференцировать J по λ и \mathbf{q} и положить затем $\lambda = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$:

$$\mathbf{D} = N_1 N_2 \frac{\partial^2 J}{\partial \lambda \partial \mathbf{q}} \Big|_{\lambda=0, \mathbf{q}=\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}.$$

Используя найденное таким образом значение \mathbf{D} , можно получить следующее выражение для дифференциального сечения тормозного излучения, проинтегрированного по углам [3]:

$$d\sigma_\omega = \frac{16\pi^2 Z^2 \alpha^3}{3} \frac{1}{\rho_1^2} \frac{1}{(1-e^{-2\pi\xi_2})(e^{2\pi\xi_1}-1)} \frac{d\omega}{\omega} x_0 \frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2, \quad (28.7.5)$$

где $F(x_0)$ — гипергеометрическая функция,

$$F(x_0) \equiv \mathcal{F}(i\xi_1, i\xi_2, 1, x_0)$$

и

$$x_0 = -\frac{4\xi_1\xi_2}{(\xi_1 - \xi_2)^2}.$$

Рассмотрим подробнее случай, когда $\xi_1 \ll 1$ и $\xi_2 \ll 1$.
Используя соотношения

$$\frac{d}{dx_0} \mathcal{F}(i\xi_1, i\xi_2, 1, x_0) = -\xi_1\xi_2 \mathcal{F}(1+i\xi_1, 1+i\xi_2, 2, x_0)$$

$$\mathcal{F}(a, b, c, z) = (1-z)^{-a} \mathcal{F}\left(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}\right),$$

получим

$$\frac{d}{dx_0} \mathcal{F}(i\xi_1, i\xi_2, 1, x_0) = -\xi_1\xi_2 (1-x_0)^{-1-i\xi_1} \mathcal{F}\left(1+i\xi_1, 1-i\xi_2, 2, \frac{x_0}{x_0-1}\right).$$

Если $\xi_1 \ll 1$, $\xi_2 \ll 1$, то

$$\mathcal{F}(i\xi_1, i\xi_2, 1, x_0) \approx 1,$$

$$\frac{d}{dx_0} \mathcal{F}(i\xi_1, i\xi_2, 1, x_0) \approx -\xi_1\xi_2 \frac{1}{1-x_0} \mathcal{F}\left(1, 1, 2, \frac{x_0}{x_0-1}\right).$$

Замечая далее, что при $0 < z < 1$

$$\mathcal{F}(1, 1, 2, -z) = \frac{1}{z} \ln(1+z),$$

и полагая $z = \frac{x_0}{x_0-1}$, получим

$$\frac{d}{dx_0} \mathcal{F}(i\xi_1, i\xi_2, 1, x_0) \approx \xi_1\xi_2 \frac{\ln(1-x_0)}{x_0}, \quad \xi_1 \ll 1, \quad \xi_2 \ll 1.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2 = 2F(x_0) \xi_1\xi_2 \frac{\ln(1-x_0)}{x_0},$$

т. е.

$$\frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2 = 2\xi_1\xi_2 \frac{\ln(1-x_0)}{x_0}.$$

Таким образом, при $\xi_1 \ll 1$, $\xi_2 \ll 1$ справедлива формула

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3} \frac{Z^2\alpha^3}{p_1^2} \frac{4\pi^2\xi_1\xi_2}{(e^{2\pi\xi_1}-1)(1-e^{-2\pi\xi_2})} \frac{d\omega}{\omega} \ln\left(\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right). \quad (28.7.6)$$

Заменяя здесь $\frac{(2\pi)^2 \xi_1 \xi_2}{(e^{2\pi\xi_1}-1)(1-e^{-2\pi\xi_2})}$ единицей, мы получим формулу (28.4.2) для сечения тормозного излучения в нерелятивистской области в борновском приближении.

Однако формула (28.7.6) имеет более широкую область применимости, чем формула (28.4.2), а именно, она применима при единственном условии: $\xi_1 \ll 1$; что же касается ξ_2 , то эта величина может быть произвольной. Действительно, если $\xi_1 \ll 1$, а $\xi_2 \gg 1$, то $x_0 = -4\xi_1/\xi_2$, т. е. $|x_0| \ll 1$, и поэтому

$$\mathcal{F}(i\xi_1, i\xi_2, 1, x_0) \approx 1,$$

$$\frac{d}{dx_0} \mathcal{F}(i\xi_1, i\xi_2, 1, x_0) \approx -\xi_1\xi_2.$$

Замечая далее, что при $|x_0| \ll 1$, $\frac{1}{x_0} \ln(1-x_0) \approx -1$, получим

$$\frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2 \approx 2\xi_1 \xi_2 \frac{\ln(1-x_0)}{x_0}, \quad \xi_1 \ll 1, \quad \xi_2 \approx 1.$$

Подставляя это выражение в (28.7.5), мы приходим к формуле (28.7.6).

Формулы (28.7.6) и (28.4.2) справедливы также для сечения излучения при столкновении электрона с позитроном в системе их центра инерции (в нерелятивистском случае).

Для излучения при столкновении электрона с электроном эти формулы неприменимы, так как дипольный момент системы двух электронов равен нулю.

В этом случае излучение в первом приближении является квадрупольным и надо пользоваться формулой (25.2.7) при $L = 2$.

Дифференциальное сечение излучения при столкновении электрона с электроном имеет в нерелятивистском случае следующий вид [17]:

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{16}{45} \alpha r_0^2 \left\{ \frac{3}{q^4} (4(p_1^2 - p_2^2)^2 + 3[p_1 p_2]^2) + \frac{1}{q^4 p^8} (144[p_1 p_2]^6 + \right. \\ \left. + 264(p_1^2 - p_2^2)^2 [p_1 p_2]^4 + 105(p_1^2 - p_2^2)^4 [p_1 p_2]^2 + 12(p_1^2 - p_2^2)^6) - \right. \\ \left. - \frac{1}{q^4 p^4} (36[p_1 p_2]^4 + 39(p_1^2 - p_2^2)^2 [p_1 p_2]^2 + 12(p_1^2 - p_2^2)^4) \right\} \frac{d^3 q}{p_1(p_1^2 - p_2^2)}, \quad (28.7.7) \end{aligned}$$

где

$$q = p_1 - p_2, \quad p = p_1 + p_2.$$

Угловое распределение излучения в системе центра инерции электронов определяется его квадрупольным характером:

$$d\sigma \sim |Y_2^{(0)}(\mathbf{v})|^2 d\omega.$$

Интегрирование по углам сечения (28.7.7), которое должно производиться по полусфере ввиду тождественности частиц, дает

$$\begin{aligned} d\sigma_\omega = \frac{8}{15} \alpha r_0^2 \frac{v_2}{v_1^3} \frac{d\omega}{\omega} \left(17 - \frac{3(v_1^2 - v_2^2)}{(v_1^2 + v_2^2)^2} \right) + \\ + \left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 v_2} + 26 \frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} - 24 \frac{v_1^2 v_2^2}{(v_1^2 + v_2^2)^3} \right) \ln \frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}, \quad (28.7.8) \end{aligned}$$

где v_1 и v_2 — начальная и конечная скорость электрона в системе центра инерции.

Для малых частот формула (28.7.8) принимает вид

$$d\sigma_\omega = \frac{32}{5} \alpha r_0^2 \frac{1}{v_1^2} \left(\ln \frac{v_2^2 m}{\omega} + \frac{17}{12} \right).$$

Сечение потери энергии на излучение при столкновении электрона с электроном определяется формулой

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_1} \int \omega d\sigma_\omega \approx 8\alpha r_0^2. \quad (28.7.9)$$

Оно — того же порядка, что и сечение (28.6.3) потери энергии на излучение в поле ядра при $Z = 1$. Отсюда следует, что сечение потери энергии на излучение при столкновении электрона с электронами оболочки атома равно примерно $8\alpha r_0^2 Z$, где Z — число электронов. Это сечение по порядку величины в Z раз меньше сечения потери энергии на излучение в поле ядра, пропорционального Z^2 .

Остановимся в заключение этого раздела на вопросе о точном вычислении матричного элемента, определяющего тормозное излучение электрона в кулоновском поле ядра в крайне релятивистской области

$$\langle f | \mathbf{S} | i \rangle = -\frac{2\pi i e}{\sqrt{2\omega}} \int \psi_2^*(\mathbf{r}) \mathbf{e} a e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_1(\mathbf{r}) d^3x \cdot \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega), \quad (28.7.10)$$

где ψ_1 и ψ_2 — волновые функции начального и конечного состояний электрона в кулоновском поле ядра и \mathbf{e} , \mathbf{k} и ω — вектор поляризации, волновой вектор и частота излучаемого фотона.

Асимптотически при $r \rightarrow \infty$ функция $\psi_1(\mathbf{r})$ должна вести себя как суперпозиция плоской и расходящейся сферической волн, а функция $\psi_2(\mathbf{r})$ — как суперпозиция плоской и сходящейся сферической волн. Поэтому в качестве $\psi_1(\mathbf{r})$ следует взять сумму типа $\psi_{p\mu}^+(\mathbf{r})$, а в качестве $\psi_2(\mathbf{r})$ — сумму типа $\psi_{p\mu}^-(\mathbf{r})$ (см § 11.1)). С такими функциями, однако, вычисление $\langle f | \mathbf{S} | i \rangle$ практически невозможно.

Упрощения наступают в области больших энергий, когда в тормозном излучении существенны значения прицельного параметра порядка или больше $1/m$. В этих условиях хорошим приближением оказывается приближение Фарри — Зоммерфельда — Мауэ. Более точно можно сказать, что для возможности его применения должно выполняться неравенство

$$\varepsilon \gg \frac{1}{2} (\alpha Z)^2 m,$$

где ε — энергия электрона

Вычисление матричного элемента $\langle f | \mathbf{S} | i \rangle$ с функциями (11.1.6) не намного сложнее вычисления матричного элемента (28.7.2) в нерелятивистской области. Мы, однако, не будем приводить здесь подробных вычислений, а приведем только окончательное выражение для дифференциального сечения тормозного излучения $d\sigma$ [18]:

$$d\sigma = d\sigma_0 \frac{V^2(x) + Z^2 \alpha^2 y^2 W^2(x)}{V^2(1)}, \quad (28.7.11)$$

где $d\sigma_0$ — дифференциальное сечение тормозного излучения в борновском приближении (оно определяется формулой (28.1.8)) и

$$V(x) = \mathcal{F}(-i\xi, i\xi, 1, x) = 1 + \frac{\xi^2}{(1!)^2} x + \frac{\xi^2(1+\xi^2)}{(2!)^2} x^2 + \frac{\xi^2(1+\xi^2)(2^2+\xi^2)}{(3!)^2} x^3 + \dots,$$

$$W(x) = \frac{1}{\xi^2} \frac{dV(x)}{dx} = 1 + \frac{1+\xi^2}{1! 2!} x + \frac{(1+\xi^2)(2^2+\xi^2)}{2! 3!} x^2 + \dots, \quad (28.7.12)$$

$$x = 1 - y, \quad y = \frac{\omega^2 (\varepsilon_2 - p_2 \cos \theta_2) (\varepsilon_1 - p_1 \cos \theta_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 q^2},$$

$$V(1) = \frac{\text{sh } \pi \xi}{\pi \xi}, \quad \xi = Z\alpha, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi},$$

(θ_1 и θ_2 — углы между \mathbf{k} и \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2).

Для значительной области углов сечения $d\sigma$ и $d\sigma_0$ практически совпадают, что связано с тем, что рассеянные волны в начальном и конечном состояниях практически не перекрываются

Принтегрированное по углам сечение тормозного излучения имеет следующий вид

$$d\sigma(\omega) = d\sigma_0(\omega) - 4Z^2 \alpha^2 \frac{1}{m^2 \omega p_1^2} \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \frac{2}{3} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) f(Z) d\omega, \quad (28.7.13)$$

где

$$f(Z) = (Z\alpha)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + Z^2\alpha^2)}. \quad (28.7.14)$$

Мы видим, что сечение тормозного излучения меньше того значения, которое получается для него в борновском приближении. Форма тормозного спектра практически не отличается от формы спектра в борновском приближении.

28.8. Асимптотика волновой функции электрона в непрерывном спектре.

В § 11.1 было показано, что можно построить две полные системы волновых функций электрона во внешнем поле. В одной системе волновые функции непрерывного спектра имеют вид суперпозиции плоской и расходящейся сферической волн, а в другой — суперпозиции плоской и сходящейся сферической волн. Там же было указано, что функции первого типа $\psi_p^{(+)}$ должны использоваться в качестве волновых функций начального состояния, функции второго типа $\psi_p^{(-)}$ — в качестве волновых функций конечного состояния. Это правило было уже использовано в §§ 25.7 и 28.7 и будет использоваться и в дальнейшем. Теперь мы покажем, что теория возмущений непосредственно приводит к этому правилу.

Заметим для этого, что элемент матрицы рассеяния, определяющий тормозное излучение, можно представить, во-первых, в виде

$$\langle f | \mathbf{S}^{(1)} | i \rangle = ie \int \bar{\psi}_2^{(1)}(x) \hat{A}^*(x) \psi_1^{(1)}(x) d^4x, \quad (28.8.1)$$

где $\psi_{1,2}^{(1)}(x)$ — волновые функции электрона во внешнем поле в первом приближении по внешнему полю, и, во-вторых, в виде

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = e^2 \int \bar{\psi}_2^{(0)}(x_2) \{ \hat{A}^*(x_2) S_c(x_2 - x_1) \hat{A}^{(e)}(x_1) + \\ + \hat{A}^{(e)}(x_2) S_c(x_2 - x_1) \hat{A}^*(x_1) \} \psi_1^{(0)}(x_1) d^4x_1 d^4x_2, \quad (28.8.2)$$

где $\psi_{1,2}^{(0)}(x)$ — волновые функции свободного электрона.

Сравнивая оба эти выражения и учитывая, что при подстановке волновых функций свободного электрона, т. е. $\psi^{(0)}(x)$ вместо $\psi^{(1)}(x)$, выражение (28.8.1) обращается в нуль, получим

$$\psi_1^{(1)}(x) = \psi_1^{(0)}(x) - e \int S_c(x - x') \hat{A}^{(e)}(x') \psi_1^{(0)}(x') d^4x', \quad (28.8.3)$$

$$\bar{\psi}_2^{(1)}(x) = \bar{\psi}_2^{(0)}(x) - e \int \bar{\psi}_2^{(0)}(x') \hat{A}^{(e)}(x') S_c(x' - x) d^4x'.$$

Эти формулы имеют наглядный смысл: так как $S_c(x)$ является функцией Грина уравнения Дирака, то, интерпретируя $\hat{A}^{(e)}(x) \psi^0(x)$ как плотность источников, можно сказать, что вторые слагаемые в (28.8.3) представляют собой рассеянную электронную волну, получающуюся в результате суперпозиции волн, рассеянных в различных элементах четырехмерного объема d^4x' .

Аналогично можно найти и следующие приближения для волновой функции. Например, во втором приближении мы получим

$$\psi^{(2)}(x) = \psi^{(0)}(x) - e \int S_c(x - x') \hat{A}^{(e)}(x') \psi^{(1)}(x') d^4x' = \\ = \psi^{(0)}(x) - e \int S_c(x - x') \hat{A}^{(e)}(x') \psi^{(0)}(x') d^4x' + \\ + e^2 \int S_c(x - x') \hat{A}^{(e)}(x') S_c(x' - x'') \hat{A}^{(e)}(x'') \psi^{(0)}(x'') d^4x' d^4x''. \quad (28.8.4)$$

Суммирование получающихся в теории возмущений рядов должно в принципе приводить к точным решениям уравнений Дирака.

Подстановка в (28.8.3) вместо $\psi^{(0)}(x)$ плоских волн $\psi^{(0)}(x) = u e^{i p x}$ дает

$$\begin{aligned}\psi_1^{(1)}(x) &= u_1 e^{i p_1 x} - \frac{i e}{(2\pi)^4} \int \frac{i \hat{f} - m}{f^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(f - p_1) u_1 e^{i f x} d^4 f, \\ \bar{\psi}_2^{(1)}(x) &= \bar{u}_2 e^{-i p_2 x} - \frac{i e}{(2\pi)^4} \int \bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(p_2 - f) \frac{i \hat{f} - m}{f^2 + m^2} e^{-i f x} d^4 f,\end{aligned}\quad (28.8.5)$$

где $A^{(e)}(q)$ — фурье-компонента внешнего потенциала.

В электростатическом поле

$$A_0^{(e)}(q) = A_0^{(e)}(q) 2\pi \delta(q_0), \quad A^{(e)}(q) = 0$$

и

$$\begin{aligned}\psi_1^{(1)} &= u_1 e^{i p_1 x} + \frac{e}{(2\pi)^3} \int \frac{i \hat{f} - m}{f^2 - p^2} A_0^{(e)}(f - p_1) \gamma_4 u_1 e^{i f x} d^3 f, \\ \bar{\psi}_2^{(1)} &= \bar{u}_2 e^{-i p_2 x} + \frac{e}{(2\pi)^3} \int \bar{u}_2 \gamma_4 A_0^{(e)}(p_2 - f) \frac{i \hat{f} - m}{f^2 - p^2} e^{-i f x} d^3 f.\end{aligned}\quad (28.8.6)$$

В нерелятивистском случае главную роль в этих интегралах играют малые значения $|f|$; поэтому $i \hat{f} \approx -m$ и формулы (28.8.6) приобретают вид, известный из элементарной теории возмущений:

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = \psi_p^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{e}{(2\pi)^3} \int \frac{A_0^{(e)}(\mathbf{f} - \mathbf{p})}{\varepsilon_p - \varepsilon_f + i0} \psi_f^{(0)}(\mathbf{r}) d^3 f,$$

где

$$\psi_p^{(0)}(\mathbf{r}) = e^{i p r}, \quad \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$$

и интегрирование производится, в соответствии с определением функции $S_c(x)$, таким образом, чтобы полюс $\mathbf{f} = \mathbf{p}$ обходился снизу.

Легко видеть, что вторые слагаемые в формулах (28.8.6), т. е. рассеянные волны, асимптотически, при больших r , имеют вид расходящихся сферических волн. Действительно, интегралы, входящие в (28.8.6), имеют следующую структуру:

$$J = \int g(\mathbf{p}, \mathbf{f}) \frac{e^{i f r}}{f^2 - p^2} d^3 f,$$

где $g(\mathbf{p}, \mathbf{f})$ — некоторая функция \mathbf{f} и \mathbf{p} . Выполнив интегрирование по углу ϑ между векторами \mathbf{f} и \mathbf{r} , представим J в виде

$$J = \frac{2\pi i}{r} \left\{ \int_0^\infty \frac{g_\pi e^{-i f r}}{f^2 - p^2} f df - \int_0^\infty \frac{g_0 e^{i f r}}{f^2 - p^2} f df \right\} + \frac{2\pi i}{r} \int_0^\infty f df \int_{-1}^1 \frac{e^{i f r \xi}}{f^2 - p^2} \frac{\partial g}{\partial \xi} d\xi,$$

где $\xi = \cos \vartheta$, а g_π и g_0 — значения $g(\mathbf{p}, \mathbf{f})$. Соответственно при $\vartheta = \pi$ и $\vartheta = 0$. Второе слагаемое здесь имеет, очевидно, порядок $1/r^2$ и может быть отброшено по сравнению с первым при $r \rightarrow \infty$. Первое же слагаемое можно, используя замену $f \rightarrow -f$, представить в виде

$$J = -\frac{i\pi}{r} \left\{ \int_{-\infty}^\infty g_0 \frac{e^{i f r}}{f^2 - p^2} f df - \int_{-\infty}^\infty g_\pi \frac{e^{-i f r}}{f^2 - p^2} f df \right\}.$$

Подынтегральные выражения в J имеют полюсы, в соответствии с (14.4.14), в точках $f = p + i0$ и $f = -p - i0$. Поэтому, замыкая контур интегрирования в первом интеграле полуокружностью в нижней полуплоскости, а во втором интеграле — полуокружностью в верхней полуплоскости, получим

$$J \sim \frac{1}{r} e^{i p r}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Таким образом, как функция $\psi^{(1)}(x)$, так и функция $\bar{\psi}^{(1)}(x)$ в силу правила обхода полюсов функции $S_c(p)$ содержат при $r \rightarrow \infty$, кроме плоской волны, только расходящиеся волны и не содержат сходящихся волн. Это утверждение справедливо, очевидно, не только для первого приближения, но и для всех последующих приближений. Поэтому и точные волновые функции электрона во внешнем поле, относящиеся к непрерывному спектру, должны отличаться этим же свойством, т. е. функция начального состояния $\psi_1(x)$ должна иметь вид суммы плоской и расходящейся сферической волн,

$$\psi_1(r) \sim e^{i p r} + \frac{C}{r} e^{i p r}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (28.8.7)$$

Такой же вид должна иметь и функция $\bar{\psi}_2(r)$, т. е. функция, комплексно-сопряженная волновой функции конечного состояния. Отсюда следует, что волновая функция конечного состояния должна иметь вид суммы плоской и сходящейся сферической волн

$$\psi_2(r) \sim e^{i p r} + \frac{C}{r} e^{-i p r}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (28.8.8)$$

Итак, мы доказали, что система функций $\psi_p^{(+)}(r)$ должна использоваться для описания начальных состояний, а система функций $\psi_p^{(-)}(r)$ — для описания конечных состояний электрона.

Это правило допускает простую физическую интерпретацию. Если разложить плоскую волну на сходящиеся и расходящиеся волны, то для начального состояния при $r \rightarrow \infty$ только сходящиеся волны могут иметь амплитуды, не зависящие от природы рассеивателя. Расходящиеся же волны полностью определяются силовым полем рассеивателя. Это соответствует тому, что частицы в начальном состоянии падают на рассеиватель. В конечном же состоянии, наоборот, при $r \rightarrow \infty$ только расходящиеся волны могут иметь амплитуды, не зависящие от рассеивателя, а сходящиеся определяются полем рассеивателя.

§ 29. Излучение длинноволновых фотонов

29.1. «Инфракрасная катастрофа». В предыдущем параграфе мы видели, что вероятность излучения фотона в области малых энергий обратно пропорциональна частоте.

$$d\omega \sim \frac{d\omega}{\omega},$$

полная же вероятность излучения логарифмически расходится при $\omega \rightarrow 0$.

Эта расходимость в области малых энергий фотона носит название «инфракрасной катастрофы». Она обусловлена незаконностью применения обычной теории возмущений, основанной на разложении матрицы рассеяния в ряд по степеням e , к тем процессам, в которых участвуют длинноволновые или, как мы будем их называть, мягкие фотоны. Действительно, легко убедиться, что если вероятность ω_1 излучения электроном с энер-

гией ε одного длинноволнового фотона с энергией, большей ω , пропорциональна $e^2 \ln \frac{\varepsilon}{\omega}$, то вероятность излучения этим же электроном двух фотонов ω_2 (с суммарной энергией, большей ω) будет пропорциональна $\left(e^2 \ln \frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2$. Поэтому отношение вероятностей по порядку величины равно

$$\xi \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1} \sim e^2 \ln \frac{\varepsilon}{\omega}, \quad \omega \rightarrow 0.$$

Это отношение, а не величина e^2 , как мы предполагали до сих пор, представляет собой параметр разложения теории возмущений в применении к процессам взаимодействия электрона с длинноволновыми фотонами. Так как параметр ξ при $\omega \rightarrow 0$ не мал по сравнению с единицей, то теория возмущений в этих случаях, строго говоря, неприменима.

Неприменимость обычной теории возмущений связана с тем, что число фотонов, излучаемых электроном в единичном интервале энергии, стремится при $\omega \rightarrow 0$ к бесконечности, в то время как в теории возмущений предполагается, что излучение одного фотона всегда более вероятно, чем излучение двух или большего числа фотонов.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, заметим, что если энергия и импульс фотона ω значительно меньше энергии ε и изменения импульса электрона Δp ,

$$\frac{\omega}{\varepsilon} \ll 1, \quad \frac{\omega}{\Delta p} \ll 1, \quad (29.1.1)$$

и, кроме того, длина волны фотона λ значительно больше классического «радиуса» электрона r_0 , $\lambda \gg r_0$, то можно считать заданным движение электрона и пользоваться классической электродинамикой. Предполагая сначала для простоты, что скорость электрона мала по сравнению со скоростью света, мы можем исходить из формулы для интенсивности дипольного излучения $d\mathcal{E}_\omega$ в интервале частот $d\omega$:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8\pi}{3} |\dot{\mathbf{d}}_\omega|^2 d\omega,$$

где

$$\dot{\mathbf{d}}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{d}} e^{i\omega t} dt$$

и \mathbf{d} — дипольный момент системы. При $\omega \rightarrow 0$, очевидно,

$$(\dot{\mathbf{d}}_\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{1}{2\pi} (\dot{\mathbf{d}}_2 - \dot{\mathbf{d}}_1),$$

где \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 — значения дипольного момента до и после излучения. В интересующем нас случае $\dot{\mathbf{d}} = e\mathbf{v}$,

$$(\dot{\mathbf{d}}_\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{e}{2\pi} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1),$$

где \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 — скорости электрона до и после излучения. Таким образом,

$$(d\mathcal{E}_\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2e^2}{3\pi} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 d\omega. \quad (29.1.2)$$

Мы видим, что интенсивность излучения в единичном интервале частот $\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega}$ стремится при $\omega \rightarrow 0$ к конечному и отличному от нуля пределу.

Отсюда следует, что среднее число излучаемых электроном фотонов частоты ω , равное $\frac{1}{\omega} \frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega}$, стремится при $\omega \rightarrow 0$ к бесконечности, как и утверждалось.

Так как вероятность перехода электрона из состояния с импульсом \mathbf{p}_1 в состояние с импульсом \mathbf{p}_2 всегда конечна, то вероятность одновременного излучения бесконечного числа фотонов с бесконечно малой частотой также конечна и отлична от нуля. Поэтому вероятность излучения одного или конечного числа фотонов с $\omega \rightarrow 0$ равняется в действительности нулю, а не бесконечности, как следует из теории возмущений.

Определим теперь вероятность $w(n)$ того, что электрон излучит некоторое произвольное число n мягких фотонов, удовлетворяющих условиям (29.1.1). При выполнении этих условий излучение фотонов, как уже отмечалось, не влияет на движение электрона, и поэтому процессы последовательного излучения фотонов будут статистически независимыми. Отсюда следует, что вероятность излучения фотонов будет определяться формулой Пуассона

$$w(n) = (\bar{n})^n \frac{e^{-\bar{n}}}{n!}, \quad (29.1.3)$$

где \bar{n} — среднее число излучаемых фотонов, частота которых лежит в заданном интервале $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$. Эта величина может быть определена согласно классической электродинамике. Именно, если $dJ \equiv Id\omega d\omega$ — классическая интенсивность излучения в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$ и в телесном угле $d\omega$, то

$$\bar{n} = \int d\omega \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\omega} I. \quad (29.1.4)$$

Покажем, как найти dJ .

Пользуясь потенциалами Лиенара — Вихерта, легко показать, что компоненты Фурье векторного и скалярного потенциалов на расстоянии R равны

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) e^{i\omega t - ikr(t)} dt, \quad \varphi_\omega = \frac{e}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t - ikr(t)} dt,$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — уравнение траектории электрона, $\mathbf{v}(t)$ — скорость электрона и \mathbf{k} — волновой вектор фотона. Замечая, что

$$\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega - \omega\varphi_\omega = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} dJ &= |\mathbf{H}_\omega|^2 R^2 d\omega d\omega = R^2 k^2 (|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\varphi_\omega|^2) d\omega d\omega = \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' (\mathbf{v}(t) \mathbf{v}(t') - 1) e^{i\omega(t-t') - i\mathbf{k}[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')]} \right\} d\omega d\omega, \end{aligned} \quad (29.1.5)$$

где $\mathbf{H}_\omega = i[\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega]$ — компонента Фурье магнитного поля в точке \mathbf{R} .

Если частота ω удовлетворяет условию $\omega\tau \ll 1$, где τ — продолжительность времени, в течение которого происходит рассеяние электрона, то можно принять

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &\approx \mathbf{v}_1 t + \mathbf{a}, & -\infty < t \leq 0, \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}_2 t + \mathbf{b}, & 0 \leq t < \infty, \end{aligned}$$

где \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 — скорости электрона до и после излучения и \mathbf{a} и \mathbf{b} — константы. Выполнив интегрирование, получим

$$dJ = \frac{e^2}{4\pi^2} \left\{ \left(\frac{\mathbf{v}_2}{1-n\mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1}{1-n\mathbf{v}_1} \right)^2 - \left(\frac{n\mathbf{v}_2}{1-n\mathbf{v}_2} - \frac{n\mathbf{v}_1}{1-n\mathbf{v}_1} \right)^2 \right\} d\omega d\Omega \quad (29.1.6)$$

(\mathbf{n} — единичный вектор в направлении излучения).

Если v_1 и v_2 значительно меньше скорости света, то эта формула переходит в формулу (29.1.2).

Выражая скорость электрона \mathbf{v} через его импульс \mathbf{p} , можно переписать формулу (29.1.6) в виде

$$dJ = \frac{e^2}{4\pi^2} \omega^2 \left\{ (J(k))^2 - \left(\frac{\mathbf{k}}{\omega} J(k) \right)^2 \right\} d\omega d\Omega, \quad (29.1.7)$$

где

$$j_\mu(k) = e \sqrt{4\pi} \left(\frac{p_{2\mu}}{-kp_2} - \frac{p_{1\mu}}{-kp_1} \right)$$

и p_1 и p_2 — 4-импульсы электрона до и после рассеяния. Эту величину можно назвать 4-током перехода. Она удовлетворяет, очевидно, уравнению непрерывности

$$k_\mu j_\mu(k) = 0.$$

Поэтому dJ можно представить также в виде

$$dJ = |j_\mu(k)|^2 \frac{d^3k}{2(2\pi)^3}. \quad (29.1.8)$$

Подставляя это выражение в (29.1.4), получим следующую формулу для среднего числа излучаемых электроном мягких фотонов, частота которых лежит в интервале $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$:

$$\bar{n} = \int_{\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2} |j_\mu(k)|^2 \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3}. \quad (29.1.9)$$

Определим теперь вероятность процесса рассеяния электрона во внешнем поле, сопровождающегося излучением n мягких фотонов. Предполагая выполненными условия (29.1.1), мы можем, очевидно, представить эту вероятность в виде

$$d\omega = \omega(n) d\omega_s, \quad (29.1.10)$$

где $d\omega_s$ — вероятность упругого рассеяния электрона во внешнем поле и $\omega(n)$ — распределение Пуассона (29.1.3).

Если $\omega_1 = 0$, то \bar{n} , согласно (29.1.9), будет равно бесконечности, и следовательно, $\omega(n)$ обратится в нуль.

Иными словами, вероятность рассеяния электрона с излучением конечного числа длинноволновых фотонов равна нулю. В частности, равняется нулю вероятность чисто упругого рассеяния электрона. Так как, с другой стороны,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega(n) = 1,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} d\omega = d\omega_s. \quad (29.1.11)$$

Поэтому можно сказать, что найденная в § 11 вероятность упругого рассеяния электрона $d\omega_s$, не учитывающая взаимодействия электрона с полем излучения, представляет собой полную вероятность рассеяния электрона, независимо от числа испущенных им мягких фотонов. Эта вероятность, как мы видим, может определяться в случае достаточно слабого внешнего поля с помощью теории возмущений, в отличие от вероятности рассеяния, сопровождающегося излучением одного или конечного числа фотонов с $\omega \rightarrow 0$: согласно теории возмущений эта вероятность равна бесконечности, тогда как в действительности она равна нулю.

Средняя энергия излучаемых мягких фотонов в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$ в телесном угле $d\omega$ при рассеянии электрона может быть, согласно (29.1.3), представлена в виде

$$d\bar{\mathcal{E}} = \sum_{r=0}^{\infty} n\omega e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^r}{r!} d\omega_s = \bar{\omega} \bar{n} d\omega_s.$$

Так как $\bar{n} = \frac{dJ}{\omega}$, то

$$d\bar{\mathcal{E}} = dJ d\omega_s. \quad (29.1.12)$$

Эта величина равна, как и следовало ожидать, произведению вероятности $d\omega_s$ упругого рассеяния электрона на классическое выражение dJ для излучаемой при этом энергии. К такому же результату приводит и обычная теория возмущений в области малых частот. Мы видим, таким образом, что среднюю излучаемую энергию и полную вероятность рассеяния электрона (независимо от числа испущенных мягких фотонов) можно определять с помощью обычной теории возмущений как в области больших, так и в области малых частот, хотя вероятность рассеяния электрона, сопровождающегося испусканием конечного числа фотонов с $\omega \rightarrow 0$, дается теорией возмущений неверно.

Вероятность излучения фотонов, энергия которых не предельно мала, может определяться с помощью обычной теории возмущений, т. е. разложением матричных элементов в ряд по степеням заряда электрона, но определенную таким образом вероятность излучения одного фотона следует интерпретировать не как вероятность того, что был испущен только один этот фотон, а как вероятность излучения наряду с этим фотоном произвольного числа длинноволновых фотонов с частотой $\omega \rightarrow 0$.

29.2. Сечение рассеяния электрона с излучением мягкого фотона.

Поскольку теория возмущений приводит к неправильному значению вероятностей различных процессов взаимодействия электрона с длинноволновыми фотонами, мы в дальнейшем, пользуясь теорией возмущений, выделим область малых частот, т. е. будем считать, что частота фотона превосходит некоторое минимальное значение ω_{\min} . Эта величина должна быть исключена, для чего должно быть произведено специальное исследование взаимодействия электрона с длинноволновыми фотонами (см., например, задачу о радиационных поправках к рассеянию электрона и радиационном смещении атомных уровней, § 38).

Практически удобнее, однако, пользоваться несколько иным условием, эквивалентным условию $\omega > \omega_{\min}$, а именно, не накладывая ограничений на частоту фотонов, считать, что фотон обладает некоторой малой массой λ , отличной от нуля. Введение этой массы, являющейся релятивистски инвариантной величиной в отличие от неинвариантной величины ω_{\min} , сильно упрощает расчеты.

Мы покажем теперь, как найти связь между «массой» фотона λ и минимальной частотой ω_{\min} .

Рассмотрим излучение фотона электроном в некотором постоянном внешнем поле $A_{\mu}^{(e)}(x)$. Согласно (28.1.1) матричный элемент, определяющий излучение фотона с энергией k_0 и вектором поляризации, направленным вдоль оси μ , равен

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = ie^2 \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \left\{ \frac{\gamma_{\mu}}{\sqrt{2k_0}} \frac{i(\hat{p}_2 + \hat{k}) - m}{(p_2 + k)^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(q) + \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \frac{\gamma_{\mu}}{\sqrt{2k_0}} \right\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}}, \quad (29.2.1)$$

где p_1 и p_2 — 4-импульсы электрона до и после рассеяния, k — 4-импульс фотона. Так как нас интересует область малых частот, то мы можем пренебречь в числителях величиной \hat{k} . Вводя далее «массу» фотона λ согласно соотношению

$$k^2 + \lambda^2 = 0,$$

перепишем $\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle$ в виде

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{-ie^2}{\sqrt{2k_0}} \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{i\hat{p}_2 - m}{\lambda^2 - 2p_2 k} \hat{A}^{(e)}(q) + \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i\hat{p}_1 - m}{\lambda^2 + 2p_1 k} \gamma_{\mu} \right\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}},$$

где

$$pk = \mathbf{p}\mathbf{k} - \varepsilon k_0, \quad \varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}.$$

Так как $(i\hat{p}_1 + m)u_1 = 0$, то

$$\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) (i\hat{p}_1 - m) \gamma_{\mu} u_1 = i\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) (\hat{p}_1 \gamma_{\mu} + \gamma_{\mu} \hat{p}_1) u_1 = 2i\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) u_1 p_{1\mu}.$$

Аналогичным образом

$$\bar{u}_2 \gamma_{\mu} (i\hat{p}_2 - m) \hat{A}^{(e)}(q) u_1 = 2i\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) u_1 p_{2\mu}.$$

Поэтому

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{e^2}{\sqrt{8k_0\varepsilon_1\varepsilon_2}} (\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) u_1) \left(\frac{p_{2\mu}}{\frac{\lambda^2}{2} - p_2 k} + \frac{p_{1\mu}}{\frac{\lambda^2}{2} + p_1 k} \right). \quad (29.2.2)$$

Предполагая, что $\varepsilon \gg \lambda$, мы можем пренебречь λ^2 , так как pk содержит слагаемое $\varepsilon \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}$, которое значительно больше λ^2 .

Определим теперь сечение рассеяния электрона, сопровождающееся испусканием фотона, энергия которого не превосходит $\Delta\varepsilon$. Относительно величины $\Delta\varepsilon$ мы будем предполагать, что она значительно меньше энергии электрона ε и значительно больше массы фотона λ :

$$\lambda \ll \Delta\varepsilon \ll \varepsilon.$$

Дифференциальное сечение этого процесса, просуммированное и усредненное по ориентациям спина электрона в начальном и конечном состояниях, равно

$$d\sigma' = \frac{2\pi}{v_1} \frac{e^4}{4} \sum_{\mu_1, \mu_2} |\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) u_1|^2 \frac{B}{(2\pi)^3} \rho_f d\omega, \quad (29.2.3)$$

где

$$B = \sum_{\mu=1}^4 \int_{k_0 \leq \Delta\varepsilon} \left(\frac{p_{2\mu}}{p_2 k} - \frac{p_{1\mu}}{p_1 k} \right)^2 \frac{d^3 k}{k_0},$$

$d\omega$ — элемент телесного угла, в котором лежит импульс электрона \mathbf{p}_2 после рассеяния, v_1 — начальная скорость электронов и ρ_f — число конечных состояний электрона, отнесенное к единичному интервалу энергии и единичному телесному углу.

$$\rho_f = \frac{\mathbf{p}_2^2 dp_2}{(2\pi)^3 d\varepsilon} = \frac{|\mathbf{p}_2| \varepsilon}{(2\pi)^3}.$$

В случае кулоновского поля ядра

$$\hat{A}^{(e)}(q) = -i\gamma_4 \frac{Ze}{q^2}$$

и

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} \left| \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \hat{A}^{(e)}(q) \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \right|^2 = 2 \frac{(Ze)^2}{(q^2)^2} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) = 8\pi\alpha \frac{Z^2}{q^4} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \right),$$

где ϕ — угол рассеяния

Чтобы установить интересующую нас связь между массой фотона λ и минимальной частотой ω_{\min} , мы вычислим входящую в (29.2.3) величину B двумя способами [19]: сначала предполагая, что $\lambda \neq 0$ и k_0 изменяется от $k_0 = \lambda$ до $k_0 = \Delta\varepsilon$, а затем считая, что $\lambda = 0$ и k_0 изменяется от $k_0 = \omega_{\min}$ до $k_0 = \Delta\varepsilon$. Сравнивая оба выражения для B , обозначаемые далее через B_λ и $B_{\omega_{\min}}$, мы найдем соотношение между λ и ω_{\min} .

Замечая, что $p_{1,2}^2 + m^2 = 0$, имеем

$$B_\lambda = - \int_{|\mathbf{k}|=0}^{|\mathbf{k}|=\Delta\varepsilon} \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}| d\omega_\gamma}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}} \left\{ \frac{m_2}{(\varepsilon_2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}_2 \mathbf{k})^2} + \frac{m_2}{(\varepsilon_1 \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}_1 \mathbf{k})^2} + \frac{2p_1 p_2}{(\varepsilon_2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}_2 \mathbf{k})(\varepsilon_1 \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}_1 \mathbf{k})} \right\}, \quad (29.2.4)$$

$$B_{\omega_{\min}} = - \int_{|\mathbf{k}|=\omega_{\min}}^{|\mathbf{k}|=\Delta\varepsilon} |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| d\omega_\gamma \left\{ \frac{m^2}{(\varepsilon_2 |\mathbf{k}| - \mathbf{p}_2 \mathbf{k})^2} + \frac{m^2}{(\varepsilon_1 |\mathbf{k}| - \mathbf{p}_1 \mathbf{k})^2} + \frac{2p_1 p_2}{(\varepsilon_2 |\mathbf{k}| - \mathbf{p}_2 \mathbf{k})(\varepsilon_1 |\mathbf{k}| - \mathbf{p}_1 \mathbf{k})} \right\},$$

где $d\omega_\gamma$ — элемент телесного угла, в котором лежит импульс фотона \mathbf{k} .

Воспользуемся далее тождеством

$$\frac{1}{(\varepsilon_2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}_2 \mathbf{k})(\varepsilon_1 \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}_1 \mathbf{k})} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{(\varepsilon_2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}_2 \mathbf{k})^2},$$

где

$$\mathbf{p}_z = \frac{1}{2}(1+z)\mathbf{p}_1 + \frac{1}{2}(1-z)\mathbf{p}_2, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{2}(1+z)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(1-z)\varepsilon_2.$$

Тогда

$$B_\lambda = - \int_{|\mathbf{k}|=0}^{|\mathbf{k}|=\Delta\varepsilon} \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}| d\omega_\gamma}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}} \left\{ \frac{m^2}{(\varepsilon_1 \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}_1 \mathbf{k})^2} + \frac{m^2}{(\varepsilon_2 \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}_2 \mathbf{k})^2} + p_1 p_2 \int_{-1}^1 \frac{dz}{(\varepsilon_z \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}_z \mathbf{k})^2} \right\}.$$

Так как

$$\int \frac{d\sigma_{\gamma}}{(\varepsilon \sqrt{k^2 + \lambda^2} - \mathbf{p}\mathbf{k})^2} = \frac{4\pi}{k^2 (\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2) + \lambda^2 \varepsilon^2},$$

то

$$B_{\lambda} = -4\pi \int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{k^2 d|\mathbf{k}|}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \left\{ \frac{m^2}{k^2 (\varepsilon_1^2 - \mathbf{p}_1^2) + \lambda^2 \varepsilon_1^2} + \frac{m^2}{k^2 (\varepsilon_2^2 - \mathbf{p}_2^2) + \lambda^2 \varepsilon_2^2} + p_1 p_2 \int_{-1}^1 \frac{dz}{k^2 (\varepsilon_z^2 - \mathbf{p}_z^2) + \lambda^2 \varepsilon_z^2} \right\}. \quad (29.2.5)$$

Легко видеть, что

$$\int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{k^2 d|\mathbf{k}|}{[k^2 (\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2) + \lambda^2 \varepsilon^2] \sqrt{k^2 + \lambda^2}} = \frac{1}{\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2} \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{\varepsilon}{2|\mathbf{p}|} \frac{1}{\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2} \ln \frac{\varepsilon + |\mathbf{p}|}{\varepsilon - |\mathbf{p}|}.$$

Поэтому

$$B_{\lambda} = 4\pi \left\{ - \left[2 + (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \int_{-1}^1 \frac{dz}{\varepsilon_z^2 - \mathbf{p}_z^2} \right] \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_1}{|\mathbf{p}_1|} \ln \frac{\varepsilon_1 + |\mathbf{p}_1|}{\varepsilon_1 - |\mathbf{p}_1|} + \frac{\varepsilon_2}{|\mathbf{p}_2|} \ln \frac{\varepsilon_2 + |\mathbf{p}_2|}{\varepsilon_2 - |\mathbf{p}_2|} + (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \int_{-1}^1 \frac{dz}{\varepsilon_z^2 - \mathbf{p}_z^2} \frac{\varepsilon_z}{|\mathbf{p}_z|} \ln \frac{\varepsilon_z + |\mathbf{p}_z|}{\varepsilon_z - |\mathbf{p}_z|} \right] \right\}. \quad (29.2.6)$$

Вводя вместо z новую переменную интегрирования ζ ,

$$\zeta = \frac{|\mathbf{p}_z|}{v\varepsilon_z} = \sqrt{\cos^2 \frac{\vartheta}{2} + z^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}},$$

представим B_{λ} в виде

$$B_{\lambda} = 4\pi \left\{ 2(2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi - 1) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} - \frac{1-v^2}{v \sin \frac{\vartheta}{2}} \operatorname{ch} 2\Phi \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \ln \frac{1+v\zeta}{1-v\zeta} \frac{d\zeta}{(1-v^2\zeta^2) \sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} \right\}, \quad (29.2.7)$$

где величина Φ связана с q соотношением

$$q^2 = 4m^2 \operatorname{sh}^2 \Phi.$$

Так как $q_4 = 0$, то

$$q^2 = q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

и

$$\operatorname{sh} \Phi = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Полагая в (29.2.5) $\lambda=0$ и интегрируя по $|\mathbf{k}|$ в пределах от $|\mathbf{k}| = \omega_{\min}$ до $|\mathbf{k}| = \Delta\varepsilon$, найдем $B_{\omega_{\min}}$:

$$B_{\omega_{\min}} = -4\pi \left\{ 2 + (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \int_{-1}^1 \frac{dz}{\varepsilon_z^2 - p_z^2} \right\} \int_{\omega_{\min}}^{\Delta\varepsilon} \frac{d|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|}. \quad (29.2.8)$$

Так как

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{\varepsilon_z^2 - p_z^2} = \frac{4\Phi}{m^2 \operatorname{sh} 2\Phi}$$

и

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -m^2 \operatorname{ch} 2\Phi,$$

то окончательно

$$B_{\omega_{\min}} = 8\pi (2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi - 1) \ln \frac{\Delta\varepsilon}{\omega_{\min}}. \quad (29.2.9)$$

Сравнивая (29.2.7) и (29.2.9), найдем искомую связь между λ и ω_{\min} :

$$\begin{aligned} 2(1 - 2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi) \ln \frac{2\omega_{\min}}{\lambda} = \\ = \frac{1}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} - \frac{1-v^2}{v \sin \frac{\vartheta}{2}} \operatorname{ch} 2\Phi \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \ln \frac{1+v\zeta}{1-v\zeta} \frac{d\zeta}{(1-v^2\zeta^2) \sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}}. \end{aligned}$$

В предельном случае малых энергий электрона, $v \ll 1$, эта формула приводит к соотношению

$$\ln 2\omega_{\min} = \ln \lambda + \frac{5}{6}. \quad (29.2.10)$$

Подставляя (29.2.7) в (29.2.3), получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния электрона в кулоновском поле ядра с излучением фотона, энергия которого не превосходит $\Delta\varepsilon$ ($\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$):

$$\begin{aligned} d\sigma' = \left(\frac{Z\alpha}{2mv^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 (1-v^2) \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 2(2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi - 1) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \right. \\ \left. + \frac{1}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} - \frac{1-v^2}{v \sin \frac{\vartheta}{2}} \operatorname{ch} 2\Phi G(v, \vartheta) \right\} do, \quad (29.2.11) \end{aligned}$$

где

$$G(v, \vartheta) = \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \ln \frac{1+v\zeta}{1-v\zeta} \frac{d\zeta}{(1-v^2\zeta^2) \sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}}.$$

Вычислим еще величину B_λ в том случае, когда $\mathbf{p}_1 = 0$. Полагая

$$\varepsilon_2 = m \operatorname{ch} 2y, \quad p_2 = m \operatorname{sh} 2y$$

и замечая, что

$$\varepsilon_z^2 - |\mathbf{p}_z|^2 = \operatorname{ch}^2 y - z^2 \operatorname{sh}^2 y,$$

имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{\varepsilon_z^2 - |\mathbf{p}_z|^2} = \frac{4y}{m^2 \operatorname{sh} 2y}.$$

Далее,

$$\frac{\varepsilon_1}{p_1} \ln \frac{\varepsilon_1 + |\mathbf{p}_1|}{\varepsilon_1 - |\mathbf{p}_1|} = 2, \quad \frac{\varepsilon_2}{p_2} \ln \frac{\varepsilon_2 + |\mathbf{p}_2|}{\varepsilon_2 - |\mathbf{p}_2|} = 4y \operatorname{cth} 2y,$$

$$\varepsilon_z = \operatorname{ch}^2 y - z \operatorname{sh}^2 y, \quad |\mathbf{p}_z| = (1 - z) \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y$$

и

$$I \equiv \int_{-1}^1 \frac{dz}{\varepsilon_z^2 - |\mathbf{p}_z|^2} \frac{\varepsilon_z}{|\mathbf{p}_z|} \ln \frac{\varepsilon_z + |\mathbf{p}_z|}{\varepsilon_z - |\mathbf{p}_z|} =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{dz}{\operatorname{ch}^2 y - z^2 \operatorname{sh}^2 y} \frac{\operatorname{ch}^2 y - z \operatorname{sh}^2 y}{(1 - z) \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y} \ln \frac{e^{2y} (\operatorname{ch} y - z \operatorname{sh} y)}{\operatorname{ch} y + z \operatorname{sh} y}.$$

Полагая $z = \frac{\operatorname{th} v}{\operatorname{th} y}$, получим

$$I = 2 \int_{-y}^y \frac{dv}{\operatorname{ch}^2 y} \frac{\operatorname{cth} y - \operatorname{th} v}{\operatorname{th} y - \operatorname{th} v} (y - v) = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 y \operatorname{th} y} \int_{-y}^y dv \frac{\operatorname{ch} (y - v)}{\operatorname{sh} (y - v)} (y - v) = \frac{8y}{\operatorname{sh} 2y} h(2y),$$

где

$$h(y) = \frac{1}{y} \int_0^y u \operatorname{cth} u \, du.$$

Величина B_λ , определяемая согласно (29.2.6), выразится окончательно при $p_1 = 0$ следующей формулой:

$$B_\lambda = 4\pi \left\{ 2(2y \cdot \operatorname{cth} 2y - 1) \left[\ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{2} \right] + 4y \operatorname{cth} 2y [1 - h(2y)] \right\}. \quad (29.2.12)$$

29.3. Исследование расходимости в области малых частот. Покажем, что распределение Пуассона для вероятности излучения длинноволновых фотонов может быть получено с помощью матрицы рассеяния [20].

Мы будем предполагать выполненными условия (29.1.1), означающие, что излучение оказывает малое влияние на движение электрона, которое можно поэтому считать заданным. В этих условиях плотность тока можно считать не оператором, а c -числом и воспользоваться выражением (16.6.9) для матрицы рассеяния.

Разлагая плотность тока в интеграл Фурье

$$j_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int j_\mu(k) e^{ikx} d^4k, \quad j_\mu^*(k) = j_\mu(-k)$$

и используя разложение операторов потенциалов электромагнитного поля на плоские волны, представим матрицу рассеяния \mathbf{S} в виде

$$\mathbf{S} = \exp \left\{ \frac{-1}{2(2\pi)^4} \int j_\nu^*(k) D_c(k) j_\nu(k) d^4k \right\} \times$$

$$\times N \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [i_\mu^*(k) \mathbf{c}_{k\lambda} + j_\mu(k) \mathbf{c}_{k\lambda}^\dagger] e_{\lambda\mu} \right\},$$

где

$$D_c(k) = \frac{-i}{k^2}.$$

Рассмотрим интеграл, входящий в первую экспоненту:

$$K \equiv \frac{1}{2} \int j_v^*(k) D_c(k) j_v(k) d^4k = \frac{-i}{2} \int j_v^*(\mathbf{k}, k_0) j_v(\mathbf{k}, k_0) \frac{d^3k dk_0}{k^2 - k_0^2}.$$

Пользуясь правилом обхода полюсов в подынтегральной функции этого выражения, т. е. считая полюсами точки $k_0 = \pm \sqrt{k^2 - i0}$, получим в результате интегрирования по k_0

$$K = \pi \int j_v^*(\mathbf{k}) j_v(\mathbf{k}) \frac{d^3k}{2\omega},$$

где $\omega = |\mathbf{k}|$ и $j_v(\mathbf{k}) \equiv j_v(\mathbf{k}, \omega)$.

Таким образом, S -матрица может быть представлена в виде

$$\mathbf{S} = AN \exp \left\{ \frac{i}{V\bar{V}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [j_v^*(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\lambda} + j_v(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger] e_{\lambda\nu} \right\}, \quad (29.3.1)$$

где

$$A = \exp \left\{ -\frac{K}{(2\pi)^4} \right\} = \exp \left\{ \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int j_v^*(\mathbf{k}) j_v(\mathbf{k}) \frac{d^3k}{2\omega} \right\}.$$

Вычислим элемент матрицы \mathbf{S} , связывающий состояние вакуума с состоянием, в котором находится n фотонов различных сортов,

$$n = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}},$$

где $n_{\mathbf{k}}$ — число фотонов с импульсом \mathbf{k} . Рассмотрим для этого n -й член в разложении S -матрицы:

$$\mathbf{S}^{(n)} = AN \left\{ \frac{1}{n!} \left[\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (j_\mu^*(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\lambda} + j_\mu(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger) e_{\lambda\mu} \right]^n \right\},$$

и найдем матричный элемент

$$\langle n | \mathbf{S}^{(n)} | 0 \rangle = A \langle n | \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} j_\mu(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e_{\lambda\mu} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \right)^n | 0 \rangle. \quad (29.3.2)$$

Воспользуемся формулой

$$(B_1 + B_2 + \dots + B_r)^n = \sum_{n'_1 + n'_2 + \dots + n'_r = n} B_1^{n'_1} B_2^{n'_2} \dots B_r^{n'_r} \frac{n!}{n'_1! n'_2! \dots n'_r!}$$

и положим в ней

$$B_r = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} j_\mu(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e_{\lambda\mu}; \quad r \equiv \mathbf{k}, \lambda; \quad n'_r \equiv n'_{\mathbf{k}\lambda}.$$

Нас интересует конечное состояние, содержащее $n_r \equiv n_{\mathbf{k}\lambda}$ фотонов r -го сорта. Поэтому вклад в $\langle n | \mathbf{S}^{(n)} | 0 \rangle$ будет вносить только одно слагаемое в этой формуле, в котором

$$n'_1 = n_1, \quad n'_2 = n_2, \quad \dots, \quad n'_r = n_r,$$

т. е.

$$\langle n | \mathbf{S}^{(n)} | 0 \rangle = A \left(\frac{i}{\sqrt{V}} \right)^n \prod_{\mathbf{k}, \lambda} \left\langle n_{\mathbf{k}\lambda} \left| \frac{1}{n_{\mathbf{k}\lambda}!} \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega}} j_{\mu}(\mathbf{k}) \mathbf{c}_{\lambda}^{\dagger} e_{\lambda\mu} \right)^{n_{\mathbf{k}\lambda}} \right| 0 \right\rangle.$$

Замечая, что, согласно (5.1.3),

$$\langle n_{\mathbf{k}\lambda} | (\mathbf{c}_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger})^{n_{\mathbf{k}\lambda}} | 0 \rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}!},$$

получим окончательно

$$\langle n | \mathbf{S}^{(n)} | 0 \rangle = A \left(\frac{i}{\sqrt{V}} \right)^n \prod_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}!}} \left(j_{\mu}(\mathbf{k}) e_{\lambda\mu} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \right)^{n_{\mathbf{k}\lambda}}. \quad (29.3.3)$$

Найдем теперь вероятность излучения $n = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$ фотонов с различными импульсами. Эта вероятность, которую мы обозначим через P_n , равна, очевидно, квадрату модуля $\langle n | \mathbf{S}^{(n)} | 0 \rangle$, просуммированному по λ и \mathbf{k} , причем сумма $\sum_{\lambda=1}^2 n_{\mathbf{k}\lambda}$ должна быть равна заданному числу $n_{\mathbf{k}}$. Так как $j_{\mu} e_{\lambda\mu} = j_{\lambda}$, то

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{A^2}{V^n} \sum_{n_{\mathbf{k}1} + n_{\mathbf{k}2} = n_{\mathbf{k}}} \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{n_{\mathbf{k}1}!} \left(\frac{1}{2\omega} |j_1(\mathbf{k})|^2 \right)^{n_{\mathbf{k}1}} \frac{1}{n_{\mathbf{k}2}!} \left(\frac{1}{2\omega} |j_2(\mathbf{k})|^2 \right)^{n_{\mathbf{k}2}} = \\ &= \frac{A^2}{V^n} \prod_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\omega} \right)^{n_{\mathbf{k}}} \frac{1}{n_{\mathbf{k}}!} (|j_1(\mathbf{k})|^2 + |j_2(\mathbf{k})|^2)^{n_{\mathbf{k}}}. \end{aligned}$$

Сумма квадратов модулей поперечных составляющих плотности тока $|j_1(\mathbf{k})|^2 + |j_2(\mathbf{k})|^2$ равна в силу уравнения непрерывности

$$\mathbf{k}_{\mu} j_{\mu}(\mathbf{k}) = 0$$

квадрату модуля 4-вектора плотности тока:

$$|j_1(\mathbf{k})|^2 + |j_2(\mathbf{k})|^2 = |\mathbf{j}(\mathbf{k})|^2 - \frac{1}{\omega^2} |\mathbf{k}\mathbf{j}(\mathbf{k})|^2 = |j_{\mu}(\mathbf{k})|^2.$$

Переходя далее в выражении для K от интегрирования к суммированию по \mathbf{k} согласно формуле

$$\int f(\mathbf{k}) \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} = \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}),$$

получим

$$A = \exp \left\{ \frac{-1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|j_{\mu}(\mathbf{k})|^2}{2\omega} \right\}, \quad (29.3.4)$$

поэтому окончательно P_n может быть представлено в виде

$$P_n = \prod_{\mathbf{k}} \exp \left\{ \frac{-|j_{\mu}(\mathbf{k})|^2}{2\omega V} \right\} \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{n_{\mathbf{k}}!} \left(\frac{|j_{\mu}(\mathbf{k})|^2}{2\omega V} \right)^{n_{\mathbf{k}}} = \prod_{\mathbf{k}} e^{-\bar{n}_{\mathbf{k}}} \frac{(\bar{n}_{\mathbf{k}})^{n_{\mathbf{k}}}}{n_{\mathbf{k}}!}, \quad (29.3.5)$$

где

$$\bar{n}_k = \frac{|j_\mu(\mathbf{k})|^2}{2\omega V}.$$

Таким образом, мы получили для вероятности излучения длинноволновых фотонов \bar{n} распределение Пуассона.

Ясно, что \bar{n}_k представляет собой среднее число фотонов с импульсом \mathbf{k} , так как, согласно (29.2.4),

$$\sum_{n_k} n_k P_n = \bar{n}_k.$$

Для суммарного среднего числа излученных длинноволновых фотонов мы получим выражение

$$\bar{n} = \sum_{\mathbf{k}} \bar{n}_k = \int |j_\mu(\mathbf{k})|^2 \frac{d^3k}{2(2\pi)^3\omega},$$

совпадающее с найденным классическим выражением (29.1.9).

29.4. Когерентные состояния поля излучения. Выше было установлено, что всякий процесс столкновения заряженных частиц сопровождается длинноволновым излучением. Найдем вектор состояния этого излучения Φ , определяемого соотношением

$$\Phi = \mathbf{S} | 0 \rangle,$$

где \mathbf{S} — оператор (16 6 9) [20].

Из выражений (29 3 1) и (29 3.4) следует, что \mathbf{S} представляет собой произведение операторов, отвечающих каждой степени свободы поля, характеризующейся волновым 4-вектором k и поляризацией λ :

$$\mathbf{S} = \prod_{k, \lambda} \mathbf{S}_{k\lambda}.$$

Соответственно

$$\Phi = \prod_{k, \lambda} \Phi_{k\lambda},$$

где $\Phi_{k\lambda}$ — вектор состояния данной степени свободы поля.

Разложим далее $\Phi_{k\lambda}$ по состояниям с определенным числом фотонов $\Phi_n \equiv |n\rangle$:

$$\Phi_{k\lambda} = \sum_n |n\rangle \langle n | \mathbf{S}_{k\lambda} | 0 \rangle.$$

Матричный элемент $\langle n | \mathbf{S}_{k\lambda} | 0 \rangle$ вычислялся выше. Согласно (29.3.2) и (29.3.4)

$$\langle n | \mathbf{S}_{k\lambda} | 0 \rangle = \langle n | \mathbf{S}_{k\lambda}^{(n)} | 0 \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_{k\lambda}|^2} \frac{\alpha_{k\lambda}^n}{\sqrt{n!}}, \quad (29.4.1)$$

где

$$\alpha_{k\lambda} = \frac{i}{\sqrt{2\omega V}} (e^{(\lambda)j}(k)). \quad (29.4.2)$$

Таким образом,

$$\Phi = \prod_{k, \lambda} e^{-\frac{1}{2}|\alpha_{k\lambda}|^2} \sum_n \frac{\alpha_{k\lambda}^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (29.4.3)$$

Для выяснения свойств этого состояния рассмотрим действия оператора поглощения фотона $c_{k\lambda}$ на вектор состояния $\Phi_{k\lambda}$. Согласно (29.4.1),

$$c_{k\lambda}\Phi_{k\lambda} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_{k\lambda}|^2} \sum_n \frac{\alpha_{k\lambda}^n}{\sqrt{n!}} c_{k\lambda} |n\rangle.$$

Так как (см. (5.1.3))

$$c_{k\lambda} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle,$$

то

$$c_{k\lambda}\Phi_{k\lambda} = \alpha_{k\lambda}\Phi_{k\lambda}, \quad (29.4.4)$$

т. е. $\Phi_{k\lambda}$ является собственным вектором оператора $c_{k\lambda}$, а $\alpha_{k\lambda}$ — соответствующим собственным значением. Заметим в связи с этим, что согласно (29.3.5) $|\alpha_{k\lambda}|^2$ является средним числом фотонов в состоянии $\Phi_{k\lambda}$.

Аналогично вектор состояния Φ является собственным вектором оператора

$$A_{\mu}^{(+)}(x) = \sum_{k\lambda} \frac{e_{\mu}^{(\lambda)}}{\sqrt{2\omega V}} c_{k\lambda} e^{ikhx}, \quad (29.4.5)$$

представляющего собой положительно частотную часть оператора потенциала $A_{\mu}(x)$. Действительно, из (29.4.4) и (29.4.5) следует:

$$A_{\mu}^{(+)}(x)\Phi = \mathcal{A}_{\mu}(x)\Phi,$$

где $\mathcal{A}_{\mu}(x)$ определяется формулой (29.4.5), в которой операторы $c_{k\lambda}$ заменены параметрами $\alpha_{k\lambda}$.

Используя значение $\alpha_{k\lambda}$ (29.4.2), получим

$$\mathcal{A}_{\mu}(x) = \sum_{k\lambda} \frac{ie_{\mu}^{(\lambda)}}{2\omega V} (j(k) e^{i\lambda}) e^{ikhx} = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{(e^{(\lambda)} j(k))}{2\omega} e_{\mu}^{(\lambda)} e^{ikhx} d^3k.$$

Нетрудно убедиться, что $A_{\mu}(x) = \mathcal{A}_{\mu}(x) + \mathcal{A}_{\mu}^{*}(x)$ представляет собой классическое поле, удовлетворяющее уравнению Даламбера

$$\square A_{\mu}(x) = -j_{\mu}(x).$$

Заметим, что состояния $\Phi_{k\lambda}$ и Φ являются состояниями с неопределенной энергией. Эта неопределенность соответствует тому, что в задаче об излучении мы пренебрегали изменением энергии излучающей частицы в процессе излучения.

Собственные состояния оператора $c_{k\lambda}$ можно рассматривать и вне связи с задачей о длинноволновом излучении, а вообще для описания свободного электромагнитного поля [20]. При этом $\alpha_{k\lambda}$ не будут определяться формулой (29.4.2), а будут играть роль произвольных комплексных параметров. В отличие от состояний с определенным числом фотонов, такие состояния допускают, как мы видели, естественный переход к классическому пределу.

Пусть $|\alpha\rangle$ — вектор состояния, удовлетворяющий уравнению

$$c|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

(индексы k, λ здесь для краткости опущены). Из разложения $|\alpha\rangle$ по состояниям с определенным числом фотонов $|n\rangle$ (29.4.1) следует, что состояния $|\alpha\rangle$ нормированы:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_n |\langle n|\alpha\rangle|^2 = 1,$$

но не ортогональны

$$\langle \alpha_2 | \alpha_1 \rangle = e^{-|\alpha_1 - \alpha_2|^2}.$$

Однако система векторов $|\alpha\rangle$ является полной, т. е. любое состояние поля может быть разложено по состояниям $|\alpha\rangle$. Условие полноты, как легко проверить, имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int \langle n | \alpha \rangle \langle m | \alpha \rangle^* d^2\alpha = \delta_{nm}, \quad (29.4.6)$$

где $d^2\alpha$ — элемент площади в комплексной плоскости α .

Из (29.4.6) следует, что

$$|n\rangle = \int e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} |\alpha\rangle d^2\alpha.$$

Поэтому, если произвольное состояние $|f\rangle$ определяется разложением

$$|f\rangle = \sum_n f_n |n\rangle,$$

то

$$|f\rangle = \int e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} f(\alpha^*) |\alpha\rangle d^2\alpha, \quad (29.4.7)$$

где

$$f(Z) = \sum_n f_n \frac{Z^n}{\sqrt{n!}}.$$

29.5. Излучение мягких фотонов при произвольных столкновениях.

В § 28.2 отмечалось, что в нерелятивистском случае дифференциальное сечение тормозного излучения представляет собой произведение сечения упругого рассеяния $d\sigma_s$ и вероятности излучения $d\omega_\gamma$:

$$d\sigma = d\sigma_s \cdot d\omega_\gamma.$$

Покажем, что такое же соотношение имеет место для излучения, сопровождающего произвольный процесс столкновения, если только энергия излучаемого фотона достаточно мала, т. е. при выполнении условий (29.1.1). При этом мы будем считать, что соблюдено условие применимости теории возмущений ($e^2 \ln \frac{\varepsilon}{\omega} \ll 1$).

Рассмотрим сначала излучение мягкого фотона во внешнем поле. Тогда, согласно (29.2.2),

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{i}{2 \sqrt{2\omega\varepsilon_1\varepsilon_2}} M,$$

где

$$M = ie (\bar{u}_2 \hat{A}^{(e)}(q) u_1) j_\mu e_\mu \quad (29.5.1)$$

и

$$j_\mu = e \left(\frac{p_{2\mu}}{p_2 k} - \frac{p_{1\mu}}{p_1 k} \right). \quad (29.5.2)$$

Мы видим, что матричный элемент M содержит два множителя: первый множитель представляет собой амплитуду упругого рассеяния, а второй — ток перехода j_μ .

Выражение для j_μ имеет полюс при $\omega = 0$, что и является причиной «инфракрасной катастрофы».

Аналогичную структуру имеют токи перехода для любых рассеивающих заряженных частиц при $k \rightarrow 0$, так как выражение (29.5.2) — это единственный тип выражения, удовлетворяющего уравнению непрерывности $kj = 0$ и имеющего полюс при $k = 0$. Руководствуясь этим, можно обобщить выражение для матричного элемента (29.5.1) на случай излучения мягких фотонов при любых столкновениях.

Рассмотрим, например, упругое столкновение заряженной частицы a с нейтральной частицей b , вызванное сильным взаимодействием (диаграмма этого процесса изображена на рис. 29.1; p_1 и p_2 обозначают 4-импульсы

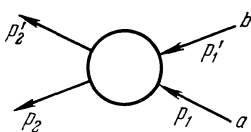


Рис. 29.1.

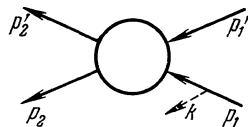
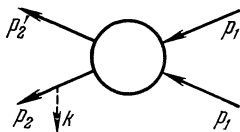


Рис. 29.2.

частицы a до и после рассеяния, p_1' и p_2' — аналогичные величины для частицы b). Этот процесс, амплитуду которого мы обозначим через M_s , будет сопровождаться излучением мягкого фотона (рассеянию с излучением соответствуют диаграммы рис. 29.2). Для амплитуды рассеяния с излучением может быть написано выражение, аналогичное (29.5.1).

$$M_\gamma = M_s j_\mu e_\mu, \tag{29.5.3}$$

где j_μ определяется формулой (29.5.2), в которую вместо e должен входить заряд e_a частицы a .

Это выражение можно получить, исходя из диаграмм рис. 29.2, если сопоставить вершине величину $2p_\mu$ (в § 34 будет показано, что такой вид имеет при $k \rightarrow 0$ вершинная функция для любых заряженных частиц).

Формулу (29.5.3) можно применить к излучению мягкого фотона при произвольном столкновении, если под M_s понимать амплитуду соответствующего процесса без излучения, а под ток переходом j_μ — величину

$$j_\mu = \sum_f \frac{e_f p_{f\mu}}{p_f k} - \sum_i \frac{e_i p_{i\mu}}{p_i k}, \tag{29.5.4}$$

где e_i и p_i — заряды и импульсы начальных частиц и e_f и p_f — аналогичные величины для конечных частиц.

Кроме главной «инфракрасной» части амплитуды излучения M_γ (пропорциональной $1/\omega$), можно найти столь же общее выражение для поправки к ней, не содержащей ω [21]. Вернемся с этой целью к процессу, изображенному на рис. 29.2. Легко видеть, что поправочные члены могут быть трех типов. Во-первых, дополнительные члены появятся в числителях выражения для тока перехода (29.5.2), т. е. дополнительные члены возникнут в вершинах диаграмм рис. 29.2, причем они должны быть пропорциональны k . Эти члены определяются (см. § 12.1, а также § 34.2) магнитными моментами частиц; в случае частиц со спином нуль они отсутствуют.

Во-вторых, такие члены появятся, если учесть, что амплитуды рассеяния M_s , отвечающие двум диаграммам рис. 29.2, относятся к разным энергиям рассеивающейся частицы. Если энергия частицы a в системе покоя частицы b равна ε на первой диаграмме, то на второй диаграмме

она будет равна $\varepsilon - \omega$. Вводя вместо ε и ω инвариантные переменные $\nu = p_1 p'_1 = m_b \varepsilon$ и $k p'_1 = m_b \omega$, где m_b — масса частицы b , мы можем записать M_γ в виде

$$M_\gamma = e_\mu \left(\frac{p_{2\mu}}{p_2 k} M_s(\nu) - \frac{p_{1\mu}}{p_1 k} M_s(\nu - k p'_1) \right) = M_s(\nu) \left(\frac{p_{2\mu}}{p_2 k} - \frac{p_{1\mu}}{p_1 k} \right) e_\mu + M^{(1)},$$

где

$$M^{(1)} = e_a \frac{\partial M_s}{\partial \nu} \frac{p_{1\mu} e_\mu}{p_1 k} p'_1 k = \frac{\partial M_s}{\partial \nu} e_\mu j_\mu^{(1)}, \quad (29.5.5)$$

$$j_\mu^{(1)} = e_a \frac{k p'_1}{k p_1} p_{1\mu}$$

(для краткости мы не указываем других аргументов, от которых зависит M_s).

Наконец, интересующие нас члены могут содержаться во «внутреннем» излучении, описываемом диаграммами типа рис. 29.3. Это излучение определяется током перехода $\langle p_2 p'_2 | j | p_1 p'_1 \rangle$, о котором мы мало что знаем, так как он существенно зависит от сильных взаимодействий. Однако замечательно, что можно найти первый член его разложения по ω , так как он определяется только требованием сохранения тока.

Для этого достаточно заметить, что амплитуда $M^{(1)}$ не удовлетворяет требованиям калибровочной инвариантности. Действительно, согласно (29.5.5),

$$k_\mu j_\mu^{(1)} = e_a k p'_1 \neq 0. \quad (29.5.6)$$

Очевидно, что «внутренний» ток $j_\mu^{(1)}$, соответствующий диаграмме рис. 29.3, должен компенсировать этот дефект тока $j_\mu^{(1)}$. Поскольку ток $j_\mu^{(2)}$ не должен, в рассматриваемом приближении, зависеть от k , то он однозначно определяется соотношением (29.5.6)

$$j_\mu^{(2)} = -e_a p'_{1\mu}.$$

Таким образом, окончательно мы получим следующее выражение для амплитуды излучения мягкого фотона с учетом членов, остающихся конечными при $\omega \rightarrow 0$:

$$M_\gamma = e_\mu \left\{ M_s j_\mu + \frac{\partial M_s}{\partial \nu} (j_\mu^{(1)} + j_\mu^{(2)}) \right\}, \quad (29.5.7)$$

где

$$j_\mu^{(1)} + j_\mu^{(2)} = e_a \frac{(k p'_1) p_{1\mu} - (k p_1) p'_{1\mu}}{(p_1 k)}. \quad (29.5.8)$$

(Заметим, что несимметричная форма этого выражения относительно начальных и конечных импульсов частиц связана только с несимметричным выбором переменной ν .)

§ 30. Образование и аннигиляция электронно-позитронных пар

30.1. Образование электронно-позитронной пары фотоном в поле ядра.

Для возможности процесса образования электронно-позитронных пар необходима, очевидно, энергия, не меньшая чем $2m$. Один фотон, обладающий достаточной энергией, не может, однако, образовать пары, так как

при этом не могут одновременно выполняться законы сохранения энергии и импульса. Для образования пары одним фотоном необходимо поэтому присутствие посторонней частицы, например ядра.

Электронно-позитронные пары могут образовываться также при столкновении двух заряженных частиц или фотонов, обладающих достаточной энергией. Однако эти процессы играют менее существенную роль, чем образование пары фотоном в поле ядра. Поэтому мы прежде всего рассмотрим образование пары фотоном в поле ядра.

Образованию пары фотоном в поле ядра соответствуют две диаграммы, изображенные на рис. 30.1. На них p_- и p_+ обозначают 4-импульсы электрона и позитрона, а k — 4-импульс фотона.

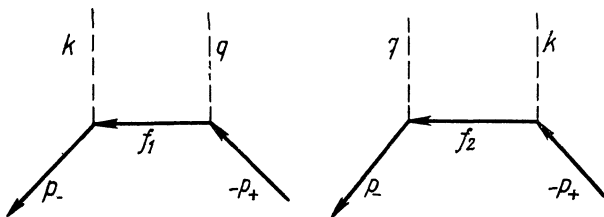


Рис. 30.1.

Матричный элемент, определяющий образование пары, может быть написан согласно правилам Фейнмана.

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{ie^2}{2\sqrt{2\omega\varepsilon_1\varepsilon_2}} \bar{u}(p_-) \left\{ \hat{e} \frac{i\hat{f}_1 - m}{f_1^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(q) + \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i\hat{f}_2 - m}{f_2^2 + m^2} \hat{e} \right\} u(-p_+), \quad (30.1.1)$$

где $A^{(e)}(q)$ — компонента Фурье поля ядра, $u(p_-)$ и $u(-p_+)$ — спинорные амплитуды электрона и позитрона и

$$f_1 = p_- - k = -p_+ + q, \quad f_2 = -p_+ + k = p_- - q.$$

Диаграммы рис. 30.1 эквивалентны, очевидно, диаграммам рис. 28 1, изображающим процесс тормозного излучения в поле ядра. Отличие заключается в интерпретации диаграмм: теперь правая (входящая) сплошная линия на каждой из двух диаграмм отвечает не начальному электрону, а конечному позитрону, и одна из пунктирных линий изображает не испущенный, а поглощенный фотон. Соответственно этому матричный элемент (30.1.1) можно получить из матричного элемента (28.1.1), если сделать в последнем замену:

$$p_1 \rightarrow -p_+, \quad p_2 \rightarrow p_-, \quad k \rightarrow -k.$$

Поэтому мы можем не вычислять заново сечения образования пары, а воспользуемся готовыми результатами для сечения тормозного излучения. Следует лишь иметь в виду, что, в отличие от процесса тормозного излучения, где плотность потока падающих частиц равняется скорости электрона, теперь плотность потока падающих частиц — фотонов — равняется скорости света. Кроме того, изменяется число конечных состояний, которое теперь равняется

$$\rho_f = \frac{d^3p_- d^3p_+}{(2\pi)^6}.$$

Учитывая эти изменения, легко получить следующее выражение для дифференциального сечения образования пары фотоном в кулоновском поле ядра [11]:

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha^2}{(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{p}_+||\mathbf{p}_-|}{\omega^3} \frac{d\varepsilon_+ d\theta_+ d\theta_-}{q^4} \frac{4}{m^4} \left\{ -4 \left[\mathbf{k} \left(\frac{\varepsilon_+\mathbf{p}_-}{\kappa_1} + \frac{\varepsilon_-\mathbf{p}_+}{\kappa_2} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. + q^2 \left[\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{p}_-}{\kappa_1} - \frac{\mathbf{p}_+}{\kappa_2} \right) \right]^2 + \frac{2\omega^2}{\kappa_1\kappa_2} [\mathbf{k}(\mathbf{p}_- + \mathbf{p}_+)]^2 \right\}, \quad (30.1.2)$$

где

$$m^2\kappa_1 = f_1^2 + m^2 = -2p_-k; \quad m^2\kappa_2 = f_2^2 + m^2 = -2p_+k;$$

$d\theta_+$ и $d\theta_-$ — элементы телесных углов, в которых лежат импульсы \mathbf{p}_+ и \mathbf{p}_- позитрона и электрона, и, наконец, ε_+ и ε_- — энергии обеих частиц. Они связаны, очевидно, соотношением

$$\varepsilon_+ + \varepsilon_- = \omega.$$

Формулу (30.1.2) можно переписать также в виде

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha^3}{2\pi} \frac{p_+p_- d\varepsilon_+ \sin\theta_+ \sin\theta_- d\theta_+ d\theta_- d\varphi}{\omega^3 q^4} \times \\ \times \left\{ \frac{p_+^2 \sin^2\theta_+}{(\varepsilon_+ - p_+ \cos\theta_+)^2} (4\varepsilon_-^2 - q^2) + \frac{p_-^2 \sin^2\theta_-}{(\varepsilon_- - p_- \cos\theta_-)^2} (4\varepsilon_+^2 - q^2) + \right. \\ \left. + \frac{2p_+p_- \sin\theta_+ \sin\theta_- \cos\varphi}{(\varepsilon_- - p_- \cos\theta_-)(\varepsilon_+ - p_+ \cos\theta_+)} (4\varepsilon_+\varepsilon_- + q^2 - 2\omega^2) - \right. \\ \left. - 2\omega^2 \frac{p_+^2 \sin^2\theta_+ + p_-^2 \sin^2\theta_-}{(\varepsilon_- - p_- \cos\theta_-)(\varepsilon_+ - p_+ \cos\theta_+)} \right\}, \quad (30.1.3)$$

где θ_{\pm} — углы между \mathbf{p}_{\pm} и \mathbf{k} , φ — угол между плоскостями $(\mathbf{k}, \mathbf{p}_+)$ и $(\mathbf{k}, \mathbf{p}_-)$,

$$q = \mathbf{k} - \mathbf{p}_- - \mathbf{p}_+, \quad p_{\pm} = |\mathbf{p}_{\pm}|, \quad q = |q|.$$

Определяемое формулой (30.1.3) угловое распределение имеет довольно сложный характер. Оно сильно упрощается только в крайне релятивистской области, когда главную роль играют малые углы θ_{\pm} . В этом случае электрон и позитрон испускаются преимущественно вперед, т. е. в узком конусе около направления движения фотона; эффективный угол раствора этого конуса равен по порядку величины

$$\theta_{\pm} \sim \frac{m}{\omega}.$$

Заменяя в формуле (30.1.3) $\sin\theta_{\pm}$ на θ_{\pm} , а $\cos\theta_{\pm}$ на $1 - \frac{1}{2}\theta_{\pm}^2$, получим следующую формулу, определяющую угловое распределение в области малых углов:

$$d\sigma = 4 \frac{Z^2\alpha^3}{\pi m^2} \frac{\varepsilon_-^2 \varepsilon_+^2}{\omega^3 q^4} [\omega^2 (u^2 + v^2) \xi\eta - 2\varepsilon_-\varepsilon_+ (u^2\xi^2 + v^2\eta^2) + \\ + 2(\varepsilon_-^2 + \varepsilon_+^2) uv\xi\eta \cos\varphi] d\varepsilon_+ d\theta_- d\theta_+ d\varphi,$$

где

$$u = \frac{p-\theta_-}{m}, \quad v = \frac{p+\theta_+}{m},$$

$$\xi = \frac{1}{1+u^2}, \quad \eta = \frac{1}{1+v^2}.$$

Интегрирование (30.1.3) по углам дает дифференциальное сечение образования пары с энергией позитрона в интервале ε_+ , $\varepsilon_+ + d\varepsilon_+$:

$$d\sigma = \bar{\Phi} \frac{|p_+||p_-|}{\omega^3} d\varepsilon_+ \left\{ -\frac{4}{3} - 2\varepsilon_+\varepsilon_- \frac{p_+^2 + p_-^2}{p_+^2 p_-^2} + \right.$$

$$+ m^2 \left(\frac{\varepsilon_+\xi_-}{|p_-|^3} + \frac{\varepsilon_-\xi_+}{|p_+|^3} - \frac{\xi_+\xi_-}{|p_+||p_-|} \right) +$$

$$+ L \left[\frac{\omega^3}{|p_+|^3 |p_-|^3} (\varepsilon_+^2 \varepsilon_-^2 + p_+^2 p_-^2) - \frac{8}{3} \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{|p_+||p_-|} - \right.$$

$$\left. - \frac{m^2 \omega}{2|p_+||p_-|} \left(\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_-^2}{|p_-|^3} \zeta_- + \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+^2}{|p_+|^3} \zeta_+ + \frac{2\omega\varepsilon_+\varepsilon_-}{p_+^2 p_-^2} \right) \right] \}, \quad (30.1.4)$$

где

$$\bar{\Phi} = r_0^2 Z^2 \alpha, \quad \zeta_{\pm} = 2 \ln \frac{\varepsilon_{\pm} + |p_{\pm}|}{m},$$

$$L = 2 \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + |p_+||p_-| + m^2}{m\omega}.$$

В крайне релятивистской области, когда все энергии значительно больше m ($\omega, \varepsilon_{\pm} \gg m$), это выражение сильно упрощается:

$$d\sigma = 4\bar{\Phi} \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3} \varepsilon_+\varepsilon_- \right) \left(\ln \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega} - \frac{1}{2} \right). \quad (30.1.5)$$

Формулы (30.1.4), (30.1.5) не учитывают экранирования поля ядра. Поэтому они справедливы, согласно § 28.5, если

$$\frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega} \ll 137Z^{-1/3}.$$

Учет экранирования может быть произведен таким же образом, как и в случае тормозного излучения. В крайне релятивистской области ($\omega, \varepsilon_{\pm} \gg m$) мы получим для сечения образования пар формулу

$$d\sigma = \bar{\Phi} \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left\{ (\varepsilon_-^2 + \varepsilon_+^2) \left(\Phi_1(\zeta) - \frac{4}{3} \ln Z \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} \varepsilon_-\varepsilon_+ \left(\Phi_2(\zeta) - \frac{4}{3} \ln Z \right) \right\}, \quad \zeta = \frac{100m\omega}{Z^{1/3}\varepsilon_+\varepsilon_-}, \quad (30.1.6)$$

где $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ — те же функции, которые входят в (28.5 5).

В случае полного экранирования, когда

$$\frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega} \gg 137Z^{-1/3},$$

последняя формула приобретает вид

$$d\sigma = 4\bar{\Phi} \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left\{ \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3} \varepsilon_+\varepsilon_- \right) \ln(187Z^{-1/3}) - \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{9} \right\}. \quad (30.1.7)$$

Чтобы найти полное сечение образования пары, нужно проинтегрировать выражение (30.1.4) по энергии позитрона. Непосредственное интегрирование, однако, невозможно. Его удается выполнить в замкнутом виде только в крайне релятивистском случае, используя формулу (30.1.5). Результат имеет следующий вид:

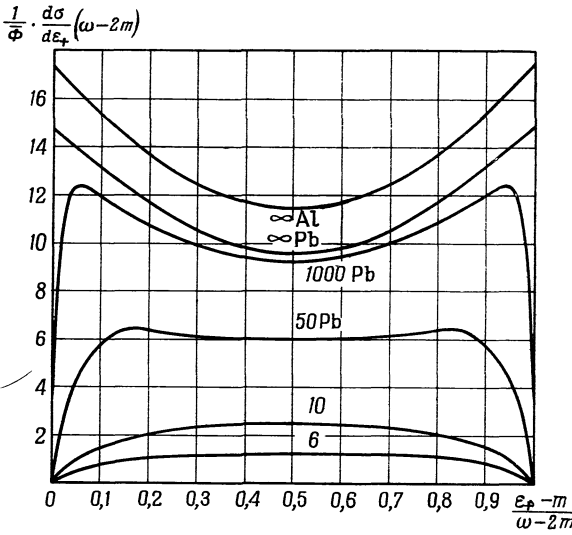


Рис. 30.2.

$$\sigma = \bar{\Phi} \left(\frac{28}{9} \ln \frac{2\omega}{m} - \frac{218}{27} \right), \quad \omega \gg m. \quad (30.1.8)$$

Эта формула не учитывает экранирования.

Интегрируя (30.1.7) по ϵ_+ , найдем сечение образования пары в случае полного экранирования

$$\sigma = \bar{\Phi} \left(\frac{28}{9} \ln 183Z^{-1/3} - \frac{2}{27} \right). \quad (30.1.9)$$

В § 42.2 мы установим связь между интегральным сечением образования пары фотоном и сечением рассеяния фотона в поле ядра на нулевой угол. Используя эту связь, можно показать, что сечение образования пары без учета экранирования определяется следующей формулой [22]:

$$\sigma(\omega) = \bar{\Phi} \frac{1}{\eta^2} \left\{ 4 \int_1^\eta \frac{L(x)}{x} dx - 2L(\eta) + \frac{2}{27} \left[- (64 + 109\eta^2) E \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} \right) + \left(125 + \frac{6}{\eta^2} + 42\eta^2 \right) F \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} \right) \right] \right\},$$

где $\eta = \frac{\omega}{2m}$,

$$L(x) = \int_1^{x^2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{x - \sqrt{x^2 - y}} \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)}}$$

и $F(x)$ и $E(x)$ — эллиптические интегралы:

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi, \quad E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi.$$

В крайне релятивистской области эта формула переходит в формулу (30.1.8).

На рис. 30.2 изображено энергетическое распределение частиц пары, определяемое формулами (30.1.4) и (30.1.6). По оси абсцисс отложено отношение кинетической энергии позитрона $\epsilon_+ - m$ к суммарной кинетической энергии пары $\omega - 2m$, а по оси ординат — величина $\frac{\omega - 2m}{\bar{\Phi}} \frac{d\sigma}{d\epsilon_+}$. Различные

кривые относятся к различным значениям ω/m , которые указаны у кривых. Кривые для $\omega/m = 6$ и $\omega/m = 10$ справедливы при всех Z , так как при этих значениях энергии фотона можно пренебречь экранированием. Остальные кривые учитывают экранирование и относятся к свинцу и алюминию. Кривая $\omega/m = \infty$ соответствует полному экранированию.

При малых значениях энергии фотона кривые имеют один нерезкий максимум, соответствующий одинаковым энергиям электрона и позитрона. При больших энергиях кривые имеют два одинаковых симметрично расположенных максимума, из которых один соответствует максимуму энергии позитрона и минимуму энергии электрона, а другой, наоборот, — минимуму энергии позитрона и максимуму энергии электрона.

На рис. 30.3 изображена зависимость интегрального сечения образования пары от энергии фотона для свинца и алюминия.

30.2. Точная теория образования пары фотоном в поле ядра вблизи порога. Поправка к сечению образования пары фотоном в поле ядра в борновском приближении при крайне релятивистских энергиях. Полученные выше формулы для сечений образования пары справедливы в борновском приближении, когда

$$\xi_{\pm} \equiv \frac{Z\alpha}{v_{\pm}} \ll 1$$

(v_- и v_+ — скорости электрона и позитрона).

В нерелятивистском случае ($v_{\pm} \ll 1$) возможно точное вычисление сечения образования пары, основанное на использовании точных волновых функций электрона и позитрона в кулоновском поле. Это вычисление производится аналогично вычислению сечения тормозного излучения.

Матричный элемент, определяющий образование пары, может быть представлен в виде

$$\langle f | \mathbf{S}^{(+)} | i \rangle = 2\pi i \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int \psi^{(+)*}(\mathbf{r}) e\alpha\psi^{(-)}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3x \cdot \delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-), \quad (30.2.1)$$

где $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$ и $\psi^{(-)}(\mathbf{r})$ — волновые функции электрона в кулоновском поле ядра с положительной и отрицательной частотами. Так как в рассматриваемом процессе обе частицы образуются, то асимптотика функций $\psi^{(+)} = \psi^{(+)}$ и $\psi^{(-)} = C\bar{\psi}^{(-)}$ при больших r должна быть одинаковой, а именно, эти функции должны при $r \rightarrow \infty$ иметь вид сумм плоских и сходящихся сферических волн. В этом заключается различие между матричными элементами, определяющими образование пары и тормозное излучение: в последнем процессе только волновая функция электрона в конечном состоянии имеет такую асимптотику, волновая же функция электрона в начальном состоянии имеет при $r \rightarrow \infty$ вид суммы плоской и расходящейся сферической волн.

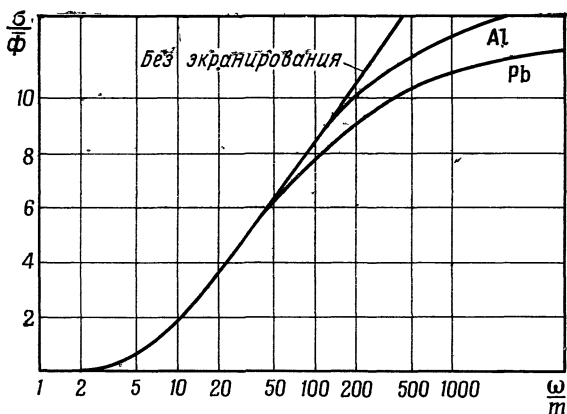


Рис. 30.3.

В нерелятивистском случае функции $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$ и $\psi^{(-)}(\mathbf{r})$ имеют вид

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(\mathbf{r}) &= N_- e^{i\mathbf{p}_- \cdot \mathbf{r}} u(\mathbf{p}_-) \mathcal{F}[-i\xi_-, 1, -i(\mathbf{p}_- \mathbf{r} + |\mathbf{p}_-| r)], \\ \psi^{(-)}(\mathbf{r}) &= N_+ e^{-i\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{r}} u(-\mathbf{p}_+) \mathcal{F}[-i\xi_+, 1, i(\mathbf{p}_+ \mathbf{r} + |\mathbf{p}_+| r)],\end{aligned}\quad (30.2.2)$$

где $u(\mathbf{p}_-)$ и $u(-\mathbf{p}_+)$ — единичные биспинорные амплитуды и N_- и N_+ — нормировочные множители, которые мы выберем равными

$$N_- = e^{\frac{\pi}{2} \xi_-} \Gamma(1 + i\xi_-), \quad N_+ = e^{-\frac{\pi}{2} \xi_+} \Gamma(1 + i\xi_+),$$

что соответствует единичной амплитуде волновых функций на бесконечности.

Вычисления, которые мы здесь опустим, приводят к следующему выражению для распределения позитронов по энергиям вблизи порога реакции [23]:

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{Z^2 \alpha}{12\pi} r_0^2 \frac{4\pi^2 \xi_- \xi_+}{(1 - e^{-2\pi \xi_-})(e^{2\pi \xi_+} - 1)} [\omega - 2m + \alpha^2 Z^2 (\omega - m)] \times \\ &\quad \times \{(\varepsilon_+ - m) [\omega - 2m - (\varepsilon_+ - m)]\}^{1/2} \frac{d\varepsilon_+}{m^3}.\end{aligned}\quad (30.2.3)$$

Остановимся в заключение этого раздела на вопросе о точном вычислении матричного элемента (30.2.1), определяющего процесс образования пар фотоном в кулоновском поле ядра в крайне релятивистском случае.

Так как в интеграле (30.2.1) главную роль играют расстояния $r \gg \frac{1}{m}$, то в области больших энергий электрона и позитрона, $\varepsilon_{\pm} \gg \frac{(\alpha Z)^2 m}{2}$, в качестве волновых функций могут быть взяты в соответствии с (11.1.6) функции

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(\mathbf{r}) &= N_- e^{i\mathbf{p}_- \cdot \mathbf{r}} \left[1 - \frac{i\alpha \nabla}{2\varepsilon_-} \right] u(\mathbf{p}_-) \mathcal{F}[-i\xi_-, 1, -i(\mathbf{p}_- \mathbf{r} + |\mathbf{p}_-| r)], \\ \psi^{(-)}(\mathbf{r}) &= N_+ e^{-i\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{r}} \left[1 + \frac{i\alpha \nabla}{2\varepsilon_+} \right] u(-\mathbf{p}_+) \mathcal{F}[-i\xi_+, 1, i(\mathbf{p}_+ \mathbf{r} + |\mathbf{p}_+| r)],\end{aligned}$$

где

$$\xi_{\pm} = \frac{Z\alpha\varepsilon_{\pm}}{|\mathbf{p}_{\pm}|}.$$

Мы не будем приводить здесь вычислений, а приведем только окончательный результат для дифференциального сечения образования пары:

$$\begin{aligned}d\sigma &= -\alpha \left(\frac{\pi a}{\text{sh } \pi a} \right)^2 \frac{a^2}{2\pi} \frac{1}{m^2} \frac{p_+ p_-}{\omega^3} d\varepsilon_+ \sin \theta_- \sin \theta_+ d\theta_- d\theta_+ d\varphi \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{V^2(x)}{q^4} \left[\frac{p_-^2 \sin^2 \theta_- (4\varepsilon_-^2 - q^2)}{(\varepsilon_- - p_- \cos \theta_-)^2} + \frac{p_+^2 \sin^2 \theta_+ (4\varepsilon_+^2 - q^2)}{(\varepsilon_+ - p_+ \cos \theta_+)^2} \right] + \right. \\ &\quad + \frac{(4\varepsilon_- \varepsilon_+ + q^2 - 2\omega^2) 2p_+ p_- \sin \theta_- \sin \theta_+ \cos \varphi}{(\varepsilon_- - p_- \cos \theta_-)(\varepsilon_+ - p_+ \cos \theta_+)} - \frac{2\omega^2 (p_-^2 \sin^2 \theta_- + p_+^2 \sin^2 \theta_+)}{(\varepsilon_- - p_- \cos \theta_-)(\varepsilon_+ - p_+ \cos \theta_+)} \left. \right] + \\ &\quad + \frac{a^2 [\omega^2 - (p_- + p_+)^2] W^2(x)}{[4\omega^2 (\varepsilon_- - p_- \cos \theta_-)(\varepsilon_+ - p_+ \cos \theta_+)]^2} \left[\frac{p_-^2 \sin^2 \theta_- (4\varepsilon_-^2 - q^2)}{(\varepsilon_- - p_- \cos \theta_-)^2} + \right. \\ &\quad + \frac{p_+^2 \sin^2 \theta_+ (4\varepsilon_+^2 - q^2)}{(\varepsilon_+ - p_+ \cos \theta_+)^2} - \frac{(4\varepsilon_+ \varepsilon_- + q^2 - 2\omega^2) 2p_- p_+ \sin \theta_- \sin \theta_+ \cos \varphi}{(\varepsilon_- - p_- \cos \theta_-)(\varepsilon_+ - p_+ \cos \theta_+)} \left. + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\omega^2 (p_-^2 \sin^2 \theta_- + p_+^2 \sin^2 \theta_+)}{(\varepsilon_+ - p_+ \cos \theta_+)(\varepsilon_- - p_- \cos \theta_-)} - 4\omega^2 (\varepsilon_- \varepsilon_+ + p_- p_+ \cos \theta_- \cos \theta_+) \right\},\end{aligned}\quad (30.2.4)$$

где функции $V(x)$ и $W(x)$ определяются формулами (28.7.12), (28.7.13), $a = \alpha Z$ и

$$x = 1 - \frac{q^2 [\omega^2 - (p_+ - p_-)^2]}{4\omega^2 (\varepsilon_+ - p_+ \cos \theta_+) (\varepsilon_- - p_- \cos \theta_-)}, \quad p_{\pm} \equiv |\mathbf{p}_{\pm}|$$

(остальные обозначения — такие же, как в § 28.7).

Проинтегрированное по углам сечение образования пары имеет вид

$$d\sigma = 2 \frac{Z^2 \alpha^3}{m^2} \frac{d\varepsilon_{\pm}}{\omega^3} \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3} \varepsilon_+ \varepsilon_- \right) \left[2 \ln \frac{2\varepsilon_+ \varepsilon_-}{m\omega} - 1 + 2f(Z) \right], \quad (30.2.5)$$

где функция $f(Z)$ определяется формулой (28.7.15).

С учетом экранирования сечение равно

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3}{m^2} \frac{d\varepsilon_{\pm}}{\omega^3} \left\{ (\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2) \left[\Phi_1(\gamma) - \frac{4}{3} \ln Z - 4f(Z) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \varepsilon_+ \varepsilon_- \left[\Phi_2(\gamma) - \frac{4}{3} \ln Z - 4f(Z) \right] \right\},$$

где $\Phi_1(\gamma)$ и $\Phi_2(\gamma)$ — те же функции, которые входят в (28.5.5), $\gamma = 100 \frac{m\omega}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} Z^{-1/3}$.

Полное сечение образования пары без учета экранирования равно

$$\sigma = \frac{28 Z^2 r_0^2}{9 \cdot 137} \left[\ln \frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42} - f(Z) \right],$$

а в случае полного экранирования

$$\sigma = \frac{28 Z^2 r_0^2}{9 \cdot 137} \left[\ln (183Z^{-1/3}) - \frac{1}{42} - f(Z) \right].$$

Мы видим, что поправка к сечению образования пар, вычисленному в борновском приближении, равна

$$\Delta\sigma = -\frac{28 Z^2 r_0^2}{9 \cdot 137} f(Z).$$

Для свинца относительная поправка составляет около 10%.

30.3. Образование пары двумя фотонами. Перейдем к рассмотрению процесса образования пары двумя фотонами [24]. Этот процесс изображается

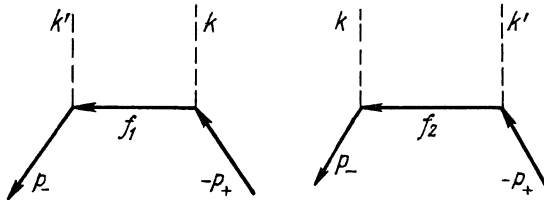


Рис. 30.4.

двумя диаграммами на рис. 30.4. Согласно правилам Фейнмана матричный элемент, определяющий процесс, равен

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{ie^2}{2 \sqrt{\omega\omega'}} \frac{1}{2 \sqrt{\varepsilon_+ \varepsilon_-}} \bar{u}(p_-) \left\{ \hat{e}' \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \hat{e} + \hat{e} \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2 \kappa_2} \hat{e}' \right\} u(-p_+) \times \\ \times (2\pi)^4 \delta(k + k' - p_+ - p_-), \quad (30.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= -p_+ + k = p_- - k', & \hat{f}_2 &= -p_+ + k' = p_- - k, \\ m^2 \kappa_1 &= \hat{f}_1^2 + m^2 = -2p_+ k = -2p_- k', \\ m^2 \kappa_2 &= \hat{f}_2^2 + m^2 = -2p_+ k' = -2p_- k, \end{aligned}$$

k и k' — 4-импульсы фотонов, e и e' — их поляризации, p_- и p_+ — 4-импульсы электрона и позитрона.

Отсюда может быть написано следующее выражение для дифференциального сечения образования пары:

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} |\bar{u}Qv|^2 \frac{d^3p_+ d^3p_-}{4\varepsilon_+ \varepsilon_- 4J} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-) \delta(\omega + \omega' - \varepsilon_+ - \varepsilon_-), \quad (30.3.2)$$

где $J = kk'$, а $u = u(p_-)$, $v = u(-p_+)$ и

$$Q = \hat{e}' \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \hat{e} + \hat{e} \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2 \kappa_2} \hat{e}'. \quad (30.3.3)$$

Вычисления входящих сюда следов произведений дираковских матриц можно, однако, не производить, так как диаграммы, определяющие образование пары двумя фотонами, топологически совпадают с диаграммами, определяющими комптон-эффект. Произведя в последних замену

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow -p_+, & p_2 &\rightarrow p_-, \\ k_1 &\rightarrow k, & k_2 &\rightarrow -k', \end{aligned}$$

мы получим диаграммы, определяющие образование пары двумя фотонами. Этой заменой отличается и матрица Q в (30.3.3) от соответствующей матрицы в (26.3.2). Поэтому можно воспользоваться результатами § 26.3 и сразу написать следующее выражение для величины $|\bar{u}Qv|^2$, просуммированной по проекциям спинов электрона и позитрона и усредненного по поляризациям фотонов:

$$|\bar{u}Qv|^2 = \frac{1}{4} \text{Sp } F,$$

где

$$F = Q(m - i\hat{p}_-) \bar{Q}(m + i\hat{p}_+)$$

и Q определяется формулой (30.3.3), в которой \hat{e} и \hat{e}' должны быть заменены соответственно на γ_μ и γ_ν . Выражение для $\text{Sp } F$ отличается только знаком от аналогичного выражения (26.3.6):

$$-\frac{1}{8} \text{Sp } F = 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right). \quad (30.3.4)$$

Дальнейшие вычисления удобно производить в системе центра инерции сталкивающихся фотонов, в которой

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &= -\mathbf{k}, & \mathbf{p}_+ &= -\mathbf{p}_-, \\ \omega &= \omega' = \omega_0, & \varepsilon_+ &= \varepsilon_- = \omega_0, \\ J &= 2\omega_0^2. \end{aligned}$$

Устранив в (30.3.2) δ -функции интегрированием по d^3p_- и $d\varepsilon_+$:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-) d^3p_- &\rightarrow 1, \\ \delta(\omega + \omega' - \varepsilon_+ - \varepsilon_-) d^3p_+ &\rightarrow \frac{|\mathbf{p}_+| \varepsilon_+ d\omega_+}{2}, \end{aligned}$$

где $d\omega_+$ — элемент телесного угла, в котором движется позитрон, получим следующую формулу для сечения образования пары двумя фотонами:

$$d\sigma = -\frac{r_0^2}{8} m^2 \frac{\sqrt{\omega_0^2 - m^2}}{\omega_0^3} d\omega_+ \left\{ 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \right\}. \quad (30.3.5)$$

Подставляя сюда

$$m^2 \kappa_1 = -2p_+ k = -2\mathbf{p}_+ \mathbf{k} + 2\varepsilon_+ \omega = 2\omega_0 (\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - m^2} \cos \theta),$$

$$m^2 \kappa_2 = -2p_- k = -2\mathbf{p}_- \mathbf{k} + 2\varepsilon_- \omega = 2\mathbf{p}_+ \mathbf{k} + 2\varepsilon_+ \omega = 2\omega_0 (\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - m^2} \cos \theta),$$

где θ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{p}_+ , представим $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{4} \frac{m^2 \sqrt{\omega_0^2 - m^2}}{\omega_0^3} \left\{ \frac{2\omega_0^2 - m^2 + (\omega_0^2 - m^2) \sin^2 \theta}{m^2 \cos^2 \theta + \omega_0^2 \sin^2 \theta} - \frac{2(\omega_0^2 - m^2)^2 \sin^4 \theta}{(m^2 \cos^2 \theta + \omega_0^2 \sin^2 \theta)^2} \right\} 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (30.3.6)$$

Полное сечение образования пары двумя фотонами равно

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2 m^2}{\omega_0^2} \left\{ \left(2 + \frac{2m^2}{\omega_0^2} - \frac{m^4}{\omega_0^4} \right) \ln \left(\frac{\omega_0}{m} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{m^2} - 1} \right) - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_0^2}} \left(1 + \frac{m^2}{\omega_0^2} \right) \right\}. \quad (30.3.7)$$

Эта величина представляет собой релятивистский инвариант. Если k и k' — 4-импульсы фотонов в произвольной системе отсчета, то вместо ω_0^2 сюда следует подставить

$$\omega_0^2 = -\frac{(k+k')^2}{4}.$$

30.4. Превращение пары в два фотона. Наряду с образованием электронно-позитронных пар фотонами возможны процессы превращения пар в фотоны. Эти процессы называются *аннигиляцией пары*. Если электрон и позитрон являются свободными, то аннигиляция с испусканием одного фотона невозможна, так как этот процесс не допускается законами сохранения энергии и импульса

Наиболее важным является процесс, при котором сталкивающиеся свободные позитрон и электрон превращаются в два фотона [24, 25]. Двухфотонной аннигиляции пары соответствуют две диаграммы, изображенные на рис 30.5. Они совпадают с диаграммами, изображающими рождение пары двумя фотонами, — процесс, обратный двухфотонной аннигиляции.

Матричный элемент, определяющий двухфотонную аннигиляцию, может быть, согласно правилам § 17.5, записан в виде

$$\begin{aligned} \langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = & \\ = & \frac{ie^2}{2\sqrt{\omega\omega'}} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_- \varepsilon_+}} \bar{u}(-p_+) \left\{ \hat{e} \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \hat{e}' + \hat{e}' \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2 \kappa_2} \hat{e} \right\} u(p_-) \times \\ & \times (2\pi)^4 \delta(p_+ + p_- - k - k'), \quad (30.4.1) \end{aligned}$$

где использованы те же обозначения, что и в (30.3.1).

Дифференциальное сечение аннигиляции равно

$$d\sigma = \frac{e^4}{4\omega\omega'} |\bar{v}Qu|^2 \frac{d^3k d^3k'}{4J(2\pi)^2} \delta(\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega - \omega'), \quad (30.4.2)$$

где

$$J = \sqrt{(\mathbf{p}_- \mathbf{p}_+)^2 - m^4}, \quad v = u(-\mathbf{p}_+),$$

$$Q = \hat{e} \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \hat{e}' + \hat{e}' \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2\kappa_2} \hat{e}.$$

Структура матрицы Q совпадает, очевидно, со структурой соответствующей матрицы в комптон-эффекте: сделав в последней замену

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow p_-, & k_1 &\rightarrow -k', & e_1 &\rightarrow e', \\ p_2 &\rightarrow -p_+, & k_2 &\rightarrow k, & e_2 &\rightarrow e, \end{aligned}$$

мы получим Q . Поэтому можно сразу воспользоваться готовыми результатами § 26¹ и написать следующее выражение для просуммированной и усредненной по поляризациям частиц величины $\frac{1}{8} |\bar{v}Qu|^2$:

$$\frac{1}{8} |\bar{v}Qu|^2 = - \left\{ 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \right\}.$$

Дальнейшие вычисления удобно производить в системе, связанной с центром инерции пары, в которой

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_+ &= -\mathbf{p}_- = -\mathbf{p}_0, & \varepsilon_+ &= \varepsilon_- = \varepsilon_0, \\ \mathbf{k}' &= -\mathbf{k}, & \omega &= \omega' \end{aligned}$$

и

$$J = 2\varepsilon_0 p_0 = 2\varepsilon_0^2 v_0,$$

где $p_0 = |\mathbf{p}_0|$, v_0 — скорость частиц в системе центра инерции.

Устраняя δ -функции интегрированием по d^3k' и $d\omega$:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- - \mathbf{k} - \mathbf{k}') d^3k' &\rightarrow 1, \\ \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega - \omega') d^3k &\rightarrow \frac{\omega^2 d\omega}{2}, \end{aligned}$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла, в котором заключен импульс фотона \mathbf{k} , получим

$$d\sigma = -\frac{r_0^2 m^2}{8\rho_0 \varepsilon_0} \left\{ 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \right\} d\omega, \quad (30.4.3)$$

где

$$\begin{aligned} m^2\kappa_1 &= -2p_+k = 2\mathbf{p}_0\mathbf{k} + 2\varepsilon_0\omega = 2\varepsilon_0(\varepsilon_0 + p_0 \cos \theta), \\ m^2\kappa_2 &= -2p_-k = -2\mathbf{p}_0\mathbf{k} + 2\varepsilon_0\omega = 2\varepsilon_0(\varepsilon_0 - p_0 \cos \theta) \end{aligned}$$

и θ — угол между \mathbf{p}_0 и \mathbf{k} . Таким образом,

$$\begin{aligned} d\sigma &= r_0^2 \frac{m^2}{4\rho_0 \varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_0^2 + p_0^2 + p_0^2 \sin^2 \theta}{\varepsilon_0^2 - p_0^2 \cos^2 \theta} - \frac{2p_0^4 \sin^4 \theta}{(\varepsilon_0^2 - p_0^2 \cos^2 \theta)^2} \right) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} r_0^2 \frac{m^2}{v_0 \varepsilon_0^2} [1 + 2v_0^2 \sin^2 \theta - v_0^4 (1 - \sin^4 \theta)] \frac{d\omega}{(1 - v_0^2 \cos^2 \theta)^2}. \end{aligned}$$

Чтобы найти интегральное сечение аннигиляции пары, нужно проинтегрировать $d\sigma$ по θ от 0 до π и по φ от 0 до 2π (такие пределы соответствуют тому обстоятельству, что возникающие в конечном состоянии

частицы — фотоны неразличимы). В результате мы получим

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{m^2}{4v_0 \varepsilon_0^2} \left\{ \frac{3-v_0^4}{v_0} \ln \frac{1+v_0}{1-v_0} + 2(v_0^2 - 2) \right\}. \quad (30.4.4)$$

Так как эта величина представляет собой релятивистский инвариант, то для перехода в другую систему достаточно выразить ε_0 и ρ_0 через энергию частиц в этой системе.

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда аннигиляция происходит в результате столкновения позитрона с покоящимся электроном. Подставляя в (30.4.4)

$$\varepsilon_+^2 = \frac{m(m+\varepsilon_+^0)}{2}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_+^0 - m}{\varepsilon_+^0 + m}},$$

где ε_+^0 — энергия позитрона в системе покоя электрона, получим

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{\gamma+1} \left\{ \frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}) - \frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}} \right\}, \quad (30.4.5)$$

где $\gamma = \varepsilon_+^0/m$.

При малых энергиях позитрона сечение обратно пропорционально скорости позитрона:

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{v_+}, \quad (30.4.6)$$

а вероятность аннигиляции ω не зависит от скорости:

$$\omega = Z n v_+ \sigma = Z n \pi r_0^2, \quad (30.4.7)$$

где n — число атомов в единице объема. Время жизни медленного позитрона равно $\tau = \frac{1}{\omega}$; для свинца $\tau \approx 10^{-10}$ сек.

При больших энергиях позитрона ($\varepsilon_+^0 \gg m$)

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{m}{\varepsilon_+^0} \left(\ln \frac{2\varepsilon_+^0}{m} - 1 \right). \quad (30.4.8)$$

30.5. Поляризационные эффекты при двухфотонной аннигиляции пар.

Выше были получены выражения для сечения двухфотонной аннигиляции пары, усредненные по поляризациям электронов и фотонов. Сечение аннигиляции поляризованных частиц и поляризация возникающих при этом фотонов могут быть исследованы общими методами, изложенными в § 18.4 и применявшимися уже в этой главе. Мы приведем здесь только некоторые окончательные результаты *).

1. Корреляция поляризаций фотонов. Дифференциальное сечение аннигиляции неполяризованных частиц с образованием двух линейно поляризованных фотонов имеет следующий вид:

$$d\sigma = \frac{r_0^2 m^2}{8 v_0 \varepsilon_0^2} \left\{ \frac{1}{1-v_0^2 \cos^2 \theta} [1 - (1-v_0^2 \cos^2 \theta) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2] + 4 (\mathbf{v}_0 \mathbf{e}_1) (\mathbf{v}_0 \mathbf{e}_2) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) - \frac{4 (\mathbf{v}_0 \mathbf{e}_1)^2 (\mathbf{v}_0 \mathbf{e}_2)^2}{(1-v_0^2 \cos^2 \theta)^2} \right\} d\omega, \quad (30.5.1)$$

где ε_0 и \mathbf{v}_0 — энергия и скорость позитрона и θ — угол между направлениями импульсов позитрона и фотона в системе центра инерции. При

*) Более подробные данные о поляризационных эффектах при аннигиляции пар см. в обзоре Мак-Мастера [6].

малых скоростях отсюда следуют формулы

$$d\sigma^{(1,1)} = d\sigma^{(2,2)} = 0, \quad d\sigma^{(1,2)} = \frac{r_0^2}{8v_0} d\omega, \quad (30.5.2)$$

где $d\sigma^{(i,k)}$ — сечение, соответствующее образованию фотонов, поляризованных в направлениях e_i, e_k , причем e_1 лежит в плоскости (p_0, k) , а e_2 — перпендикулярно к этой плоскости.

Мы видим, что при $v_0 \rightarrow 0$ образуются фотоны, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях. Этот результат имеет простой смысл. Он следует из закона сохранения четности. В пределе малых скоростей аннигиляция происходит в основном в s -состоянии, которое является нечетным, система же двух фотонов является нечетной только в том случае, когда поляризации их взаимно перпендикулярны (см. § 4.3).

2. Аннигиляция продольно поляризованной пары. Если векторы поляризации электрона и позитрона имеют отличные от нуля составляющие только по направлению их относительной скорости

(мы обозначим их через $\zeta_3^{(-)}$ и $\zeta_3^{(+)}$), то дифференциальное сечение аннигиляции такой пары определяется формулой [26]

$$d\sigma = d\sigma_0 (1 + \zeta_3^{(+)} \cdot \zeta_3^{(-)} f), \quad (30.5.3)$$

где $d\sigma_0$ — сечение аннигиляции неполяризованной пары (см. (30.4.3)) и

$$f = \frac{v_0^2 (1 - \cos^4 \theta) - 1 + v_0^4 - v_0^2 (1 - v_0^2) \sin^2 \theta}{v_0^2 (1 - \cos^4 \theta) + 1 - v_0^4 + v_0^2 (1 - v_0^2) \sin^2 \theta}$$

(v_0 и θ — скорость позитрона и угол между импульсами позитрона и фотона в системе центра инерции).

Проинтегрировав (30.5.3) по углам, получим

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \zeta_3^{(-)} \zeta_3^{(+)} F), \quad (30.5.4)$$

где σ_0 — полное сечение аннигиляции неполяризованных частиц (см. (30.4.5)) и

$$F = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2},$$

$$\sigma_1 = \frac{3 + v_0^4}{2v_0^3} \ln \frac{1 + v_0}{1 - v_0} - \frac{3 + v_0^2}{v_0^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{v_0^2} (3 - 3v_0^2 + 2v_0^4) + \frac{1 - v_0^2}{2v_0^3} (2v_0^4 + 3v_0^2 - 3) \ln \frac{1 + v_0}{1 - v_0}.$$

На рис. 30.6 представлена зависимость F от энергии в лабораторной системе (т. е. в системе, где электрон покоится).

Если только одна из аннигилирующих частиц продольно поляризована, то сечение аннигиляции не зависит от степени поляризации, $d\sigma = d\sigma_0$. Образующиеся фотоны при этом оказываются циркулярно поляризованными:

$$\xi_2 = \xi_3 \frac{2v_0 - 2v_0^2 \frac{e_0^2}{m^2} \sin^2 \theta \cos \theta}{1 + v_0^2 + v_0^2 \frac{e_0^2}{m^2} \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) + v_0^2 \sin^2 \theta}, \quad (30.5.5)$$

где ξ_2 — параметр Стокса фотона, ξ_3 — продольная поляризация позитрона или электрона.

Интегрируя числитель и знаменатель этого выражения по θ в пределах от $\pi/2$ до π , мы получим круговую поляризацию x того из двух фотонов, который обладает большей энергией в лабораторной системе (в случае аннигиляции поляризованных позитронов на неполяризованной мишени). Интегрируя же числитель и знаменатель (30.5.5) по θ в пределах от 0 до $\pi/2$, мы получим круговую поляризацию y фотона, также обладающего большей энергией в лабораторной системе (для случая аннигиляции неполяризованных позитронов на поляризованной мишени). Зависимости этих поляризаций от кинетической энергии позитрона в лабораторной системе представлены на рис. 30.7.

30.6. Распад позитрония. Полученные выше результаты можно применить к задаче о распаде *позитрония*, т. е. связанной системы, состоящей из электрона и позитрона.

Основным состоянием позитрония является, очевидно, *S*-состояние. Так как спины электрона и позитрона равны $1/2$, то следует различать синглетное состояние позитрония, в котором суммарный спин частиц равен нулю, и триплетное состояние, в котором суммарный спин частиц равен единице. Эти состояния мы будем обозначать соответственно через 1S и 3S . Позитроний, находящийся в состоянии 1S , называется *парапозитронием*, а позитроний, находящийся в состоянии 3S — *ортопозитронием*.

В § 4.3 было показано, что система, состоящая из двух фотонов, не может иметь состояний с моментом, равным единице. Поэтому ортопозитроний не может распадаться на два фотона. Более того, так как состояние 3S позитрония является зарядово-нечетным, то можно утверждать, что вообще невозможен распад ортопозитрония на любое четное число фотонов.

Напротив, парапозитроний представляет собой зарядово-четную систему, поэтому невозможен его распад на любое нечетное число фотонов.

Основными процессами, определяющими время жизни позитрония, является двухфотонная аннигиляция в случае парапозитрония и трехфотонная аннигиляция в случае ортопозитрония [27].

Вероятность распада позитрония можно связать с вероятностью аннигиляции свободной пары. Действительно, рассмотрим волновую функцию позитрония в *S*-состоянии

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}},$$

где a — радиус позитрония, равный удвоенному радиусу первой боровской орбиты водорода,

$$a = 2a_0 = \frac{2\hbar^2}{me^2}$$

(удвоение водородного радиуса связано с тем, что приведенная масса позитрония в два раза меньше массы электрона). Компонента Фурье волновой функции $\psi(r)$

$$\psi_p = \int \psi(r) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} d^3x = \frac{8\sqrt{\pi a^3}}{(1+a^2 p^2)^2} \tag{30.6.1}$$

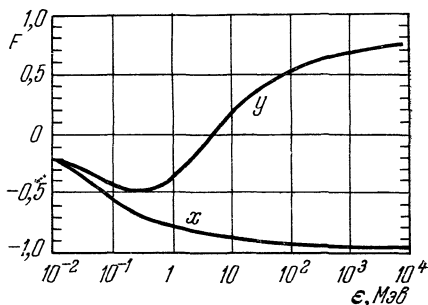


Рис. 30.7.

определяет, очевидно, амплитуду вероятности того, что в позитронии электрон имеет импульс \mathbf{p} , а позитрон — импульс $-\mathbf{p}$.

Эта формула показывает, что наиболее вероятны импульсы порядка $p \sim 1/a$, которые значительно меньше m . Поэтому распад позитрония можно приближенно рассматривать как аннигиляцию свободного позитрона и свободного электрона с импульсами, равными нулю, но с определенными ориентациями спинов.

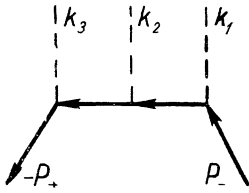


Рис. 30.8.

Обозначим через ω_1 и ω_0 вероятности распада орто- и парапозитрония. Пусть далее $\bar{\omega}$ обозначает вероятность распада свободной пары с нулевыми импульсами частиц, усредненную по ориентациям их спинов и вычисленную в предположении, что плотность частиц равна плотности частиц в позитронии (т. е. равна $|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3}$, а не $\frac{1}{V}$, где V — нор-

мировочный объем, как это предполагается при вычислении вероятности аннигиляции свободной пары).

Так как относительные веса состояний со спинами 1 и 0 равны соответственно $3/4$ и $1/4$, то, очевидно,

$$\bar{\omega} = \frac{3}{4} \omega_1 + \frac{1}{4} \omega_0. \tag{30.6.2}$$

Величину $\bar{\omega}$ можно представить в виде

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{2\gamma} + \bar{\omega}_{3\gamma} + \dots,$$

где $\bar{\omega}_{n\gamma}$ — усредненная по ориентациям спинов вероятность превращения пары в n фотонов. Так как парапозитроний может распадаться только на четное, а ортопозитроний только на нечетное число фотонов, то из (30.6.2) следует, что

$$\frac{1}{4} \omega_0 = \bar{\omega}_{2\gamma} + \bar{\omega}_{4\gamma} + \dots; \quad \frac{3}{4} \omega_1 = \bar{\omega}_{3\gamma} + \bar{\omega}_{5\gamma} + \dots,$$

т. е.

$$\omega_0 \approx 4\bar{\omega}_{2\gamma}, \quad \omega_1 \approx \frac{4}{3} \bar{\omega}_{3\gamma}. \tag{30.6.3}$$

Используя формулу (30.4.6) для сечения двухфотонной аннигиляции пары при малых скоростях позитрона, мы получим отсюда

$$\omega_0 = 4 |\psi(0)|^2 (v_+ \sigma)_{v_+ \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \alpha^5 m = 0,8 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}. \tag{30.6.4}$$

Определим теперь вероятность трехфотонного распада ортопозитрония.

Трехфотонная аннигиляция пары представляет собой процесс третьего порядка теории возмущений. Он изображается шестью диаграммами, одна из которых представлена на рис. 30.8 (остальные диаграммы отличаются от приведенной только перестановками импульсов фотонов k_1, k_2, k_3).

Написав, согласно правилам Фейнмана, матричный элемент, соответствующий этим диаграммам, можно найти дифференциальную вероятность трехфотонной аннигиляции пары, усредненной по спинам частиц. Для случая $|\mathbf{p}_+| = |\mathbf{p}_-| = 0$ она определяется формулой [28]

$$d\omega_{3\gamma} = \frac{\alpha^3 d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3}{4\omega_1\omega_2\omega_3 (2\pi)^3 m^4 a_0^3} \{ (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2 + (1 - \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3)^2 + (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3)^2 \} \times \\ \times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m), \tag{30.6.5}$$

где \mathbf{n}_i — единичный вектор в направлении импульса фотона \mathbf{k}_i .

Интегрирование по $d\omega_2, d\omega_3$ и углам (с учетом тождественности фотонов) дает полную вероятность трехфотонной аннигиляции пары

$$\bar{\omega}_{3\gamma} = \int_0^m F(\omega_1) d\omega_1,$$

где функция

$$F(\omega_1) = \frac{4}{9\pi} \left(\frac{r_0}{a_0}\right)^3 \left\{ \frac{\omega_1(m-\omega_1)}{(2m-\omega_1)^2} - 2m \frac{(m-\omega_1)^2}{(2m-\omega_1)^3} \ln \frac{m-\omega_1}{m} + \right. \\ \left. + \frac{2m-\omega_1}{\omega_1} + \frac{2(m-\omega_1)m}{\omega_1^2} \ln \frac{m-\omega_1}{m} \right\} \quad (30.6.6)$$

определяет спектр фотонов распада (эта функция изображена на рис. 30.9).

Выполнив интегрирование по ω_1 , получим

$$\bar{\omega}_{3\gamma} = \frac{1}{6\pi} (\pi^2 - 9) \alpha \frac{r_0^2}{a_0^3}. \quad (30.6.7)$$

Воспользовавшись далее соотношениями (30.6.3), найдем отсюда вероятность распада ортопозитрония

$$\omega_1 = \frac{2}{9\pi} (\pi^2 - 9) \alpha \frac{r_0^2}{a_0^3} = 0,71 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}. \quad (30.6.8)$$

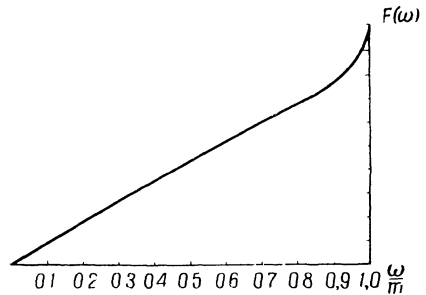


Рис. 30.9.

30.7. Превращение пары в один фотон.

При столкновении позитрона с несвободным электроном обе частицы могут превратиться в один фотон [29]. Такой процесс определяется матричным элементом первого порядка

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = \frac{2\pi i e}{\sqrt{2\omega}} \int \bar{\psi}_-(\mathbf{r}) \hat{e} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_+(\mathbf{r}) d^3x \cdot \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega), \quad (30.7.1)$$

где $\psi_-(\mathbf{r})$ и $\psi_+(\mathbf{r})$ — волновые функции электрона в поле, соответствующие отрицательной и положительной частотам и описывающие позитрон с энергией ε_+ и электрон с энергией ε_- .

Если электроном является атомный K -электрон и при этом $\alpha Z \ll 1$, то в качестве $\psi_+(\mathbf{r})$ может быть взята функция (25.7.11). В качестве же $\bar{\psi}_-(\mathbf{r})$ следует взять функцию

$$\bar{\psi}_-(\mathbf{r}) = \bar{u}(-p) e^{-\frac{\pi\xi_+}{2}} \Gamma(1 + i\xi_+) \left(1 + \frac{\gamma_4 \gamma \mathbf{V}}{2\varepsilon_+}\right) \mathcal{F}[-i\xi_+, 1, i(p+\mathbf{r} - \mathbf{p}_+\mathbf{r})] e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}},$$

где $\xi_+ = \alpha Z \varepsilon_+ / p_+$.

Сравнение формул (25.7.1) и (30.7.1) показывает, что если в матричном элементе, определяющем фотоэффект, произвести замену

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow -\omega, & \varepsilon &\rightarrow -\varepsilon_+, \\ \mathbf{k}_- &\rightarrow -\mathbf{k}; & \mathbf{p} &\rightarrow -\mathbf{p}_+, \end{aligned} \quad (30.7.2)$$

то этот матричный элемент перейдет в матричный элемент, определяющий однофотонную аннигиляцию. Поэтому мы можем не производить здесь вычислений квадрата модуля матричного элемента, а воспользоваться сразу результатами § 25.7. В отличие от фотоэффекта, плотность конечных

состояний будет теперь не $\frac{p\varepsilon d\omega_e}{(2\pi)^3}$, а $\frac{\omega^2 d\omega_\gamma}{(2\pi)^3}$, где $d\omega_e$ и $d\omega_\gamma$ — элементы телесных углов, в которых лежат импульсы электрона и фотона. Кроме того, при определении сечения однофотонной аннигиляции пары следует учитывать, что плотность потока падающих частиц будет равна скорости позитронов v_+ , а не скорости света, как это было в случае фотоэффекта.

Учитывая эти изменения, можно получить следующую формулу для сечения однофотонной аннигиляции позитрона на K -слое (отнесенную к двум K -электронам):

$$\sigma = 4\pi r_0^2 \frac{Z^5}{(137)^4} \frac{m^3}{\rho_+ (\varepsilon_+ + m)^2} \left[\frac{\varepsilon_+^2}{m^2} + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_+}{m} + \frac{4}{3} - \frac{\varepsilon_+ + 2m}{\rho_+} \ln \frac{\varepsilon_+ + \rho_+}{m} \right]. \quad (30.7.3)$$

Эта формула, так же как и формула (25.7.15) для сечения фотоэффекта, справедлива, если $\frac{Z\alpha}{v_+} \ll 1$.

В нерелятивистском и крайне релятивистском случаях формула (30.7.3) приобретает вид

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4\pi}{3} r_0^2 \frac{Z^5}{(137)^4} \frac{\rho_+}{m}, & v_+ \ll 1, \\ \sigma &= 4\pi r_0^2 \frac{Z^5}{(137)^4} \frac{m}{\varepsilon_+}, & \varepsilon_+ \gg m. \end{aligned} \quad (30.7.4)$$

Мы видим, что сечение однофотонной аннигиляции позитрона при малых энергиях пропорционально скорости позитрона в отличие от сечения двухфотонной аннигиляции, которое обратно пропорционально v_+ . Поэтому при малых энергиях позитрона однофотонная аннигиляция значительно менее вероятна, чем двухфотонная аннигиляция. Отношение сечений однофотонной и двухфотонной аннигиляций максимально при $\varepsilon_+ \sim 10m$ и составляет около 0,2 для свинца.

§ 31. Рассеяние электрона и позитрона электроном

31.1. Рассеяние электрона электроном. Перейдем к рассмотрению процессов взаимодействия двух заряженных частиц, не связанных с излучением или поглощением фотонов.

Так как матрица рассеяния $\mathbf{S}^{(1)}$ первого порядка содержит лишь элементы, соответствующие испусканию или поглощению фотона, то следует рассмотреть матрицу рассеяния второго порядка $\mathbf{S}^{(2)}$.

Простейшим процессом интересующего нас типа является рассеяние двух электронов [30]. Оно описывается двумя диаграммами, изображенными на рис. 31.1. Согласно общим правилам § 17.5 матричный элемент рассматриваемого процесса имеет вид

$$\begin{aligned} \langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle &= \frac{-ie^2 (2\pi)^4}{4 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon'_1 \varepsilon'_2}} M \delta(p_1 + p'_1 - p_2 - p'_2), \\ M &= \frac{(\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}'_2 \gamma_\mu u'_1)}{(p_2 - p_1)^2} - \frac{(\bar{u}'_2 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_2 \gamma_\mu u'_1)}{(p'_2 - p_1)^2}; \end{aligned} \quad (31.1.1)$$

здесь p_1 и p'_1 — 4-импульсы электронов в начальном состоянии, p_2 и p'_2 — 4-импульсы электронов в конечном состоянии и u_1, u'_1, u_2, u'_2 — соответ-

ствующие этим состояниям нормированные, согласно (9.2.6), биспинорные амплитуды ($u_1 \equiv u_1(p)$, . . . $u'_2 \equiv u(p'_2)$), нормировочный объем принят равным единице.

Дифференциальное сечение рассеяния, согласно правилам § 18.3, определяется формулой

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\varepsilon_2\varepsilon'_2} \cdot \frac{1}{4} |M|^2 d^3p_2 d^3p'_2 \frac{1}{J} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon'_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon'_2), \quad (31.1.2)$$

где $J = \sqrt{(p_1 p'_1)^2 - m^4}$.

В системе центра инерции электронов ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}'_2 = 0$)

$$J = 2\varepsilon |\mathbf{p}_1|,$$

и выражение для $d\sigma$ после исключения δ -функций приобретает вид

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{64\varepsilon^2} |M|^2 do. \quad (31.1.3)$$

В случае неполяризованных частиц мы должны усреднить это выражение по поляризациям начального состояния и просуммировать по поляризациям конечного состояния, т. е. произвести замену

$$|M|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(p_2 - p_1)^4} \text{Sp } \gamma_\mu (m - i\hat{p}_1) \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}_2) \text{Sp } \gamma_\mu (m - i\hat{p}'_1) \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}'_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{(p'_2 - p_1)^4} \text{Sp } \gamma_\mu (m - ip_1) \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}'_2) \text{Sp } \gamma_\mu (m - i\hat{p}'_1) \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}_2) - \right. \\ \left. - \frac{2}{(p_2 - p_1)^2 (p'_2 - p_1)^2} \text{Sp } \gamma_\mu (m - i\hat{p}_1) \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}'_2) \gamma_\mu (m - i\hat{p}'_1) \bar{\gamma}_\nu (m - i\hat{p}_2) \right\},$$

где $\bar{\gamma}_\mu = \gamma_4 \gamma_\mu \gamma_4$, и просуммировать написанное выражение по μ , ν от $\mu, \nu = 1$ до $\mu, \nu = 4$. При этом можно, очевидно, заменить $\bar{\gamma}_\mu$ на γ_μ , так как $\bar{\gamma}_\mu = -\gamma_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3$) и $\bar{\gamma}_4 = \gamma_4$.

Далее, для упрощения выражения для $|M|^2$ следует воспользоваться соотношениями (8.3.8), после чего мы получим сумму членов, каждый из которых содержит следы от произведений не более четырех матриц γ_μ . Используя формулы (8.3.6), получим в результате

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{2\varepsilon^2} do \left\{ \frac{(p_1 p'_1)^2 + (p_1 p_2)^2 + 2m^2 p_1 p'_1 - 2m^2 p_1 p'_2}{(p_2 - p_1)^4} + \right. \\ \left. + \frac{(p_1 p'_1)^2 + (p_1 p_2)^2 + 2m^2 p_1 p'_1 - 2m^2 p_1 p_2}{(p'_2 - p_1)^4} + 2 \frac{(p_1 p'_1)^2 + 2m^2 p_1 p'_1}{(p_2 - p_1)^2 (p'_2 - p_1)^2} \right\}$$

или

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\left(2 \frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right)^2}{4v^4 (\varepsilon/m)^6} \left\{ \frac{4}{\sin^4 \vartheta} - \frac{3}{\sin^2 \vartheta} + \frac{\left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right)^2}{\left(2 \frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right)^2} \left(1 + \frac{4}{\sin^2 \vartheta}\right) \right\} do, \quad (31.1.4)$$

где v , ε и ϑ — скорость, энергия и угол рассеяния электрона в системе центра инерции, $r_0 = \frac{\alpha}{m}$ — классический радиус электрона.

В нерелятивистском пределе $v \ll 1$, $\frac{\varepsilon}{m} \approx 1$ и формула (31.1.4), как легко видеть, переходит в формулу Резерфорда с учетом обмена (в борновском приближении)

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{16v^4} \left[\frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \right] do. \quad (31.1.5)$$

Выразив в формуле (31.1.4) величины ν и ϵ через скорость v_1 и энергию ϵ_1 падающего электрона в той системе отсчета, в которой один из электронов до столкновения покоился ($v'_1 = 0$), получим

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\epsilon_1 + 1}{v_1^4 \left(\frac{\epsilon_1}{m}\right)^2} \left\{ \frac{4}{\sin^4 \vartheta} - \frac{3}{\sin^2 \vartheta} + \frac{\left(\frac{\epsilon_1}{m} - 1\right)^2}{4 \left(\frac{\epsilon_1}{m}\right)^2} \left(1 + \frac{4}{\sin^2 \vartheta}\right) \right\} d\vartheta, \quad (31.1.6)$$

где ϑ — угол рассеяния, отнесенный по-прежнему к системе центра инерции. Он связан с углом рассеяния θ в лабораторной системе соотношением

$$\cos \vartheta = \frac{2 - \left(\frac{\epsilon_1}{m} + 3\right) \sin^2 \theta}{2 + \left(\frac{\epsilon_1}{m} - 1\right) \sin^2 \theta}.$$

В нерелятивистском пределе $\vartheta = 2\theta$ и

$$d\sigma = 4 \left(\frac{r_0}{v_1^2}\right)^2 \left[\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \right] \cos \theta d\theta. \quad (31.1.7)$$

С углом рассеяния в системе центра инерции однозначно связана потеря энергии электрона в результате столкновения с покоящимся электроном. Обозначим через Δ отношение энергии, переданной одним электроном другому, первоначально покоящемуся, к кинетической энергии первого электрона: $\Delta = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 - m} = \frac{\epsilon_2 - m}{\epsilon_1 - m}$. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что $\Delta = \frac{1}{2}(1 - \cos \vartheta)$. Подставляя это выражение в (31.1.6), получим

$$d\sigma = \frac{2\pi r_0^2}{v_1^2 (x-1)} \frac{d\Delta}{\Delta^2 (1-\Delta)^2} \left\{ 1 - \left[3 - \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \right] \Delta (1-\Delta) + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \Delta^2 (1-\Delta)^2 \right\}, \quad (31.1.8)$$

где $x = \epsilon_1/m$.

Эта формула определяет распределение по энергиям вторичных электронов, возникающих при прохождении быстрого электрона через вещество.

При малых Δ

$$d\sigma = \frac{2\pi r_0^2}{v_1^2 (x-1)} \frac{d\Delta}{\Delta^2}. \quad (31.1.9)$$

31.2. Рассеяние позитрона электроном.

Рассмотрим рассеяние позитрона электроном [31]. Произведя в (31.1.1) замену

$$\begin{aligned} u'_1 &\rightarrow v_2, & u'_2 &\rightarrow v_1, \\ p'_1 &\rightarrow -p_2^{(n)}, & p'_2 &\rightarrow -p_1^{(n)}, \end{aligned}$$

где $p_1^{(n)}$ и $p_2^{(n)}$ — начальный и конечный 4-импульсы позитрона и $v_1 = u(-p_1^{(n)})$,

$v_2 = u(-p_2^{(n)})$, получим матричный элемент, описывающий рассеяние позитрона электроном:

$$M = \frac{(\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1)(\bar{v}_1 \gamma_\mu v_2)}{(p_2 - p_1)^2} - \frac{(\bar{v}_1 \gamma_\mu u_1)(\bar{u}_2 \gamma_\mu v_2)}{(p_1^{(n)} + p_1)^2}. \quad (31.2.1)$$

Диаграммы, описывающие рассеяние позитрона электроном, изображены на рис. 31.2. Диаграмма рис. 31 2, б описывает виртуальную анниги-

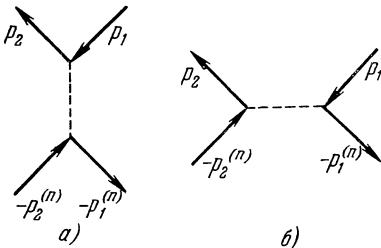


Рис. 31.2.

ляцию пары электрон — позитрон с импульсами p_1 и $p_1^{(n)}$. Эта пара превращается в виртуальный фотон с импульсом $k = p_1 - p_1^{(n)}$, который вновь образует пару с импульсами p_2 и $p_2^{(n)}$.

Вычисление $|M|^2$ может быть проведено так же, как и в случае рассеяния электрона электроном. Мы приведем здесь только результат вычисления:

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{16 \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^2} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^2 - 1\right]^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left[1 + 4 \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right) \left(1 + \cos^4 \frac{\vartheta}{2}\right) \right] + \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^4 \left[3 + 4 \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right)^2 \left(1 + \cos^2 \vartheta\right) \right] - \frac{m^4}{\varepsilon^2 (\varepsilon^2 - m^2) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \left[3 + 4 \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right) \left(1 + \cos \vartheta\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2} - 1\right)^2 \left(1 + \cos \vartheta\right)^2 \right] \right\} d\vartheta, \quad (31.2.2)$$

где ε и ϑ — энергия и угол рассеяния в системе центра инерции.

В нерелятивистском случае эта формула переходит в формулу Резерфорда без обмена Вклад обменной (т. е. аннигиляционной) диаграммы (рис 31.2, б) в нерелятивистском случае очень мал.

Распределение по энергиям вторичных электронов определяется формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Delta} = 2\pi r_0^2 \frac{x}{(x-1)^2 \Delta^2} F(x, \Delta),$$

$$F(x, \Delta) = \frac{1}{x(x+1)} \left\{ \left[1 + 2(x-1)(1-\Delta) + (x-1)^2 \left(1 - \Delta + \frac{\Delta^2}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{(x-1)^2 \Delta^2}{(x+1)^2} \left[3 + 2(x-1) + (x-1)^2 \left(\frac{1}{2} - \Delta + \Delta^2\right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{(x-1)\Delta}{x+1} \left[3 + 4(x-1)(1-\Delta) + (x-1)^2 (1-\Delta)^2 \right] \right\}, \quad (31.2.3)$$

где

$$x = \frac{\varepsilon_1^{(n)}}{m}, \quad \Delta = \frac{\varepsilon_2 - m}{\varepsilon_1^{(n)} - m}$$

(электрон до столкновения покоился). При $\Delta \ll 1$ мы получаем формулу (31.1.9)

31.3. Рассеяние поляризованных электронов. Перейдем к рассмотрению рассеяния поляризованных частиц, отличие сечений рассеяния которых от сечений рассеяния неполяризованных частиц может быть использовано для измерения степени поляризации частиц.

Мы видели (см. § 11.4), что при рассеянии неполяризованных электронов во внешнем поле в борновском приближении не возникает эффекта поляризации. Аналогично и при рассеянии электрона или позитрона на электроне поляризация неполяризованного пучка возникает лишь в том случае, если мишень поляризована, а отличие сечений рассеяния от сечений для неполяризованных частиц будет иметь место только тогда, когда пучок и мишень поляризованы

Сечение рассеяния поляризованных частиц может быть определено по общим формулам § 18.4. Мы приведем здесь только окончательные результаты для двух случаев рассеяния электрона на электроне, когда

электроны поляризованы в начальных состояниях и когда поляризованы один из электронов в начальном и один из электронов в конечном состоянии [32]. В первом случае сечение рассеяния определяется формулой

$$d\sigma(s_1, s'_1) = \frac{\alpha^2}{2\varepsilon^2} d\Omega \left\{ \frac{A_0 - A(s_1, s'_1)}{(p_2 - p_1)^4} + \frac{B_0 + B(s_1, s'_1)}{(p'_2 - p_1)^4} - 2 \frac{C_0 + C(s_1, s'_1)}{(p_2 - p_1)^2 (p'_2 - p_1)^2} \right\},$$

а во втором случае — формулой

$$d\sigma(s_1, s_2) = \frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2} d\Omega \left\{ \frac{A_0 - A(s_1, s_2)}{(p_2 - p_1)^4} + \frac{B_0 + B(s_1, s_2)}{(p'_2 - p_1)^4} - 2 \frac{C_0 + C(s_1, s_2)}{(p_2 - p_1)^2 (p'_2 - p_1)^2} \right\},$$

где

$$A_0 = (p_1 p'_1)^2 + (p_1 p'_2)^2 + 2m^2 (p_1 p'_1) - 2m^2 (p_1 p'_2),$$

$$B_0 = (p_1 p'_1)^2 + (p_1 p_2)^2 + 2m^2 (p_1 p'_1) - 2m^2 (p_1 p_2),$$

$$C_0 = -[(p_1 p_1)^2 + 2m^2 p_1 p'_1],$$

$$A(s_1, s'_1) = -m^2 [s_1 s'_1 (p_2 - p_1)^2 + (s_1 p_2) (s'_1 p'_2)],$$

$$B(s_1, s'_1) = -m^2 [s_1 s'_1 (p_2 - p'_1)^2 + (s'_1 p_2) (s_1 p'_2)],$$

$$C(s_1, s'_1) = (s_1 p'_1) (s'_1 p_2) (p_1 p_2) + (s_1 p_2) (s'_1 p_1) (p'_1 p_2) - \\ - (s_1 p_2) (s'_1 p_2) (p_1 p'_1) - (s_1 s'_1) (p_1 p_2) (p'_1 p_2) + \\ + m^2 (s_1 p'_1) (s'_1 p_2) + m^2 (s_1 p_2) (s'_1 p_1) + \\ + m^2 (s_1 p'_1) (s'_1 p_1) - 4m^2 (s_1 s'_1) (p_1 p'_1),$$

$$A(s_1, s_2) = -4 (s_2 p_1) (s_1 p'_1) (p_2 p'_1) - 4 (s_1 p_2) (s_2 p'_1) (p_1 p'_1) + \\ + 4 (s_1 p'_1) (s_2 p'_1) [(p_1 p_2) + m^2] - 2m^2 (s_2 p_1) (s_1 p_2) + \\ + 4 s_1 s_2 [p_1 p'_1 (p_1 p'_2) + (p_1 p_2) m^2 + m^4],$$

$$B(s_1, s_2) = -2m^2 [(s_1 s_2) (p_1 - p'_2)^2 - (s_1 p'_2) (s_2 p'_1)],$$

$$C(s_1, s_2) = -2 (s_1 s_2) (p_1 p'_1) [(p_1 p'_2) + 2m^2] + \\ + (s_1 p'_1) (s_2 p_1) [2 (p'_2 p_1) + m^2] - (s_1 p'_1) (s_2 p'_1) [2m^2 + 2 p_1 p_2] + \\ + (s_1 p_2) (s_2 p'_1) [m^2 + 2 p_1 p'_1] + m^2 (s_1 p_2) (s_2 p_1)$$

и s_1, s'_1 — 4-векторы поляризации электронов в начальном состоянии, а s_2 — 4-вектор поляризации одного из электронов в конечном состоянии.

31.4. Рассеяние мюона электроном. Превращение электронной пары в мюонную пару. Рассмотрим рассеяние мюона электроном [33]. Эта задача аналогична задаче о рассеянии электрона электроном, но проще ее. Так как гамильтониан взаимодействия частиц с электромагнитным полем (см. § 16.7) содержит электронный и мюонный ток в виде отдельных слагаемых, то на диаграммах Фейнмана нет вершин, в которых происходило бы превращение мюона в электрон или аннигиляция мюона с позитроном. Каждая сплошная цепочка линий диаграммы (от входа до выхода или вся замкнутая петля) может быть либо электронной, либо мюонной. «Обменных» диаграмм нет.

Поэтому рассеяние мюона электроном описывается во втором приближении теории возмущений только первой из двух диаграмм рис. 31.1 (она изображена на рис. 31.3),

и матричный элемент определяется первым из двух членов формулы (31.1.1)

$$M = \frac{(\bar{u}_2 \gamma_\alpha u_1) (\bar{u}_2 \gamma_\alpha u_1)}{q^2}, \quad (31.4.1)$$

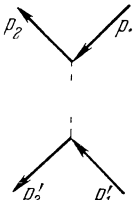


Рис. 31.3.

где $q = p_1 - p_2$, p_1, p_2 — 4-импульсы, u_1, u_2 — биспинорные амплитуды электрона в начальном и конечном состояниях и p_1, p_2' и u_1', u_2' — аналогичные величины для мюона.

Дифференциальное сечение рассеяния мюона электроном определяется формулой, аналогичной формуле (31.1.2):

$$d\sigma = \alpha^2 \frac{do}{4\omega^2} |M|^2,$$

где do и $\omega = \varepsilon + \varepsilon'$ — элемент телесного угла и полная энергия в системе центра инерции. В случае неполяризованных частиц

$$|M|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \frac{1}{q^4} \text{Sp } \gamma_\alpha (m - i\hat{p}_1) \gamma_\beta (m - i\hat{p}_2) \text{Sp } \gamma_\alpha (\mu - i\hat{p}'_1) \gamma_\beta (\mu - i\hat{p}'_2)$$

(m — масса электрона, μ — масса мюона) и сечение имеет вид

$$d\sigma = 2\alpha^2 \frac{do}{\omega^2} \frac{1}{q^4} \left[(p_1 p'_1)^2 + (p_1 p'_2)^2 - \frac{m^2 + \mu^2}{2} q^2 \right]. \quad (31.4.2)$$

Выразив входящие сюда инварианты через энергии $\varepsilon, \varepsilon'$, угол рассеяния ϑ и импульс $p \equiv |\mathbf{p}|$ в системе центра инерции, получим

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 do}{8\omega^2 p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left[(\varepsilon\varepsilon' + p^2)^2 + (\varepsilon\varepsilon' + p^2 \cos \vartheta)^2 - 2(m^2 + \mu^2) p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]. \quad (31.4.3)$$

Легко видеть, что при $\varepsilon \ll \mu$ эта формула переходит в формулу для сечения рассеяния электрона во внешнем поле.

Переходя в (31.4.2) к величинам в системе покоя электрона, найдем распределение по энергиям электронов отдачи. Обозначая переданную электрону энергию через T , $T = \varepsilon_2 - m = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$, и замечая, что

$$q^2 = 2mT, \quad p^2 \omega^2 = m^2 p_0^2, \quad \frac{do}{\omega^2} = \frac{2\pi dT}{mp_0^2},$$

где $p_0 = \sqrt{\varepsilon_1'^2 - \mu^2}$ — импульс мюона в начальном состоянии, получим

$$d\sigma = 2\pi r_0^2 \frac{m}{v_0^2} \frac{dT}{T^2} \left[1 - v_0^2 \frac{T}{T_m} + \frac{1}{2} \frac{T^2}{\varepsilon_1'^2} \right], \quad (31.4.4)$$

где v_0 — скорость падающего мюона и T_m — максимальное значение T ,

$$T_m = 2mp_0^2 / (m^2 + \mu^2 + 2m\varepsilon_1')$$

(оно соответствует углу рассеяния $\nu = \pi$).

Приведем выражение для сечения рассеяния поляризованного электрона на поляризованном мюоне [34]:

$$d\sigma = 2\alpha^2 \frac{do}{\omega^2} \frac{1}{q^4} \left\{ (p_1 p'_1)^2 + (p_1 p'_2)^2 - \frac{m^2 + \mu^2}{2} q^2 - m\mu [q^2 (s_1 s'_1) - (s_1 q) (s'_1 q)] \right\}, \quad (31.4.5)$$

где s_1 и s'_1 — 4-векторы поляризации электрона и мюона в начальном состоянии.

Электрон и позитрон могут аннигилировать, превращаясь в пару мюонов. Этот процесс изображается диаграммой рис. 31.4, аналогичной диаграмме 31.2, б. Порог реакции при столкновении позитрона с покоящимся электроном составляет

$$\varepsilon_0 = \frac{2\mu}{m} \mu = 4 \cdot 10^{10} \text{ эв.}$$

Матричный элемент, соответствующий превращению электронно-позитронной пары в мюонную пару, имеет следующий вид:

$$M = \frac{(\bar{u}(p') \gamma_{\alpha\mu} (-p'_+)) (\bar{u}(-p_+) \gamma_{\alpha\mu} (p))}{\omega^2}, \quad (31.4.6)$$

где p' и p'_+ — 4-импульсы отрицательного и положительного мюонов p и p_+ — аналогичные величины для электрона и позитрона.

Мы приведем здесь выражение только для полного эффективного сечения этого процесса [35]:

$$\sigma = \frac{2\pi}{3} r_0^2 \frac{m}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad (31.4.7)$$

Рис. 31.4.

где ε — энергия позитрона в системе покоя электрона.

Максимальное сечение (при $\varepsilon \approx 1,7\varepsilon_0$) приблизительно в 20 раз меньше сечения двухфотонной аннигиляции электронно-позитронной пары при той же энергии.

§ 32. Запаздывающее взаимодействие зарядов

32.1. Функция взаимодействия двух зарядов. В предыдущем параграфе мы пользовались выражением для матричного элемента рассеяния двух зарядов в импульсном представлении. Здесь рассмотрим этот же матричный элемент в координатном представлении. Это позволит рассмотреть взаимодействие двух зарядов при наличии внешних полей, а также исследовать связанные состояния системы электрон-позитрон (позитроний).

Согласно результатам § 16.5 матрица рассеяния второго порядка $\mathbf{S}^{(2)}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{S}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int T [j_{\mu}(x) j_{\nu}(x')] T [A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')] d^4x d^4x', \quad (32.1.1)$$

где T — хронологический оператор, j_{μ} — оператор плотности тока, A_{μ} — операторы 4-потенциала электромагнитного поля. При отсутствии фотонов в начальном и конечном состояниях оператор $T [A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')]$ следует заменить его средним значением по состоянию вакуума

$$\langle 0 | T [A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')] | 0 \rangle = \delta_{\mu\nu} D_c(x - x').$$

Два оператора тока, входящие в (32.1.1), могут относиться либо к разным полям (один — к электронному, другой — к мюонному или адронному), либо к одинаковым (например, к электронному; случай двух адронных токов мы рассматривать не будем). В первом случае токи, очевидно, коммутируют; то же будет и во втором случае. Действительно, оператор $j_{\mu}(x) j_{\nu}(x')$ содержит при этом произведения четырех операторов испускания или поглощения электронов (или позитронов). Нас будут интересовать те матричные элементы $\mathbf{S}^{(2)}$, которым соответствует наличие двух частиц как в начальном, так и в конечном состояниях. При этом отличные от нуля вклады могут вносить только те члены оператора $j_{\mu}(x) j_{\nu}(x')$, которые содержат два оператора испускания и два оператора поглощения, причем все они должны относиться к различным индивидуальным состояниям электронов. Поэтому все эти четыре сомножителя антикоммутируют друг с другом, а их попарные произведения коммутируют.

Таким образом, символ T в (32.1.1) может быть опущен:

$$\mathbf{S}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int j_{\mu}(x) D_c(x-x') j_{\mu}(x') d^4x' d^4x'. \quad (32.1.2)$$

В связи со структурой этого выражения отметим следующее принципиальное обстоятельство. В нерелятивистской квантовой механике взаимодействие частиц описывается потенциальной энергией взаимодействия $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$, являющейся функцией расстояния между частицами. Оператор потенциальной энергии \mathbf{V} (в представлении чисел заполнения) имеет следующий вид:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}_1) V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \rho(\mathbf{r}_2) d^3x_1 d^3x_2,$$

где $\rho = \psi^{\dagger}\psi$ — оператор плотности частиц

В электродинамике не существует потенциальной энергии взаимодействия, зависящей от координат взаимодействующих частиц, взятых в один и тот же момент времени, так как электроны взаимодействуют не непосредственно, а через посредство электромагнитного поля. Оператор энергии взаимодействия заменяет в первом приближении играющая аналогичную роль матрица рассеяния $\mathbf{S}^{(2)}$, определяющаяся формулой (32.1.2). Подынтегральное выражение в (32.1.2) содержит координаты (включая, однако, и временную координату) только зарядов, электромагнитное же поле в этой формуле исключено. Поэтому функцию $e^2 D_c(x-x')$ можно назвать функцией взаимодействия двух зарядов. Далее мы увидим, что в нерелятивистском приближении она действительно приводит к выражению энергии взаимодействия двух зарядов, т. е. к закону Кулона и поправкам к нему.

Составим теперь общее выражение для матричного элемента оператора $\mathbf{S}^{(2)}$. Рассмотрим сначала тот случай, когда обе частицы являются электронами.

Пусть A и B обозначают совокупности квантовых чисел начальных состояний электронов, а C и D — конечных состояний. Тогда в операторе

$$j_{\mu}(x) j_{\mu}(x') = -e^2 N [\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x)] N [\bar{\psi}(x') \gamma_{\mu} \psi(x')]$$

отличные от нуля значения дадут лишь следующие члены:

$$j_{\mu}(x) j_{\mu}(x') \rightarrow a_{Aa}^{\dagger} a_{Ab}^{\dagger} a_{Bb}^{\dagger} j_{CA\mu}(x) j_{DB\mu}(x') + a_{Ab}^{\dagger} a_{Ba}^{\dagger} a_{Aa}^{\dagger} j_{CA\mu}(x') j_{DB\mu}(x) + a_{Aa}^{\dagger} a_{Ba}^{\dagger} a_{Ab}^{\dagger} j_{CB\mu}(x) j_{DA\mu}(x') + a_{Ba}^{\dagger} a_{Aa}^{\dagger} a_{Ab}^{\dagger} j_{CB\mu}(x') j_{DA\mu}(x),$$

где a_A^{\dagger} и a_A — операторы испускания и поглощения электронов в состоянии A , ψ_A — соответствующее решение уравнений Дирака и $j_{CA\mu}(x) = ie\bar{\psi}_C(x) \gamma_{\mu} \psi_A(x)$ — плотность тока перехода.

Используя антикоммутативность всех участвующих здесь операторов, можно расположить их в виде нормального произведения (например, $a_{Aa}^{\dagger} a_{Ba}^{\dagger} a_{Ab}^{\dagger}$), матричный элемент которого равен единице.

Таким образом, для матричного элемента $\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle$ мы получим выражение

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = - \int \{ j_{DB\mu}(x') D_c(x'-x) j_{CA\mu}(x) - j_{CB\mu}(x') D_c(x'-x) j_{DA\mu}(x) \} d^4x d^4x'. \quad (32.1.3)$$

Двум членам в (32.1.3) соответствуют две диаграммы, изображенные на рис. 32.1. Они различаются только переменной местами индексов конеч-

ных состояний. Поэтому второй член в (32.1.3) и вторая диаграмма рис. 32.1 называются обменными по отношению к первым. Знак минус у обменного члена в (32.1.3) соответствует тому, что волновая функция двух электронов в конфигурационном пространстве является антисимметричной.

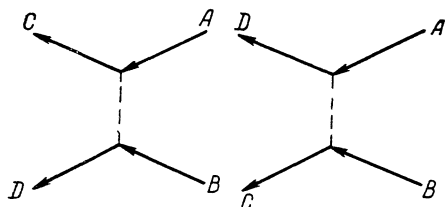


Рис. 32.1.

Перейдем к рассмотрению взаимодействия двух позитронов. В этом случае ψ содержит операторы испускания, а $\bar{\psi}$ — операторы поглощения. Поэтому, если мы обозначим (в противоположность случаю электронов) начальные состояния через C и D , а конечные — через A и B , то для про-

изведения операторов тока мы получим формулу, отличающуюся от прежней формулы заменой электронных операторов $\mathbf{a}_A, \mathbf{a}_B, \mathbf{a}_C^\dagger, \mathbf{a}_D^\dagger$ соответствующими позитронными операторами $\mathbf{b}_A^\dagger, \mathbf{b}_B^\dagger, \mathbf{b}_C, \mathbf{b}_D$, а также тем, что волновые функции ψ_A будут означать теперь решения уравнений Дирака с отрицательными частотами. Переходя от волновых функций с отрицательными частотами к волновым функциям позитрона и учитывая, что $\bar{\psi}_1^{(-)} \gamma_\mu \psi_2^{(-)} = = \bar{\psi}_2^{(+)} \gamma_\mu \psi_1^{(+)}$ (см. § 8.7), мы получим формулу для матричного элемента, определяющего взаимодействие двух позитронов, аналогичную формуле (32.1.3):

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = -i \int \{ j_{BD\mu}^{(n)}(x') D_c(x' - x) j_{AC\mu}^{(n)}(x) - j_{AD\mu}^{(n)}(x') D_c(x' - x) j_{BC\mu}^{(n)}(x) \} d^4x d^4x',$$

где

$$j_{AC\mu}^{(n)}(x) = -ie \bar{\psi}_A^{(n)}(x) \gamma_\mu \psi_C^{(n)}(x).$$

В том случае, когда одна из частиц — электрон, а другая — позитрон, удобно пользоваться следующими обозначениями: A — начальное состояние электрона, C — конечное состояние электрона, B — конечное состояние позитрона, D — начальное состояние позитрона. Соответственно по сравнению со случаем двух электронов надо заменить \mathbf{a}_D^\dagger на \mathbf{b}_D и \mathbf{a}_B на \mathbf{b}_B^\dagger , причем под ψ_B и ψ_D нужно понимать волновые функции с отрицательными частотами.

Располагая операторы \mathbf{a} и \mathbf{b} в виде нормального произведения, получим в этом случае

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \int \{ j_{CA\mu}(x') D_c(x' - x) j_{DB\mu}(x) - j_{DA\mu}(x') D_c(x' - x) j_{CB\mu}(x) \} d^4x d^4x'. \quad (32.1.4)$$

Первые члены в (32.1.4) и (32.1.3) различаются знаком, что соответствует различным знакам зарядов электрона и позитрона. Обменный член в (32.1.4) (вторая диаграмма рис. 32.1) теперь соответствует виртуальному поглощению и образованию вновь электронно-позитронной пары.

Формулу (32.1.2) можно применить также к описанию взаимодействия электрона с другой частицей, например с мюоном. В этом случае под $\mathbf{j}_\mu(x)$ следует понимать электронный ток, а под $\mathbf{j}_\mu(x')$ — мюонный ток. В матричных элементах $\mathbf{j}_\mu(x)$ и $\mathbf{j}_\mu(x')$ будут теперь отсутствовать обменные члены.

Пусть состояния A и C относятся к одной частице, а B и D — к другой, тогда

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = - \int j_{CA\mu}(x') D_c(x' - x) j_{DB\mu}(x) d^4x d^4x'. \quad (32.1.5)$$

Этому матричному элементу отвечает первая из диаграмм рис. 32.1.

32.2. Запаздывающие потенциалы. Матричный элемент $\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle$ можно представить в виде, удобном для приложений и допускающем простое физическое истолкование. Воспользуемся для этого явным выражением функции $D_c(x)$ (см. § 6.2):

$$D_c(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i\mathbf{k}r - i\omega t}}{k^2 - \omega^2} d^3k d\omega.$$

Выполнив здесь интегрирование по d^3k (с учетом правила обхода полюсов, т. е. с заменой $k^2 \rightarrow k^2 - i0$), получим

$$D_c(x) = \frac{-i}{8\pi^2} \frac{1}{|r|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t + i|\omega||r|} d\omega.$$

Подстановка этого выражения в (32.1.5) дает

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{i}{4\pi} \int j_{CA\mu}(r_1, t) j_{DB\mu}(r_2, t) \frac{e^{i|\omega_{BD}||r_1 - r_2|}}{|r_1 - r_2|} d^3x_1 d^3x_2 dt, \quad (32.2.1)$$

где $\omega_{BD} = \omega_B - \omega_D$.

Выполним теперь в (32.2.1) интегрирование по dt . Выделим для этого явную зависимость токов перехода от t . Так как состояния A, B, \dots стационарны, $\psi_A(x) = \psi_A(r) e^{-i\omega_A t}$, то

$$j_{CA\mu}(x) = j_{CA\mu}(r) e^{i\omega_{CA} t},$$

где $\omega_{CA} = \omega_C - \omega_A$, и

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{i}{2} \int j_{CA\mu}(r_1) \frac{e^{i|\omega_{BD}||r_1 - r_2|}}{|r_1 - r_2|} j_{DB\mu}(r_2) d^3x_1 d^3x_2.$$

Соотношение $\omega_{CA} = -\omega_{DB}$, т. е. $\omega_C - \omega_A = \omega_B - \omega_D$, выражает закон сохранения энергии. Пусть для определенности $\omega_A > \omega_C$, тогда $\omega_B < \omega_D$ и $\omega_{AC} = -\omega_{BD} > 0$. Учитывая это условие, можно переписать (32.2.1) в виде

$$\begin{aligned} \langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle &= i \int dt \int j_{DB\mu}(r_2, t) A_{CA\mu}(r_2, t) d^3x_2 = \\ &= -e \int \bar{\psi}_D(x) \hat{A}_{CA}(x) \psi_B(x) d^4x, \end{aligned} \quad (32.2.2)$$

где

$$A_{CA\mu}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int j_{CA\mu}(r') \frac{e^{-i\omega_{AC}t + i\omega_{AC}|r - r'|}}{|r - r'|} d^3x'$$

или

$$A_{CA\mu}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j_{CA\mu}(r', t - |r - r'|)}{|r - r'|} d^3x'. \quad (32.2.3)$$

Замечательно, что формула (32.2.2) совпадает с выражением для элемента матрицы рассеяния первого порядка $\mathbf{S}^{(1)}$ в случае перехода частицы из состояния B в состояние D , вызванного внешним полем, потенциал

которого равен $A_{CA\mu}$. При этом $A_{CA\mu}$ определяется током перехода $j_{CA\mu}$ другой частицы из состояния A в состояние C так же, как и в классической электродинамике, т. е. формулой для запаздывающих потенциалов. Справедливы, естественно, и дифференциальные уравнения для потенциалов классической электродинамики

$$\square A_{CA\mu} = -j_{CA\mu},$$

$$\frac{\partial A_{CA\mu}}{\partial x_\mu} = 0.$$

Заметим, что выражение (32.2.1) для $\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle$ симметрично относительно обоих токов. Перейдя от него к (32.2.2), мы рассматривали ток J_{DB} как «воспринимающий» внешнее поле, а ток J_{CA} — как «генерирующий» это поле. При этом в качестве генерирующего мы брали ток с положительной частотой $\omega_{CA} > 0$ (чтобы он отвечал переходу из высшего энергетического состояния в низшее). Если считать генерирующим ток с отрицательной частотой, то можно записать (32.2.1) в виде

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = i \int j_{CA\mu}(x) A_{DB\mu}(x) d^4x,$$

то вместо (32.2.3) мы получим $A_{DB\mu}$ в виде «опережающих» потенциалов

$$A_{DB\mu}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int j_{DB\mu}(\mathbf{r}', t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Перейдем теперь от матрицы рассеяния к матрице эффективной энергии взаимодействия системы двух зарядов \mathbf{V} , определяемой следующим образом

$$\langle f | \mathbf{S} | i \rangle = -2\pi i \langle f | \mathbf{V} | i \rangle \delta(\omega_A + \omega_B - \omega_C - \omega_D).$$

Согласно (32.2.1)

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int j_{CA\mu}(\mathbf{r}_1) J_{DB\mu}(\mathbf{r}_2) \frac{e^{i(\omega_{AC}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3x_1 d^3x_2. \quad (32.2.4)$$

Это выражение можно записать также в виде

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle = - \int j_{DB\mu}(\mathbf{r}) A_{CA\mu}(\mathbf{r}) d^3x, \quad (32.2.5)$$

где

$$A_{CA\mu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j_{CA\mu}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{i\omega_{AC}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x'.$$

Потенциалы $A_{CA\mu}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям классической электродинамики для монохроматических полей

$$\Delta A_{CA\mu} + \omega_{CA}^2 A_{CA\mu} = -j_{CA\mu}, \quad \text{div } A_{CA} - \omega_{CA} (A_4)_{CA} = 0.$$

Эти результаты дают строгое обоснование полуклассическому методу рассмотрения взаимодействия электронов с электромагнитным полем, известному под названием «принципа соответствия». В этом методе не учитываются квантовые свойства электромагнитного поля, а используются уравнения классической электродинамики, в которых токи заменяются токами переходов.

Можно показать также, что соответствующий потенциалам (32.2.3) поток энергии классического электромагнитного поля равен вероятности излучения в единицу времени фотона при переходе электрона из состояния A в состояние C , умноженной на энергию фотона ω_{AC} .

Полученные выражения для $\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle$ справедливы, очевидно, и в том случае, когда один из токов перехода относится к адронным системам (в частности, к ядрам). Соответствующие матричные элементы описывают при этом взаимодействие адрона с электроном или мюоном. Однако адронный ток нельзя выразить через волновые функции. Этот ток входит в выражение для матричного элемента как феноменологическая величина (см. § 34).

Все приведенные в этом разделе формулы даны применительно к матричному элементу (32.1.5), т. е. к случаю рассеяния нетождественных частиц. Однако не представляет труда обобщить их на случай рассеяния тождественных частиц. Для этого достаточно к матричному элементу (32.2.4) добавить соответствующий обменный матричный элемент.

32.3. Энергия взаимодействия двух электронов с точностью до v^2/c^2 . Выразим в формуле (32.2.4) для матричного элемента эффективной энергии взаимодействия токи перехода через волновые функции:

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle = \alpha \int \psi_C^*(\mathbf{r}_1) \psi_D^*(\mathbf{r}_2) \frac{1 - \alpha_1 \alpha_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{i|\omega_{AC}|r_{1-2}} \psi_A(\mathbf{r}_1) \psi_B(\mathbf{r}_2) d^3x_1 d^3x_2, \quad (32.3.1)$$

где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$; α_1, α_2 — матрицы Дирака, причем α_1 действует на функцию $\psi_A(\mathbf{r}_1)$, а α_2 — на функцию $\psi_B(\mathbf{r}_2)$. Обратим внимание на структуру выражения (32.3.1). Оно содержит оператор, зависящий от координат и спиновых переменных обеих частиц, $\frac{1 - \alpha_1 \alpha_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$ и «фактор запаздывания» $e^{i|\omega_{AC}|r_{1-2}}$. Наличие последнего, зависящего явно от начальной и конечной энергий системы, не позволяет в общем виде ввести гамильтониан взаимодействия двух электронов \mathbf{V} , т. е. оператор, для которого выполнялось бы соотношение

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle = \int \psi_C^*(\mathbf{r}_1) \psi_D^*(\mathbf{r}_2) \mathbf{V} \psi_A(\mathbf{r}_1) \psi_B(\mathbf{r}_2) d^3x_1 d^3x_2. \quad (32.3.2)$$

Однако при малых скоростях ($v/c \ll 1$, c — скорость света) такой оператор можно построить. Для получения его мы разложим матричный элемент по степеням v/c с точностью до v^2/c^2 . Как и при аналогичном разложении в § 12, мы не будем в этом параграфе пользоваться системой единиц, в которой $c = 1$. Это представляет удобство в том отношении, что переход к нерелятивистскому приближению можно формально осуществить как разложение по степеням $1/c$.

Разложение фактора запаздывания с точностью до членов порядка $1/c^2$ включительно имеет следующий вид:

$$\frac{e^{\frac{i}{c}|\omega_A - \omega_C|r_{1-2}}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + i \frac{|\omega_A - \omega_C|}{c} - \frac{(\omega_A - \omega_C)^2}{2c^2} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|. \quad (32.3.3)$$

Матричные элементы, содержащие α , по порядку величины равны v/c . Поэтому в членах, содержащих $\alpha_1 \alpha_2$, достаточно сохранить лишь первый член в разложении (32.3.3). Второй член в (32.3.3) после подстановки в интеграл (32.3.1) обратится в нуль в силу ортогональности функции ψ_A и ψ_C . Третий член можно преобразовать к симметричному виду, воспользовавшись тем, что $\omega_A - \omega_C = \omega_D - \omega_B$, и поэтому

$$- (\omega_A - \omega_C)^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = (\omega_A - \omega_C) (\omega_B - \omega_D) |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

Далее можно исключить из выражения для матричного элемента частоты, используя уравнение Дирака

$$H_1 \psi_A(r_1) = \omega_A \psi_A(r_1).$$

Имея в виду, что выражение (32.3.3) умножается справа на $\psi_A(r_1) \psi_B(r_2)$, а слева на $\psi_C^*(r_1) \psi_D^*(r_2)$ и интегрируется по r_1 и r_2 , мы можем заменить в нем частоты ω_A и ω_B операторами H_1 и H_2 , расположенными справа от множителя $|r_1 - r_2|$, а частоты ω_C и ω_D — операторами H_1 и H_2 , расположенными слева от $|r_1 - r_2|$:

$$(\omega_A - \omega_C)(\omega_B - \omega_D) |r_1 - r_2| \rightarrow |r_1 - r_2| H_1 H_2 + H_1 H_2 |r_1 - r_2| - \\ - H_1 |r_1 - r_2| H_2 - H_2 |r_1 - r_2| H_1 = [H_1, [H_2, |r_1 - r_2|]]$$

(квадратные скобки обозначают коммутаторы соответствующих величин).

Так как оператор Гамильтона электрона имеет вид

$$H = c\alpha \mathbf{p} + \beta mc^2 + eA_0^{(e)},$$

где $A_0^{(e)}$ — внешнее поле, то не коммутирующим с $|r_1 - r_2|$ является только один член в H , а именно $\alpha \mathbf{p}$.

Вычислив коммутатор $c^2 [\alpha_1 \mathbf{p}_1, [\alpha_2 \mathbf{p}_2, |r_1 - r_2|]]$, легко убедиться, что после подстановки (32.2.3) в (32.3.1) можно произвести замену

$$- \frac{(\omega_A - \omega_C)^2}{c^2} |r_1 - r_2| \rightarrow \frac{\alpha_1 \alpha_2 - (\alpha_1 n)(\alpha_2 n)}{|r_1 - r_2|},$$

$$\text{где } n = \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}.$$

Таким образом, величина $\langle f | \mathbf{V} | i \rangle$ действительно может быть представлена в виде (32.3.2), где оператор \mathbf{V} определяется формулой [36]

$$\mathbf{V} = \frac{\alpha}{|r_1 - r_2|} - \frac{\alpha}{2} \frac{\alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 n)(\alpha_2 n)}{|r_1 - r_2|}. \quad (32.3.4)$$

Первый член в этой формуле описывает кулоновское взаимодействие зарядов.

Так как выражение для \mathbf{V} имеет смысл только с точностью до членов порядка v^2/c^2 , то волновые функции электронов следует также брать с той же точностью, т. е. пользоваться приближенными волновыми функциями § 12.1

$$\psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{2mc} \Phi \end{pmatrix}.$$

Выражение (32.3.2) с учетом (32.3.4) приобретает при этом вид

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle = \alpha \int \Phi_C^*(r_1) \Phi_D^*(r_2) \Phi_A(r_1) \Phi_B(r_2) \frac{d^3 x_1 d^3 x_2}{|r_1 - r_2|} + \\ + \frac{\alpha}{4c^2} \int \{ [\sigma_1 \mathbf{p}_1 \Phi_C(r_1)]^* [\sigma_1 \mathbf{p}_1 \Phi_A(r_1)] \Phi_D^*(r_2) \Phi_B(r_2) + \\ + \Phi_C^*(r_1) \Phi_A(r_1) [\sigma_2 \mathbf{p}_2 \Phi_D(r_2)]^* [\sigma_2 \mathbf{p}_2 \Phi_B(r_2)] \frac{d^3 x_1 d^3 x_2}{|r_1 - r_2|} + \\ + \frac{\alpha}{8c^2} \int \{ \Phi_C^*(r_1) \sigma_1 (\sigma_1 \mathbf{p}_1) \Phi_A(r_1) + \\ + [\sigma_1 \mathbf{p}_1 \Phi_C(r_1)]^* \sigma_1 \Phi_A(r_1) \} \{ \Phi_D^*(r_2) \sigma_2 (\sigma_2 \mathbf{p}_2) \Phi_B(r_2) + \\ + [\sigma_2 \mathbf{p}_2 \Phi_D(r_2)]^* \sigma_2 \Phi_B(r_2) \} \frac{d^3 x_1 d^3 x_2}{|r_1 - r_2|} - \frac{\alpha}{8c^2} \int \{ \Phi_C^*(r_1) (\sigma_1 n) (\sigma_1 \mathbf{p}_1) \Phi_A(r_1) + \\ + [\sigma_1 \mathbf{p}_1 \Phi_C(r_1)]^* \sigma_1 n \Phi_A(r_1) \} \{ \Phi_D^*(r_2) (\sigma_2 n) (\sigma_2 \mathbf{p}_2) \Phi_B(r_2) + \\ + [\sigma_2 \mathbf{p}_2 \Phi_D(r_2)]^* \sigma_2 n \Phi_B(r_2) \} \frac{d^3 x_1 d^3 x_2}{|r_1 - r_2|}. \quad (32.3.5)$$

Введем приближенную двухкомпонентную волновую функцию электрона Φ , связанную с φ соотношением (см. § 12.2)

$$\varphi = \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right) \Phi.$$

Ясно, что во всех членах (32.3.5), кроме первого, можно заменить φ на Φ , так как они уже содержат множитель $1/c^2$.

Выражение (32.3.5) можно преобразовать к виду

$$\langle CD | \mathbf{V} | AB \rangle = \int \Phi_C^*(\mathbf{r}_1) \Phi_D^*(\mathbf{r}_2) \mathbf{V}^{(0)} \Phi_A(\mathbf{r}_1) \Phi_B(\mathbf{r}_2) d^3x_1 d^3x_2 \quad (32.3.6)$$

(спиновые индексы волновых функций здесь, как и выше, для краткости опущены), где $\mathbf{V}^{(0)}$ — некоторый оператор, который может быть назван оператором энергии взаимодействия двух электронов. Для этого нужно выполнить интегрирование по частям, а так как подынтегральное выражение содержит высшие степени величины $\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$, то предварительно следует выделить начало координат, т. е. точку $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. Интеграл по поверхности, окружающей эту точку, при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0$ дает конечную величину, которая зависит лишь от значений подынтегрального выражения при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. Поэтому она может также быть представлена в виде объемного интеграла от выражения, содержащего $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

В результате мы получим следующее выражение для оператора энергии взаимодействия двух электронов:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{(0)}(\mathbf{r}) = & \frac{\alpha}{r} - \pi \frac{\alpha}{m^2c^2} \delta(\mathbf{r}) - \frac{\alpha}{4m^2c^2} \frac{1}{r^3} ([\mathbf{r}\mathbf{p}_1] \sigma_1 - [\mathbf{r}\mathbf{p}_2] \sigma_2 + 2[\mathbf{r}\mathbf{p}_1] \sigma_2 - \\ & - 2[\mathbf{r}\mathbf{p}_2] \sigma_1) - \frac{\alpha}{2m^2c^2} \left(\frac{1}{r} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 + \frac{1}{r^3} \mathbf{r} (\mathbf{r}\mathbf{p}_1) \mathbf{p}_2 \right) + \\ & + \frac{\alpha}{4m^2c^2} \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{r^3} - \frac{3(\sigma_1 \mathbf{r})(\sigma_2 \mathbf{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3} \sigma_1 \sigma_2 \delta(\mathbf{r}) \right), \quad (32.3.7) \\ & \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Естественно, что наличие δ -функций в (32.3.7) не означает сильного взаимодействия. Те члены, в которые входят δ -функции, содержат в коэффициентах $1/c^2$ и поэтому должны по смыслу проводившегося разложения рассматриваться как малые по сравнению с первым членом, соответствующим кулоновскому взаимодействию. (Чтобы избежать кажущейся расходимости некоторых интегралов, например, возникающих при подстановке последней круглой скобки в (32.3.6), можно сначала выполнять интегрирование по углам.)

Далее мы вернемся к интерпретации отдельных членов, входящих в $\mathbf{V}^{(0)}$. Здесь же отметим лишь сходство оператора $\mathbf{V}^{(0)}$ с оператором энергии электрона во внешнем поле с точностью до v^2/c^2 (см. § 12.2): последний переходит в (32.3.7), если под A_0 , \mathbf{E} и \mathbf{H} понимать поле частицы с зарядом e и магнитным моментом $\frac{e}{2mc} \boldsymbol{\sigma}$.

Заметим, что оператор энергии взаимодействия двух электронов (32.3.7) можно получить из выражения (32.1.1) для матричного элемента рассеяния электрона электроном. В нерелятивистском приближении (включая члены порядка $(\mathbf{p}/m)^2$) мы можем записать биспинорную амплитуду u в виде

$$u = \sqrt{2m} \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) \begin{pmatrix} \omega \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{2m} \omega \end{pmatrix}, \quad \omega^* \omega = 1.$$

Подставив это выражение, а также приближенное равенство

$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{q'^2} + \frac{1}{4m^2} + \frac{(qp_1)(qp_2)}{m^2(q^2)^2} \quad (q \equiv p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2)$$

в первый член (31.1.1), получим

$$(u'_1 \gamma_\mu u_1) (u'_2 \gamma_\mu u_2) \frac{e^2}{q^2} = (2m)^2 \omega_1'^* \omega_2'^* \mathbf{V}^{(0)}(q) \omega_1 \omega_2,$$

где

$$\mathbf{V}^{(0)}(q) = \alpha \left\{ \frac{1}{q^2} - \frac{1}{4m^2} + \frac{i}{4q^2 m^2} ([qp_1] \sigma_1 - [qp_2] \sigma_2 + 2[qp_1] \sigma_2 - 2[qp_2] \sigma_1) + \right. \\ \left. + \frac{(qp_1)(qp_2)}{m^2(q^2)^2} - \frac{p_1 p_2}{m^2 q^2} + \frac{(q\sigma_1)(q\sigma_2)}{4m^2 q^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{4m^2} \right\}.$$

Эта величина является импульсным представлением энергии взаимодействия (32.3.7),

$$\mathbf{V}^{(0)}(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{iqr} \mathbf{V}^{(0)}(q) d^3q.$$

В применении к задаче о взаимодействии двух электронов необходимо рассматривать, кроме матричного элемента (32.3.6), еще обменный матричный элемент

$$\langle DC | V | AB \rangle = \int \Phi_D^*(r_1) \Phi_C^*(r_2) \mathbf{V}^{(0)} \Phi_A(r_1) \Phi_B(r_2) dx_1^3 dx_2^3,$$

где $\mathbf{V}^{(0)}$ — тот же оператор (32.3.7).

Вводя антисимметризованные волновые функции двух электронов

$$\Phi_{AB}(r_1, \lambda_1, r_2, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_A(r_1, \lambda_1) \Phi_B(r_2, \lambda_2) - \Phi_B(r_1, \lambda_1) \Phi_A(r_2, \lambda_2)),$$

где λ_1 и λ_2 — спиновые переменные частицы, и аналогичные функции для других пар состояний, можно представить суммарный матричный элемент в виде

$$\langle f | V | i \rangle = \int \Phi_{CD}^* \mathbf{V}^{(0)} \Phi_{AB} d^3x_1 d^3x_2. \quad (32.3.8)$$

Если A и B — произвольные стационарные состояния электрона во внешнем поле, то волновые функции Φ_{AB} будут образовывать полную систему антисимметризованных собственных функций оператора $\mathbf{H}_1(r_1) + \mathbf{H}_2(r_2)$, где \mathbf{H} , как и выше, — оператор Гамильтона электрона во внешнем поле.

Благодаря взаимодействию между электронами, состояние с волновой функцией Φ_{AB} не будет стационарным. Если при $t = -\infty$ электроны находились в состоянии Φ_{AB} , то при $t = +\infty$ они могут оказаться в некотором другом состоянии Φ_{CD} . Амплитуда вероятности такого перехода определяется матричным элементом оператора $\mathbf{V}^{(0)}$. Можно поставить задачу о нахождении стационарных состояний системы двух электронов с учетом их взаимодействия (с точностью до v^2/c^2). Такие состояния представляют собой суперпозицию состояний с волновыми функциями Φ_{CD} , и соответствующие им волновые функции Φ_n будут собственными функциями оператора

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1(r_1) + \mathbf{H}_2(r_2) + \mathbf{V}^{(0)}. \quad (32.3.9)$$

Таким образом, мы получаем уравнение Шредингера для двух электронов в конфигурационном пространстве

$$\mathbf{H} \Phi_n(r_1, r_2) = E_n \Phi_n(r_1, r_2),$$

где E_n — энергия стационарного состояния. Волновые функции Φ_n должны удовлетворять требованию антисимметрии.

32.4. Взаимодействие электрона с позитроном. Перейдем к определению энергии взаимодействия электрона с позитроном с точностью до членов порядка v^2/c^2 . Воспользуемся для этого формулой (32.1.4). Выразив, как и выше, $\langle f | \mathbf{S} | i \rangle$ через $\langle f | \mathbf{V} | i \rangle$, представим $\langle f | \mathbf{V} | i \rangle$ в виде суммы двух членов — «прямого» и «обменного»

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle = \langle f | \mathbf{V} | i \rangle^{(d)} + \langle f | \mathbf{V} | i \rangle^{(e)}.$$

Выразив далее токи перехода через волновые функции, а волновые функции с отрицательной частотой через волновые функции позитрона, получим для прямого члена выражение

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle^{(d)} = \alpha \int \psi_C^*(\mathbf{r}_1) \psi_B^{(n)*}(\mathbf{r}_2) \frac{1 - \alpha_1 \alpha_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{i \frac{\omega_A c}{c^2} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \psi_A(\mathbf{r}_1) \psi_D^{(n)}(\mathbf{r}_2) d^3 x_1 d^3 x_2.$$

Здесь, так же как и в (32.3.1), слева стоят волновые функции частиц в конечном состоянии, а справа — волновые функции частиц в начальном состоянии, причем всем этим функциям соответствуют положительные частоты. Поэтому точно таким же путем, каким выражение (32.3.1) было преобразовано к виду (32.3.6), может быть получена формула

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle^{(d)} = - \int \Phi_C^*(\mathbf{r}_1) \Phi_B^{(n)*}(\mathbf{r}_2) \mathbf{V}^{(d)} \Phi_A(\mathbf{r}_1) \Phi_D^{(n)}(\mathbf{r}_2) d^3 x_1 d^3 x_2, \quad (32.4.1)$$

где $\mathbf{V}^{(d)}$ — оператор (32.3.7).

Обменный (аннигиляционный) член матричного элемента гамильтониана взаимодействия электрона с позитроном имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle f | \mathbf{V} | i \rangle^{(e)} &= \\ &= \alpha \int \psi_D^{(-)*}(\mathbf{r}_1) \psi_C^*(\mathbf{r}_2) \frac{1 - \alpha_1 \alpha_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{i \frac{\omega_A - \omega_D}{c} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \psi_A(\mathbf{r}_1) \psi_B^{(-)}(\mathbf{r}_2) d^3 x_1 d^3 x_2 = \\ &= \alpha \int \bar{\psi}_D^{(-)}(\mathbf{r}_1) \gamma_\mu \psi_A(\mathbf{r}_1) (\bar{\psi}_C(\mathbf{r}_2) \gamma_\mu \psi_B^{(-)}(\mathbf{r}_2)) e^{i j \frac{\omega_A - \omega_D}{c} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \frac{d^3 x_1 d^3 x_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \end{aligned}$$

Несмотря на внешнее сходство, это выражение существенно отличается от обменного матричного элемента в случае двух электронов. Действительно, так как ω_D и ω_B отрицательны, то в «фактор запаздывания» входит теперь не разность, а сумма энергий частиц

$$\omega_A - \omega_D = \varepsilon_A + \varepsilon_D,$$

включающая] энергию покоя $2mc^2$. Таким образом, $\frac{\omega_A - \omega_D}{c}$ представляет собой не малую величину порядка $1/c$, а большую порядка c , и разложение (32.3.3) становится неприменимым.

Переход к приближению малых скоростей при этом легко осуществить, заменив энергию в экспоненте энергией покоя $\varepsilon_A + \varepsilon_D \approx 2mc^2$. В результате получим

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle^{(e)} = \alpha \int (\bar{\psi}_D^{(-)}(\mathbf{r}_1) \gamma_\mu \psi_A(\mathbf{r}_1)) (\bar{\psi}_C(\mathbf{r}_2) \gamma_\mu \psi_B^{(-)}(\mathbf{r}_2)) \frac{e^{2imc |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3 x_1 d^3 x_2. \quad (32.4.2)$$

Заметим, что индексы начальных и конечных состояний входят в (32.4.2) только в волновые функции частиц. Это означает, что выражение (32.4.2) можно представить в виде матричного элемента некоторого оператора, т. е. в форме (32.3.6).

Для упрощения (32.4.2) обратим внимание на то, что фактор запаздывания содержит в экспоненте множитель $2mc$ и поэтому осциллирует с длиной волны $\frac{1}{2mc} \left(\frac{1}{mc} \right)$ — комптоновская длина волны электрона). Главный вклад в интеграл вносит при этом область $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \sim \frac{1}{mc}$. Так как волновые функции электрона и позитрона (в соответствии с предположением о малости скоростей) незначительно меняются на таком протяжении, то в (32.4.2) можно выделить интегрирование по $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и положить в аргументах волновых функций $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$:

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle^{(e)} = \alpha \int (\bar{\psi}_D^{(-)}(\mathbf{r}_1) \gamma_\mu \psi_A(\mathbf{r}_1)) (\bar{\psi}_C(\mathbf{r}_1) \gamma_\mu \psi_B^{(-)}(\mathbf{r}_1)) d^3x_1 \int e^{2imcr} \frac{d^3x}{r}.$$

Последний (несобственный) интеграл может быть вычислен обычным применительно к выражениям, содержащим осциллирующие подынтегральные функции, образом:

$$\int \frac{e^{2imcr}}{r} d^3x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int e^{2imcr - \lambda r} \frac{d^3x}{r} = -\frac{\pi}{(mc)^2}.$$

Таким образом,

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle^{(e)} = -\frac{\pi\alpha}{m^2c^2} \int (\bar{\psi}_D^{(-)} \gamma_\mu \psi_A) (\bar{\psi}_C \gamma_\mu \psi_B^{(-)}) d^3x. \quad (32.4.3)$$

Здесь все волновые функции — функции одних и тех же пространственных координат (точечное взаимодействие).

Преобразуем подынтегральное выражение в (32.4.3). Используя соотношения (8.4.6), получим

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_D^{(-)} \gamma_\mu \psi_A) (\bar{\psi}_C \gamma_\mu \psi_B^{(-)}) &= (\bar{\psi}_D^{(-)} \psi_B^{(-)}) (\bar{\psi}_C \psi_A) - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_D^{(-)} \gamma_\mu \psi_B^{(-)}) (\bar{\psi}_C \gamma_\mu \psi_A) - \\ &- (\bar{\psi}_D^{(-)} \gamma_5 \psi_B) (\bar{\psi}_C \gamma_5 \psi_A) - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_D^{(-)} \gamma_5 \gamma_\mu \psi_B^{(-)}) (\bar{\psi}_C \gamma_5 \gamma_\mu \psi_A). \end{aligned}$$

Введем далее позитронные волновые функции, сделав замену

$$\bar{\psi}_D^{(-)} O \psi_B^{(-)} = \pm \bar{\psi}_B^{(n)} O \psi_D^{(n)}$$

(знак плюс относится к случаю, когда $O = \gamma_\mu$, и знак минус — к случаю, когда $O = 1, \gamma_5, \gamma_5 \gamma_\mu$). Наконец, перейдем к нерелятивистским волновым функциям. Так как (32.4.3) содержит коэффициент $1/c^2$, то достаточно заменить четырехкомпонентные волновые функции на двухкомпонентные Φ , одновременно заменив четырехрядные матрицы двухрядными по следующему правилу:

$$1 \rightarrow 1, \quad \gamma_5 \rightarrow 0, \quad \gamma_\mu \rightarrow 1, \quad \gamma_\mu \gamma_5 \rightarrow i\sigma.$$

В результате выражение (32.4.3) приобретет вид

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle^{(e)} = \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{m^2c^2} \int \{ (\Phi_C^* \Phi_A) (\Phi_B^{(n)*} \Phi_D^{(n)}) + (\Phi_C^* \sigma \Phi_A) (\Phi_B^{(n)*} \sigma \Phi_D^{(n)}) \} d^3x \quad (32.4.4)$$

или

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle^{(e)} = \int \Phi_C^*(\mathbf{r}_1) \Phi_B^{(n)*}(\mathbf{r}_2) \mathbf{V}^{(e)} \Phi_A(\mathbf{r}_1) \Phi_D^{(n)}(\mathbf{r}_2) d^3x_1 d^3x_2,$$

где [37]

$$\mathbf{V}^{(e)} = \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{m^2c^2} (3 + \sigma_1 \sigma_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (32.4.5)$$

Суммарный матричный элемент $\langle f | \mathbf{V} | i \rangle$ можно записать в виде

$$\langle f | \mathbf{V} | i \rangle = \int \Phi_{CB}^* \mathbf{V}^{(n)} \Phi_{AD} d^3x_1 d^3x_2,$$

где

$$\mathbf{V}^{(m)} = -\mathbf{V}^{(e)} + \mathbf{V}^{(e)} \quad (32.4.6)$$

и

$$\Phi_{AD}(\mathbf{r}_1, \lambda_1; \mathbf{r}_2, \lambda_2) = \Phi_A(\mathbf{r}_1, \lambda_1) \Phi_D^{(n)}(\mathbf{r}_2, \lambda_2),$$

$$\Phi_{CB}(\mathbf{r}_1, \lambda_1; \mathbf{r}_2, \lambda_2) = \Phi_C(\mathbf{r}_1, \lambda_1) \Phi_B^{(n)}(\mathbf{r}_2, \lambda_2).$$

Оператор $\mathbf{V}^{(m)}$ представляет собой оператор энергии взаимодействия электрона с позитроном. Функции Φ_{AD} (A и D — квантовые числа произвольных состояний электрона и позитрона в заданном внешнем поле) образуют полную систему собственных функций оператора $\mathbf{H}^{(e)} + \mathbf{H}^{(n)}$, где $\mathbf{H}^{(e)}$ — гамильтониан электрона и $\mathbf{H}^{(n)}$ — гамильтониан позитрона (при наличии внешнего поля они различаются знаком заряда).

Волновая функция $\Phi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ стационарного состояния системы электрон — позитрон удовлетворяет уравнению Шредингера

$$(\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{H}^{(n)}(\mathbf{r}_2) + \mathbf{V}^{(n)}) \Phi_n = E_n \Phi_n, \quad (32.4.7)$$

причем она не ограничена никакими требованиями симметрии: электрон и позитрон фигурируют в этом уравнении как нетождественные частицы.

Симметрия относительно изменения знака заряда обеих частиц приводит к определенной зарядовой четности. Именно, симметричные (относительно перестановки координат и спиновых переменных) состояния являются зарядово-нечетными, а антисимметричные состояния — зарядово-четными.

32.5. Позитроний. Уравнение Шредингера (32.4.7) можно применить к решению задачи о позитронии, т. е. о связанных состояниях системы электрон — позитрон.

Оператор Гамильтона этой системы состоит из различных по порядку величины членов. Запишем его в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)},$$

где в $\mathbf{H}^{(0)}$ включены члены, не содержащие $1/c^2$:

$$\mathbf{H}^{(0)} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) - \frac{\alpha}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|},$$

а $\mathbf{H}^{(1)}$ пропорционально $1/c^2$.

Задача об энергетических уровнях позитрония может быть решена методом теории возмущений: оператор $\mathbf{H}^{(0)}$ можно рассматривать как невозмущенный гамильтониан, а $\mathbf{H}^{(1)}$ — как возмущение.

Невозмущенная задача чрезвычайно проста, она приводится к задаче об атоме водорода в нерелятивистской квантовой механике. Действительно, воспользуемся системой координат, в которой центр инерции позитрония покоится; тогда

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p},$$

где \mathbf{p} — оператор импульса, соответствующий относительному радиусу-вектору:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Невозмущенное уравнение Шредингера имеет вид

$$\mathbf{p}^2 \Phi = m \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) \Phi.$$

Оно совпадает с уравнением движения электрона в атоме водорода, если в последнем заменить массу электрона на приведенную массу двух электронов, равную $m/2$. Поэтому значения энергии позитрония вдвое меньше

по абсолютной величине соответствующих значений энергии атома водорода, а радиусы орбит — вдвое больше.

Невозмущенные уровни, как хорошо известно, зависят только от главного квантового числа n и не зависят от квантовых чисел j и l , определяющих полный и орбитальный моменты.

Перейдем к рассмотрению тонкой структуры уровней позитрония, т. е. их смещения и расщепления, вызванного энергией возмущения [38].

Запишем $H^{(1)}$ в виде суммы пяти членов

$$H^{(1)} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5, \quad (32.5.1)$$

где V_1, \dots, V_5 определяются ниже формулами (32.5.2) — (32.5.6).

Оператор V_1 представляет собой поправку порядка $1/c^2$ к кинетической энергии частиц:

$$V_1 = -\frac{\mathbf{p}^4}{4m^3c^2}. \quad (32.5.2)$$

Остальные слагаемые содержатся в гамильтониане взаимодействия (32.4.6).

Оператор V_2 объединяет те члены гамильтониана взаимодействия, которые не содержат спиновых операторов (орбитальное взаимодействие):

$$V_2 = \frac{\alpha}{m^2c^2} \left(\pi \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{r} \mathbf{p}^2 - \frac{i}{r^3} \mathbf{r} \mathbf{p} + \frac{1}{2r^3} \mathbf{L}^2 \right), \quad (32.5.3)$$

где \mathbf{L} — оператор орбитального момента, $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$.

В операторе V_3 собраны те члены, которые содержат как оператор импульса, так и спиновые операторы (спин-орбитальное взаимодействие):

$$V_3 = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{m^2c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{L} \mathbf{s}, \quad (32.5.4)$$

где \mathbf{s} — оператор полного спина,

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2).$$

Оператор V_4 описывает взаимодействие спиновых магнитных моментов электрона и позитрона:

$$V_4 = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{m^2c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_k \left(\frac{x_i x_k}{r^2} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha}{m^2c^2} (2\mathbf{s}^2 - 3) \delta(\mathbf{r}). \quad (32.5.5)$$

Наконец, через V_5 обозначен оператор обменного взаимодействия:

$$V_5 = V^{(e)} = \pi \frac{\alpha}{m^2c^2} \mathbf{s}^2 \delta(\mathbf{r}). \quad (32.5.6)$$

Весьма существенным является то обстоятельство, что, как видно из (32.5.2) — (32.5.6), гамильтониан возмущения $H^{(1)}$ содержит операторы, действующие на спиновые переменные частиц, только в виде суммы операторов спинов частиц. Отсюда следует, что уровни позитрония могут быть разделены на синглетные, или уровни паразитрония ($s = 0$), и триплетные, или уровни ортопозитрония ($s = 1$).

Найдем матричные элементы оператора $H^{(1)}$, определяющие тонкую структуру энергетических уровней позитрония.

Операторы V_1 и V_2 диагональны по отношению к орбитальному квантовому числу l и не зависят от спиновых переменных. Описываемое этими операторами взаимодействие снимает вырождение по l . Для определения поправки к энергии уровня нужно вычислить средние значения этих операторов \bar{V}_1 и \bar{V}_2 в невозмущенных состояниях.

При этом для вычисления различных средних значений можно пользоваться известными формулами для атома водорода (с учетом значения приведенной массы):

$$E = \frac{\epsilon_0}{4n^2}, \quad \overline{\delta(r)} = \Phi^2(0) = \delta_{l_0} \frac{1}{8\pi a_0^3 n^3},$$

$$\overline{r^{-1}} = \frac{1}{2a_0 n^2}, \quad \overline{r^{-2}} = \frac{1}{2a_0^2 n^3 (2l+1)},$$

$$\overline{r^{-3}} = \frac{1}{4a_0^3 n^3 (l+1)(2l+1)},$$

где a_0 — боровский (водородный) радиус.

Используя эти формулы, получим

$$\overline{V}_1 = -\frac{1}{4m^2 c^2} \left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 = -\alpha^2 \epsilon_0 \frac{1}{8n^3} \left(\frac{1}{2l+1} - \frac{8}{n} \right); \quad E = \frac{\epsilon_0}{4\pi^2},$$

где ϵ_0 — удвоенная энергия ионизации атома водорода. Аналогичным образом

$$\overline{V}_2 = \alpha^2 \epsilon_0 \left[\frac{1}{4n^3} \delta_{l_0} - \frac{1}{8n^3} \left(\frac{3}{2l+1} - \frac{1}{n} \right) \right].$$

Оператор \mathbf{V}_3 также диагонален относительно l и s . Его собственные значения равны нулю в синглетных состояниях и зависят от значения полного момента j в триплетных состояниях. Воспользовавшись тем, что

$$2\mathbf{Ls} = j(j+1) - l(l+1) - s(s+1),$$

можно сразу написать

$$\overline{V}_3 = \begin{cases} \frac{3}{16} \alpha^2 \epsilon_0 \frac{j(j+1) - l(l+1) - 2}{n^3 l(l+1)(2l+1)}, & s=1, l \neq 0, \\ 0 & s=0, l=0. \end{cases}$$

В операторе \mathbf{V}_4 второе слагаемое диагонально относительно s и отлично от нуля только при $l=0$:

$$\overline{V}_4 = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{m^2 c^2} \frac{1}{4} [2s(s+1) - 3] \Phi^2(0), \quad l=0.$$

Первый член в \mathbf{V}_4 имеет матричные элементы, отличные от нуля только при $l \neq 0$, $s=1$, причем как диагональные, так и недиагональные относительно l . Из законов сохранения полного момента, спинного момента и четности легко заключить, что отличные от нуля недиагональные элементы V_4 связывают состояния с $l = j \pm 1$ при $s=1$ и данном j .

Матричные элементы $\langle l_2 | \mathbf{V}_4 | l_1 \rangle$ (при данном j и $s=1$) имеют вид

$$\langle l | \mathbf{V}_4 | l \rangle = \frac{\alpha^2 \epsilon_0}{8l(l+1)(2l+1)n^3} \begin{cases} 1 & l=j, \\ \frac{-l}{2l+3}, & l=j-1, \\ \frac{-(l+1)}{2l-4}, & l=j+1 \end{cases}$$

$$(l \neq 0, s=1),$$

$$\langle j+1 | \mathbf{V}_4 | j-1 \rangle = \alpha^2 \epsilon_0 \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} \quad \langle j+1 | r^{-3} | j-1 \rangle.$$

Заметим, что при $j = 1$ и $n \leq 3$ недиагональный член обращается в нуль, так что для первых трех главных квантовых чисел сохраняет строгий смысл орбитальное квантовое число.

Наконец, среднее значение V_5 отлично от нуля лишь при $l = 0, s = 1$:

$$\bar{V}_5 = \begin{cases} 0, & s = 0, \\ \frac{\alpha^2}{4n^3} \varepsilon_0 \delta_{l_0}, & s = 1. \end{cases}$$

Таким образом, из всех членов, входящих в $\mathbf{H}^{(1)}$, только \mathbf{V}_4 содержит недиагональные элементы, относящиеся к случаю

$$l = j + 1, l' = j - 1, s = 1.$$

Поэтому состояния, для которых $l = j$ (четность $(-1)^l$), как синглетные, так и триплетные можно классифицировать по их орбитальному моменту.

Обозначим смещение каждого уровня по отношению к его невозмущенному значению через W ($^{2s+1}l_j$) (в скобках указан спектроскопический символ термина). Тогда

$$W(^1j_j) = \alpha^2 \varepsilon_0 \frac{1}{2n^3} \left(\frac{1}{2j+1} - \frac{11}{32n} \right),$$

$$W(^3j_j) = W(^1j_j) - \frac{\alpha^2 \varepsilon_0}{8n^3 j(j+1)(2j+1)}.$$

Термы с четностью $(-1)^{j+1}$ являются суперпозицией невозмущенных термов, для которых $l = j \pm 1$. Для них

$$W = \frac{\bar{V}_+ - \bar{V}_-}{2} \pm \sqrt{\frac{(\bar{V}_+ + \bar{V}_-)^2}{2} + \langle j+1 | \mathbf{V}_4 | j-1 \rangle^2},$$

где

$$\bar{V}_- \equiv \bar{V}(^3(j-1)_j) \equiv W(^1(j-1)_{j-1}) +$$

$$+ \alpha^2 \varepsilon_0 \left[\frac{2}{3n^2} \delta_{j-1,0} + \frac{1}{4n^3 j(2j-1)} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j+1} \right) \right],$$

$$\bar{V}_+ \equiv \bar{V}(^3(j+1)_j) \equiv W(^1(j+1)_{j+1}) - \frac{\alpha^2 \varepsilon_0}{4n^3 (j+1)(2j+3)} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j+1} \right).$$

Полученные формулы позволяют, в частности, определить разность энергий основных состояний орто- и парапозитрония. Зависимость энергии от s при $l = 0$ содержится лишь в формулах для \bar{V}_4 и \bar{V}_5 . Из этих формул следует, что основной уровень ортопозитрония лежит выше основного уровня парапозитрония, причем разность уровней равна

$$\Delta = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \alpha^2 \left(\frac{4}{3} + 1 \right) = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ эв} \quad (32.5.7)$$

(первый член в скобке соответствует магнитному взаимодействию V_4 , а второй — обменному V_5).

Рассмотрим теперь эффект Зеемана в позитронии [38]. Особенности этого эффекта связаны с тем, что орбитальный магнитный момент позитрония равен нулю, а спиновый магнитный момент не пропорционален спиновому моменту количества движения. Действительно, так как в позитронии $[\mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1] = [\mathbf{r}_2 \mathbf{p}_2]$, то оператор орбитального магнитного момента обращается в нуль:

$$\boldsymbol{\mu}_L = \mu_0 ([\mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1] - [\mathbf{r}_2 \mathbf{p}_2]) = 0,$$

а оператор спинового магнитного момента

$$\mu_s = \mu_0 (\sigma_1 - \sigma_2), \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$$

не коммутирует с оператором полного спина

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Поэтому собственные состояния этих операторов не совпадают.

Используя явный вид спиновых волновых функций (т. е. собственных функций операторов \mathbf{s}^2 и s_z), легко убедиться в том, что отличные от нуля матричные элементы $\langle ss_z | \mathbf{V}^{(H)} | s's'_z \rangle$ оператора энергии возмущения позитрона во внешнем магнитном поле H ,

$$\mathbf{V}^{(H)} = -\mu_z H,$$

равны

$$\langle 00 | \mathbf{V}^{(H)} | 10 \rangle = \langle 10 | \mathbf{V}^{(H)} | 00 \rangle = 2\mu_0 H.$$

Таким образом, отличные от нуля матричные элементы $\mathbf{V}^{(H)}$ связывают синглетные состояния с триплетными. Но гамильтониан $\mathbf{H}^{(1)}$, определяющий тонкую структуру уровней позитрония, как мы видели, не содержит таких элементов. Поэтому в слабых магнитных полях, когда

$$\mu_0 H \ll |W_1 - W_0|,$$

где W_1 и W_0 — значения энергии триплетного и синглетного уровней позитрония, смещение уровней, пропорциональное полю, (линейный эффект Зеемана) отсутствует.

В противоположном предельном случае сильного поля, при котором взаимодействием спинов между собой можно пренебречь, стационарными состояниями будут собственные состояния оператора μ_z с собственными функциями

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{10} \pm \chi_{00}).$$

Для основного состояния (а также для S -состояний при $n = 2; 3$) легко написать точную формулу для расщепления в магнитном поле. Волновыми функциями стационарных состояний при этом будут суперпозиции функций χ_{10} , χ_{00} :

$$\chi^{(i)} = C_1^{(i)} \chi_{10} + C_0^{(i)} \chi_{00}, \quad i = 1, 0,$$

где $i = 1$ соответствует состоянию, переходящему в триплетное состояние в отсутствие магнитного поля, а $i = 0$ — состоянию, переходящему в синглетное состояние при $H = 0$.

Коэффициенты $C^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (E^{(i)} - W_1) C_1^{(i)} + \frac{e\hbar}{mc} H C_0^{(i)} &= 0, \\ \frac{e\hbar}{mc} H C_1^{(i)} + (E^{(i)} - W_0) C_0^{(i)} &= 0, \end{aligned} \quad (32.5.8)$$

где $E^{(i)}$ — энергия позитрония в поле H . Мы видим, что

$$E^{(i)} = \frac{W_1 - W_0}{2} \pm \sqrt{\frac{(W_1 - W_0)^2}{4} + (2\mu_0 H)^2}. \quad (32.5.9)$$

Отношение $\left| \frac{C_1^{(i)}}{C_0^{(i)}} \right|^2$ определяет относительный вес триплетного и синглетного состояний в данном стационарном состоянии позитрония в магнитном поле.

Магнитное поле оказывает существенное влияние на вероятность распада позитрония. Обозначим через ω_0 и ω_1 вероятности распада в единицу времени пара- и ортопозитрония. При наличии магнитного поля вероятность распада позитрония в состоянии $\chi^{(i)}$ равна

$$\omega^{(i)} = |C_1^{(i)}|^2 \omega_1 + |C_0^{(i)}|^2 \omega_0.$$

Для состояния $\chi^{(1)}$ (триплетного в отсутствие магнитного поля) даже при малом $C_0^{(i)}$ сильно повышается вероятность распада, так как $\omega_0 \gg \omega_1$ (см. § 30).

Заметим, что экспериментальное исследование влияния магнитного поля на распад позитрония дало возможность измерить разность основных уровней орто- и паразитрония [39].

§ 33. Метод эквивалентных фотонов

33.1. Сравнение диаграмм, содержащих реальный и виртуальный фотоны. Как следует из сравнения формул (28.1.1) и (26.1.3), матричные элементы тормозного излучения и комптоновского рассеяния имеют сходную структуру. Однако между этими процессами существует и более глубокая связь, обусловленная тем, что электромагнитное поле быстрой равномерно движущейся заряженной частицы близко по своим свойствам к полю световой волны.

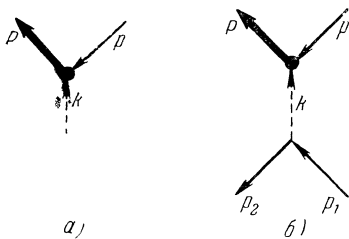


Рис. 33.1.

Сравним два процесса, которым соответствуют диаграммы рис. 33.1. Диаграмма рис. 33.1, а изображает столкновение фотона с некоторой частицей. Фотон обладает 4-импульсом k ($k^2 = 0$), частица — 4-импульсом p ($p^2 = -m^2$). В результате столкновения образуется некоторая система (частица или группа частиц), 4-импульс которой равен $P = p + k$. Диаграмма рис. 33.1, б изображает столкновение той же частицы p (мы обозначаем через p и P также и сами частицы) с другой частицей, импульс которой равен p_1 ($p_1^2 = -m_1^2$). В результате столкновения последняя приобретает импульс p_2 ($p_2^2 = -m_2^2$) и образуется та же система P . Второй процесс можно рассматривать как столкновение частицы p с виртуальным фотоном, 4-импульс которого равен $k = p_1 - p_2$ ($k^2 > 0$). Если величина k^2 достаточно мала, то виртуальный фотон будет мало отличаться от реального, и в этом случае сечение процесса б может быть выражено через сечение процесса а.

Обозначим амплитуду рассеяния для процесса а (с участием реального фотона) через M_r , а для процесса б (с виртуальным фотоном) через M . Согласно диаграммам рис. 33.1

$$M_r = eJ(k), \quad k = P - p, \quad k^2 = 0; \quad (33.1.1)$$

$$M = \frac{1}{k^2} j(k) J(k), \quad k = P - p = p_1 - p_2, \quad k^2 > 0, \quad (33.1.2)$$

где e — 4-вектор поляризации фотона, $J(k) = \langle P | j | p \rangle$ — ток перехода, соответствующий начальному состоянию p и конечному P , и, наконец,

$j(k) = \langle p_2 | j | p_1 \rangle$ — ток перехода, описывающий излучение виртуального фотона второй частицей.

Входящие в (33.1.1) и (33.1.2) токи $J(k)$ отличаются значениями аргумента k . Если k мало, то можно при определенных условиях выразить M через M_r . Выясним эти условия [40].

Воспользуемся с этой целью системой отсчета, в которой первичная частица p покоится ($p = 0$). Пусть в этой системе энергия второй частицы велика ($\varepsilon_1 \gg m_1$), а энергия виртуального фотона мала ($\omega \ll \varepsilon_1$). Тогда ток $j(k)$ (отвечающий испусканию длинноволнового фотона, см. §§ 28 и 34) будет иметь универсальную структуру, не зависящую от спина частицы p_1 ,

$$j(k) = \frac{Ze}{m_1} (p_1 + p_2) = \frac{Ze}{m_1} (2p_1 - k),$$

где Ze — заряд частицы.

Используя свойство поперечности тока, $kj(k) = 0$, получим

$$p_1 k - \varepsilon_1 \omega - \frac{k^2}{2} = 0,$$

откуда при малых k^2

$$\omega = v_1 k_x,$$

где $v_1 = \frac{p_1}{\varepsilon_1}$ и ось x направлена вдоль p_1 .

В силу этого соотношения

$$k^2 = k_x^2 + k_\perp^2 - \omega^2 = \frac{\omega^2 m_1^2}{\varepsilon_1^2} + k_\perp^2,$$

где k_\perp — составляющая k , перпендикулярная p_1 . Отсюда видно, что требование малости k^2 , $k^2 \ll m^2$, означающее также малость k_\perp , $k_\perp^2 \ll m^2$, накладывает значительно более слабое ограничение на ω :

$$\omega \ll \frac{m\varepsilon_1}{m_\perp},$$

допускающее, в частности, случай, когда $\omega \gg m$ или $\omega \sim m$, т. е. $k_\perp \ll \omega$.

Далее из условия

$$kJ = 0$$

следует

$$J_0 = \frac{J_x}{v_1} + \frac{k_\perp}{\omega} J_\perp.$$

Наконец, из поперечности вектора e (который мы можем считать трехмерным, $e_4 = 0$),

$$ek = ek = 0,$$

следует:

$$e_x = -\frac{e_\perp k_\perp}{\omega}.$$

Мы можем теперь сравнить выражение для $j(k)J(k)$, входящее в M :

$$j(k)J(k) = -\frac{2Ze\varepsilon_1}{m_1\omega} \left(k_\perp J_\perp + \frac{m_1^2}{\varepsilon_1^2} \omega J_x \right),$$

с выражением для $eJ(k)$, входящим в M_r ,

$$eJ(k) = e_\perp \left(J_\perp + \frac{k_\perp}{\omega} J_x \right).$$

Естественно считать J_x и J_{\perp} величинами одного порядка, так как вектор J связан только с верхним узлом диаграммы 33.1, б и не связан с направлением p . При этом вторым членом в выражении для $eJ(k)$, содержащим J_x , можно пренебречь, если $k_{\perp} \ll \omega$. В выражении же для $j(k)J(k)$ можно пренебречь членом, содержащим J_x , если $\omega \ll \frac{\varepsilon_1^2}{m_1^2} k_{\perp}$. Это условие не противоречит предыдущим условиям, наложенным на k_{\perp} и ω .

Таким образом,

$$(j(k)J(k))^2 = (eJ(k))^2 \frac{4Ze^2}{m_1^2} \frac{\varepsilon_1^2}{\omega^2} k_{\perp}^2. \quad (33.1.3)$$

При этом предполагаются выполненными условия

$$\omega \ll m \frac{\varepsilon_1}{m_1}, \quad \frac{m_1^2}{\varepsilon_1^2} \omega \ll k_{\perp} \ll m. \quad (33.1.4)$$

Выразим теперь дифференциальные сечения $d\sigma_r$ и $d\sigma$ процессов а и б, через амплитуды M_r и M :

$$d\sigma_r = |M_r|^2 \frac{m^2}{|kp|} d\rho_P,$$

$$d\sigma = |M|^2 \frac{m_1^2 m^2}{\sqrt{(\rho_1 p)^2 - m^2 m_1^2}} d\rho_P \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_2},$$

где

$$d\rho_P = (2\pi)^4 \prod_a \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_a}{2\varepsilon_a}, \quad P = \sum_a p_a.$$

Используя формулы (33.1.1) — (33.1.3), получим

$$d\sigma = d\sigma_r \frac{4Z^2 e^2}{k^4} \frac{\varepsilon_1}{\omega} k_{\perp}^2 \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_2}. \quad (33.1.5)$$

При выводе этого соотношения мы пользовались определенной координатной системой, однако его можно записать в инвариантном виде. Для этого достаточно выразить входящие в (33.1.5) величины ε_1 , ω и k_{\perp} через три инварианта k^2 , P^2 и $p_1 p$:

$$k^2 = k_{\perp}^2 + \frac{m_1^2}{\varepsilon_1^2} \omega^2, \quad P^2 = k^2 - m^2 - 2\omega m, \quad p_1 p = \varepsilon_1 m.$$

Так как

$$\frac{d^3 p_2}{2\varepsilon_2} = d^4 p_2 \delta(p_2^2 - m_1^2)$$

и

$$d^4 p \delta(p_2^2 - m_1^2) \rightarrow \frac{\pi}{4 \sqrt{(\rho_1 p)^2 - m_1^2 m^2}} d(k^2) d(P^2)$$

(здесь подразумевается интегрирование по азимуту), то мы получим окончательно

$$d\sigma = d\sigma_r \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \left(k^2 - \frac{(P^2 + m^2) m_1^2}{4(\rho_1 p)^2} \right) \frac{d(k^2) d(P^2)}{k^4 |P^2 + m^2|}. \quad (33.1.6)$$

Условиям (33.1.4) также можно придать инвариантный вид:

$$k^2 \ll m^2, \quad |P^2| \ll |p p_1|, \quad |P^2 + m^2| \gg k^2. \quad (33.1.7)$$

33.2. Число эквивалентных фотонов. Для приложений удобно вернуться к переменным ω , k_{\perp} . Замечая, что

$$d(P^2) d(k^2) = 4mk_{\perp} d\omega dk_{\perp},$$

получим

$$d\sigma = d\sigma_r \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{k_{\perp}^3 dk_{\perp}}{[k_{\perp}^2 + \omega^2 (1 - v^2)]^2}. \quad (33.2.1)$$

В этой формуле все величины выражены через характеристики виртуального фотона k_{\perp} и ω . Единственным посторонним параметром является величина v — скорость частицы p_1 в системе покоя частицы p .

Сечению, проинтегрированному по импульсам отдачи p_2 , отвечает интегрирование формулы (33.2.1) по $dk_{\perp}d\omega$. Обозначим это сечение через $d\bar{\sigma}$:

$$d\bar{\sigma} = d\rho_P \int \left(\frac{d\sigma}{d\rho_P d\omega dk_{\perp}} \right) d\omega dk_{\perp}.$$

Считая, что $d\sigma_r$ зависит от ω , но не от k_{\perp} , можно представить $d\bar{\sigma}$ в виде

$$d\bar{\sigma} = d\rho_P \int \frac{d\sigma_r}{d\rho_P} n(\omega) d\omega,$$

где

$$n(\omega) d\omega = \frac{2Z^2\alpha}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{k_m} \frac{k_{\perp}^3 dk_{\perp}}{[k_{\perp}^2 + \omega^2(1-v^2)]^2} \quad (33.2.2)$$

(верхний предел k_m будет определен далее).

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Для нахождения сечения некоторого процесса, вызванного столкновением быстрой частицы с покоящейся частицей ($p = 0$), можно заменить быструю частицу совокупностью фотонов со спектром $n(\omega) d\omega$; при этом, если мы знаем сечение соответствующего процесса, вызванного столкновением фотона с покоящейся частицей, то достаточно умножить это сечение на число эквивалентных фотонов $n(\omega) d\omega$ в интервале $d\omega$ и проинтегрировать произведение по частотам. Этот метод называется методом эквивалентных фотонов [41].

Покажем, что спектр эквивалентных фотонов можно получить также, исходя из классического рассмотрения электромагнитного поля быстро движущейся заряженной частицы.

Четырехмерный потенциал поля, создаваемого равномерно движущейся частицей, определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \square A &= -Ze v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \\ \square A_0 &= -Ze \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \end{aligned}$$

где \mathbf{v} — скорость частицы. Раскладывая потенциалы в интеграл Фурье, получим следующие выражения для электрического и магнитного полей:

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{-iZe}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathbf{k} - \mathbf{v}(k_v)}{k_y^2 + k_z^2 + k_x^2(1-v^2)} e^{ik_y y + ik_z z + ik_x(x-vt)} d^3k,$$

$$H(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{v}, E(\mathbf{r}, t)]$$

(ось x направлена параллельно скорости \mathbf{v} , скорость света считается равной единице).

Сделав замену

$$k_x \rightarrow \xi k_x, \quad k_y \rightarrow k_y, \quad k_z \rightarrow k_z,$$

где $\xi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, можно записать выражения для полей в виде

$$E_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \frac{-iZe\xi}{(2\pi)^3} \int \frac{k_{\perp}}{k^2} e^{ik_{\perp} r + ik_x \xi(x-vt)} d^3k,$$

$$E_x(\mathbf{r}, t) = \frac{-iZe}{(2\pi)^3} \int \frac{k_x}{k^2} e^{ik_{\perp} r + ik_x \xi(x-vt)} d^3k, \quad (33.2.3)$$

$$H(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{v}, E(\mathbf{r}, t)],$$

где E_{\perp} и E_x — перпендикулярная и параллельная составляющие E (относительно направления скорости \mathbf{v}) и

$$\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}\mathbf{v})}{v^2}.$$

Будем предполагать, что

$$\xi \gg 1.$$

Тогда очевидно, что

$$|E_{\perp}| \gg |E_x|,$$

т. е. поле практически является поперечным, как и в случае световой волны. Формулы (33.2.3) определяют разложение этого поля на плоские монохроматические волны, распространяющиеся вдоль направления \mathbf{v} , с частотами $\omega = \xi k_x v \approx \xi k_x$.

Определим число эквивалентных фотонов, соответствующих этим волнам. Найдем для этого полный поток электромагнитной энергии вдоль направления \mathbf{v} :

$$\Pi = \int ds \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]_x dt,$$

где $ds = dy dz = 2\pi b db$ — элемент площади в плоскости yz и $b = \sqrt{y^2 + z^2}$ (величина b называется прицельным параметром).

Подставляя сюда разложения полей (33.2.3), найдем

$$\begin{aligned} \Pi &= \int ds \int_{-\infty}^{\infty} dt (E_y^2 + E_z^2) = \\ &= \frac{Z^2 e^2 \xi^2}{(2\pi)^6} \int dy dz dt d^3 k' d^3 k' \frac{(-k_y k'_y - k_z k'_z)}{k^2 k'^2} e^{iy(k_y + k'_y) + iz(k_z + k'_z) + i\xi(x - vt)(k_x + k'_x)} = \\ &= \frac{Z^2 e^2 \xi}{(2\pi)^3 v} \int \frac{k_y^2 + k_z^2}{k^4} d^3 k \approx \frac{Z^2 e^2 \xi}{(2\pi)^3} \int \frac{k_{\perp}^2}{(k_{\perp}^2 + k_x^2)^2} d^3 k. \end{aligned}$$

Приравнявая полный поток Π энергии эквивалентных фотонов

$$\Pi = \int_0^{\infty} \hbar \omega n(\omega) d\omega$$

и замечая, что

$$d^3 k = 2\pi k_{\perp} dk_{\perp} dk_x = 2\pi k_{\perp} dk_{\perp} \frac{d\omega}{\xi},$$

получим формулу (33.2.2) для $n(\omega)$:

$$n(\omega) d\omega = \frac{2\alpha Z^2}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{k_m} \frac{k_{\perp}^3 dk_{\perp}}{[k_{\perp}^2 + \omega^2(1 - v^2)]^2}.$$

Верхний предел в этом интеграле нельзя считать равным бесконечности, так как интеграл при $k_m \rightarrow \infty$ расходится. Эта расходимость связана с расходимостью интеграла, определяющего поток энергии Π , при малых значениях прицельного параметра b .

Нижний предел для b , а следовательно, и верхний предел для k_{\perp} , может быть оценен следующим образом.

Для того чтобы в квантовой механике можно было говорить об определенном значении параметра столкновения b , поперечные размеры Δy волнового пакета, связанного с частицей, должны быть, очевидно, значительно меньше b , $\Delta y \ll b$.

Но, согласно принципу неопределенности, $\Delta y > \frac{\hbar}{\Delta p_y}$, где Δp_y — неопределенность поперечной составляющей импульса частицы, и, следовательно,

$$b \gg \frac{\hbar}{\Delta p_y}.$$

С другой стороны, поперечная составляющая скорости частицы должна быть значительно меньше скорости света, так как иначе боковое смещение частицы за время столкновения, которое равно по порядку величины $\frac{b}{v}$, $v \sim 1$, не будет малым по сравнению с b . Поэтому $\Delta p_y \ll m$, где m — масса частицы, и, следовательно,

$$b \gg \frac{\hbar}{m}.$$

Мы видим, таким образом, что нижний предел для b можно считать равным $\frac{1}{\eta m}$, а верхний предел для k_{\perp} — равным

$$k_m = \eta m,$$

где η — некоторая численная константа порядка единицы (напомним, что мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$).

Обратим внимание на то обстоятельство, что при рассмотрении действия поля ядра на электрон под m следует, очевидно, понимать массу более легкой частицы, т. е. электрона.

Так как интеграл, определяющий спектр эквивалентных фотонов, расходится при $k_m \rightarrow \infty$ логарифмически, то точное знание константы η несущественно: действительно, малые вариации η будут оказывать малое влияние на $n(\omega)$, если только $\omega \ll \xi m$. Мы будем предполагать выполненным последнее условие (оно является условием применимости метода эквивалентных фотонов) и получим тогда из (33.2.2) следующую формулу для числа эквивалентных фотонов в интервале частот ω , $\omega + d\omega$:

$$n(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \ln \left(\frac{\eta \xi m}{\omega} \right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (33.2.4)$$

где m — масса электрона, $\xi = (1 - v^2)^{-1/2}$, v — скорость частицы с зарядом Ze , поле которой заменяется действием фотонов, и η — численный коэффициент порядка единицы.

Для того чтобы можно было пользоваться этой формулой, т. е. методом эквивалентных фотонов, нужно, чтобы частица, поле которой заменяется действием фотонов, двигалась со скоростью, близкой к скорости света, т. е. величина ξ должна быть большой,

$$\xi \gg 1.$$

Кроме того, необходимо, чтобы в исследуемой задаче главную роль играли фотоны, энергия которых мала по сравнению с ξm :

$$\omega \ll \xi m.$$

33.3. Тормозное излучение быстрого электрона в поле ядра. Найдем, пользуясь методом эквивалентных фотонов, сечение тормозного излучения при столкновении быстрого электрона с ядром. Этот процесс в системе

отсчета K^* , в которой до столкновения электрон покоился, можно рассматривать как комптоновское рассеяние эквивалентных фотонов поля ядра электроном.

Сечение рассеяния фотона электроном $d\sigma_s^*$ в системе K^* определяется формулой (26.3.8)

$$d\sigma_s^*(\omega_1^*, \omega_2^*) = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\omega_2^*}{\omega_1^*} \right)^2 \left(\frac{\omega_1^*}{\omega_2^*} + \frac{\omega_2^*}{\omega_1^*} - \sin^2 \vartheta^* \right) d\omega^*,$$

где ω_1^* и ω_2^* — частоты первичного и рассеянного фотонов в системе K^* , связанные между собой соотношением

$$\omega_2^* = \frac{\omega_1^*}{1 + \frac{\omega_1^*}{m} (1 - \cos \vartheta^*)}$$

(ϑ^* — угол рассеяния). Сечение тормозного излучения $d\sigma_r^*$ в системе K^* связано с сечением рассеяния соотношением

$$d\sigma_r^*(\omega_2^*) = \int_{\omega_1^* \min}^{\omega_1^* \max} n(\omega_1^*) d\omega_1^* d\sigma_s^*(\omega_1^*, \omega_2^*), \quad (33.3.1)$$

где $\omega_1^* \min$ и $\omega_1^* \max$ — минимальная и максимальная частоты первичного фотона, соответствующие заданной частоте ω_2^* рассеянного фотона.

Так как сечение рассеяния представляет собой релятивистский инвариант, то для определения $d\sigma_r$ в системе K , в которой ядро покоится, нужно лишь сечение, определяемое формулой (33.3.1), выразить через частоту ω_2 в системе K , соответствующую частоте ω_2^* в системе K^* . Связь между частотами дается формулой Доплера

$$\omega_2 = \omega_2^* (1 - v \cos \vartheta^*) \xi.$$

Вводя обозначения

$$\xi_1 = \frac{\omega_1^*}{m}, \quad \xi_2 = \frac{\omega_2}{m\xi}$$

и замечая, что

$$n(\omega_1^*) d\omega_1^* = \frac{2Z^2\alpha}{\pi} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \ln \frac{\eta\xi}{\xi_1},$$

$$\cos \vartheta^* = \frac{1 - \xi_2 \left(1 + \frac{1}{\xi_1}\right)}{v - \xi_2},$$

$$d\sigma_s = \pi r_0^2 \frac{d\xi_1}{\xi_1} \left\{ 1 - \xi_2 + \frac{1}{1 - \xi_2} + \frac{\xi_2}{\xi_1(1 - \xi_2)} \left[\frac{\xi_2}{\xi_1(1 - \xi_2)} - 2 \right] \right\},$$

перепишем $d\sigma_r$ в виде

$$d\sigma_r(\omega_2) = 2r_0^2 Z^2 \alpha d\xi_2 \int_{\xi_2}^{2\xi_2\xi_2^2} \frac{d\xi_1}{\xi_1^2} \ln \frac{\eta\xi}{\xi_1} \times \\ \times \left\{ 1 - \xi_2 + \frac{1}{1 - \xi_2} + \frac{\xi_2}{\xi_1(1 - \xi_2)} \left[\frac{\xi_2}{\xi_1(1 - \xi_2)} - 2 \right] \right\}, \quad (33.3.2)$$

где верхний и нижний пределы интегрирования по ξ_1 соответствуют $\vartheta^* = 0$ и $\vartheta^* = \pi$.

Главный вклад в интеграл (33.3.2) вносит, очевидно, область ξ_1 вблизи нижнего предела. Вычисляя с логарифмической точностью, т. е. считая

$\ln \frac{\eta_1^{\xi_1}}{\xi_1}$ большой величиной и вынося ее за знак интеграла при значении

$\xi_1 = \frac{\xi_2}{2(1-\xi_2)}$, получим

$$d\sigma_r(\omega_2) = 4r_0^2 Z^2 \alpha \frac{d\omega_2}{\omega_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{2}{3} \right) \ln \frac{2\eta_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{m\omega}, \quad (33.3.3)$$

где ε_1 и ε_2 — значения энергии электрона в начальном и конечном состояниях. Формула (33.3.3) справедлива, если $\varepsilon_1 \gg m$, $\varepsilon_2 \gg m$. Она совпадает, как и следовало ожидать, с формулой (28.4.3) (с логарифмической точностью).

33.4. Излучение при столкновении двух электронов. Найдем теперь, пользуясь методом эквивалентных фотонов, излучение при столкновении электрона с электроном.

Если быстрый электрон, который мы будем называть электроном f , сталкивается с покоящимся электроном, который будем называть электроном r , то для определения сечения происходящего при этом тормозного излучения по методу эквивалентных фотонов нужно, во-первых, рассмотреть рассеяние эквивалентных фотонов поля быстрого электрона f на покоящемся электроне r и, во-вторых, перейдя в систему отсчета, связанную с электроном f , рассмотреть рассеяние эквивалентных фотонов поля электрона r на электроне f .

Второй из этих процессов не отличается от рассмотренного выше процесса рассеяния эквивалентных фотонов поля ядра на электроне в системе отсчета, связанной с электроном, — процесса, к которому сводится тормозное излучение электрона в поле ядра. Покажем, что вклад, вносимый первым процессом в сечение тормозного излучения при столкновении двух электронов, значительно меньше вклада, вносимого вторым процессом.

Предполагая, что энергии фотонов ω_1 и ω_2 до и после рассеяния в первом процессе значительно больше m , мы можем исходить из следующей формулы для сечения комптоновского рассеяния:

$$d\sigma_s = \pi r_0^2 m \frac{d\omega_2}{\omega_1^2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)$$

(здесь не выписано слагаемое, содержащее $\sin \vartheta$, которым можно пренебречь, так как в релятивистской области рассеяние происходит главным образом на малые углы, $\vartheta \sim \frac{m}{\omega}$). Используя выражение (33.2.4) для числа эквивалентных фотонов, можно представить вклад, вносимый в сечение излучения первым процессом, в виде

$$d\sigma_r^I = 2r_0^2 \alpha m d\omega_2 \int_{\omega_1 \min}^{\omega_1 \max} \frac{d\omega_1}{\omega_1^2} \ln \frac{\varepsilon}{\omega_1} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right), \quad (33.4.1)$$

где ε — энергия электрона f и $\omega_1 \min$ и $\omega_1 \max$ — пределы, в которых лежит ω_1 при заданной частоте ω_2 . Эти пределы могут быть найдены из формулы

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{1 - \frac{\omega_2}{m} (1 - \cos \vartheta)}$$

и равны, очевидно,

$$\omega_1 \min = \omega_2, \quad \omega_1 \max = \infty.$$

Хотя метод справедлив только при $\omega_1 \ll \varepsilon$, но так как подынтегральное выражение в (33.4.1) быстро уменьшается с ростом ω_1 , то верхний предел можно считать равным бесконечности.

Главную роль в интеграле (33.4.1) играет область вблизи нижнего предела. Интегрируя с логарифмической точностью, так же как и в (33.3.2), найдем

$$d\sigma_r^I(\omega_2) = \frac{8}{3} r_0^2 \alpha m \frac{d\omega_2}{\omega_2^2} \ln \frac{\varepsilon}{\omega_2}. \quad (33.4.2)$$

Полагая в формуле (33.3.3) для сечения тормозного излучения электрона $Z = 1$, мы получим вклад, вносимый вторым из перечисленных выше процессов в сечение излучения при столкновении двух электронов:

$$d\sigma_r^{II}(\omega_2) = 4r_0^2 \alpha \frac{d\omega_2}{\omega_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{2}{3} \right) \ln \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m\omega_2}. \quad (33.4.3)$$

Сравнение $d\sigma_r^I$ и $d\sigma_r^{II}$ показывает, что

$$d\sigma_r^I \sim \frac{m}{\omega_2} d\sigma_r^{II} \ll d\sigma_r^{II}.$$

Это соотношение связано с тем, что в обоих интегралах (33.3.2) и (33.4.1) главный вклад вносят части областей интегрирования вблизи нижних пределов, нижний же предел в (33.3.2), равный $\frac{m\omega_2}{2\xi}$, значительно меньше нижнего предела в (33.4.2), равного ω_2 .

33.5. Образование пары фотоном в поле ядра. Применим теперь метод эквивалентных фотонов к вычислению сечения образования пар. Начнем с определения сечения образования пары фотоном в поле ядра.

Пусть на покоящееся в системе K ядро налетает фотон с энергией $\omega = \xi m$, $\xi \gg 1$. Перейдем в систему отсчета K' , в которой ядро движется навстречу фотону со скоростью v , равной

$$v = \sqrt{1 - \frac{4}{\xi^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\xi}{2} \gg 1.$$

В этой системе энергия фотона равна

$$\omega' = \omega \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} = \xi m \frac{\xi}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\xi^2}} \right) \approx m.$$

Действие поля ядра в системе K' мы заменим действием фотонов, спектр которых, согласно (33.2.4), определяется формулой

$$n(\omega_0) d\omega_0 = \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{d\omega_0}{\omega_0} \ln \frac{\eta \xi m}{\omega_0}.$$

Тогда процесс образования пары фотоном в поле ядра можно будет рассматривать как образование пары при столкновении падающего фотона с фотонами этого спектра. Иными словами, сечение образования пары фотоном в поле ядра равно

$$\sigma = \int n(\omega_0) d\omega_0 \sigma_{\gamma\gamma}, \quad (33.5.1)$$

где $\sigma_{\gamma\gamma}$ — сечение образования пара двумя фотонами, даваемое формулой (30.3.7). В качестве пределов интегрирования в (33.5.1) нужно взять m и ξm . Вводя вместо ω_0 переменную $x = \left(1 - \frac{m}{\omega_0}\right)^{1/2}$, перепишем (33.5.1) в виде

$$\sigma = 2r_0^2 \alpha Z^2 \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{\xi}}} dx \cdot x \ln [\eta \xi (1-x^2)] \left\{ (3-x^4) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + 2x(x^2-2) \right\}.$$

Предполагая, что $\ln \xi \gg 1$, и удерживая только главные члены (порядка $\ln \xi$), получим в результате интегрирования

$$\sigma = \frac{28}{9} \alpha Z^2 r_0^2 \ln \xi. \quad (33.5.2)$$

33.6. Образование пары при столкновении двух быстрых частиц. Рассмотрим еще процесс образования пары при столкновении двух быстрых заряженных частиц [42]. Относительную скорость частиц v будем считать достаточно большой, так что

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \gg 1.$$

В системе отсчета K_1 , в которой одна из частиц (A_1) покоится, распределение фотонов, представляющих поле второй частицы (A_2), определяется формулой

$$n_2(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} \alpha Z_2^2 \ln \frac{\eta \xi m}{\omega} \frac{d\omega}{\omega},$$

где $Z_2 e$ — заряд частицы A_2 .

Процесс рождения пары при столкновении частиц A_1 и A_2 можно рассматривать как образование пары при столкновении фотонов этого спектра с покоящейся частицей A_1 . Сечение рождения пары при столкновении фотона с частицей A_1 равно, согласно (33.5.2),

$$\sigma_\gamma(\omega) \approx \frac{28}{9} r_0^2 \alpha Z_1^2 \ln \frac{\eta' \omega}{m}, \quad \eta' \sim 1,$$

где ω — энергия пары и $Z_1 e$ — заряд частицы A_1 . Поэтому интересующее нас сечение рождения пары при столкновении частиц A_1 и A_2 можно представить в виде

$$\sigma = \int \sigma_\gamma(\omega) n_2(\omega) d\omega.$$

Максимальная частота фотонов поля частицы A_2 равна по порядку величины ξm . Поэтому в качестве пределов в этом интеграле следует взять $2m$ и ξm :

$$\sigma = \int_{2m}^{\xi m} \frac{2}{\pi} \alpha Z_2^2 \ln \frac{\xi m}{\omega} \frac{d\omega}{\omega} \frac{28}{9} r_0^2 \alpha Z_1^2 \ln \frac{\eta' \omega}{m} \approx \frac{28}{27} \frac{r_0^2}{\pi} \alpha^2 Z_1^2 Z_2^2 (\ln f \xi)^3, \quad f \sim 1. \quad (33.6.1)$$

§ 34. Рассеяние электронов адронами

34.1. Электромагнитная вершина адрона. Несмотря на то, что основные свойства адронов определяются сильными взаимодействиями, их взаимодействие с электронами может осуществляться только через посредство электромагнитного поля. Поэтому мы вправе применять для рассмотрения столкновений адронов с электронами методы квантовой электродинамики. В первом приближении теории возмущений это взаимодействие описывается матрицей рассеяния второго порядка

$$\mathbf{S}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int \int j_\alpha(y) D_c(y-x) j_\alpha(x) d^4y d^4x,$$

где j — полный оператор тока, $j = j^e + j^\mu + j^h$ (см. § 16.7).

Выделяя в $\mathbf{S}^{(2)}$ члены, содержащие произведение адронного j^h и электронного j^e токов, получим

$$\mathbf{S}^{(2)} = - \int \int j_{\alpha}^h(y) j_{\alpha}^e(x) D_c(y-x) d^4y d^4x.$$

Матричные элементы этого оператора имеют вид

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = - \int \int j_{fi}^h(y) j_{fi}^e(x) D_c(y-x) d^4y d^4x, \quad (34.1.1)$$

где j_{fi}^h и j_{fi}^e — соответствующие токи переходов,

$$j_{fi}^h \equiv \langle f | j^h | i \rangle, \quad j_{fi}^e \equiv \langle f | j^e | i \rangle.$$

Мы знаем, что электронный ток j^e имеет матричные элементы, соответствующие либо переходу электрона из одного состояния в другое, либо образованию пары. Здесь мы будем рассматривать только переходы электрона из одного состояния в другое.

Адронный ток имеет матричные элементы, соответствующие превращению одного адрона в другой (например, переход ядра из одного состояния в другое), а также превращению адрона в несколько адронов (например, испускание нуклоном мезона). Здесь мы будем рассматривать только упругие столкновения, т. е. переходы, при которых начальное и конечное состояния соответствуют одному и тому же адрону. Таким образом, индексы i, f означают как для электронного, так и для адронного тока только различные импульсы и различные поляризации.

Используя явный вид функции $D_c(x)$ (см. § 6.3), легко получить из (34.1.1)

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2} j^h(k) j^e(-k), \quad (34.1.2)$$

где $j^h(k)$ и $j^e(-k)$ — фурье-образы токов, т. е. токи перехода в импульсном представлении

$$j(k) = \int j_{fi}(x) e^{-ikx} d^4x, \quad j_{fi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int j(k) e^{ikx} d^4x$$

(индексы i, f для краткости опущены).

Электронный ток $j^e(-k)$ можно записать в явном виде, исходя из (7.5.2):

$$j_{\alpha}^e(-k) = (2\pi)^4 \delta(p_2 - p_1 - k) \frac{e}{2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \bar{u}(p_2) \gamma_{\alpha} u(p_1), \quad (34.1.3)$$

где p_1, p_2 — 4-импульсы электрона в начальном и конечном состояниях. Явное же выражение для адронного тока мы не можем написать. Поэтому мы выделим в нем только естественные нормировочные факторы, аналогичные соответствующим факторам в выражении для $j^e(k)$:

$$j_{\alpha}^h(k) = (2\pi)^4 \delta(p'_1 - p'_2 - k) \frac{e}{2\sqrt{\epsilon'_1\epsilon'_2}} h_{\alpha}(k). \quad (34.1.4)$$

В число выделенных множителей входит δ -функция, выражающая сохранение 4-импульса в процессе рассеяния, и заряд электрона как параметр, характеризующий масштаб электромагнитных взаимодействий (p'_1 и p'_2 — 4-импульсы адрона в начальном и конечном состояниях).

Вектор $h_{\alpha}(k)$, который, так же как и $j_{\alpha}^h(k)$, мы будем называть адронным током, должен линейно содержать амплитуды начального и конечного состояний адрона. Обозначив эти амплитуды через u'_1 и u'_2 , можно записать

адронный ток в виде

$$h_\alpha(k) = i\bar{u}'_2 \Gamma_\alpha(k) u'_1, \tag{34.1.5}$$

где \bar{u}'_2 — некоторая линейная комбинация из компонент u'^*_2 (в случае спина половина $\bar{u}'_2 = u'^*_2 \gamma_4$) и $\Gamma_\alpha(k)$ — некоторая матрица, которую будем называть вершинной функцией. (Она является функцией не только k , но и 4-импульсов начального и конечного состояний, причем $k = p'_1 - p'_2$.)

Формулу (34.1.2) можно иллюстрировать диаграммой, изображенной на рис. 34.1, смысл которой очевиден. Адрон и электрон обмениваются виртуальным фотоном. Поглощению фотона электроном отвечает матрица γ_α , испусканию его адроном — вершинная функция Γ_α . Отличие диаграммы рис. 34.1 от диаграммы рис. 31.3, изображающей рассеяние электрона мюоном, т. е. частицей, не подверженной сильным взаимодействиям, сводится к замене γ_α на $\Gamma_\alpha(k)$ (матрице γ_α соответствует на диаграмме точка, функции $\Gamma_\alpha(k)$ — кружок). Подставив выражения для $j^e(-k)$ и $j^h(k)$ в формулу (34.1.2), получим

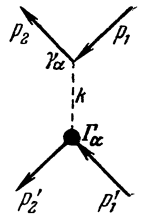


Рис. 34.1.

$$\langle f | \mathbf{S}^{(2)} | i \rangle = \frac{ie^2 (2\pi)^4}{4 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon'_1 \varepsilon'_2}} \delta(p_1 + p'_1 - p_2 - p'_2) M,$$

где

$$M = \frac{1}{k^2} (\bar{u}_2 i \gamma_\alpha u_1) h_\alpha(k), \tag{34.1.6}$$

$$k = p_2 - p_1 = p'_1 - p'_2, \quad u_{1,2} = u(p_{1,2}).$$

34.2. Формфакторы. Адронный ток $h_\alpha(k)$ представляет собой векторную функцию векторов p'_1, p'_2 ($k = p'_1 - p'_2$) и параметров, характеризующих поляризацию адрона. Вид этой функции, как уже отмечалось, существенно зависит от свойств сильных взаимодействий; в настоящее время не существует теории сильных взаимодействий, и поэтому теоретически мы не можем определить $h_\alpha(k)$ и найти сечение рассеяния электрона адроном. Наоборот, эксперименты по рассеянию электронов служат для эмпирического определения характера адронного тока.

Однако общую структуру вектора $h_\alpha(k)$ можно установить, связав его с «естественными» векторами, определяемыми кинематикой процесса. Тем самым вектор $h_\alpha(k)$ будет определяться некоторыми инвариантными функциями, которые называются *электромагнитными формфакторами* адрона. Так как единственной инвариантной независимой переменной является k^2 , то формфакторы являются функцией только одной переменной k^2 . Итак, мы будем записывать адронный ток в виде

$$h_\alpha(k) = \sum_a f_a(k^2) v_{a\alpha}, \tag{34.2.1}$$

где f_a — формфакторы и $v_{a\alpha}$ — некоторые векторы (кинематические векторы).

Так как адронный ток удовлетворяет уравнению непрерывности, то вектор $h_\alpha(k)$ должен удовлетворять условию поперечности

$$k_\alpha h_\alpha(k) = 0. \tag{34.2.2}$$

Число формфакторов в (34.2.1) равно числу линейно независимых векторов v_a , удовлетворяющих условию

$$k_\alpha v_{a\alpha} = 0. \tag{34.2.3}$$

Найдем векторы v_α в двух простейших, но наиболее важных случаях: для адронов со спинами 0 и 1/2.

В случае спина 0 амплитуды u'_1, u'_2 представляют собой скаляры (или псевдоскаляры) и могут считаться равными единице. В нашем распоряжении имеется поэтому только два вектора p'_1 и p'_2 или

$$k = p'_1 - p'_2, \quad p' = p'_1 + p'_2.$$

Ясно, что $p_1'^2 + k^2 = -4m'^2$, где m' — масса адрона. Один из этих векторов — вектор p' — удовлетворяет условию поперечности

$$p'k = 0.$$

Поэтому в случае адрона со спином 0 ток $h_\alpha(k)$ можно представить в виде

$$h_\alpha(k) = f(k^2) p'_\alpha \quad (34.2.4)$$

или

$$i\Gamma_\alpha = f(k^2) p'_\alpha. \quad (34.2.5)$$

В случае спина 1/2 амплитуды u'_1, u'_2 представляют собой биспиноры. Легко убедиться, что из билинейных комбинаций \bar{u}'_2 и \bar{u}'_1 и 4-векторов k и p' можно составить всего четыре вектора, а именно

$$(\bar{u}'_2 u'_1) p'_\alpha, (\bar{u}'_2 \gamma_\alpha u'_1), (\bar{u}'_2 \sigma_{\alpha\beta} u'_1) k_\beta, (\bar{u}'_2 u'_1) k_\alpha,$$

где $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)$. Первые три из этих векторов поперечны: первый потому, что $p'k = 0$; поперечность второго обеспечивается уравнениями Дирака

$$(i\hat{p}'_1 + m') u'_1 = 0, \quad \bar{u}'_2 (i\hat{p}'_2 + m') = 0,$$

в силу которых $\bar{u}'_2 \hat{k} u'_1 = 0$; наконец, третий вектор поперечен благодаря антисимметрии матриц $\sigma_{\alpha\beta}$. Таким образом, эти три вектора могут входить в выражение для $h_\alpha(k)$. Однако они не независимы. Действительно, используя соотношения коммутации матриц γ_α , легко показать, что

$$\bar{u}'_2 (2im' \gamma_\alpha + \sigma_{\alpha\beta} k_\beta - p'_\alpha) u'_1 = 0. \quad (34.2.6)$$

Поэтому остается только два независимых фактора.

Мы можем записать вершинную функцию $\Gamma_\alpha(k)$ адрона со спином 1/2 в одной из трех эквивалентных форм:

$$i\Gamma_\alpha = f_1(k^2) i\gamma_\alpha + \frac{\hat{f}_2(k^2)}{2m'} \sigma_{\alpha\beta} k_\beta, \quad (34.2.7)$$

$$i\Gamma_\alpha = f_1(k^2) \frac{p'_\alpha}{2m'} + \frac{f_M(k^2)}{2m'} \sigma_{\alpha\beta} k_\beta, \quad (34.2.7')$$

$$i\Gamma_\alpha = \frac{\hat{f}_2(k^2)}{2m'} p'_\alpha - f_M(k^2) i\gamma_\alpha, \quad (34.2.7'')$$

причем

$$\hat{f}_2(k^2) = f_1(k^2) + f_M(k^2).$$

При установлении общей структуры адронного тока мы использовали требования релятивистской инвариантности (включая P -инвариантность), соотношение (34.2.1) и условие поперечности (34.2.2). Учтем теперь эрмитовость оператора тока:

$$\langle f | \mathbf{h} | i \rangle = \langle i | \mathbf{h} | f \rangle^*, \quad \langle f | h_0 | i \rangle = \langle i | h_0 | f \rangle^*, \quad (h_0 \equiv -ih_4). \quad (34.2.8)$$

Из условия эрмитовости следует, что определенные выше формфакторы $f(k^2)$, $f_1(k^2)$, $f_2(k^2)$, $f_M(k^2)$ вещественны. Действительно, при замене $i \overleftrightarrow{\leftarrow} f$, т. е. замене индексов частиц $1 \overleftrightarrow{\leftarrow} 2$, введенные выше кинематические векторы v_α переходят в комплексно-сопряженные векторы, т. е. $v \rightarrow v^*$, $v_0 \rightarrow v_0^*$. Если, например, $v = p = p_1 + p_2$, то v и v_0 действительны. Если $v_\alpha = i\bar{u}_2 \gamma_\alpha u_1$, то

$$(i\bar{u}_2 \gamma u_1)^* = i\bar{u}_1 \gamma u_2, (\bar{u}_2 \gamma_4 u_1)^* = \bar{u}_1 \gamma_4 u_2$$

и т. д.

Таким образом, из (34.2.8) следует соотношение

$$f_\alpha(k^2) = f_\alpha^*(k^2). \quad (34.2.9)$$

Если использовать дополнительно требование T -инвариантности, то можно показать, что соотношение (34.2.9) будет справедливо для частиц с произвольным спином.

34.3. Сечение рассеяния. Запишем теперь дифференциальное сечение рассеяния электрона адронам

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{4} |M|^2 \frac{d\omega}{\omega^2},$$

где M — матричный элемент, определяемый формулой (34.1.5), $d\omega$ — элемент телесного угла и ω — полная энергия в системе центра инерции.

В случае неполяризованных электронов это выражение приобретает вид

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{4} [k^2(hh^*) + |hp|^2] \frac{1}{k^4} \frac{d\omega}{\omega^2}, \quad (34.3.1)$$

где

$$hh^* = \mathbf{h}\mathbf{h}^* - h_0 h_0^*, \quad p = p_1 + p_2,$$

(заметим, что $p^2 + k^2 = -4m^2$).

Если спин адрона равен нулю, то, согласно (34.2.5),

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{4} [k^2 p'^2 + (pp')^2] \frac{f^2(k^2)}{k^4} \frac{d\omega}{\omega^2}. \quad (34.3.2)$$

Случай спина $1/2$ имеет наибольшее значение, так как он включает рассеяние электрона протоном и нейтроном. Для вычисления $|M|^2$ удобно использовать выражение (34.2.7") для вершинной функции. В случае неполяризованных частиц мы получим [43]

$$|M|^2 = |f_M|^2 [-k^2(4m'^2 - 4m^2 - k^2) + (pp')^2] - \\ - \left(\frac{p'^2}{4m'^2} f_2^2 + 2f_2 f_M \right) [k^2 p'^2 + (pp')^2]$$

и

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 d\omega}{4\omega^2} \frac{1}{k^4} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{4m'^2}} \left\{ f_E^2 [(pp')^2 + p'^2 k^2] + \right. \\ \left. + \frac{k'^2}{4m'^2} f_M [(pp')^2 + p'^2(4m^2 - k^2)] \right\}, \quad (34.3.3)$$

где

$$f_E = f_1 + \frac{k^2}{4m'^2} f_2, \\ f_M = f_2 - f_1, \quad (34.3.4)$$

Мы видим, что если в качестве двух формфакторов выбрать f_E и f_M , то в сечение будут входить только их квадраты. Эти формфакторы называют соответственно электрическим и магнитным (к вопросу об их интерпретации мы вернемся ниже).

Рассмотрим тот случай, когда энергия электрона ε в системе покоя адрона мала по сравнению с массой адрона m'

$$\frac{k^2}{4m'^2} \ll 1, \quad pp' \approx -4m'\varepsilon, \quad \omega \approx m';$$

при этом система центра инерции совпадает с системой покоя адрона ($p = p_1 + p_2$, $p' = p'_1 + p'_2$, $p^2 + 4m^2 = p'^2 + 4m'^2 = -k^2$).

Формула (34.3.3) приобретает тогда вид

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{k^4} [4\varepsilon^2 - k^2] f_E^2(0) d\omega. \quad (34.3.5)$$

Эта формула совпадает с формулой для сечения рассеяния электрона в кулоновском поле (11.5.2), если считать в ней, что

$$f_E(0) = f_1(0) = Z.$$

Таким образом, значение электрического формфактора при $k^2 = 0$ есть заряд частицы (в единицах e).

Если $f_E(0) = Z = 0$ и $\varepsilon \ll m'$, то формула (34.3.3) дает

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 d\omega}{4m'^2} \frac{4(\varepsilon^2 - m^2) + k^2}{k^2} f_M^2(0) \quad (34.3.6)$$

или

$$d\sigma = \alpha\mu^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} + 1 \right) d\omega, \quad (34.3.7)$$

где $\mu^2 = \frac{\alpha}{(2m')^2} f_M^2(0)$. Величина $d\sigma$ совпадает с сечением рассеяния электрона в поле магнитного момента. Отсюда следует, что значение магнитного формфактора при $k^2 = 0$ представляет собой магнитный момент частицы (измеренный в ее магнетонах).

В заключение этого раздела вернемся к формуле (34.3.3) и запишем ее в системе покоя начального адрона. Если k^2 не мало по сравнению с m'^2 , то $\varepsilon \gg m$ (при $m' \gg m$) и

$$\frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{d\Omega}{m'^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2\varepsilon}{m'} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2},$$

где $d\Omega$, ε и ϑ — элемент телесного угла, энергия и угол рассеяния в системе покоя адрона,

$$k^2 = \frac{4\varepsilon^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 + \frac{2\varepsilon}{m'} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}},$$

$$pp' = \frac{-4m'\varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{m'} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)}{1 + \frac{2\varepsilon}{m'} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Используя эти соотношения, можно представить $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2} \frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \frac{d\Omega}{\left(1 + \frac{2\varepsilon}{m'} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)} \times \\ \times \left[\frac{f_E^2(k^2)}{1 + \frac{k^2}{4m'^2}} + \frac{k^2}{4m'^2} f_M^2(k) \left(\frac{1}{1 + \frac{k^2}{4m'^2}} + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right]. \quad (34.3.8)$$

Формула (34.3.8) (называемая *формулой Розенблюта*) используется для определения формфакторов нуклона из опытов по рассеянию электронов нуклонами.

34.4. Электромагнитная структура частицы. Введением инвариантных формфакторов $f_\alpha(k^2)$ по существу исчерпывается феноменологическое описание адронов в квантовой электродинамике. Однако для наглядной интерпретации их полезно вернуться к координатному представлению токов перехода.

Начнем с простейшего случая частицы со спином 0, для которого адронный ток в импульсном представлении имеет вид (34.2.4)

$$h_\alpha(k) = f(k^2) p'_\alpha.$$

Так как $p' = p'_1 + p'_2$ является времениподобным 4-вектором ($p'^2 \leq -4m'^2$), то можно выбрать систему отсчета, в которой $\mathbf{p}' = 0$. В этой системе (ее называют *системой Брейта*) $p'_0 = 2\varepsilon$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $k_0 = 0$, $\mathbf{k} = 2\mathbf{p}'_1 = -2\mathbf{p}'_2$ и ток имеет особенно простой вид

$$h_0(k) = f(k^2) p'_0, \quad \mathbf{h}(k) = 0. \quad (34.4.1)$$

Таким образом, мы можем интерпретировать $h_0(k)$ как фурье-образ стационарного распределения неподвижных зарядов. Учитывая (34.1.4), получим плотность тока перехода в координатном представлении

$$\rho_{fi}(x) = ef(k^2) e^{ikr}, \quad \mathbf{j}_{fi}(x) = 0. \quad (34.4.2)$$

Сравним это выражение с матричным элементом плотности заряда в квантовой механике $\rho_{fi} = e\psi_f^* \psi_i$. Если начальная и конечная волновые функции представляют собой плоские волны, то $\rho_{fi}(\mathbf{r}) \sim e^{ikr}$. Этому выражению соответствует плотность заряда частицы

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r}) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int e^{ikr} d^3k.$$

В нашем случае мы получим, согласно (34.4.2), следующее выражение для плотности заряда адрона:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int f(k^2) e^{ikr} d^3k. \quad (34.4.3)$$

Таким образом, наглядно адрон можно себе представить как частицу конечных размеров со сферически симметричным распределением заряда, определяемым формулой (35.4.3). Формфактор $f(k^2)$ представляет собой фурье-образ этого распределения. В этом смысле говорят о пространственной электромагнитной структуре частицы. Заметим, что этой интерпретации не следует придавать слишком буквальный смысл, так как $\rho(\mathbf{r})$ не является функцией, заданной в определенной физической системе отсчета, — каждому значению \mathbf{k} соответствует своя система отсчета. Однако в нере-

лятивистском случае (малые k) система Брейта совпадает с системой покоя частицы. Поэтому интерпретация, основанная на преобразовании (34.4.3), является естественным релятивистским обобщением понятия неточечной частицы.

Если определить полный заряд частицы

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) d^3x,$$

то из (34.4.3) следует, что

$$Q = ef(0). \quad (34.4.4)$$

Мы видели выше, что к такому же заключению приводит анализ формулы для сечения рассеяния при малых k^2 .

В качестве характеристики «размеров» частицы естественно использовать средний квадрат радиуса распределения заряда

$$\bar{r}^2 = \int \rho(\mathbf{r}) r^2 d^3x.$$

Из (34.4.3) следует, что

$$\frac{1}{6} \bar{r}^2 = f'(0) \quad (34.4.5)$$

(штрих означает дифференцирование по k^2).

Если частица не имеет электрического заряда («нейтральная» частица), то, как мы видим из (34.4.4), это означает лишь, что $f(0) = 0$. Такая частица способна испускать и поглощать виртуальные фотоны и обладает определенным распределением заряда в том смысле, о котором говорилось выше. «Нейтральность» означает, что ее взаимодействие с длинноволновыми фотонами стремится к нулю при $k \rightarrow 0$. Для того чтобы частица была «истинно нейтральной», необходимо обращение в нуль формфактора при всех значениях k^2 . Это имеет место в том случае, когда частица обладает определенной зарядовой четностью. Так как оператор тока $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ зарядово-нечетен, то его матричные элементы $\langle f | \mathbf{j}(\mathbf{x}) | i \rangle$ относительно двух состояний с одинаковой зарядовой четностью равны нулю. Отметим, что и «истинно нейтральный» адрон взаимодействует с электромагнитным полем. Действительно, произведение двух операторов тока $\mathbf{j}(\mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{y})$ является зарядово-четным оператором и его матричные элементы могут связывать два состояния частицы с определенной зарядовой четностью. В этом случае может происходить испускание или поглощение двух фотонов, т. е. процесс более высокого порядка.

Перейдем теперь к рассмотрению частицы со спином 1/2. Из (34.1.5) и (34.2.7) мы получим в системе Брейта

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{f_M(k^2)}{2m'} [k\bar{u}'_2 \Sigma u'_1], \\ h_0(k) &= f_1(k^2) \frac{p'_0}{2m'} \bar{u}'_2 u'_1 + f_M(k^2) \frac{k}{2m'} \bar{u}'_2 \alpha u'_1 = \\ &= f_1(k^2) \bar{u}'_2 \gamma_4 u'_1 + f_2(k^2) \frac{k}{2m'} \bar{u}'_2 \alpha u'_1. \end{aligned} \quad (34.4.6)$$

Используя уравнения Дирака, легко убедиться, что если

$$p'_1 = -p'_2 = \frac{k}{2},$$

то

$$\bar{u}'_2 \alpha k u'_1 = \bar{u}'_2 (p'_0 - 2m' \gamma_4) u'_1; \quad \bar{u}'_2 \gamma_4 u'_1 = \frac{2m'}{p'_0} \bar{u}'_2 u'_1.$$

Поэтому $h_0(k)$ можно записать в виде

$$h_0(k) = f_E(k^2) \frac{2m'}{\rho_0} \bar{u}_2' u_1' = f_E(k^2) \bar{u}_2' \gamma_4 u_1', \quad (34.4.7)$$

где f_E определено согласно (34.3.4).

Величину $h_0(k)$ можно интерпретировать как фурье-образ стационарного распределения заряда

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{e}{(2\pi)^3} (\bar{u}_2' \gamma_4 u_1') \int f_E(k^2) e^{ikr} d^3k,$$

а $h(k)$ — как фурье-образ стационарного распределения соленоидальных токов адрона. Эти токи можно связать с распределением магнитного дипольного момента $\mathbf{I}(x)$,

$$\mathbf{j}(x) = \text{rot } \mathbf{I}(x),$$

где, согласно (34.4.6),

$$\mathbf{I}(x) = \frac{e}{2m'} (\bar{u}_2' \boldsymbol{\Sigma} u_1') \int f_M(k^2) e^{ikr} d^3k. \quad (34.4.8)$$

Распределение заряда определяется формфактором f_E , а распределение магнитного момента независимой величиной — магнитным формфактором f_M . Отметим, что коэффициентом в интеграле в (34.4.8) является магнетон частицы $\mu_0' = \frac{e}{2m'}$. Полный магнитный момент частицы определится как

$$\boldsymbol{\mu} = \int \mathbf{I}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \mu_0' f_M(0) \bar{u}_2' \boldsymbol{\Sigma} u_1'.$$

Эта величина определяет сечение рассеяния электрона незаряженной частицей при малых k^2 .

Наряду с электрическим радиусом (34.4.5)

$$\frac{1}{6} \bar{r}_E^2 = f_E'(0)$$

частица со спином 1/2 независимо характеризуется также магнитным радиусом

$$\frac{1}{6} \bar{r}_M^2 = f_M'(0). \quad (34.4.9)$$

34.5. Нарушение С-инвариантности. Процессы, которые мы до сих пор рассматривали, удовлетворяют требованию инвариантности относительно пространственной инверсии (P), обращения времени (T) и зарядового сопряжения (C). В действительности строгим законом природы является лишь инвариантность относительно сильного отражения, т. е. CPT -преобразования. Хотя нарушения C -, P - и T -инвариантности малы, имеет смысл рассмотреть общую структуру тока перехода произвольной частицы при наличии таких нарушений [44].

Для этого, как и выше в § 34.4, мы воспользуемся системой Брейта и найдем общий вид пространственных распределений плотности заряда $\rho(\mathbf{r})$ и тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ адрона. Эта задача аналогична задаче о стационарном распределении заряда и тока в некоторой среде, изучаемой в макроскопической электродинамике. Эти распределения удобно записать в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) - \text{div}_i \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{I}(\mathbf{r}), \quad (34.5.1)$$

где $\rho_0(\mathbf{r})$ — некоторая скалярная функция координат, а $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ — произвольные векторные функции координат («электрическая» и «магнитная» поляризации).

Выясним, какие векторы можно построить из величин, имеющих в нашем распоряжении. Из билинейных комбинаций амплитуд начального и конечного состояний частицы со спином s можно построить $2s + 1$ независимых неприводимых тензоров. Путем дифференцирования по координатам из них можно образовать векторы. Эти векторы делятся на два класса. Векторы, образованные из тензоров нечетного ранга, являются аксиальными и t -нечетными (т. е. меняющими знак при обращении времени), а векторы, образованные из тензоров четного ранга, — полярными и t -четными. Векторы первого класса мы будем обозначать через $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, а векторы второго класса — через $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Их можно записать в следующем виде:

$$a_i(\mathbf{r}) = g_1(\mathbf{r}) s_i + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (g_3(\mathbf{r}) s_{ijk}) + \dots, \quad (34.5.2)$$

$$v_i(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (g_2(\mathbf{r}) Q_{ij}) + \dots, \quad (34.5.3)$$

где s_i — компоненты спина, Q_{ij} — компоненты квадрупольного момента, s_{ijk} — моменты высших порядков и $g_1(\mathbf{r})$, $g_2(\mathbf{r})$, $g_3(\mathbf{r})$, ... — некоторые скалярные функции.

Векторы \mathbf{P} и \mathbf{I} можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{a}^{(0)}, \\ \mathbf{I} &= \mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{v}^{(1)} + \text{rot } \mathbf{a}^{(2)} + \text{rot } \mathbf{v}^{(2)}, \end{aligned} \quad (34.5.4)$$

где $\mathbf{a}^{(0)}$, $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ — векторы вида (34.5.2), а $\mathbf{v}^{(0)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ — векторы вида (34.5.3).

Используя (34.5.4) и (34.5.1), легко проанализировать поведение ρ и \mathbf{j} при P - и T -преобразованиях. Результаты представлены в таблицах, в которых левые верхние клетки соответствуют наличию T - и P -инвариантности, правые — нарушению P -инвариантности, нижние — нарушению T -инвариантности. Плотность $\text{div } \mathbf{v}^{(0)}$ связана с распределением квадрупольного и других моментов, плотность $\text{div } \mathbf{a}^{(0)}$ — с дипольным электрическим моментом и др., плотность тока $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{a}^{(1)}$ — с магнитным моментом и т. д.

	Скаляр	Псевдоскаляр
t -четный	$\rho_0, \text{div } \mathbf{v}^{(0)}$	—
t -нечетный	—	$\text{div } \mathbf{a}^{(0)}$

	Полярный вектор	Аксиальный вектор
t -нечетный	$\text{rot } \mathbf{a}^{(1)}$	$\text{rot rot } \mathbf{a}^{(2)}$
t -четный	$\text{rot rot } \mathbf{v}^{(2)}$	$\text{rot } \mathbf{v}^{(1)}$

Свойства соответствующих плотностей и токов относительно C -преобразования можно получить из условия CPT -инвариантности, которое требует, чтобы после всех трех преобразований 4-вектор тока менял знак. Результат можно представить в виде следующей таблицы:

\underline{c}	\underline{P}	\underline{T}	$\underline{\kappa}$	$\underline{\varkappa}$	\underline{T}
$\underline{\kappa}$	\underline{P}	$\underline{\varkappa}$	\underline{c}	$\underline{\varkappa}$	$\underline{\kappa}$

Здесь подчеркнутая буква обозначает наличие, а зачеркнутая — нарушение соответствующей инвариантности тех членов в ρ и \mathbf{j} , которые помещены в аналогичных клетках в предыдущих таблицах.

Обратим внимание на случай нарушения C -инвариантности при сохранении P -инвариантности. Ему отвечает нижняя левая клетка таблиц, т. е.

$$\rho_0 = 0, \quad \mathbf{j} = \text{rot rot } \mathbf{v}^{(2)}. \quad (34.5.5)$$

Для существования вектора $\mathbf{v}^{(2)}$, согласно (34.5.3), необходимо, чтобы частица имела квадрупольный момент. Это возможно при $s \geq 1$. Заметим, что из (34.5.5) следует, что соответствующий формфактор (фурье-образ \mathbf{j}) при малых k ведет себя как k^2 .

Рассмотрим случай «истинно нейтральных» частиц [45], т. е. частицы, тождественных своим античастицам. Таким частицам можно приписать определенную зарядовую четность, $C = \pm 1$. Пара одинаковых истинно нейтральных частиц имеет поэтому зарядовую четность $C = 1$.

Так как для фотона $C = -1$, то превращение такой пары в виртуальный фотон возможно только при нарушении C -инвариантности. Этому отвечает в соответствии с приведенными выше таблицами

$$\mathbf{j} = \text{rot rot } \mathbf{v}^{(2)} + \text{rot rot } \mathbf{a}^{(2)}, \quad \rho = 0. \quad (34.5.6)$$

Первый член соответствует случаю сохранения четности (P -инвариантность). Он отличен от нуля только при спине $s \geq 1$. Второй член отвечает случаю несохранения четности. Наличие тока у нейтральных частиц делало бы возможным, например, образование пары истинно нейтральных частиц при аннигиляции электрона с позитроном в процессе второго порядка, т. е. через посредство одного виртуального фотона.

§ 35. Взаимодействие электронов с ядрами

35.1. Формфакторы и мультипольные моменты. В предыдущем параграфе было дано феноменологическое описание упругих столкновений электронов с адронами. Такое же феноменологическое описание можно, очевидно, провести и для неупругих столкновений, в результате которых происходит возбуждение адронной системы, т. е. переход в состояние с большей массой, или обратный переход. Если ограничиться случаем, когда в результате столкновения образуется только один адрон, то такой процесс может быть описан, как и выше, диаграммой рис. 34.1 и матричным элементом (34.1.2). Тем же способом, как это было сделано для упругого рассеяния, можно убедиться, что число формфакторов $f_\alpha(k^2)$, определяющих ток, при условии P -, C - и T -инвариантности равно $2s + 1$, где s — значение меньшего из спинов s_1, s_2 начального и конечного адронов.

Особенно простой вид приобретает структура адронного тока при малых k . Так как каждый из векторов v_α , входящих в (34.2.1), определенным образом зависит от k , то при малых k можно оставить лишь один вектор v_α , содержащий низшие степени компонент k :

$$h_\alpha(k) = f(0) v_\alpha. \quad (35.1.1)$$

Общий вид векторов v , в зависимости от спина и четности начального и конечного состояний, был определен в § 25.5 в системе покоя начальной частицы. Однако в § 25 рассматривалось излучение реального фотона, т. е. случай $k^2 = 0$. Теперь нас интересует испускание виртуального фотона, $k^2 \neq 0$. Но при малых k ток (35.1.1) определяется значением формфак-

тора при $k^2 = 0$, т. е. совпадает с током, определенным для случая излучения.

На основании результатов § 25.5 мы можем представить адронный ток в следующей форме:

для EL -перехода

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\frac{2L+1}{L+1}} q_{LM}^{(e)} \omega \kappa^{L-1} Y_{L, L-1, M}(\mathbf{v}), \\ h_0 &= \sqrt{\frac{L}{L+1}} q_{LM}^{(e)} \kappa^L Y_{LM}(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (35.1.2)$$

для ML -перехода

$$h = q_{LM}^{(m)} \kappa^L Y_{LLM}(\mathbf{v}), \quad h_0 = 0 \quad (35.1.3)$$

и для $E0$ -перехода

$$h = q_0 \omega \mathbf{k}, \quad h_0 = q_0 k^2, \quad (35.1.4)$$

где $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{\kappa}$, $\kappa = |\mathbf{k}|$ и $q_{LM}^{(e)}$, $q_{LM}^{(m)}$, q_0 — некоторые постоянные.

§ 35.2. Возбуждение ядер электронами. Рассмотрим столкновение электрона с ядром, в результате которого ядро переходит из низшего энергетического состояния в высшее [46]. Если заряд ядра невелик, то электрон можно считать свободным и столкновение описывать диаграммой рис. 34.1. Энергию возбуждения мы будем считать малой по сравнению с массой ядра, и пренебрежем поэтому отдачей ядра. В этом случае ток перехода адрона можно представить в виде

$$j^{(h)}(k) = 2\pi \delta(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 - \omega) eh(k), \quad (35.2.1)$$

где $h(k)$ определяется формулами (35.1.2) — (35.1.4). Величины q_{LM} (т. е. $q_{LM}^{(e)}$, $q_{LM}^{(m)}$) и q_0 следующим образом выражаются через мультипольные моменты, введенные в § 25:

$$q_{LM} = \sqrt{\frac{4\pi(L+1)}{L(2L+1)}} \frac{Q_{LM}}{(2L-1)!}, \quad q_0 = \frac{\sqrt{4\pi}}{6} Q_0. \quad (35.2.2)$$

Матричный элемент рассматриваемого процесса имеет вид

$$\langle f | \mathbf{S} | i \rangle = \frac{i e^2}{2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} 2\pi \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega) M, \quad (35.2.3)$$

где

$$M = \frac{\bar{u}_2 \hat{h} u_1}{k^2}.$$

Отсюда следует, что дифференциальное сечение рассеяния в случае неполяризованных электронов равно

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{d^3 p_2 \delta(\varepsilon_2 + \omega - \varepsilon_1)}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2 v_1} \frac{(k^2 (hh^*) + (hp)(h^*p))}{k^4} \\ &(h \equiv (\mathbf{h}, ih_0), h^* \equiv (\mathbf{h}^*, ih_0^*)). \end{aligned} \quad (35.2.4)$$

Здесь p_1 и p_2 — 4-импульсы электронов в начальном и конечном состояниях, $k = p_1 - p_2$, $p = p_1 + p_2$, $v_1 = \frac{|p_1|}{\varepsilon_1}$. Удобно, заменив $d^3 p_2$ на $d^3 k = \kappa^2 d\kappa d\varphi d\cos\vartheta$, устранить δ -функцию интегрированием по $d\vartheta$. Тогда

$$d\sigma = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\kappa d\kappa d\varphi}{p_1^2} \frac{|k^2 (hh^*) + (hp)(h^*p)|}{k^4}. \quad (35.2.5)$$

При этом ϑ , т. е. угол между \mathbf{p}_1 и \mathbf{k} , фиксирован соотношением

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1^2 + k^2 - 2\mathbf{p}_1\mathbf{k}. \quad (35.2.6)$$

Входящие в (35.2.5) токи определяются выражениями (35.1.2) — (35.1.4).

Рассмотрим сначала случай магнитного перехода. Тогда, согласно (35.1.3),

$$hh^* = |q_{LM}^{(M)}|^2 \kappa^{2L} |Y_{LLM}(\mathbf{v})|^2,$$

$$hp = \mathbf{h}\mathbf{p} = 2q_{LM}^{(M)} \kappa^L \mathbf{p}_1 Y_{LLM}(\mathbf{v}).$$

Так как вектор $Y_{LLM}(\mathbf{v})$ перпендикулярен \mathbf{v} , то интегрирование по $d\varphi$ дает

$$\int |p_1 Y_{LLM}|^2 d\varphi = \pi p_1^2 |Y_{LLM}|^2 \sin^2 \vartheta,$$

где ϑ определяется формулой (35.2.6). Таким образом, мы получим

$$d\sigma = \frac{\alpha}{2} \frac{\kappa d\kappa}{p_1^2} |q_{LM}^{(M)}|^2 |Y_{LLM}|^2 \frac{\kappa^{2L}}{(\kappa^2 - \omega^2)^2} (\kappa^2 - \omega^2 + 2p_1^2 \sin^2 \vartheta). \quad (35.2.7)$$

Просуммируем это выражение по конечным и усредним по начальным ориентациям спина ядра. Для этого представим (ср. (25.6.4)) $q_{LM}^{(M)}$ в виде

$$q_{LM}^{(M)} \equiv \langle j_2 m_2 | q_{LM}^{(M)} | j_1 m_1 \rangle = q^{(M)} C_{j_2 m_2 L M}^{j_1 m_1},$$

проведем суммирование по m_1 , m_2 , M и отнесем результаты к числу начальных состояний $2j_1 + 1$. Полученное дифференциальное сечение будем обозначать тоже через $d\sigma$. Используя свойства нормировки коэффициентов Клебша — Гордана, а также соотношение $\sum_M |Y_{LM}|^2 = \frac{2L+1}{4\pi}$, получим

$$\frac{1}{2j_1+1} \sum_{m_1 m_2} |q_{LM}^{(M)}|^2 |Y_{LLM}|_{(M=m_1-m_2)}^2 = \frac{|q^{(M)}|^2}{2j_1+1} \sum_M |Y_{LM}|^2 = \frac{1}{4\pi} |q^{(M)}|^2.$$

Единственная величина, зависящая от свойств ядра, которая входит в (35.2.7), — это приведенный мультипольный момент перехода $q^{(M)}$. Но эта же величина определяет вероятность излучения ядра (см. (25.3.4) и (35.2.2)),

$$\omega_\gamma = \frac{\omega^{2L+1}}{8\pi^2} |q^{(M)}|^2.$$

Поэтому отношение сечения возбуждения $d\sigma$ к вероятности излучения не содержит никаких параметров, зависящих от структуры ядра.

Мы запишем $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = \pi \alpha \omega_\gamma \frac{d\kappa}{\omega^2 p_1^2} \Phi_L(\kappa, \omega), \quad (35.2.8)$$

где, согласно (35.2.7) и (35.2.6),

$$\Phi_L(\kappa, \omega) = \frac{\kappa^{2L-1}}{2\omega^{2L-1}} \left(1 + \frac{2(p_1^2 + p_2^2)}{k^2} - \frac{4m^2\omega^2}{k^4} \right), \quad k^2 = \kappa^2 - \omega^2.$$

Для получения полного сечения возбуждения надо проинтегрировать (35.2.8) по $d\kappa$ в пределах от $\kappa_{\min} = |\mathbf{p}_1| - |\mathbf{p}_2|$ до $\kappa_{\max} = |\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2|$. В результате мы получим

$$\sigma = \frac{\pi \alpha \omega_\gamma}{\omega^2 p_1^2} \Phi_L(\varepsilon_2, \omega), \quad (35.2.9)$$

где

$$\Phi_L(\varepsilon_2, \omega) = \int_{\kappa_{\min}}^{\kappa_{\max}} \varphi_L(\kappa, \omega) d\kappa$$

(развернутое выражение для функций Φ_L будет приведено ниже, § 35.4).

Перейдем теперь к случаю электрического перехода. Из (35.1.2) следует, что

$$hh^* = |q_{LM}^{(e)}|^2 \kappa^{2L-2} \left(\frac{2L+1}{L+1} \omega^2 |Y_{L, L-1, M}(\mathbf{v})|^2 - \frac{L}{L+1} \kappa^2 |Y_{LM}(\mathbf{v})|^2 \right), \quad (35.2.10)$$

$$hp = q_{LM}^{(e)} \kappa^{L-1} \frac{2}{\sqrt{L+1}} (\omega p_1 Y_{L, L-1, M}(\mathbf{v}) \sqrt{2L+1} - \varepsilon_1 \kappa \sqrt{L} Y_{LM}(\mathbf{v})).$$

Подставляя эти выражения в (35.2.4), получим аналогично предыдущему случаю

$$d\sigma = \pi \alpha \omega_\gamma \frac{d\kappa}{\omega^2 p_1^2} \Psi_L(\kappa, \omega) \quad (35.2.11)$$

и

$$\sigma = \frac{\pi \alpha \omega_\gamma}{\omega^2 p_1^2} \Psi_L(\varepsilon_2, \omega), \quad (35.2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_L(\kappa, \omega) = & \frac{1}{L+1} \left(\frac{\kappa}{\omega} \right)^{2L-1} \left\{ \left(-L + \frac{(3L+1)\omega^2 + 4L\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{4L\omega^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{k^4}}{k^2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^2 \left(-\frac{3L+1}{2} + \frac{2(L+1)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - m^2) - 2L\omega^2}{k^2} + \frac{\omega^2(2L\varepsilon_1\varepsilon_2 - (L+1)m^2)}{k^4} \right) \right\} \end{aligned} \quad (35.2.13)$$

(развернутое выражение для функции $\Psi_L(\varepsilon_2, \omega)$ приведено в § 35.4).

Рассмотрим, наконец, случай монополюсного ($E0$ -) перехода.

Используя (35.1.4), получим

$$hh^* = \frac{|q_0|^2}{4\pi} \kappa^2 k^2, \quad (35.2.14)$$

$$(h^*p)(hp) = \frac{|q_0|^2}{4\pi} k^4 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2.$$

Подстановка этих выражений в (35.1.4) дает

$$d\sigma = \frac{\alpha}{8\pi} |q_0|^2 \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - \kappa^2}{p_1^2} \kappa d\kappa. \quad (35.2.15)$$

Интегрируя по $d\kappa$, получим

$$\sigma = \frac{\alpha}{2\pi} |q_0|^2 \frac{|p_2|}{|p_1|} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + m^2). \quad (35.2.16)$$

В этом случае сечение σ нельзя выразить через соответствующую вероятность излучения. Для оценки величины сечения естественно предположить, что монополюсный момент q_0 имеет тот же порядок величины, что и электрический квадрупольный момент (см. § 25.5).

35.3. Конверсия на атомной оболочке. Полученные выше формулы описывают не только возбуждение ядра, но и обратный процесс — переход ядра из возбужденного в низшее энергетическое состояние, индуцированный столкновением с электроном. Наибольшее практическое значение имеет индуцированный переход, вызванный взаимодействием ядра с электроном атомной оболочки. Он называется *внутренней конверсией гамма-лучей*; вероятность его может быть сравнимой или даже превосходить вероятность спонтанного излучения фотона.

Если заряд ядра мал, а разность уровней достаточно велика, то можно пренебречь энергией связи электрона и влиянием кулоновского поля ядра на волновые функции начального и конечного состояний электрона. В этом случае вероятность конверсии [47] определяется непосредственно формулами предыдущего раздела, если положить в них $p_1 = 0$ и перейти от сечения σ к вероятности ω :

$$\omega = |\psi(0)|^2 (v_1 \sigma)_{v_1 \rightarrow 0} = \frac{1}{\pi a^3} (v_1 \sigma)_{v_1 \rightarrow 0}, \quad (35.3.1)$$

где $\psi(\mathbf{r})$ — волновая функция электрона, a — радиус электронной оболочки. Из (35.2.4) следует

$$d\omega = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{|p_2|}{ma^3} \frac{(k^2 (hh^*) + (hp)(h^*p))}{k^4} d\omega_2, \quad (35.3.2)$$

причем

$$\begin{aligned} p &= p_2 = \mathbf{k}, & p_0 &= m + \varepsilon_2 = 2m + \omega, & \varepsilon_2 &= m + \omega, \\ k^2 &= p^2 - \omega^2 = 2m\omega, & \kappa^2 &= \omega^2 + 2m\omega. \end{aligned}$$

В случае ML -перехода

$$\begin{aligned} hp &= h\mathbf{k} = 0, \\ hh^* &= |q_{LM}^{(M)}|^2 |Y_{LLM}(\mathbf{v})|^2. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (35.3.2) и вводя вероятность излучения, найдем коэффициент конверсии магнитного перехода:

$$\frac{\omega}{\omega_\gamma} = \frac{\alpha}{m^2 a^3 \omega} \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{L+\frac{1}{2}}. \quad (35.3.3)$$

В случае EL -перехода, согласно (35.2.10), при $p_1 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int hh^* d\omega &= |q_{LM}^{(E)}|^2 \kappa^{2L-2} \left(\omega^2 - \frac{L}{L+1} k^2\right), \\ \int (h^*p)(hp) d\omega &= |q_{LM}^{(E)}|^2 \kappa^{2L} \frac{4Lm^2}{L+1}, \end{aligned}$$

и коэффициент конверсии определяется формулой

$$\frac{\omega}{\omega_\gamma} = \frac{\alpha}{(ma)^3} \left(1 + \frac{L}{L+1} \frac{m^2}{\omega^2}\right) \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{L-\frac{1}{2}}. \quad (35.3.4)$$

Из этих формул видно, что коэффициент конверсии велик при больших L и малых ω . Заметим, однако, что в случае малых энергий нельзя пренебрегать влиянием кулоновского поля ядра на волновые функции электрона, что делалось выше.

В случае $E0$ -перехода, согласно (35.2.14),

$$\frac{hh^*k^2 + (hp)(h^*p)}{k^4} = 2m(2m + \omega) \frac{q_0^2}{4\pi}$$

и вероятность перехода равна

$$\omega_{E0} = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{|q_0|^2 \omega^2}{a^3} \left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{3/2}. \quad (35.3.5)$$

35.4. Конверсия с образованием пар. При $\omega > 2m$ возможен и другой процесс конверсии: образование электронно-позитронной пары при переходе ядра из возбужденного в низшее энергетическое состояние. Если, как

это делалось всюду выше, не учитывать влияния поля ядра на состояние электронов, то коэффициент инверсии с образованием пар легко получить, используя результаты § 35.2 [48].

Этот процесс определяется тем же матричным элементом (35.2.3), если заменить в нем u_1 на биспинорную амплитуду состояния электрона с отрицательной частотой, отвечающей позитрону с импульсом p_1 . Таким образом, все вычисления будут отличаться от вычислений § 35.2 заменой $p_1 \rightarrow -p_1$:

$$k = -(p_1 + p_2), \quad p = p_2 - p_1. \quad (35.4.1)$$

Отметим, что, в отличие от случая возбуждения ядра электроном, k является теперь времениподобным вектором ($k^2 < 0$).

Вероятность перехода с образованием пары определится формулой

$$dw = \frac{e^2}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega) |M|^2, \quad (35.4.2)$$

где

$$M = \frac{\bar{u}(p_2) \hat{h} u(-p_1)}{k^2}$$

и, следовательно,

$$|M|^2 = -2(k^2 h h^* - (ph)(ph^*)). \quad (35.4.3)$$

Заменяя, как и ранее, $d^3 p_2$ на $d^3 k = \kappa^2 d\kappa d\varphi d\cos\vartheta$, получим аналог формулы (35.2.5)

$$dw = \frac{\alpha}{(2\pi)^4} \kappa d\kappa d\varphi d\varepsilon_1 d\omega_1 \frac{(-k^2 h h^* + (ph)(ph^*))}{k^4}. \quad (35.4.4)$$

Для случая магнитного перехода получим отсюда после интегрирования по $d\varphi$ и $d\omega_1$

$$\frac{dw}{w_\gamma} = \frac{\alpha}{\pi} d\kappa d\varepsilon_1 \Phi_L(\kappa, \omega), \quad (35.4.5)$$

где $\Phi_L(\kappa, \omega)$ — та же функция, которая входит в (35.2.8).

Аналогично для случая электрического перехода получим

$$\frac{dw}{w_\gamma} = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{d\kappa d\varepsilon_1}{\omega^2} \Psi_L(\kappa, \omega), \quad (35.4.6)$$

где $\Psi_L(\kappa, \omega)$ определяется формулой (35.2.13).

В случае $E0$ -перехода

$$dw = \frac{\alpha}{(2\pi)^3} |q_0|^2 \kappa d\varepsilon_1 d\kappa [\kappa^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2]. \quad (35.4.7)$$

Проинтегрировав (35.4.5) — (35.4.7) по κ в пределах от $||p_1| - |p_2||$ до $|p_1| + |p_2|$, получим дифференциальные (по отношению к энергии позитрона) коэффициенты конверсии

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{w_\gamma}\right)_{ML} &= -\frac{\alpha}{\pi} \frac{d\varepsilon_1}{\omega^2} \Phi_L(\varepsilon_2, \omega), \\ \left(\frac{dw}{w_\gamma}\right)_{EL} &= -\frac{\alpha}{\pi} \frac{d\varepsilon_1}{\omega^2} \Psi_L(\varepsilon_2, \omega), \end{aligned} \quad (35.4.8)$$

$$dw_{E0} = \frac{\alpha}{2\pi^2} |q_0^2| d\varepsilon_1 (\varepsilon_1 \varepsilon_2 - m^2) |p_1| |p_2| = \frac{\alpha}{\pi} \frac{d\varepsilon_1}{\omega^2} \Psi_0 \left| \frac{q_{E0}}{q_{E2}} \right|^2,$$

где Φ_L и Ψ_L — те же функции, которые входят в сечения возбуждения ядер электронами (35.2.9), (35.2.12).

Приведем теперь явные выражения функций Φ_L, Ψ_L при $L = 1, 2, 3$:

$$\Phi_1 = -\frac{p_1^2 + p_2^2}{\omega} \lambda,$$

$$\Psi_1 = -\frac{2|p_1||p_2|}{\omega} - \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\omega} \lambda,$$

$$\Phi_2 = -\frac{|p_1||p_2|}{\omega^3} (\omega^2 - 3p_1^2 - 3p_2^2) - \frac{p_1^2 + p_2^2 - 2m^2}{\omega} \lambda,$$

$$\Psi_2 = -\frac{8}{3} \frac{|p_1||p_2|}{\omega^3} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 - m^2) - \frac{p_1^2 + p_2^2}{\omega} \lambda,$$

$$\Phi_3 = -\frac{2}{3} \frac{|p_1||p_2|}{\omega^3} \left[\omega^3 + 8m^2 - 2(p_1^2 + p_2^2) - 5 \frac{(p_1^2 + p_2^2)^2}{\omega^2} \right] - \frac{p_1^2 + p_2^2 - 4m^2}{\omega} \lambda,$$

$$\Psi_3 = -|p_1||p_2| \left(-\frac{2}{\omega} + \frac{m^2}{\omega^3} + \frac{8m^4}{\omega^5} + \frac{9\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\omega^3} + \frac{4m^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\omega^5} - \frac{4\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}{\omega^5} \right) - \frac{p_1^2 + p_2^2 - 2m^2}{\omega} \lambda,$$

где $\lambda = \text{In} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + |p_1||p_2| + m^2}{m\omega}$.

Во избежание ошибок при использовании этих формул подчеркнем, что Φ является функцией двух переменных ε_2 и ω . Выше приведены выражения, написанные применительно к образованию пары, при этом $\varepsilon_1 = \omega - \varepsilon_2$. Для возбуждения ядра электроном $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \omega$ ($\omega < 0$). Поэтому в этом случае надо в приведенных выражениях заменить ε_1 на $-\varepsilon_1$ (при этом $|p_1|$ не меняется).

35.5. Учет поля ядра. Полученные выше выражения для вероятности конверсии или сечения возбуждения неприменимы во многих практически важных случаях, когда надо учитывать влияние поля ядра на начальное и конечное состояния электрона. Мы выведем теперь общие формулы для матричного элемента конверсии и возбуждения, выразив его через волновые функции электрона в поле ядра. Явные выражения для сечений или коэффициентов конверсии получить при этом нельзя. Для этого требуются численные расчеты (см. [49]).

Выше для нахождения матричных элементов мы использовали токи перехода в импульсном представлении. Теперь задача сводится к получению выражения для $\langle f | \mathbf{S} | i \rangle$, в котором адронный ток фигурировал бы в прежней форме, а электронный ток входил бы в координатном представлении.

Для того чтобы получить $\langle f | \mathbf{S} | i \rangle$ в такой форме, подставим в (34.1.1) выражение для функции $D_c(x)$ в виде интеграла Фурье

$$\langle f | \mathbf{S} | i \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2} \int d^4 x d^4 x' e^{ik(x'-x)} j_\alpha^{(h)}(x') j_\alpha^{(e)}(x).$$

Далее выделим в явном виде зависимость токов перехода от времени:

$$j_\alpha^{(e)}(x) = j_\alpha^{(e)}(\mathbf{r}) e^{i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)t}, \quad j_\alpha^{(h)}(x') = j_\alpha^{(h)}(\mathbf{r}') e^{i(\varepsilon_1' - \varepsilon_2')t'}$$

и выполним интегрирование по t, t' и k_0 :

$$\langle f | \mathbf{S} | i \rangle = \frac{i}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 k}{k^2 - \omega^2} \int d^3 x e^{-ikr} j_\alpha^{(e)}(\mathbf{r}) \int d^3 x' e^{ikr'} j_\alpha^{(h)}(\mathbf{r}') \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega).$$

Введя адронный ток в импульсном представлении

$$h_\alpha(\mathbf{k}) = \int j_\alpha^{(h)}(\mathbf{r}) e^{ikr} d^3 x,$$

можно придать матричному элементу $\langle f | \mathbf{S} | i \rangle$ вид

$$\langle f | \mathbf{S} | i \rangle = -2\pi i \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega) V, \quad (35.5.1)$$

где

$$V = - \int j_{\alpha}^{(e)}(\mathbf{r}) A_{\alpha}(\mathbf{r}) d^3x \quad (35.5.2)$$

и

$$A_{\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^2 - \omega^2} h_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (35.5.3)$$

Выражение (35.5.1) можно интерпретировать как борновскую амплитуду перехода электрона во внешнем поле, определяемом ядерным потенциалом перехода (35.5.3).

Подставив в (35.5.3) выражения (35.1.2) — (35.1.4) для адронного тока, можно найти явный вид потенциала перехода.

В случае ML -перехода мы получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{q_{LM}^{(M)}}{(2\pi)^3} \int \frac{\kappa^{L+2} d\kappa}{\kappa^2 - \omega^2} \int Y_{LLM}(\mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\omega.$$

Интегрирование по углам дает

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{q_{LM}^{(M)}}{(4\pi)^2} G_L(\omega r) \omega^{L+1} Y_{LLM}(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (35.5.4)$$

где

$$\omega^{L+1} G_L(\omega r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa^{L+2} g_L(\kappa r) d\kappa}{\kappa^2 - \omega^2 - i0}$$

и

$$g_L(x) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{J_{L+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}}.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$G_L(\omega r) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} i^L H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(\omega r) \frac{1}{\sqrt{\omega r}}. \quad (35.5.5)$$

($H^{(1)}$ — функция Ханкеля.)

Аналогично в случае EL -перехода потенциал перехода имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{2L+1}{L}} \frac{q_{LM}^{(e)} \omega^{L+1}}{(4\pi)^2} G_{L-1}(\omega r) Y_{L, L-1, M}(\mathbf{n}), \\ A_0(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{L+1}{L}} \frac{q_{LM}^{(e)} \omega^{L+1}}{(4\pi)^2} G_L(\omega r) Y_{LM}(\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (35.5.6)$$

В случае $E0$ -перехода проще исходить из формулы (34.1.2), которую мы представим в виде

$$\langle f | \mathbf{S} | i \rangle = -2\pi i \delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \omega) V,$$

где

$$V = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{h_{\alpha}(\mathbf{k}) j_{\alpha}^{(e)}(\mathbf{k})}{k^2 - \omega^2} d^3x.$$

Используя для адронного тока выражение (35.1.4) и условие поперечности электронного тока $\mathbf{k}\mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{k}) = \omega\mathbf{j}_0^{(e)}(\mathbf{k})$, получим

$$V = \frac{q_0}{(2\pi)^3} \int \mathbf{j}_0^{(e)}(\mathbf{k}) d^3k = q_0 e \psi_2^*(0) \psi_1(0), \quad (35.5.7)$$

где $\psi_1(\mathbf{r})$ и $\psi_2(\mathbf{r})$ — волновые функции электрона.

Приведем теперь выражения для коэффициента конверсии на атомных электронах в случае EL - и ML -переходов. Если волновые функции конечного состояния нормированы на единичный интервал энергии, $\int \psi_\varepsilon^*(\mathbf{r}) \psi_\varepsilon(\mathbf{r}) d^3x = \delta(\varepsilon - \varepsilon')$, а волновые функции начального состояния нормированы согласно условию $\int \psi_1^*(\mathbf{r}) \psi_1(\mathbf{r}) d^3x = 1$, то вероятность конверсии будет иметь вид

$$\omega = 2\pi |V|^2 = \frac{|q|^2}{(2\pi)^3} \omega^{2L+2} e^2 |V'|^2, \quad (35.5.8)$$

где для ML -перехода

$$V' = - \int \bar{\psi}_2(\mathbf{r}) \boldsymbol{\gamma} \psi_1(\mathbf{r}) G_L(\omega r) Y_{LLM}(\mathbf{n}) d^3x \quad (35.5.9)$$

и для EL -перехода

$$V' = - \int \bar{\psi}_2(\mathbf{r}) \left\{ \boldsymbol{\gamma} G_{L-1}(\omega r) \sqrt{\frac{2L+1}{L}} Y_{L, L-1, M}(\mathbf{n}) - \right. \\ \left. - \gamma_4 G_L(\omega r) \sqrt{\frac{L+1}{L}} Y_{LM}(\mathbf{n}) \right\} \psi_1(\mathbf{r}) d^3x \quad (35.5.10)$$

(через q для краткости обозначено q_{LM}^q или q_{LM}^M). Разделив ω на вероятность излучения

$$\omega_\gamma = \frac{|q|^2}{8\pi^2} \omega^{2L+1},$$

получим коэффициент конверсии

$$\frac{\omega}{\omega_\gamma} = \frac{\alpha}{4} \omega |V'|^2. \quad (35.5.11)$$

Это выражение должно быть просуммировано по конечным состояниям электрона, допускаемым правилами отбора, и по начальным состояниям.

В случае конверсии с образованием пар предыдущие формулы остаются в силе, если заменить ψ_1 на $\psi^{(-)}$ — волновую функцию с отрицательной частотой, отвечающую состоянию позитрона. Для дифференциального коэффициента конверсии мы получим выражение

$$\frac{d\omega}{\omega_\gamma} = \frac{\alpha}{4} \omega |V'|^2 d\Gamma_{+-}, \quad (35.5.12)$$

где $d\Gamma$ — статистический вес конечного состояния образующихся частиц. Аналогично выражается через V' сечение возбуждения:

$$\frac{d\sigma}{\omega_\gamma} = \frac{\alpha}{4} \frac{\omega}{v_1} |V'|^2 d\Gamma_2 \quad (35.5.13)$$

(v_1 — начальная скорость электрона). Выражения для $d\Gamma$ в (35.5.12) и (35.5.13) зависят от нормировки волновых функций; при нормировке на единичный объем

$$d\Gamma_{+-} = \frac{d^3p_+ d^3p_-}{(2\pi)^6} \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega), \quad d\Gamma_2 = \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega).$$

Подставив это соотношение в (36.1.1), мы получим интеграл в p -пространстве вида

$$J(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \int \frac{F(p)d^4p}{[(p-\alpha)^2+l]^n}, \tag{36.1.4}$$

где α и l зависят от параметров x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Искомый интеграл I получается из $J(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ интегрированием по x_1, x_2, \dots, x_{n-1} :

$$I = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} J(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \tag{36.1.5}$$

(Этот метод вычисления интегралов I мы будем называть методом параметризации [1].)

Убедимся прежде всего в справедливости тождества (36.1.3). При $n=2$ оно очевидно, так как

$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2} = \int_0^1 \frac{du}{[\alpha_1u + \alpha_2(1-u)]^2}.$$

Докажем теперь, что если оно справедливо при некотором n , то оно будет справедливо также и при $n+1$.

Замечая, что интегрирования по различным u_i в (36.1.3) можно менять местами, получим

$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1}} = (n-1)! \int_0^1 u_1^{n-2} du_1 \int_0^1 u_2^{n-3} du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} \frac{1}{A^n \alpha_{n+1}},$$

где A^n — знаменатель в правой части формулы (36.1.3). Но

$$\frac{1}{nA^n\alpha_{n+1}} = \int_0^1 \frac{u_0^{n-1} du_0}{[Au_0 + \alpha_{n+1}(1-u_0)]^{n+1}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\alpha_{n+1}} = n! \int_0^1 u_0^{n-1} du_0 \int_0^1 u_1^{n-2} du_1 \dots \int_0^1 du_{n-1} \frac{1}{[Au_0 + \alpha_{n+1}(1-u_0)]^{n+1}},$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к вычислению интеграла (36.1.4). Предположим сначала, что интеграл (36.1.4) сходится. В этом случае можно сделать преобразование $p-\alpha \rightarrow p$, после чего интеграл приобретет вид

$$K = \int \frac{f(p)}{(p^2+l)^n} d^4p. \tag{36.1.6}$$

Достаточно, очевидно, ограничиться рассмотрением случая, когда $f(p)$ представляет собой некоторую скалярную функцию от p^2 . Действительно, если $f(p) = p_\mu f_1(p^2)$, то $K=0$; если $f(p) = p_\mu p_\nu f_2(p^2)$, то

$$\int \frac{p_\mu p_\nu f_2(p^2)}{(p^2+l)^n} d^4p = \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \int \frac{p^2 f_2(p^2)}{(p^2+l)^n} d^4p$$

и т. д.

В интеграле (36.1.6) интегрирование по p_4 производится в соответствии с правилом обхода полюсов, т. е. вдоль пути C , изображенного на рис. 36.1.

Но этот путь можно, очевидно, повернуть на $\pi/2$, как указано на рис. 36.2. При этом p_4 заменится на p_0 и $p^2 = p^2 + p_4^2$ перейдет в $p^2 + p_0^2$, где p_0 — вещественная величина.

Таким образом, поворот пути интегрирования C на $\pi/2$ соответствует переходу в p -пространстве к обычной евклидовой метрике, в которой квадрат длины равен сумме квадратов всех четырех координат с вещественной четвертой координатой.

Так как

$$d^4p \equiv i d^3p dp_0 \rightarrow i\pi^2 z dz, \quad z = p^2 \tag{36.1.7}$$

(предполагается выполненным интегрирование по углам), то мы приходим к однократному интегралу

$$\int \frac{f(p^2) d^4p}{(p^2 + l)^n} = i\pi^2 \int_0^\infty \frac{f(z) z dz}{(z^2 + l)^n}. \tag{36.1.8}$$

В частности,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(p^2 + l)^3} &= \frac{i\pi^2}{2l}, \\ \int \frac{d^4p}{(p^2 + l - 2pk)^3} &= \frac{i\pi^2}{2(l - k^2)}, \\ \int \frac{p_\sigma d^4p}{(p^2 + l - 2pk)^3} &= \frac{i\pi^2 k_\sigma}{2(l - k^2)}. \end{aligned} \tag{36.1.9}$$

Перейдем теперь к рассмотрению расходящихся интегралов типа (36.1.4). Так как в квантовой электродинамике не встречается расходимостей

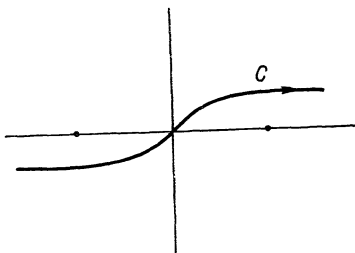


Рис. 36.1.

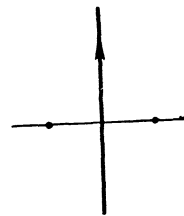


Рис. 36.2.

выше квадратичной, то речь идет об интегралах следующих четырех типов:

$$\begin{aligned} J^{(2)}(k, l) &= \int \frac{d^4p}{(p^2 - 2pk + l)^2}, \\ J_{\mu}^{(2)}(k, l) &= \int \frac{p_\mu d^4p}{(p^2 - 2pk + l)^2}, \\ J_{\mu\nu}^{(2)}(k, l) &= \int \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 - 2pk + l)^2} d^4p, \\ J_{\mu\nu}^{(3)}(k, l) &= \int \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 - 2pk + l)^3} d^4p. \end{aligned}$$

Мы будем производить во всех этих интегралах интегрирование по некоторой конечной инвариантной области (Ω), характеризующейся числом N , причем предел $N \rightarrow \infty$ соответствует всему бесконечному четырехмерному пространству p . Такая конечная инвариантная область может быть определена, например, неравенствами $|p^2| \leq N^2, \frac{(ps)^2}{s^2} \leq N^2$, где s — произвольный времениподобный четырехмерный вектор [2].

Так как интегрирование по p_4 при постоянном p^2 не приводит к расходимости, то путь интегрирования по p_4 (см. рис. 36.1, 36.2) можно так же, как и при вычислении сходящихся четырехмерных интегралов (36.1.4), повернуть на $\pi/2$. После такого поворота мы получим четырехмерное евклидово p -пространство с вещественной четвертой координатой, и область интегрирования станет четырехмерной сферой, радиус которой мы обозначим через L и отождествим с введенным в § 22 предельным импульсом.

Переходя к вычислению интересующих нас расходящихся интегралов, начнем с логарифмически расходящегося интеграла

$$J^{(2)}(l) = \int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 + l)^2}.$$

Повернув путь интегрирования по p_4 на $\pi/2$ и воспользовавшись формулой (36.1.7), имеем

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 + l)^2} = i\pi^2 \int_0^{L^2} \frac{z dz}{(z + l)^2}.$$

Вычислив последний интеграл и отбросив члены порядка L^{-2} , получим

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 + l)^2} = i\pi^2 \left(\ln \frac{L^2}{l} - 1 \right). \quad (36.1.10)$$

Рассмотрим далее интеграл

$$J^{(2)}(k, l) = \int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2},$$

который, так же как и интеграл $J^{(2)}(l)$, расходится логарифмически. Переписав этот интеграл в виде

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = \int_{\Omega} \frac{d^4 p}{[(p-k)^2 + l - k^2]^2},$$

сделаем замену переменных $p-k \rightarrow p$. Тогда интеграл приобретет вид (36.1.10) с измененной, однако, областью интегрирования, которую мы обозначим через Ω' . Согласно (36.1.10) интеграл $J^{(2)}(k, l)$ будет равен $i\pi^2 \left(\ln \frac{L'^2}{l-k^2} - 1 \right)$. Но L' отличается от L на конечную величину, поэтому, если L' достаточно велико, то $\ln L'$ отличается от $\ln L$ на малую величину порядка $1/L$, и окончательно мы получим

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = i\pi^2 \left(\ln \frac{L^2}{l - k^2} - 1 \right). \quad (36.1.11)$$

Вычислим теперь логарифмически расходящийся интеграл

$$J_{\mu\nu}^{(3)}(k, l) = \int_{\Omega} \frac{p_{\mu} p_{\nu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^3}.$$

Так же, как и при вычислении интеграла (36.1.11), мы можем сделать смещение начала координат, введя новую переменную интегрирования, $p-k \rightarrow p$:

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\mu} p_{\nu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^3} = \int_{\Omega'} \frac{(p_{\mu} + k_{\mu})(p_{\nu} + k_{\nu}) d^4 p}{(p^2 - l - k^2)^3}.$$

Замечая, что

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\mu} p_{\nu} d^4 p}{(p^2 + l)^3} = \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \int_{\Omega} \frac{p^2 d^4 p}{(p^2 + l)^3} = \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\mu\nu} \int_0^{L^2} \frac{z^2 dz}{(z+l)^3} = \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\mu\nu} \left(\ln \frac{L^2}{l} - \frac{3}{2} \right),$$

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\nu} d^4 p}{(p^2 + l)^3} = 0, \quad k_{\mu} k_{\nu} \int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 + l)^3} = \frac{i\pi^2}{2} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{l},$$

получим окончательно

$$J_{\mu\nu}^{(3)}(k, l) = \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\mu\nu} \left(\ln \frac{L^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{i\pi^2}{2} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{l - k^2}. \quad (36.1.12)$$

Переходя к вычислению интеграла

$$J_{\mu}^{(2)}(k, l) = \int_{\Omega} \frac{p_{\mu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2},$$

заметим, что

$$\frac{\partial J_{\mu}^{(2)}(k, l)}{\partial k_{\nu}} = 4J_{\mu\nu}^{(3)}(k, l) \quad (36.1.13)$$

и что 4-вектор $J_{\mu}^{(2)}(k, l)$ должен быть направлен вдоль k_{μ} . Отсюда и из (36.1.12) следует:

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\mu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = i\pi^2 k_{\mu} \left(\ln \frac{L^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right). \quad (36.1.14)$$

Обратим внимание на то, что если бы мы вычисляли этот интеграл, сделав замену переменной (при той же области интегрирования Ω) $p - k \rightarrow p$, то получили бы в результате $i\pi^2 k_{\mu} \left(\ln \frac{L^2}{l - k^2} - 1 \right)$. Таким образом, при преобразовании $p \rightarrow p - k$, т. е. смещении начала координат на k , расходящийся интеграл (36.1.14) получает добавку $\frac{i\pi^2}{2} k_{\mu}$.

Рассмотрим, наконец, квадратично расходящийся интеграл

$$J_{\mu\nu}^{(2)}(k, l) = \int_{\Omega} \frac{p_{\mu} p_{\nu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2}.$$

Проинтегрировав выражение (36.1.14) по l , получим

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\mu} d^4 p}{p^2 - 2pk + l} =$$

$$= i\pi^2 k_{\mu} \left\{ (l - k^2) \ln(l - k^2) - (l - k^2) - l \left(\ln L^2 - \frac{3}{2} \right) + g(N, k^2) \right\}, \quad (36.1.15)$$

где g — некоторая функция от N и k^2 , содержащая квадратично расходящуюся при $N \rightarrow \infty$ константу. Легко видеть, что g представляет собой линейную функцию от k^2 . Действительно, левая часть (36.1.15) при преобразовании $k \rightarrow nk$, $p \rightarrow np$, $l \rightarrow n^2 l$, где n — произвольное число, приобретает множитель n^3 , что возможно только в том случае, если

$$g = \frac{1}{2} A_2 + k^2 (a \ln L^2 + b),$$

где A_2 — квадратично расходящаяся константа, а a и b — некоторые числа (k^2 умножается на логарифмически расходящуюся константу $\ln L^2$, а не на A_2 , так как только при этом оба слагаемых в g будут иметь одинаковую размерность).

Продифференцировав (36.1.15) по k_ν , получим интересующий нас интеграл

$$\int_{\Omega} \frac{\rho_\mu \rho_\nu d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = \frac{i\pi^2}{2} \delta_{\mu\nu} \left\{ (l - k^2) [\ln(l - k^2) - 1] + l \left(\frac{3}{2} - \ln L^2 \right) + k^2 (a \ln L^2 + b) + \frac{1}{2} A_2 \right\} - i\pi^2 k_\mu k_\nu [\ln(l - k^2) - (a \ln L^2 + b)]. \quad (36.1.16)$$

Для того чтобы найти a и b и выразить A_2 через L , можно поступить следующим образом. Представим $J_{\mu\nu}^{(2)}(k, l)$ в виде

$$J_{\mu\nu}^{(2)}(k, l) = K_{\mu\nu}(k, l) + \int_{\Omega} \frac{\rho_\mu \rho_\nu d^4 p}{(p^2 + l)^2}, \quad (36.1.17)$$

где

$$K_{\mu\nu}(k, l) = \int_{\Omega} \frac{\rho_\mu \rho_\nu d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} - \int_{\Omega} \frac{\rho_\mu \rho_\nu d^4 p}{(p^2 + l)^2}.$$

Второй интеграл в (36.1.17) может быть немедленно вычислен:

$$\int_{\Omega} \frac{\rho_\mu \rho_\nu d^4 p}{(p^2 + l)^2} = \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\mu\nu} \{L^2 - 4l \ln L + 2l \ln l + l\}.$$

Интеграл же $K_{\mu\nu}(k, l)$ с помощью формулы

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = - \int_0^1 \frac{n(\alpha - \beta)}{[(\alpha - \beta)z + \beta]^{n+1}} dz \quad (36.1.18)$$

приводится к виду

$$K_{\mu\nu}(k, l) = 4k_\sigma \int_0^1 dz \int_{\Omega} \frac{\rho_\mu \rho_\nu \rho_\sigma d^4 p}{(p^2 - 2pkz + l)^3}.$$

Так как

$$\int_{\Omega} \frac{\rho_\mu \rho_\nu \rho_\sigma d^4 p}{(p^2 + l)^3} = 0,$$

то, применяя еще раз формулу (36.1.18), получим

$$K_{\mu\nu}(k, l) = 24k_\sigma k_\tau \int_0^1 z dz \int_0^1 dt \int_{\Omega} \frac{\rho_\mu \rho_\nu \rho_\sigma \rho_\tau d^4 p}{(p^2 - 2pkzt + l)^4}.$$

Входящий сюда интеграл по p расходится логарифмически и может быть вычислен так же, как и интегралы (36.1.14) и (36.1.16). Поступая таким образом, найдем

$$a = 1, \quad b = -\frac{11}{6}, \quad A_2 = L^2.$$

Приведем в заключение сводку вычисленных интегралов:

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = i\pi^2 \left(\ln \frac{L^2}{l - k^2} - 1 \right),$$

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\mu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = i\pi^2 k_{\mu} \left(\ln \frac{L^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right),$$

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\mu} p_{\nu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^2} = -\frac{i\tau^2}{2} \delta_{\mu\nu} \left\{ (l - k^2) \ln \frac{L^2}{l - k^2} + \frac{5k^2 - 3l}{6} - \frac{1}{2} L^2 \right\} +$$

$$+ i\pi^2 k_{\mu} k_{\nu} \left(\ln \frac{L^2}{l - k^2} - \frac{11}{6} \right), \quad (36.1.19)$$

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^3} = \frac{i\pi^2}{2} \frac{1}{l - k^2},$$

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\mu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^3} = \frac{i\pi^2}{2} \frac{k_{\mu}}{l - k^2},$$

$$\int_{\Omega} \frac{p_{\mu} p_{\nu} d^4 p}{(p^2 - 2pk + l)^3} = \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\mu\nu} \left(\ln \frac{L^2}{l - k^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{i\pi^2}{2} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{l - k^2}.$$

36.2. Массовый оператор второго порядка. Перейдем теперь к вычислению массового оператора 2-го порядка $\Sigma^{(2)}(p)$ [1]. Эта величина, которой соответствует диаграмма рис. 20 1, определяется, согласно правилам Фейнмана, формулой

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} \gamma_{\mu} S_c(p+k) \gamma_{\nu} D_c(k) d^4 k. \quad (36.2.1)$$

При регуляризации массового оператора возникает, как мы увидим, расходимость в области малых k^2 . Эта так называемая инфракрасная расходимость уже обсуждалась в § 29; мы вернемся еще к ней в § 39.4. Для ее устранения можно формально ввести в $D_c(k)$ отличную от нуля «массу» фотона λ , считая, что $D_c(k)$ определяется формулой

$$D_c(k) = \frac{-i}{k^2 + \lambda^2}, \quad \lambda^2 > 0. \quad (36.2.2)$$

Подставляя в (36.2.1) это выражение для $D_c(k)$ и выражение (14.4.14) для $S_c(p)$:

$$S_c(p) = i \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2 - i0},$$

получим

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_{\mu} \frac{i(\hat{p} + \hat{k}) - m}{(p+k)^2 + m^2} \gamma_{\nu} \frac{d^4 k}{k^2 + \lambda^2} = -\frac{\alpha}{2\pi^3} \int \frac{i(\hat{p} + \hat{k}) + 2m}{(p+k)^2 + m^2} \frac{d^4 k}{k^2 + \lambda^2}.$$

Используя формулу

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a_1 x + a_2 (1-x)]^2},$$

представим $\Sigma^{(2)}(p)$ в виде

$$\Sigma^{(2)}(p) = -\frac{\alpha}{2\pi^3} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{i(\hat{p} + \hat{k}) + 2m}{[k^2 + (2kp + p^2 + m^2 - \lambda^2)x + \lambda^2]^2},$$

откуда, согласно (36.1.19),

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left\{ [\hat{p}(1-x) - 2im] \ln \frac{L^2}{p^2x(1-x) + m^2x + \lambda^2(1-x)} + \left(\frac{3}{2}x - 1\right) \hat{p} + 2im \right\}. \quad (36.2.3)$$

Это выражение должно быть теперь регуляризовано. Для получения регуляризованного значения $\Sigma^{(2)}(p)$, которое мы обозначим через $\Sigma_R^{(2)}(p)$, нужно, согласно (23.3.5), отнять от $\Sigma^{(2)}(p)$ два первых члена разложения $\Sigma^{(2)}(p)$ в ряд Тейлора по степеням $(\hat{p} - im_R)$:

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(im_R) - (p - im_R) \left(\frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p}=im_R}. \quad (36.2.4)$$

Величина $\left(\frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p}=im_R} = \Sigma_1^{(2)}$ связана, согласно (22.3.8), с константой Z_1 (во втором приближении теории возмущений) соотношением

$$\Sigma_1^{(2)} = Z_1^{-1} - 1. \quad (36.2.5)$$

Итак,

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) - \Sigma_0^{(2)} - (\hat{p} - im_R) \Sigma_1^{(2)}, \quad (36.2.6)$$

где

$$\Sigma_0^{(2)} \equiv \Sigma^{(2)}(p_0).$$

Напомним, что, согласно (22.1.5), величина $\Sigma_0^{(2)}$ с точностью до множителя $-i$ совпадает с электромагнитной массой электрона $\delta m^{(2)}$ (во втором приближении теории возмущений):

$$\Sigma_0^{(2)} = -i\delta m^{(2)}.$$

Из (36.2.3) следует:

$$\delta m^{(2)} = i\Sigma_0^{(2)} = i \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left\{ -im_R(1+x) \ln \frac{L^2}{m_R^2x^2 + \lambda^2(1-x)} + im_R \left(\frac{3}{2}x + 1\right) \right\}. \quad (36.2.7)$$

Выполнив интегрирование, получим в пренебрежении величиной λ по сравнению с m_R следующее выражение для электромагнитной массы электрона во втором приближении теории возмущений:

$$\delta m^{(2)} = \frac{3\alpha}{4\pi} m_R \left(\ln \frac{L^2}{m_R^2} + \frac{1}{2} \right). \quad (36.2.8)$$

Эта величина, как мы видим, логарифмически зависит от предельного импульса L .

Дифференцируя (36.2.3), получим

$$\Sigma_1^{(2)} = \left(\frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial \hat{p}} \right)_{\hat{p}=im_R} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left\{ (1-x) \ln \frac{L^2}{m_R^2 x^2 + \lambda^2 (1-x)} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} x - 1 - \frac{2x(1-x^2)m_R^2}{m^2 x^2 + \lambda^2 (1-x)} \right\} = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{L^2}{m_R^2} + \frac{9}{4} + \ln \frac{\lambda^2}{m_R^2} \right]. \quad (36.2.9)$$

Наконец, подставляя полученные выражения для $\Sigma_0^{(2)}$ и $\Sigma_1^{(2)}$ и формулы (36.2.3) и (36.2.5), получим следующее выражение для регуляризованного массового оператора во втором приближении теории возмущений:

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left\{ [\hat{p}(1-x) - 2im_R] \ln \frac{m_R^2 x^2 + \lambda^2 (1-x)}{p^2 x (1-x) + m_R^2 x + \lambda^2 (1-x)} + \right. \\ \left. + (\hat{p} - im_R) \frac{2m^2 x (1-x^2)}{m^2 x^2 + \lambda^2 (1-x)} \right\}. \quad (36.2.10)$$

Легко видеть, что это выражение имеет нуль второго порядка при $\hat{p} = im_R$.

Обратим внимание на то обстоятельство, что в выражение для регуляризованного массового оператора $\Sigma_R^{(2)}(p)$ входит «масса фотона» λ , в то время как в исходное выражение для $\Sigma^{(2)}(p)$ величина λ не входила. Таким образом, зависимость от λ возникает в результате регуляризации. Величина λ входит также в Z_1 , но не входит в $\delta m^{(2)}$.

Общее выражение (36.2.10) для $\Sigma_R^{(2)}(p)$ сильно упрощается в области больших импульсов:

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = -\frac{\alpha}{4\pi} \hat{p} \ln \frac{p^2}{m_R^2}, \quad p^2 \gg m_R^2. \quad (36.2.11)$$

С этим асимптотическим выражением мы уже встречались в § 23.

Можно показать, что если $p^2 + m_R^2 \gg \lambda^2$, то

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = i \frac{\alpha}{2\pi m_R^2} (\hat{p} - im_R)^2 \left\{ \frac{1}{2(1-\rho)} \left(1 - \frac{2-3\rho}{1-\rho} \ln \rho \right) + \right. \\ \left. + \frac{i\hat{p} - m_R}{m_R} \left[\frac{1}{2\rho(1-\rho)} \left(-2 - \rho + \frac{4-8\rho+\rho^2}{1-\rho} \ln \rho \right) - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \ln \frac{\lambda^2}{m_R^2} \right] \right\}, \quad (36.2.12)$$

$$\text{где } \rho = \frac{p^2 + m_R^2}{m_R^2}$$

36.3. Поляризационный оператор второго порядка. Перейдем к вычислению поляризационного оператора 2-го порядка $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$. Эта величина, которой соответствует диаграмма рис. 23.1, б), определяется, согласно правилам Фейнмана, формулой

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int \gamma_\mu \frac{i\hat{p} - m}{i\rho^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p-k)^2 + m^2} d^4 p.$$

Вычислив след произведения матриц, получим

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{\delta_{\mu\nu} (p^2 + m^2 - pk) - 2p_\mu p_\nu + (p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu)}{(p^2 + m^2) [(p-k)^2 + m^2]} d^4 p. \quad (36.3.1)$$

Нас будет интересовать только поперечная часть этого тензора (пропорциональная $\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$), так как только она имеет физический

смысл. Поэтому мы запишем $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ в виде

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Pi^{(2)}(k^2) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Pi_l^{(2)}(k^2), \quad (36.3.2)$$

где

$$\Pi^{(2)}(k^2) = \frac{1}{3} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k),$$

$$\Pi_l^{(2)}(k^2) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k).$$

Чтобы найти $\Pi^{(2)}(k^2)$, достаточно, очевидно, выделить в $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ часть, пропорциональную $\delta_{\mu\nu}$. Кроме первого слагаемого в числителе подынтегрального выражения в (36.3.1), вклад в интересующую нас часть $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ дает также второе слагаемое, так как

$$\int_{\Omega} \frac{p_\mu p_\nu d^4 p}{(p^2 + m^2) [(p-k)^2 + m^2]} = i\pi^2 \int_0^1 dx \left\{ \left(\ln \frac{L}{l_x - k_x^2} - \frac{11}{6} \right) k_x \mu k_x \nu - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \left[(l_x - k_x^2) \ln \frac{L}{l_x - k_x^2} + \frac{5k_x^2 - 3l_x}{6} - \frac{L^2}{2} \right] \right\},$$

где $l_x = k^2 x + m^2$, $k_x = kx$ (третье слагаемое вклада, пропорционального $\delta_{\mu\nu}$, не дает).

Используя полученные выражения и вспоминая, что

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p-k)^2 + m^2} = i\pi^2 \left(L^2 - m^2 \ln \frac{L^2}{m^2} - \frac{1}{2} k^2 \right),$$

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 p}{(p^2 + m^2) [(p-k)^2 + m^2]} = i\pi^2 \int_0^1 dx \left\{ \ln \frac{L^2}{m^2} - \ln \left[1 + \frac{k^2}{m^2} x(1-x) \right] - 1 \right\},$$

получим следующее выражение для $\Pi^{(2)}(k^2)$:

$$\Pi^{(2)}(k^2) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{L^2 - m^2}{2} + \frac{k^2}{3} \left(\frac{5}{6} - \ln \frac{L^2}{m^2} \right) + \right. \\ \left. + \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} k^2 - m^2 - k^2 x(1-x) \right] \ln \left[1 + \frac{k^2}{m^2} x(1-x) \right] \right\}. \quad (36.3.3)$$

Выражение (36.3.3) мы должны теперь регуляризовать. Для этого нужно, в соответствии с правилами § 23.1, вычесть из $\Pi^{(2)}(k^2)$ два первых члена в разложении этих выражений по степеням k^2 ,

$$\Pi^{(2)}(0) + k^2 \left(\frac{\partial \Pi^{(2)}(k^2)}{\partial k^2} \right)_{k^2=0} = \frac{ie^2}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{L^2 - m^2}{2} + \frac{k^2}{3} \left(\frac{1}{3} - \ln \frac{L^2}{m^2} \right) \right\}. \quad (36.3.4)$$

Таким образом, регуляризованный поляризационный оператор во втором приближении теории возмущений имеет вид

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \Pi^{(2)}(k^2) - \Pi^{(2)}(0) - k^2 \left(\frac{\partial \Pi^{(2)}(k^2)}{\partial k^2} \right)_{k^2=0} = \\ = \frac{i\alpha}{\pi} \left\{ \frac{k^2}{6} + \int_0^1 dx \left[\frac{k^2}{2} - k^2 x(1-x) - m_R^2 \right] \ln \left[1 + \frac{k^2}{m_R^2} x(1-x) \right] \right\} = \\ = \frac{i\alpha}{4\pi} k^2 \int_{-1}^1 (1-\eta^2) \ln \left[1 + \frac{k^2}{4m_R^2} (1-\eta^2) \right] d\eta, \quad (36.3.5)$$

где $\eta = 2x - 1$.

Выполнив интегрирование, получим

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{\pi} k^2 \left[\frac{1}{9} + (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \frac{4m_R^2 - 2k^2}{3k^2} \right], \quad (36.3.6)$$

где $\sin^2 \theta = -\frac{k^2}{4m_R^2}$.

Легко видеть, что если $|k^2| \ll m_R^2$, то

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{15\pi} \frac{k^4}{m_R^2}; \quad (36.3.7)$$

если $|k^2| \gg m_R^2$, то

$$\Pi_R^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{3\pi} k^2 \ln \frac{k^2}{m_R^2}. \quad (36.3.8)$$

Зная $\Pi_R^{(2)}(k^2)$, можно, согласно (22.3.10), определить перенормированную фотонную функцию Грина во втором приближении теории возмущений:

$$G_R^{(\gamma)}(k) = [D_c^{-1}(k) - \Pi_R^{(2)}(k^2)]^{-1}.$$

Используя (36.3.5) и (36.3.6), получим

$$\begin{aligned} G_R^{(\gamma)} &= -\frac{i}{k^2} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \ln \left[1 + \frac{k^2}{m_R^2} x(1-x) \right] dx \right\} = \\ &= -\frac{i}{k^2} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{9} + (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \frac{4m_R^2 - 2k^2}{3k^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (36.3.9)$$

В § 20.2 мы определили величину

$$A_\mu(q) = A_\mu^{(e)}(q) + D_{c\mu\nu}(q) K_{\nu\nu'}^{(0,2)}(q) A_{\nu'}^{(e)}(q),$$

которая должна сопоставляться внешней фотонной линии. Эта величина представляет собой сумму заданного внешнего электромагнитного поля $A_\mu^{(e)}(q)$ и добавки к нему

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) = D_{c\mu\nu}(q) K_{\nu\nu'}^{(0,2)}(q) A_{\nu'}^{(e)}(q),$$

которую можно интерпретировать как электромагнитное поле, обусловленное поляризацией вакуума электронно-позитронного поля при включении поля $A_\mu^{(e)}(q)$.

Во втором приближении теории возмущений мы должны вместо $K_{\mu\nu}^{0,2}(q)$ подставить $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q)$ и регуляризовать последнее выражение. В результате мы получим следующее выражение для добавки к потенциалу внешнего электромагнитного поля, обусловленной поляризацией вакуума электронно-позитронного поля:

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \frac{1}{9} + \frac{4m_R^2 - 2q^2}{3q^2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \right\} A_\nu^{(e)}(q). \quad (36.3.10)$$

При $q^2 = 0$ мы имеем, очевидно, поле фотона. В этом случае добавки к полю не должно возникать, и действительно, $\delta A_\mu^{(e)}(q)$ при $q^2 = 0$ обращается в нуль.

Потенциал внешнего поля $A_\mu^{(e)}(x)$ связан с током $J_\mu(x)$, создающим это поле, соотношением

$$\square A_\mu^{(e)}(x) = -J_\mu^{(e)}(x), \quad (36.3.11)$$

или в компонентах Фурье

$$J_{\mu}^{(e)}(q) = q^2 A_{\mu}^{(e)}(q).$$

При этом, так как

$$\frac{\partial J_{\mu}^{(e)}(x)}{\partial x_{\mu}} = 0,$$

то

$$q_{\mu} J_{\mu}^{(e)}(q) = 0.$$

Изменение поля будет приводить к изменению тока. Используя соотношения (36.3.10) и (36.3.11), легко убедиться, что добавка к току, обусловленная поляризацией вакуума электронно-позитронного поля, определяется формулой

$$\delta J_{\mu}^{(e)}(q) = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \frac{1}{9} + \frac{4m_R^2 - 2q^2}{3q^2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \right\} J_{\mu}^{(e)}(q). \quad (36.3.12)$$

Разлагая величину, стоящую в фигурных скобках, в ряд по степеням q^2 и ограничиваясь членами 1-го порядка, получим

$$\delta J_{\mu}^{(e)}(q) = \frac{\alpha}{15\pi m_R^2} q^2 J_{\mu}^{(e)}(q).$$

Переходя от компонент Фурье к функциям координат и времен, найдем [3]

$$\delta J_{\mu}^{(e)}(x) = -\frac{\alpha}{15\pi m_R^2} \square J_{\mu}^{(e)}(x).$$

Если сохранить в разложении (36.3.12) по степеням q_{μ} члены 2-го порядка, то для $\delta J_{\mu}^{(e)}$ мы получим выражение

$$\delta J_{\mu}^{(e)}(x) = -\frac{\alpha}{15\pi m_R^2} \square J_{\mu}^{(e)}(x) - \frac{\alpha}{170\pi} \left(\frac{1}{m_R^2} \square \right)^2 J_{\mu}^{(e)}(x).$$

36.4. Вершинная функция третьего порядка. Вершинная функция 3-го порядка $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$, которой соответствует диаграмма рис. 17.6, имеет, согласно правилам Фейнмана, следующий вид:

$$\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_{\nu} S_c(p_2 - k) \gamma_{\mu} S_c(p_1 - k) \gamma_{\nu} D_c(k) d^4k. \quad (36.4.1)$$

Мы увидим, что после регуляризации величина $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$, так же как и $\Sigma_R^{(2)}(p)$, будет содержать инфракрасную расходимость (если p_1 и p_2 — импульсы свободного электрона, то $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ содержит инфракрасную расходимость и до регуляризации). Поэтому при вычислении $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ мы будем пользоваться выражением (36.2.2) для функции $D_c(k)$.

Подставляя это выражение для $D_c(k)$ и выражение (14.4.14) для $S_c(p)$ в (36.4.1), получим

$$\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \{ \gamma_{\nu} (i\hat{p}_2 - m) \gamma_{\mu} (i\hat{p}_1 - m) \gamma_{\nu} J_1 - i [\gamma_{\nu} (i\hat{p}_2 - m) \gamma_{\mu} \gamma_{\sigma} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} (i\hat{p}_1 - m) \gamma_{\nu}] J_{\sigma} - \gamma_{\nu} \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} \gamma_{\tau} \gamma_{\nu} J_{\sigma\tau} \}, \quad (36.4.2)$$

где

$$J_{(1; \sigma; \sigma\tau)} = \int_{\Omega} \frac{(1; k_{\sigma}; k_{\sigma} k_{\tau})}{(k^2 - 2p_1 k + p_1^2 + m^2) (k^2 - 2p_2 k + p_2^2 + m^2) (k^2 + \lambda^2)} d^4k \quad (36.4.3)$$

(в скобке $(1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau)$ нужно сохранить 1 в случае интеграла J_1 , k_σ — в случае интеграла J_σ и $k_\sigma k_\tau$ — в случае интеграла $J_{\sigma\tau}$).

Из всех интегралов при больших $|k^2|$ расходится, и притом логарифмически, только третий интеграл.

В области малых k (при $\lambda = 0$) может расходиться первый интеграл (если p_1 и p_2 представляют собой импульсы свободного электрона). По этой причине при вычислении интегралов J_σ и $J_{\sigma\tau}$ можно положить $\lambda = 0$.

Рассмотрим прежде всего тот случай, когда p_1 и p_2 представляют собой импульсы свободного электрона, $p_1^2 = -m_R^2$, $p_2^2 = -m_R^2$. Используя формулы

$$\frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)} = \int_0^1 \frac{dy}{(k^2 - 2p_y k)^2},$$

$$\frac{1}{(k^2 - 2p_y k)^2 (k^2 + \lambda^2)} = \int_0^1 \frac{2x dx}{(k^2 - 2p_x k + l_x)^3},$$

где

$$p_y = yp_1 + (1-y)p_2, \quad p_x = xp_y, \quad l_x = (1-x)\lambda^2,$$

представим J_1 , J_σ , $J_{\sigma\tau}$ в виде

$$J_1 = \int_0^1 dy \int_0^1 2x dx \int_{\Omega} \frac{d^4 k}{(k^2 - 2p_x k + l_x)^3},$$

$$J_{(\sigma; \sigma\tau)} = \int_0^1 dy \int_0^1 2x dx \int_{\Omega} \frac{(k_\sigma; k_\sigma k_\tau)}{(k^2 - 2p_x k)^3} d^4 k.$$

Входящие сюда интегралы по k равны, согласно (36.1.19),

$$\int_{\Omega} \frac{d^4 k}{(k^2 - 2p_x k + l_x)^3} = \frac{i\pi^2}{2} \frac{1}{l_x - p_x^2},$$

$$\int_{\Omega} \frac{k_\sigma d^4 k}{(k^2 - 2p_x k)^3} = -\frac{i\pi^2}{2p_x^2} p_{x\sigma},$$

$$\int_{\Omega} \frac{k_\sigma k_\tau d^4 k}{(k^2 - 2p_x k)^3} = -\frac{i\pi^2}{4} \delta_{\sigma\tau} \left[-\ln \frac{L^2}{p_x^2} + \frac{3}{2} \right] - \frac{i\pi^2}{2p_x^2} p_{x\sigma} p_{x\tau}.$$

Выполнив интегрирование по x , получим

$$J_1 = -i\pi^2 \int_0^1 \frac{dy}{p_y^2} (\ln V \sqrt{-p_y^2} - \ln \lambda),$$

$$J_\sigma = -i\pi^2 \int_0^1 \frac{dy p_{y\sigma}}{p_y^2},$$

$$J_{\sigma\tau} = -\frac{i\pi^2}{4} \int_0^1 dy \left\{ \delta_{\sigma\tau} \left[-\ln \frac{L^2}{-p_y^2} + \frac{1}{2} \right] + 2 \frac{p_{y\sigma} p_{y\tau}}{p_y^2} \right\}.$$

Для вычисления этих интегралов заметим, что

$$-p_y^2 = -[p_1 + q(1-y)]^2 = m^2 + q^2 y(1-y) = m^2 [1 - 4y(1-y) \sin^2 \theta],$$

$$q = p_2 - p_1, \quad (36.4.4)$$

где θ связано с q соотношением

$$-q^2 = 4m^2 \sin^2 \theta. \quad (36.4.5)$$

Введем далее вместо y новую переменную ξ :

$$2y - 1 = \frac{\operatorname{tg} \xi}{\operatorname{tg} \theta}.$$

Тогда

$$-p_y^2 = m^2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \xi}, \quad p_{y\sigma} = \frac{\operatorname{tg} \xi}{2 \operatorname{tg} \theta} (p_{1\sigma} - p_{2\sigma}) + \frac{1}{2} (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}) \quad (36.4.6)$$

и интеграл J_1 приобретает вид

$$J_1 = \frac{2i\pi^2}{m^2 \sin 2\theta} \left\{ - \int_0^\theta \ln \frac{\cos \xi}{\cos \theta} d\xi - \int_0^\theta \ln \frac{\lambda}{m} d\xi \right\}. \quad (36.4.7)$$

Так как

$$\int_0^\theta \ln \frac{\cos \xi}{\cos \theta} d\xi = \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi,$$

то окончательно

$$J_1 = - \frac{2i\pi^2}{m^2 \sin 2\theta} \left\{ \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi + \theta \ln \frac{\lambda}{m} \right\}. \quad (36.4.7')$$

Интегралы J_σ и $J_{\sigma\tau}$ после подстановки в них (36.4.5) и (36.4.6) вычисляются немедленно:

$$\begin{aligned} J_\sigma &= \frac{i\pi^2}{m^2} \frac{\theta}{\sin 2\theta} (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}), \\ J_{\sigma\tau} &= \frac{i\pi^2}{2} \left\{ \delta_{\sigma\tau} \left(\ln \frac{L}{m} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\theta (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}) (p_{1\tau} + p_{2\tau})}{2m^2 \sin 2\theta} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\delta_{\sigma\tau} + \frac{q_\sigma q_\tau}{-q^2} \right) (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \right\}. \quad (36.4.8) \end{aligned}$$

Вернемся теперь к формуле (36.4.2), определяющей $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$, и упростим коэффициенты, стоящие перед интегралами J_1 , J_σ , $J_{\sigma\tau}$.

Рассмотрим прежде всего выражение, стоящее перед J_1 :

$$\begin{aligned} \gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu = \\ = 2\hat{p}_1 \gamma_\mu \hat{p}_2 - 2im (\gamma_\mu \hat{p}_2 + \hat{p}_2 \gamma_\mu) - 2im (\gamma_\mu \hat{p}_1 + \hat{p}_1 \gamma_\mu) - 2m^2 \gamma_\mu. \end{aligned}$$

Так как при вычислениях матричных элементов величина $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ всегда умножается слева на \bar{u}_2 , а справа — на u_1 , где u_2 и u_1 — биспинорные амплитуды электрона с импульсами p_2 и p_1 , то в последнем выражении матрицу $i\hat{p}_1$, стоящую справа, и матрицу $i\hat{p}_2$, стоящую слева, можно заменить на $-m$ (если слева стоит матрица $i\hat{p}_1$, а не матрица $i\hat{p}_2$, или справа матрица $i\hat{p}_2$, а не $i\hat{p}_1$, то прежде, чем выполнить эту замену, следует сделать подстановку $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 - \hat{q}$, $\hat{p}_2 = \hat{p}_1 + \hat{q}$). После таких преобразований множитель перед J_1 приобретает вид

$$\gamma_\nu (i\hat{p}_2 - m) \gamma_\mu (i\hat{p}_1 - m) \gamma_\nu = 4m^2 \gamma_\mu - 2\hat{q} \gamma_\mu \hat{q}.$$

Последнее слагаемое в правой части этого соотношения может быть заменено на $2q^2\gamma_\mu$. Действительно, замечая, что

$$\gamma_\mu \hat{q} = -\hat{q}\gamma_\mu + 2q_\mu$$

и умножая это равенство слева на \hat{q} , получим

$$\hat{q}\gamma_\mu\hat{q} = -q^2\gamma_\mu + 2q_\mu\hat{q}.$$

Но последнее слагаемое не дает вклада при вычислении матричных элементов, так как

$$\bar{u}_2\hat{q}u_1 = \hat{u}_2(\hat{p}_2 - \hat{p}_1)u_1 = 0$$

и может быть поэтому отброшено. В результате коэффициент, стоящий в $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ перед J_1 , может быть представлен в виде

$$\gamma_\nu(i\hat{p}_2 - m)\gamma_\mu(i\hat{p}_1 - m)\gamma_\nu = 4m^2\gamma_\mu + 2q^2\gamma_\mu.$$

Аналогичным образом могут быть преобразованы множители, стоящие перед интегралами J_σ и $J_{\sigma\tau}$:

$$\begin{aligned} \gamma_\nu(i\hat{p}_2 - m)\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu(i\hat{p}_1 - m)\gamma_\nu &= -4m\delta_{\sigma\mu} + 2i(\hat{q}\gamma_\mu\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\mu\hat{q}), \\ \gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\tau\gamma_\nu &= -2\gamma_\tau\gamma_\mu\gamma_\sigma. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения и значения интегралов (36.4.7'), (36.4.8) в (36.4.2), получим следующее выражение для $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \left\{ (4m^2 + 2q^2)\gamma_\mu J_1 + \left[4im(p_1 + p_2)_\mu - 2(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)\gamma_\mu\hat{q} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\hat{q}\gamma_\mu(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) + \frac{1}{2}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)\gamma_\mu(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) \right] K_1 + 2\hat{q}\gamma_\mu\hat{q}K_2 - 4\gamma_\mu K_3 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{i\pi^2}{m^2} \frac{\theta}{\sin 2\theta}, \quad K_2 = -\frac{i\pi^2}{2q^2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta), \\ K_3 &= \frac{i\pi^2}{2} \left(1 - \theta \operatorname{ctg} \theta + \ln \frac{L}{m} - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

В этом выражении, так же как это было сделано выше, можно заменить матрицу $i\hat{p}_1$, стоящую справа, и матрицу $i\hat{p}_2$, стоящую слева, на $-m$. В результате мы получим

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) = -\frac{e^2\gamma_\mu}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - 1 \right) - \frac{2}{\operatorname{tg} 2\theta} \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi - \right. \\ \left. - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \ln \frac{L^2}{m^2} \right\} + \frac{ie^2}{32\pi^2 m} (\gamma_\mu\hat{q} - \hat{q}\gamma_\mu) \frac{2\theta}{\sin 2\theta}. \quad (36.4.9) \end{aligned}$$

Нам остается регуляризовать $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$. Для этого нужно вычесть из $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ величину $\Lambda_\mu^{(3)}(p_0, p_0)$, где p_0 — импульс свободного электрона, $p_0^2 = -m_R^2$. Так как в рассматриваемом случае p_1 и p_2 представляют собой импульсы свободного электрона, то, очевидно,

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(3)}(p_0, p_0) &= \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)_{q=0} = \\ &= -\gamma_\mu \frac{e^2}{(2\pi)^2} \left(-\frac{1}{4} \ln \frac{L^2}{m^2} - \frac{9}{8} + \ln \frac{m}{\lambda} \right) \equiv \gamma_\mu L^{(3)}, \quad (36.4.10) \end{aligned}$$

где величина $L^{(3)}$ связана, согласно (22.3.5), с Z_1 соотношением

$$Z_1^{-1} = 1 + L^{(3)} \quad (36.4.11)$$

и Z_1^{-1} в рассматриваемом приближении определяется формулой (36.2.9). Заметим, что имеет место равенство

$$\Sigma_1^{(2)} = L^{(3)}. \quad (36.4.12)$$

Регуляризованное значение $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2) &= \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) - \Lambda_\mu^{(3)}(p_0, p_0) = \\ &= \frac{-\alpha}{\pi} \gamma_\mu \left\{ \left(\frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} - 1 \right) \left(\ln \frac{m_R}{\lambda} - 1 \right) - \frac{2}{\operatorname{tg} 2\theta} \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \theta \right\} + \\ &\quad + \frac{i\alpha}{8\pi m_R} (\gamma_\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma_\mu) \frac{2\theta}{\sin 2\theta}. \quad (36.4.13) \end{aligned}$$

Эта формула справедлива при $p_{1,2}^2 = -m_R^2$. Если $|p_{1,2}^2| \gg m_R^2$, $|q^2| \gg m_R^2$, то

$$\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = \frac{-\alpha}{\pi} \gamma_\mu \left\{ \ln \frac{|q^2|}{4m_R^2} \ln \frac{m_R}{\lambda} + \frac{1}{4} \ln^2 \frac{|q^2|}{4m_R^2} \right\}. \quad (36.4.14)$$

Аналогичным образом может быть найдена вершинная функция 3-го порядка в том случае, когда только одна электронная линия соответствует свободному электрону, фотонная же линия соответствует реальному фотону. Мы не будем приводить здесь подробных вычислений, а приведем только окончательный результат для регуляризованной функции $\Lambda_\mu^{(3)}(p, p+q)$ при $p^2 = -m_R^2$ и $q^2 = 0$:

$$\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p, p+q) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ A \gamma_\mu + iB \frac{\hat{q} \gamma_\mu}{m_R} + iC \frac{p_\mu}{m_R} + D \frac{\hat{q} p_\mu}{m_R} \right\}, \quad (36.4.15)$$

где

94

$$\begin{aligned} A &= -\ln \frac{\lambda^2}{m_R^2} - 2 + \frac{\kappa-2}{2(\kappa-1)} \ln |\kappa| + \frac{1}{\kappa} [F(\kappa-1) - F(-1)], \\ B &= \frac{\ln |\kappa|}{\kappa-1}, \quad C = -\frac{1}{\kappa-1} + \frac{3\kappa-2}{(\kappa-1)^2} \ln |\kappa|, \\ D &= -\frac{1}{\kappa-1} + \frac{2}{\kappa} - \frac{(\kappa-2)(2\kappa-1)}{\kappa(\kappa-1)^2} \ln |\kappa| - \frac{2}{\kappa^2} [F(\kappa-1) - F(-1)], \\ \kappa &= \frac{2pq}{m_R^2}, \quad F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} du, \quad F(-1) = -\frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

§ 37. Модификация закона Кулона.

Аномальный магнитный момент электрона

37.1. Модификация закона Кулона. Найдя радиационные поправки к функциям Грина и к вершинной функции, мы можем перейти теперь к исследованию тех физических эффектов, которые связаны с этими поправками. Простейшими из них являются модификация закона Кулона для вакуума и наличие аномального магнитного момента у электрона и мюона.

Остановимся прежде всего на законе Кулона.

Если задан внешний ток $J_\mu(x)$, то создаваемое им поле $\mathfrak{A}_\mu(x)$ можно, согласно (21.4.6), найти по формуле

$$\mathfrak{A}_\mu(x) = i \int G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x-x') J_\nu(x') d^4x', \quad (37.1.1)$$

где $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x)$ — фотонная функция Грина.

Мы хотим определить поле, создаваемое покоящимся точечным зарядом Q . В этом случае

$$J_{\mu}(x) = iQ\delta_{\mu 4}\delta(\mathbf{r})$$

(заряд предполагается находящимся в начале координат) и формула (37.1.1) для скалярного потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ принимает вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = iQ \int_{-\infty}^{\infty} G_R^{(\gamma)}(x) dt = \frac{iQ}{(2\pi)^3} \int G_R^{(\gamma)}(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k. \quad (37.1.2)$$

Подставляя сюда вместо $G_R^{(\gamma)}(\mathbf{k})$ первое выражение (36.3.9), получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{(2\pi^3)} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \ln \left[1 + \frac{k^2}{m^2} x(1-x) \right] dx \right\} d^3k$$

(мы пользуемся здесь вместо m_R обозначением m).

Замечая далее, что

$$\int D_c(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k = -\frac{2i\pi^2}{r}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(1-x) \ln \left[1 + \frac{k^2}{m^2} x(1-x) \right] dx &= - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}{1 + \frac{k^2}{m^2} x(1-x)} \frac{k^2}{m^2} (1-2x) dx = \\ &= \frac{k^2}{8m^2} \int_0^1 \frac{v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2 \right)}{1 + \frac{k^2}{4m^2} (1-v^2)} dv, \end{aligned}$$

где $v = 2x - 1$, перепишем $\varphi(\mathbf{r})$ в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi r} + \frac{Qe^2}{(2\pi)^5} \int_0^1 \frac{v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2 \right)}{1-v^2} dv \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + \frac{4m^2}{1-v^2}} d^3k.$$

Используя, наконец, соотношение

$$\int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + \frac{4m^2}{1-v^2}} d^3k = \frac{2\pi^2}{r} e^{-\frac{2mr}{\sqrt{1-v^2}}}$$

и вводя вместо v новую переменную $\zeta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, получим окончательно следующую общую формулу для $\varphi(\mathbf{r})$ с учетом поправок порядка α [4]:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi r} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^{\infty} e^{-2mr\zeta} \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2} \right) \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2} d\zeta \right\}. \quad (37.1.3)$$

Входящий сюда интеграл может быть вычислен в двух предельных случаях, когда $mr \ll 1$ и когда $mr \gg 1$:

$$\int_1^{\infty} e^{-2mr\zeta} \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2} \right) \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2} d\zeta = \begin{cases} -\frac{5}{6} - \gamma - \ln mr, & mr \ll 1, \\ \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}, & mr \gg 1, \end{cases} \quad (37.1.4)$$

где γ — постоянная Эйлера,

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \ln N \right\}.$$

Таким образом, потенциал заряда Q на малых и больших расстояниях (по сравнению с $\frac{\hbar}{mc}$) имеет следующий вид:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left(-\frac{5}{3} - 2\gamma + \ln \frac{1}{(mr)^2} \right) \right\}, & mr \ll 1, \\ \frac{Q}{4\pi r} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{4\pi^{1/2}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} \right\}, & mr \gg 1. \end{cases} \quad (37.1.5)$$

Мы видим, что на больших расстояниях от заряда потенциал отличается от кулоновского экспоненциально малым слагаемым, на близких же расстояниях отклонение от закона Кулона изменяется с расстоянием логарифмически.

Формулу (37.1.3) можно интерпретировать следующим образом. Если переписать ее в виде $\varphi(r) = \frac{Q(r)}{4\pi r}$, то можно сказать, что потенциал $\varphi(r)$ определяется законом Кулона с эффективным зарядом $Q(r)$. Этот заряд совпадает с зарядом Q на больших расстояниях $r \gg \frac{\hbar}{mc}$. На малых же расстояниях, $r \ll \frac{\hbar}{mc}$, он равен

$$Q(r) \approx Q \left\{ 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{1}{(mr)^2} \right\}. \quad (37.1.6)$$

37.2. Аномальный магнитный момент электрона и мюона. Рассмотрим теперь вопрос о магнитном моменте электрона.

Как известно, если нерелятивистскую частицу, обладающую магнитным моментом μ , поместить в магнитное поле H , то она приобретет энергию $U_m = -\mu H$. Поэтому, чтобы определить магнитный момент электрона, нужно исследовать взаимодействие электрона с постоянным или медленно меняющимся электромагнитным полем и выделить в энергии этого взаимодействия член, пропорциональный магнитному полю

Согласно результатам § 20.2 взаимодействие электрона с внешним полем $A_\mu^{(e)}(x)$ описывается диаграммой рис. 37.1, на котором жирной вершине соответствует вершинная функция $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ (p_1 и p_2 — 4-импульсы электрона до и после взаимодействия с полем) и фотонной линии — эффективное поле $\mathfrak{A}_\mu(q)$, равное сумме исходного внешнего поля $A_\mu^{(e)}(q)$ и радиационной поправки к нему $\delta A_\mu^{(e)}(q)$, обусловленной поляризацией вакуума, $\mathfrak{A}_\mu(q) = A_\mu^{(e)}(q) + \delta A_\mu^{(e)}(q)$, $q = p_2 - p_1$

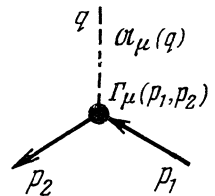


Рис. 37.1.

Этой диаграмме соответствует, очевидно, матричный элемент

$$\langle f | \mathbf{S} | i \rangle = \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{2\varepsilon_1 2\varepsilon_2}} \delta(p_1 - p_2 + q) M,$$

где

$$M = \bar{e} u_2 \Gamma_\mu(p_1, p_2) \mathfrak{A}_\mu(q) u_1 = M_0 + \delta_\Gamma M + \delta_\Pi M,$$

$$M_0 = e u_2 \hat{A}^{(e)} u_1, \quad \delta_\Gamma M = e A_\mu^{(e)} \bar{u}_2 \Lambda_\mu(p_1, p_2) u_1, \quad \delta_\Pi M = \bar{e} u_2 \delta \hat{A}^{(2)} u_1$$

и u_1 и u_2 — биспинорные амплитуды, относящиеся к 4-импульсам электрона p_1 и p_2 .

В предыдущем параграфе мы вычислили $\Lambda_\mu(p_1, p_2)$ и $\delta A_\mu^{(e)}(q)$ с точностью до членов, пропорциональных α . Из формул (36.4.13) и (36.3.10)

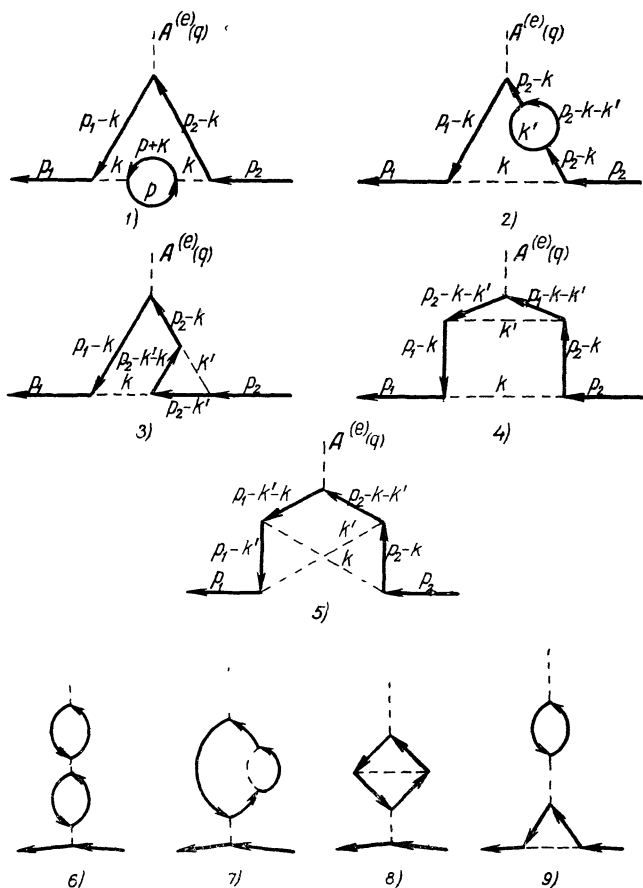


Рис. 37.2.

следует, что при малых q_μ (малые q_μ соответствуют медленно изменяющемуся полю) только величина $\Lambda_R^{(3)}(p_1, p_2)$ содержит слагаемые, линейные относительно q , величина же $\delta A_\mu^{(e)}(q)$ (так же как и $\Pi_R^{(2)}(q)$) пропорциональна q^2 . Поэтому только величина $\delta_\Gamma M$ содержит интересные нас члены, линейные относительно магнитного поля, или, точнее говоря, относительно тензора электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}(q) = i(q_\mu A_\nu^{(e)}(q) - q_\nu A_\mu^{(e)}(q)).$$

Сумма этих членов (с точностью до слагаемых порядка α) равна, согласно (36.4.13),

$$\delta_\Gamma M = -\frac{ie}{4\pi} \bar{u}_2 \frac{\alpha}{2m} (\hat{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu\hat{q}) A_\mu^{(e)}(q) u_1 = -\frac{i\alpha}{8\pi m} \bar{e}u_2 \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}(q) u_1$$

(мы пользуемся здесь вместо e_R и m_R обозначениями e и m).

Вспомянув, что матрицы спина электрона Σ_i связаны с матрицами γ_μ соотношениями

$$\Sigma_1 = \frac{1}{i} \gamma_2 \gamma_3, \quad \Sigma_2 = \frac{1}{i} \gamma_3 \gamma_1, \quad \Sigma_3 = \frac{1}{i} \gamma_1 \gamma_2,$$

можно переписать $\delta_{\Gamma} M$ в виде

$$\delta_{\Gamma} M = -\delta_1 \mu \bar{u}_2 (\Sigma \mathbf{H} - \alpha \mathbf{E}) u_1, \quad (37.2.1)$$

где [5]

$$\delta_1 \mu = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0 \quad (37.2.2)$$

и μ_0 — магнетон Бора, $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$.

Это выражение соответствует, очевидно, взаимодействию с электромагнитным полем $F_{\mu\nu}$ частицы, обладающей магнитным моментом $\delta_1 \mu$. Мы видим, таким образом, что кроме «нормального» μ_0 (т. е. следующего из уравнений Дирака) магнитного момента электрон обладает еще дополнительным магнитным моментом $\delta_1 \mu$. Этот момент называется *аномальным магнитным моментом*.

Формула (37.2.2) определяет аномальный магнитный момент электрона с точностью до членов порядка α^2 . Но можно найти и следующие радиационные поправки к магнитному моменту электрона. Для этого нужно, очевидно, выделить в $\Lambda_{R\mu}(p_1, p_2)$ члены, пропорциональные q . Они будут иметь следующий вид:

$$e\Lambda_{R\mu}(p_1, p_2) \sim -\frac{i}{2} \mu' (\hat{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}), \quad q = p_2 - p_1, \quad (37.2.3)$$

где μ' и представляет собой аномальный магнитный момент электрона.

Обратим внимание на то обстоятельство, что аномальный магнитный момент непосредственно связан с вершинной функцией. Поэтому при вычислении поправок к магнитному моменту достаточно рассматривать только вершинные диаграммы. Например, для вычисления магнитного момента электрона с точностью до членов порядка α^3 нужно рассмотреть диаграммы рис. 37.2, которым соответствуют, согласно правилам Фейнмана, величины

$$M_1 = \frac{e^3}{(2\pi)^8} \bar{u}_2 \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{1}{k^2} \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) \frac{d^4 k}{k^2} u_1,$$

$$M_2 = \frac{2e^3}{(2\pi)^8} \bar{u}_2 \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \Sigma^{(2)}(p_2 - k) \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \times \\ \times \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{d^4 k}{k^2} u$$

$$M_3 = \frac{2ie^3}{(2\pi)^4} \bar{u}_2 \int \Lambda_\mu^{(3)}(p_2, p_2 - k) \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{d^4 k}{k^2} u_1,$$

$$M_4 = \frac{ie^3}{(2\pi)^4} \bar{u}_2 \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} A_\nu^{(e)}(q) \Lambda_\nu^{(3)}(p_2 - k, p_1 - k) \times \\ \times \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{d^4 k}{k^2 + \lambda^2} u_1,$$

$$M_5 = \frac{-e^5}{(2\pi)^8} \bar{u}_2 \int \gamma_\lambda \frac{i(\hat{p}_2 - k) - \hat{m}}{(p_2 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k} - \hat{k}') - m}{(p_2 - k - k')^2 + m^2} \times \\ \times \hat{A}^{(e)}(q) \cdot \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k} - \hat{k}') - m}{(p_1 - k - k')^2 + m^2} \gamma_\lambda \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}') - m}{(p_1 - k')^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{d^4 k}{k^2} \frac{d^4 k'}{k'^2} u_1$$

(величины $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$, $\Sigma^{(2)}(p)$ и $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ определяются формулами (36.3.6), (36.2.10), (36.4.13)). Регуляризовав сумму этих величин:

$$(\delta_{\Gamma}M)_R = \sum_{i=1}^5 (M_i - M_i|_{q=0}),$$

нужно выделить в $(\delta_{\Gamma}M)_R$ член, линейный по q :

$$(\delta_{\Gamma}M)_R = -\delta_2 \mu \bar{u}_2 A_{\mu}^{(e)}(q) \frac{\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}}{2i} q_{\nu} u_1 ;$$

тогда коэффициент $\delta_2 \mu$ и будет радиационной поправкой к магнитному моменту электрона порядка α^2 .

Мы приведем здесь только результат вычислений $\delta_2 \mu$ [6]:

$$\delta_2 \mu = -0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \mu_0. \quad (37.2.4)$$

Таким образом, магнитный момент электрона с точностью до членов порядка α^3 равен

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right). \quad (37.2.5)$$

Заметим, что формула (37.2.5) подтверждена экспериментально с точностью до 1% в коэффициенте, стоящем перед α^2 .

Перейдем теперь к рассмотрению аномального магнитного момента мюона. Первая поправка $\delta_1 \mu$ к магнитному моменту мюона будет, очевидно, иметь тот же вид, что и соответствующая поправка к магнитному моменту электрона:

$$\delta_1 \mu = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0,$$

где $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_{\mu}c}$ — нормальный магнитный момент мюона (m_{μ} — масса мюона). Однако вторая поправка будет существенно отличаться от второй поправки в случае электрона. Это отличие связано с тем, что в выражение для M_1 входит поляризационный оператор $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$, который в случае электрона определяется виртуальными электронно-позитронными парами, а в случае мюона — как виртуальными μ_+ — μ_- парами, так и виртуальными электронно-позитронными парами, причем вклад последних благодаря меньшей массе электрона превосходит вклад от μ_+ — μ_- пар.

Мы приведем здесь только результат вычислений второй поправки к магнитному моменту мюона:

$$\delta_2 \mu = 0,76 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \mu_0.$$

Таким образом, магнитный момент мюона с учетом первых двух поправок имеет вид

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0,76 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right). \quad (37.2.6)$$

Заметим, что точное измерение аномального магнитного момента мюона может иметь большое значение для проверки справедливости квантовой электродинамики в области больших импульсов. Действительно, в то время как при вычислении поправок к магнитному моменту электрона в интегралах

лах по 4-импульсам p виртуальных частиц основную роль играет область $p^2 \sim m^2$, в соответствующих поправках к магнитному моменту мюона основную роль играет область $p^2 \sim m_\mu^2$. Так как масса мюона m_μ близка к массе пиона, являющегося сильно взаимодействующей частицей, то не исключено, что в этой области импульсов может проявиться либо общее нарушение характера электромагнитных взаимодействий, либо наличие каких-либо других специфических для мюонов взаимодействий.

Так как интеграл, определяющий поправку к магнитному моменту является сходящимся, то для грубой оценки возможных эффектов можно при вычислении $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$, т. е. интеграла (36.4.3), считать область Ω конечной сферой радиуса L . Это приводит к следующему выражению для первой поправки к магнитному моменту мюона [7]:

$$\delta_1 \mu = \frac{f\alpha}{2\pi} \mu_0 \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{m_\mu^2}{L^2} \right).$$

Достигнутая в настоящее время точность в измерении магнитного момента мюона согласуется с формулой (37.2.6) с относительной точностью $\sim 5 \cdot 10^{-7}$.

§ 38. Радиационные поправки к атомным уровням

38.1. Уравнения Дирака с массовым оператором. Перейдем теперь к учету высших приближений теории возмущений в задаче о стационарных состояниях атомов. Этот учет позволяет объяснить смещение уровней изолированного атома (по сравнению с системой уровней, даваемой уравнениями Дирака) и наличие у уровней так называемой естественной ширины.

Чтобы исследовать это смещение (оно называется *радиационным*), обратимся к уравнению (21.4.17) для электронной функции Грина. Опуская в правой его части δ -функцию, мы получим уравнение

$$\left\{ \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie\mathfrak{A}_\mu(x) \right) + m \right\} \psi(x) + i \int \Sigma(x, x') \psi(x') d^4x' = 0 \quad (38.1.1)$$

для волновой функции электрона $\psi(x)$ во внешнем поле $A_\mu^{(e)}(x)$ с учетом эффектов высших приближений. Здесь $\mathfrak{A}_\mu(x) \equiv \langle A_\mu(x) \rangle$ — сумма исходного внешнего поля $A_\mu^{(e)}(x)$ и радиационной поправки к нему $\delta A_\mu^{(e)}(x)$, $\mathfrak{A}_\mu(x) = A_\mu^{(e)}(x) + \delta A_\mu^{(e)}(x)$, и $\Sigma(x, x')$ — массовый оператор,

$$\Sigma(x, x') = e^2 \gamma_\nu \int G^{(e)}(x, x_1) \Gamma_\mu(x_1, x'; \xi) G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(\xi, x) d^4x_1 d^4\xi.$$

Мы будем далее предполагать, что массовый оператор определяется формулой

$$\Sigma(x, x') = e^2 D_c(x - x') \gamma_\mu S_c^{(e)}(x, x') \gamma_\mu, \quad (38.1.2)$$

где $S_c^{(e)}(x, x')$ — функция Грина уравнений Дирака для электрона в поле $\mathfrak{A}_\mu(x)$, т. е. решение уравнения

$$\left\{ \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie\mathfrak{A}_\mu(x) \right) + m \right\} S_c^{(e)}(x, x') = -i\delta(x - x').$$

Эта функция удовлетворяет, согласно (27.1.3), интегральному уравнению

$$S_c^{(e)}(x, x') = S_c(x - x') - \int S_c(x - x'') e\hat{\mathfrak{A}}(x'') S_c^{(e)}(x'', x') d^4x''. \quad (38.1.3)$$

При подстановке этого выражения в (38.1.2) можно, очевидно, после перенормировки массы не учитывать первого слагаемого,

$$\Sigma(x, x') = -e^3 \int D_c(x-x') \gamma_\mu S_c(x'-x'') \gamma_\nu \mathfrak{U}_\nu(x'') S_c^{(e)}(x'', x') d^4x''.$$

Заменяя здесь $\mathfrak{U}_\nu(x'')$ на $A_\nu^{(e)}(x'')$ и $S_c^{(e)}(x'', x')$ на $S_c(x''-x')$, получим следующее выражение для массового оператора, справедливое с точностью до членов, пропорциональных e^3 :

$$\Sigma(x, x') = -e^3 \int D_c(x-x') \gamma_\mu S_c(x'-x'') \gamma_\nu A_\nu^{(e)}(x'') S_c(x''-x') \gamma_\mu d^4x''. \tag{38.1.4}$$

В импульсном представлении массовый оператор определяется формулой

$$\Sigma(p_1, p_2) = e\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) A_\mu^{(e)}(q), \quad q = p_2 - p_1.$$

Прибавив к $\Sigma(p_1, p_2)$ произведение γ_μ на $e\delta A_\mu^{(e)}(q)$, мы получим величину

$$\delta U(q) = e \{ \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) A_\mu^{(e)}(q) + \gamma_\mu \delta A_\mu^{(e)}(q) \}, \tag{38.1.5}$$

которая описывает взаимодействие электрона с внешним полем с точностью до членов порядка e^3 . Действительно, взаимодействие электрона с полем описывается в уравнениях Дирака величиной $U(x) = e\gamma_\mu A_\mu^{(e)}(x)$; уравнение же (38.1.5) означает, что для учета радиационных поправок к величине $U(x)$ нужно добавить $\delta U(x)$. Графически это очевидно, так как величине $\delta U(q)$ соответствует совокупность двух диаграмм (рис. 38.1), которыми исчерпываются возможные в рассматриваемом случае эффекты взаимодействия третьего порядка.

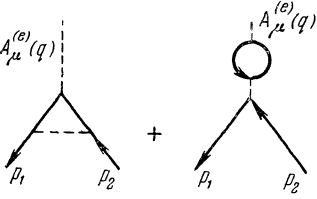


Рис. 38.1.

Подставляя в (38.1.5) выражения (36.4.14) и (36.3.10) для $\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p, p_2)$ и $\delta A_\mu^{(e)}(q)$, получим

$$\delta U(q) = F_\mu(q) A_\mu^{(e)}(q), \tag{38.1.6}$$

где

$$F_\mu(q) = -\frac{e^3}{(2\pi)^2} \left\{ \gamma_\mu \left[\left(\frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} - 1 \right) \left(\ln \frac{m}{\lambda} - 1 \right) - \frac{\theta}{2} \text{tg } \theta - \frac{2}{\text{tg } 2\theta} \int_0^\theta \xi \text{tg } \xi d\xi \right] + \frac{i}{8m} (\hat{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}) \frac{2\theta}{\sin 2\theta} - \gamma_\nu \frac{1}{q^2} (q_\mu q_\nu - q^2 \delta_{\mu\nu}) \left[\frac{4m^2 - 2q^2}{-3q^2} (1 - \theta \text{ctg } \theta) - \frac{1}{9} \right] \right\}.$$

Первые два члена в разложении $F_\mu(q)$ по степеням q_ν имеют вид

$$F_\mu(q) = -\frac{e^3}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{4}{3m_R^2} q^2 \left(\ln \frac{m_R}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \gamma_\mu + \frac{i}{2m_R} (\hat{q}\gamma_\nu - \gamma_\nu \hat{q}) \right\}.$$

Заменяв здесь q_μ на $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, мы перейдем к координатному представлению функции $\delta U(x)$:

$$\delta U(x) = \frac{e^3}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{4}{3m_R^2} \frac{1}{i} \left(\ln \frac{m_R}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \gamma_\mu \square A_\mu^{(e)}(x) - \frac{1}{2im_R} \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}(x) \right\} = \frac{-e^3}{(4\pi)^2 m_R} (\Sigma H - i\alpha E) + \frac{e^3}{(4\pi)^2} \frac{4}{3m_R^2} \left(\ln \frac{m_R}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) \beta (\square \Phi - \alpha \square A), \quad (38.1.7)$$

где $E(x)$ и $H(x)$ — электрическое и магнитное поля, $\Phi(x)$ и $A(x)$ — соответствующие им скалярный и векторный потенциалы и α и β — матрицы Дирака.

38.2. Общие формулы для радиационного смещения и естественной ширины уровней. Далее мы разясним область применимости приближенной формулы (38.1.4) для массового оператора, пока же будем пользоваться «точной» формулой (38.1.2) (точной в том смысле, что в функции Грина $S_c^{(e)}(x, x')$ правильно учитывается внешнее поле).

Подставляя в (38.1.2) выражение (27.1.2) для $S_c^{(e)}(x, x')$:

$$S_c^{(e)}(x, x') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \sum_n \frac{\psi_n^0(\mathbf{r}) \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}')}{E_n^0(1-i0) + \omega},$$

где $\psi_n^0(x) = \psi_n^0(\mathbf{r}) e^{-iE_n^0 t}$ — «стационарные» волновые функции электрона, удовлетворяющие уравнениям Дирака без массового оператора, но с радиационной поправкой к потенциалу внешнего поля (которое мы предполагаем не зависящим от времени),

$$\left\{ \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie\mathcal{A}_\mu(x) \right) + m \right\} \psi_n^0(x) = 0,$$

представим $\Sigma(x, x')$ в виде

$$\Sigma(x, x') = \frac{-e^2}{(2\pi)^5} \int \frac{d^4 k}{k^2 - i0} \gamma_\mu \sum_n e^{ikr} \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}) \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}') e^{-ikr'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega - k_0)(t-t')}}{E_n^0(1-i0) - \omega} d\omega \gamma_\mu. \quad (38.2.1)$$

Возвратимся теперь к уравнению (38.1.1) и будем искать решения его, имеющие вид

$$\psi(x) = \psi(\mathbf{r}) e^{-iEt}.$$

Подставляя это выражение в (38.1.1), получим следующее уравнение для определения возможных значений E :

$$H^{(0)}\psi(\mathbf{r}) + i \int \gamma_4 \Sigma_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3x' = E\psi(\mathbf{r}), \quad (38.2.2)$$

где $H^{(0)}$ — «невозмущенный» гамильтониан, соответствующий уравнениям Дирака без массового оператора, но с радиационной поправкой к внешнему полю:

$$H^{(0)}\psi_n^0(\mathbf{r}) = E_n^0\psi_n^0(\mathbf{r}),$$

и $\Sigma_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — компонента Фурье массового оператора $\Sigma(x, x')$ по времени,

$$\Sigma_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iE(t-t')} \Sigma(x, x') dt \quad (38.2.3)$$

(внешнее поле предполагается не зависящим от времени, поэтому в $\Sigma(x, x')$ времена t и t' входят только в виде разности $t-t'$).

Сокращенно уравнение (38.2.2) можно записать в виде

$$H_E \psi(r) = E \psi(r),$$

где

$$H_E = H^{(0)} + i\gamma_4 \Sigma_E.$$

Так как оператор $i\gamma_4 \Sigma_E$ пропорционален малому параметру α , то решение этого уравнения можно искать по методу обычной теории возмущений. Ограничиваясь первым ее приближением, получим для смещения n -го уровня выражение

$$\langle n | i\Sigma_E | n \rangle \equiv i \int \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}) \Sigma_E \psi_n^0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = i \int \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}) \Sigma_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_n^0(\mathbf{r}') d^3x d^3x'.$$

Используя формулы (38.1.2) и (38.2.3), можно представить $\langle n | i\Sigma_E | n \rangle$ в виде [8]

$$\begin{aligned} \langle n | i\Sigma_E | n \rangle &= \frac{e^2}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4k}{k^2 - i0} \sum_{n'} \frac{\langle n | \gamma_\mu e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} | n' \rangle \langle n' | \gamma_\mu e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} | n \rangle}{(1-i0) E_{n'}^0 - E_n^0 + k_0} = \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4 i} \sum_{n'} \int d^3k Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|) \langle n | \gamma_\mu e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} | n' \rangle \langle n' | \gamma_\mu e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} | n \rangle, \end{aligned} \quad (38.2.4)$$

где

$$Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{[(1-i0) E_{n'}^0 - E_n^0 + k_0] (k^2 - k_0^2 - i0)}$$

и

$$\langle n | \gamma_\mu e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} | n' \rangle = \int \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}) \gamma_\mu e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_{n'}^0(\mathbf{r}) d^3x.$$

Величина $Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|)$ может быть непосредственно вычислена:

$$Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|) = \frac{\pi i}{|\mathbf{k}|} \frac{1}{E_n^0 - E_{n'}^0 (1-i0) - |\mathbf{k}| \frac{E_n^0}{|E_n^0|}}.$$

Замечая, что

$$\frac{1}{x-i0} = \pi i \delta(x) + P \frac{1}{x},$$

можно переписать $Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|)$ в виде

$$\begin{aligned} Q(E_n^0, E_{n'}^0, |\mathbf{k}|) &= \frac{\pi^2}{|\mathbf{k}|} \frac{E_{n'}^0}{|E_{n'}^0|} \delta\left(E_n^0 - E_{n'}^0 - |\mathbf{k}| \frac{E_{n'}^0}{|E_{n'}^0|}\right) + \\ &+ \frac{\pi i}{|\mathbf{k}|} P \frac{1}{E_n^0 - E_{n'}^0 - |\mathbf{k}| \frac{E_{n'}^0}{|E_{n'}^0|}}. \end{aligned} \quad (38.2.5)$$

Подстановка этого выражения в (38.2.4) показывает, что величина $\langle n | i\Sigma_E | n \rangle$ является комплексной,

$$\langle n | i\Sigma_E | n \rangle = \delta E_n - \frac{i}{2} \Gamma_n,$$

где

$$\delta E_n = \frac{e^2}{16\pi^3} P \int \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|} \sum_{n'} \frac{\langle n | \gamma_\mu e^{i\mathbf{k}r} | n' \rangle \langle n' | \gamma_\mu e^{-i\mathbf{k}r} | n \rangle}{E_n^0 - E_{n'}^0 - \frac{E_{n'}^0}{|\mathbf{k}|}}, \quad (38.2.6)$$

$$\Gamma_n = \frac{e^2}{8\pi^2} \int \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|} \sum_{n'} \frac{E_{n'}^0}{|E_{n'}^0|} \langle n | \gamma_\mu e^{i\mathbf{k}r} | n' \rangle \langle n' | \gamma_\mu e^{-i\mathbf{k}r} | n \rangle \times \\ \times \delta \left(E_n^0 - E_{n'}^0 - |\mathbf{k}| \frac{E_{n'}^0}{|E_{n'}^0|} \right).$$

Вещественная часть $\langle n | i\Sigma_E | n \rangle$ определяет собственно радиационное смещение уровня, а мнимая часть — естественную его ширину, обусловленную взаимодействием электрона с электромагнитным полем (Γ_n представляет собой суммарную вероятность перехода электрона из исходного состояния, связанную с излучением фотона).

38.3. Радиационное смещение уровней атома водорода. Общие формулы (38.2.6) наглядно показывают, что радиационное смещение уровней обусловлено взаимодействием электрона с виртуальными фотонами, однако конкретное вычисление величины радиационного смещения по этим формулам очень сложно. Более удобным является следующий прием. Разобьем область интегрирования в (38.2.6) на две части, в первой из которых энергия фотона меньше некоторого значения K , а во второй — больше этого значения, и выберем величину K таким образом, чтобы она была значительно больше всех разностей атомных уровней,

$$K \gg |E_n^0 - E_{n'}^0|,$$

и одновременно значительно меньше m , $K \ll m$. Тогда в области $|\mathbf{k}| > K$, очевидно, не имеет смысла пользоваться точным выражением (27.1.2) для функции $S_c^{(e)}(x, x')$; напротив, при $|\mathbf{k}| > K$ можно пренебречь влиянием связи электронов в атоме, т. е. можно заменить под знаком интеграла в (38.1.3) $S_c^{(e)}(x'', x')$ на $S_c(x'' - x')$.

Иными словами, при $|\mathbf{k}| > K$ можно пользоваться для массового оператора выражением (38.1.4) и, следовательно, можно находить вклад, вносимый в радиационное смещение «коротковолновыми» фотонами ($|\mathbf{k}| > K$), рассматривая величину $\delta U(x)$, определяемую формулой (38.1.7), как энергию возмущения.

В области $|\mathbf{k}| < K$ необходимо, вообще говоря, пользоваться точной формулой (38.2.6). Она значительно упрощается при $|\mathbf{k}| < K \ll m$, когда законно нерелятивистское приближение. Мы будем далее пользоваться этим приближением для определения вклада в радиационное смещение, вносимого «длинноволновыми» фотонами ($|\mathbf{k}| \ll m$) [9], и покажем, что границы областей «коротковолновых» и «длинноволновых» фотонов входят в радиационное смещение под знаком логарифма (с одинаковым коэффициентом перед логарифмом). Это значит, что области «коротковолновых» и «длинноволновых» фотонов «сшиваются», т. е. промежуточная область $|\mathbf{k}| \sim K$ не вносит существенного вклада в радиационное смещение.

Перейдем к определению вкладов, вносимых в радиационное смещение атомных уровней «коротковолновыми» и «длинноволновыми» фотонами.

Рассматривая $\delta U(x)$ (см. формулу (38.1.7)) как возмущение и пренебрегая магнитным взаимодействием между электронами, получим следующее выражение для вклада в радиационное смещение n -го уровня атома,

вносимого «коротковолновыми» фотонами:

$$\delta E'_n = \alpha \frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{4}{3m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) (\psi_n^0, \Delta\Phi\psi_n^0) + \frac{i}{m} (\psi_n^0, \gamma_4 \alpha E \psi_n^0) \right\}, \quad (38.3.1)$$

где $\psi_n^0(\mathbf{r})$ — нерелятивистские волновые функции атома, вычисленные без учета радиационной поправки к полю, создаваемому ядром и атомными электронами, $\Phi = -iA_4^{(e)}$ — потенциал внешнего поля и $(\psi_n^0, \mathbf{L}\psi_n^0) \equiv \int \psi_n^{0*} \mathbf{L}\psi_n^0 d^3x$. Это выражение содержит «массу фотона» λ , что и указывает на то обстоятельство, что формула (38.3.1) не учитывает вклада в радиационное смещение, вносимого «длинноволновыми» фотонами. Последний в нерелятивистском приближении определяется формулой

$$\Delta E_n = \sum_{n', k, e} \frac{|\langle n | \mathbf{V} | n' \rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0 - \omega},$$

где $\langle n | \mathbf{V} | n' \rangle$ — матричный элемент энергии взаимодействия электрона с фотоном:

$$\langle n | \mathbf{V} | n' \rangle = \frac{-e}{\sqrt{2\omega}} \langle n | \mathbf{e}\mathbf{v} | n' \rangle,$$

$\mathbf{v} = \frac{1}{im} \nabla$ — оператор скорости электрона и \mathbf{e} — вектор поляризации фотона с волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω .

Замечая, что

$$\sum_e |\langle n | \mathbf{e}\mathbf{v} | n' \rangle|^2 = \frac{2}{3} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2,$$

и переходя от суммирования по \mathbf{k} к интегрированию, с учетом $\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi)^3}$ представим ΔE_n в виде

$$\Delta E_n = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^K d\omega \omega \sum_{n'} \frac{|\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0 - \omega}, \quad (38.3.2)$$

где верхним пределом мы считаем величину K (учитывая логарифмическую зависимость результата от K).

В этом выражении нужно произвести теперь перенормировку массы. Для свободного электрона ΔE равно его электромагнитной массе δm (точнее, той части δm , которая обусловлена взаимодействием электрона с фотонами, энергия которых меньше K). Но мы уже включили δm в массу электрона m и под энергией уровня n понимаем полную энергию за вычетом m . Поэтому мы должны вычесть из (38.3.2) соответствующее выражение для свободного электрона.

Так как для свободного электрона отличны от нуля только диагональные элементы скорости, то в этом случае формула (38.3.2) приобретает вид

$$\Delta E = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^K d\omega \omega \cdot \frac{1}{\omega} \langle n | \mathbf{v}^2 | n \rangle.$$

Отнимая это выражение от (38.3.2) и замечая, что

$$\sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 = \langle n | \mathbf{v}^2 | n \rangle,$$

получим следующую формулу для радиационного смещения уровня E_n , обусловленного взаимодействием электрона с фотонами, энергия которых не превосходит K :

$$\delta E_n'' = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^K d\omega \sum_{n'} \frac{|\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0 - \omega} (E_n^0 - E_{n'}^0). \quad (38.3.3)$$

Выполнив интегрирование по ω с учетом $K \gg |E_n^0 - E_{n'}^0|$, получим

$$\delta E_n'' = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 (E_{n'}^0 - E_n^0) \ln \frac{K}{|E_{n'}^0 - E_n^0|}. \quad (38.3.4)$$

Вводя далее величину ε_0 , определяемую формулой

$$\ln \varepsilon_0 = \frac{\sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 (E_{n'}^0 - E_n^0) \ln |E_{n'}^0 - E_n^0|}{\sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 (E_{n'}^0 - E_n^0)}, \quad (38.3.5)$$

перепишем $\delta E_n''$ в виде

$$\delta E_n'' = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 (E_{n'}^0 - E_n^0) \ln \frac{K}{\varepsilon_0}. \quad (38.3.6)$$

Входящая сюда сумма равна

$$\begin{aligned} \sum_{n'} |\langle n | \mathbf{v} | n' \rangle|^2 (E_{n'}^0 - E_n^0) &= -\frac{e}{m^2} \int \psi_n^{0*}(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r}) \nabla \psi_n^0(\mathbf{r}) d^3x = \\ &= \frac{e}{2m^2} \int \Delta \varphi(\mathbf{r}) |\psi_n^0(\mathbf{r})|^2 d^3x. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно

$$\delta E_n'' = \frac{\alpha e}{\pi m^2} (\psi_n^0, \Delta \varphi \psi_n^0) \ln \frac{K}{\varepsilon_0}. \quad (38.3.7)$$

Мы не делали пока никаких предположений о величине K . Выберем теперь K таким образом, чтобы минимальная энергия фотонов, взаимодействие с которыми еще учитывается формулой (38.3.1), была равна K . При этом, согласно (29.2.10),

$$\ln \lambda = \ln 2K - \frac{5}{6}$$

и сумма $\delta E_n'$ и $\delta E_n''$, определяющая общее радиационное смещение уровня E_n , не будет содержать ни λ ни K [9, 10]:

$$\begin{aligned} \delta E_n = \delta E_n' + \delta E_n'' &= \frac{\alpha e}{4\pi} \left\{ \frac{4}{3m^2} \left(\ln \frac{m}{2\varepsilon_0} - \frac{3}{8} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times (\psi_n^0, \Delta \varphi \psi_n^0) + \frac{i}{m} (\psi_n^0, \beta \alpha E \psi_n^0) \right\}. \quad (38.3.8) \end{aligned}$$

В случае водородоподобного атома

$$e\varphi = -\frac{Ze^2}{r}$$

и

$$(\psi_n^0, e\Delta \varphi \psi_n^0) = 4\pi e^2 Z |\psi_n^0(0)|^2, \quad (38.3.9)$$

а так как

$$|\psi_n^0(0)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z}{na}\right)^3, & l=0, \\ 0 & l \neq 0, \end{cases}$$

где n и l — главное и орбитальное квантовые числа и $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$, то

$$\frac{\hbar^2}{m^2c^2} (\psi_n^0, e\Delta\varphi\psi_n^0) = \begin{cases} 8 \frac{\alpha^2}{n^3} Z^4 \text{Ry}, & l=0, \\ 0 & l \neq 0, \end{cases}$$

где $\text{Ry} = \frac{1}{2} \alpha^2 mc^2$. Далее можно показать, что

$$\frac{e\hbar}{mc} (\psi_n^0, i\beta\alpha E\psi_n^0) = \begin{cases} -4\alpha^2 \frac{Z^4}{n^3} \frac{\text{Ry}}{(l+1)(2l+1)}, & j = l + \frac{1}{2}, \\ 4\alpha^2 \frac{Z^4}{n^3} \frac{\text{Ry}}{l(2l+1)}, & j = l - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (38.3.10)$$

так что окончательно для радиационного смещения уровней водородоподобного атома в s -состояниях получается формула [9]

$$\delta E(n, 0) = \frac{8Z^4}{n^3} \frac{\alpha^3}{3\pi} \text{Ry} \left[\ln \frac{m}{2\varepsilon_0} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right], \quad (38.3.11)$$

а для смещения уровней в состояниях с $l \neq 0$ — формула

$$\delta E(n, l) = \frac{8Z^4}{n^3} \frac{\alpha^3}{3\pi} \text{Ry} \left[\ln \frac{\text{Ry}}{\varepsilon_0} + \frac{3}{8} \frac{C_{lj}}{2l+1} \right], \quad (38.3.12)$$

где

$$C_{lj} = \begin{cases} \frac{1}{l+1}, & j = l + \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{l}, & j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Мы видим, что радиационное смещение уровней водородоподобного атома составляет по порядку величины $Z^2\alpha^3 E_0$, где E_0 — энергия основного состояния или $\alpha\Delta E$, где $\Delta E \sim Z^2\alpha^2 E_0$ — расщепление уровня, соответствующее тонкой структуре.

Для уровней водорода $2s$ и $2p$ радиационные смещения (в единицах частоты) составляют

$$\Delta\nu(2s_{1/2}) = 1034 \text{ МГц},$$

$$\Delta\nu(2p_{1/2}) = -17 \text{ МГц},$$

$$\Delta\nu(2p_{3/2}) = 8 \text{ МГц}.$$

Как известно, несмещенные состояния $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ обладают одинаковой энергией, радиационные же смещения этих уровней различны, и уровень $2s_{1/2}$ оказывается лежащим выше уровня $2p_{1/2}$ примерно на 1051 МГц .

Приведенные формулы определяют радиационное смещение уровня порядка $\alpha^3 E_0$. Можно показать, что в следующем приближении теории возмущений мы получим смещение уровня водородоподобного атома, равное [11]

$$\delta E_n^{(2)} = \frac{Z^5\alpha^4}{n^3} \text{Ry} \left(1 + \frac{11}{128} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5}{192} \right). \quad (38.3.13)$$

При $n = 2$ и $Z = 1$ это дает 7 МэВ . Разность энергий уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ для водорода получается с учетом этой поправки равной $1057,19 \text{ МэВ}$, тогда как экспериментальное значение этой величины равно $1057,77 \pm 0,1 \text{ МэВ}$ [12].

В заключение этого раздела заметим, что, используя аналогичные методы, можно определить радиационное смещение уровней позитрония. Разность основных уровней орто- и парапозитрония оказывается при этом равной [13]

$$\Delta W = \alpha^2 \text{Ry} \left\{ \frac{7}{6} - \left(\frac{16}{9} + \ln 2 \right) \frac{\alpha}{\pi} \right\} = 2,0337 \cdot 10^5 \text{ МэВ/сек.}$$

Экспериментально найденное значение этой величины составляет [14]

$$\Delta W = (2,0333 \pm 0,0004) \cdot 10^5 \text{ МэВ/сек.}$$

38.4. Радиационное смещение уровней μ -мезоводорода. В радиационном смещении уровней атомного электрона поляризация вакуума играет незначительную роль (около 3% от общего смещения). Это связано с тем, что кулоновское поле ядра искажается поляризацией электронно-позитронного вакуума на расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона \hbar/mc , размеры же электронных орбит в атоме значительно больше \hbar/mc .

Иные соотношения имеют место в μ -мезонном атоме, в котором роль электронов играют отрицательные μ -мезоны. Из-за большой по сравнению с электроном массы μ -мезона (в 210 раз) размеры орбит в μ -мезонном атоме значительно меньше размеров электронных орбит в обычном атоме, и основная роль в радиационном смещении уровней μ -мезонного атома играет поляризация электронно-позитронного вакуума.

Радиационное смещение уровней μ -мезонного атома водорода, или, иначе, μ -мезоводорода, составляет примерно $\alpha^2 E_0$, где E_0 — энергия основного состояния этого атома, в то время как для обычных атомов это смещение составляет только α^3 от энергии основного состояния.

Чтобы найти радиационное смещение уровней μ -мезоводорода (точнее говоря, водородоподобного μ -мезонного атома) [15], воспользуемся формулой (37.1.3) для радиационной поправки к закону Кулона, обусловленной поляризацией электронно-позитронного вакуума:

$$\delta\varphi(r) = \frac{\alpha Z e}{6\pi^2 r} \int_1^\infty e^{-2mr\xi} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} d\xi.$$

Радиационное смещение энергии μ -мезона, находящегося в состоянии с волновой функцией $\psi_n^0(\mathbf{r})$, равно

$$\begin{aligned} \delta E_n &= \int e\delta\varphi(r) |\psi_n^0(\mathbf{r})|^2 d^3x = \\ &= -\frac{\alpha Z e^2}{6\pi^2} \int_1^\infty \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} d\xi \int \frac{e^{-2mr\xi}}{r} |\psi_n^0(\mathbf{r})|^2 d^3x. \end{aligned}$$

Это выражение, отнесенное к энергии основного уровня $E_0 = -\frac{e^2 Z^2}{4\pi a_\mu}$ (a_μ -радиус нормальной орбиты μ -мезона в мезоводороде, равный $a_\mu = \frac{4\pi}{m_\mu e^2}$), может быть представлено в виде

$$\frac{\delta E_n}{|E_0|} = -\frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} J_{nl}(2\delta\xi) d\xi, \quad (38.4.1)$$

где

$$J_{nl}(y) = \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3 \int_0^{\infty} r e^{-yr} R_{nl}^2 \left(\frac{\varepsilon}{m} r\right) dr,$$

$R_{nl}(r)$ — нормированная радиальная функция и

$$\varepsilon = \frac{m}{m_{\mu}\alpha Z}$$

(m_{μ} — приведенная масса μ -мезона, l — орбитальное квантовое число). Приближенное интегрирование в (38.4.1) приводит к следующим значениям смещения уровня в электрон-вольтах для различных Z (оно всегда отрицательно):

$nl \backslash Z$	1	6	20
1s	1,8	320	20 000
2s	0,2	47	3 250
2p	0,014	27	2 550

Заметим, что при $n = 2$, $Z = 1$ расщепление, соответствующее тонкой структуре, на порядок меньше радиационного смещения.

38.5. Рассеяние фотона вблизи резонанса. В § 27 при рассмотрении рассеяния фотона связанным электроном мы видели, что в случае резонанса, когда энергия фотона совпадает с разностью энергетических уровней электрона, теория первого приближения, основывающаяся на матрице рассеяния второго порядка, становится неприменимой. Обычный метод учета радиационных поправок здесь также неприменим, так как он базируется на разложении матрицы рассеяния в ряд по степеням α , тогда как в рассматриваемом случае, как нетрудно видеть, разложение в ряд производится по степеням величины $\frac{\alpha}{E_n^0 - E_n^0 - \omega}$, которая обращается при резонансе в бесконечность.

Поэтому мы должны учесть радиационные поправки на более ранней стадии вычислений, которой в упрощенном выводе формулы (27.2.1) соответствует введение комплексных частот.

Из вывода формулы (27.1.9) для сечения рассеяния фотона легко заключить, что резонансный знаменатель в матричном элементе связан со структурой функции $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$, содержащей, согласно (27.1.2), в знаменателе $E_n^0 + \omega$. Поэтому следует ожидать, что замена функции $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$ точной функцией Грина электрона $G^{(e)}(x_1, x_2)$ должна приводить к конечным результатам. Эта функция, согласно (21.4.17), удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \gamma_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ie\mathcal{A}_{\mu}(x) \right) + m \right\} G^{(e)}(x, x') + \\ + i \int \Sigma(x, x'') G^{(e)}(x'', x') d^4 x'' = -i\delta(x - x'), \quad (38.5.1)$$

Легко убедиться, что функция Грина $G^{(e)}(x, x')$ удовлетворяет также уравнению

$$G^{(e)}(x, x') = S_c^{(e)}(x, x') + \\ + \int S_c^{(e)}(x, x'') \Sigma(x'', x''') G^{(e)}(x''', x') d^4 x'' d^4 x''', \quad (38.5.2)$$

где $S_c^{(e)}(x, x')$ определяется формулой (27.1.2).

Покажем теперь, что если в матричный элемент рассеяния фотона связанным электроном ввести вместо функции $S_c^{(e)}(x, x')$ функцию $G^{(e)}(x, x')$, то мы получим конечное выражение при резонансе в соответствии с результатами § 27 [16].

Разложим функцию $G^{(e)}(x, x')$ в ряд по полной системе функций $\psi_n^0(\mathbf{r})$, представляющих собой пространственные части волновых функций электрона в поле $\mathfrak{A}_\mu(x)$:

$$H^{(0)}\psi_n^0(\mathbf{r}) = E_n^0\psi_n^0(\mathbf{r}). \quad (38.5.3)$$

Коэффициенты разложения, являющиеся функциями времени, мы разложим в интеграл Фурье. Такое комбинированное разложение $G^{(e)}(x_1, x_2)$ имеет вид

$$G^{(e)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \sum_n \int d\omega e^{i\omega(t_1-t_2)} f_{nn}(\omega) \psi_n^0(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}_2) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \neq n'} \int d\omega e^{i\omega(t_1-t_2)} f_{nn'}(\omega) \psi_n^0(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}_{n'}^0(\mathbf{r}_2). \quad (38.5.4)$$

Установим уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты разложения $f_{nn'}(\omega)$. Подставим для этого разложение (38.5.4) в интегральное уравнение (38.5.2). Замечая, что

$$\int \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}_1) \beta S_c^{(e)}(x_1, x_3) d^3x_1 = \int \psi_n^{0*}(\mathbf{r}_1) S_c^{(e)}(x_1, x_3) d^3x_1 = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t_1-t_3)}}{E_n^0(1-i0)+\omega} d\omega \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}_3),$$

получим следующую систему уравнений для $f_{nn'}(\omega)$:

$$f_{nn}(\omega) = \frac{1}{E_n^0(1-i0)+\omega} \left\{ 1 - H_{nn}(-\omega) f_{nn}(\omega) - \sum_{n' \neq n} H_{nn'}(-\omega) f_{n'n}(\omega) \right\}, \quad (38.5.5)$$

$$f_{nn'}(\omega) = \frac{1}{E_n^0(1-i0)+\omega} \left\{ -H_{nn'}(-\omega) f_{n'n'}(\omega) - \sum_{n'' \neq n'} H_{nn''}(-\omega) f_{n''n'}(\omega) \right\},$$

где

$$H_{nn'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{nn'}(t) e^{i\omega t} dt$$

и

$$H_{nn'}(t) = i \int \bar{\psi}_n^0(\mathbf{r}_3) \Sigma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; t) \psi_{n'}^0(\mathbf{r}_4) d^3x_3 d^3x_4.$$

Вводя обозначения

$$\frac{1}{f_{nn}(\omega)} = Q_{nn}, \quad \frac{f_{nn'}(\omega)}{f_{nn}(\omega)} = R_{nn'}, \quad n \neq n',$$

перепишем уравнения (38.5.5) в виде

$$R_{nn'} = \frac{H_{nn'}(-\omega)}{E_n^0 + \omega} + \sum_{n'' \neq n'} \frac{H_{nn''}(-\omega) R_{n''n'}}{E_n^0 + \omega}, \quad (38.5.6)$$

$$Q_{nn} = E_n^0 + \omega + H_{nn}(-\omega) + \sum_{n' \neq n} H_{nn'}(-\omega) R_{n'n}. \quad (38.5.7)$$

Считая величину $H_{nn'}(-\omega)$ малой и пользуясь методом последовательных приближений, получим

$$R_{nn'} = \frac{-1}{E_n^0 + \omega} \left\{ H_{nn'}(-\omega) + \sum_{n'' \neq n'} \frac{H_{nn''}(-\omega) H_{n''n'}(-\omega)}{-\omega - E_{n''}^0} + \dots \right\}, \quad (38.5.8)$$

$$Q_{nn} = \omega + E_n^0 + H_{nn}(-\omega) + \sum_{n'' \neq n} \frac{H_{nn''}(-\omega) H_{n''n}(-\omega)}{-\omega - E_{n''}^0} + \dots$$

В первом приближении

$$Q_{nn} \approx \omega + E_n^0 + H_{nn}(-\omega), \quad (38.5.9)$$

$$R_{nn'} \approx - \frac{H_{nn'}(-\omega)}{\omega + E_n^0 + H_{nn}(-\omega)},$$

откуда

$$\hat{f}_{nn} = \frac{1}{\omega + E_n^0 + H_{nn}(-\omega)}, \quad (38.5.10)$$

$$\hat{f}_{nn'} = \frac{-H_{nn'}(-\omega)}{[\omega + E_n^0 + H_{nn}(-\omega)] [\omega + E_{n'}^0 + H_{n'n'}(-\omega)]}.$$

Мы видим, что $|\hat{f}_{nn'}| \ll |\hat{f}_{nn}|$; поэтому в дальнейшем можно пренебречь недиагональными элементами $\hat{f}_{nn'}$.

Найдем теперь $G^{(e)}(x_1, x_2)$. Подставляя (38.5.10) в (38.5.4) и пренебрегая величинами $\hat{f}_{nn'}$, получим

$$G^{(e)}(x_1, x_2) \approx \frac{1}{2\pi i} \sum_n \Psi_n^0(\mathbf{r}_1) \bar{\Psi}_n^0(\mathbf{r}_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t_1-t_2)}}{E_n^0 + \omega + H_{nn}(-\omega)} d\omega. \quad (38.5.11)$$

Это выражение отличается от выражения (27.1.2) для функции $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$ знаменателями дробей, стоящих под знаком интеграла. Величина $H_{nn}(-\omega)$, входящая в $G^{(e)}(x_1, x_2)$, совпадает, очевидно, с величиной $\langle n | i\Sigma_\omega | n \rangle$, определяющей радиационное смещение и ширину уровня (см. (38.2.6)):

$$H_{nn}(-\omega) = \delta E_n - \frac{i}{2} \Gamma_n.$$

Так как эта величина комплексная, то знаменатели дробей в (38.5.11) не могут обратиться в нуль.

Подставив выражение (38.5.11) вместо $S_c^{(e)}(x_1, x_2)$ в формулу (27.1.3), мы получим сечение рассеяния фотона, имеющее вид (27.2.1).

§ 39. Радиационные поправки к сечению рассеяния электрона во внешнем поле и сечению рассеяния электрона электроном

39.1. Сечение рассеяния электрона в кулоновском поле ядра во втором борновском приближении. Перейдем к определению радиационных поправок к сечениям различных процессов рассеяния электрона. Начнем с рассмотрения рассеяния электрона в кулоновском поле ядра [5].

Диаграммы, изображающие процесс рассеяния во внешнем поле в первом приближении и радиационные поправки к нему в третьем приближении теории возмущений, представлены на рис. 39.1. Соответствующие этим

диаграммам элементы матрицы рассеяния равны

$$\begin{aligned}
 M_1^{(1)} &= e \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \hat{A}^{(e)}(q) \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}}, \\
 M_1^{(3)} &= \frac{ie^3}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{d^4k}{k^2} \right\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}}, \\
 M_2^{(3)} &= -\frac{ie^3}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \times \\
 &\quad \times \left\{ A_\mu^{(e)}(q) \frac{1}{q^2} \gamma_\nu \text{Sp} \int \frac{i(\hat{p} + \hat{q}) - m}{(p + q)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \gamma_\nu d^4p \right\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}},
 \end{aligned} \tag{39.1.1}$$

где u_1 и u_2 — биспинорные амплитуды начального и конечного состояний электрона с 4-импульсами p_1 и p_2 (ε_1 и ε_2 — энергии электрона до и после рассеяния), $A_\mu^{(e)}(q)$ — компонента Фурье внешнего потенциала и $q = p_2 - p_1$.

В случае кулоновского поля ядра с атомным номером Z

$$A_0^{(e)}(q) = 2\pi\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{Ze}{q^2}, \tag{39.1.2}$$

$$A_i^{(e)}(q) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

и

$$M_1^{(1)} = \frac{Ze^2}{q^2} 2\pi i \left(\frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \gamma_4 \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \right) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \tag{39.1.3}$$

Используя формулу (38.1.5) для величины $\delta U(q)$, описывающей взаимодействие электрона с внешним полем с точностью до членов порядка e^3 , можно представить $M_1^{(3)} + M_2^{(3)}$ в виде

$$\begin{aligned}
 M_1^{(3)} + M_2^{(3)} &= -i \frac{e^2}{8\pi} \frac{Ze}{q^2} \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \gamma_4 \left\{ 4 \left[(1 - 2\varphi \text{cth } 2\varphi) \left(1 + \ln \frac{\lambda}{m} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\varphi}{2} \text{th } \varphi + 2 \text{cth } 2\varphi \int_0^\varphi u \text{th } u \, du \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 4(1 - \varphi \text{cth } \varphi) \left(1 - \frac{1}{3} \text{cth}^2 \varphi \right) - \frac{4}{9} - \frac{i}{m} \hat{q} \frac{2\varphi}{\text{sh } 2\varphi} \right\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \tag{39.1.4}
 \end{aligned}$$

где φ связано с изменением импульса q и углом рассеяния ϑ соотношениями

$$q^2 = |q|^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 4m^2 \text{sh}^2 \varphi, \quad |p_1| = |p_2| = |p|.$$

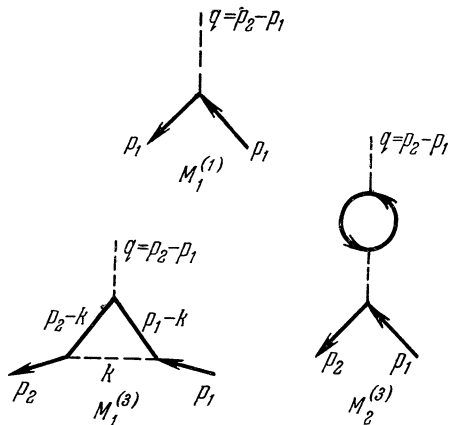


Рис. 39.1.

Для получения сечения рассеяния с учетом радиационных поправок недостаточно, однако, найти квадрат модуля и просуммировать его по различным начальным и конечным состояниям. Действительно, радиационные поправки представляют собой эффекты 3-го порядка теории возмущений. Поэтому наряду с ними нужно учитывать также рассеяние во втором приближении теории возмущений (второе борновское приближение). Заметим, что учитывать рассеяние в третьем борновском приближении уже не имеет смысла, так как матричный элемент, соответствующий этому процессу, пропорционален e^6 .

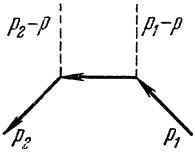


Рис. 39.2.

Рассмотрим подробнее рассеяние во втором борновском приближении [17]. Диаграмма, изображающая этот процесс, представлена на рис. 39.2. Соответствующий ей элемент матрицы рассеяния равен

$$M_1^{(2)} = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \left\{ \int \hat{A}^{(e)}(p_2 - p) \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(p_1 - p) d^4p \right\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}}. \quad (39.1.5)$$

Легко убедиться, что входящий сюда интеграл расходится для чисто кулоновского поля, поэтому мы будем производить вычисления, считая кулоновское поле ядра экранированным:

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{4\pi r} e^{-\eta r},$$

где η — некоторая положительная константа. Как будет показано далее, выражение для сечения рассеяния допускает предельный переход $\eta \rightarrow 0$. Величина $\hat{A}^{(e)}(q)$ в случае экранированного кулоновского потенциала имеет следующий вид:

$$\hat{A}^{(e)}(q) = i\gamma_4 \frac{Ze}{q^2 + \eta^2} 2\pi\delta(q_0).$$

Подставляя это выражение в (39.1.5), получим

$$M_1^{(2)} = 4iZ^2\alpha^2 \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \left\{ \int \frac{\gamma_4}{(p_2 - p)^2 + \eta^2} \cdot \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \cdot \frac{\gamma_4}{(p - p_1)^2 + \eta^2} d^4p \right\} \times \\ \times \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

где $p_4 = i\varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

Вводя обозначения

$$\int \frac{d^3s}{[(p_2 - s)^2 + \eta^2][(p_1 - s)^2 + \eta^2](p_1^2 - s^2)} = I_1, \\ \int \frac{s d^3s}{[(p_2 - s)^2 + \eta^2][(p_1 - s)^2 + \eta^2](p_1^2 - s^2)} = \frac{p_1 + p_2}{2} I_2$$

и замечая, что

$$i\gamma p_1 u_1 = (\gamma_4 \varepsilon - m) u_1, \\ \bar{u}_2 i\gamma p_2 = \bar{u}_2 (\gamma_4 \varepsilon - m),$$

представим $M_1^{(2)}$ в виде

$$M_1^{(2)} = -4iZ^2\alpha^2 \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \{m(I_1 - I_2) + \gamma_4 \varepsilon(I_1 + I_2)\} \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (39.1.6)$$

Эта формула определяет поправку к амплитуде рассеяния во втором борновском приближении.

Вычислим входящие в (39.1.6) интегралы I_1 и I_2 . Рассмотрим сначала интеграл

$$L \equiv \int \frac{d^3s}{[(P-s)^2 + \Lambda^2] (p^2 - s^2 + i0)} = 2\pi \int_0^\pi d\chi \int_0^\infty \frac{ds \cdot s^2 \sin \chi}{(P^2 - 2Ps \cos \chi + s^2 + \Lambda^2) (p^2 - s^2 + i0)}.$$

Вводя новую переменную $t = \cos \chi$ и замечая, что подынтегральное выражение не меняется при замене $s \rightarrow -s$, $t \rightarrow -t$, перепишем L в виде

$$L = \pi \int_{-1}^1 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2 ds}{(P^2 - 2Pst + s^2 + \Lambda^2) (p^2 - s^2 + i0)}.$$

Выполнив интегрирование по s с помощью теоремы о вычетах, получим

$$L = \frac{i\pi^2}{P} \ln \frac{p-P+i\Lambda}{p+P+i\Lambda}.$$

Интегралы I_1 и I_2 связаны простыми соотношениями с производными от L по Λ и P :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3s}{[(s-P)^2 + \Lambda^2]^2 (p^2 - s^2 + i0)} &= -\frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial L}{\partial \Lambda} = \frac{\pi^2}{\Lambda (p^2 - P^2 + \Lambda^2 + 2iP\Lambda)}, \\ \int \frac{s_r ds}{[(s-P)^2 + \Lambda^2] (p^2 - s^2 + i0)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial P_r} - \frac{P_r}{2\Lambda} \frac{\partial L}{\partial \Lambda} = \\ &= -\pi^2 P_r \left\{ -\frac{1}{\Lambda (p+P+i\Lambda) (p-P+i\Lambda)} + \frac{i}{2P^3} \ln \frac{p-P+i\Lambda}{p+P+i\Lambda} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2P^2} \left(\frac{1}{p-P+i\Lambda} + \frac{1}{p+P+i\Lambda} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (39.1.7)$$

Действительно, воспользуемся формулой

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{\left(a \frac{1+z}{2} + b \frac{1-z}{2} \right)^2}$$

и положим в ней

$$\begin{aligned} a &= \eta^2 + (s - p_2)^2, \\ b &= \eta^2 + (s - p_1)^2. \end{aligned}$$

Так как

$$\left(a \frac{1+z}{2} + b \frac{1-z}{2} \right)^2 = [(s-P)^2 + \Lambda^2]^2,$$

где

$$P = \frac{1}{2} [(1+z)p_1 + (1-z)p_2],$$

$$\Lambda^2 = \eta^2 + p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (1-z^2),$$

то

$$\frac{1}{[(s-p_2)^2 + \eta^2] [(s-p_1)^2 + \eta^2]} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{[(s-P)^2 + \Lambda^2]^2}.$$

Сравнивая это выражение с определением I_1 и I_2 и используя формулы (39.1.7), найдем

$$I_1 = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial L}{\partial \Lambda} dz,$$

$$\frac{p_{1r} + p_{2r}}{2} I_2 = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial L}{\partial p_r} + \frac{p_r}{\Lambda} \frac{\partial L}{\partial \Lambda} \right) dz.$$

Выполнив интегрирование по z , получим скончательно при $\eta \rightarrow 0$

$$I_1 = -\frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}|^3 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \ln \frac{2|\mathbf{p}| \sin \frac{\vartheta}{2}}{\eta},$$

$$I_2 = \frac{I_1}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} - \frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}|^3 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \left(\ln \frac{i\eta}{2|\mathbf{p}|} - \frac{i\pi}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \right). \quad (39.1.8)$$

Отметим, что при $\eta \rightarrow 0$

$$\operatorname{Re} I_1 = 0, \quad \operatorname{Re} I_2 = \frac{\pi^3}{4|\mathbf{p}|^3 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \left(1 - \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \right). \quad (39.1.9)$$

39.2. Дифференциальное сечение рассеяния электрона в кулоновском поле ядра с учетом радиационных поправок порядка α . Определим дифференциальное сечение чисто упругого рассеяния электрона, усредненное по ориентациям его спина в начальном и конечном состояниях. Согласно общим правилам § 18.3, это сечение равно

$$d\sigma_e = \frac{1}{2\pi J} \frac{1}{2} \sum_{\mu_1, \mu_2} |M|^2 \rho_f d\omega, \quad (39.2.1)$$

где $M\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = M_1^{(1)} + M_1^{(2)} + M_1^{(3)} + M_2^{(3)}$, J — плотность потока электронов (нормировочный объем предполагается равным единице), ρ_f — плотность конечных состояний электрона, отнесенная к единичному интервалу энергии и единичному телесному углу,

$$\rho_f = \frac{|\mathbf{p}_2|^2 d|\mathbf{p}_2|}{(2\pi)^3 d\varepsilon_2} = \frac{|\mathbf{p}_2| \varepsilon_2}{(2\pi)^3},$$

и $d\omega$ — элемент телесного угла, в котором лежит \mathbf{p}_2 .

Сумму матричных элементов можно, согласно (39.1.1), (39.1.4), (39.1.6), представить в виде

$$M\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} Q \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad (39.2.2)$$

где

$$Q = (A_0 + A_1) \gamma_4 + B \gamma_4 \hat{q} + C,$$

$$A_0 = 8\pi^2 i \frac{Z\alpha}{q^2},$$

$$A_1 = -8\pi i \frac{Z\alpha^2}{q^2} \left\{ \left[(1 - \varphi \operatorname{cth} \varphi) \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \varphi \right) - \frac{1}{9} \right] + \right. \\ \left. + \left[(1 - 2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi) \left(1 + \ln \frac{\lambda}{m} \right) + \frac{\varphi}{2} \operatorname{th} \varphi + 2 \operatorname{cth} 2\varphi \int_0^{\varphi} u \operatorname{th} u \, du \right] \right\} - \\ - 4iZ^2\alpha^2\varepsilon (I_1 + I_2),$$

$$B = -\frac{4\pi Z\alpha^2}{mq^2} \frac{\varphi}{\operatorname{sh} 2\varphi},$$

$$C = -4iZ^2\alpha^2 m (I_1 - I_2).$$

Суммирование по ориентациям спинов может быть выполнено согласно формуле (18.2.3):

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} |M|^2 = \frac{1}{4\varepsilon_1\varepsilon_2} \operatorname{Sp} \{ [(A_0 + A_1) \gamma_4 + B \gamma_4 \hat{q} + C] (i\hat{p}_1 - m) \times \\ \times [(A_0^* + A_1^*) \gamma_4 + B^* \gamma_4 \hat{q} + C^*] (i\hat{p}_2 - m) \}.$$

Пренебрегая здесь квадратичными относительно A_1 , B и C членами и используя формулы (8.3.6), получим

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} |M|^2 = \\ = \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \{ |A_0 + A_1|^2 (m^2 - p'_1 p_2) + im (A_0^* B - A_0 B^*) + 2m\varepsilon (A_0^* C + A_0 C^*) \}, \\ p'_1 = (-\mathbf{p}_1, i\varepsilon).$$

Подставляя сюда

$$|A_0 + A_1|^2 = |A_0|^2 + 2 \operatorname{Re} (A_0 A_1^*) = 64\pi^4 \frac{Z^2\alpha^2}{q^4} - \\ - \frac{128\pi^3 Z^2\alpha^3}{q^4} \left\{ \left[(1 - \varphi \operatorname{cth} \varphi) \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \varphi \right) - \frac{1}{9} \right] + \right. \\ \left. + \left[(1 - 2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi) \left(1 + \ln \frac{\lambda}{m} \right) + \frac{\varphi}{2} \operatorname{th} \varphi + 2 \operatorname{cth} 2\varphi \int_0^{\varphi} u \operatorname{th} u \, du \right] \right\} - \\ - 64\pi^2 \frac{Z^3\alpha^3}{q^2} \varepsilon \operatorname{Re} (I_1 + I_2),$$

$$A_0^* C + A_0 C^* = 2 \operatorname{Re} (A_0^* C) = -\frac{64\pi^2 Z^3\alpha^3}{q^2} m \operatorname{Re} (I_1 - I_2),$$

$$A_0^* B - A_0 B^* = 2i \operatorname{Im} (A_0^* B) = -\frac{64\pi^3 Z^2\alpha^3}{q^4 m} \frac{\varphi}{\operatorname{sh} 2\varphi},$$

$$m^2 - p'_1 p_2 = 2\varepsilon^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right).$$

(v — скорость электрона), найдем, согласно (39.2.1), дифференциальное сечение чисто упругого рассеяния

$$d\sigma_e = \left(\frac{Z\alpha}{2mv^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 (1-v^2) \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left[2(1-\varphi \operatorname{cth} \varphi) \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \varphi \right) - \frac{2}{9} + \varphi \operatorname{th} \varphi + 2(1-2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi) \left(1 + \ln \frac{\lambda}{m} \right) + 4 \operatorname{cth} 2\varphi \int_0^\varphi u \operatorname{th} u \, du + \frac{v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1-v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{2\varphi}{\operatorname{sh} 2\varphi} \right] + \pi\alpha Zv \sin \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^{-1} \right\} d\omega. \quad (39.2.3)$$

Мы видим, что сечение $d\sigma_e$ содержит «массу» фотона λ ; что же касается константы экранирования η , то она, как и утверждалось, не входит в $d\sigma_e$.

Заметим, что входящий в (39.2.3) интеграл можно преобразовать к виду

$$\int_0^\varphi u \operatorname{th} u \, du = \frac{1}{4} \frac{1-v^2}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \operatorname{sh} 2\varphi \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \frac{\zeta \ln(1-v^2\zeta^2) \, d\zeta}{(1-v^2\zeta^2) \sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} + \frac{\varphi}{2} \ln \frac{1}{1-v^2}. \quad (39.2.4)$$

39.3. Исключение «массы» фотона из сечения рассеяния. Покажем, как исключить из сечения рассеяния «массу» фотона. Для этого нужно, как было разъяснено в § 29 2, наряду с чисто упругим рассеянием рассматривать также рассеяние с излучением мягкого фотона, энергия которого значительно меньше энергии электрона. Сечение излучения такого фотона определяется формулой (29 2 11)

$$d\sigma' = \left(\frac{Z\alpha}{2mv^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 (1-v^2) \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 2(2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi - 1) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} - \frac{1-v^2}{v \sin \frac{\vartheta}{2}} \operatorname{ch} 2\varphi G(v, \vartheta) \right\} d\omega, \quad (39.3.1)$$

где

$$G(v, \vartheta) = \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \ln \frac{1+v\zeta}{1-v\zeta} \frac{d\zeta}{(1-v^2\zeta^2) \sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}}.$$

Мы видим, что масса фотона входит в $d\sigma'$ в виде

$$\frac{2\alpha}{\pi} (2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi - 1) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda},$$

а в сечение упругого рассеяния в виде

$$\frac{2\alpha}{\pi} (2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi - 1) \ln \frac{\lambda}{m}.$$

Поэтому, если сложить сечения $d\sigma_e$ и $d\sigma'$, то в суммарное сечение рассеяния, которое только и имеет физический смысл, «масса» фотона входить не будет.

Это суммарное сечение рассеяния с потерей энергии, не превосходящей $\Delta\varepsilon$, мы будем записывать в виде

$$d\sigma_{\Delta\varepsilon} = \left(\frac{Z\alpha}{2mv^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 (1-v^2) \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) (1 + \delta_B - \delta_R) d\omega, \quad (39.3.2)$$

где величины δ_R и δ_B учитывают радиационные поправки и рассеяние во втором борновском приближении; согласно (39.2.3) и (39.3.1) они равны [5, 18]

$$\delta_R = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 2(1 - 2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi) \left(1 + \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{m} \right) + \varphi \operatorname{th} \varphi + \right. \\ \left. + 2(1 - \varphi \operatorname{cth} \varphi) \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \varphi \right) - \frac{2}{9} + \frac{1}{v} \ln \frac{1-v}{1+v} + \right. \\ \left. + 2\varphi \operatorname{cth} 2\varphi \ln \frac{1}{1-v^2} + \frac{v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1-v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{2\varphi'}{\operatorname{sh} 2\varphi} + \right. \\ \left. + \frac{(1-v^2) \operatorname{ch} \varphi}{v \sin \frac{\vartheta}{2}} \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \left[\frac{\ln(1+v\xi)}{1-v\xi} - \frac{\ln(1-v\xi)}{1+v\xi} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} \right\}, \quad (39.3.3)$$

$$\delta_B = \pi\alpha v Z \sin \frac{\vartheta}{2} \frac{1 - \sin \frac{\vartheta}{2}}{1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

(в выражении для δ_R мы воспользовались формулой (39.2.4)).

Заметим, что при большом переданном импульсе $|q^2| \gg m^2$ величина δ_R ведет себя как

$$\delta_R \sim \alpha \ln^2 \frac{q^2}{m^2}.$$

В нерелятивистской области величины δ_R и δ_B стремятся к нулю при $v \rightarrow 0$.

Формулами (39.3.3) можно пользоваться только в том случае, когда величины δ_R и δ_B достаточно малы. В частности, q^2 не должно быть очень большим и ядро должно быть достаточно легким (второе борновское приближение дает правильные результаты только при $Z < 10 - 15$).

В таблице приведены значения δ_R и δ_B (в процентах) в зависимости от ε , ϑ , $\Delta\varepsilon$.

ϑ		45°	90°	135°	45°	90°	135°	45°	90°	135°
ε		2,5 Мэв			4,0 Мэв			9,5 Мэв		
δ_B/Z		0,61	0,89	0,86	0,62	0,92	0,99	0,63	0,94	1,07
δ_R	$\Delta\varepsilon = 10$ кэв	4,8	7,4	8,7	6,9	9,9	11,3	12,4	15,9	17,5
	$\Delta\varepsilon = 25$ »	3,9	6,0	7,1	5,7	8,1	9,3	10,5	13,5	14,8
	$\Delta\varepsilon = 50$ »	3,2	5,0	5,9	4,7	6,8	7,9	9,0	11,7	12,8
	$\Delta\varepsilon = 100$ »	2,5	3,9	4,7	3,8	5,5	6,4	7,6	9,9	10,8

39.4. Устранение инфракрасной расходимости в случае произвольного процесса рассеяния. Мы видели выше, что радиационные поправки к сечению рассеяния электрона во внешнем поле содержат «массу» фотона. Проследим, как формально возникает в матричных элементах инфракрасная расходимость. До регуляризации ни электронная собственно энергетическая функция, ни вершинная функция (с внутренними электронными линиями) не содержат расходящихся величин в области малых частот виртуальных фотонов, вершинная же и собственно энергетическая электронная функции в случае свободных электронных линий содержат такие величины.

При регуляризации внутренней вершинной функции $\Lambda_\mu(p_1, p_2)$ мы отнимаем от нее величину $\Lambda_\mu(p_0, p_0)$, соответствующую свободным электронным линиям. Эта величина содержит интеграл, который расходится в области малых импульсов виртуальных фотонов. Чтобы обеспечить сходимость интеграла, мы вводим отличную от нуля «массу» фотона λ , которая таким образом появляется в регуляризованной вершинной функции.

Аналогичным образом возникает λ и в выражении для регуляризованной электронной собственно энергетической функции. По этой причине «масса» фотона начинает входить в радиационные поправки к сечениям самых различных процессов рассеяния.

Мы покажем теперь, обобщая результат, полученный для радиационных поправок к сечению рассеяния электрона в кулоновском поле ядра, что если для любого сколь угодно сложного процесса рассеяния, являющегося эффектом n -го порядка теории возмущений, наряду с радиационными поправками к нему, соответствующими $(n + 2)$ -му порядку теории возмущений, рассматривать также излучение реального мягкого фотона, то суммарное сечение рассеяния, учитывающее как радиационные поправки, так и дополнительное излучение мягкого фотона, не будет содержать «массу» фотона.

Так как инфракрасная расходимость возникает при интегрировании в области малых импульсов виртуальных и реальных фотонов, а «мягкость» и «жесткость» фотона не являются, вообще говоря, инвариантными понятиями, то мы будем пользоваться определенной системой отсчета, а именно системой, в которой потеря энергии каждой заряженной частицей, обусловленная испусканием «мягких» фотонов не превосходит некоторой величины ε , малой по сравнению с энергиями всех заряженных частиц, участвующих в процессе

Пользуясь этой системой отсчета, мы выделим в пространстве 4-импульсов фотона k область R_ε , в которой

$$|k| \leq \varepsilon, \quad k_0 \leq \varepsilon,$$

где ε — некоторая малая величина (она может быть выбрана, например, таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon \ll m$), и будем называть мягкими те фотоны, 4-импульсы которых лежат в R_ε , остальные же фотоны будем называть жесткими.

Будем для простоты предполагать, что в процессе рассеяния участвует только один электрон. Матричный элемент такого процесса можно записать в виде

$$M = \bar{u}(p_2) Q(p_1, p_2) u(p_1),$$

где p_1 и p_2 — 4-импульсы электрона до и после рассеяния, $u(p_1)$ и $u(p_2)$ — соответствующие им биспинорные амплитуды и $Q(p_1, p_2)$ — некоторая матрица.

Рассмотрим радиационные поправки наимизшего порядка к сечению этого процесса рассеяния, связанные с испусканием и последующим поглощением виртуального фотона и приводящие к инфракрасной расходимости. Пусть, например, основным процессом является тормозное излучение электрона (диаграмма Q на рис. 39.3). Тогда радиационным поправкам к этому процессу, приводящим к инфракрасной расходимости, будут соответствовать диаграммы W_i , V_1 , V_2 , Y , изображенные на рис. 39.3.

Покажем прежде всего, что во вкладах, вносимых в радиационные поправки, члены, содержащие λ и происходящие от равного числа собственно энергетических электронных диаграмм и вершинных диаграмм, взаимно сокращаются.

Возьмем, например, вершину A (рис. 39.3). Матрице γ_μ в основном процессе Q соответствует следующий вклад от диаграмм радиационных поправок W и V_1 :

$$\begin{aligned} & \gamma_\mu S_c(p) \Sigma^{(2)}(p) + \Lambda_\mu^{(3)}(p, p_2) = \\ & = \gamma_\mu S_c(p) \{ \Sigma_0^{(2)} + \Sigma_1^{(2)}(\hat{p} - im) + \\ & + \Sigma_R^{(2)}(p) \} + \Lambda_{R\mu}^{(3)}(p, p_2) + \gamma_\mu L^{(3)}, \end{aligned}$$

где $\Sigma_1^{(2)} \equiv Z_1^{-1} - 1$. Левая часть этого равенства не содержит инфракрасной расходимости, которая появляется в константах $\Sigma_1^{(2)}$ и $L^{(3)}$. Но согласно (36.4.12) эти константы равны

$$\Sigma_1^{(2)} = L^{(3)},$$

и, следовательно, члены, содержащие их, сокращаются. По этой причине регуляризованное значение написанного выражения $\gamma_\mu S_c(p) \Sigma_R^{(2)}(p) + \Lambda_{R\mu}^{(3)}(p, p_2)$ не будет, как и утверждалось, содержать инфракрасной расходимости.

Если основная диаграмма Q содержит n внутренних электронных линий, то в диаграммах радиационных поправок типов W и V будет n внутренних ЭСЭД и $n - 1$ внутренних ВД. От этих диаграмм останется одна нескомпенсированная «масса» фотона λ , соответствующая одной ЭСЭД. Учитывая наличие двух свободных электронных линий, с которыми связаны две ВД, мы окончательно получим от всех диаграмм W_i и V_i одну «нескомпенсированную» λ от одной ВД. Согласно (36.4.13) величина λ входит в вершинную функцию в виде $\ln \lambda/m$. Считая $\lambda \rightarrow 0$, мы можем поэтому написать следующее выражение для главной относительно λ части матричного элемента, соответствующего диаграммам типов W и V :

$$M_{W+V}^\lambda = -\frac{\alpha}{\pi} M \ln \frac{\lambda}{m}. \tag{39.4.1}$$

Этот результат можно сформулировать и иначе, сказав, что с каждой свободной электронной линией связана инфракрасная расходимость, причем вклад от каждой из этих линий в матричный элемент, соответствующий

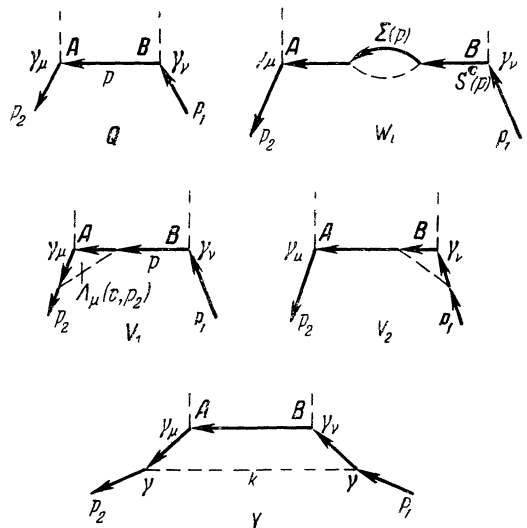


Рис. 39.3

диаграммам типов W и V , равен

$$\frac{1}{2} M_{W+V}^{\lambda} = -\frac{\alpha}{2\pi} M \ln \frac{\lambda}{m}.$$

Рассмотрим теперь последнюю диаграмму радиационных поправок Y и определим соответствующий ей матричный элемент M_Y . Согласно правилам Фейнмана

$$M_Y = \frac{i\alpha}{4\pi^3} \int \bar{u}(p_2) \gamma_{\sigma} \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} Q(p_1 - k, p_2 - k) \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_{\sigma} \frac{u(p_1)}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \frac{d^4k}{k^2 + \lambda^2},$$

причем из-за инфракрасной расходимости мы ввели в функцию $D_c(k)$ «массу» фотона λ . Нас интересует вклад, который вносят в M_Y малые k , поэтому мы будем, где только возможно, пренебрегать величинами порядка k .

Замечая, что

$$\bar{u}(p_2) \gamma_{\sigma} [i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m] = \bar{u}(p_2) \{ - (i\hat{p}_2 + m) + 2ip_{2\sigma} - i\gamma_{\sigma}\hat{k} \} \approx 2ip_{2\sigma} \bar{u}(p_2),$$

получим

$$M_Y = -\frac{i\alpha}{\pi^3} p_1 p_2 \frac{\bar{u}(p_2)}{\sqrt{2\varepsilon_2}} Q(p_1, p_2) \frac{u(p_1)}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \int \frac{d^4k}{k^2 + \lambda^2} \frac{1}{[(p_2 - k)^2 + m^2][(p_1 - k)^2 + m^2]}$$

или

$$M_Y = a_Y M,$$

где

$$a_Y = -\frac{i\alpha}{\pi^3} p_1 p_2 \int \frac{d^4k}{(k^2 + \lambda^2) [(p_2 - k)^2 + m^2] [(p_1 - k)^2 + m^2]}.$$

Входящий сюда интеграл

$$J \equiv \int \frac{d^4k}{(k^2 + \lambda^2) [(p_2 - k)^2 + m^2] [(p_1 - k)^2 + m^2]}$$

равен, согласно (36.4.7'),

$$J = -\frac{2\pi^2 i}{m^2 \sin 2\theta} \left\{ \int_0^{\theta} \ln \frac{\cos \xi}{\cos \theta} d\xi + \int_0^{\theta} \ln \frac{\lambda}{m} d\xi \right\}.$$

Так как нас интересует только зависимость J от λ , то, не нарушая общности, мы будем считать, что импульс электрона p_1 (до рассеяния) равен нулю. В этом случае

$$p_1 p_2 = -m\varepsilon_2, \quad \sin^2 \theta = \frac{-\varepsilon_2 + m}{2m},$$

$$\sin 2\theta = i \frac{|p_2|}{m}, \quad \theta = \frac{i}{2} \operatorname{arctg} v_2,$$

где v_2 — скорость электрона после рассеяния. Поэтому λ входит в M_Y в виде слагаемого:

$$M_Y^{\lambda} = M \frac{\alpha}{\pi} \frac{\operatorname{Ar th} v_2}{v_2} \ln \frac{\lambda}{m}.$$

В суммарный матричный элемент радиационных поправок «масса» фотона будет входить в виде

$$M_R^{\lambda} = M_{W+V}^{\lambda} + M_Y^{\lambda},$$

а в сечение рассеяния с учетом радиационных поправок — в виде

$$|M + M_R^\lambda|^2 \approx |M|^2 \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{\text{Ar th } v_2}{v_2} - 1 \right) \ln \frac{\lambda}{m} \right\}.$$

Поэтому сечение рассеяния с учетом радиационных поправок $d\sigma_R$ будет содержать λ в виде слагаемого

$$d\sigma_R^\lambda = b_R^\lambda d\sigma_0, \quad (39.4.2)$$

где

$$b_R^\lambda = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{\text{Ar th } v_2}{v_2} - 1 \right) \ln \frac{\lambda}{m}$$

и $d\sigma_0$ — сечение основного процесса.

Рассмотрим наряду с радиационными поправками излучение реального мягкого фотона с импульсом k и поляризацией e .

Диаграммы, изображающие излучение фотона k , представлены на рис. 39.4. Матричный элемент, соответствующий этим диаграммам, равен

$$M_k = \frac{ie}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\bar{u}(p_2)}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \left\{ \frac{\hat{e}}{\sqrt{2\omega}} \frac{i(\hat{p}_2 + \hat{k}) - m}{(p_2 + k)^2 + m^2} Q(p_2 + k, p_1) + \right. \\ \left. + Q(p_2, p_1 + k) \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k}) - m}{(p_1 + k)^2 + m^2} \frac{\hat{e}}{\sqrt{2\omega}} \right\} \frac{u(p_1)}{\sqrt{2\varepsilon_1}}.$$

Считая $\omega \ll \varepsilon_1$ и замечая, что

$$(i\hat{p}_1 + m) u(p_1) = 0,$$

представим M_k в виде

$$M_k = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\frac{p_1 e}{p_1 k} - \frac{p_2 e}{p_2 k} \right) M. \quad (39.4.3)$$

Сечение рассеяния с излучением мягкого фотона с энергией, не превосходящей $\Delta\varepsilon$, равно, очевидно,

$$d\sigma' = b_k d\sigma_0, \quad (39.4.4)$$

где

$$b_k = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \sum_e \int_{\omega_{\min}}^{\Delta\varepsilon} \frac{d^3k}{2\omega} \left(\frac{p_1 e}{p_1 k} - \frac{p_2 e}{p_2 k} \right)^2, \quad \Delta\varepsilon \ll m.$$

Считая, так же как и выше, что $p_1 = 0$, получим, согласно § 29.2,

$$b_k = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{\text{Ar th } v_2}{v_2} - 1 \right) \ln \frac{\Delta\varepsilon}{\omega_{\min}} = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{\text{Ar th } v_2}{v_2} - 1 \right) \left(\ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{5}{6} \right). \quad (32.4.5)$$

Найдем, наконец, суммарное сечение рассеяния, учитывающее как радиационные поправки, так и излучение мягкого фотона,

$$d\sigma = d\sigma_R + d\sigma'.$$

Часть $d\sigma$, содержащая λ , имеет вид

$$d\sigma^\lambda = b^\lambda d\sigma_0,$$

где

$$b^\lambda = b_R^\lambda + b_k.$$

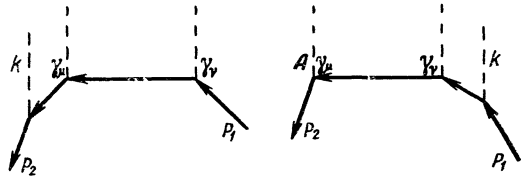


Рис. 39.4.

Но эта величина, согласно (39.4.2) и (39.4.5), не содержит массы фотона, поэтому λ , как и утверждалось, не входит в суммарное сечение рассеяния [19].

Мы показали, как устраняется инфракрасная расходимость в случае произвольного процесса рассеяния в наименьшем приближении теории возмущений. Но полученные результаты могут быть обобщены на все порядки теории возмущений.

Пусть в некотором процессе участвует несколько реальных электронов и позитронов, но не участвуют мягкие фотоны (соответствующая диаграмма изображена на рис. 39.5, 1;

заштрихованный блок изображает процесс, в котором не участвуют мягкие фотоны). Рассмотрим наряду с этим процессом процессы, в которых участвуют мягкие фотоны. Соответствующие фотонные линии (мы будем изображать мягкие фотоны волнистой линией) могут располагаться либо внутри заштрихованного блока, либо иметь внешние по отношению к этому блоку концы. Тогда, используя полученные выше результаты, можно утверждать, что к инфракрасной расходимости будут приводить только те диаграммы, в которых волнистые фотонные линии связаны со свободными электронными линиями: для виртуальных мягких фотонов это будут диаграммы типов 2 и 3, изображенные

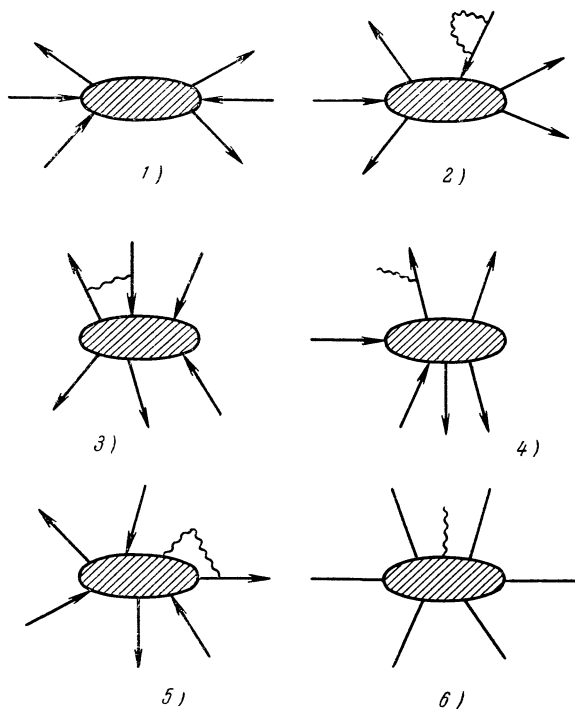


Рис. 39.5.

на рис. 39.5, а для реальных мягких фотонов — диаграммы типа 4 рис. 39.5 (диаграмма типа 2 эквивалентна диаграмме типа V на рис. 39.3); диаграммы иных типов, например диаграммы 5 и 6, не приводят к инфракрасной расходимости.

Мы не будем приводить здесь вычисления соответствующих матричных элементов и приведем только окончательные результаты [19].

Рассмотрим сначала некоторый процесс, в котором участвуют два свободных электрона. Тогда матричный элемент, соответствующий этому процессу с учетом всех радиационных поправок к нему, будет иметь следующую структуру:

$$M = M_0 e^{\alpha B}, \quad (39.4.6)$$

где

$$B = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4 k}{k^2 + \lambda^2} \left(\frac{2p'_\mu - k_\mu}{2p'k - k^2} - \frac{2p_\mu - k_\mu}{2pk - k^2} \right)^2,$$

p и p' — 4-импульсы электронов и M_0 — некоторая величина, не содержащая инфракрасной расходимости, т. е. остающаяся конечной при $\lambda \rightarrow 0$.

Величина, стоящая в скобках под знаком интеграла B , представляет собой, с точностью до множителя e , 4-ток «перехода»

$$j_{\mu} = e \left\{ \frac{(2p' - k)_{\mu}}{2p'k - k^2} - \frac{(2p - k)_{\mu}}{2pk - k^2} \right\},$$

удовлетворяющий уравнению непрерывности

$$j_{\mu} k_{\mu} = 0.$$

Если наряду с радиационными поправками учитывать также излучение электронами реальных «мягких» фотонов, то суммарное сечение основного процесса вместе с радиационными поправками и излучением «мягких» фотонов будет иметь вид

$$d\sigma = e^{2\alpha(B + \tilde{B})} d\sigma_0, \quad (39.4.7)$$

где

$$\tilde{B} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{d^3k}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \left(\frac{p'_{\mu}}{p'k} - \frac{p_{\mu}}{pk} \right)^2,$$

$\Delta\varepsilon$ — максимальная энергия фотонов и $d\sigma_0$ — величина, пропорциональная $|M_0|^2$ и не содержащая инфракрасной расходимости. Легко видеть, что $d\sigma$ остается конечным при $\lambda \rightarrow 0$. Считая, что $\lambda \ll \Delta\varepsilon$, получим

$$2\alpha(B + \tilde{B}) = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{2pp'}{m^2} - 1 \right) \ln \frac{\varepsilon\varepsilon'}{(\Delta\varepsilon)^2} + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{2pp'}{m^2}. \quad (39.4.8)$$

Эти формулы могут быть обобщены на тот случай, когда в процессе участвуют не два, а произвольное число электронов, а также позитронов и других заряженных частиц. В этом случае величины B и \tilde{B} имеют следующий вид:

$$B = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4k}{k^2 + \lambda^2} \sum_{i < j} q_i \theta_i q_j \theta_j \left[\frac{(2p_i \theta_i - k)_{\mu}}{k^2 - 2p_i k \theta_i} + \frac{(2p_j \theta_j + k)_{\mu}}{k^2 + 2p_j k \theta_j} \right]^2, \quad (39.4.9)$$

$$\tilde{B} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{d^3k}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \sum_{i < j} q_i \theta_i q_j \theta_j \left(\frac{p_{i\mu}}{kp_i} - \frac{p_{j\mu}}{kp_j} \right)^2,$$

где $\theta_i = 1$ для частицы в конечном состоянии, $\theta_i = -1$ для частицы в начальном состоянии и $q_i e$ — заряд частицы.

Подчеркнем то обстоятельство, что устранение инфракрасных расходимостей было проведено повсюду выше в выражениях для сечений, амплитуды же рассеяния оставались расходящимися. Это связано с тем, что мы рассматривали переходы между состояниями с определенным числом фотонов. Но такие состояния физически нереализуемы. Как мы видели (см § 29 4), реально мы имеем дело с когерентными состояниями длинноволнового поля излучения, никак не характеризующегося числом фотонов. Можно показать, что, рассматривая переходы между такими реальными состояниями, мы получим амплитуды рассеяния, свободные от инфракрасных расходимостей [20]

39.5. Радиационные поправки к сечению рассеяния электрона электроном и электрона позитроном. Перейдем к рассмотрению радиационных поправок к сечению рассеяния электрона электроном и электрона позитроном [21].

Так как рассеяние электрона электроном нельзя рассматривать как рассеяние электрона в некотором внешнем поле, то для определения радиационных поправок к сечению этого процесса мы не можем непосредственно воспользоваться полученными выше результатами, относящимися к рассеянию в поле ядра.

Основные типы диаграмм, определяющих рассеяние электрона электроном и радиационные поправки к этому процессу изображены на рис. 39.6.

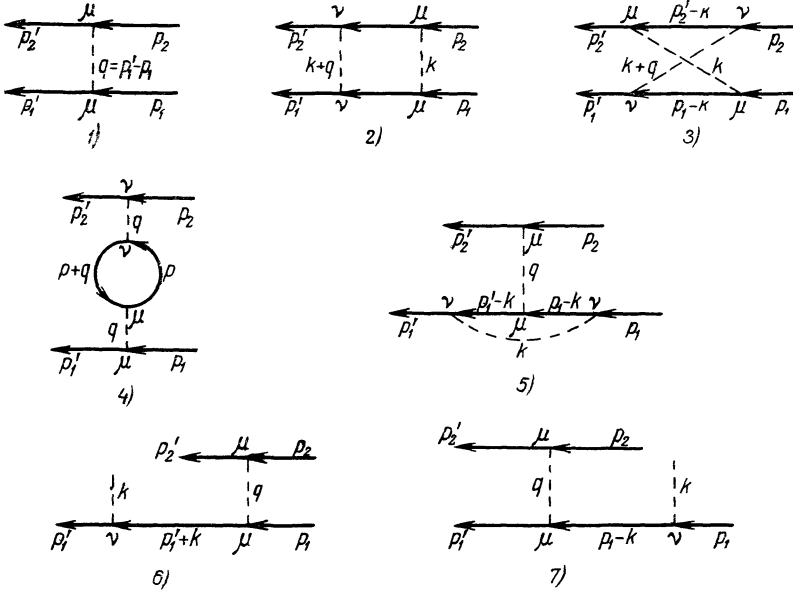


Рис. 39.6.

Для получения всех диаграмм нужно наряду с этими диаграммами рассматривать также диаграммы, получающиеся из изображенных путем следующих перестановок:

$$1) p_1 \rightleftharpoons p_2, \quad p_1' \rightleftharpoons p_2'; \quad 2) p_1' \rightleftharpoons p_2'; \quad 3) p_1 \rightleftharpoons p_2.$$

Обозначим через M_i матричный элемент (без δ -функции), соответствующий i -диаграмме рис. 39.6. Матричные элементы, получающиеся из M_i путем замен 1), 2), 3), мы будем обозначать соответственно через M_i', M_i'', M_i''' . Тогда дифференциальное сечение чисто упругого рассеяния электрона электроном с учетом радиационных поправок порядка α будет иметь вид

$$d\sigma_{ee} = \frac{1}{2v} \frac{1}{4} \sum_{\mu_i \mu_f} \left\{ |M_1 + M_1' + M_1'' + M_1'''|^2 + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{Re} \sum_{i=2}^5 (M_1 + M_1' + M_1'' + M_1''')^* (M_i + M_i' + M_i'' + M_i''') \right\} d\omega,$$

где v — скорость электронов в системе центра инерции и суммирование производится по ориентациям спинов электронов в начальном и конечном состояниях ($d\omega$ — элемент телесного угла, в котором рассеивается электрон).

Для того чтобы получить сечение рассеяния электрона позитроном $d\sigma_{ep}$, нужно в этом выражении положить

$$p_1 = p_-, \quad p'_1 = p'_-, \quad p_2 = -p'_+, \quad p'_2 = -p_+,$$

где p_- и p_+ — 4-импульсы электрона и позитрона.

В сечения рассеяния $d\sigma_{ee}$ и $d\sigma_{ep}$ входит «масса» фотона λ (ее содержат матричные элементы, соответствующие диаграммам 2, 3, 5 рис. 39.6). Чтобы исключить λ , нужно, так же как это было сделано при нахождении радиационных поправок к сечению рассеяния электрона во внешнем поле, рассмотреть неупругое рассеяние электрона электроном и электрона позитроном с испусканием мягкого фотона. Соответствующие этому процессу диаграммы изображены на рис. 39.6 (диаграммы 6 и 7; наряду с этими диаграммами нужно рассматривать также диаграммы, получающиеся из приведенных диаграмм путем замен 1), 2), 3)).

Мы приведем здесь только выражение для суммарного сечения рассеяния $d\sigma_e = d\sigma_{ee} + d\sigma'$ в предельном случае больших энергий.

Если $|p| \gg m$, $\sin \vartheta \sim 1$ ($|p|$ — импульс электрона и ϑ — угол рассеяния в системе центра инерции), то дифференциальное сечение рассеяния электрона электроном в лабораторной системе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} d\sigma_e = & \frac{\alpha^2(1-v^2)}{4m^2\chi^2(1-\chi)} \left\{ \frac{1}{2}(2-3\chi+3\chi^2-\chi^3) + \right. \\ & + \frac{\alpha}{\pi} \left[2(1-2\varphi_t+2\varphi_s-2\varphi_u) \ln \frac{m}{2\Delta\varepsilon} (2-3\chi+3\chi^2-\chi^3) + \right. \\ & + \frac{\varphi_t}{3}(28-48\chi+48\chi^2-17\chi^3) + \varphi_s(2-2\chi+\chi^2) + \\ & + \varphi_u(2-2\chi+3\chi^2-\chi^3) - \varphi_s^2(2-\chi) - \varphi_u^2(2-\chi+2\chi^2-\chi^3) - \\ & - \varphi_t^2(6-5\chi+5\chi^2-2\chi^3) + 2\varphi_t\varphi_s(6-7\chi+6\chi^2-2\chi^3) - \\ & - 2\varphi_t\varphi_u(10-17\chi+16\chi^2-5\chi^3) + 2\varphi_s\varphi_u(2-3\chi+3\chi^2-\chi^3) - \\ & \left. \left. - \frac{37}{18}(2-3\chi+3\chi^2-\chi^3) - \frac{\pi^2}{4}\chi(2-\chi) \right] \right\} d\omega + \\ & + \text{члены, получающиеся заменой } \chi \rightarrow 1-\chi, \quad \varphi_t \rightleftharpoons \varphi_u, \quad (39.5.1) \end{aligned}$$

где $\chi = \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ и $\varphi_s, \varphi_t, \varphi_u$ связаны с 4-импульсами электронов соотношениями

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)^2 & \equiv m^2 s = -4m^2 \operatorname{ch}^2 \varphi_s, \\ (p_1 - p'_1)^2 & \equiv m^2 t = 4m^2 \operatorname{sh}^2 \varphi_t, \\ (p_1 - p'_2)^2 & \equiv m^2 u = 4m^2 \operatorname{sh}^2 \varphi_u. \end{aligned}$$

В переменных s, t, u ($s+t+u = -4$, $\sin^2 \vartheta = \frac{t}{t+u}$) условие применимости формулы (39.5.1) имеет вид $t \sim u \gg 1$.

В этом же предельном случае сечение рассеяния электрона позитроном равно

$$\begin{aligned} d\sigma_p = & \frac{\alpha^2(1-v^2)}{4m^2\chi^2} \left\{ (1-\chi+\chi^2)^2 + \right. \\ & + \frac{\alpha}{\pi} \left[4(1-\varphi_t+2\varphi_u-2\varphi_s)(1-\chi+\chi^2)^2 \operatorname{In} \frac{m}{2\Delta\varepsilon} - \right. \\ & \left. - \varphi_s^2(2-9\chi+19\chi^2-15\chi^3+6\chi^4) - \varphi_t^2(6-15\chi+19\chi^2-9\chi^3+2\chi^4) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\varphi_u^2(1-3\chi+4\chi^2-3\chi^3+\chi^4)-2\varphi_t\varphi_s(10-17\chi+24\chi^2-17\chi^3+10\chi^4)+ \\
& +2\varphi_t\varphi_u(6-12\chi+13\chi^2-6\chi^3+2\chi^4)+2\varphi_s\varphi_u(2-6\chi+13\chi^2-12\chi^3+6\chi^4)+ \\
& +\frac{\varphi_t}{3}(28-42\chi+51\chi^2-23\chi^3+6\chi^4)+\frac{\varphi_s}{3}(6-23\chi+51\chi^2-42\chi^3+28\chi^4)+ \\
& +\varphi_u(2-5\chi+6\chi^2-5\chi^3+2\chi^4)- \\
& \left. -\frac{37}{9}(1-\chi+\chi^2)^2+\frac{\pi^2}{4}\chi^2(5-6\chi+4\chi^2)\right\} do. \quad (39.5.2)
\end{aligned}$$

В предельном случае $|\mathbf{p}| \gg m$, $|\mathbf{p}| \vartheta \sim m$ (или $t \sim 1$, $u \gg 1$) сечение рассеяния $d\sigma_e$ приобретает вид

$$d\sigma_e = \frac{\alpha^2(1-v^2)}{4m^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} (1-\delta) do, \quad (39.5.3)$$

где

$$\begin{aligned}
\delta = \frac{\alpha}{\pi} \left[2 \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \varphi_t \right) (1 - \varphi_t \operatorname{cth} \varphi_t) - \frac{2}{9} + \right. \\
+ 4(2\varphi_t \operatorname{cth} 2\varphi_t - 1) \left(\ln \frac{m}{2\Delta\varepsilon} - 1 \right) + 4\varphi_s(2\varphi_t \operatorname{cth} 2\varphi_t - 1) - 1 - \frac{4\varphi_t}{\operatorname{sh} 4\varphi_t} + \\
\left. + \frac{4}{\operatorname{th} 2\varphi_t} \int_0^{\varphi_t} x \operatorname{th} x dx + \frac{2}{\operatorname{th} 2\varphi_t} \int_0^{2\varphi_t} x \operatorname{cth} x dx \right].
\end{aligned}$$

Такой же формулой в случае $|\mathbf{p}| \gg m$, $|\mathbf{p}| \vartheta \sim m$ определяется сечение рассеяния электрона позитроном.

В предельном случае $\ln \frac{|\mathbf{p}|}{m} \gg 1$, $\sin \vartheta \sim 1$ или в переменных s , t , u $\ln t \sim \ln u \gg 1$ сечение рассеяния электрона электроном и электрона позитроном определяется формулой

$$d\sigma = d\sigma_0(1-\delta), \quad (39.5.4)$$

где $d\sigma_0$ —сечение основного процесса рассеяния и

$$\begin{aligned}
\delta &= \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta', \\
-\delta_2 &= \delta_3 = \delta_5 = \frac{4\alpha}{\pi} \left(\ln t \ln \frac{m}{\lambda} + \frac{1}{4} \ln^2 t \right), \\
\delta_4 &= -\frac{2\alpha}{3} \ln t, \\
\delta' &= \frac{4\alpha}{\pi} \left(\ln t \ln \frac{\lambda}{2\Delta\varepsilon} + \frac{5}{8} \ln^2 t \right)
\end{aligned}$$

(величина δ_i соответствует i -диаграмме рис. 39.6, δ' учитывает излучение мягкого фотона).

§ 40. Радиационные поправки к сечениям комптоновского рассеяния, образования и аннигиляции пар и к тормозному излучению

40.1. Радиационные поправки к сечению комптоновского рассеяния. Перейдем к определению радиационных поправок к сечениям процессов рассеяния, в которых наряду с электроном участвуют фотоны. Начнем с рассмотрения эффекта Комптона [22].

На рис. 40.1 представлены диаграммы, изображающие основной эффект Комптона (диаграмма Y_0) и радиационные поправки к нему порядка α (диаграммы Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ; кроме этих диаграмм, нужно, естественно,

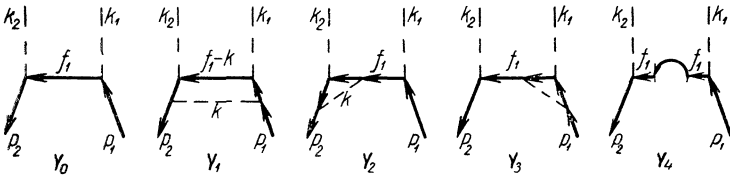


Рис. 40.1.

учитывать также и диаграммы, отличающиеся от изображенных заменой $k_1 \rightleftharpoons k_2$). Матричные элементы, соответствующие этим диаграммам, равны, согласно правилам Фейнмана,

$$M^{(2)} = ie^2 (2\pi)^4 (\bar{u}_2 Q_0 u_1) \frac{\delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)}{\sqrt{4\omega_1\omega_2} \sqrt{4\varepsilon_1\varepsilon_2}}, \tag{40.1.1}$$

$$M^{(4)} = -e^4 (\bar{u}_2 Q u_1) \frac{\delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)}{\sqrt{4\omega_1\omega_2} \sqrt{4\varepsilon_1\varepsilon_2}},$$

где

$$Q_0 = \hat{e}_2 \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2\kappa_2} \hat{e}_2,$$

$$f_1 = p_1 + k_1 = p_2 + k_2, \quad f_2 = p_1 - k_2 = p_2 - k_1,$$

$$m^2\kappa_1 = f_1^2 + m^2, \quad m^2\kappa_2 = f_2^2 + m^2,$$

$$Q = \sum_{i=1}^4 (Y_i + Y'_i),$$

$$Y_1 = \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \hat{e}_2 \frac{i(\hat{f}_1 - \hat{k}) - m}{(f_1 - k)^2 + m^2} \hat{e}_1 \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{d^4k}{k^2 + \lambda^2},$$

$$Y_2 = \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \hat{e}_2 \frac{i(\hat{f}_1 - \hat{k}) - m}{(f_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \hat{e}_1 \frac{d^4k}{k^2},$$

$$Y_3 = \hat{e}_2 \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{f}_1 - \hat{k}) - m}{(f_1 - k)^2 + m^2} \hat{e}_1 \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{d^4k}{k^2},$$

$$Y_4 = \hat{e}_2 \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{f}_1 - \hat{k}) - m}{(f_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2\kappa_1} \hat{e}_1 \frac{d^4k}{k^2 + \lambda^2}$$

(здесь приняты те же обозначения, что и в § 26; матрицы Y'_i отличаются от матриц Y_i перестановкой импульсов фотонов k_1 и k_2).

Сечение основного процесса $d\sigma_0$ равно, как мы знаем,

$$d\sigma_0 = \frac{r_0^2}{4} \frac{\omega_2^2}{m^2\kappa_1^2} 8U_0 d\omega,$$

где

$$U_0 = \frac{1}{8} \text{Sp} \{Q_0 (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m)\} =$$

$$= 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right).$$

Сечение комптоновского рассеяния с учетом радиационных поправок порядка α может быть представлено в виде

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{4} \frac{\omega_3^2 d\omega}{m^2 \kappa_1^2} \text{Sp} \left\{ \left[Q_0 - \frac{e^2}{i(2\pi)^4} Q \right] (i\hat{p}_1 - m) \left[\bar{Q}_0 + \frac{e^2}{i(2\pi)^4} \bar{Q} \right] (i\hat{p}_2 - m) \right\} = d\sigma_0 + \\ + \frac{r_0^2}{4} \frac{\omega_3^2 d\omega}{m^2 \kappa_1^2} \frac{e^2}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left\{ \frac{1}{i} Q_0 (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q} (i\hat{p}_2 - m) - \frac{1}{i} Q (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m) \right\}.$$

Замечая, что

$$\text{Sp} \{ Q_0 (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q} (i\hat{p}_2 - m) \} = [\text{Sp} \{ Q (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m) \}]^*,$$

перепишем $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = d\sigma_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \frac{U_1}{U_0} \right), \quad (40.1.2)$$

где

$$U_1 = \frac{1}{16\pi^2} \text{Re Sp} \frac{1}{i} \{ [Q_1 + Q'_1] (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m) \},$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^4 Y_i, \quad Q'_1 = \sum_{i=1}^4 Y'_i.$$

Вводя обозначения

$$P(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{16\pi^2} \text{Re Sp} \frac{1}{i} \{ Q_1 (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m) \},$$

$$P'(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{16\pi^2} \text{Re Sp} \frac{1}{i} \{ Q'_1 (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m) \},$$

легко убедиться, что

$$P'(\kappa_1, \kappa_2) = P(\kappa_2, \kappa_1).$$

Поэтому U_1 можно переписать в виде

$$U_1 = P(\kappa_1, \kappa_2) + P(\kappa_2, \kappa_1), \quad (40.1.2')$$

где

$$P(\kappa_1, \kappa_2) = \sum_{n=1}^4 P_n,$$

$$P_n = \frac{1}{16\pi^2} \text{Re Sp} \frac{1}{i} \{ Y_n (i\hat{p}_1 - m) \bar{Q}_0 (i\hat{p}_2 - m) \}.$$

Вычислим прежде всего P_1 . Замечая, что

$$i\hat{p}_1 (i\hat{p}_1 - m) = -m (i\hat{p}_1 - m), \quad (i\hat{p}_2 - m) i\hat{p}_2 = -m (i\hat{p}_2 - m),$$

и заменяя \hat{e}_1 на γ_λ и \hat{e}_2 на γ_ν , получим следующее выражение для величины P_1 , просуммированной по поляризациям фотонов:

$$P_1 = \frac{1}{16\pi^2} \text{Re} \frac{1}{i} \sum_{\lambda, \nu} \int \frac{d^4 k}{(0) (1) (2) (3)} \text{Sp} \{ -2i\hat{k}\gamma_\lambda \hat{k}\gamma_\nu \hat{k} - \\ - 2i\hat{p}_1 \hat{k}\gamma_\nu \hat{k}\gamma_\lambda + 2i\hat{k}\gamma_\lambda \hat{f}_1 \gamma_\nu \hat{k} + 4mk^2 \delta_{\nu\lambda} - 2i\gamma_\nu \hat{k}\gamma_\lambda \hat{k}\hat{p}_2 + \\ + 2\hat{p}_1 \hat{k}\gamma_\nu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\lambda + 2\gamma_\nu (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\lambda \hat{k}\hat{p}_2 - 4p_1 p_2 \gamma_\nu [i(\hat{f}_1 - \hat{k}) - m] \gamma_\lambda \},$$

где

$$\begin{aligned}
 (0) &= k^2 + \lambda^2, \\
 (1) &= (p_1 - k)^2 + m^2 = k^2 - 2kp_1, \\
 (2) &= (p_2 - k)^2 + m^2 = k^2 - 2kp_2, \\
 (3) &= (f_1 - k)^2 + m^2 = k^2 - 2kf_1 + m^2\kappa_1.
 \end{aligned}$$

Найдя следы матриц по формулам (8.3.6), можно привести P_1 к виду

$$\begin{aligned}
 i\pi^2 P_1 &= 4(J_{\sigma\tau}^{(1)} - J_{\sigma\tau}^{(0)}) \left(\frac{1}{\kappa_1} p_{2\sigma} f_{1\tau} + \frac{1}{\kappa_2} p_{2\sigma} f_{2\tau} \right) + \\
 &+ (J_{\sigma}^{(0)} - J_{\sigma}^{(1)}) p_{2\sigma} \left(2 - \frac{4}{\kappa_1} - \frac{4}{\kappa_2} \right) + J_{\sigma}^{(0)} f_{1\sigma} \left(3 + \frac{2}{\kappa_1} + \frac{2\kappa_2}{\kappa_1} \right) + \\
 &+ J_{\sigma}^{(0)} f_{2\sigma} \left(5 - \frac{2}{\kappa_1} + \frac{4\kappa_1}{\kappa_2} \right) + (J_{\sigma}^{(1)} p_{1\sigma} + J_{\sigma}^{(2)} p_{2\sigma}) \left(1 - \frac{2}{\kappa_2} \right) - \\
 &- (J_{\sigma}^{(1)} + J_{\sigma}^{(2)}) \left[f_{1\sigma} \left(1 + \frac{4}{\kappa_1} + \frac{4}{\kappa_2} \right) + f_{2\sigma} \left(2 + \frac{2\kappa_1}{\kappa_2} \right) \right] - \\
 &- J_{\sigma} (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}) \left(4\kappa_1 + 3\kappa_2 - \frac{12}{\kappa_2} - \frac{4}{\kappa_1} - \frac{2\kappa_2}{\kappa_1} + \frac{2\kappa_1^2}{\kappa_2} \right) - \\
 &- J_{\sigma}^{(3)} f_{1\sigma} \left(\frac{2}{\kappa_2} - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) - J_{\sigma}^{(3)} f_{2\sigma} \left(1 - \frac{2}{\kappa_1} \right) - \\
 &- J_{\sigma} f_{1\sigma} \left(6 - 4\kappa_1 - \kappa_2 - \frac{4}{\kappa_1} + \frac{12}{\kappa_2} + \frac{2\kappa_1}{\kappa_2} - \frac{2\kappa_1^2}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1} \right) + \\
 &+ J^{(0)} \left(5 - 2\kappa_1 - \kappa_2 - \frac{2}{\kappa_1} - \frac{2}{\kappa_2} + \frac{4\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) + \\
 &+ J(-2 + \kappa_1 + \kappa_2) \left(3 + \kappa_2 - \frac{4}{\kappa_1} - \frac{4}{\kappa_2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right), \quad (40.1.3)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 2J_{\sigma} p_{1\sigma} &= 2J_{\sigma} p_{2\sigma} = J^{(0)} - J^{(1)} = J^{(0)} - J^{(2)}, \\
 2J_{\sigma} f_{1\sigma} &= J^{(0)} - J^{(3)} + \kappa J
 \end{aligned}$$

и $J_{\sigma}^{(0)}$, $J_{\sigma\tau}^{(1)}$, ... — интегралы типов

$$J_{\sigma}^{(0)} = \int \frac{k_{\sigma} d^4 k}{(1)(2)(3)}, \quad J_{\sigma\tau}^{(1)} = \int \frac{k_{\sigma} k_{\tau} d^4 k}{(0)(2)(3)}, \dots$$

(нижние индексы у $J^{(0)}$, $J^{(1)}$, ... обозначают проекции 4-вектора в числителе подынтегрального выражения, а верхний значок указывает на недостающий в знаменателе множитель одного из типов (1), (2), (3), (0)).

Эти интегралы могут быть вычислены, согласно правилам § 36.1:

$$J^{(0)} = -\pi^2 i \frac{2y^2}{\kappa_1 + \kappa_2},$$

$$J^{(1)} = J^{(2)} = \pi^2 i \frac{1}{\kappa_1} [F(\kappa_1 - 1) - F(-1)],$$

$$J^{(3)} = \pi^2 i 2y (\operatorname{sh} 2y)^{-1} [h(2y) - h(y) - \ln \lambda],$$

$$J = \pi^2 i 2y (\operatorname{sh} 2y \cdot \kappa_1)^{-1} \left[h(2y) - 2h(y) + \ln \frac{|\kappa_1|}{\lambda} \right],$$

$$J_{\sigma}^{(0)} = J^{(0)} (p_{1\sigma} + p_{2\sigma})/2 + \left(J^{(0)} - \pi^2 i \frac{4b}{\kappa_1 + \kappa_2} \right) (q_{1\sigma} + q_{2\sigma})/2,$$

$$\begin{aligned}
J_{\sigma}^{(1)} &= \left[J^{(1)} - \pi^2 i \frac{\ln |\kappa_1|}{\kappa_1 - 1} \right] p_{2\sigma} + \left[2J^{(1)} + \pi^2 i \left(\frac{\kappa_1 - 2}{\kappa_1 - 1} \ln |\kappa_1| - 2 \right) \right] \frac{q_{2\sigma}}{\kappa_1}, \\
J_{\sigma}^{(2)} &= \left[J^{(1)} - \pi^2 i \frac{\ln |\kappa_1|}{\kappa_1 - 1} \right] p_{1\sigma} + \left[2J^{(1)} + \left(\frac{\kappa_1 - 2}{\kappa_1 - 1} \ln |\kappa_1| - 2 \right) \pi^2 i \right] \frac{q_{1\sigma}}{\kappa_1}, \\
J_{\sigma}^{(3)} &= \pi^2 i y (\operatorname{sh} 2y)^{-1} (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}), \\
J_{\sigma\tau}^{(0)} &= -\pi^2 i \frac{\delta_{\sigma\tau}}{4} \left(A_0 - \frac{1}{2} - 2b + \frac{2}{\pi^2 i} J^{(0)} \right) - \\
&\quad - \frac{\pi^2 i}{\kappa_1 + \kappa_2} \left\{ 2y^2 f_{1\sigma} f_{1\tau} + b [2f_{1\sigma} (q_{1\tau} + q_{2\tau}) + 2f_{1\tau} (q_{1\sigma} + q_{2\sigma}) - \right. \\
&\quad \left. - q_{1\sigma} q_{1\tau} - q_{2\sigma} q_{2\tau}] + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2 i} J^{(0)} \right) (q_{1\sigma} q_{2\tau} + q_{1\tau} q_{2\sigma}) \right\}, \\
J_{\sigma\tau}^{(1)} &= -\pi^2 i \frac{\delta_{\sigma\tau}}{4} \left(A_0 + \frac{1}{2} - 3 + \frac{\kappa_1 - 2}{\kappa_1 + 1} \ln |\kappa_1| + \frac{2}{\pi^2 i} J^{(1)} \right) + \\
&\quad + \frac{\pi^2 i}{2} p_{2\sigma} p_{2\tau} \left[\frac{2}{\pi^2 i} J^{(1)} - \frac{3\kappa_1 - 2}{(\kappa_1 - 1)^2} \ln |\kappa_1| + \frac{1}{\kappa_1 - 1} \right] + \\
&\quad + \frac{\pi^2 i}{\kappa_1^2} q_{2\sigma} q_{2\tau} \left[\frac{6}{\pi^2 i} J^{(1)} + \frac{(\kappa_1^2 + 6\kappa_1 - 6)(\kappa_1 - 2)}{2(\kappa_1 - 1)^2} \ln |\kappa_1| - \frac{2\kappa_1^2 + 9\kappa_1 - 12}{2(\kappa_1 - 1)} \right] + \\
&\quad + \frac{\pi^2 i}{2\kappa_1} (p_{2\sigma} q_{2\tau} + p_{2\tau} q_{2\sigma}) \left[\frac{6}{\pi^2 i} J^{(1)} + \frac{2\kappa_1^2 - 9\kappa_1 + 6}{(\kappa_1 - 1)^2} \ln |\kappa_1| + \frac{1}{\kappa_1 - 1} - 5 \right],
\end{aligned}$$

где

$$\operatorname{sh}^2 y = -\frac{1}{4} (\kappa_1 + \kappa_2),$$

$$|b = 1 - y \operatorname{cth} y,$$

$$h(y) = \frac{1}{y} \int_0^y u \operatorname{cth} u \, du,$$

$$F(x) = \int_0^x \ln(1+u) \frac{du}{u},$$

$$A_0 = 1 - \ln \frac{L^2}{m^2}$$

(A_0 обозначает логарифмически расходящуюся константу § 36.1).

Перейдем теперь к вычислению P_2 :

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{1}{16\pi^2} \operatorname{Sp} \frac{1}{i} \left\{ \gamma_{\nu} \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \int \gamma_{\mu} \frac{i(\hat{f}_1 - \hat{k}) - m}{k^2 - 2k\hat{f}_1 + m^2 \kappa_1} \gamma_{\lambda} \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_{\mu} \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{d^4 k}{k^2} (i\hat{p}_1 - m) \left[\gamma_{\lambda} \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2 \kappa_2} \gamma_{\lambda} \right] (i\hat{p}_2 - m) \right\}.
\end{aligned}$$

Величина P_2 , очевидно, не изменится, если сделать замену $p_1 \overleftrightarrow{=} p_2$, $k_1 \overleftrightarrow{=} k_2$ (при этом κ_1 и κ_2 не изменяются) и выписать все матрицы под знаком следа в обратном порядке. Поменяв еще местами индексы ν и λ , получим

$$P_2 = P_3.$$

Замечая, что регуляризованное выражение Y_3 имеет вид

$$Y_{3R} = \gamma_{\nu} \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \frac{(2\pi)^4}{ie^2} \Lambda_{R\lambda}^{(3)}(p_1, p_1 + k_1),$$

где $\Lambda_{R\lambda}^{(3)}(p_1, p_1 + k_1)$ определяется формулой (36.4.13), получим

$$\begin{aligned}
 P_2 + P_3 = 2P_2 = & -\frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ \gamma_\nu \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} (A\gamma_\lambda + iB\hat{k}_1\gamma_\lambda + iCp_\lambda + \right. \\
 & \left. + D\hat{k}_1 p_\lambda)(i\hat{p}_1 - m) \left(\gamma_\lambda \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2 \kappa_2} \gamma_\lambda \right) (i\hat{p}_2 - m) \right\} = \\
 = & \frac{1}{\kappa_1} \left\{ 2A \left(3 + \kappa_2 - \frac{4}{\kappa_1} - \frac{4}{\kappa_2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) - 2B(\kappa_1 + \kappa_2) + \right. \\
 & \left. + C \left(-8 + \kappa_1 + \frac{8}{\kappa_1} + \frac{8}{\kappa_2} - \frac{4\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} \right) - \right. \\
 & \left. - D \left(4 - \kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1^2 - \kappa_1 \kappa_2 + \frac{4\kappa_1}{\kappa_2} \right) \right\}. \quad (40.1.4)
 \end{aligned}$$

Найдем, наконец, P_4 . Регуляризованное выражение Y_4 имеет вид

$$Y_{4R} = \gamma_\nu \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \frac{(2\pi)^4}{e^2} \sum_R^{(2)}(f_1) \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \gamma_\lambda,$$

где $\sum_R^{(2)}(f_1)$ определяется формулой (36.2.12)

$$\begin{aligned}
 \frac{(2\pi)^4}{e^2} \sum_R^{(2)}(f_1) &= \pi^2 i \{ B_1(i\hat{f}_1 + m) + B_2 m \}, \\
 B_1 &= 2 \left(1 + \ln \frac{\lambda^2}{m_2} \right) + \frac{\kappa_1}{\kappa_1 - 1} + \frac{\kappa_1(\kappa_1 - 2)}{(\kappa_1 - 1)^2} \ln |\kappa_1|, \\
 B_2 &= -\frac{\kappa_1}{\kappa_1 - 1} + \frac{\kappa_1(3\kappa_1 - 2)}{(\kappa_1 - 1)^2} \ln |\kappa_1|.
 \end{aligned}$$

Используя это выражение, найдем

$$\begin{aligned}
 P_4 = & \frac{1}{16\kappa_1^2 m^4} \text{Sp} \left\{ \gamma_\nu (i\hat{f}_1 - m) [B_1(i\hat{f}_1 + m) + B_2 m] (i\hat{f}_1 - m) \gamma_\lambda \times \right. \\
 & \times (i\hat{p}_1 - m) \left(\gamma_\lambda \frac{i\hat{f}_1 - m}{m^2 \kappa_1} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{i\hat{f}_2 - m}{m^2 \kappa_2} \gamma_\lambda \right) (i\hat{p}_2 - m) \left. \right\} = \\
 = & \frac{1}{2\kappa_1^2} B_2 \left(8 + \kappa_2 - \frac{8}{\kappa_1} - \frac{8}{\kappa_2} + \frac{4\kappa_1}{\kappa_2} - \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} \right) + \\
 & + \frac{1}{2\kappa_1} B_1 \left(3 + \kappa_2 - \frac{4}{\kappa_1} - \frac{4}{\kappa_2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right). \quad (40.1.5)
 \end{aligned}$$

Складывая P_1, P_2, P_3 и P_4 , получим окончательно следующее выражение для P :

$$\begin{aligned}
 P(\kappa_1, \kappa_2) = & (1 - 2y \text{cth } 2y) \ln \lambda \cdot U_0 - 2y \text{cth } 2y [2h(y) - h(2y)] U_0 + \\
 & + h(y) \left(-4y \text{sh } 2y \frac{2 - \text{ch } 2y}{\kappa_1 \kappa_2} + 2y \text{cth } y \right) + \\
 & + \ln |\kappa_1| \left\{ 4y \text{cth } 2y \left[\frac{4 \text{ch}^2 y}{\kappa_1 \kappa_2} + \frac{\kappa_1 - 6}{2\kappa_2} \frac{1}{\text{ch } 2y} + \frac{4}{\kappa_1^2} - \frac{1}{\kappa_1} - \frac{\kappa_2}{2\kappa_1} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} - 1 \right] + \right. \\
 & + 1 + \frac{3}{\kappa_2} + \frac{8}{\kappa_1} + \frac{3\kappa_2}{2\kappa_1} - \frac{8}{\kappa_1^2} - \frac{7}{\kappa_1 \kappa_2} + \frac{3\kappa_2}{2\kappa_1^2} + \frac{2\kappa_1 - \kappa_2^2 - \kappa_1^2 \kappa_2}{2\kappa_1^2 \kappa_2 (\kappa_1 - 1)} - \frac{2\kappa_1^2 + \kappa_2}{2\kappa_2 (\kappa_1 - 1)^2} \left. \right\} - \\
 & - \frac{4y^2}{\kappa_1 + \kappa_2} \left[\frac{2}{\kappa_1} - \frac{7}{4} \kappa_1 - \frac{3}{4} \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1} \right] - 4y \text{th } y \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_1} \right) + 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - \\
 & - \frac{12}{\kappa_1} - \frac{3}{2} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} - \frac{2\kappa_1}{\kappa_2^2} + \frac{1}{\kappa_1 - 1} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{\kappa_1} [F(\kappa_1 - 1) - F(-1)] \times \\
 & \times \left(-1 + \frac{2}{\kappa_1} - \frac{3}{\kappa_2} + \kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_2} + \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} \right). \quad (40.1.6)
 \end{aligned}$$

В величину U_1 , определяющую радиационные поправки к сечению эффекта Комптона, входит «масса» фотона λ . Для того чтобы исключить ее, нужно, так же как это было сделано при рассмотрении радиационных поправок к сечению рассеяния электрона во внешнем поле, учесть в эффекте Комптона излучение дополнительного мягкого фотона. Такой процесс будем называть *двойным эффектом Комптона*.

В лабораторной системе отсчета ($p_1 = 0$) сечение двойного эффекта Комптона может быть представлено, согласно общему результату § 39.4, в следующем виде:

$$d\sigma_D = -\frac{\alpha}{\pi} d\sigma_0 \frac{U_D}{U_0}, \quad (40.1.7)$$

где $d\sigma_0$ — сечение основного эффекта Комптона и

$$\frac{U_D}{U_0} = 2(1 - 2y \operatorname{cth} 2y) \left(\ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) + 4y \operatorname{cth} 2y [h(2y) - 1] \quad (40.1.8)$$

($\Delta\varepsilon$ — максимальная энергия фотона).

Суммарное сечение рассеяния фотона электроном с учетом как радиационных поправок, так и излучения дополнительного мягкого фотона определяется формулой

$$d\sigma = d\sigma_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \frac{U_1 + U_D}{U_0} \right\}. \quad (40.1.9)$$

Эта величина, как легко видеть, не содержит «массы» фотона.

Приведенные общие формулы сильно упрощаются в предельных случаях малых и больших энергий фотона.

В области малых энергий, когда $\omega_1 \approx \omega_2 \equiv \omega \ll m$, сечение рассеяния имеет вид

$$d\sigma_1^2 = \frac{r_0^2}{2} d\omega (1 - 2\omega + 2\omega^2 + \dots) \left(U_0 - \frac{\alpha}{\pi} (U_1 + U_D) \right), \quad (40.1.10)$$

где

$$\begin{aligned} U_0 &= 1 + \cos^2 \vartheta, \\ U_1 &= -\frac{4}{3} \omega^2 (1 - \cos \vartheta) U_0 \ln \frac{\lambda}{m} + \\ &\quad + \left(1 + \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right) 4\omega^2 \ln \frac{\omega}{m}, \\ U_D &= -\frac{4}{3} \omega^2 (1 - \cos \vartheta) U_0 \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} \end{aligned} \quad (40.1.11)$$

(ϑ — угол рассеяния).

В области больших энергий мы будем различать три случая в зависимости от величины параметра $\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_2}$ (в лабораторной системе этот параметр равен $\frac{\kappa_1}{2} (1 - \cos \vartheta)$):

$$1) \left| \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_2} \right| \ll 1, \quad 2) \left| \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_2} \right| \sim 1, \quad 3) \left| \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_2} \right| \gg 1.$$

В первом случае $|\kappa_1| \approx \kappa_2 \gg 1$; при этом в лабораторной системе $\omega_2 \approx \omega_1 \gg m$, $1 - \cos \vartheta \ll \frac{m}{\omega_1}$. Во втором случае $\kappa_2 \gg 1$, $|\kappa_1 + \kappa_2| \gg 1$ и в лабораторной системе $\omega_2 \sim \frac{\omega_1}{2} \gg m$, $1 - \cos \vartheta \sim \frac{m}{\omega_1}$. В третьем случае $|\kappa_1 + \kappa_2| \gg 1$, $|\kappa_1| \gg \kappa_2$ и в лабораторной системе $\omega_2 \sim m$, $1 - \cos \vartheta \gg \frac{m}{\omega_1}$.

В первом случае

$$U_0 = 2,$$

$$U_1 = 4(1 - 2y \operatorname{cth} 2y) \ln \frac{\lambda}{m} - 8y \operatorname{cth} 2y [2h(y) - h(2y)] +$$

$$+ 4yh(y) \operatorname{cth} y + \ln |\kappa_1| (4y \operatorname{th} y - 1) - 2y^2 - 4y \operatorname{th} y + 3 - \ln^2 |\kappa_1| - \frac{\pi^2}{6},$$
(40.1.12)

где

$$\operatorname{sh}^2 y = -\frac{1}{4}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

Во втором случае

$$U_0 = -\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right),$$

$$U_1 = U_0 \left\{ (1 - 2y) \left(\frac{3}{2} + 2 \ln \frac{\lambda}{m} \right) + 2y^2 - \frac{\pi^2}{6} \right\} +$$

$$+ \left(1 + \frac{\kappa_2}{2\kappa_1} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \left[\ln^2 \left(1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) - \ln \left(1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) + 2 \ln \frac{\kappa_2}{|\kappa_1|} \right] +$$

$$+ \left(1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} + \frac{\kappa_1}{2\kappa_2} \right) \left[\ln^2 \left(1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) - \ln \left(1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) - \ln \left| \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right| + \pi^2 \right].$$
(40.1.13)

Наконец, в третьем случае

$$U_0 = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2},$$

$$U_1 = U_0 \left\{ 2(1 - 2y) \ln \frac{\lambda}{m} + \ln \kappa_2 \left[2y - \frac{3}{2} \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_2} + \frac{1}{2\kappa_2(\kappa_2 - 1)} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{\kappa_2} [F(\kappa_2 - 1) - F(-1)] \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{\kappa_2}{2} \right) + \frac{3}{2} + \frac{2}{\kappa_2} \right\}.$$
(40.1.14)

Величина U_D во втором и третьем случаях определяется формулой

$$U_D = U_0 \left\{ 2(1 - 2y) \left[\ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{2} \right] + 4y \left(y + \frac{\pi^2}{24y} - 1 \right) \right\},$$
(40.1.15)

в первом же случае следует пользоваться общей формулой (40.1.8).

В ультрарелятивистском случае, когда $\ln \left| \frac{p_1 p_2}{m^2} \right| \gg 1$, $\ln \left| \frac{p_1 k_{1,2}}{m^2} \right| \gg 1$ (но $\ln \left| \frac{p_1 p_2}{p_1 k_{1,2}} \right| \sim 1$) величина $(U_1 + U_D)/U_0$ имеет вид

$$\frac{U_1 + U_D}{U_0} = \frac{3}{2} \ln^2 \frac{p_1 p_2}{m^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{p_1 p_2}{m^2} + 2 \left(\ln \frac{p_1 \gamma_2}{m^2} - 1 \right) \ln \frac{m}{2\Delta\varepsilon}.$$
(40.1.16)

40.2. Рассеяние электроном фотонов малой частоты. В § 22.2 при разъяснении идеи перенормировки заряда электрона мы показали, что сечение рассеяния фотона электроном с учетом высших приближений теории возмущений при нулевой частоте фотона определяется формулой Томсона, т. е. амплитуда этого рассеяния имеет вид

$$M = \frac{\bar{u}_f}{\sqrt{2\varepsilon_f}} A \frac{u_i}{\sqrt{2\varepsilon_i}},$$

где

$$A = -\frac{e_R^2}{m_R} \mathbf{e} \mathbf{e}', \quad \omega \rightarrow 0,$$
(40.2.1)

u_i и u_f — биспиноры, описывающие электрон в начальном и конечном состояниях (ε_i и ε_f — соответствующие энергии), e_R и m_R — заряд и масса реального электрона и e и e' — векторы поляризации падающего и рассеянного фотонов. Это выражение, представляющее собой первый член в разложении амплитуды рассеяния фотона электроном по степеням частоты фотона, совпадает с классической амплитудой рассеяния фотона электроном. Оно показывает, что при $\omega = 0$ радиационные поправки к амплитуде рассеяния сводятся лишь к перенормировке заряда и массы электрона. Это обстоятельство связано с тем, что амплитуда рассеяния фотона электроном имеет конечный и отличный от нуля классический предел (при $\hbar \rightarrow 0$), а из e_R и m_R можно составить только одну величину, имеющую размерность длины, а именно классический радиус электрона e_R^2/m_R . По этой же причине формула (40.2.1) справедлива не только для электрона, но для всех частиц.

Последующие члены в разложении амплитуды рассеяния фотона электроном по степеням частоты с учетом радиационных поправок имеют более сложную структуру и, как следует из результатов § 40.1, отличаются от соответствующих членов в разложении формулы Клейна — Нишины по степеням ω . Исключение представляет линейный по частоте член, который имеет такую же структуру, как и линейный по ω член в классической амплитуде рассеяния фотона частицей, обладающей наряду с зарядом еще магнитным моментом — нормальным и аномальным.

Амплитуду рассеяния фотона такой частицей можно определить, либо исходя из уравнений Максвелла и уравнений движения частицы в поле, либо, что проще, исходя из уравнений Дирака

$$\left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie_R A_\mu \right) + m_R - \frac{1}{2} \mu_a \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \psi = 0, \quad (40.2.2)$$

описывающих частицу с зарядом e_R , массой m_R и аномальным магнитным моментом μ_a ($F_{\mu\nu}$ представляет собой тензор поля, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$). Мы не будем приводить здесь вычислений амплитуды рассеяния M , а приведем только окончательный результат (учитывающий не зависящие от ω и линейные по ω члены):

$$M = \frac{\bar{u}_f(p+k-k')}{\sqrt{2\varepsilon_f}} A \frac{u_i(p)}{\sqrt{2\varepsilon_i}} \equiv e'_\nu T_{\nu\mu}(k', k) e_\mu,$$

где

$$A = -\frac{e_R^2}{m_R} ee' - 2i\mu^2 \omega \Sigma [[n'e'] [ne]] - \\ - \frac{ie_R \mu}{2m_R} \omega \{ (\Sigma n) ([ne] e') + (\Sigma [ne]) (ne') - (\Sigma n') ([n'e'] e) + \\ + (\Sigma [n'e'] (n'e)) \} + \frac{ie_R \mu_a}{m_R} \omega (\Sigma [e'e]), \quad (40.2.3)$$

$u_i(p)$ и $u_f(p+k-k')$ — биспиноры, описывающие начальное и конечное состояния электрона, p — 4-импульс электрона в начальном состоянии, k и k' — 4-импульсы падающего и рассеянного фотонов, $n = \frac{k}{|k|}$, $n' = \frac{k'}{|k'|}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ (σ — матрицы Паули) и $\mu = \frac{e_R}{2m_R} + \mu_a$ — полный магнитный момент частицы.

Покажем, что такой же формулой определяются два первых члена в разложении по степеням ω амплитуды рассеяния фотона электроном с учетом радиационных поправок, если под μ_a понимать аномальный магнитный момент электрона (см. § 37.2) [23].

С этой целью разобьем, так же как и в § 22.2, диаграммы, изображающие рассеяние фотона электроном, на две группы — диаграммы, сводящиеся к скелетной диаграмме *I* рис. 40.2, и диаграммы, представляющие собой компактные ЭСЭД, к электронным линиям которых присоединены две внешние фотонные линии.

Легко видеть, что вклад, вносимый диаграммами первой группы в тензор $T_{\nu\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, определяющий амплитуду рассеяния, имеет вид

$$T_{\nu\mu}^I(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = t_{\nu\mu}^I(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + t_{\mu\nu}^I(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}'), \tag{40.2.4}$$

где

$$t_{\nu\mu}^I(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -e_R^2 \bar{u}_f(p+k-k') \Gamma_\nu(p+k-k', p+k) G^{(e)}(p+k) \Gamma_\mu(p+k, p) u_i(p)$$

и $\Gamma_\nu(p, q)$ и $G^{(e)}(p)$ — перенормированные вершинная функция и электронная функция Грина.

Определим теперь вклад $T_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, вносимый в тензор рассеяния $T_{\nu\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ диаграммами второй группы. Напомним для этого, что если имеется некоторая диаграмма, которой соответствует матричный элемент M , и к какой-либо ее электронной линии с 4-импульсом p присоединяется фотонная линия с нулевым импульсом и вектором поляризации, направленным вдоль оси μ , то новой диаграмме будет соответствовать матричный элемент, равный $\frac{\partial M}{\partial p_\mu}$. Отсюда следует,

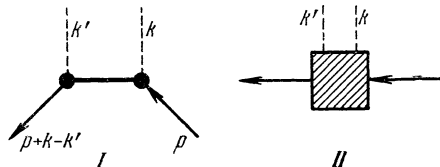


Рис. 40.2.

что вклад, вносимый в $T_{\nu\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ диаграммами второй группы, будет определяться величинами $\frac{\partial}{\partial p_\nu} \Gamma_\mu(p+k, p)$ и $\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Gamma_\nu(p-k', p)$, в которых вершинная функция должна быть разложена в ряд по степеням волнового вектора фотона, причем в этом разложении должны быть сохранены только члены, не содержащие k и линейные по k . Ясно, что члены более высокого порядка при этом учитывались бы неправильно.

Из (40.2.4) следует, что $T_{\nu\mu}^I(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ удовлетворяет условию

$$T_{\nu\mu}^I(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = T_{\mu\nu}^I(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}').$$

Таким же свойством симметрии должен обладать и весь тензор рассеяния $T_{\nu\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, а следовательно, и его часть $T_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$:

$$T_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = T_{\mu\nu}^{II}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}').$$

Учитывая это свойство, можно представить $T_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ в виде

$$T_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = t_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + t_{\mu\nu}^{II}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}'), \tag{40.2.5}$$

где

$$t_{\nu\mu}^{II}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -ie_R^2 \bar{u}_f(p+k-k') \frac{\partial \Gamma_\mu(p', p)}{\partial p'_\nu} u_i(p), \quad p' = p+k$$

и

$$\frac{\partial \Gamma_\mu(p', p)}{\partial p'_\nu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \Gamma_\mu(p, p)}{\partial p_\nu} + \frac{\partial}{\partial p_\nu} k_\lambda \frac{\partial}{\partial p'_\lambda} \Gamma_\mu(p', p) |_{p'=p}$$

Мы должны теперь разложить выражения (40.2.4) и (40.2.5) в ряды по степеням частоты фотона и удержат в них только первые два члена. Из соображений релятивистской инвариантности следует, что нужные нам разложения вершинных функций имеют вид

$$\Gamma_{\mu}(p+k, k) = \Gamma_{\mu}(p, p) + \frac{1}{2} k_{\lambda} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda}} \Gamma_{\mu}(p, p) + \frac{p_{\lambda}^2}{m_R^3} \sigma_{\mu\lambda} p_{\lambda} F_1(p^2) + \frac{\sigma_{\mu\lambda} k_{\lambda}}{2m_R} F_2(p^2) + \frac{k_{\lambda} \sigma_{\lambda\rho} p_{\rho} p_{\mu}}{m_R^3} F_3(p^2), \quad (40.2.6)$$

$$\Gamma_{\mu}(p+k-k', p+k) = \Gamma_{\mu}(p, p) + \frac{1}{2} (2k_{\lambda} - k'_{\lambda}) \frac{\partial}{\partial p_{\lambda}} \Gamma_{\mu}(p, p) - \frac{p k'}{m_R^3} \sigma_{\mu\lambda} p_{\lambda} F_1(p^2) - \frac{\sigma_{\mu\lambda} k'_{\lambda}}{2m_R} F_2(p^2) - \frac{k'_{\lambda} \sigma_{\lambda\rho} p_{\rho} p_{\mu}}{m_R^3} F_3(p^2),$$

где $F_1(p^2)$, $F_2(p^2)$ и $F_3(p^2)$ — некоторые функции p^2 .

Далее электронную функцию Грина $G^{(e)}(p)$ мы можем представить в виде

$$G^{(e)}(p) = \{i\gamma_{\mu} p_{\mu} K(p^2) + m_R F(p^2)\}^{-1}, \quad (40.2.7)$$

где $F(p^2)$ и $K(p^2)$ — некоторые функции p^2 , равные, как следует из спектрального представления электронной функции Грина, единице при $p^2 = -m_R^2$,

$$F(-m_R^2) = K(-m_R^2) = 1.$$

Из тождества Уорда

$$\Gamma_{\mu}(p, p) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial p_{\mu}} G^{(e)}(p)$$

легко заключить, что при $p^2 = -m_R^2$ совпадают производные функций $F(p^2)$ и $K(p^2)$ по p^2

$$K'(-m_R^2) = F'(-m_R^2).$$

Используя (40.2.7), получим нужное нам разложение $G^{(e)}(p+k)$

$$G^{(e)}(p+k) = \frac{1}{2pk} [-i\gamma_{\mu} p_{\mu} + m_R - i\gamma_{\mu} k_{\mu} + 2pk(-i\gamma_{\mu} p_{\mu} + m_R) F' - i\gamma_{\mu} k_{\mu} 2pk F' + 2(pk)^2(-i\gamma_{\mu} p_{\mu} K'' + m_R F'') - 2pk\{2F' + m_R^2(F'' - K'')\} \times \{2pk(-i\gamma_{\mu} p_{\mu} + m_R) F' - i\gamma_{\mu} k_{\mu}\}], \quad (40.2.8)$$

где производные F' , F'' , K'' берутся при $p^2 = -m_R^2$.

Наконец, считая, что электрон в начальном состоянии покоится, $p = 0$, мы можем, согласно (9.2.7), представить $u_i(p)$ и $u_f(p+k-k')$ в виде

$$u_i(p) = \sqrt{2m_R} \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_f(p+k-k') = \sqrt{2m_R} \begin{pmatrix} v_f \\ \frac{\sigma(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}{2m_R} v_f \end{pmatrix}, \quad (40.2.9)$$

где v_i и v_f — двухкомпонентные спиноры, описывающие начальное и конечное состояния.

Используя формулы (40.2.6), (40.2.8) и (40.2.9), получим следующее выражение для амплитуды рассеяния фотона электроном:

$$M = v_f^* A v_i, \quad A = A^I + A^{II},$$

где A^I и A^{II} — вклады, вносимые в величину A диаграммами первой и второй групп, равные

$$\left. \begin{aligned}
 A^I = & -\frac{e_R^2}{m_R} \mathbf{e} \mathbf{e}' - \frac{ie_R^2}{2m_R^2} (1 - F_2)^2 \omega (\sigma [[\mathbf{n}' \mathbf{e}'] [\mathbf{n} \mathbf{e}]] - \\
 & - \frac{ie_R^2}{2m_R^2} (1 - F_2) \omega \{ (\sigma \mathbf{n}) ([\mathbf{n} \mathbf{e}] \mathbf{e}') + (\sigma [\mathbf{n} \mathbf{e}]) (\mathbf{n} \mathbf{e}') - \\
 & - (\sigma \mathbf{n}') ([\mathbf{n}' \mathbf{e}'] \mathbf{e}) - (\sigma [\mathbf{n}' \mathbf{e}']) (\mathbf{n}' \mathbf{e}') \} - \frac{ie_R^2}{2m_R} (4F_1 - F_2) \omega (\sigma [\mathbf{e}' \mathbf{e}]), \\
 A^{II} = & -\frac{2ie_R^2}{m_R^2} F_1 \omega (\sigma [\mathbf{e}' \mathbf{e}]).
 \end{aligned} \right\} (40.2.10)$$

Сумма величин A^I и A^{II} имеет, как мы видим, ту же структуру, что и величина A , определяемая формулой (40.2.3), и нам остается лишь убедиться, что аномальный магнитный момент электрона μ_a имеет вид

$$\mu_a = -\mu_0 F_2, \quad (40.2.11)$$

где $\mu_0 = \frac{e_R}{2m_R}$.

Рассмотрим для этого рассеяние электрона во внешнем электромагнитном поле $A_\mu^{(e)}(x)$. Матричный элемент, определяющий рассеяние, равен, очевидно,

$$M = -ie_R \frac{\bar{u}_f(p+q)}{\sqrt{2\varepsilon_f}} \Gamma_\mu(p+q, p) A_\mu^{(e)}(q) \frac{u_i(p)}{\sqrt{2\varepsilon_i}}.$$

Считая, что потенциал $A_\mu^{(e)}(x)$ соответствует однородному магнитному полю, и предполагая, что электрон вначале покоится, получим, используя (40.2.6) и (40.2.9), следующее выражение для линейного по k слагаемого в M :

$$M \sim -\bar{u}_f \mu_0 (1 - F_2) \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} u_i.$$

С другой стороны, можно определить M , основываясь на уравнении (40.2.2):

$$M \sim -\bar{u}_f (\mu_0 + \mu_a) \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} u_i.$$

Сравнение этих выражений приводит к формуле (40.2.11).

Обратим внимание на тот факт, что основной вклад в амплитуду рассеяния A вносят диаграммы первой группы. Можно убедиться в том, что величина A^{II} лишь компенсирует те члены в A^I , наличие которых противоречит калибровочной инвариантности амплитуды рассеяния (ср. аналогичную ситуацию в амплитуде излучения мягкого фотона в § 29.4). Отсюда следует, что формула (40.2.3) справедлива не только для электронов, но и для произвольных частиц. Действительно, диаграммы первой группы носят универсальный характер и вносимый ими вклад в A определяется только поведением функции Грина частицы вблизи полюса $p^2 = -m_R^2$ и структурой вершинной функции $\Gamma_\mu(p+k, p)$ при малых k (см. § 21).

Таким образом, рассеяние фотона любой частицей независимо от ее природы (в том числе адронов с произвольным спином) определяется с точностью до членов, линейных по частоте только зарядом e_R и магнитным моментом частицы μ (которые следует рассматривать как эмпирические

константы). Дальнейшие же члены в разложении амплитуды рассеяния по частоте зависят от структуры частицы, т. е. от характера ее взаимодействий.

40.3. Радиационные поправки к сечению двухфотонной аннигиляции пар.

Зная радиационные поправки к сечению эффекта Комптона, легко найти радиационные поправки к сечению двухфотонной аннигиляции пар [24]. Действительно, диаграммы, изображающие двухфотонную аннигиляцию с радиационными поправками (рис. 40.3), топологически не отличаются от диаграмм, изображающих эффект Комптона с поправками (рис. 40.1). Различие состоит лишь в том, что вместо двух электронных состояний

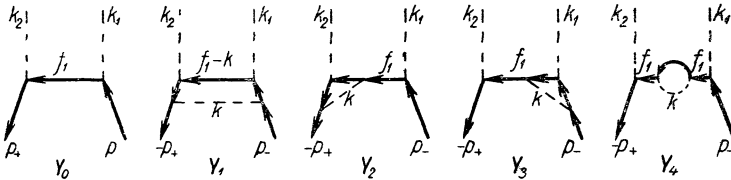


Рис. 40.3.

в эффекте Комптона в процессе двухфотонной аннигиляции мы имеем дело с одним электронным и одним позитронным состоянием и, кроме того, в эффекте Комптона один фотон поглощается, а другой испускается, а в процессе аннигиляции пары оба фотона испускаются. Поэтому, если в формуле, определяющей амплитуду рассеяния фотона электроном с радиационными поправками, изменить знак у 4-импульсов падающего фотона и рассеянного электрона, то мы получим сечение двухфотонной аннигиляции пар с учетом радиационных поправок.

Итак, мы должны сделать в формуле (40.1.1) замену

$$p_1 \rightarrow p_-, \quad p_2 \rightarrow -p_+, \\ k_1 \rightarrow -k_1, \quad k_2 \rightarrow k_2,$$

где p_- и p_+ — 4-импульсы электрона и позитрона и k_1 и k_2 — импульсы обоих фотонов, и понимать под инвариантами κ_1 , κ_2 величины

$$\kappa_1 = -2p_-k_1 = -2p_+k_2, \\ \kappa_2 = -2p_+k_1 = -2p_-k_2.$$

В результате мы получим следующую формулу для сечения двухфотонной аннигиляции пар с радиационными поправками:

$$d\sigma = d\sigma_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left[2(1 - 2x \operatorname{cth} 2x) \ln \frac{\lambda}{m} - \right. \right. \\ \left. \left. - 4x \operatorname{cth} 2x \left(h(2x) - 2h(x) + \frac{\pi}{4x} \right) - G(\kappa_1, \kappa_2) - G(\kappa_2, \kappa_1) \right] \right\}, \quad (40.3.1)$$

где $d\sigma_0$ — сечение основного процесса двухфотонной аннигиляции пар, $4\operatorname{ch}^2 x = \kappa_1 + \kappa_2$ и

$$U_0, G(\kappa_1, \kappa_2) = [h(2x) - h(x)] \left[\frac{4}{\kappa_1 \kappa_2} x \operatorname{sh} 2x (1 + 2\operatorname{ch}^2 x) + 2x \operatorname{th} x \right] + \\ + \ln |\kappa_1| \left\{ 4x \operatorname{cth} 2x \left[\frac{4}{\kappa_1^2} - \frac{1}{\kappa_1} - \frac{\kappa_2}{2\kappa_1} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} - 1 - \frac{4}{\kappa_1 \kappa_2} \operatorname{sh}^2 x \right] - \right. \\ \left. - \frac{2x}{\operatorname{sh} 2x} \left(\frac{\kappa_1 - 6}{\kappa_2} \right) + \frac{3\kappa_2}{2\kappa_1^2} (1 + \kappa_1) + \frac{3}{\kappa_2} + 1 - \frac{7}{\kappa_1 \kappa_2} + \frac{8}{\kappa_1} - \frac{8}{\kappa_1^2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\kappa_3^2 - 2\kappa_1 + \kappa_1^2 \kappa_2}{2\kappa_1^2 \kappa_2 (\kappa_1 - 1)} - \frac{2\kappa_1^2 + \kappa_2}{2\kappa_2 (\kappa_1 - 1)^2} \Big\} - 4x \operatorname{cth} x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_1} \right) + \\
 & + \frac{\frac{\pi^2}{4} - x^2}{\operatorname{ch}^2 x} \left(\frac{2}{\kappa_1} - \frac{7\kappa_1}{4} - \frac{3\kappa_1^2}{4\kappa_2} \right) + 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2 - \frac{12}{\kappa_1} - \frac{3\kappa_1}{2\kappa_2} - \frac{2\kappa_1}{\kappa_2} + \\
 & + \frac{1}{\kappa_1 - 1} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{\kappa_1} [F(\kappa_1 - 1) - F(-1)] \times \\
 & \quad \times \left(\frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1^2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{2}{\kappa_1} - \frac{3}{\kappa_2} - 1 \right), \\
 U_0 = & \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) + 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - 4 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

В это выражение входит «масса» фотона. Для того чтобы исключить ее, к сечению $d\sigma$ должно быть добавлено сечение трехфотонной аннигиляции пары, при которой наряду с фотонами k_1 и k_2 испускается мягкий фотон k_3 , энергия которого не превосходит $\Delta\varepsilon$.

Сечение этого процесса равно

$$d\sigma' = d\sigma_0 \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 2(2x \operatorname{cth} 2x - 1) \left[\ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{2} \right] + 4x \operatorname{cth} 2x [1 - h(2x)] \right\}. \quad (40.3.2)$$

Приведем формулы для суммарного сечения в предельных случаях малых и больших энергий.

В нерелятивистском случае

$$d\sigma = d\sigma_0 \left\{ 1 + \frac{\pi\alpha}{v_+} - \frac{\alpha}{\pi} \left(5 - \frac{\pi^2}{4} \right) \right\}, \quad (40.3.3)$$

где v_+ — скорость позитрона, $v_+ \ll 1$; скорость электрона равна нулю. Формула справедлива при $\frac{\pi\alpha}{v_+} \ll 1$.

В релятивистском случае

$$d\sigma = d\sigma_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left[2(1 - 2x \operatorname{cth} 2x) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{m} + X \right] \right\}, \quad (40.3.4)$$

где X имеет следующие значения: если оба фотона вылетают под углом в 180° и $\kappa_1 \gg \kappa_2 \approx 1$, то

$$X = (\ln \kappa_1)^2 - \ln \kappa_1 + 3 + \frac{\pi^2}{3};$$

если оба фотона вылетают под углом в 90° и $\kappa_1 = \kappa_2 \gg 1$, то

$$X = \frac{3}{2} (\ln \kappa_1)^2 - \frac{5}{2} \ln 2\kappa_1 + 5,97 + \frac{1}{2\kappa_1} [18,5 (\ln 2\kappa_1)^2 - 67,25 \ln 2\kappa_1 + 41,2].$$

40.4. Радиационные поправки к сечению тормозного излучения. Рассмотрим радиационные поправки к сечению тормозного излучения электрона в кулоновском поле ядра [25].

Диаграммы, изображающие основной процесс излучения и радиационные поправки к нему, представлены на рис. 40.4 (кроме этих диаграмм нужно, естественно, учитывать диаграммы с переставленными фотонными линиями).

Так как матричные элементы, соответствующие диаграммам Y_i , содержат инфракрасную расходимость, то наряду с радиационными поправками

нужно учитывать также двойное тормозное излучение, при котором вместе с фотоном (\mathbf{k}, ω) излучается мягкий фотон (\mathbf{k}', ω').

Мы не будем вычислять здесь сечения с учетом этих эффектов, а приведем только окончательные результаты для нескольких наиболее интересных предельных случаев.

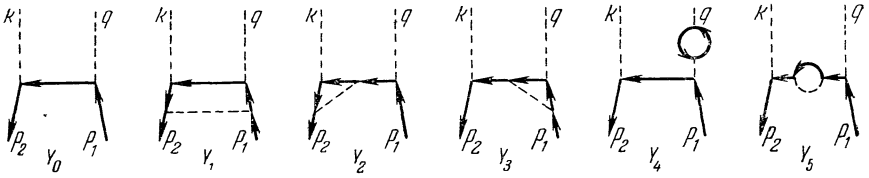


Рис. 40.4.

Запишем радиационные поправки к сечению тормозного излучения и сечение двойного тормозного излучения в виде

$$d\sigma_R = -\frac{\alpha}{\pi} \delta_R d\sigma_0, \quad d\sigma_D = -\frac{\alpha}{\pi} \delta_D d\sigma_0, \quad (40.4.1)$$

где $d\sigma_0$ — сечение основного процесса. Тогда в предельном случае $\omega \varepsilon_1 \ll m^2$ (мы пользуемся теми же обозначениями, что и в § 39.3) величины δ_R и δ_D определяются формулами

$$\delta_R = 2(1 - 2x \operatorname{cth} 2x) \left(\ln \frac{\lambda}{m} + 1 \right) + x \operatorname{th} x + 4x \operatorname{cth} 2x [h(2x) - h(x)] + \\ + \frac{2x}{\operatorname{sh} 2x} \frac{v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + 2(1 - x \operatorname{ctg} x) \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 x \right) - \frac{2}{9}; \quad (40.4.2)$$

$$\delta_D = 2(1 - 2x \operatorname{cth} 2x) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{v} \ln \frac{1-v}{1+v} + \frac{1-v^2}{v \sin \frac{\theta}{2}} \operatorname{ch} 2x G(v, \theta),$$

где

$$G(v, \theta) = \int_{\cos \frac{\theta}{2}}^1 \frac{du}{(1 - v^2 u^2) \sqrt{u^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \ln \frac{1 + vu}{1 - vu}$$

и x связано с $\rho \equiv q^2 = (-2 + \kappa_1 + \kappa_2) m^2 + 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| \cos \theta)$ соотношением

$$\rho = 4m^2 \operatorname{sh}^2 x$$

($\Delta\varepsilon$ — максимальная энергия мягкого фотона). Это выражение совпадает, как и следовало ожидать, с радиационной поправкой к сечению упругого рассеяния (см. § 39).

Рассмотрим далее релятивистский случай, когда $\varepsilon_1 \gg m$, $\varepsilon_2 \gg m$, но потеря энергии мала, т. е. $\omega \ll \varepsilon_1, \varepsilon_2$. Если при этом углы рассеяния

малы, $\theta, \theta_1, \theta_2 \sim \frac{m}{\varepsilon} \ll 1$, то

$$\left. \begin{aligned} \delta_R &= 2(1 - 2x \operatorname{cth} 2x) \left(\ln \frac{\lambda}{m} + 1 \right) + x \operatorname{th} x + \\ &+ 4x \operatorname{cth} 2x [h(2x) - h(x)] + 2(1 - x \operatorname{cth} x) \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 x \right) - \frac{2}{9}; \\ \delta_D &= 2(1 - 2x \operatorname{cth} 2x) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + 2 \ln \frac{2\varepsilon}{m} (2x \operatorname{cth} 2x - 1) - \\ &- 4x \operatorname{cth} 2x [h(2x) - h(x)]. \end{aligned} \right\} (40.4.3)$$

В крайне релятивистском случае, когда выполняются не только условия $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega \gg m$, но и условие $\ln |\kappa_1|, \ln \kappa_2, \ln \rho, \ln (\rho - \kappa_1 - \kappa_2) \gg 1$ (однако $\ln \frac{\rho}{|\kappa_1|}, \ln \frac{\rho}{\kappa_2}, \ln \frac{\rho - \kappa_1 - \kappa_2}{|\kappa_1|}, \ln \frac{\rho - \kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_2} \sim 1$), величины δ_R и δ_D определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \delta_R &= 2(1 - 2y) \ln \frac{\lambda}{m} + 2y^2 - 3y - \frac{4}{3}x, \\ \delta_D &= 2(1 - 2y) \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + 2y^2 - 2y \ln \frac{(\rho - \kappa_1 - \kappa_2) m^2}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2} - \ln \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{m^2}, \end{aligned} \right\} (40.4.4)$$

где

$$x = \frac{1}{2} \ln \rho, \quad y = \frac{1}{2} \ln (\rho - \kappa_1 - \kappa_2).$$

Наконец, в нерелятивистском случае

$$\left. \begin{aligned} \delta_R &= \frac{2}{3} \left[-(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \left(\ln \frac{\lambda}{m} + \frac{1}{5} \right) + 2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \mathbf{k} \ln \frac{\omega}{m} \right], \\ \delta_D &= \frac{2}{3} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \left(\frac{5}{6} - \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} \right). \end{aligned} \right\} (40.4.5)$$

При $\mathbf{p}_1 \rightarrow 0$ поправки к сечению исчезают.

40.5. Радиационные поправки к сечениям однофотонного образования и однофотонной аннигиляции пары. Радиационные поправки к сечению образования пары фотоном в кулоновском поле ядра могут быть найдены из радиационных поправок к сечению тормозного излучения в кулоновском поле ядра, если в последних сделать замену

$$\mathbf{p}_1 \rightarrow -\mathbf{p}_+, \quad \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_-, \quad \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}.$$

К сечению фотообразования пары должно быть добавлено аналогично тому, как это делалось в других рассмотренных выше случаях, сечение фотообразования, сопровождающегося излучением мягкого фотона. Мы не будем производить здесь подробные вычисления, а приведем только окончательные результаты в нескольких предельных случаях [26].

Запишем сечение фотообразования пары в кулоновском поле ядра в виде

$$d\sigma = d\sigma_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} (\delta_R - \delta_D) \right], \quad (40.5.1)$$

где $d\sigma_0$ — сечение основного эффекта и δ_R и δ_D — величины, учитывающие радиационные поправки порядка α и излучение мягкого фотона. Тогда вблизи порога реакции, когда импульсы $|\mathbf{p}_-|$ и $|\mathbf{p}_+|$ малы, $|\mathbf{p}_\pm| \ll m$.

величины δ_R и δ_D определяются формулами

$$\delta_R = -\frac{\pi^2}{|v_+ - v_-|} + 2,4 - \frac{\cos \theta - \cos \theta_+ \cos \theta_-}{\frac{|p_+|}{|p_-|} \sin^2 \theta_+ + \frac{|p_-|}{|p_+|} \sin^2 \theta_-} + O(p_+, p_-),$$

$$\delta_D = O(p_+, p_-), \quad (40.5.2)$$

где θ_+ и θ_- — углы между k и p_+ и p_- , θ — угол между p_+ и p_- и v_{\mp} — скорости электрона и позитрона. Эти формулы справедливы, если, кроме условий $|p_{\pm}| \ll m$, выполняется также условие

$$\frac{\alpha}{|v_+ - v_-|} \ll 1$$

(первое слагаемое в выражении для δ_R учитывает взаимодействие между рождающимися электроном и позитроном в первом борновском приближении).

В релятивистском случае почти равных энергий электрона и позитрона $\varepsilon_+ \approx \varepsilon_- \equiv \varepsilon$, $\varepsilon \gg m$ и малых углов θ_{\pm} , $\theta \ll \frac{m}{\varepsilon}$ величины δ_R и δ_D определяются формулами

$$\delta_R = -\frac{\pi^2}{\sqrt{-2-2p_-p_+/m^2}} + \frac{13}{2} - \frac{\pi^2}{4},$$

$$\delta_D = O\left(\varepsilon^2 \theta^2 \ln \frac{\varepsilon}{m}\right). \quad (40.5.3)$$

Наконец, в ультрарелятивистском случае, когда

$$\ln \frac{kp_{\pm}}{m^2} \gg 1, \quad \ln \frac{p_+p_-}{m^2} \gg 1, \quad \ln \frac{q^2}{m^2} \gg 1; \quad \ln \frac{p_+p_-}{kp_{\pm}} \sim 1, \quad \ln \frac{kp_{\pm}}{q^2} \sim 1,$$

справедлива формула

$$\delta_R - \delta_P = \left(\ln \frac{2p_+p_-}{m^2} - 1 \right) \ln \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{(\Delta\varepsilon)^2} - \frac{13}{6} \ln \frac{2p_+p_-}{m^2}. \quad (40.5.4)$$

Однофотонная аннигиляция пары в кулоновском поле ядра представляет собой процесс, обратный процессу фотообразования пары в этом же поле. Поэтому радиационные поправки к сечению однофотонной аннигиляции пары определяются теми же формулами, что и радиационные поправки к сечению фотообразования пары, если в последних под p_+ и p_- понимать импульсы аннигилирующих частиц и под k — импульс испускаемого фотона.

§ 41. Рассеяние фотона фотоном и нелинейная электродинамика вакуума

41.1. Тензор рассеяния фотона фотоном четвертого ранга. Взаимодействие электромагнитных полей с вакуумом электронно-позитронного поля должно приводить к взаимодействию этих полей, в частности к взаимодействию фотонов друг с другом. Действительно, рассмотрим два фотона с импульсами k_1 и k_2 , энергия которых недостаточна для образования пары. Эти фотоны могут, однако, образовать две виртуальные пары, в результате аннигиляции которых появятся два фотона с импульсами k_3 и k_4 , связанными с импульсами первоначальных фотонов k_1 и k_2 единственным условием — законом сохранения энергии-импульса

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4.$$

Этот процесс представляет собой рассеяние фотона фотоном [27]. Он, очевидно, не может быть описан с помощью классических уравнений поля, так как в классической электродинамике вакуума электромагнитные волны распространяются независимо друг от друга.

Для того чтобы уравнения поля могли описывать процесс рассеяния фотона фотоном, а также другие процессы взаимодействия между электромагнитными полями, они должны быть нелинейными в отличие от линейных уравнений Максвелла. Отсюда следует, что плотность функции Лагранжа электромагнитного поля не может быть квадратичной функцией полей, т. е. должна отличаться от функции

$$L_0 = \frac{1}{2} (E^2 - H^2).$$

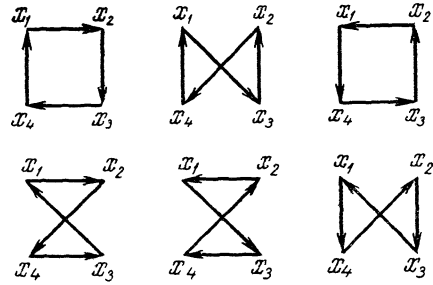


Рис. 41.1.

В наинизшем приближении теории возмущений, которым мы здесь ограничимся, процессы взаимодействия между электромагнитными полями описываются матрицей рассеяния 4-порядка $S^{(4)}$:

$$S^{(4)} = \frac{e^4}{4!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 T \{ N(\bar{\Psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \Psi(x_1)) \times \\ \times N(\bar{\Psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \Psi(x_2)) N(\bar{\Psi}(x_3) \hat{A}(x_3) \Psi(x_3)) N(\bar{\Psi}(x_4) \hat{A}(x_4) \Psi(x_4)) \},$$

и изображаются шестью диаграммами рис. 41.1.

Заменяя произведения электронных операторов соответствующими связями и учитывая, что все шесть диаграмм вносят одинаковый вклад в матричные элементы, представим интересующую нас часть матрицы $S^{(4)}$ в виде

$$S^{(4)} = -\frac{e^4}{4} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 N(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\lambda(x_3) A_\sigma(x_4)) \times \\ \times \text{Sp} \{ \gamma_\mu S_c(x_2 - x_1) \gamma_\nu S_c(x_3 - x_2) \gamma_\lambda S_c(x_4 - x_3) \gamma_\sigma S_c(x_1 - x_4) \}.$$

Операторами здесь являются только $A_\mu(x)$.

В импульсном пространстве это выражение приобретает вид

$$S^{(4)} = -\frac{i}{4} \frac{\alpha^2}{(2\pi)^{12}} \int d^4k_1 \int d^4k_2 \int d^4k_3 \int d^4k_4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\ \times N(A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4)) T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (41.1.1)$$

где

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{1}{i\pi^2} \int d^4p \text{Sp} \{ \gamma_\mu (i\hat{p} + m)^{-1} \gamma_\nu (i\hat{p} - i\hat{k}_2 + m)^{-1} \times \\ \times \gamma_\lambda (i\hat{p} - i\hat{k}_2 - i\hat{k}_3 + m)^{-1} \gamma_\sigma (i\hat{p} - i\hat{k}_2 - i\hat{k}_3 - i\hat{k}_4 + m)^{-1} \}. \quad (41.1.2)$$

$$A_\mu(k) = \int A_\mu(x) e^{-ikx} d^4x.$$

Тензор $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ в соответствии с результатами § 23.1 расходится логарифмически в области больших импульсов виртуальных электронов.

Вместо $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ удобно ввести симметризованный относительно одновременной перестановки тензорных индексов и переменных k_i тензор

$$J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + T_{\mu\nu\sigma\lambda}(k_1, k_2, k_4, k_3) + T_{\mu\lambda\lambda\sigma}(k_1, k_3, k_2, k_4),$$

который не содержит расходящихся выражений.

Ясно, что в выражении (41.1.1) можно заменить тензор $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ тензором $\frac{1}{3} J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$:

$$\mathbf{S}^{(4)} = -\frac{i}{12} \frac{\alpha^2}{(2\pi)^{12}} \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \int d^4 k_4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times N(A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4)) J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4). \quad (41.1.3)$$

Симметризованный тензор $J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ мы будем называть *тензором рассеяния фотона фотоном четвертого ранга*. Хотя этот тензор

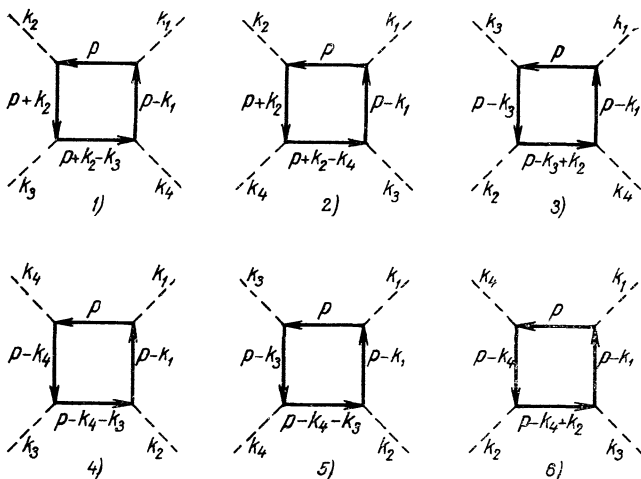


Рис. 41.2.

и не содержит расходящихся выражений, он, так же как и исходный тензор $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$, не удовлетворяет требованию калибровочной инвариантности и должен быть поэтому регуляризован. Согласно результатам § 23.3 регуляризованное значение тензора рассеяния фотона фотоном равно

$$J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) - J_{\mu\nu\lambda\sigma}(0, 0, 0, 0). \quad (41.1.4)$$

Регуляризованная матрица $\mathbf{S}_R^{(4)}$ имеет вид

$$\mathbf{S}_R^{(4)} = -\frac{i}{12} \frac{\alpha^2}{(2\pi)^{12}} \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \int d^4 k_4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times N(A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4)) J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4). \quad (41.1.5)$$

Свяжем с тензором $J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ сечение рассеяния фотона фотоном.

Рассмотрим процесс, в котором электронно-позитронным вакуумом поглощаются фотоны с импульсами k_1 и k_2 и поляризациями e_1 и e_2 и испускаются фотоны с импульсами k_3 и k_4 и поляризациями e_3 и e_4 . Этому процессу соответствует шесть диаграмм, изображенных на рис. 41.2. Диаграмм

мы 1, 2, 3 и 4, 5, 6 отличаются друг от друга только направлением обхода электронной петли, поэтому соответствующие им матричные элементы одинаковы.

Суммарный матричный элемент рассеяния фотона фотоном определяется, согласно правилам Фейнмана, формулой

$$\begin{aligned} \langle f | \mathbf{S}^{(4)} | i \rangle = & -\frac{e^4}{2} \frac{\delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)}{(\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{1/2}} \times \\ & \times \left[e_{1\mu} e_{2\nu} e_{3\lambda} e_{4\sigma} \int \text{Sp} \{ \gamma_\mu (i\hat{p} + m)^{-1} \gamma_\nu (i\hat{p} + i\hat{k}_2 + m)^{-1} \times \right. \\ & \times \gamma_\lambda (i\hat{p} + i\hat{k}_2 - i\hat{k}_3 + m)^{-1} \gamma_\sigma (i\hat{p} - i\hat{k}_1 + m)^{-1} \} d^4 p + \\ & + e_{1\mu} e_{2\nu} e_{4\sigma} e_{3\lambda} \int \text{Sp} \{ \gamma_\mu (i\hat{p} + m)^{-1} \gamma_\nu (i\hat{p} + i\hat{k}_2 + m)^{-1} \times \\ & \times \gamma_\sigma (i\hat{p} + i\hat{k}_2 - i\hat{k}_4 + m)^{-1} \gamma_\lambda (i\hat{p} - i\hat{k}_1 + m)^{-1} \} d^4 p + \\ & + e_{1\mu} e_{3\lambda} e_{2\nu} e_{4\sigma} \int \text{Sp} \{ \gamma_\mu (i\hat{p} + m)^{-1} \gamma_\lambda (i\hat{p} - i\hat{k}_3 + m)^{-1} \times \\ & \left. \times \gamma_\nu (i\hat{p} - i\hat{k}_3 + i\hat{k}_2 + m)^{-1} \gamma_\sigma (i\hat{p} - i\hat{k}_1 + m)^{-1} \} d^4 p \right]. \quad (41.1.6) \end{aligned}$$

Вспомогательное определение регуляризованного тензора рассеяния фотона фотоном, можно представить регуляризованное значение матричного элемента в виде

$$\begin{aligned} \langle f | \mathbf{S}_R^{(4)} | i \rangle = & -\frac{i}{2} \alpha^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(k_3 + k_4 - k_1 - k_2)}{(\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{1/2}} e_{1\mu} e_{2\nu} e_{3\lambda} e_{4\sigma} \times \\ & \times J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4). \quad (41.1.7) \end{aligned}$$

Для определения сечения рассеяния фотона фотоном, являющегося, согласно результатам § 18.3, инвариантом, удобно перейти в систему центра инерции фотонов, в которой суммарный трехмерный импульс фотонов до и после рассеяния равен нулю:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = 0;$$

4-импульсы фотонов в этой системе имеют вид

$$k_1 = (\mathbf{k}, i\omega), \quad k_2 = (-\mathbf{k}, i\omega), \quad k_3 = (\mathbf{k}', i\omega), \quad k_4 = (-\mathbf{k}', i\omega),$$

где $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ (из закона сохранения энергии следует, что частоты всех четырех фотонов в этой системе одинаковы).

Учитывая, что плотность потока фотонов k_1 относительно фотонов k_2 равна 2, получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния фотона фотоном:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\alpha^4}{16\omega^2} |e_{1\mu} e_{2\nu} e_{3\lambda} e_{4\sigma} J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4)|^2 d\omega, \quad (41.1.8)$$

где $d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ — телесный угол, в котором лежит импульс фотона k_3 (θ — угол рассеяния, т. е. угол между \mathbf{k} и \mathbf{k}').

Таким образом, для вычисления $d\sigma$ нужно найти $J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4)$, что удастся сделать в двух предельных случаях — малых ($\omega \ll m$) и больших ($\omega \gg m$) частот.

В случае малых частот, $\omega \ll m$, тензор рассеяния фотона фотоном может быть разложен в ряд по степеням частот. Первый член этого разложения, соответствующий $\omega = 0$, равен для регуляризованного тензора нулю; поэтому разложение начинается с члена, содержащего линейно все четыре

частоты, т. е. пропорционального ω^4 . Отсюда и из формулы (41.1.3) легко заключить, что сечение рассеяния фотона фотоном при $\omega \ll m$ должно быть пропорционально ω^6 . С другой стороны, оно должно, согласно (41.1.3), содержать заряд электрона e в восьмой степени. Учитывая, что сечение рассеяния имеет размерность площади и что в нашем распоряжении имеются только константы e , \hbar , c , m , мы однозначно получим следующее выражение для интегрального сечения рассеяния фотона фотоном при $\omega \ll m$:

$$\sigma = g \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \left(\frac{\hbar \omega}{mc^2} \right)^6 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2, \quad \hbar \omega \ll mc^2, \quad (41.1.9)$$

где g — безразмерная константа, которая будет найдена в § 41.2.

В области больших частот $\omega \gg m$ можно практически пренебречь массой электрона m в выражении для $J_{R\mu\nu\lambda\sigma}$. Поэтому масса m в этом случае не будет входить в выражение для сечения рассеяния. Но из величин e , \hbar , c , ω можно составить только одно выражение, а именно $e^8 \frac{c^2}{\omega^2}$, содержащее заряд в восьмой степени и имеющее размерность площади. Поэтому сечение рассеяния фотона фотоном при $\omega \gg m$ должно иметь следующий вид:

$$\sigma = g' \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \frac{c^2}{\omega^2}, \quad \hbar \omega \gg mc^2, \quad (41.1.10)$$

где g' — некоторая безразмерная константа.

41.2. Связь между сечением рассеяния фотона фотоном и радиационными поправками к функции Лагранжа электромагнитного поля в вакууме. Перейдем к более подробному рассмотрению рассеяния фотона фотоном в области малых частот, $\omega \ll m$.

Малым частотам соответствуют медленно изменяющиеся поля, состояние которых можно описывать функцией Лагранжа, зависящей только от компонент поля и не зависящей от их производных по координатам и времени. Так как плотность функции Лагранжа должна быть релятивистским инвариантом, то поля могут входить в функцию Лагранжа только в виде двух комбинаций $E^2 - H^2$ и $(EH)^2$, являющихся единственными независимыми инвариантами поля.

Если поля являются достаточно слабыми, то плотность функции Лагранжа поля L можно разложить в ряд по степеням $E^2 - H^2$ и $(EH)^2$ и ограничиться в разложении членами второго и четвертого порядков:

$$L = L_0 + L',$$

$$L_0 = \frac{1}{2} (E^2 - H^2), \quad (41.2.1)$$

$$L' = a' (E^2 - H^2)^2 + b' (EH)^2 = a (F_{\mu\lambda} F_{\mu\lambda})^2 + b F_{\mu\lambda} F_{\lambda\sigma} F_{\sigma\nu} F_{\nu\mu},$$

где a' , b' , a , b — некоторые константы, связанные между собой соотношениями

$$a' = 4a + 2b, \quad b' = 4b.$$

Члены, объединенные в L' , представляют собой радиационную поправку к основной плотности функции Лагранжа L_0 .

Свяжем оператор L' с сечением рассеяния фотона фотоном. Напомним, что матрица рассеяния 1-го порядка $\mathbf{S}^{(1)}$ связана с лагранжианом взаимодействия полей L_I соотношением

$$\mathbf{S}^{(1)} = i \int L_I d^4x.$$

Поэтому, если мы хотим описывать взаимодействие фотона с фотонами с помощью некоторого лагранжиана L' , то он должен быть по определению связан с матрицей рассеяния 4-го порядка $S^{(4)}$ соотношением

$$S^{(4)} = i \int L' d^4x$$

или

$$S^{(4)} = i \int N \{ a (F_{\lambda\nu}(x) F_{\nu\lambda}(x))^2 + b (F_{\lambda\nu}(x) F_{\nu\mu}(x) F_{\mu\sigma}(x) F_{\sigma\lambda}(x)) \} d^4x. \tag{41.2.2}$$

Такое рассмотрение законно, очевидно, только для медленно изменяющихся полей:

$$\left| \frac{\hbar}{mc} \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\lambda\nu}(x) \right| \ll |F_{\lambda\nu}(x)|. \tag{41.2.3}$$

Подставляя в (41.2.2)

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int F_{\mu\nu}(k) e^{ikx} d^4k, \quad F_{\mu\nu}(k) = i(k_\mu A_\nu(k) - k_\nu A_\mu(k)),$$

получим

$$S^{(4)} = \frac{i}{(2\pi)^{12}} \int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\ \times N [A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4)] \left\{ \frac{a}{3} S_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \right. \\ \left. + \frac{b}{3} R_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \right\}, \tag{41.2.4}$$

где $S_{\mu\nu\lambda\sigma}$ и $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ — некоторые симметризованные тензоры, содержащие слагаемые вида $k_{i\mu} k_{j\nu} k_{l\lambda} k_{s\sigma}$ и их свертки по греческим индексам (мы не будем выписывать их здесь в явном виде).

Сравнивая эту формулу с формулой (41.1.5) для $S_R^{(4)}$, можно связать тензор рассеяния фотона фотоном $J_{R\mu\nu\lambda\sigma}$ с тензорами $S_{\mu\nu\lambda\sigma}$ и $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$.

$$J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 4\alpha^{-2} \{ a S_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + b R_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \}.$$

Подставив это выражение в (41.1.8), получим сечение рассеяния фотона фотоном в системе их центра инерции

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{(8\pi)^2 \omega^2} |M|^2 d\omega, \tag{41.2.5}$$

где

$$M = e_\mu^{(\lambda_1)} e_\nu^{(\lambda_2)} e_\lambda^{(\lambda_3)} e_\sigma^{(\lambda_4)} J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4) = 4\alpha^{-2} (aS + bR), \\ S = e_\mu^{(\lambda_1)} e_\nu^{(\lambda_2)} e_\lambda^{(\lambda_3)} e_\sigma^{(\lambda_4)} S_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4), \\ R = e_\mu^{(\lambda_1)} e_\nu^{(\lambda_2)} e_\lambda^{(\lambda_3)} e_\sigma^{(\lambda_4)} R_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1, -k_2, k_3, k_4)$$

(индекс λ_i служит для обозначения двух различных поляризаций фотона k_i).

Можно показать, что

$$S = 4 \{ 2 (e^{(\lambda_1)} k_3) (e^{(\lambda_2)} k_3) (e^{(\lambda_3)} k_1) (e^{(\lambda_4)} k_1) - \\ - (e^{(\lambda_1)} e^{(\lambda_3)}) (e^{(\lambda_2)} k_3) (e^{(\lambda_4)} k_1) (k_1 k_2) + (e^{(\lambda_2)} e^{(\lambda_4)}) (e^{(\lambda_1)} k_3) (e^{(\lambda_3)} k_1) [(k_2 k_3) - (k_3 k_4)] - \\ - (e^{(\lambda_2)} e^{(\lambda_3)}) (e^{(\lambda_1)} k_3) (e^{(\lambda_4)} k_1) (k_2 k_3) + (e^{(\lambda_1)} e^{(\lambda_2)}) (e^{(\lambda_2)} e^{(\lambda_4)}) (k_1 k_2) (k_3 k_4) + \\ + (e^{(\lambda_1)} e^{(\lambda_3)}) (e^{(\lambda_2)} e^{(\lambda_4)}) (k_1 k_3) (k_2 k_4) + (e^{(\lambda_1)} e^{(\lambda_4)}) (e^{(\lambda_2)} e^{(\lambda_3)}) (k_2 k_4) (k_1 k_3) \},$$

$$\begin{aligned}
R = & 2(e^{(\lambda_1)k_3})(e^{(\lambda_2)k_3})(e^{(\lambda_3)k_1})(e^{(\lambda_4)k_1}) - 2(e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_2)}})(e^{(\lambda_3)k_1})(e^{(\lambda_4)k_1})(k_3k_4) - \\
& - 2(e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_3)}})(e^{(\lambda_1)k_3})(e^{(\lambda_2)k_3})(k_1k_2) + (e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_3)}})(e^{(\lambda_2)k_3})(e^{(\lambda_1)k_3})[(k_3k_4) - \\
& - (k_2k_3)] + (e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_4)}})(e^{(\lambda_3)k_1})(e^{(\lambda_2)k_3})[(k_2k_3) - 2(k_3k_4)] + \\
& + (e^{(\lambda_2)e^{(\lambda_3)}})(e^{(\lambda_1)k_3})(e^{(\lambda_4)k_1})[(k_2k_3) - 2(k_3k_4)] + \\
& + (e^{(\lambda_2)e^{(\lambda_4)}})(e^{(\lambda_1)k_3})(e^{(\lambda_3)k_1})[(k_2k_3) + (k_3k_4)] + \\
& + (e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_2)}})(e^{(\lambda_3)e^{(\lambda_4)}})[(k_1k_4)(k_2k_3) + (k_1k_3)(k_2k_4)] + \\
& + (e^{(\lambda_3)e^{(\lambda_1)}})(e^{(\lambda_2)e^{(\lambda_4)}})[(k_1k_2)(k_3k_4) + (k_1k_4)(k_2k_3)] + \\
& + (e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_4)}})(e^{(\lambda_3)e^{(\lambda_2)}})[(k_1k_2)(k_3k_4) + (k_1k_3)(k_2k_4)],
\end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
M = & \frac{4\omega^4}{\alpha^2} \{ (8a + 2b)(e^{(\lambda_1)n'})(e^{(\lambda_2)n'})(e^{(\lambda_3)n})(e^{(\lambda_4)n}) + \\
& + 4b[(e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_2)}})(e^{(\lambda_3)n})(e^{(\lambda_4)n}) + (e^{(\lambda_3)e^{(\lambda_4)}})(e^{(\lambda_1)n'})(e^{(\lambda_2)n})] + \\
& + [4a(1 - \cos \theta) - b(3 + \cos \theta)][(e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_3)}})(e^{(\lambda_2)n'})(e^{(\lambda_1)n}) + \\
& + (e^{(\lambda_2)e^{(\lambda_4)}})(e^{(\lambda_1)n'})(e^{(\lambda_3)n})] + \\
& + [4a(1 + \cos \theta) - b(3 - \cos \theta)][(e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_4)}})(e^{(\lambda_2)n'})(e^{(\lambda_3)n}) + \\
& + (e^{(\lambda_2)e^{(\lambda_3)}})(e^{(\lambda_1)n'})(e^{(\lambda_1)n})] + \\
& + 2[8a + b(1 + \cos^2 \theta)](e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_2)}})(e^{(\lambda_3)e^{(\lambda_4)}}) + \\
& + [4a(1 + \cos \theta)^2 + b(5 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)](e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_4)}})(e^{(\lambda_2)e^{(\lambda_3)}}) + \\
& + [4a(1 - \cos \theta)^2 + b(5 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)](e^{(\lambda_1)e^{(\lambda_3)}})(e^{(\lambda_2)e^{(\lambda_4)}}) \}, \quad (41.2.6)
\end{aligned}$$

где \mathbf{n} и \mathbf{n}' — единичные векторы в направлении \mathbf{k} и \mathbf{k}' и θ — угол рассеяния, $\cos \theta = \mathbf{nn}'$.

Подставляя это выражение в (41.2.5) и усредняя по поляризациям фотонов, получим

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} (48a^2 + 40ab + 11b^2) \omega^6 (3 + \cos^2 \theta)^2 d\Omega. \quad (41.2.7)$$

Мы видим, что частотная и угловая зависимости сечения рассеяния фотона фотоном при $\omega \ll m$ не связаны с конкретными значениями констант a и b и только величина сечения определяется этими константами.

Приведем значения M для различных поляризаций фотонов.

Будем обозначать через $e_{\parallel}^{(i)}$ поляризацию фотона k_i , лежащую в плоскости рассеяния (\mathbf{n} , \mathbf{n}'), и через $e_{\perp}^{(i)}$ поляризацию, перпендикулярную к плоскости (\mathbf{n} , \mathbf{n}'). Тогда, согласно (41.2.6),

$$\left. \begin{aligned}
M(e_{\perp}^{(1)}, e_{\perp}^{(2)}, e_{\perp}^{(3)}, e_{\perp}^{(4)}) &= M(e_{\parallel}^{(1)}, e_{\parallel}^{(2)}, e_{\parallel}^{(3)}, e_{\parallel}^{(4)}) = \\
&= \frac{16}{\alpha^2} (2a + b) (3 + \cos^2 \theta), \\
M(e_{\perp}^{(1)}, e_{\perp}^{(2)}, e_{\parallel}^{(3)}, e_{\parallel}^{(4)}) &= M(e_{\parallel}^{(1)}, e_{\parallel}^{(2)}, e_{\perp}^{(3)}, e_{\perp}^{(4)}) = \\
&= \frac{8}{\alpha^2} (8a + 3b - b \cos^2 \theta), \\
M(e_{\perp}^{(1)}, e_{\parallel}^{(2)}, e_{\perp}^{(3)}, e_{\parallel}^{(4)}) &= M(e_{\parallel}^{(1)}, e_{\perp}^{(2)}, e_{\parallel}^{(3)}, e_{\perp}^{(4)}) = \\
&= -\frac{16}{\alpha^2} a (1 - \cos \theta)^2 + \frac{4b}{\alpha^2} (3 + 6 \cos \theta - \cos^2 \theta), \\
M(e_{\perp}^{(1)}, e_{\parallel}^{(2)}, e_{\parallel}^{(3)}, e_{\perp}^{(4)}) &= M(e_{\parallel}^{(1)}, e_{\perp}^{(2)}, e_{\perp}^{(3)}, e_{\parallel}^{(4)}) = \\
&= -\frac{16}{\alpha^2} (1 + \cos \theta)^2 + \frac{4b}{\alpha^2} (3 - 6 \cos \theta - \cos^2 \theta).
\end{aligned} \right\} \quad (41.2.8)$$

Из этих формул следует, что, вычислив непосредственно (с помощью формулы (41.1.2)) величину M для двух состояний поляризации фотонов (например, $M(e_{\perp}^{(1)}, e_{\parallel}^{(2)}, e_{\perp}^{(3)}, e_{\parallel}^{(4)})$ и $M(e_{\perp}^{(1)}, e_{\perp}^{(2)}, e_{\perp}^{(3)}, e_{\perp}^{(4)})$ при фиксированном угле рассеяния (например, при $\theta = 0$), можно найти константы a и b .

Мы не будем приводить здесь соответствующие вычисления, а приведем только окончательный результат:

$$a = -\frac{5}{180} \frac{\alpha^2}{m^4}, \quad b = \frac{14}{180} \frac{\alpha^2}{m^4}. \quad (41.2.9)$$

Подставив эти значения a и b в (41.2.7), найдем дифференциальное сечение рассеяния фотона фотоном при $\omega \ll m$:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{139}{90^2} \frac{\alpha^4}{m^2} \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 (3 + \cos^2 \theta)^2 d\omega. \quad (41.2.10)$$

Полное сечение рассеяния фотона фотоном равно

$$\sigma = \frac{1}{\pi} \frac{139}{90^2} \frac{56}{5} \frac{\alpha^4}{m^2} \left(\frac{\omega}{m}\right)^6, \quad \omega \ll m. \quad (41.2.11)$$

Наконец, подставив (41.2.9) в (41.2.1), найдем радиационные поправки к плотности функции Лагранжа электромагнитного поля

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{180} \frac{\alpha^2}{m^4} [14F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F_{\lambda\sigma}F_{\sigma\mu} - 5(F_{\mu\nu}F_{\nu\mu})^2] = \\ &= \frac{2}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} [(E^2 - H^2)^2 + 7(EH)^2]. \end{aligned} \quad (41.2.12)$$

Зная плотность функции Лагранжа, можно найти плотность электромагнитной энергии:

$$w = E \frac{\partial L}{\partial E} - L = \frac{1}{2} (E^2 + H^2) + w', \quad (41.2.13)$$

где

$$w' = (4a + 2b)(E^2 - H^2)(3E^2 + H^2) + 4b(EH)^2.$$

Эта величина представляет собой радиационную поправку к классической плотности энергии $w_0 = \frac{1}{2}(E^2 + H^2)$.

Нелинейные электродинамические эффекты можно описывать с помощью зависящих от полей диэлектрической и магнитной проницаемостей вакуума. Чтобы найти эти величины, определим электрическую и магнитную индукции D и B :

$$D = \frac{\partial L}{\partial E}, \quad B = -\frac{\partial L}{\partial H}.$$

Используя (41.2.12), получим

$$\begin{aligned} D_i &= E_i + \frac{4}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} \{2(E^2 - H^2)E_i + 7(EH)H_i\}, \\ B_i &= H_i + \frac{4}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} \{2(E^2 - H^2)H_i - 7(EH)E_i\}. \end{aligned} \quad (41.2.14)$$

В макроскопической электродинамике D и B связаны с E и H соотношениями

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k, \quad B_i = \mu_{ik} H_k.$$

Сравнение этих формул с (41.2.14) показывает, что тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей вакуума для слабых и медленно меняющихся полей равны

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ik} &= \delta_{ik} + \frac{4}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} \{2(E^2 - H^2) \delta_{ik} + 7H_i H_k\}, \\ \mu_{ik} &= \delta_{ik} + \frac{4}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} \{2(E^2 - H^2) \delta_{ik} - 7H_i H_k\}.\end{aligned}\quad (41.2.15)$$

41.3. Точное выражение для функции Лагранжа в случае медленно меняющегося электромагнитного поля. В предыдущем разделе была найдена радиационная поправка к функции Лагранжа электромагнитного поля, пропорциональная четвертой степени полей. Мы определим теперь функцию Лагранжа для произвольного сколь угодно сильного электромагнитного поля, удовлетворяющего единственному условию (41.2.3) [28].

Для решения этой задачи удобно представлять себе электронно-позитронный вакуум как систему электронов, заполняющих уровни с «отрицательной» энергией. Такие электроны мы будем называть вакуумными. Ясно, что добавка ω' к классической плотности энергии электромагнитного поля $\omega_0 = \frac{1}{2}(E^2 + H^2)$, обусловленная существованием электронно-позитронного вакуума, совпадает с плотностью энергии вакуумных электронов, за вычетом их потенциальной энергии во внешнем электрическом поле:

$$\omega' = i \sum_n \left(\psi_n^{(-)*}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_n^{(-)} \right) - \sum_n \left(\psi_n^{(-)*}, e\varphi \psi_n^{(-)} \right), \quad (41.3.1)$$

где $\psi_n^{(-)}$ — волновая функция вакуумного электрона в состоянии n и φ — скалярный потенциал внешнего поля (функции $\psi_n^{(-)}$ нормированы на единичный объем; $(\psi, \chi) \equiv \psi_\lambda \chi_\lambda$, где λ — спинорный индекс).

Покажем, что второе слагаемое в этом выражении — плотность потенциальной энергии вакуумных электронов — связано с первым слагаемым, т. е. с полной плотностью энергии вакуумных электронов (будем обозначать ее через ω_-) соотношением

$$\sum_n \left(\psi_n^{(-)*}, e\varphi \psi_n^{(-)} \right) = \frac{\partial \omega_-}{\partial E}, \quad (41.3.2)$$

где E — напряженность электрического поля.

Напомним, что если квантовомеханический оператор энергии H зависит от некоторого параметра λ , то при бесконечно малом изменении λ на $d\lambda$ собственное значение энергии $\varepsilon_n \equiv H_{nn}$ испытывает изменение

$$d\varepsilon_n = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{nn} d\lambda.$$

В частности, если

$$H = H_0 + \lambda e\varphi$$

(H_0 и φ не зависят от λ), то

$$\lambda (e\varphi)_{nn} = \lambda \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{nn}.$$

Иными словами, если скалярный потенциал содержит постоянный множитель λ , то имеет место соотношение

$$\lambda \int \sum_n \left(\psi_n^{(-)*}, e\varphi \psi_n^{(-)} \right) d\mathbf{r} = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int \omega_- d^3x,$$

где интегрирование совершается по всему объему. В интересующем нас случае постоянных полей можно рассматривать электрическое поле E как параметр λ и, кроме того, можно перейти от полной энергии к плотности энергии. В результате мы придем к соотношению (41.3.2).

Из (41.3.1) следует, что

$$\omega' = \omega_- - E \frac{\partial \omega_-}{\partial E}.$$

Сравнивая это равенство с соотношением

$$\omega = E \frac{\partial L}{\partial E} - L,$$

мы приходим к заключению, что радиационная добавка к классической плотности функции Лагранжа $L_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)$ совпадает с точностью до знака с полной плотностью энергии электронно-позитронного вакуума при наличии внешнего поля.

$$L' = -\omega_- \quad (41.3.3)$$

Так как, с другой стороны, L' является функцией только двух независимых инвариантов $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ и $(\mathbf{E}\mathbf{H})^2$, то для нахождения L' достаточно определить ω_- в двух специальных случаях, например, когда имеется постоянное и однородное магнитное поле \mathbf{H} и когда наряду с \mathbf{H} имеется параллельное ему электрическое поле с потенциалом

$$\varphi = \varphi_0 e^{ikhz} + \varphi_0^* e^{-ikhz}$$

(φ_0 и k — константы).

Найдем прежде всего энергию ω_- в постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$.

Согласно результатам § 10.5 возможные значения энергии вакуумного электрона в магнитном поле равны

$$\varepsilon_{n\mu}(p_z) = -\sqrt{m^2 + eH(2n - \mu + 1) + p_z^2},$$

где $n = 0, 1, 2$, $\mu = \pm 1$ и p_z — проекция импульса электрона на направление магнитного поля (соответствующие волновые функции $\psi_{n\mu p_z}^{(-)}$ определяются формулами (10.5.9)). Поэтому плотность энергии вакуума, которую мы будем обозначать теперь через ω^H , может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \omega^H &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2} (\psi_{n\mu p_z}^{(-)*}(\mathbf{r}), \psi_{n\mu p_z}^{(-)}(\mathbf{r})) \varepsilon_{n\mu}(p_z) = \\ &= -\frac{eH}{(2\pi)^2} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{n\mu}(p) dp, \quad (41.3.4) \end{aligned}$$

где $p \equiv p_z$.

Замечая, что

$$\varepsilon_{n,-1}(p) = \varepsilon_{n+1,1}(p),$$

перепишем ω^H в виде

$$\omega^H = -\frac{eH}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \left\{ \varepsilon_0(p) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(p) \right\},$$

где

$$\varepsilon_n(p) = \sqrt{p^2 + m^2 + 2neH}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Используя далее формулу суммирования Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F(0) + \sum_{k=1}^N F(kb) - \frac{1}{2} F(bN) = \\ = \frac{1}{b} \left\{ \int_0^{bN} F(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n b^{2n}}{(2n)!} [F^{(2n-1)}(bN) - F^{(2n-1)}(0)] \right\}, \end{aligned} \quad (41.3.5)$$

где B_n — числа Бернулли, и полагая в ней $b = 2eH$, получим

$$\omega^H = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \left[\int_0^{\infty} F(x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n} \frac{B_n}{(2n)!} F^{(2n-1)}(0) \right],$$

где $F(x) = \sqrt{p^2 + m^2 + x}$.

Мы должны теперь регуляризовать величину ω^H . Эта регуляризация может быть произведена следующим образом. Во-первых, следует

отбросить интеграл $\int_0^{\infty} F(x) dx$, как не содержащий напряженности магнит-

ного поля и представляющий собой энергию свободных вакуумных электронов и, во-вторых, следует отбросить первое слагаемое с $n = 1$ в бесконечной сумме, так как оно приводит к энергии, пропорциональной H^2 , которая уже включена в невозмущенную энергию поля ω_0 (отбрасывая это слагаемое, мы, по существу дела, производим перенормировку напряженности поля, связанную с перенормировкой заряда).

Итак, регуляризованное выражение для плотности энергии ω_R^H имеет следующий вид

$$\omega_R^H = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \sum_{n=2}^{\infty} b^{2n} \frac{B_n}{(2n)!} F^{(2n-1)}(0) dp.$$

Замечая, что

$$F^{(2n-1)}(0) = \frac{\Gamma\left(2n - \frac{3}{2}\right)}{2 \sqrt{\pi} (p^2 + m^2)^{\frac{4n-3}{2}}}$$

и что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(p^2 + m^2)^q} = \sqrt{\pi} m^{1-2q} \frac{\Gamma\left(q - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(q)},$$

где $\Gamma(x)$ — эйлерова гамма-функция, имеем

$$\omega_R^H = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=2}^{\infty} b^{2n} B_n (m^2)^{2-2n} \frac{\Gamma(2n-2)}{2(2n)!}, \quad (41.3.6)$$

а так как

$$\Gamma(2n-2) = \int_0^{\infty} d\eta e^{-\eta} \eta^{2n-3},$$

то

$$\omega_R^H = \frac{bm^2}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^2} e^{-\eta} \sum_{n=2}^\infty \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} \left(\frac{b\eta}{2m^2} \right)^{2n-1}.$$

Сравнивая это выражение с разложением

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \sum_{k=2}^\infty \frac{2^{2k} B_k}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad (41.3.7)$$

найдем окончательно

$$\omega_R^H = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left\{ \eta H^* \operatorname{cth}(\eta H^*) - 1 - \frac{\eta^2 H^{*2}}{3} \right\}, \quad (41.3.8)$$

где

$$H^* = \frac{b}{2m^2} = \frac{eH}{m^2}.$$

Введем теперь в рассмотрение наряду с магнитным полем параллельное ему электростатическое поле с потенциалом $\varphi = \varphi_0 e^{ikz} + \varphi_0^* e^{-ikz}$.

Разложим ω_- в ряд по степеням E^2 (или, что то же самое, по степеням φ^2 ; E — напряженность электрического поля, $E^2 = 2k^2 |\varphi_0|^2$):

$$\omega_- = \sum_{r=1}^\infty \omega^{(2r)} + \omega_R^H. \quad (41.3.9)$$

Повторяя выкладки, приводящие к (41.3.4), получим:

$$\omega^{(2r)} = \frac{eH}{(2\pi)^2} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{n=0}^\infty \int_{-\infty}^\infty dp \varepsilon_{n\mu}^{(2r)}(p),$$

где $\varepsilon_{n\mu}^{(2r)}(p)$ — поправка к энергии электрона $\varepsilon_{n\mu}(p)$ в магнитном поле, пропорциональная E^{2r} .

Рассмотрим прежде всего слагаемое $\omega^{(2)}$. Пользуясь теорией возмущений, легко показать, что

$$\int_{-\infty}^\infty dp \varepsilon_{n\mu}^{(2)}(p) = -e^2 |\varphi_0|^2 \frac{k^2}{4} \int \frac{dp K^2}{(p^2 + K^2)^{5/2}},$$

где

$$K^2 = m^2 + eH(2n - \mu + 1),$$

причем мы разложили φ в ряд по степеням k и сохранили только члены второго порядка.

Полагая в формуле суммирования Эйлера (41.3.5)

$$F(x) = -e^2 |\varphi_0|^2 \frac{k^2}{4} \frac{m^2 + x}{(p^2 + m^2 + x)^{5/2}},$$

найдем

$$\omega^{(2)} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{e^2 E^2}{12} \left[\int_0^\infty \frac{dx}{m^2 + x} - \sum_{k=1}^\infty b^{2k} \frac{B_k}{(2k)!} \left(\frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} \frac{1}{m^2 + x} \right)_{x=0} \right],$$

Регуляризация этого выражения сводится к отбрасыванию первого слагаемого, содержащего интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{m^2+x}$ и пропорционального E^2 .

Отбрасывая это слагаемое, мы, как и выше, при вычислении энергии ω^H в магнитном поле, производим, по существу дела, перенормировку заряда.

Используя разложение (41.3.7) для $\text{cth } x$, получим окончательно следующее выражение для регуляризованного значения $\omega^{(2)}$:

$$\omega_R^{(2)} = -\frac{m^4}{8\pi^2} \frac{E^{*2}}{3} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta} \{ \eta H^* \text{cth}(\eta H^*) - 1 \}, \quad (41.3.10)$$

где

$$E^* = \frac{eE}{m^2}, \quad H^* = \frac{eH}{m^2}, \quad m \equiv m_R.$$

Поступая аналогичным образом, можно показать, что

$$\sum_{r=2}^{\infty} \omega^{(2r)} = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left\{ \eta E^* \text{ctg} \eta E^* - 1 + \frac{\eta E^{*2}}{3} \right\} \eta H^* \text{cth} \eta H^*.$$

Складывая это выражение с выражениями (41.3.10) и (41.3.8) для $\omega_R^{(2)}$ и ω_R^H , найдем регуляризованное значение плотности энергии ω_R :

$$\omega_R = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left\{ (\eta E^* \text{ctg} \eta E^*) (\eta H^* \text{cth} \eta H^*) - 1 + \frac{1}{3} \eta^2 (E^{*2} - H^{*2}) \right\}. \quad (41.3.11)$$

Замечая, наконец, что

$$\text{ctg} \alpha \text{cth} \beta = i \frac{\cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta} + \cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 - 2i\alpha\beta}}{\cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta} - \cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 - 2i\alpha\beta}},$$

и₁ используя (41.3.3), получим следующее выражение для L' :

$$L' = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \times \\ \times \left\{ \eta (EH) \frac{\cos(\eta \sqrt{E^{*2} - H^{*2} + 2i(E^*H^*)}) + \cos(\eta \sqrt{E^{*2} - H^{*2} - 2i(E^*H^*)})}{\cos(\eta \sqrt{E^{*2} - H^{*2} + 2i(E^*H^*)}) - \cos(\eta \sqrt{E^{*2} - H^{*2} - 2i(E^*H^*)})} + \right. \\ \left. + \frac{m^4}{e^2} - \frac{\eta^2}{3} (E^2 - H^2) \right\}. \quad (41.3.12)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи.

В случае слабых полей

$$L' = \frac{2}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} [(E^2 - H^2)^2 + 7(EH)^2] + \dots \quad (41.3.13)$$

Это выражение совпадает с найденным ранее выражением (41.2.12).

Рассмотрим далее сильные поля. Пусть сначала $E^* = 0$ и $H^* \gg 1$.

Представим L' в виде

$$L' = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon x}}{x} f(x) dx,$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{H^*} \ll 1$$

и

$$f(x) = -\frac{m^4}{8\pi^2} \frac{H^{*2}}{x^2} \left(x \operatorname{cth} x - 1 - \frac{1}{3} x^2 \right).$$

Функция $f(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow 0$ и ведет себя при $x \gg 1$ как

$$f(x) = f(\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \gg 1,$$

где $f(\infty) = \frac{\alpha}{6\pi} m^4 H^{*2}$. Легко убедиться, что асимптотически при $\varepsilon \rightarrow 0$ для функций с таким поведением справедливо соотношение

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon x}}{x} f(x) dx \simeq f(\infty) \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Отсюда вытекает следующее асимптотическое выражение для L' при $H^* \gg 1$, $E^* = 0$:

$$L' = \frac{\alpha m^4}{6\pi} H^{*2} \ln H^*, \quad H^* \gg 1. \quad (41.3.14)$$

Аналогичным образом можно показать, что в случае сильных электрических полей $E^* \gg 1$, $H^* = 0$ функция L' имеет вид

$$L' = -\frac{\alpha m^4}{6\pi} E^{*2} \ln E^*, \quad E^* \gg 1. \quad (41.3.15)$$

Таким образом, отношение радиационной поправки L' к классической плотности функции Лагранжа L_0 при больших напряженностях полей растет только логарифмически с полем:

$$\left| \frac{L'}{L_0} \right| \sim \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{e|F|}{m^2}, \quad (41.3.16)$$

где F — электрическое или магнитное поле и α — постоянная тонкой структуры. Поэтому нелинейность уравнений электродинамики будет малой даже в том случае, когда поле значительно больше значения $\frac{m^2 c^3}{e\hbar}$. Если в качестве E взять поле на «краю электрона»:

$$E = \frac{e}{4\pi r_0^2} = 4\pi \frac{m^2 c^4}{e^3},$$

то отношение $\left| \frac{L'}{L_0} \right|$ будет равно

$$\left| \frac{L'}{L_0} \right| \sim \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{1}{\alpha}, \quad (41.3.17)$$

т. е. и в этом случае $\left| \frac{L'}{L_0} \right| \ll 1$.

§ 42. Рассеяние фотона в кулоновском поле ядра

42.1. Общее выражение для сечения рассеяния фотона в постоянном электромагнитном поле. В матрицу рассеяния $\mathbf{S}^{(4)}$, описывающую нелинейные взаимодействия между электромагнитными полями, входят четыре оператора электромагнитного поля. Если все эти операторы относятся к фотонным состояниям, то матричный элемент $\mathbf{S}^{(4)}$ будет описывать процесс

рассеяния фотона фотоном, рассмотренный в предыдущем параграфе. Однако могут быть еще два случая, а именно, когда только два множителя $A_\mu(x)$ относятся к фотонным состояниям, а два других — к внешнему электромагнитному полю, либо когда три множителя $A_\mu(x)$ относятся к фотонным состояниям, а один — к внешнему полю. В первом случае элемент матрицы $\mathbf{S}^{(4)}$ описывает рассеяние фотона во внешнем электромагнитном поле [29], а во втором — расщепление одного фотона на два или слияние двух фотонов в один во внешнем поле. Этими эффектами (вместе с рассеянием фотона фотоном) исчерпываются все процессы взаимодействия между электромагнитными полями 4-го порядка.

Мы ограничимся рассмотрением рассеяния фотона во внешнем электромагнитном поле. Если поле зависит от времени, то рассеяние фотона будет происходить с изменением частоты, если же поле постоянно, то рассеяние происходит без изменения частоты фотона (когерентное рассеяние).

Особый интерес представляет когерентное рассеяние фотонов в кулоновском поле ядра. Сечение этого рассеяния становится сравнимым с сечением рассеяния фотонов электронами при энергиях порядка 10^{10} эв, но когерентное рассеяние фотонов ядрами может быть обнаружено и при меньших энергиях благодаря характерному угловому распределению, имеющему резкий максимум в области малых углов рассеяния; мы далее увидим, что для тяжелых ядер при частоте фотонов $\omega = 300$ Мэв дифференциальное сечение этого рассеяния на углы $\sim 0,01^\circ$ на три порядка больше, чем соответствующее сечение комптоновского рассеяния.

Диаграммы, изображающие рассеяние фотона во внешнем поле, не отличаются от диаграмм рис. 41.2, изображающих рассеяние фотона фотоном (только двум фотонным линиям соответствует теперь внешний потенциал).

Матричный элемент, определяющий рассеяние фотона во внешнем поле, равен, согласно правилу Фейнмана,

$$\begin{aligned} \langle f | \mathbf{S}^{(4)} | i \rangle = & \\ = - \frac{2\alpha^2}{(2\pi)^6 (\omega_1 \omega_2)^{1/2}} \int d^4 q_1 d^4 q_2 \delta(k_1 - k_2 + q_1 + q_2) e_{1\mu} e_{2\nu} A_\lambda^{(e)}(q_1) A_\sigma^{(e)}(q_2) \times & \\ \times \int d^4 p \{ \text{Sp} [\gamma_\mu (i\hat{p} + m)^{-1} \gamma_\nu (i\hat{p} - i\hat{k}_2 + m)^{-1} \times & \\ \times \gamma_\lambda (i\hat{p} - i\hat{k}_2 + i\hat{q}_1 + m)^{-1} \gamma_\sigma (i\hat{p} + i\hat{k}_1 + m)^{-1}] + & \\ + \text{Sp} [\gamma_\mu (i\hat{p} + m)^{-1} \gamma_\lambda (i\hat{p} + i\hat{q}_1 + m)^{-1} \gamma_\nu (i\hat{p} + i\hat{q}_1 - i\hat{k}_2 + m)^{-1} \gamma_\sigma (i\hat{p} + i\hat{k}_1 + m)^{-1}] + & \\ + \text{Sp} [\gamma_\mu (i\hat{p} + m)^{-1} \gamma_\sigma (i\hat{p} + i\hat{q}_1 + m)^{-1} \gamma_\lambda (i\hat{p} + i\hat{q}_2 + i\hat{q}_1 + m)^{-1} \gamma_\nu (i\hat{p} + i\hat{k}_1 + m)^{-1}] \}, & \end{aligned}$$

где $A_\mu^{(e)}(q)$ — компонента Фурье внешнего поля,

$$A_\mu^{(e)}(q) = \int A_\mu^{(e)}(x) e^{-iqx} d^4x,$$

k_1 и k_2 — импульсы фотонов и e_1 и e_2 — их поляризации.

Используя определение (41.1.4) регуляризованного тензора рассеяния фотона фотоном $J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$, можно записать регуляризованное значение матричного элемента в виде

$$\begin{aligned} \langle f | \mathbf{S}_R^{(4)} | i \rangle = - \frac{\alpha^2}{2(2\pi)^4} \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \int d^4 q_1 d^4 q_2 \delta(k_1 - k_2 + q_1 + q_2) \times & \\ \times e_{1\mu} e_{2\nu} A_\lambda^{(e)}(q_1) A_\sigma^{(e)}(q_2) J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, -k_2, q_1, q_2). & \quad (42.1.1) \end{aligned}$$

Если поле постоянно, т. е.

$$A_{\mu}^{(e)}(q) = A_{\mu}^{(e)}(q) 2\pi\delta(q_0),$$

то частоты падающего и рассеянного фотонов равны, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, и

$$\langle f | \mathbf{S}_R^{(4)} | i \rangle = -\frac{\alpha^2}{2(2\pi)^2} \frac{1}{\omega} \int d^3q A_{\lambda}^{(e)}(q) A_{\sigma}^{(e)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - q) \delta(\omega_1 - \omega_2) \times \\ \times e_{1\mu} e_{2\nu} J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, -k_2, q, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - q).$$

Умножая $|\langle f | \mathbf{S}_R^{(4)} | i \rangle|^2$ на число конечных состояний рассеянного фотона $\frac{\omega_2^2 d\omega_2 d\Omega_2}{(2\pi)^3}$ ($d\Omega_2$ — элемент телесного угла, в котором лежит \mathbf{k}_2) и деля на плотность потока падающих фотонов, $J = 1$, получим дифференциальное сечение когерентного рассеяния фотона в постоянном поле

$$d\sigma = \frac{1}{4} \frac{\alpha^4}{(2\pi)^2} d\Omega_2 \left| \int d^3q A_{\lambda}^{(e)}(q) A_{\sigma}^{(e)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - q) e_{1\mu} e_{2\nu} \times \right. \\ \left. \times J_{R\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, -k_2, q, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - q) \right|^2. \quad (42.1.2)$$

42.2. Связь между амплитудой рассеяния фотона на нулевой угол и сечением образования пар. Покажем, что матричный элемент когерентного рассеяния фотона в постоянном электромагнитном поле на нулевой угол связан простым соотношением с интегральным сечением образования пар фотоном в этом поле.

Воспользуемся для этого условием унитарности матрицы рассеяния

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^+ = I,$$

или

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^+ = -i(\mathbf{T} - \mathbf{T}^+), \quad (42.2.1)$$

где матрица \mathbf{T} связана с \mathbf{S} соотношением

$$\mathbf{S} = I + i\mathbf{T}.$$

Из (42.2.1) следует, что

$$\langle i | \mathbf{T}\mathbf{T}^+ | i \rangle = 2 \operatorname{Im} \langle i | \mathbf{T} | i \rangle,$$

или

$$\sum_f |\langle i | \mathbf{T} | f \rangle|^2 = 2 \operatorname{Im} \langle i | \mathbf{T} | i \rangle, \quad (42.2.2)$$

где i — произвольное состояние системы полей, и суммирование производится по всем состояниям полей f .

Левая часть этого соотношения представляет собой суммарную вероятность перехода системы полей из состояния i во все другие состояния (включая состояние i), а правая — пропорциональна инвариантной амплитуде процесса рассеяния $i \rightarrow i$ на нулевой угол.

Применим это соотношение к тому случаю, когда рассеяние происходит в постоянном внешнем электромагнитном поле и в исходном состоянии i находится одна частица (далее такой частицей мы будем считать фотон). В этом случае в элементах матрицы \mathbf{T} можно выделить δ -функцию от энергии

$$\langle r | \mathbf{T} | i \rangle = (2\pi)^2 \delta(E_r - E_i) F_{ri} \frac{1}{V} \prod \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\alpha}}}, \quad (42.2.3)$$

где F_{ri} — инвариантная амплитуда процесса рассеяния $i \rightarrow r$, E_r — суммарная энергия частиц в состоянии r , ε_{α} — энергия частицы в индивидуальном

состоянии α (произведение по α распространяется на все индивидуальные состояния частиц как в состоянии i , так и в состоянии r) и V — нормировочный объем.

Так как матричные элементы содержат δ -функцию от энергии, то левая часть равенства (42.2.2) пропорциональна времени перехода t (так же, как и в § 18, мы должны заменить $\delta^2(E_r - E_i)$ на $\frac{t}{2\pi} \delta(E_r - E_i)$). Поэтому, разделив $\sum_f |\langle i | \mathbf{T} | f \rangle|^2$ на tv_i/V , где v_i — скорость частицы, присутствующей в состоянии i , мы найдем сумму сечений $\sigma_{i \rightarrow f}$ всех процессов рассеяния $i \rightarrow f$.

Рассмотрим теперь правую часть равенства (42.2.2). В соответствии с (42.2.3) мы можем заменить $\langle i | \mathbf{T} | i \rangle$ на $2\pi t F_{ii}(\epsilon_i, 0) \frac{1}{V \epsilon_i}$, где $F_{ii}(\epsilon_i, 0)$ — значение амплитуды рассеяния $F_{ii}(\epsilon_i, \theta)$ процесса $i \rightarrow i$ при угле рассеяния θ , равном нулю. Таким образом, соотношение (42.2.2) принимает вид

$$\sum_f \sigma_{i \rightarrow f} = \frac{4\pi}{p_i} \text{Im} F_{ii}(\epsilon_i, 0), \quad (42.2.4)$$

где $p_i = v_i \epsilon_i$ — импульс частицы. Это важное соотношение, связывающее суммарное сечение процессов рассеяния $i \rightarrow f$ с амплитудой упругого рассеяния на нулевой угол, называется *оптической теоремой*.

Пусть в состоянии i находится один фотон, обладающий достаточно большой энергией, тогда суммарное сечение процессов рассеяния будет практически совпадать с сечением $\sigma_p(\omega)$ образования электронно-позитронных пар фотоном во внешнем поле (ω — энергия фотона), так как сечение упругого рассеяния фотона $\sigma_e(\omega)$ значительно меньше $\sigma_p(\omega)$.

Обозначая амплитуду упругого рассеяния фотона во внешнем поле через $f(\omega, \theta)$ (θ — угол рассеяния), мы можем, следовательно, написать на основании оптической теоремы соотношение

$$\sigma_p(\omega) = \frac{4\pi}{\omega} \text{Im} f(\omega, 0). \quad (42.2.5)$$

Амплитуда упругого рассеяния фотона $f(\omega, \theta)$ связана с элементом матрицы $\mathbf{S}^{(4)}$, соответствующим когерентному рассеянию фотона в постоянном поле, соотношением

$$\langle f | \mathbf{S}^{(4)} | i \rangle = \frac{(2\pi)^2}{\omega} f(\omega, \theta) \delta(\omega - \omega_f), \quad (42.2.6)$$

а дифференциальное сечение упругого рассеяния фотона имеет вид

$$d\sigma_e = |f(\omega, \theta)|^2 d\omega, \quad (42.2.7)$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла, в котором лежит импульс рассеянного фотона.

При рассеянии в кулоновском поле на нулевой угол поляризация фотона, очевидно, не изменяется, $e_1 = e_2$. Поэтому усредненное по состояниям поляризации значение амплитуды рассеяния на нулевой угол равняется, согласно (42.1.1),

$$f(\omega, 0) = -\frac{\alpha^2}{4(2\pi)^4} \int A_\lambda^{(e)}(q) A_\sigma^{(e)}(-q) J_{\text{Кулонов}}(k, -k, q, -q) d^3q. \quad (42.2.8)$$

Подставляя это выражение в (42.2.5), получим следующую общую формулу для интегрального сечения образования пар фотоном в постоянном

внешнем электромагнитном поле:

$$\begin{aligned} \sigma_p(\omega) &= -\frac{\sigma^2}{2(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \int d^3q A_\lambda^{(e)}(q) A_\sigma^{(e)}(-q) J_{R\mu\lambda\sigma}(k, -k, q, -q) = \\ &= \int A_\mu^{(e)}(q) A_\nu^{(e)}(-q) T_{\mu\nu}(q, k) d^3q, \quad (42.2.9) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(q, k) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4\pi\alpha^2}{\omega} \operatorname{Re} [A_{\mu\nu}(q, k) + B_{\mu\nu}(q, k) + B_{\mu\nu}(-q, k) + \\ &+ A_{\mu\nu}(q, -k) + B_{\mu\nu}(q, -k) + B_{\mu\nu}(-q, -k)], \\ A_{\mu\nu}(q, k) &= \int d^4p \frac{\operatorname{Sp}(\gamma_\mu(i\hat{p}-m)\gamma_\lambda(i\hat{p}-i\hat{k}-m)\gamma_\nu(i\hat{p}-i\hat{k}-i\hat{q}-m)\gamma_\lambda(i\hat{p}-i\hat{q}-m))}{(p^2+m^2)[(p-k)^2+m^2][(p-k-q)^2+m^2][(p-q)^2+m^2]}, \\ B_{\mu\nu}(q, k) &= \int d^4p \frac{\operatorname{Sp}[\gamma_\mu(i\hat{p}+i\hat{q}-m)\gamma_\nu(i\hat{p}-m)\gamma_\lambda(i\hat{p}+i\hat{k}-m)\gamma_\lambda(i\hat{p}-m)]}{[(p+q)^2+m^2][(p+k)^2+m^2](p^2+m^2)^2}. \end{aligned}$$

Чтобы найти тензор $T_{\mu\nu}(q, k)$, заметим, что он может иметь только следующую структуру:

$$T_{\mu\nu}(q, k) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4\pi\alpha^2}{\omega} \{G_1\delta_{\mu\nu} + G_2k_\mu k_\nu + G_3q_\mu q_\nu + G_4(k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu)\}, \quad (42.2.10)$$

где G_i — некоторые инвариантные функции q и k . С другой стороны, в силу градиентной инвариантности выражения (42.2.9) для сечения образования пар должно выполняться соотношение

$$q_\mu T_{\mu\nu}(q, k) = 0.$$

Поэтому функции G_i связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} G_1 + q^2 G_3 + qk G_4 &= 0, \\ qk G_2 + q^2 G_4 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для определения $T_{\mu\nu}$ достаточно найти две из четырех инвариантных функций G_i .

Мы не будем приводить здесь вычисления этих функций, а приведем только окончательные результаты [30].

Если $r^2 \equiv \frac{1}{4}(q-k)^2 < -m^2$, то

$$\left. \begin{aligned} G_2 &= \frac{8\pi^3 q^2}{\beta^4} \left\{ [2(4m^4 + 6m^2 q^2 - q^4) + 2(q^2 - 2m^2)\beta - \beta^2] \times \right. \\ &\quad \left. \times \ln \frac{1 - \sqrt{1 + m^2/r^2}}{1 + \sqrt{1 + m^2/r^2}} + \sqrt{1 + m^2/r^2} [4(q^2 - \beta)(m^2 - 2q^2) - \beta^2] \right\}, \\ G_3 &= \frac{32\pi^3}{\beta^2} \left[2m^2 \ln \frac{1 - \sqrt{1 + m^2/r^2}}{1 + \sqrt{1 + m^2/r^2}} + (\beta - q^2) \sqrt{1 + m^2/r^2} \right], \\ G_4 &= -\frac{\beta}{2q^2} G_2, \quad G_1 = -q^2 G_3 + \frac{\beta^2}{4q^2} G_2, \end{aligned} \right\} \quad (42.2.11)$$

где $\beta = 2qk$. Если же $r^2 \geq -m^2$, то $G_i = 0$.

42.3. Распределение ядер отдачи по импульсам при образовании пар фотоном в поле ядра. Рассмотрим подробнее наиболее интересный случай, когда поле, в котором создается пара, представляет собой экранированное

кулоновское поле ядра

$$A^{(e)}(\mathbf{q}) = 0, \quad A_0^{(e)}(\mathbf{q}) = \frac{Ze}{q^2} (1 - F(\mathbf{q})),$$

где $F(\mathbf{q})$ — атомный формфактор. В этом случае отлична от нуля только одна компонента тензора $T_{\mu\nu}$, равная

$$T_{44} = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4\pi\alpha^2}{\omega} (-G_1 + \omega^2 G_2)$$

и

$$\sigma_p(\omega) = \frac{Z^2\alpha^3}{8\pi^4\omega} \int d^3q \frac{(1-F(\mathbf{q}))^2}{q^4} (\omega^2 G_2 - G_1), \quad (42.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \omega^2 G_2 - G_1 = & \frac{8\pi^3}{\beta^2} \left\{ 4q^2 \left[2m^2 \ln \frac{1 - \sqrt{1 + m^2/r^2}}{1 + \sqrt{1 + m^2/r^2}} + \sqrt{1 + m^2/r^2} (\beta - q^2) \right] + \right. \\ & + \frac{\beta^2 - 4q^2\omega^2}{\beta^2} \left[\sqrt{1 + m^2/r^2} (\beta^2 - 4(q^2 - \beta)(m^2 - 2q^2)) + \right. \\ & \left. \left. + \ln \frac{1 - \sqrt{1 + m^2/r^2}}{1 + \sqrt{1 + m^2/r^2}} (\beta^2 + 2(\beta - q^2)(2m^2 - q^2) - 8m^2(q^2 + m^2)) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Так как \mathbf{q} представляет собой импульс, передаваемый при образовании пары ядру, то подынтегральное выражение (42.3.1) определяет распределение ядер отдачи по получаемым ими импульсам [30].

Вводя новые переменные

$$2mQ = |\mathbf{q}|, \quad \mu = (\omega^2 - |\mathbf{q} - \mathbf{k}|) \frac{1}{4m^2}, \quad \gamma = \frac{\omega}{2m},$$

можно представить (42.3.1) в виде

$$\sigma_p(\omega) = \int_{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}}^{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}} dQP(Q, \omega), \quad (42.3.2)$$

где

$$\begin{aligned} P(Q, \omega) = & \frac{2Z^2\alpha^3}{\omega^2} [1 - F(Q^2)] \frac{I(Q, \gamma)}{Q^3}, \\ I(Q, \gamma) = & J_0 + (1 - 2Q^2) J_1 + \left(2Q^4 - Q^2 - 4Q^2\gamma^2 - \frac{1}{2} \right) J_3 + \\ & + 2Q^2\gamma^2 (1 + 6Q^2 - 4Q^4) J_4 + K_0 + (1 - 4Q^2) K_1 + [(4Q^2 - 1) Q^2 - 4Q^2\gamma^2] K_2 + \\ & + 4Q^2\gamma^2 (8Q^2 - 1) K_3 + 4Q^4\gamma^2 (1 - 8Q^2) K_4 \quad (42.3.3) \end{aligned}$$

и

$$J_n = \int_1^{2\gamma Q - Q^2} \frac{d\mu}{(Q^2 + \mu)^n} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 1/\mu}}{1 + \sqrt{1 - 1/\mu}}, \quad K_n = \int_0^{2\gamma Q - Q^2} \frac{d\mu}{(Q^2 + \mu)^n}.$$

Функция $P(Q, \omega)$ определяет распределение ядер отдачи по абсолютным значениям импульсов.

На рис. 42.1 изображено распределение ядер отдачи по импульсам для различных значений энергии фотонов. (По оси ординат отложена величина $\frac{P(Q, \omega)}{2Z^3\alpha^3/m^2}$; буквой A обозначена асимптотическая кривая при $\gamma \rightarrow \infty$.)

Приближенно можно считать, что функция $P(Q, \omega)$ обратно пропорциональна $q \equiv |\mathbf{q}|$ (в определенных пределах), т. е.

$$\sigma_p(\omega) = \text{const} \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{dq}{q},$$

где $q_{\max} = m$, $q_{\min} = \frac{m^2}{\omega}$ — в отсутствие экранирования и $q_{\min} = 1/a$ (a — атомный радиус) в случае полного экранирования.

Сравнение этой формулы с формулой (30.1.8) для сечения образования пары фотоном в кулоновском поле ядра показывает, что

$$\text{const} = \frac{28}{9} \frac{Z^2 \alpha^3}{m^2} = \frac{28}{9} \overline{\Phi}.$$

Таким образом, распределение ядер отдачи по импульсам в отсутствие экранирования приближенно определяется формулой

$$\sigma_p(\omega) = \frac{28}{9} \overline{\Phi} \int_{m^2/\omega}^m \frac{dq}{q}; \quad (42.3.4)$$

при полном же экранировании

$$\sigma_p(\omega) = \frac{28}{9} \overline{\Phi} \int_{1/a}^m \frac{dq}{q}. \quad (42.3.5)$$

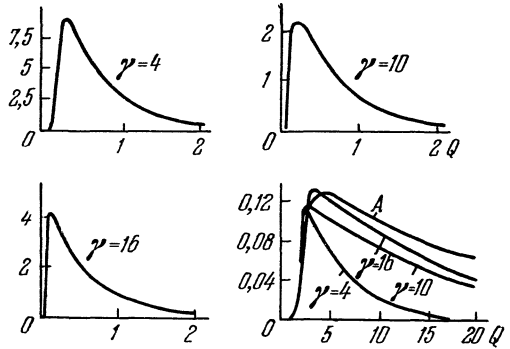


Рис. 42.1.

42.4. Угловое распределение ядер отдачи и интегральное сечение образования пар фотоном в кулоновском поле ядра. Если

$$R_{0 \max} \ll a, \quad R_0 \sim \frac{1}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}|},$$

где a — размер атома, \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 — импульсы компонент пары, образованной фотоном с импульсом \mathbf{k} , то экранирование поля ядра не играет роли (см. § 28.5) и величиной $F(\mathbf{q})$ в (42.3.1) можно пренебречь. Найдем в этом случае угловое распределение ядер отдачи, т. е. распределение их по углам θ между векторами \mathbf{q} и \mathbf{k} .

Вводя переменные

$$\eta = \gamma \cos \theta = \gamma \frac{\mathbf{qk}}{q\omega}, \quad \gamma = \frac{\omega}{2m},$$

получим из (42.3.1) при $F(\mathbf{q}) = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_p(\omega) = & \frac{Z^2 e^6}{16\pi^2 \omega^2} \int_1^\gamma d\eta \int_{\eta - \sqrt{\eta^2 - 1}}^{\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}} \frac{dQ}{Q^2} \left\{ \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 1/2\eta Q - Q^2}}{1 + \sqrt{1 - 1/2\eta Q - Q^2}} \left[\left(1 - \frac{\gamma^2}{\eta^2}\right) \times \right. \right. \\ & \times \left(1 - \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{2\eta Q} - \frac{1}{8Q^2\eta^2} - \frac{Q}{\eta} + \frac{Q^2}{2\eta^2}\right) + \frac{\gamma^2}{2\eta^2} \left. \right] + \\ & + \sqrt{1 - 1/2\eta Q - Q^2} \left[\left(1 - \frac{\gamma^2}{\eta^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{2\eta Q}\right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\eta^2} \left(1 - \frac{2\gamma^2}{\eta^2}\right) (Q^2 - 2\eta Q) \right] \right\}. \quad (42.4.1) \end{aligned}$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$\sigma_p(\omega) = \int_0^{\arccos \frac{1}{\gamma}} d\theta P(\theta, \omega),$$

где

$$P(\theta, \omega) = \frac{4\gamma\alpha^3 Z^2}{\omega^2} \sin \theta \int_0^{\eta^2} d\mu \frac{1}{(\eta^2 - \mu^2)^{1/2}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{\gamma^2}{\eta^2}\right) \times \right. \right. \\ \times \left. \left(\frac{2\eta^2}{\mu^3} + \frac{2(\eta^2 - 1)}{\mu^2} + \frac{\eta^2 - 4}{4\mu} \right) + \left(1 - \frac{2\gamma^2}{\eta^2}\right) \left(-\frac{2}{\mu} + \frac{1}{\eta^2} \right) \right] + \\ + \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 1/\mu}}{1 + \sqrt{1 - 1/\mu}} \left[\frac{\gamma^2}{\eta^2 \mu^2} - \frac{\gamma^2}{2\eta^4 \mu} + \left(1 - \frac{\gamma^2}{\eta^2}\right) \left(\frac{1}{2\eta^2} + \frac{1 - 8\eta^2}{4\eta^2 \mu} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{16\eta^4 - 16\eta^2 - 1}{8\eta^2 \mu^2} + \frac{2\eta^2 + 1}{\mu^3} - \frac{\eta^2}{\mu^4} \right) \right] \right\}. \quad (42.4.2)$$

Функция $P(\theta, \omega)$ и определяет угловое распределение ядер отдачи. На рис. 42.2 изображено угловое распределение ядер отдачи для различных значений энергии фотона (по оси ординат отложена величина $\frac{P(\theta, \omega)}{Z^2 \alpha^3 / 64 \pi^3 m^2}$).

Интегрируя член, содержащий $\ln \frac{1 - \sqrt{1 - 1/\mu}}{1 + \sqrt{1 - 1/\mu}}$, по частям и вводя эллиптические интегралы

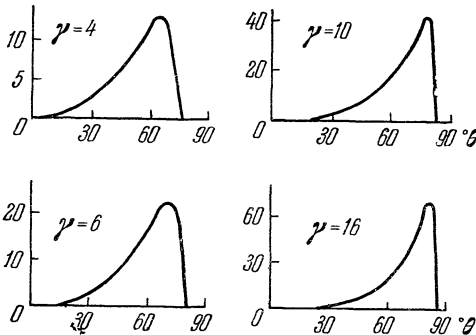


Рис. 42.2.

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi,$$

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi,$$

$$L(\eta) = \int_0^{\eta} F(\sqrt{1 - 1/\xi^2}) \frac{d\xi}{\xi},$$

можно представить $\sigma_p(\omega)$ в виде

$$\sigma_p(\omega) = \frac{Z^2 \alpha^3}{m^2 \gamma^2} \left\{ 4 \int_1^{\gamma} \frac{L(\eta)}{\eta} d\eta + 2L(\gamma) + \frac{2}{27} \left[-(64 + 109\gamma^2) E(\sqrt{1 - 1/\gamma^2}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(125 + \frac{6}{\gamma^2} + 42\gamma^2\right) F(\sqrt{1 - 1/\gamma^2}) \right] \right\}. \quad (42.4.3)$$

42.5. Когерентное рассеяние фотонов в поле ядра на нулевой угол.

Возвратимся к рассмотрению когерентного рассеяния фотонов в постоянном электромагнитном поле. Наибольший интерес представляет рассеяние фотонов большой энергии ($\omega \gg m$) в кулоновском поле ядра. Рассмотрением этого случая мы далее и ограничимся.

Общее выражение для элемента матрицы рассеяния, соответствующего когерентному рассеянию фотона в постоянном поле было получено в § 42.1.

Однако непосредственное использование этого выражения для получения сечения рассеяния связано с большими вычислительными трудностями. В случае больших энергий, которому соответствуют малые углы рассеяния. $\theta \ll m/\omega$, вычисления могут быть значительно упрощены, если воспользоваться оптической теоремой и дисперсионными соотношениями для амплитуды когерентного рассеяния фотонов, связывающими между собой вещественную и мнимую части амплитуды.

Выведем прежде всего эти соотношения для рассеяния на малые углы. Рассеяние происходит при этом практически без изменения поляризации, и поэтому его можно описывать одной амплитудой рассеяния $f(\omega, \mathbf{q})$, являющейся скалярной функцией частоты ω и изменения импульса фотона в процессе рассеяния $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$. Мы будем считать \mathbf{q} заданным параметром и рассматривать $f(\omega, \mathbf{q})$ как функцию комплексной переменной ω .

Покажем, что эта функция не имеет особенностей в верхней полуплоскости переменной ω .

Воспользуемся с этой целью принципом Гюйгенса — Кирхгофа, согласно которому электромагнитное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в присутствии рассеивателя должно удовлетворять интегральному соотношению

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int dt' \int_S ds K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \quad (42.5.1)$$

где K — некоторая тензорная функция, связанная с функцией Грина уравнений поля и S — произвольная замкнутая поверхность, окружающая точку \mathbf{r} ; интегрирование по времени производится по области

$$(t - t')^2 \geq (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2$$

(точка \mathbf{r}' лежит на поверхности S).

Пусть вдали от рассеивателя поле имеет вид плоской падающей волны $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - \omega t')}$. Тогда, выбрав в качестве S бесконечную плоскость, перпендикулярную к направлению распространения падающей волны и расположенную вдали от рассеивателя, и подставив в (42.5.1) для рассеянной волны выражение

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = f(\omega, \mathbf{q}) \frac{A}{r} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

(\mathbf{r} удовлетворяет условиям $r k \gg 1$, $r \gg r'$), получим:

$$f(\omega, \mathbf{q}) \frac{A}{r} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} = A \int dt' \int_S ds K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - \omega t')}.$$

Вводя обозначения $\tau = t - t'$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \boldsymbol{\rho}$ и замечая, что, так как $r \gg r'$, то $r \simeq \rho + \frac{\mathbf{k}'\mathbf{r}'}{k}$, перепишем $f(\omega, \mathbf{q})$ в виде

$$f(\omega, \mathbf{q}) = \int_{\tau > 0} d\tau \int_S ds r K(\mathbf{r}, t; \boldsymbol{\rho}, \tau) e^{i\omega(\tau - \rho)} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}'}$$

Это выражение показывает, что $f(\omega, \mathbf{q})$, как функция ω , при заданном \mathbf{q} не имеет особенностей в верхней полуплоскости комплексной переменной ω , так как коэффициент в экспоненте при $i\omega$ положителен.

Воспользуемся теперь формулой Коши

$$f(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega', \mathbf{q})}{\omega' - \omega} d\omega'$$

и выберем в качестве контура C контур, изображенный на рис. 42.3. Так как интеграл вдоль маленькой полуокружности равен $i\pi f(\omega, \mathbf{q})$, то мы получим, очевидно,

$$f(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-R}^R \frac{f(\omega', \mathbf{q})}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{i\pi} \int_{C_R} \frac{f(\omega', \mathbf{q})}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (42.5.2)$$

где P — главное значение интеграла, и C_R — часть контура C , лежащую в верхней полуплоскости. Если бы последний интеграл обращался в нуль при $R \rightarrow \infty$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(\omega', \mathbf{q})}{\omega'} d\omega' = 0, \quad (42.5.3)$$

то мы получили бы соотношение

$$f(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega', \mathbf{q})}{\omega' - \omega} d\omega',$$

или

$$\operatorname{Re} f(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\omega', \mathbf{q})}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (42.5.4)$$

$$\operatorname{Im} f(\omega, \mathbf{q}) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(\omega', \mathbf{q})}{\omega' - \omega} d\omega'.$$

В интересующем нас случае рассеяния фотона в кулоновском поле ядра условие (42.5.3) не выполняется, но зато выполняется условие

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(\omega', \mathbf{q})}{\omega'^2} d\omega' = 0. \quad (42.5.5)$$

Кроме того, амплитуда рассеяния обращается в нуль при $\omega = 0$. Поэтому, применяя формулу (42.5.2) к функции $\frac{f(\omega, \mathbf{q})}{\omega}$, регулярной в точке $\omega = 0$,

и устремляя R к бесконечности, мы получим, взамен (42.5.4) соотношения

$$\operatorname{Re} f(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\omega}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\omega', \mathbf{q})}{\omega'(\omega' - \omega)} d\omega',$$

$$\operatorname{Im} f(\omega, \mathbf{q}) = -\frac{\omega}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(\omega', \mathbf{q})}{\omega'(\omega' - \omega)} d\omega'. \quad (42.5.6)$$

Рис. 42.3.

(Эти соотношения, так же как и соотношения (42.5.4), называются дисперсионными соотношениями.)

Полагая здесь $\mathbf{q} = 0$, что соответствует рассеянию фотона во внешнем постоянном поле на нулевой угол, и вспоминая, что, согласно оптической теореме,

$$\operatorname{Im} f(\omega, 0) = \frac{\omega}{4\pi} \sigma_p(\omega), \quad (42.5.7)$$

где $\sigma_p(\omega)$ — сечение образования электронно-позитронной пары фотоном в рассматриваемом поле, получим

$$\operatorname{Re} f(\omega, 0) = \frac{\omega}{4\pi^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_p(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

или

$$\operatorname{Re} f(\omega, 0) = \frac{\omega^2}{2\pi^2} P \int_{2m}^{\infty} \frac{\sigma_p(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (42.5.8)$$

так как $\sigma_p(\omega)$ — четная функция ω .

Функция $\sigma_p(\omega)$ известна в случае кулоновского поля ядра (она определяется формулой (42.4.3)). Поэтому, используя (42.5.8), можно найти вещественную часть амплитуды рассеяния фотона в кулоновском поле ядра на нулевой угол [31].

Для конкретных вычислений удобно пользоваться вместо (42.4.3) следующим эквивалентным (42.4.3) выражением для $\sigma_p(\omega)$

$$\sigma_p(\omega) \equiv \sigma(y) = 2Z^2\alpha^2 \left\{ \frac{1}{\pi} [2C_2(y) - D_2(y)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{27\pi y^2} [-(109 + 64y^2)E(\sqrt{1-y^2}) + (42 + 125y^2 + 64y^4)F(\sqrt{1-y^2})] \right\},$$

где $y = \frac{2m}{\omega} \ll 1$ и

$$C_2(y) = \int_0^{1/y} \frac{\operatorname{Arch} x}{x} \operatorname{Arsh} \left(\frac{1}{yx} \right) dx, \\ D_2(y) = \int_0^{1/y} \frac{\operatorname{Arsh} \left(\frac{1}{xy} \right)}{\sqrt{x^2 - 1}} dx. \quad (42.5.9)$$

В получающейся после подстановки этого выражения в (42.5.8) формуле для $\operatorname{Re} f(\omega, 0)$:

$$\operatorname{Re} f(\omega, 0) = \frac{1}{\pi^2} P \int_0^1 \frac{\sigma(y')}{y'^2 - y^2} dy'$$

могут быть найдены в замкнутой форме все встречающиеся интегралы.

Мы приведем здесь только окончательный результат [31]:

$$\operatorname{Re} f(\omega, 0) = \frac{Z^2\alpha^3}{m} \left\{ \frac{y}{\pi} (2C_1(y) - D_1(y)) + \frac{1}{27\pi y} [(109 + 64y^2)E_1(y) - \right. \\ \left. - (67 - 6y^2)(1 - y^2)F_1(y)] - \frac{y^2}{9} - \frac{9}{4} \right\}, \quad (42.5.10)$$

где

$$C_1(y) = \operatorname{Re} \int_0^{1/y} \frac{\arcsin x}{x} \operatorname{Arch} \left(\frac{1}{yx} \right) dx, \\ D_1(y) = \operatorname{Re} \int_0^{1/y} \frac{\operatorname{Arch} \left(\frac{1}{yx} \right)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ E_1(y) = \operatorname{Re} \int_0^{1/y} \sqrt{\frac{1-y^2x^2}{1-x^2}} dx, \\ F_1(y) = \operatorname{Re} \int_0^{1/y} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2y^2)}}. \quad (42.5.11)$$

Отметим, что функции $E_1(y)$, $F_1(y)$, $E(y)$ и $F(y)$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} E_1(y) &= E(y), & y \leq 1, \\ E_1(y) &= yE\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y}(1-y^2)F\left(\frac{1}{y}\right), & y \geq 1, \\ F_1(y) &= F(y), & y \leq 1, \\ F_1(y) &= \frac{1}{y}F\left(\frac{1}{y}\right), & y \geq 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько предельных случаев. Если $\omega \leq 2m$, то сечение образования пар равно нулю и, следовательно, $\text{Im} f(\omega, 0) = 0$. При $\omega \ll 2m$

$$f(\omega, 0) = \text{Re} f(\omega, 0) = \frac{73}{72} \frac{Z^2 \alpha^3}{32m} \left(\frac{\omega}{m}\right)^2. \quad (42.5.12)$$

Дифференциальное сечение рассеяния фотона при $\theta = 0$ и $\omega \ll 2m$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\omega} \Big|_{\theta=0} &= |f(\omega, 0)|^2 = \\ &= \left(\frac{73}{72}\right)^2 \left(\frac{1}{32}\right)^2 Z^4 \alpha^6 \frac{\omega^4}{m^6}; \quad (42.5.13) \end{aligned}$$

оно пропорционально ω^4 .

При $\omega \gg 2m$

$$\text{Re} f(\omega, 0) = \frac{7}{18} \frac{Z^2 \alpha^3}{m} \frac{\omega}{m}, \quad (42.5.14)$$

$$\text{Im} f(\omega, 0) = \frac{7}{9\pi} \frac{Z^2 \alpha^3}{m} \frac{\omega}{m} \ln \frac{2\omega}{m}.$$

В этом случае мнимая часть амплитуды рассеяния фотона по порядку ве-

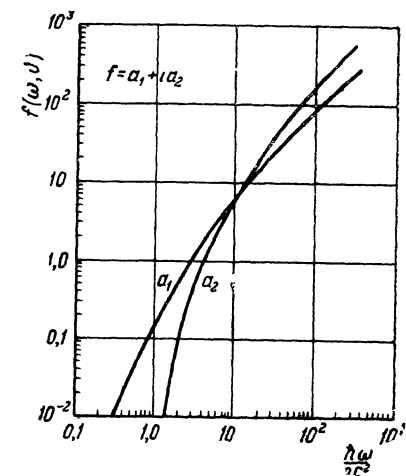


Рис. 42.4.

личины в $\ln \frac{\omega}{m}$ раз больше вещественной части

На рис 42 4 изображена зависимость амплитуды рассеяния фотона на нулевой угол от энергии фотона.

42.6. Когерентное рассеяние фотонов большой энергии в кулоновском поле ядра на малые углы. В предыдущем разделе мы рассмотрели когерентное рассеяние фотонов в кулоновском поле ядра на нулевой угол. Перейдем теперь к рассмотрению рассеяния фотонов в этом же поле на конечные, но малые углы, предполагая, что $\omega \gg m$ [32]. Рассеяние может быть при этом описано одной скалярной амплитудой $f(\omega, \theta)$, которую можно, так же как и амплитуду рассеяния скалярной частицы, представить в виде разложения

$$f(\omega, \theta) = -\frac{i}{2} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (c_l e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta), \quad (42.6.1)$$

где δ_l — фаза на бесконечности, $P_l(\cos \theta)$ — полином Лежандра и c_l — абсолютное значение амплитуды расходящейся волны с моментом l

При чисто упругом рассеянии $c_l = 1$, если же имеет место поглощение частиц, то $c_l < 1$ и величина

$$\gamma_l = 1 - c_l^2$$

определяет вероятность поглощения частиц с моментом l .

Сечение поглощения частиц определяется формулой

$$\sigma_a = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \gamma_l, \quad (42.6.2)$$

а сечение упругого рассеяния — формулой

$$\sigma_e = \int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 2\pi \sin \theta d\theta = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |c_l e^{2i\delta_l} - 1|^2. \quad (42.6.3)$$

Поэтому полное сечение рассеяния равно

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_a = 2\pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \operatorname{Re}(c_l e^{2i\delta_l})). \quad (42.6.4)$$

Заметим, что сравнение этой формулы с амплитудой рассеяния на нулевой угол

$$f(\omega, 0) = -\frac{i}{2} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (c_l e^{2i\delta_l} - 1) \quad (42.6.5)$$

приводит к соотношению (42.5.7).

В области больших энергий рассеяние происходит главным образом на малые углы; при этом существенны большие значения l и сумму (42.6.1), содержащую в этом случае много слагаемых, можно заменить интегралом по l или, что то же самое, интегралом по прицельному параметру $b = l\lambda$.

При $l \gg 1$ и $\theta \ll 1$ справедливо асимптотическое выражение

$$P_l(\cos \theta) \approx J_0(bs), \quad s = \frac{\theta}{\lambda} = \omega\theta,$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя. Подставляя это выражение в (42.6.1) и заменяя сумму интегралом, получим

$$\operatorname{Re} f(\omega, \theta) = \omega \int b db \alpha(\omega, b) J_0(bs), \quad (42.6.6)$$

$$\operatorname{Im} f(\omega, \theta) = \omega \int b db \beta(\omega, b) J_0(bs),$$

где величины $\alpha(\omega, b) \equiv \alpha_l$ и $\beta(\omega, b) = \beta_l$ связаны с c_l и δ_l соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_l &\approx 2\delta_l, \\ \beta_l &\approx 1 - c_l \approx \frac{1}{2} \gamma_l. \end{aligned} \quad (42.6.7)$$

Величина $\gamma(\omega, b) = 2\beta(\omega, b)$ представляет собой вероятность образования пары волновым пакетом фотонов частоты ω , движущимся на расстоянии b от ядра. Эту величину легко найти, воспользовавшись выражениями (42.4.2) для распределения ядер отдачи по импульсам. Действительно, импульс, получаемый ядром, приближенно равен $q = 1/b$, поэтому распределение ядер отдачи по импульсам определяет одновременно распределение вероятностей образования пары по прицельным параметрам b .

Воспользовавшись приближенной формулой (42.3.4) для распределения ядер отдачи по импульсам и полагая в ней $q = 1/b$, получим

$$\sigma_p(\omega) = \frac{28}{9} \frac{Z^2}{m^2} \alpha^3 \int_{1/m}^{1/q_{\min}} \frac{db}{b}.$$

Сравнивая эту формулу с (42.2.5) и (42.6.6), найдем величину $\beta(\omega, b)$ в отсутствие экранирования

$$\begin{aligned} \beta(\omega, b) &= \frac{C}{b^2}, & \frac{1}{m} \leq b \leq \frac{\omega}{m^2}, \\ \beta(\omega, b) &= 0, & b > \frac{\omega}{m^2}, \end{aligned} \quad (42.6.8)$$

где

$$C = \frac{7}{9} \frac{Z^2 \alpha^3}{\pi m^2}.$$

В случае полного экранирования величина $\beta(\omega, b)$ определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} \beta(\omega, b) &= \begin{cases} \frac{C}{b^2}, & \frac{1}{m} < b < a, \quad \omega > bm^2, \\ 0, & \frac{1}{m} < b < a, \quad \omega < bm^2, \end{cases} \\ \beta(\omega, b) &= \begin{cases} 0, & b > a, \quad \omega - \text{произвольное}, \\ Cm^2b < \frac{1}{m} & \omega > m, \end{cases} \end{aligned} \quad (42.6.9)$$

где a — радиус атома.

Знание величины $\beta(\omega, b)$ как функции частоты дает возможность найти $\alpha(\omega, b)$. Действительно, $\alpha(\omega, b)$ и $\beta(\omega, b)$ при заданном значении b связаны между собой дисперсионными соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha(\omega, b) &= \frac{\omega}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\omega', b)}{\omega'(\omega' - \omega)} d\omega', \\ \beta(\omega, b) &= -\frac{\omega}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\omega', b)}{\omega'(\omega' - \omega)} d\omega'. \end{aligned} \quad (46.6.10)$$

Подставляя сюда выражения (42.6.9), получим

$$\begin{aligned} \alpha(\omega, b) &= \frac{C}{\pi b^2} \ln \frac{\omega + bm^2}{|\omega - bm^2|}, & \frac{1}{m} < b < a, \\ \alpha(\omega, b) &= 0, & b > a. \end{aligned} \quad (42.6.11)$$

Вычислим теперь $\text{Im} f(\omega, \theta)$ и $\text{Re} f(\omega, \theta)$. Вводя обозначения $t = bm$ и $x = s/m$, получим, согласно (42.6.6), (42.6.7)

$$\text{Im} f(s, \omega) = C\omega \left[\int_0^1 J_0(xt) t dt + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} J_0(xt) \right], \quad (42.6.12)$$

причем мы заменили верхний предел во втором интеграле бесконечностью, хотя в действительности он равен

$$t_{\max} = \begin{cases} \frac{\omega}{m} & \text{в отсутствие экранирования,} \\ am & \text{в случае полного экранирования} \end{cases}$$

(такая замена приводит к ошибке только для очень малых значений x , меньших $1/t_{\max}$, т. е. для углов, значительно меньших $(m/\omega)^2$ в отсутствие экранирования и значительно меньших $1/\omega a$ при полном экранировании).

Замечая, что

$$\int_0^1 t J_0(xt) dt = \frac{J_1(x)}{x}$$

и

$$\int_x^\infty \frac{du}{u} J_0(u) = \ln \frac{2}{\gamma x} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{2^8} + \frac{x^6}{2^9 \cdot 3^3} - \dots, \quad x \ll 1,$$

где $\ln \frac{2}{\gamma} = 0,116$, получим

$$\operatorname{Im} f(\omega, \theta) = C\omega \left(\ln \frac{2}{\gamma x} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{2^8 \cdot 3} + \frac{x^6}{2^{11} \cdot 3^3} - \dots \right) \equiv C\omega F_2(x). \quad (42.6.13)$$

Вещественная часть амплитуды рассеяния равна, согласно (42.6.6), (42.6.11),

$$\operatorname{Re} f(\omega, \theta) = \frac{C}{\pi} m \left[\int_0^1 J_0(xt) \ln \frac{\omega + mt}{|\omega - mt|} t dt + \int_1^\infty J_0(xt) \ln \frac{\omega + mt}{|\omega - mt|} \frac{dt}{t} \right]. \quad (42.6.14)$$

При $\omega \gg m$ мы можем логарифм в этом выражении приближенно заменить на $\frac{2tm}{\omega}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(\omega, \theta) &= \frac{Cm}{\omega} \left[\frac{2}{x} \int_0^\infty J_0(u) du + 2 \int_0^x J_0(u) \left(\frac{u^2}{x^3} - \frac{1}{x} \right) du \right] = \\ &= \frac{Cm}{\pi} \left(\frac{2}{x} - \frac{4}{3} + \frac{x^2}{3 \cdot 5} - \frac{x^4}{2^4 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right) \equiv CmF_1(x). \end{aligned} \quad (42.6.15)$$

Полное сечение рассеяния фотона равно

$$\sigma(\omega) = 2\pi \int_0^\pi |f(\omega, \theta)|^2 \sin \theta d\theta \equiv \sigma_1 + \sigma_2, \quad (42.6.16)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\pi (Cm)^2 \left(\frac{m}{\omega} \right)^2 \int_0^\infty F_1^2(x) x dx, \\ \sigma_2 &= 2\pi (Cm)^2 \int_0^\infty F_2^2(x) x dx \end{aligned} \quad (42.6.17)$$

и $x = \frac{\omega\theta}{m}$. Так как $\omega \gg m$, то часть сечения, связанная с мнимой частью амплитуды рассеяния, значительно больше части сечения, связанного с вещественной частью:

$$\sigma_2 \gg \sigma_1, \quad \omega \gg m.$$

Чтобы вычислить σ_1 и σ_2 , заметим, что

$$\int_0^\infty J_0(xt) J_0(xt') dx = \frac{1}{t} \delta(t - t').$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} F_2^2(x) x dx = \int_0^1 t dt + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^3} = 1.$$

Далее,

$$\int_0^{\infty} F_1^2(x) x dx \approx \frac{4}{\pi^2} \int_{x_1}^1 \frac{x dx}{x^2} = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{1}{x_1},$$

где x_1 — наименьшее значение x , для которого еще справедливо (42.6.12), т. е. $x_1 = 1/am$ в случае полного экранирования и $x_1 = m/\omega$ в отсутствие экранирования.

Используя эти формулы, получим

$$\sigma_2 = \frac{98}{81\pi} \frac{Z^4}{m^2} \alpha^6, \quad (42.6.18)$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{m}{\omega}\right)^2 \sigma_2 \ln \frac{\omega}{m} & \text{в отсутствие экранирования,} \\ \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{m}{\omega}\right)^2 \sigma_2 \ln am & \text{при полном экранировании.} \end{cases} \quad (42.6.19)$$

В области применимости этих формул, т. е. при $\omega \gg m$, полное сечение рассеяния почти полностью определяется поглощением фотонов, связанным с образованием пар. Эту часть сечения можно назвать *абсорбционной*, а часть сечения, связанную с вещественной частью амплитуды рассеяния, — *дисперсионной*. Отношение абсорбционной части сечения σ_2 к сечению образования пар $\sigma_p(\omega)$ равно

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_p(\omega)} = \frac{7}{18} \alpha^3 Z^2 \frac{1}{\ln \frac{\omega}{m}}. \quad (42.6.20)$$

На рис. 42.5 изображены функции $F_1^2(x)$ и $F_2^2(x)$, определяющие угловую зависимость обеих частей сечения. Для сравнения приведена также угловая зависимость дифракционного рассеяния частиц от непрозрачной сферы радиуса $r_0 = \frac{7}{m}$ (пунктирная кривая).

В качестве примера укажем, что для урана σ_2 составляет около 6 мбарн, а отношение $\sigma_2/\sigma_p(\omega)$ равно примерно $\frac{1}{8000}$.

До энергий порядка 10^{10} эв полное сечение когерентного рассеяния фотона ядрами остается меньше сечения комптоновского рассеяния. Однако дифференциальное сечение когерентного рассеяния фотонов ядрами в области малых углов может быть значительно больше дифференциального сечения комптоновского рассеяния. Действительно, абсорбционная часть сечения рассеяния, отнесенная к единичному телесному углу, определяется для урана формулой

$$\sigma_2(\theta) \approx \left(\frac{\omega}{m}\right)^2 F_2^2(x) \frac{\text{мбарн}}{\text{стерадиан}}, \quad (42.6.21)$$

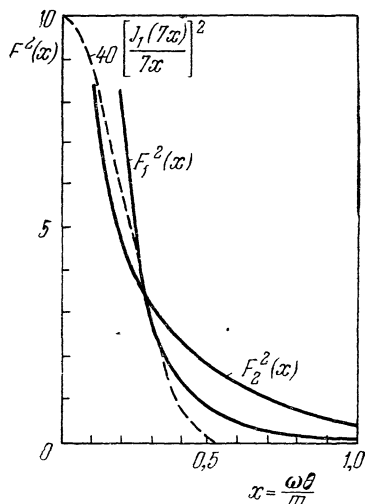


Рис. 42.5.

которая при $\omega = 300 \text{ Мэв}$, $x = 0,1$, что соответствует $\theta = 0,01^\circ$, дает $3000 \text{ барн/стерадиан}$, в то время как дифференциальное сечение комптоновского рассеяния в этих же условиях составляет всего 7 барн/стерадиан . Рэлеевское рассеяние при этом также мало, поэтому рассеяние фотонов в области больших энергий и малых углов рассеяния почти полностью является абсорбционным.

§ 43. Дважды логарифмическая асимптотика сечений рассеяния

43.1. Дважды логарифмическая асимптотика вершинной функции.

В предыдущих параграфах мы определили радиационные поправки к сечениям рассеяния различных процессов в наинизшем приближении теории возмущений. Общей особенностью этих поправок является то, что они становятся сравнимыми и могут даже превосходить сечение основного процесса в области больших энергий. Например, величина δ_R , определяющая радиационные поправки к сечению рассеяния электрона во внешнем поле, ведет себя при больших переданных импульсах q как

$$\delta_R \sim \frac{\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{q^2}{m^2}, \quad q^2 \gg m^2,$$

и достигает значения порядка единицы при

$$|q^2| \sim m^2 e^{\sqrt{\pi/\alpha}}.$$

Ясно, что при таких и больших значениях q формула (39.3.3) для δ_R теряет смысл, так как она выведена в предположении о малости радиационных поправок.

Аналогичная ситуация имеет место и для других квантовоэлектродинамических процессов.

Мы видим, таким образом, что для получения правильных выражений для сечений различных процессов в области больших значений энергии и переданного импульса необходимо учитывать радиационные поправки к сечениям не только в наинизшем, но и во всех последующих порядках теории возмущений.

Получающиеся бесконечные ряды (состоящие из регуляризованных слагаемых) мы не умеем суммировать и, строго говоря, вообще не знаем, сходятся ли они (см. в связи с этим § 24.4). Но если считать, что эти ряды являются асимптотическими рядами, описывающими соответствующие квантовоэлектродинамические величины, то в них могут быть выделены главные последовательности членов, которые могут быть просуммированы.

Если рассматривать рассеяние ультрарелятивистского электрона во внешнем поле, то главным в n -м приближении теории возмущений оказывается член вида $(\alpha \ln^2 \frac{q^2}{m^2})^n$.

Аналогичная ситуация имеет место и для других квантовоэлектродинамических процессов: всегда в области больших значений энергии и переданного импульса главным в каждом приближении теории возмущений оказывается член, в котором на каждый множитель α приходится произведение двух логарифмов от больших аргументов. Такие члены (мы будем называть их *дважды логарифмическими*) можно просуммировать и найти таким образом асимптотику сечений различных квантовоэлектродинамических процессов в области больших значений энергии и переданного импульса. Эту асимптотику называют обычно *дважды логарифмической*.

Покажем, как производится выделение дважды логарифмических членов. Рассмотрим сначала простейшую задачу этого типа — выделение дважды логарифмических членов в радиационных поправках к вершинной функции $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ в области 4-импульсов p_1, p_2 ,

$$|(p_1 - p_2)^2| \gg |p_{1,2}^2|, \quad |p_{1,2}^2| \gg m^2. \quad (43.1.1)$$

Начнем с радиационной поправки 3-го порядка

$$\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma_\nu (\vec{p}_2 - \vec{k}) \gamma_\mu (\vec{p}_1 - \vec{k}) \gamma_\nu}{((p_2 - k)^2 - i0)((p_1 - k)^2 - i0)} \frac{d^4k}{k^2 - i0}, \quad (43.1.2)$$

которой соответствует диаграмма 1 рис. 43.1. (Мы пренебрегли всюду в соответствии с неравенствами $|p_{1,2}^2| \gg m^2$ величиной m^2 .)

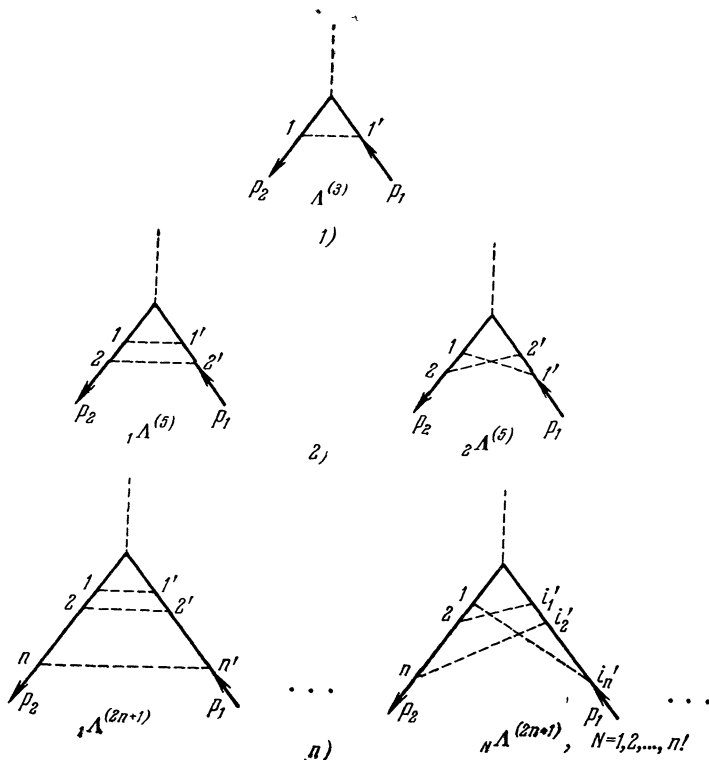


Рис. 43.1.

Для нахождения асимптотики функции $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ в области (43.1.1) удобно перейти от k_μ к новым переменным интегрирования [33] $u, v, (k_\perp)_\mu$, связанным с k_μ соотношениями

$$k_\mu = u(p_1 - \alpha_1 p_2)_\mu + v(p_2 - \alpha_2 p_1)_\mu + (k_\perp)_\mu, \quad (43.1.3)$$

где k_\perp — 4-вектор, ортогональный к p_1 и p_2 ,

$$k_\perp p_1 = k_\perp p_2 = 0,$$

и α_1 и α_2 — параметры, определяемые из условий

$$(p - \alpha_1 p_2)^2 = (p_2 - \alpha_2 p_1)^2 = 0,$$

откуда, согласно (43.1.1), следует:

$$\alpha_1 = \frac{p_1^2}{2p_1 p_2}, \quad \alpha_2 = \frac{p_2^2}{2p_1 p_2}.$$

Легко видеть, что 4-вектор k_{\perp} является пространственно-подобным, $k_{\perp}^2 > 0$.

Для этого достаточно убедиться, что в плоскости (p_1, p_2) имеется по крайней мере один времениподобный вектор. В этом случае любой вектор, ортогональный ему, будет пространственноподобным. Пусть для определенности p_1 является пространственноподобным вектором (в противном случае наше утверждение было бы доказано). Тогда времениподобной будет составляющая $p_{2\perp}$ вектора p_2 , перпендикулярная к p_1 ,

$$p_{2\perp} = p_2 - \frac{(p_2 p_1)}{p_1^2} p_1.$$

Действительно,

$$p_{2\perp}^2 = p_2^2 - \frac{(p_1 p_2)^2}{p_1^2},$$

а в силу (43.1.1) эта величина отрицательна.

Определим в новых переменных элемент объема в k -пространстве. Очевидно, элемент площади в плоскости (p_1, p_2) равен $p_1 p_2 du dv$, а элемент площади в плоскости, перпендикулярной векторам p_1 и p_2 , равен $\frac{1}{2} d\varphi dk_{\perp}^2$, где φ — полярный угол, изменяющийся от 0 до 2π . Поэтому элемент объема в k -пространстве, проинтегрированный по углу φ , будет равен

$$d^4 k = 2\pi (p_1 p_2)^2 \operatorname{sgn}(-p_1 p_2) du dv dz, \quad (43.1.4)$$

где $z = -k_{\perp}^2 / 2p_1 p_2$.

Наконец, выразим в новых переменных множители, входящие в знаменатель подынтегрального выражения для $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$:

$$\begin{aligned} k^2 &= 2p_1 p_2 (uv - z), \\ (p_1 - k)^2 &= 2p_1 p_2 [(v - \alpha_1)(u - 1) - z], \\ (p_2 - k)^2 &= 2p_1 p_2 [(u - \alpha_2)(v - 1) - z]. \end{aligned} \quad (43.1.5)$$

Величины u и v изменяются в пределах $(-\infty, \infty)$, а величина z — в пределах $(0, \infty)$ или $(-\infty, 0)$ в зависимости от того, отрицательна или положительна величина $p_1 p_2$.

Из (43.1.5) и (43.1.4) следует, что главный вклад в интеграл (43.1.2) вносит область интегрирования, непосредственно примыкающая к точке

$$v = \alpha_1, \quad u = \alpha_2, \quad z = uv. \quad (43.1.6)$$

Так как $|\alpha_1| \ll 1$, $|\alpha_2| \ll 1$, то существенными являются малые k_{μ} , $|k_{\mu}| \ll |(p_{1,2})_{\mu}|$; поэтому в числителе подынтегрального выражения (43.1.1) можно пренебречь членами, содержащими k_{μ} .

Учитывая далее, что $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ находится в окружении функций $S_c(p_1)$ и $S_c(p_2)$, ведущих себя при $|p_{1,2}^2| \gg m^2$ как

$$S_c(p_{1,2}) \approx i \frac{\hat{p}_{1,2}}{p_{1,2}^2},$$

легко убедиться, что числитель подынтегрального выражения (43.1.2) можно заменить на $4p_1 p_2 \gamma_{\mu}$. Действительно, в числителе выражения для

$S_c(p_1) \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) S_c(p_2)$ будет входить величина $\hat{p}_2 \gamma_\nu \hat{p}_2 \gamma_\mu \hat{p}_1 \gamma_\nu \hat{p}_1$, равная, очевидно,

$$\hat{p}_2 \gamma_\nu \hat{p}_2 \gamma_\mu \hat{p}_1 \gamma_\nu \hat{p}_1 = \hat{p}_2 (-\hat{p}_2 \gamma_\nu + 2p_{2\nu}) \gamma_\mu (-\gamma_\nu \hat{p}_1 + 2p_{1\nu}) \hat{p}_1,$$

а так как $|p_{1,2}^2| \ll |(p_1 p_2)|$, то здесь можно пренебречь первыми двумя слагаемыми в скобках, т. е. для числителя (43.1.2) мы получим выражение $4p_1 p_2 \gamma_\mu$.

Итак, в интересующем нас случае (43.1.1) величину $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ можно представить в виде

$$\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) = -\gamma_\mu \frac{ie^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{du dv dz}{(v - \alpha_1 - i0)(u - \alpha_2 - i0)(uv - z + i0)}. \quad (43.1.7)$$

Точные значения пределов здесь несущественны, и мы можем их взять равными -1 и $+1$ при интегрировании по u и v и равными 0 и $+1$ при интегрировании по z .

Выполним сначала интегрирование по z . Используя формулу

$$\frac{1}{x - i0} = \pi i \delta(x) + P \frac{1}{x}, \quad (43.1.8)$$

имеем

$$\int_0^1 \frac{dz}{uv - z + i0} = -i\pi\theta(uv) + \ln|uv|, \quad (43.1.9)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Подставляя далее это выражение в (43.1.7) и опуская член с логарифмом, получим

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2) &= -\frac{\alpha}{2\pi} \gamma_\mu \int_0^1 \frac{du}{u - \alpha_2} \int_0^1 \frac{dv}{v - \alpha_1} = \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi} \gamma_\mu \ln \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{\alpha_2} = -\frac{\alpha}{2\pi} \gamma_\mu \ln \frac{2p_1 p_2}{p_1^2} \ln \frac{2p_1 p_2}{p_2^2}. \end{aligned} \quad (43.1.10)$$

Таким образом, мы видим, что при $|(p_1 - p_2)^2| \gg p_{1,2}^2 \gg m^2$ вершинная функция $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ содержит дважды логарифмическое слагаемое, пропорциональное произведению α и двух больших логарифмов. Это слагаемое, являющееся главным членом в $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$, возникает, как мы видим, при интегрировании по двум переменным u и v . Логарифмическое же слагаемое, возникающее при интегрировании по третьей переменной z , не вносит вклада в главный член, который связан только с мнимой частью интеграла по z .

Прежде чем переходить к вычислению следующих радиационных поправок к вершинной функции, убедимся, что если $|p_{1,2}^2| \gg m^2$, а $|(p_1 - p_2)^2|$ невелико по сравнению с $|p_{1,2}^2|$, то радиационная поправка к вершинной функции не будет содержать дважды логарифмических членов. Рассмотрим, например, $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2)$ в предположении, что

$$|p_1^2| \gg |(p_1 - p_2)^2|, \quad |p_1^2| \gg |p_2^2|, \quad |(p_1 - p_2)^2| \gg m^2, \quad |p_2^2| \gg m^2.$$

В этом случае, в отличие от случая (43.1.1), в знаменателе подынтегрального выражения (43.1.2) будет входить 4-вектор p_1 с большим квадратом,

благодаря чему непосредственно нельзя использовать примененную нами только что методику вычисления интеграла (43.1.2). Однако можно добиться того, чтобы в знаменатель входили векторы с малым квадратом, если предварительно произвести замену переменных интегрирования

$$k \rightarrow k' = p_2 - k,$$

после которой интеграл (43.1.2) примет вид

$$\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = \frac{\alpha}{\pi i} \int \frac{\gamma_v (\hat{q} + \hat{k}') \gamma_{\mu} \hat{k}' \gamma_v}{[(q + k')^2 - i0][(p_2 - k')^2 - i0]} \frac{d^4 k'}{(k'^2 - i0)}, \quad (43.1.11)$$

где $q = p_1 - p_2$. Применяя теперь преобразование (43.1.3) с вектором $-q$ вместо вектора p_1 ,

$$k' = u(-q - \alpha_1 p_2) + v(p_2 + \alpha_1 q) + k'_{\perp},$$

легко убедиться, что главный вклад в интеграл (43.1.11) вносит область интегрирования $|k'^2| \ll |qp_2|$, в которой интеграл (43.1.11) принимает вид

$$\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = -\frac{\alpha}{8\pi p_2 q} \int_{\left|\frac{p_2^2}{qp_2}\right|}^1 \frac{du}{u} \int_{\left|\frac{q^2}{qp_1}\right|}^1 \frac{dv}{v} \gamma_v [\hat{q}(1-u) + \hat{p}_2 v] \gamma_{\mu} [-\hat{q}u + \hat{p}_2 v] \gamma_v. \quad (43.1.12)$$

В этом выражении, в отличие от выражения для $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ в случае (43.1.1), нельзя пренебрегать в числителе под знаком интеграла членами, содержащими u и v , так как они умножаются на малые величины p_2 и q . Благодаря этому интеграл (43.1.12) не будет содержать дважды логарифмических членов.

Легко убедиться, что регуляризованное значение $\Lambda_{\mu}^{(3)}(p_1, p_2)$ в рассматриваемом случае равно

$$\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_1, p_2) = -\frac{\alpha}{8\pi p_2 q} \left[\hat{q} \gamma_{\mu} \hat{q} \ln \frac{p_2 q}{q^2} - 2\hat{p}_2 \gamma_{\mu} \hat{q} \ln \frac{p_2 q}{p_2^2} - \hat{p}_2 \gamma_{\mu} \hat{p}_2 \ln \frac{p_2 q}{p_2^2} \right]. \quad (43.1.13)$$

Это выражение содержит, как мы видим, только однологарифмические члены.

Таким образом, действительно, вершинная функция при $|p_{1,2}^2| \gg m^2$ будет содержать дважды логарифмические члены только в том случае, если

$$|(p_1 - p_2)^2| \gg |p_{1,2}^2| \gg m^2.$$

Далее мы увидим, что дважды логарифмические члены возникают и при $|p_{1,2}^2| \approx m^2$, если выполняется условие $|(p_1 - p_2)^2| \gg m^2$. Этот случай будет играть особенно важную роль в дальнейшем, так как именно он соответствует рассеянию с большим переданным импульсом.

Вернемся теперь к определению следующих радиационных поправок к вершинной функции в случае (43.1.1). Выясним прежде всего, какие диаграммы приводят к дважды логарифмическим членам.

Легко видеть, что замкнутые электронные линии не приводят к дважды логарифмическим членам: для таких диаграмм степени больших логарифмов оказываются всегда меньшими, чем степень квадрата заряда. Рассмотрим, например, диаграмму 1 рис. 43.2. Внутренней электронной петле соответствует, согласно (36.3.5), функция

$$\Pi_R^{(2)}(k) = \frac{i\alpha}{4\pi} k^2 \int_0^1 dz (1-z^2) \left\{ \ln \left| 1 + \frac{k^2}{4m^2} (1-z^2) \right| - i\pi\theta[-k^2(1-z^2) - 4m^2] \right\}.$$

откуда с логарифмической точностью

$$\Pi_R^{(2)}(k) = \frac{i\alpha}{3\pi} k^2 \left\{ \ln \left| 1 + \frac{k^2}{4m^2} \right| - i\pi\theta(-k^2 - 4m^2) \right\}.$$

Поэтому всей диаграмме 1 в целом будет соответствовать величина

$$\Lambda_\mu^{(5)}(p_1, p_2) = -\frac{ie^4}{3(2\pi)^6} \int \frac{\gamma_\nu (\hat{p}_2 - \hat{k}) \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\nu}{[(p_2 - k)^2 - i0][p_1 - k)^2 - i0]} \times \\ \times \frac{1}{k^2} \left\{ \ln \left| 1 + \frac{k^2}{4m^2} \right| - i\pi\theta(-k^2 - 4m^2) \right\} d^4k.$$

Переходя к переменным u, v, z , согласно (43.1.3), и делая необходимые пренебрежения, получим

$$\Lambda_\mu^{(5)}(p_1, p_2) = -\frac{\alpha^2}{12\pi^2} \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\theta(uv - z - \gamma) du dv}{[(v - \alpha_1)(u - 1) - z][(u - \alpha_2)(v - 1) - z](uv - z)} = \\ = -\frac{\alpha^2}{12\pi^2} \gamma_\mu \int_{-1}^1 \frac{du}{u - \alpha_2} \int_{-1}^1 \frac{dv}{v - \alpha_1} \int_0^\infty \frac{\theta(uv - z - \gamma)}{uv - z} dz = \\ = -\frac{\alpha^2}{12\pi^2} \gamma_\mu \int_{-1}^1 \frac{du}{u - \alpha_2} \int_{-1}^1 \frac{dv}{v - \alpha_1} \theta(uv - \gamma) \ln \frac{uv}{\gamma} = -\frac{\alpha^2}{12\pi^2} \gamma_\mu \ln \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma^2} \ln \alpha_1 \ln \alpha_2, \quad (43.1.14)$$

где $\gamma = 2m^2/p_1 p_2$. Мы видим, как и утверждалось выше, что эта величина

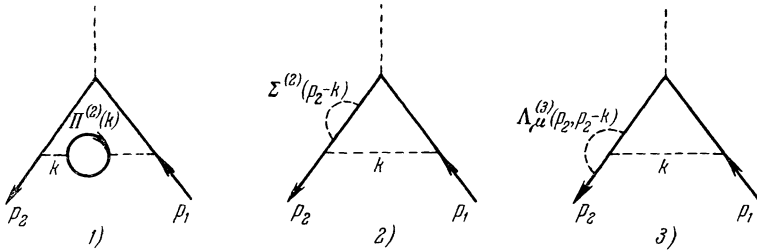


Рис. 43.2.

содержит большой логарифм в третьей степени, а заряд — в четвертой.

Таким образом, мы должны рассматривать только диаграммы с внутренними фотонными линиями. Однако и они не все будут приводить к дважды логарифмическим членам. Легко видеть, что только те из диаграмм, в которых все линии виртуальных фотонов охватывают точку испускания внешнего фотона, приводят к дважды логарифмическим членам. Рассмотрим, например, диаграммы 2 и 3 на рис. 43.2. Используя вытекающую из (36.2.12) формулу для массового оператора $\Sigma_R^{(2)}$

$$\Sigma_R^{(2)}(p_2 - k) = -\frac{e^2}{16\pi^2} \left[\ln \frac{(p_2 - k)^2}{m^2} - 2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right] (\hat{p}_2 - \hat{k}),$$

справедливую при $|(p_2 - k)^2| \gg m^2$, и аналогичную формулу для вершинной функции $\Lambda_{R\mu}^{(3)}$ [26]

$$\Lambda_{R\mu}^{(3)}(p_2, p_2 - k) = \gamma_\mu \frac{e^2}{16\pi^2} \left[\ln \frac{(p_2 - k)^2}{m^2} - 2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right],$$

справедливую при $|\rho_2^2| \sim |(p_2 - k)^2| \gg m^2$, получим следующие выражения для величин, соответствующих диаграммам 2 и 3:

$$\begin{aligned}
 {}_2\Lambda_\mu^{(5)}(p_1, p_2) &= -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma_\nu \Sigma_R^{(2)}(p_2 - k) \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\nu}{[(p_2 - k)^2 - i0] [(p_1 - k)^2 - i0] (k^2 - i0)} d^4k, \\
 {}_3\Lambda_\mu^{(5)}(p_1, p_2) &= -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma_\nu (\hat{p}_2 - \hat{k}) \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}) \Lambda_R^{(3)}(p_2, p_2 - k)}{[(p_2 - k)^2 - i0] [(p_1 - k)^2 - i0] (k^2 - i0)} d^4k.
 \end{aligned}$$

Поступая так же, как и при выводе формулы (43.1.14), получим

$$\begin{aligned}
 {}_2\Lambda_\mu^{(5)}(p_1, p_2) &= \frac{\alpha^2}{8\pi^2} \gamma_\mu \left[\left(\ln \frac{2p_1 p_2}{m^2} + 2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right) \ln \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{2} \ln^2 \alpha_1 \ln \alpha_2 \right], \\
 {}_3\Lambda_\mu^{(5)}(p_1, p_2) &= -{}_2\Lambda_\mu^{(5)}(p_1, p_2).
 \end{aligned} \tag{43.1.15}$$

Эти величины, как мы видим, не содержат дважды логарифмических членов.

Перейдем теперь к рассмотрению диаграмм, содержащих только внутренние фотонные линии, охватывающие точку испускания внешнего фотона.

В $(2n + 1)$ -м приближении содержится, очевидно, $n!$ таких диаграмм, которые отличаются друг от друга только перестановкой концов виртуальных фотонных линий (см. диаграммы рис. 43.1). Вклад, вносимый этими диаграммами в вершинную функцию, будет равен, очевидно,

$$\begin{aligned}
 \Lambda_\mu^{(2n+1)}(p_1, p_2) &= \\
 &= \left(\frac{\alpha}{\pi i} \right)^n \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sum_P \int \frac{\gamma_{\lambda_1} (\hat{p}_1 - \hat{k}_1) \gamma_{\lambda_2} (\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - \hat{k}_2) \dots \gamma_{\lambda_n} (\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - \dots - \hat{k}_n)}{[(p_1 - k_1)^2 - i0] [(p_1 - k_1 - k_2)^2 - i0] \dots [(p_1 - k_1 - \dots - k_n)^2 - i0]} \times \\
 &\times \frac{\gamma_\mu (\hat{p}_2 - \hat{k}_{i_1} - \dots - \hat{k}_{i_n}) \gamma_{\lambda_{i_n}} (\hat{p}_2 - \hat{k}_{i_1} - \dots - \hat{k}_{i_{n-1}}) \gamma_{\lambda_{i_{n-1}}} \dots (\hat{p}_2 - \hat{k}_{i_1}) \gamma_{\lambda_1}}{[(p_2 - k_{i_1} - \dots - k_{i_n})^2 - i0] [(p_2 - k_{i_1} - \dots - k_{i_{n-1}})^2 - i0] \dots [(p_2 - k_{i_1})^2 - i0]} \times \\
 &\times \frac{d^4k_1 \dots d^4k_n}{(k_1^2 - i0) (k_2^2 - i0) \dots (k_n^2 - i0)}, \tag{43.1.16}
 \end{aligned}$$

где \sum_P обозначает суммирование по всем перестановкам $P = \left(i_1, i_2, \dots, i_n \right)$.

(Если $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots$, то фотонные линии не пересекаются; диаграмма в этом случае называется *лестничной*).

Предполагая выполненными условия (43.1.1), можно в числителе подынтегрального выражения (43.1.16) пренебречь величинами k_i по сравнению с p_1 и p_2 и заменить числитель на $(4p_1 p_2)^n \gamma_\mu$:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_\mu^{(2n+1)}(p_1, p_2) &= \left(\frac{\alpha}{\pi i} \right)^n \frac{1}{(2\pi)^{2n}} (4p_1 p_2)^n \gamma_\mu \sum_P \int \prod_{s=1}^n \frac{d^4k_s}{k_s^2 - i0} \times \\
 &\times \left\{ \left[(p_1 - k_1)^2 - i0 \right] \left[(p_1 - k_1 - k_2)^2 - i0 \right] \dots \left[\left(p_1 - \sum_{j=1}^n k_j \right)^2 - i0 \right] \times \right. \\
 &\times \left. \left[(p_2 - k_{i_1})^2 - i0 \right] \left[(p_2 - k_{i_1} - k_{i_2})^2 - i0 \right] \dots \left[\left(p_2 - \sum_{j=1}^n k_{i_j} \right)^2 - i0 \right] \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Для вычисления этого интеграла перейдем вместо k_i , к новым переменным интегрирования $u_i, v_i, k_{i\perp}$, согласно (43.1.3):

$$k_i = u_i (p_1 - \alpha_1 p_2) + v_i (p_2 - \alpha_2 p_1) + k_{i\perp}.$$

Вспоминая, что при интегрировании по $z_i = -k_{i\perp}^2 / 2p_1 p_2$ должна быть взята в соответствии с (43.1.8) только мнимая часть интеграла, мы получим

следующее выражение для $\Lambda_\mu^{(2n+1)}(p_1, p_2)$:

$$\Lambda_\mu^{(2n+1)}(p_1, p_2) = \left(-\frac{\alpha}{4\pi}\right)^n \gamma_\mu \sum_P \int \frac{dv_1}{v_1 - \alpha_1} \frac{dv_2}{v_1 + v_2 - \alpha_1} \cdots \frac{dv_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n - \alpha_1} \times \\ \times \frac{du_{i_n}}{u_{i_1} + \dots + u_{i_n} - \alpha_2} \frac{du_{i_{n-1}}}{u_{i_1} + \dots + u_{i_{n-1}} - \alpha_2} \cdots \frac{du_{i_1}}{u_{i_1} - \alpha_2} \theta(u_1 v_1) \dots \theta(u_n v_2).$$

Главный вклад во входящие сюда интегралы вносит область интегрирования

$$\left| \frac{p_1^2}{p_1 p_2} \right| \ll |v_1| \ll |v_2| \ll \dots \ll |v_n| \ll 1, \\ \left| \frac{p_2^2}{p_1 p_2} \right| \ll |u_1| \ll |u_2| \ll \dots \ll |u_n| \ll 1.$$

Каждый из интегралов равен, как легко видеть,

$$J = \frac{2^n}{(n!)^2} \ln^n \frac{p_1 p_2}{p_1^2} \ln^n \frac{p_1 p_2}{p_2^2}.$$

Поэтому для $\Lambda_\mu^{(2n+1)}(p_1, p_2)$ мы получим выражение

$$\Lambda_\mu^{(2n+1)}(p_1, p_2) = \left(-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \gamma_\mu \frac{1}{n!} \ln^n \alpha_1 \ln^n \alpha_2. \quad (43.1.17)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что все диаграммы, отличающиеся лишь перестановкой концов виртуальных фотонных линий, вносят одинаковый вклад в $\Lambda_\mu^{(2n+1)}(p_1, p_2)$.

Суммируя выражение (43.1.17) по n , найдем вершинную функцию $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ в случае $|(p_1 - p_2)^2| \gg |p_{1,2}^2| \gg m^2$:

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2) = \gamma_\mu \exp\left(-\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{p_1 p_2}{p_1^2} \ln \frac{p_1 p_2}{p_2^2}\right). \quad (43.1.18)$$

Эта важная формула [33] справедлива при выполнении следующих условий:

$$\ln \frac{q^2}{m^2} \gg 1, \quad \alpha \ln \frac{q^2}{m^2} \ll 1, \quad \alpha \ln^2 \frac{q^2}{m^2} \gg 1, \quad (43.1.19)$$

где $q = p_1 - p_2$.

43.2. Дважды логарифмическая асимптотика сечения рассеяния электрона во внешнем поле. Перейдем теперь к определению сечения рассеяния электрона во внешнем поле в случае большого переданного импульса q :

$$|q^2| \gg m^2.$$

Сечение в этом случае будет определяться в основном вершинной функцией $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ при $|(p_1 - p_2)^2| \gg m^2$, где p_1 и p_2 — 4-импульсы электрона в начальном и конечном состояниях, $p_1^2 = p_2^2 = -m^2$. Поэтому существенными, как следует из результатов предыдущего раздела, будут диаграммы с внутренними фотонными линиями, охватывающими «точку приложения» внешнего поля (такие диаграммы изображены на рис. 43.1).

Покажем, как производится выделение дважды логарифмических членов в матричных элементах, соответствующих этим диаграммам.

Рассмотрим прежде всего матричный элемент, соответствующий диаграмме 1:

$$M_1 = \frac{ie^3}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\epsilon_2}} \int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \hat{A}^{(e)}(q) \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{d^4 k}{k^2} \frac{u_1}{\sqrt{2\epsilon_1}}. \quad (43.2.1)$$

(Мы пользуемся обозначениями § 39.1.)

Так как внешние электронные линии соответствуют свободному электрону, т. е. $p_1^2 = p_2^2 = -m^2$, то написанный интеграл будет расходиться в области малых импульсов виртуального фотона. Чтобы избежать этой расходимости, можно, как мы видели в § 39.3, ввести конечную массу фотона λ ; но можно поступить и иначе, а именно, вначале считать, что величины

$$\delta_1 = \frac{p_1^2 + m^2}{2p_1 p_2}, \quad \delta_2 = \frac{p_2^2 + m^2}{2p_1 p_2}$$

отличны от нуля, и только после учета процессов излучения электроном реальных мягких фотонов положить $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Такой метод устранения инфракрасной расходимости позволяет воспользоваться методикой нахождения дважды логарифмической асимптотики, развитой в § 43.1.

Пренебрегая в числителе подынтегрального выражения (43.2.1) величиной k по сравнению с p_1 и p_2 и переходя от k к новым переменным интегрирования u, v, k_{\perp} :

$$k = u(p_1 - \gamma p_2) + v(p_2 - \gamma p_1) + k_{\perp}, \quad k_{\perp} p_1 = k_{\perp} p_2 = 0,$$

где

$$\gamma = \frac{m^2}{2p_1 p_2},$$

представим M_1 в виде

$$M_1 = J M_0, \quad (43.2.2)$$

где M_0 — матричный элемент, определяющий рассеяние электрона в основном приближении:

$$M_0 = e \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2\varepsilon_2}} \hat{A}^{(e)}(q) \frac{u_1}{\sqrt{2\varepsilon_1}} \quad (43.2.3)$$

и

$$J = -\frac{i\alpha}{(2\pi)^2} \int \frac{du dv dz}{(u - \gamma v - \delta_2 - i0)(v - \gamma u - \delta_1 - i0)(uv - z - i0)}$$

(переменная z связана с k_{\perp} соотношением $z = -\frac{k_{\perp}^2}{2p_1 p_2}$).

В знаменателе подынтегрального выражения для J мы сохранили, в отличие от аналогичного выражения для $\Lambda_{\mu}^{(2n+1)}(p_1, p_2)$, члены, пропорциональные γ , так как величины δ_1 и δ_2 , введенные нами для устранения инфракрасной расходимости, предполагаются очень малыми, именно, мы считаем, что

$$\gamma \gg \delta_{1,2}.$$

В интеграле по z основной вклад дает в соответствии с результатами § 43.1 полувычет в точке $z = uv$. Остающиеся после интегрирования по z интегралы по u и v берутся в смысле главного значения:

$$J = -\frac{\alpha}{4\pi} \text{P} \int_{-1}^1 du \text{P} \int_{-1}^1 dv \frac{\theta(uv)}{(u - \gamma u - \delta)(v - \gamma u - \delta)} \quad (43.2.4)$$

(мы считаем здесь для простоты, что $\delta_1 = \delta_2 = \delta$).

Выполнив интегрирование по одной из переменных, можно выразить J через функцию Спенса $F(x)$:

$$J = -\frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \ln^2 \delta + 2 \ln \delta \ln \gamma + F\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) + F\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) - \right. \\ \left. - 2F\left(\frac{1}{\gamma}\right) - F\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right) - F\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) + 2F(-\gamma) \right\}, \quad (43.2.5)$$

где

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln|1-u|}{u} du.$$

Замечая, что при $x \gg 1$

$$F(x) \sim \frac{1}{2} \ln^2 x,$$

получим в интересующем нас случае $\gamma \gg \delta_1^1$

$$J = -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \gamma \ln \frac{\delta^2}{\gamma}. \quad (43.2.6)$$

Если $\delta \gg \gamma$, то

$$J = -\frac{\alpha}{2\pi} \ln^2 \delta,$$

и мы приходим к результату (43.1.10).

Повторяя далее выкладки предыдущего раздела, легко показать, что каждой из диаграмм $2n + 1$ -го приближения соответствует матричный элемент

$$M_{2n+1}^{(p)} = M_0 \frac{J^n}{(n!)^2}.$$

Поэтому матричный элемент $2n + 1$ -го приближения равен

$$M_{2n+1} = \sum_P M_{2n+1}^{(p)} = M_0 \frac{J^n}{n!}$$

и, следовательно, суммарный матричный элемент процесса рассеяния электрона во внешнем поле равен

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1} = M_0 e^J = M_0 \exp \left(-\frac{\alpha}{2\pi} \ln \gamma \ln \frac{\delta^2}{\gamma} \right). \quad (43.2.7)$$

Отсюда следует, что дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона во внешнем поле с учетом радиационных поправок в дважды логарифмическом приближении определяется формулой [35]

$$d\sigma_R = d\sigma_0 \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\pi} \ln \gamma \ln \frac{\delta^2}{\gamma} \right\}, \quad (43.2.8)$$

где $d\sigma_0$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона в первом приближении теории возмущений.

Мы должны теперь устранить в сечении рассеяния инфракрасную расходимость. Для этого нужно прибавить к $d\sigma_R$ сечение $d\sigma'$ рассеяния электрона с излучением мягких фотонов. Этому процессу соответствуют диаграммы с волнистыми фотонными линиями, исходящими из внешних электронных линий (см. § 39.4). Простейшие диаграммы такого типа, соответствующие излучению одного мягкого фотона, изображены на рис. 39.5, 4 (заштрихованный блок изображает основной процесс рассеяния и радиационные поправки к нему).

Матричный элемент, определяющий излучение одного мягкого фотона с 4-импульсом k и поляризацией e можно представить, согласно результатам § 39.4, в виде

$$M_k^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \left(\frac{2p_{2\mu}e_{\mu}}{2p_2k + p_2^2 + m^2} - \frac{2p_{1\mu}e_{\mu}}{2p_1k - p_1^2 - m^2} \right) M_0, \quad (43.2.9)$$

где M_0 определяется формулой (43.2.3), и, в соответствии с используемым нами в этом разделе методом описания инфракрасной расходимости, мы сохранили в знаменателях слагаемые $p_{1,2}^2 + m^2$

Просуммировав квадрат модуля $M_k^{(1)}$ по поляризациям фотона e и проинтегрировав по энергии фотона ω в пределах от $\omega = 0$ до $\omega = \Delta\varepsilon$, найдем дифференциальное сечение рассеяния электрона во внешнем поле с потерей энергии, не превосходящей $\Delta\varepsilon$:

$$d\sigma^{(1)} = d\sigma_R J_k, \quad (43.2.10)$$

где

$$J_k = \frac{4e^2}{(2\pi)^3} p_1 p_2 \int_{\omega \leq \Delta\varepsilon} \frac{d^3 k}{\omega} \frac{1}{(2p_2 k + p_2^2 + m^2)(2p_1 k - p_1^2 - m^2)} = \\ = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \ln \gamma \ln \frac{\delta^2}{\gamma} - 2 \ln \gamma \ln \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\},$$

ε — энергия электрона ($\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$) и $d\sigma_R$ определяется формулой (43.2.8).

Аналогичным образом можно получить сечение рассеяния электрона с излучением r мягких фотонов с суммарной энергией, не превосходящей $\Delta\varepsilon$:

$$d\sigma^{(r)} = d\sigma_R \int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int_0^{\Delta\varepsilon - \omega_1} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \cdots \int_0^{\Delta\varepsilon - \omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{r-1}} \frac{d^3 k_r}{(2\pi)^3} \times \\ \times \frac{1}{r!} \prod_{i=1}^r \frac{-4e^2 p_1 p_2}{\omega_i} \frac{1}{(2p_2 k_i + p_2^2 + m^2)(2p_1 k_i - p_1^2 - m^2)} \quad (43.2.11)$$

($r!$ входит сюда из-за неразличимости фотонов).

В интересующем нас случае дважды логарифмической асимптотики сечения рассеяния можно в этом выражении все верхние пределы интегралов считать равными $\Delta\varepsilon$. Поэтому

$$d\sigma^{(r)} = d\sigma_R \frac{J_k^r}{r!}.$$

Суммируя это выражение по r , найдем дифференциальное сечение рассеяния электрона во внешнем поле с потерей энергии, не превосходящей $\Delta\varepsilon$, в дважды логарифмическом приближении

$$d\sigma = d\sigma_0 \exp \left\{ -\frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{m^2}{q^2} \ln \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\}, \quad (43.2.12)$$

где $d\sigma_0$ — сечение упругого рассеяния, и $q^2 = (p_1 - p_2)^2 = 4\varepsilon^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ (θ — угол рассеяния). Эта важная формула справедлива при выполнении условий

$$\alpha \ln \frac{q^2}{m^2} \ll 1, \quad \alpha \ln^2 \frac{q^2}{m^2} \sim 1, \quad \Delta\varepsilon \ll \varepsilon.$$

Заметим, что формула (43.2.12) находится в соответствии с общей формулой (39.4.8), определяющей структуру сечения рассеяния с излучением мягких фотонов. Мы видим, что в дважды логарифмическом приближении величина $d\sigma_0$, входящая в формулу (43.2.12), совпадает с сечением рассеяния в первом приближении теории возмущений.

43.3. Сводка формул для сечений квантовоэлектродинамических процессов в дважды логарифмическом приближении. Развита в § 43.1 методика выделения дважды логарифмических членов в радиационных поправках к вершинной функции, которую мы использовали в предыдущем разделе для нахождения дважды логарифмической асимптотики сечения рассеяния электрона во внешнем поле, может быть применена также для нахождения дважды логарифмической асимптотики сечений и других квантовоэлектродинамических процессов [35]. Мы не будем приводить подробные вычисления, отметим лишь, что основными процессами, которые необходимо учитывать, являются взаимодействие электронов (и других заряженных частиц) с виртуальными мягкими фотонами и излучение частицами мягких фотонов. При этом вклады, вносимые диаграммами с различным образом расположенными внутренними фотонными линиями (при одинаковом общем их числе), могут быть различными, в отличие от случая рассеяния электрона во внешнем поле, когда все эти вклады одинаковы. Важным оказывается также характер излучения реальных мягких фотонов. Если ограничиться рассмотрением (что далее и делается) процессов с участием не более двух заряженных частиц как в начальном, так и в конечном состояниях, то дважды логарифмическая асимптотика сечений оказывается существенно зависящей от значений величин

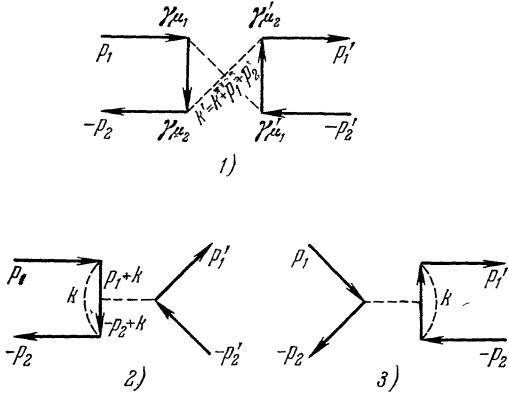


Рис. 43.3.

могут быть различными, в отличие от случая рассеяния электрона во внешнем поле, когда все эти вклады одинаковы. Важным оказывается также характер излучения реальных мягких фотонов. Если ограничиться рассмотрением (что далее и делается) процессов с участием не более двух заряженных частиц как в начальном, так и в конечном состояниях, то дважды логарифмическая асимптотика сечений оказывается существенно зависящей от значений величин

$$|k_{s\perp}^2| = \frac{(p_1 k)(p_2 k)}{sm^2}, \quad |k_{t\perp}^2| = \frac{(p_1 k)(p_1' k)}{|t|m^2}, \quad |k_{u\perp}^2| = \frac{(p_1 k)(p_2' k)}{|u|m^2},$$

где p_1, p_2 — 4-импульсы заряженных частиц в начальном состоянии, p_1', p_2' — аналогичные величины в конечном состоянии, k — 4-импульс мягкого фотона и

$$s = -\frac{(p_1 + p_2)^2}{m^2}, \quad t = -\frac{(p_1 - p_1')^2}{m^2}, \quad u = -\frac{(p_1 - p_2')^2}{m^2}.$$

Покажем, например, что дважды логарифмическая асимптотика сечения процесса превращения электронно-позитронной пары в мюонную пару ($e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$) при малом переданном импульсе, $(p_1 - p_1')^2 = (-p_2 + p_2')^2 = O(m^2)$, $s \gg 1$ (p_1, p_2 — 4-импульсы электрона и позитрона, p_1', p_2' — 4-импульсы мюонов), определяется только диаграммами лестничного типа.

Рассмотрим с этой целью простейшие нелестничные диаграммы 4-го порядка (рис. 43.3) и убедимся, что они не вносят вклада в сечение процесса $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ в дважды логарифмическом приближении.

Диаграмме 1 рис. 43.3 соответствует величина

$$J^{(1)} \sim \int \frac{d^4k}{k^2} \frac{\gamma_{\mu_2}(\hat{p}_1 + \hat{k})\gamma_{\mu_1} \times \gamma'_{\mu_2}(-\hat{p}_2 - \hat{k})\gamma'_{\mu_1}}{[(p_1 + k)^2 + m^2][(p_2 + k)^2 + m^2](p_1 + p_2 + k)^2}, \quad (43.3.1)$$

где γ_μ — дираковские матрицы, действующие на электронно-позитронные биспиноры $u_- \equiv u(p_1)$, $u_+ \equiv u(-p_2)$ и γ'_μ — аналогичные матрицы, действующие на мюонные биспиноры $u'_- \equiv u'(p_1)$, $u'_+ \equiv u'(-p'_2)$ (в формуле (43.3.1) опущены биспиноры и учтено, что $-p'_2 - k \approx -p_2 - k$).

Для дважды логарифмической асимптотики существенны малые 4-импульсы виртуальных фотонов, поэтому мы должны в интеграле (43.3.1) рассмотреть две области интегрирования: область малых k и область малых $k' = p_1 + p_2 + k$. Вклад в интеграл (43.3.1) от первой из этих областей равен

$$J_k^{(1)} \sim \frac{(\gamma_{\mu_2} \hat{p}_1 \gamma_{\mu_1}) \times \gamma'_{\mu_2}(-p_2) \gamma'_{\mu_1}}{(p_1 + p_2)^2} \int_{\Omega_k} \frac{d^4k}{k^2} \frac{1}{2p_1 k 2p_2 k},$$

а так как

$$\gamma_{\mu_2} \hat{p}_1 \gamma_{\mu_1} = 2p_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} - \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_1} \hat{p}_1 \approx 2p_{\mu_1} \gamma_{\mu_2}$$

(мы использовали уравнения Дирака, $i\hat{p}u = -mu$ и учли, что $|p| \gg m$), то

$$J_k^{(1)} \sim -2(\gamma_\mu \times \gamma'_\mu) \int_{\Omega_k} \frac{d^4k}{k^2} \frac{1}{2p_1 k 2p_2 k} \quad (43.3.2)$$

(Ω_k означает область малых k).

Аналогичной формулой определяется вклад в интеграл (43.3.1), вносимый областью $\Omega_{k'}$.

Рассмотрим теперь диаграмму 2 рис. 43.3. Ей соответствует величина

$$J^{(2)} \sim \int \frac{d^4k}{k^2} \frac{\gamma_{\mu_2}(-\hat{p}_2 + \hat{k}) \gamma_{\mu_1}(\hat{p}_1 + \hat{k}) \gamma_{\mu_2} \times \gamma'_{\mu_1}}{[(p_2 - k)^2 + m^2][(p_1 + k)^2 + m^2](p_1 + p_2)^2}, \quad (43.3.3)$$

которая при малых k приобретает вид

$$J_k^{(2)} \sim -2(\gamma_\mu \times \gamma'_\mu) \int_{\Omega_k} \frac{d^4k}{k^2 (-2p_2 k) 2p_1 k}. \quad (43.3.4)$$

Мы видим, что $J_k^{(2)}$ только знаком отличается от $J_k^{(1)}$:

$$J_k^{(1)} = -J_k^{(2)}.$$

Легко убедиться, что аналогичное соотношение имеет место для $J_k^{(1)'}$ и величины $J_k^{(3)}$, соответствующей диаграмме 3 рис. 43.3

$$J_k^{(1)'} = -J_k^{(3)}.$$

Таким образом, как и утверждалось, суммарный вклад от трех нелестничных диаграмм 4-го порядка в сечение процесса $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ (при $p_1 - p'_1 \rightarrow 0$) в дважды логарифмическом приближении обращается в нуль. Такая же ситуация имеет место и в более высоких приближениях теории возмущений.

Перейдем к рассмотрению диаграмм лестничного типа, описывающих процесс $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ при $|t| \equiv \frac{(p_1 - p'_1)^2}{m^2} \sim O(1)$, $s \gg 1$.

Основной диаграмме 2-го порядка (рис. 43.4) соответствует величина

$$M_2 = \frac{e^2}{im^2s} (\bar{u}_+ \gamma_\mu u_-) (\bar{u}'_- \gamma'_\mu u'_+)$$

или сокращенно

$$M_2 \sim \frac{e^2}{im^2s} \gamma_\mu \times \gamma'_\mu. \quad (43.3.5)$$

В системе центра инерции электрона и позитрона мы можем, очевидно, заменить γ_4 и γ_3 на

$$\gamma_4 \rightarrow -i \frac{\hat{p}_1 + \hat{p}_2}{\sqrt{m^2 s}}, \quad \gamma_3 \rightarrow \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{m^2 s}}$$

(ось 3 направлена вдоль p_1), а так как $i\hat{p}u = -tu$, то слагаемые в M_2 , содержащие γ_4 и γ_3 , будут в \sqrt{s} раз меньше слагаемых, содержащих γ_1 и γ_2 , и могут быть, следовательно, при $s \gg 1$ опущены:

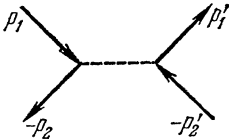


Рис. 43.4.

$$M_2 \sim \frac{e^2}{im^2 s} \gamma_\alpha \times \gamma'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (43.3.6)$$

Найдем теперь вклад, вносимый в амплитуду процесса $e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ лестничной диаграммой 4-го порядка (диаграмма 1 на рис. 43.5).

Введем вместо p новые переменные интегрирования u, v, p_\perp :

$$p = u p_1 + v p_2 + p_\perp, \quad p_\perp p_1 = p_\perp p_2 = 0.$$

Тогда, поступая так же, как и в § 42, легко убедиться, что интересующая

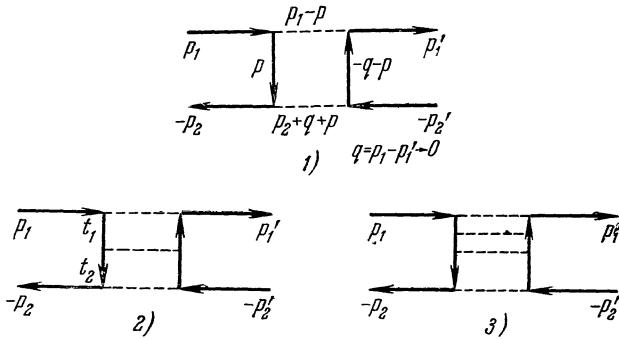


Рис. 43.5.

нас дважды логарифмическая асимптотика определяется областью интегрирования $|u|, |v| \ll 1$. В этом случае диаграмме 1 рис. 43.5 соответствует величина

$$M_4 = -\frac{e^4}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma_\mu \hat{p} \gamma_\nu \times \gamma'_\nu \hat{p}' \gamma'_\mu \frac{s}{2m^2} du dv d^2 p_\perp}{(su - i0)(sv + i0)(-m^2 suv + p_\perp^2 - i0)^2} \approx -\frac{e^4}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \gamma_\sigma^\perp \gamma_\nu \times \gamma'_\nu \gamma'_\sigma^\perp \gamma'_\mu \int \frac{p_\perp \sigma p_\perp \sigma' \frac{s}{2m^2} du dv d^2 p_\perp}{(-m^2 suv + p_\perp^2 - i0)^2 (su - i0)(sv + i0)} \quad (43.3.7)$$

(члены, содержащие u и v в числителе, не приводят к дважды логарифмической асимптотике).

Учитывая, что усреднение по углу в плоскости p_\perp дает

$$\overline{p_{\perp 1}^2} = \overline{p_{\perp 2}^2} = \frac{1}{2} p_\perp^2, \quad \overline{p_{\perp 1} p_{\perp 2}} = 0,$$

можно переписать M_4 в виде

$$M_4 = -\frac{e^4}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \gamma_\sigma^\perp \gamma_\nu \times \gamma'_\nu \gamma'_\sigma^\perp \gamma'_\mu \int \frac{\frac{1}{2} p_\perp^2 \frac{s}{2m^2} du dv d^2 p_\perp}{(su - i0)(sv + i0)(-m^2 suv + p_\perp^2 - i0)^2}. \quad (43.3.8)$$

Вспоминая далее, что в системе центра инерции матрицы γ_3 и γ_4 приводят к слагаемым порядка $\frac{1}{\sqrt{s}} \ll 1$, можно пользоваться соотношением

$$\gamma_\mu \gamma_\sigma^\perp \gamma_\nu \times \gamma'_\nu \gamma'_\sigma \gamma'_\mu \approx \gamma_\alpha \gamma_\sigma \gamma_\beta \times \gamma'_\beta \gamma'_\sigma \gamma'_\alpha = \gamma_\sigma \times \gamma'_\sigma$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4; \alpha, \beta, \sigma = 1, 2).$$

Таким образом, M_4 приобретает вид

$$M_4 = -\frac{e^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \times \gamma'_\alpha \int \frac{\frac{s}{m^2} du dv d^2 p_\perp \theta(p_\perp^2 - m^2)}{(su - i0)(sv + i0)(-m^2 suv + p_\perp^2 - i0)} \quad (43.3.9)$$

(область малых p_\perp^2 , $p_\perp^2 < m^2$, не дает дважды логарифмических членов, поэтому под знак интеграла введена функция $\theta(p_\perp^2 - m^2)$).

Считая пределы интегрирования по u , v равными $1/s$ и 1 , получим

$$M_4 = M_2 \frac{\alpha}{2\pi} \int_{1/s}^1 \int_{1/s}^1 \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \theta(suv - 1) = M_2 \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \ln^2 s, \quad (43.3.10)$$

где M_2 определяется формулой (43.3.6).

Аналогичным образом может быть определен дважды логарифмический вклад, вносимый лестничной диаграммой 6-го порядка (диаграмма 2 на рис. 43.5). Он определяется формулой

$$M_6 = -\frac{e^6}{i(2\pi)^6} \int \frac{\gamma_\mu \hat{t}_2 \gamma_\nu \hat{t}_1 \gamma_\lambda \times \gamma'_\lambda \hat{t}_1 \gamma'_\nu \hat{t}_2 \gamma'_\mu d^4 t_1 d^4 t_2}{m^2 s u_1 (t_1^2)^2 [m^2 s (u_1 + u_2) (v_1 + v_2)] (t_2^2)^2 m^2 s v_2},$$

в которой следует считать $u_2 \gg u_1$, $v_1 \gg v_2$. При этом M_6 приобретает вид

$$M_6 = M_2 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int_{1/s}^1 \frac{du_2}{u_2} \int_{1/s}^{u_2} \frac{du_1}{u_1} \int_{1/s}^1 \frac{dv_2}{v_2} \int_{v_2}^1 \frac{dv_1}{v_1} \theta(su_1 v_1 - 1) \times \theta(su_2 v_2 - 1) =$$

$$= M_2 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2! 3!} (\ln^2 s)^2.$$

Наконец, вклад, вносимый лестничной диаграммой $2(n+1)$ -го порядка в амплитуду процесса $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ в дважды логарифмическом приближении определяется формулой

$$M_{2(n+1)} = M_2 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \int_{1/s}^1 \frac{du_n}{u_n} \int_{1/s}^{u_n} \frac{du_{n-1}}{u_{n-1}} \dots \int_{1/s}^{u_2} \frac{du_1}{u_1} \int_{1/s}^1 \frac{dv_n}{v_n} \dots$$

$$\dots \int_{v_2}^1 \frac{dv_1}{v_1} \prod_i \theta(su_i v_i - 1) = M_2 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \frac{1}{n! (n+1)!} (\ln^2 s)^n.$$

Суммируя величины M_2, M_4, M_6, \dots , найдем амплитуду процесса $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ в дважды логарифмическом приближении при $t \rightarrow 0$

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_{2n} = M_2 \frac{2}{x} I_1(x), \quad (43.3.11)$$

где $I_1(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента,

$$I_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

и

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \ln s.$$

Отсюда легко найти дифференциальное сечение рассматриваемого процесса

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_0}{dt} \frac{4}{x^2} I_1^2(x), \quad (43.3.12)$$

где $d\sigma_0$ — дифференциальное сечение процесса $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ в борновском приближении.

Мы не будем приводить здесь подробные вычисления сечений других квантовоэлектродинамических процессов в дважды логарифмическом приближении, а приведем только таблицы отношений сечений $d\sigma$ процессов в дважды логарифмическом приближении к сечениям $d\sigma_0$ соответствующих процессов в основном приближении в различных областях значений переменных s , t , u и k_{\perp}^2 (неравенство $k_{\perp}^2 \ll A$ означает, что $k_{s\perp}^2 \ll A$, $k_{t\perp}^2 \ll A$, $k_{u\perp}^2 \ll A$).

Входящие в таблицу величины a , b , c , d , g , h означают

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{2}{x} I_1(x) \right)^2, & x^2 &= \frac{2\alpha}{\pi} \ln^2 s, \\ b &= a \exp \left(-\frac{\alpha}{\pi} \ln^2 t \right), \\ c &= d \exp \left[\frac{\alpha}{\pi} \left(-2 \ln^2 s + \ln^2 |u| + 2 \ln^2 \frac{s}{|u|} \right) \right], \\ d &= J^2(y), & y^2 &= \frac{2\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{s}{|u|}, \\ g &= \exp \left[-\frac{\alpha}{\pi} \ln^2 s \right], \\ h &= \exp \left[-\frac{\alpha}{\pi} (\ln s \ln |u| - \frac{1}{2} \ln^2 |u|) \right], \\ J(y) &= \frac{2i}{\pi} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{ly} \frac{\partial}{\partial l} \ln D_{-1/4}(l) dl, & r &> 0, \end{aligned}$$

где $D_{-1/4}(z)$ — функция параболического цилиндра, определяемая интегральным представлением

$$D_p(z) = -\frac{\Gamma(p+1)}{2\pi i} e^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{\infty}^{(0+)} e^{-zt - \frac{1}{2}t^2} (-t)^{-p-1} dt$$

при $p = -1/4$.

В предельных случаях малых и больших аргументов функция $J(y)$ имеет вид

$$J(y) = 1 - \frac{5}{8} y^2 + \frac{35}{192} y^4 + \dots, \quad y \ll 1,$$

$$J(y) = -8 \{ e^{-2,26y} \cos 1,84y + e^{-3,44y} \cos 3,05y + \dots \}, \quad y \gg 1.$$

Таблица значений $\frac{d\sigma}{d\sigma_0}$ (по результатам работ [35])

Области Процессы	$\ln s \gg \ln t ,$ $\ln s = \ln u $		$\ln s \gg \ln u, \ln s = \ln t $			$\ln s = \ln t = \ln u $	
	$k_{\perp}^2 \ll m^2$	$k_{\perp}^2 \ll s, t $	$k_{\perp}^2 \ll m^2$	$k_{\perp}^2 \ll u $	$k_{\perp}^2 \ll s$	$k_{\perp}^2 \ll m^2$	$k_{\perp}^2 \ll s$
$e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$	b	a	c	d		g	1
$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$	b	1	b	a	a	b	1
$e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$	c	1	c	d		c	1
$e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$							
$e \gamma \rightarrow e \gamma$			h	1	1	h	1
$e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$	h	1	h	1	1	h	1

§ 44. Дисперсионный метод вычисления радиационных поправок

44.1. Аналитические свойства поляризационного оператора. Вычисление радиационных поправок может быть проведено при помощи метода, отличающегося от того, которым мы пользовались ранее в этой главе. Этот метод, изложению которого посвящен настоящий параграф, представляет интерес в двух отношениях. Во-первых, в вычислительном: здесь иная схема проведения интегрирований и иной выбор переменных интегрирования; это может оказаться удобным при вычислении высших поправок. Во-вторых, в принципиальном. Здесь нет необходимости иметь дело с расходимостями, которые надо затем устранять; новая схема нахождения высших приближений вообще не оперирует с расходящимися интегралами.

Мы начнем с рассмотрения поляризационного оператора второго порядка $\Pi^{(2)}(k)$. Согласно (36.3.1) и (36.3.2)

$$\Pi^{(2)}(k) = \int \frac{f(p, k) d^4 p}{(p^2 + m^2 - i0) [(p-k)^2 + m^2 - i0]}, \tag{44.1.1}$$

где

$$f(p, k) = \frac{\alpha}{3\pi^3} \cdot \frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ \gamma_{\mu} (i\hat{p} - m) \gamma_{\mu} (i\hat{k} - m) - \frac{4}{k^2} \hat{k} (i\hat{p} - m) \hat{k} (i\hat{k} - m) \right\} = \frac{\alpha}{3\pi^3} \left\{ p^2 + 3m^2 - 3pk + \frac{2(pk)^2}{k^2} \right\}. \tag{44.1.2}$$

Интеграл (44.1.1) может служить для определения $\Pi^{(2)}(k)$ как функции комплексной переменной k^2 . Выясним, какова область аналитичности этой функции. Для удобства мы сделаем некоторое изменение обозначений. Пусть

$$i\Pi^{(2)}(k) = P(t), \quad t = -k^2. \tag{44.1.3}$$

Выделим в интеграле (44.1.1) интегрирование по dp_0 ($p_4 = ip_0$):

$$P(t) = \int d^3 p I(p, k), \tag{44.1.4}$$

$$I(p, k) = \int_C \frac{if(p, k) dp_0}{(e_p^2 - p_0^2) [e_{p-k}^2 - (p_0 - k_0)^2]},$$

где

$$\varepsilon_p = +\sqrt{p^2 + m^2}$$

и C — контур, изображенный на рис. 44.1.

Рассмотрим сначала область действительных положительных значений k^2 . При $k^2 > 0$ можно выбрать систему отсчета, в которой

$$k_0 = 0, \quad k^2 = k^2.$$

Тогда подынтегральное выражение в (44.1.4) имеет при $k^2 > 0$ полюсы в следующих четырех точках (см. рис. 44.1):

$$p_0^{(1)} = \varepsilon_p, \quad p_0^{(2)} = \varepsilon_p - k, \quad p_0^{(3)} = -\varepsilon_p, \quad p_0^{(4)} = -\varepsilon_p - k.$$

Добавим к переменной k^2 некоторую мнимую часть. Точки $p_0^{(1)}$ и $p_0^{(3)}$ при этом не изменятся, а точки $p_0^{(2)}$ и $p_0^{(4)}$ сместятся и, вообще говоря, могут

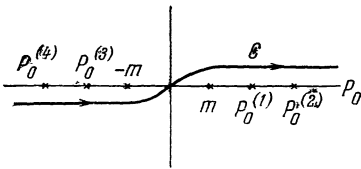


Рис. 44.1.

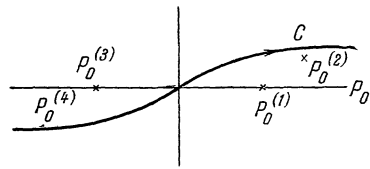


Рис. 44.2.

приблизиться к контуру C . Существенно, однако, что полюсы $p_0^{(1)}$ и $p_0^{(2)}$, расположенные под контуром C , всегда будут находиться на конечном расстоянии справа от полюсов $p_0^{(3)}$ и $p_0^{(4)}$, расположенных над контуром. (В самом деле, так как $\varepsilon > m$, то первая пара полюсов во второй отделена расстоянием, превышающим $2m$.) Поэтому при смещении $p_0^{(2)}$ и $p_0^{(4)}$ можно так непрерывно деформировать контур C , чтобы полюсы не пересекли его (рис. 44.2). Таким образом, интеграл I , а следовательно, и функция $P(t)$ могут быть однозначно продолжены в область комплексных t (при $\text{Re } t < 0$). Иначе говоря, функция $P(t)$ не имеет особенностей в левой полуплоскости комплексной переменной t .

Заметим, что этим свойством расположения полюсов мы уже пользовались в § 36.1, поворачивая ось p_0 на угол $\pi/2$ в комплексной плоскости p_0 . При этом dp_0 заменяется на idp_0 , и $-\rho_0^2$ на ρ_0^2 , так что знаменатель в (44.1.4) нигде на повернутом контуре не обращается в нуль, и из (44.1.4) и (44.1.1) видно, что $P(t)$ действительно,

$$\text{Im } P(t) = 0, \quad t < 0. \quad (44.1.5)$$

Перейдем к рассмотрению области отрицательных k^2 . При $k^2 < 0$ можно выбрать систему отсчета, в которой $k = 0$, $k^2 = -k_0^2$. Так как при этом k^2 не зависит от знака k_0 , то для определенности можно считать, что $k_0 > 0$. Теперь полюсы подынтегрального выражения в (44.1.3) будут расположены в следующих точках:

$$p_0^{(1)} = \varepsilon_p, \quad p_0^{(2)} = k_0 + \varepsilon_p, \quad p_0^{(3)} = -\varepsilon_p, \quad p_0^{(4)} = k_0 - \varepsilon_p.$$

Если точки $p_0^{(1)}$ и $p_0^{(2)}$ находятся на конечном расстоянии от точек $p_0^{(3)}$ и $p_0^{(4)}$, то интеграл может быть, как и выше, продолжен в область комплексных t (т. е. при любых мнимых добавках к k^2 можно так непрерывно деформировать контур C , чтобы первые два полюса остались под ним, а вторые два — над ним). Но, в отличие от случая $k^2 > 0$, точка $p_0^{(4)}$ с ростом k_0 монотонно смещается направо и поэтому может подойти бесконечно близко к неподвиж-

ной точке $p_0^{(1)}$. Это произойдет при $k_0 = 2\varepsilon_p$; контур C тогда окажется зажатым (рис. 44.3) между двумя полюсами подынтегрального выражения, и однозначное продолжение интеграла I в область комплексных k^2 станет невозможным. Так как $\varepsilon_p \geq m$, то сближение полюсов становится возможным при $k_0 \geq 2m$.

Это значит, что точка $k_0 = 2m$, т. е. точка

$$k^2 = -4m^2, \quad t = 4m^2,$$

является особой точкой — точкой ветвления функции $P(t)$.

Проведем в плоскости t разрез вдоль действительной оси от точки $t = 4m^2$ направо. Тогда $P(t)$ будет аналитической функцией в разрезанной плоскости. Так как $P(t)$, согласно (44.1.5), действительно на действительной оси при $t < 0$ (как мы видели выше это свойство сохраняется и на отрезке $0 < t < 4m^2$, $\text{Im } P(t) = 0$, $t < 4m^2$), то при произвольных комплексных t должно иметь место соотношение

$$P(t^*) = P^*(t).$$

В частности, при стремлении t к линии разреза

$$P(t - i0) = P^*(t + i0), \quad t > 4m^2.$$

Таким образом, скачок функции $P(t)$ при переходе через разрез $\Delta P(t) = P(t + i0) - P(t - i0)$ связан с мнимой частью P соотношением

$$\Delta P(t) = 2i \text{Im } P(t + i0). \tag{44.1.6}$$

Заметим, что физическое значение функции $P(t)$ при действительных $t > 4m^2$ должно определяться как $P(t + i0)$.

Найдем теперь скачок $\Delta P(t)$. Для этого вернемся к интегралу (44.1.4), который при $t > 0$ запишем (в системе, в которой $k = 0$) в виде

$$I(p, k_0) = \int_C \frac{if(p, k_0) dp_0}{(p_0^2 - \varepsilon_p^2) [(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon_p^2]}.$$

Пусть k_0 имеет бесконечно малую мнимую часть. Скачок $\Delta I(p, k_0) = I(p, k_0 + i0) - I(p, k_0 - i0)$ возникает, как отмечалось выше, благодаря тому, что контур C

оказывается зажатым между двумя полюсами: $p_0^{(4)} = k_0 - \varepsilon_p$ и $p_0^{(1)} = \varepsilon_p$. Заменяем поэтому интеграл по контуру C суммой двух интегралов:

$$\int_C = \int_{C'} + \int_{C_0}$$

(рис. 44.4). Контур C' находится над обеими точками ($p_0^{(1)}$ и $p_0^{(4)}$) и поэтому не зажимается ими при $p_0^{(4)} \rightarrow p_0^{(1)}$. Скачок возникает только за счет интеграла по контуру C_0 :

$$\Delta I(p, k_0) = I_0(p, k_0 + i0) - I_0(p, k_0 - i0),$$

где

$$I_0(p, k_0) = \int_{C_0} \frac{if(p, k_0) dp_0}{(p_0^2 - \varepsilon_p^2) [(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon_p^2]}.$$

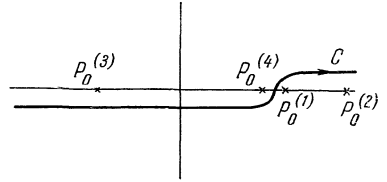


Рис. 44.3.

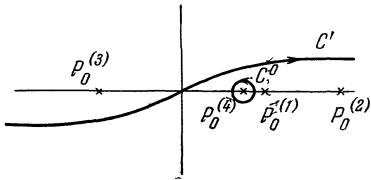


Рис. 44.4.

Этот интеграл легко вычисляется; согласно теореме о вычетах

$$I_0(p, k_0) = 2\pi i \frac{if(p, k_0)}{2\varepsilon_p k_0 (2\varepsilon_p - k_0)},$$

где $f(p, k_0)$ — значение функции $f(p, k)$ при $p_0 = k_0 - \varepsilon_p$ и $k = 0$.
Используя соотношение

$$\frac{1}{x + i0} = P \frac{1}{x} - i\pi \delta(x)$$

и явный вид функции $f(p, k)$ (44.1.2), получим

$$\Delta I(p, k_0) = -\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon_p k_0} i (2m^2 + 4\varepsilon_p^2) \delta(k_0 - 2\varepsilon_p).$$

Теперь легко найти скачок функции $P(t)$:

$$\Delta P(t) = \int d^3 p \Delta I(p, k).$$

Выполнив интегрирование, получим окончательно

$$\frac{1}{2i} \Delta P(t) = \text{Im} P(t) = -\frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t-4m^2}{t}} (t + 2m^2). \quad (44.1.7)$$

Полезно заметить, что выражение для $\Delta P(t)$ можно записать в виде инвариантного четырехмерного интеграла. Действительно, воспользовавшись тем, что под знаком интеграла можно произвести замену

$$d^3 p \delta(k_0 - 2\varepsilon_p) \rightarrow d^4 p \delta(p^2 + m^2) \theta(p_0) \delta[(p-k)^2 + m^2] 2p_0 k_0,$$

получим

$$\Delta P(t) = i(2\pi i)^2 \int d^4 p f(p, k) \theta(p_0) \delta(p^2 + m^2) \delta[(p-k)^2 + m^2]. \quad (44.1.8)$$

Сравнивая (44.1.8) с (44.1.1) (с учетом обозначений (44.1.2)), мы видим, что для перехода от выражения для $P(t)$ к выражению для $\Delta P(t)$ достаточно заменить входящие под знаком интеграла функции Грина $i\Delta_c(p)$ и $i\Delta_c(p+k)$,

$$i\Delta_c(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 - i0} = P \frac{1}{p^2 + m^2} + i\pi \delta(p^2 + m^2),$$

их удвоенными мнимыми частями: $i\Delta_c(p) \rightarrow 2\pi i \delta(p^2 + m^2)$. Это свойство скачка может быть обобщено на другие интегралы, встречающиеся при вычислении радиационных поправок.

44.2. Дисперсионное соотношение. Отметим прежде всего два важных свойства функции $\Delta P(t)$.

Во-первых, она конечна (при конечных t). Это видно не только из явного выражения (44.1.7), но и из более общего выражения (44.1.8) при произвольной функции $f(p, k)$. Действительно, входящие под знаком интеграла δ -функции сводят область интегрирования к фазовому объему двух реальных электронов с 4-импульсами p и $p-k$, суммарный 4-импульс которых k задан. Такой фазовый объем всегда конечен (после исключения δ -функций остается только интегрирование по телесному углу). Виртуальные частицы, интегрирование по импульсам которых является причиной расходимостей в квантовой электродинамике, не дают вклада в $\Delta P(t)$.

Во-вторых, аналитические свойства регуляризованных величин должны совпадать с исходными (т. е. нерегуляризованными). Это легко видеть

из определений регуляризованных величин, данных в § 23. В частности, $\Pi_R^{(2)}(k)$ получается из $\Pi^{(2)}(k)$ путем вычитания функции, линейной относительно k^2 .

Поэтому мы можем считать, что знаем скачок регуляризованной функции $P(t)$. Ниже будут всюду подразумеваться только регуляризованные величины, и мы будем обозначать их без индекса R .

Знания скачка функции $P(t)$ на разрезе $\Delta P(t)$ достаточно для нахождения самой функции $P(t)$. Для этого надо воспользоваться аналитичностью функции $P(t)$ в плоскости t с разрезом от $t = 4m^2$ до $t = \infty$ и свойством регуляризованного поляризованного оператора при $t = 0$ (23.3.5):

$$P(0) = 0, \quad P'(0) = 0.$$

Последние условия означают, что функцию $P(t)$ можно представить в виде

$$P(t) = t^2 G_1(t), \tag{44.2.1}$$

где $G(t)$, так же как и $P(t)$, аналитична в плоскости t с тем же разрезом, причем

$$\Delta G_1(t) = \frac{\Delta P(t)}{t^2}. \tag{44.2.2}$$

Заметим, что, как следует из (22.3.10) и (22.3.12), величина iG_1 представляет собой поправку второго приближения к регуляризованной функции Грина фотона $G_k^{(v)}$.

Из (44.2.2) и (44.1.7) вытекает, что асимптотика $\Delta G_1(t)$ при больших t имеет следующий характер:

$$\Delta G_1(t) \sim \frac{1}{t}, \quad t \rightarrow \infty. \tag{44.2.3}$$

Такая асимптотика позволяет выразить функцию $G_1(t)$ через $\Delta G_1(t)$. Воспользуемся для этого формулой Коши

$$G_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G_1(z)}{z-t} dz, \tag{44.2.4}$$

где контур интегрирования охватывает линию разреза и замыкается окружностью большого радиуса (рис. 44.5). Легко видеть, что интеграл по этой окружности при неограниченном увеличении ее радиуса стремится к нулю, и $G_1(t)$ тогда выражается через интеграл по линии разреза:

$$G_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\Delta G_1(x)}{x-t} dx. \tag{44.2.5}$$

Эта формула называется дисперсионным соотношением.

В силу (44.2.3) интеграл (44.2.5) существует, и $G_1(t)$ убывает при $t \rightarrow \infty$ (как $\frac{\ln t}{t}$), что оправдывает переход от формулы (44.2.4) к формуле (44.2.5).

Из (44.2.5) и (44.2.2) следует, что для $P(t)$ может быть написано соотношение

$$P(t) = \frac{t^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } P(x)}{x^2(x-t)} dx. \tag{44.2.6}$$

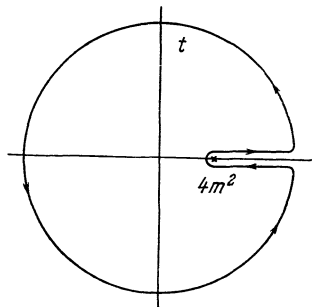


Рис. 44.5.

Подставив (44.1.7) в (44.2.6) и выполнив интегрирование, получим

$$P(t) = \frac{\alpha}{\pi} t \left[\frac{1}{9} - (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) \frac{2t + 4m^2}{3t} \right]$$

$$(\sin^2 \theta = t/4m^2).$$

Это выражение совпадает с выражением (36.3.6) для перенормированного поляризованного оператора.

44.3. Применение соотношения унитарности. Хотя выше мы непосредственно не оперировали с расходящимися интегралами и не вводили предельного импульса, как это делалось в § 36.3, однако исходным для проведенных вычислений был расходящийся интеграл (44.1.1). Поэтому метод получения $\Pi^{(2)}(k)$ отличался только в вычислительном отношении от метода, которым мы пользовались в § 36.3. Покажем, что аналитические свойства функции $P(t)$ и ее скачок на разрезе $\Delta P(t)$ (или мнимая часть $\operatorname{Im} P(t)$), а также аналогичные свойства других величин могут быть получены без использования диаграмм Фейнмана и соответствующих им расходящихся интегралов [36].

Исходным для получения высших приближений может служить соотношение унитарности для матрицы рассеяния

$$S S^+ = I.$$

Мы запишем матрицу рассеяния S , как это уже делалось ранее, в виде

$$S = I + iT.$$

Тогда соотношение унитарности примет вид

$$i(T - T^+) = -T^+T$$

или

$$\langle f | T | i \rangle - \langle i | T | f \rangle^* = i \sum_n \langle n | T | f \rangle^* \langle n | T | i \rangle. \quad (44.3.1)$$

Мы будем ниже пользоваться также амплитудами рассеяния M_{fi} , связанными, согласно определению § 18.1, с $\langle f | T | i \rangle$ соотношением

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 M_{fi} \delta(p_f - p_i).$$

Заметим, что левая часть (44.3.1) является линейной, а правая — квадратичной относительно элементов матрицы T . Это делает возможным использование (44.3.1) для построения последовательных приближений. Действительно, пусть, например, элементы матрицы известны в первом приближении. Тогда, подставляя их в правую часть (44.3.1), мы получим комбинацию матричных элементов, входящих в левую часть (44.3.1) уже во втором приближении.

Для того чтобы найти таким способом величину $\Pi^{(2)}(k)$ или функцию Грина фотона во втором приближении, рассмотрим электромагнитное взаимодействие двух частиц с превращением их в некоторые две другие частицы. Обозначим начальные частицы символами 1, 2, а конечные 1', 2', так что речь идет о реакции

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2'; \quad p_1 + p_2 = p_1' + p_2'.$$

Будем считать, что амплитуда этого процесса $\langle f | T | i \rangle = \langle 1', 2' | T | 1, 2 \rangle$ билинейна относительно токов перехода $j_\mu^{(1)}(q)$, $j_\mu^{(2)}(-q)$, представляющих собой фурье-образы матричных элементов оператора тока $\langle 1' | j_\mu(x) | 1 \rangle$,

$\langle 2' | j_\mu(x) | 2 \rangle$ при $q = p_1 - p_1' = p_2' - p_2$. Тогда и амплитуду можно представить в виде

$$M_{fi} = j_\mu^{(1)}(q) j_\mu^{(2)}(-q) G(t), \quad (44.3.2)$$

где $G(t)$ — некоторая инвариантная функция от $t \equiv -q^2$. Заметим, что (44.3.2) является единственным инвариантным выражением, билинейным относительно токов перехода и учитывающим уравнение непрерывности:

$$j_\mu^{(1)}(q) q_\mu = j_\mu^{(2)}(-q) q_\mu = 0.$$

Сравнивая (44.3.2) с аналогичным выражением (32.1.2), мы видим, что $iG(t)$ представляет собой функцию Грина фотона.

Воспользуемся теперь тем, что в первом приближении $iG(t)$ совпадает $D_c(q) = \frac{t}{t}$ и представим $G(t)$ в виде

$$G(t) = \frac{1}{t - P(t)} \approx \frac{1}{t} + \frac{P(t)}{t^2},$$

где $P(t)$ — поляризационный оператор. Будем также считать известным асимптотическое поведение $G(t)$ при $t=0$:

$$-G(t) = \frac{1}{t}, \quad t \rightarrow 0.$$

Тогда $P(0) = P'(0) = 0$.

Аналогично, амплитуда обратного перехода

$$1' + 2' \rightarrow 1 + 2$$

может быть представлена в виде

$$M_{if} = j_\mu^{(1)}(-q) j_\mu^{(2)}(q) G(t).$$

Так как оператор тока является эрмитовым оператором, то $j_\mu(q) = j_\mu^*(-q)$ ($\mu = 1, 2, 3, 0$) и входящая в левую часть (44.3.1) разность матричных элементов приобретает вид

$$M_{fi} - M_{if}^* = j_\mu^{(1)}(q) j_\mu^{(2)}(-q) 2i \operatorname{Im} G(t) = j_\mu^{(1)}(q) j_\mu^{(2)}(-q) \frac{2i \operatorname{Im} P(t)}{t^2}. \quad (44.3.3)$$

Под $|n\rangle$ в правой части (44.3.1) мы должны понимать состояния, содержащие одну электронно-позитронную пару. Точнее процессы $i \rightarrow n$ и $f \rightarrow n$ представляют собой переходы

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 1' + \text{пара}, & p_1 &= p_1' + p + p'; \\ 2' &\rightarrow 2 + \text{пара}, & p_2' &= p_2 + p + p', \end{aligned}$$

где p и p' — 4-импульсы электрона и позитрона. Эти процессы возможны, очевидно, при $q_0 > 2m$, т. е. при $t > 4m^2$. Отсюда следует, согласно (44.3.1), (44.3.3),

$$\operatorname{Im} G = 0, \quad t < 4m^2.$$

Амплитуды образования пары имеют вид

$$\begin{aligned} M_{ni} &= \frac{1}{t} j_\mu^{(1)}(q) j_\mu(-q), \\ M_{nf} &= \frac{1}{t} j_\mu^{(2)}(-q) j_\mu(q), \end{aligned} \quad (44.3.4)$$

где

$$j_\mu^*(-q) = \frac{ie}{2\sqrt{\epsilon\epsilon'}} \bar{u}(p) \gamma_\mu u(-p'), \quad (44.3.5)$$

p и p' — 4-импульсы электрона и позитрона, причем $p + p' = q$, u — соответствующие биспинорные амплитуды.

Найдем теперь $\sum_n \langle n | \mathbf{T} | i \rangle \langle n | \mathbf{T} | f \rangle^*$. Суммирование по n содержит, во-первых, суммирование по поляризациям μ_1, μ_2 электрона и позитрона,

$$\sum_{\mu_1 \mu_2} [\bar{u}(p) \gamma_{\mu} u(-p')] [\bar{u}(-p') \gamma_{\nu} u(p)] = \text{Sp} (i\hat{p} + m) \gamma_{\mu} (i\hat{p}' - m) \gamma_{\nu},$$

и, во-вторых, суммирование по импульсам электрона и позитрона с учетом сохранения импульса и энергии,

$$\begin{aligned} \sum_{p, p'} F(p, p') \frac{1}{4\epsilon\epsilon'} &= \int F(p, p') \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\epsilon} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2\epsilon'} (2\pi)^4 \delta(p + p' - q) = \\ &= \int F(p, p') \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \delta(p^2 + m^2) \delta[(p - q)^2 + m^2] \theta(p_0). \end{aligned}$$

Последний интеграл должен иметь, очевидно, структуру $a\delta_{\mu\nu} + bq_{\mu}q_{\nu}$. В дальнейшем существенно только первое слагаемое, так как второе слагаемое обращается в нуль после умножения на $j_{\mu}^{(1)}(q)j_{\nu}^{(2)}(-q)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_n \langle n | \mathbf{T} | f \rangle^* \langle n | \mathbf{T} | i \rangle &= \frac{e^2}{(2\pi)^2 i^2} j_{\mu}^{(1)}(q) j_{\mu}^{(2)}(-q) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ &\times \int \frac{1}{3} \text{Sp} [(i\hat{p} + m) \gamma_{\nu} (i\hat{q} - i\hat{p} - m) \gamma_{\nu}] d^4 p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \delta[(p - q)^2 + m^2]. \end{aligned} \quad (44.3.6)$$

Подставим выражения (44.3.6) и (44.3.3) в равенство (44.3.1); мы видим, что токи $j_{\mu}^{(1)}(q)$ и $j_{\mu}^{(2)}(-q)$ выпадут из него, и мы получим выражение, определяющее $\text{Im} P(t)$, тождественное с (44.1.8):

$$2 \text{Im} P(t) = (2\pi)^2 \int d^4 p f(p, q) \delta(p^2 + m^2) \delta[(p - q)^2 + m^2] \theta(p_0), \quad (44.3.7)$$

где $f(p, q)$ определяется формулой (44.1.2).

Таким образом, мы получили все результаты § 44.1, основываясь только на соотношении унитарности. Подчеркнем, что мы пользовались соотношением унитарности в первом порядке по α . Поэтому мы рассматривали только состояния с одной парой. В этом случае положение точки ветвления функций $P(t)$ и $G(t)$ имеет простой физический смысл: это энергетический порог образования пары. В следующих приближениях следует, очевидно, рассматривать также образование двух и большего числа пар. Соответственно этому функция Грина будет иметь точки ветвления при $t = 4m^2, 8m^2, \dots$ Кроме того, в высших приближениях появится точка ветвления при $t = 0$, отвечающая фотонам в промежуточном состоянии, например процессу

$$1 \rightarrow 1' + 3 \text{ фотона.}$$

Для того чтобы получить также результаты § 44.2, т. е. восстановить функцию $P(t)$ по ее мнимой части, необходимо сделать следующие естественные, но формально независимые предположения:

1) функция $G_1(t)$ не имеет других особенностей, кроме точки ветвления при $t = 4m^2$ и полюса при $t = 0$ (означающего существование фотона);

2) вычет в полюсе равен единице (это означает, по существу, нормировочное условие для функции Грина).

44.4. Вершинная функция во втором приближении. Рассмотрим процессы, аналогичные рассмотренному в § 44.3 и отличающиеся тем, что частицы 2 и 2' представляют собой электроны или электронную пару, т. е.

$$1 + e \rightarrow 1' + e'; \quad p_1 + p_e = p_1' + p_e'$$

или

$$1 \rightarrow 1' + e + \bar{e}; \quad p_1 = p_1' + p_e + p_{\bar{e}}$$

(здесь e и \bar{e} — символы электрона и позитрона). Первая реакция аналогична внутренней конверсии или рассеянию электрона (ср. § 35); вторая — внутренней конверсии с образованием пары (§ 35.4). Для первой реакции $q^2 = (p_1 - p_1')^2 > 0$, для второй $q^2 < -4m^2$.

Мы можем описать оба эти процесса единой амплитудой, определенной в разных областях независимой переменной $t = -q^2$. Амплитуда таких процессов будет иметь форму (44.3.2)

$$M_{fi} = j_{\mu}^{(1)}(q) j_{\mu}^{(e)}(-q) G(t), \quad (44.4.1)$$

где $j_{\mu}^{(e)}(-q)$ — электронный ток перехода. Так как величина $j_{\mu}^{(e)}$ включает радиационные поправки, то она не имеет простого вида (44.3.5). Воспользуемся общей структурой тока перехода для частицы со спином 1/2, полученной в § 34.1:

$$j_{\mu}^{(e)}(-q) = \frac{ie}{2\sqrt{\varepsilon_e \varepsilon_e'}} \bar{u} \Gamma_{\mu} u', \quad (44.4.2)$$

$$\Gamma_{\mu} = f(t) \gamma_{\mu} - \frac{g(t)}{2m} q_{\nu} \sigma_{\mu\nu},$$

где $u = u(p_e)$ и $u' = u(p_e')$ или $u' = u(-p_e)$ соответственно случаям рассеяния ($t < 0$) или образования пары ($t > 4m^2$). Функции $f(t)$ и $g(t)$ мы будем называть электронными формфакторами.

Аналогично, для обратного процесса $f \rightarrow i$

$$M_{if} = j_{\mu}^{(1)}(-q) j_{\mu}^{(e)}(q) G(t)$$

и левая часть соотношения унитарности (44.3.1) примет вид

$$M_{fi} - M_{if}^* = 2i j_{\mu}^{(1)}(q) \frac{ie}{2\sqrt{\varepsilon_e \varepsilon_e'}} \bar{u} \left\{ \gamma_{\mu} \text{Im}(G(t) f(t)) - \frac{\sigma_{\mu\nu} q_{\nu}}{2m} \text{Im}(G(t) g(t)) \right\} u'.$$

Так как в первом приближении

$$f(t) = 1, \quad g(t) = 0, \quad G(t) = \frac{1}{t},$$

и мы хотим учитывать поправки порядка α , то

$$M_{fi} - M_{if}^* = i j_{\mu}^{(1)}(q) \frac{ie}{\sqrt{\varepsilon_e \varepsilon_e'}} \bar{u} \left\{ \gamma_{\mu} \text{Im} G(t) + \right. \\ \left. + \gamma_{\mu} \frac{\text{Im} f(t)}{t} - \frac{\sigma_{\mu\nu} q_{\nu}}{2m} \frac{\text{Im} g(t)}{t} \right\}. \quad (44.4.3)$$

Переходя к вычислению правой части соотношения унитарности (44.3.1), мы прежде всего видим, что при $t < 0$ невозможны никакие промежуточные состояния: такими состояниями могли быть, как и в § 44.3, состояния, содержащие пары, но порог образования их равен $t = 4m^2$.

Таким образом, правая часть (44.3.1) при $t < 4m^2$ равна нулю и из (44.4.3) следует:

$$\text{Im } f(t) = \text{Im } g(t) = 0, \quad t < 4m^2. \quad (44.4.4)$$

Точка $t = 4m^2$ будет, как и в случае § 44.3, особой точкой (точкой ветвления) функций $f(t)$ и $g(t)$, рассматриваемых как аналитические функции комплексной переменной t .

Амплитуда M_{ni} (при $t > 4m^2$) имеет тот же вид, что и (44.3.4), (44.3.5):

$$M_{ni} = \frac{j_{\mu}^{(1)}(q)}{t} \frac{ie}{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}} \bar{u}(p) \gamma_{\mu} u(-p'), \quad (44.4.5)$$

где p и p' — 4-импульсы электрона и позитрона в промежуточном состоянии, а ε и ε' — их энергии. Амплитуда же M_{nf} представляет собой амплитуду рассеяния электрона позитроном. Согласно (31.2.1), она имеет вид

$$M_{nf} = \frac{e^2}{4\sqrt{\varepsilon\varepsilon'\varepsilon_e\varepsilon'_e}} \left\{ \frac{(\bar{u}'\gamma_{\alpha}u)(\bar{u}(p)\gamma_{\alpha}u(-p'))}{t} + \frac{(\bar{u}'\gamma_{\alpha}u(-p'))(\bar{u}(p)\gamma_{\alpha}u)}{(p-p_e)^2} \right\}, \quad (44.4.6)$$

где u и u' по-прежнему означают биспинорные амплитуды электрона и позитрона в конечном состоянии \hat{f} .

Подставив (44.4.6), (44.4.5) и (44.4.3) в соотношение унитарности (44.3.1), мы получим, учитывая, что выражение для $\text{Im } G(t)$ нам уже известно (см. (44.3.2) и (44.3.7)):

$$\begin{aligned} u \left\{ \gamma_{\mu} \text{Im } f(t) - \frac{\sigma_{\mu\nu} q_{\nu}}{2m} \text{Im } g(t) \right\} u' = \\ = \frac{\alpha}{32\pi} \sqrt{\frac{t-4m^2}{t}} \int \frac{d^4p}{(p-p_e)^2 + \lambda^2} \bar{u} \gamma_{\alpha} (i\hat{q} - i\hat{p} - m) \gamma_{\mu} (i\hat{p} + m) \gamma_{\alpha} u' \times \\ \times \delta(p^2 + m^2) \delta[(q-p)^2 + m^2] \theta(p_0); \quad (44.4.7) \end{aligned}$$

здесь λ — масса фотона, введенная, как обычно, для устранения инфракрасной расходимости.

Мы видим, что интеграл в (44.4.7) отвечает диаграмме Фейнмана для вершинной части третьего порядка (см. рис. 38.1), в которой электронная

функция Грина $S_c(p) = \frac{i(i\hat{p} - m)}{p^2 + m^2 - i0}$ заменена на $2\Delta S_c(p)$,

$$\Delta S_c(p) = i(i\hat{p} - m) \theta(p_0) \pi i \delta(p^2 + m^2).$$

Выполнив интегрирование в (44.4.7) и отделив члены, содержащие γ_{μ} и $\sigma_{\mu\nu}$, получим

$$\text{Im } f(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{t(t-4m^2)}} \left[-3t + 8m^2 + 2(t-2m^2) \ln \frac{t-4m^2}{\lambda^2} \right], \quad (44.4.8)$$

$$\text{Im } g(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}}.$$

Теперь можно найти $f(t)$ и $g(t)$ при помощи дисперсионных соотношений, аналогично тому, как это было сделано в § 44.2. Так как $j_0^{(e)}(0) = e$ и $f(0) = 1$, то функция $\frac{f(t)-1}{t}$ аналитична в плоскости t с разрезом вдоль действительной оси от точки $t = 4m^2$ направо, причем ее мни-

мая часть, согласно (44.4.8), убывает при $t \rightarrow \infty$ (как $\frac{\ln t}{t}$). Повторяя рассуждения, приводящие к (44.2.6), можно написать поэтому дисперсионное соотношение

$$f(t) = 1 + \frac{t}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im} f(x)}{x(x-t)} dx. \tag{44.4.9}$$

Для функции $g(t)$ мы не имеем никаких условий. Но, согласно (44.4.8), $\text{Im} g$ убывает как $1/t$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому для $g(t)$ может быть написано дисперсионное соотношение

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im} g(x)}{|x-t|} dx. \tag{44.4.10}$$

Обратим внимание на замечательную согласованность характера поведения $\text{Im} P(t)$, $\text{Im} f(t)$ и $\text{Im} g(t)$ на бесконечности с теми физическими требованиями, которые накладываются на эти функции при $t = 0$. Именно это обстоятельство дает возможность определения их при помощи сходящихся дисперсионных интегралов. Эта согласованность является выражением перенормируемости квантовой электродинамики.

Интегрирование (44.4.9) и (44.4.10) приводит к следующим выражениям для $f(t)$ и $g(t)$:

$$f(t) = -\frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left(\frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} - 1 \right) \left(\ln \frac{m}{\lambda} - 1 \right) - \frac{2}{\text{tg } 2\theta} \int_0^{\theta} \xi \text{tg } \xi d\xi - \frac{\theta}{2} \text{tg } \theta \right\},$$

$$g(t) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{2\theta}{\sin 2\theta},$$

совпадающим с полученными ранее (см. § 36.4).

44.5. Вершинная функция в третьем приближении. Все изложенное выше в этом параграфе можно сформулировать следующим образом. Мы рассматривали две диаграммы Фейнмана, изображенные на рис. 44.6. Они определяют (с точностью до членов порядка α) три инвариантные функции переменной $t = -q^2$ (q — 4-вектор переданного импульса): поляризационный оператор $P(t)$ и форм-факторы электрона $f(t)$ и $g(t)$. Если видоизменить правила Фейнмана таким образом, что линиям, помеченным на рис. 44.6 крестиками, сопоставлять не функции Грина, а их удвоенные мнимые части, точнее, произвести замену

$$\frac{1}{p^2 + m^2} \rightarrow 2\pi i \delta(p^2 + m^2) \tag{44.5.1}$$

(p — импульс, относящийся к данной линии), то эти диаграммы будут определять удвоенные мнимые части (скачки на разрывах) функций $P(t)$, $f(t)$, $g(t)$. Импульсы этих линий удовлетворяют в силу (44.5.1) уравнению *массовой поверхности* $p^2 + m^2 = 0$, т. е. становятся импульсами, реальных частиц которым на диаграммах Фейнмана отвечают внешние линии.

Если рассеять диаграммы рис. 44.6 по направлениям, соединяющим крестики («унитарные рассеяния»), то каждая диаграмма превратится в две диаграммы реальных процессов с образованием промежуточных состояний (рис. 44.7), которые определяют правую часть соотношения унитарности. Диаграммы же 44.6 определяют левую часть этого соотношения.

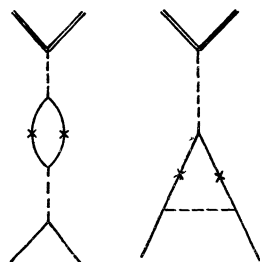


Рис. 44.6.

Таким образом, простой и наглядный способ нахождения мнимых частей амплитуд состоит в построении диаграмм Фейнмана и их унитарных рассеений. В общем случае каждая диаграмма может иметь не одно, а ряд

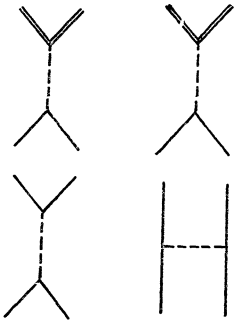


Рис. 44.7.

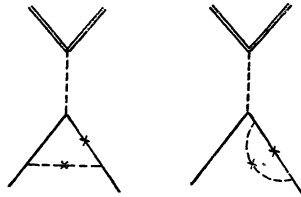


Рис. 44.8.

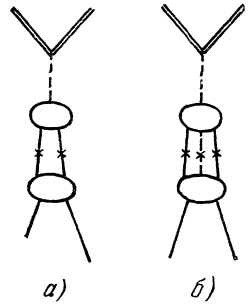


Рис. 44.9.

унитарных рассеений, и надо суммировать вклады от всех рассеений, так как они отвечают различным членам в правой части соотношения унитарности.

Заметим, что при вычислении вершинной функции мы не учитывали диаграмм, изображенных на рис. 44.8: такие диаграммы не могут дать вклад в мнимые части функций $f(t)$ и $g(t)$, так как соответствующие рассеения отвечают излучению фотона свободным электроном, т. е. процессу, запрещенному законами сохранения. Таким образом, по виду диаграмм

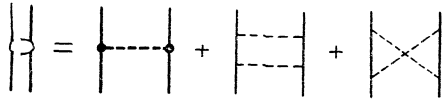


Рис. 44.10.

легко заключить, какие рассеения нужно принимать во внимание.

В качестве примера более сложного случая рассмотрим схему вычисления дисперсионным методом вершинной функции в третьем приближении.

На рис. 44.9 изображены две блок-диаграммы, отвечающие двум типам унитарных рассеений. Диаграмма *a)* рис. 44.9 соответствует двухчастичным промежуточным состояниям (электрон и позитрон), а диаграмма *б)* — трехчастичным (электрон, позитрон и фотон). Верхняя часть диаграммы

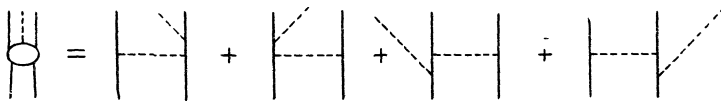


Рис. 44.11.

a) определяется вершинной функцией во втором приближении, нижняя — амплитудой рассеяния позитрона электроном во втором приближении, т. е. диаграммы рис. 44.10; жирные точки и жирная пунктирная линия изображают соответственно вершинные функции и функции Грина во втором приближении, вся амплитуда вычисляется с точностью до членов порядка α . Блоки, определяющие нижнюю часть диаграммы *б)* рис. 44.9, изображены на рис. 44.11. Заметим, что все они отвечают первому приближению для соответствующего процесса.

Из диаграмм рис. 44.9 мы видим, что энергетическим порогом образования обоих типов промежуточных состояний является величина $q_0 = 2m$, т. е. точкой ветвления функций $f(t)$ и $g(t)$ является точка $t = 4m^2$. Форма

дисперсионных соотношений остается той же, что и в (44 4 10) и (44 4 11). Таким образом, можно, в частности, в замкнутом виде вычислить $g(0)$, т. е. вторую радиационную поправку к магнитному моменту электрона и мюона [37].

44.6. Четырехугольная диаграмма и двойное спектральное представление. Выше мы изучили аналитические свойства функций, отвечающих двум простейшим диаграммам, встречающимся в теории радиационных поправок двуугольной диаграммы (поляризованный оператор) и треугольной диаграммы (вершинная функция). Теперь мы рассмотрим с этой точки зрения четырехугольную диаграмму. Мы встречались с четырехугольными диаграммами в задачах о радиационных поправках в рассеянии фотона электроном и электроном электроном, а также в задаче о рассеянии фотона фотоном. В качестве примера мы выберем диаграмму, изображенную на рис. 44 12. Эта диаграмма, на которой жирные линии отвечают мюонам, а простые линии — электронам, дает вклад в следующие три процесса.

I. Рассеяние мюона электроном, $e + \mu \rightarrow e + \mu$.

II. Рассеяние антимюона электроном, $e + \bar{\mu} \rightarrow e + \bar{\mu}$.

III. Превращение электронной пары в мюонную пару, $e + \bar{e} \rightarrow \mu + \bar{\mu}$.

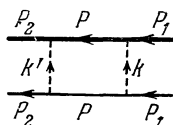


Рис. 44 12.

Каждый из этих процессов отличается от другого переносом символов двух из четырех частиц из одной стороны схемы реакции в другую. Их называют перекрестными (или кросс-реакциями) друг по отношению к другу, а все три процесса — *кросс-каналами* единого обобщенного процесса. Если мы обозначим 4-импульсы электронов через p_1, p_2 , 4-импульсы мюонов через P_1, P_2 , а 4-импульсы соответствующих античастиц через $-p_1, -p_2, -P_1, -P_2$, то сможем записать закон сохранения 4-импульса в единой для всех трех кросс-каналов форме

$$p_1 + P_1 - p_2 - P_2 = 0. \quad (44.6.1)$$

Вклад, вносимый диаграммой рис. 44.12 в амплитуду каждого из трех процессов, также можно записать в единой форме:

$$M = \bar{u}_\alpha(p_2) u_\beta(p_1) \bar{u}_\gamma(P_2) u_\delta(P_1) \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} F, \quad (44.6.2)$$

где u — биспинорные амплитуды, Γ — некоторая матрица и F — инвариантная функция 4-импульсов частиц (формфактор). Наша задача состоит в изучении аналитических свойств этой функции. Существенное усложнение по сравнению со случаями двуугольной или треугольной диаграмм состоит в том, что формфактор является теперь функцией не одной, а двух переменных. Действительно, из четырех 4-векторов, связанных условием (44 6.1), а также соотношениями

$$p_1^2 = p_2^2 = -m^2, \quad P_1^2 = P_2^2 = -M^2$$

(m — масса электрона, M — масса мюона), можно составить два независимых инварианта. В качестве независимых переменных удобно воспользоваться двумя из следующих трех инвариантов:

$$s = -(p_1 + P_1)^2, \quad t = -(p_1 - p_2)^2, \quad u = -(p_1 - P_2)^2, \quad (44.6.3)$$

причем, очевидно, $s + t + u = 2M^2 + 2m^2$.

Эти переменные имеют простой смысл: если рассматривать процесс I в системе центра инерции сталкивающихся частиц, то

$$s = W_1^2, \quad t = 2p_1^2(1 - \cos \vartheta_1),$$

где W_I , p_I , ϑ_I — полная энергия, импульс каждой из частиц и угол рассеяния. Аналогично для процесса II

$$u = W_{II}^2, \quad t = -2p_{II}^2(1 - \cos \vartheta_{II})$$

и для процесса III

$$t = W_{III}^2, \quad u = 2m^2 + 2M^2 - W_{III}^2 + 2p_{III}P_{III} \cos \vartheta_{III},$$

где W_{II} , W_{III} , p_{II} , ϑ_{II} , ϑ_{III} имеют аналогичный смысл, p_{III} — импульс электрона, P_{III} — импульс мюона. Таким образом, каждому из трех кросс-каналов, амплитуда рассеяния в которых определяется единым формфактором F , отвечают определенные (различные) области изменения инвариантных переменных s , t , u . Эти области определяются, очевидно, условиями:

- I. $W_I \geq m + M, \quad |\cos \vartheta_I| \leq 1.$
- II. $W_{II} > m + M, \quad |\cos \vartheta_{II}| \leq 1.$
- III. $W_{III} > 2M, \quad |\cos \vartheta_{III}| \leq 1.$

Диаграмма рис. 44.12 определяет формфактор F не только в этих физических областях, но и при любых (в том числе комплексных) значениях переменных. Он может быть выражен в виде следующего интеграла:

$$F = \int \frac{f(p) d^4p}{(p^2 + m^2 - i0)(P^2 + M^2 - i0)(k^2 + \lambda^2 - i0)(k'^2 + \lambda^2 - i0)}, \quad (44.6.4)$$

где $f(p)$ — некоторая инвариантная функция, не имеющая особенностей (кроме p , она зависит также от 4-импульсов начальных и конечных частиц и их поляризаций),

$$k = p_1 - p, \quad k' = p - p_2, \quad P = P_1 + k.$$

Заметим, что

$$(k + k')^2 = -t, \quad (p + P)^2 = -s.$$

Зафиксируем определенное значение t в физической области канала I, т. е. при $t < 0$, и исследуем аналитические свойства формфактора F как функции переменной s . Это можно сделать так же, как в § 44.1. Нетрудно, исходя из определения (44.6.4), показать, что F действительна при

$$t < 0, \quad s < (m + M)^2.$$

Рис. 44.13.

Точка $s = (m + M)^2$ будет точкой ветвления F как функции s ; эта точка отвечает порогу образования промежуточного состояния, содержащего мюон и электрон при унитарном рассеянии диаграммы рис. 44.12, изображенному на рис. 44.13. Проведя разрез в плоскости s от точки $s = (m + M)^2$ направо, мы получим, применив правило, сформулированное в § 44.1, следующее выражение для скачка функции F на разрезе, который мы обозначим через $\Delta_s F$:

$$\Delta_s F = (2\pi i)^2 \int \frac{f(p) d^4p \delta(p^2 + m^2) \delta(P^2 + M^2) \theta(p_0)}{(k^2 + \lambda^2)(k'^2 + \lambda^2)}. \quad (44.6.5)$$

Мнимая часть F связана со скачком соотношением

$$\text{Im} F = \frac{1}{2i} \Delta_s F, \quad t < 0, \quad s > (m + M)^2.$$

Знание $\Delta_s F$ позволяет построить дисперсионное соотношение по переменной s при заданном t :

$$F(s, t) = \frac{1^n}{2\pi i} \int_{(m+M)^2}^{\infty} \frac{\Delta_s F(s', t) ds'}{s' - s}. \quad (44.6.6)$$

В (44.6.6) предполагается, что $\Delta_s F$ убывает при $s \rightarrow \infty$ так, что этот интеграл существует. Если это условие не выполнено, то дисперсионное соотношение в форме (44.6.6) не существует. В этом случае можно составить аналогичное соотношение для величины $(F(s, t) - F(s_0, t))/(s - s_0)$ (s_0 — некоторое значение переменной s), что дает

$$F(s, t) - F(s_0, t) = \frac{s - s_0}{2\pi i} \int \frac{\Delta_s F(s', t) ds'}{(s' - s_0)(s' - s)}. \quad (44.6.7)$$

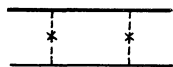


Рис. 44.14.

Формула (44.6.7) является примером дисперсионного соотношения с вычитанием, определяющего функцию F с точностью до аддитивной постоянной (предполагается существование входящего в формулу интеграла).

Аналогично можно рассмотреть свойства формфактора F как функции переменной t , зафиксировав s в физической области канала III. Для этого надо использовать унитарное рассеяние диаграммы рис. 44.12, изображенное на рис. 44.14. Соответствующий скачок $\Delta_t F$ будет иметь следующий вид:

$$\Delta_t F = (2\pi i)^2 \int \frac{f(p) d^4 p \delta(k^2 + \lambda^2) \delta(k'^2 + \lambda^2) \theta(k_0)}{(p^2 + m^2)(P^2 + M^2)}.$$

Знание $\Delta_t F$ позволяет построить дисперсионное соотношение по переменному t при данном s .

Вернемся к выражению (44.6.5) для $\Delta_s F$. Интегрирование в нем можно свести к интегрированию по углу между импульсами промежуточной и начальной или конечной частиц в системе центра инерции:

$$\Delta_s F = \frac{(2\pi i)^2 p_I}{4W_I} \int \frac{f(p) do}{(k^2 + \lambda^2)(k'^2 + \lambda^2)},$$

где $f(p)$ является значением $f(p)$ на массовой поверхности $p^2 = -m^2$. Величины k^2 и k'^2 можно выразить через косинусы углов между направлениями импульсов:

$$k^2 = 2p_1^2(1 - z_1), \quad k'^2 = 2p_1^2(1 - z_2); \quad z_2 = z z_1 + \sqrt{(1 - z^2)(1 - z_1^2)} \cos \varphi,$$

где

$$z_1 = \cos \vartheta_1, \quad z_2 = \cos \vartheta_2, \quad z = \cos \vartheta_I$$

(ϑ_1 угол между p и $p_{1,2}$), а телесный угол do — через z_1 и z_2 :

$$do = dz_1 d\varphi = \frac{1}{\sqrt{K(z, z_1, z_2)}} dz_1 dz_2,$$

где

$$K(z, z_1, z_2) = 1 - z^2 - z_1^2 - z_2^2 + 2zz_1z_2. \quad (44.6.8)$$

Тогда $\Delta_s F$ примет следующий вид:

$$\Delta_s F = \frac{(2\pi i)^2}{4W_1 p_1^3} \int_{-1}^1 \frac{dz_1}{z_1 - \zeta} \int_{z_2}^{z_2^+} \frac{dz_2}{z_2 - \zeta} \frac{f(p)}{\sqrt{K(z, z_1, z_2)}}, \quad (44.6.9)$$

где

$$\zeta = 1 + \frac{\lambda^2}{2p_1^2}$$

и z_2^\pm — корни полинома K :

$$z_2^\pm = z z_1 \pm \sqrt{(1 - z_1^2)(1 - z^2)}.$$

Интеграл (44.6.9) нетрудно вычислить, после чего нахождение F сводится к вычислению дисперсионного интеграла (44.6.6).

Полученные выше дисперсионные соотношения имеют несимметричный относительно двух переменных характер: одна из переменных выступает в качестве параметра. Можно представить функцию F в симметричной относительно переменных s, t форме: в виде двойного спектрального разложения (двойного дисперсионного интеграла).

Для нахождения его вида достаточно выяснить аналитические свойства скачка $\Delta_s F(s, t) \equiv 2iF_1(s, t)$ как функции комплексного переменного t . При $t < 0$ функция F_1 представляет собой мнимую часть функции F , т. е. является действительной величиной. Для продолжения функции F_1 в область $t > 0$ ($|z| > 1$) может служить интеграл (44.6.9) или (44.6.5).

Заметим, что область $t > 0$ включает физическую область канала III.

Формально выражение (44.6.5) можно сопоставить двугольной диаграмме, изображенной на рис. 44.15. Сделав ее унитарное рассеяние, т. е. заменив фотонные функции Грина соответствующими δ -функциями, мы найдем положение точки ветвления функции F_1 и ее мнимую часть. Используя (44.6.5) и (44.6.9), получим

$$\text{Im } F_1(s, t) \equiv \rho(s, t) = \frac{\pi^4}{2W_1 \rho_1^2} \frac{f(p)}{\sqrt{-K(z, \zeta, \xi)}}, \quad (44.6.10)$$

где K определяется формулой (44.6.8) и $f(p)$ берется при $z_1 = z_2 = \zeta$. Функция ρ отлична от нуля при $K(z, \zeta, \xi) > 0$, что соответствует нефизическим областям каналов I и III.

Из (44.6.10) следует, что для F_1 можно построить дисперсионное соотношение

$$F_1(s, t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho(s, t')}{t' - t} dt' \quad (44.6.11)$$

и, следовательно, выразить F в виде двойного спектрального представления (представление Манделстама) [38]:

$$F(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho(s', t') ds' dt'}{(s' - s)(t' - t)}. \quad (44.6.12)$$

Область интегрирования в (44.6.11) и (44.6.12) совпадает с областью определения функции $\rho(s, t)$. Если характер поведения ρ на бесконечности таков, что он не обеспечивает сходимости интегралов (44.6.11), (44.6.12), то эти представления должны быть заменены соответствующими представлениями с вычитательными членами, например:

$$F(s, t) - F(s_0, t_0) = \frac{(s - s_0)(t - t_0)}{\pi^2} \iint \frac{\rho(s' t') ds' dt'}{(s' - s)(s' - s_0)(t' - t)(t' - t_0)}.$$

При этом определение F требует задания дополнительного условия — значения $F(s_0, t_0)$.

В заключение покажем схематически, как можно найти амплитуду второго приближения для рассеяния мюона электроном и соответствующих кросс-процессов без использования обычной теории возмущений. При этом мы будем основываться на соотношениях унитарности, предполагая изве-

стным первое приближение для амплитуды Мы будем считать, как и выше, что амплитуда рассеяния не имеет других особенностей, кроме тех, которые содержатся в ее первом приближении, и тех, которых требуют соотношения унитарности. Кроме того, будем считать, что амплитуда обладает свойством кросс-инвариантности, означающим, что одни и те же функции описывают все три кросс-канала данной реакции

Во втором приближении достаточно рассматривать в качестве промежуточных состояний в соотношениях унитарности только двухчастичные состояния. Такими состояниями могут быть

в процессе I электрон и мюон,

в процессе II электрон и антимюон,

в процессе III электрон и позитрон, или мюон и антимюон, или два фотона

Соотношения унитарности, отвечающие процессам I и II, иллюстрируются схемой, изображенной на диаграммах а) и в) рис 44 16. Заменяя в этой схеме левый и правый блоки диаграммами Фейнмана для первого

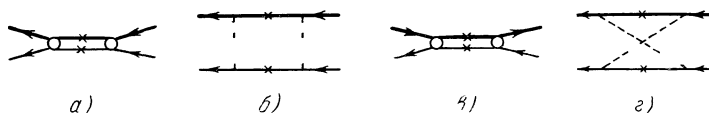


Рис 44 16.

приближения, мы приходим к диаграмме б) в случае процесса I и к диаграмме г) в случае процесса II. Эти диаграммы унитарных рассеяний определяют скачки амплитуды как функции инвариантной переменной s (или u) при данном t . Особые точки определяются порогами образования промежуточных состояний, которыми являются

$$\text{в канале I } s = (m + M)^2,$$

$$\text{в канале II } u = (m + M)^2$$

$$(\text{напомним, что } u + s + t = 2m^2 + 2M^2).$$

Таким образом, соотношения унитарности для каналов I и II определяют дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния. Последнюю в общем случае можно представить в виде суммы членов типа (44 6 2), а каждый из формфакторов F записать в виде

$$F(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m+M)^2}^{\infty} \frac{\Delta_s F(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{2\pi i} \int_{(m+M)^2}^{\infty} \frac{\Delta_u F(u', t)}{u' - u} du' + F'(t) \quad (44 6 13)$$

(или в виде аналогичного выражения с вычитательными членами типа (44 6 7)). Здесь $\Delta_s F$ и $\Delta_u F$ — скачки формфактора, определяемые соответственно диаграммами б) и г) рис 44 15, а $F'(t)$ — некоторая функция, не зависящая от s

Для нахождения функции $F'(t)$ воспользуемся соотношением унитарности для канала III, в котором переменная t определяется энергией системы. Это соотношение унитарности иллюстрируется диаграммами рис 44 17. Диаграммы а) рис 44 17 (четыреугольные) отвечают функциям двух переменных (s, t или u, t). Соответствующая им часть амплитуды уже была

получена выше при помощи дисперсионного соотношения по переменной s , так что нет нужды вновь восстанавливать ее при помощи дисперсионного соотношения по переменной t . Остальные диаграммы рис. 44.17, как легко видеть, содержат вершинную функцию или поляризационный оператор. Таким образом, $\text{Im } F'(t)$ можно выразить через $\text{Im } P(t)$, $\text{Im } f(t)$ и $\text{Im } g(t)$, т. е. через мнимые части поляризационного оператора и формфакторов

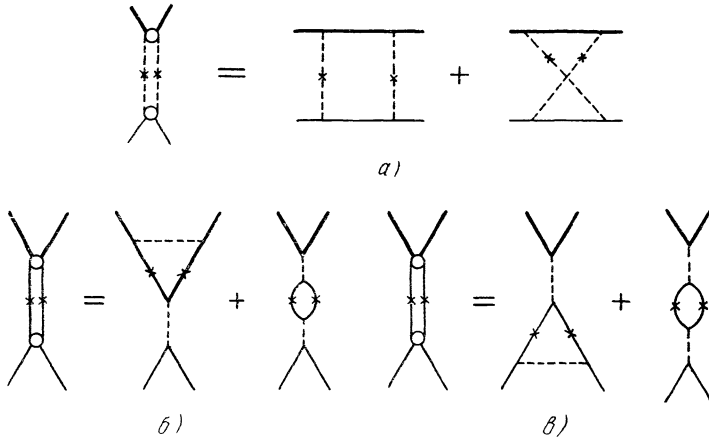


Рис. 44.17.

электрона и мюона. Соответственно $F'(t)$ выражается через $P(t)$, $f(t)$ и $g(t)$. Мы приходим, таким образом, к совокупности диаграмм Фейнмана, изображенных на рис. 44.10.

Дисперсионный метод дает возможность вычислить все практически важные радиационные поправки. Можно думать, что таким путем можно находить последовательно любые высшие приближения, т. е. восстанавливать на основе соотношения унитарности с использованием требования аналитичности и кросс-инвариантности произвольный член перенормированного ряда теории возмущений. Однако доказательства этого положения до сих пор не существует. Это связано с трудностями исследования многочастичных состояний и аналитических свойств функции многих комплексных переменных. Поэтому не существует общего спектрального представления в случае произвольного числа частиц, участвующих в процессе и общего члена разложения амплитуды в ряд по степеням α .

ЛИТЕРАТУРА

К главе I

1. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Квантовая механика, изд. 2, Физматгиз, М., 1963.
2. Л. Ландау, Р. Пайерлс, *Zs. f. Phys.* **62**, 188 (1930).
3. В. Берестецкий, *ЖЭТФ* **17**, 12 (1947).
4. Е. Вигнер, Теория групп, ИЛ, М., 1961.
5. G. R a s a h, *Phys. Rev.* **62**, 439 (1942).
6. Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, ГТТИ, М.—Л., 1935.
7. W. H e i t l e r, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **32**, 112 (1936).
8. Л. Ландау, *ДАН СССР* **60**, 207 (1948).
9. P. A. M. D i g a s, *Proc. Roy. Soc. A* **114**, 243, 710 (1927).
10. В. Фок, *Zs. f. Phys.* **75**, 622 (1932); *Sow. Phys.* **6**, 425 (1934).
11. Е. Ферми, *Revs. Mod. Phys.* **4**, 125 (1932).
12. S. G u r t a, *Proc. Phys. Soc.* **63 A**, 681 (1950); K. B l e u l e r, *Helv. Phys. Acta* **23**, 567 (1950).
13. W. P a u l i, *Revs. Mod. Phys.* **15**, 175 (1943).
14. P. J o r d a n, W. P a u l i, *Zs. f. Phys.* **47**, 151 (1928).
15. N. B o h r, L. R o s e n f e l d, *Kgl. Dan. Vid. Sels. Mat.-Fys. Medd.* **12**, № 8 (1933).
16. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.

К главе II

1. P. A. M. D i g a s, *Proc. Roy. Soc. A* **117**, 610; **118**, 341 (1928).
2. O. K l e i n, *Zs. f. Phys.* **37**, 895 (1926).
3. В. А. Фок, *Zs. f. Phys.* **38**, 242; **39**, 226 (1926).
4. H. W e y l, *Zs. f. Phys.* **56**, 330 (1929).
5. E. M a j o r a n a, *Nuovo Cim.* **14**, 171 (1937).
6. В. Паули, Общие принципы волновой механики, ГТТИ, М.—Л., 1947.
7. L. M. Y a n g, *Phil. Mag.* **42**, 1331 (1952); E. R. C a i a n e l l o, S. F u b i n i, *Nuovo Cim.* **9**, 1218 (1952); P. П о л о в и н, *ЖЭТФ* **31**, 441 (1956).
8. J. S. R. C h i s h o l m, *Nuovo Cim.* **30**, 426 (1963).
9. M. F i e r z, *Zs. f. Phys.* **104**, 553 (1937).
10. В. Берестецкий, *ЖЭТФ* **21**, 43 (1951).
11. L. M i c h e l, A. S. W i g h t m a n, *Phys. Rev.* **98**, 1190 (1955).
12. L. S h i f f, H. S n y d e r, J. W e i n b e r g, *Phys. Rev.* **57**, 315 (1940).
13. И. Померанчук, Я. Смородинский, *Journ. Phys.* **9**, 97 (1945).
14. W. H. F u r g g y, *Phys. Rev.* **46**, 391 (1934).
15. N. F. M o t t, *Proc. Roy. Soc. A* **124**, 425 (1925).
16. W. A. M c K i n l e y, H. F e s h b a c h, *Phys. Rev.* **74**, 1759 (1948).
17. J. A. D o g g e t, L. V. S r e n s e r, *Phys. Rev.* **103**, 1597 (1956).
18. N. S h e r m a n, *Phys. Rev.* **103**, 1601 (1956).
19. J. H. B a r t l e t t, R. E. W a t s o n, *Proc. Am. Acad. Sc.* **74**, 53 (1940).
20. W. P a u l i, *Zs. f. Phys.* **43**, 601 (1927).
21. W. P a u l i, *Helv. Phys. Acta* **5**, 179 (1932).
22. И. Гельфанд, А. Яглом, *ЖЭТФ* **18**, 703 (1948).
23. W. P a u l i, *Phys. Rev.* **58**, 116 (1940).
24. В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, М., 1947.
25. R. J. D u f f i n, *Phys. Rev.* **54**, 905 (1938).
26. N. K e m m e r, *Proc. Roy. Soc. A* **173**, 97 (1939).

25. A. P r o s a, Journ. de Phys. 7, 347 (1936).
26. V. B a r g m a n, E. W i g n e r, Proc. Nat. Ac. Sc. (USA) 34, 211 (1948).
27. W. R a r i t a, J. S c h w i n g e r, Phys. Rev. 60, 61 (1941).
A. C. Д а в ы д о в, ЖЭТФ 13, 313 (1943).

К главе III

1. P. D i r a c, Proc. Roy. Soc. A 114, 243, 710 (1927).
2. S. T o m o n a g a, Progr. Theor. Phys. 1, 27 (1946); J. S c h w i n g e r, Phys. Rev. 74, 1439 (1948).
3. J. S c h w i n g e r, Phys. Rev. Lett. 3, 296 (1959).
4. W. H e i s e n b e r g, Zs. f. Phys. 120, 513 (1943).
5. F. D y s o n, Phys. Rev. 75, 486 (1949).
6. G. W i c k, Phys. Rev. 80, 268 (1950).
7. S. H o r i, Progr. Theor. Phys. 7, 578 (1952).
8. R. F e u n m a n, Phys. Rev. 76, 749, 769 (1949).
9. W. F u r r y, Phys. Rev. 51, 125 (1937).
10. J. S c h w i n g e r, Phys. Rev. 82, 914 (1951).
11. E. W i g n e r, Gött. Nachr. 546 (1932).
12. L. W o l f e n s t e i n, D. R a v e n h a l l, Phys. Rev. 88, 229 (1953).
13. W. P a u l i, Статья в сборнике: N. Bohr and the Development of Physics, Pergamon Press, London, 1955; R. L ü d e r s, Kgl. Dan. Vid. Sels. Mat.-Fys. Medd. 28, № 5 (1954).
14. Д. В. В о л к о в, Труды Физ. отделения ХГУ 7 (1958).
15. F. D y s o n, Phys. Rev. 75, 1736 (1949).
16. J. W a r d, Phys. Rev. 73, 182 (1950).
17. G. K ä l l e n, Helv. Phys. Acta 25, 417 (1952); H. L e h m a n n, Nuovo Cim. 11, 342 (1954).
18. M. G e l l - M a n n, F. L o w, Phys. Rev. 95, 1300 (1954).
19. J. S c h w i n g e r, Proc. Nat. Acad. USA 37, 452, 455 (1951).
20. R. F e u n m a n, Phys. Rev. 84, 108 (1951); Н. Н. Б о г о л ю б о в, ДАН СССР 99, 225 (1954); S. F. E d w a r d s, R. E. P e i e r l s, Proc. Roy. Soc. 224, 24 (1954); И. М. Г е л ь ф а н д, Р. А. М и н л о с, ДАН СССР 97, 209 (1954); Е. С. Ф р а д к и н, ДАН СССР 100, 897 (1955); P. T. M a t t e w s, A. S a l a m, Nuovo Cim. 12, 563 (1954).
21. Л. Д. Л а н д а у, И. М. Х а л а т н и к о в, ЖЭТФ 29, 89 (1955).
22. J. W a r d, Proc. Phys. Soc. A 64, 54 (1951).
23. W. T h i r r i n g, Phil. Mag. 41, 1193 (1950).
24. A. S a l a m, Phys. Rev. 82, 217; 84, 426 (1951).
25. Н. Н. Б о г о л ю б о в, Д. Ш и р к о в, ДАН СССР 103, 203 (1955); Н. Н. Б о г о л ю б о в, Д. Ш и р к о в, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.
26. П. И. Ф о м и н, ЖЭТФ 43, 1934 (1962).
27. Л. Д. Л а н д а у, А. А. А б р и к о с о в, И. М. Х а л а т н и к о в, ДАН СССР 95, 497, 773, 1117 (1954).
28. F. D y s o n, Phys. Rev. 85, 631 (1952).
29. Л. Д. Л а н д а у, И. Я. П о м е р а н ч у к, ДАН СССР 102, 489 (1955).
30. И. Я. П о м е р а н ч у к, Nuovo Cimento 10, 1186 (1956).

К главе IV

1. D. R. H a m i l t o n, Phys. Rev. 58, 122 (1940).
2. А. З. Д о л г и н о в, Гамма-лучи, гл. 6, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1961.
3. А. З о м м е р ф е л ь д, Строение атома и спектры, ч. II, Гостехиздат, 1956.
4. F. S a u t e r, Ann. d. Phys. 9, 217; 11, 454 (1931).
5. O. K l e i n, Y. N i s h i n a, Zs. f. Phys. 52, 853 (1929); I. T a m m, Zs. f. Phys. 62, 545 (1930).
6. U. F a n o, Phys. Rev. 93, 121 (1954); F. W. L i p p s, H. A. T o l h o e k, Physica 20, 85 (1954); W. H. M c M a s t e r, Rev. Mod. Phys. 33, 8 (1961).
7. H. A. K r a m e r s, W. H e i s e n b e r g, Zs. f. Phys. 31, 681 (1925).
8. V. W e i s s k o r f, E. W i g n e r, Zs. f. Phys. 63, 54; 65, 18 (1930); V. W e i s s k o r f, Ann. d. Phys. 9, 23 (1931).
9. M. M a y e r - G ö r p e r t, Naturwiss. 17, 932 (1929), Ann. d. Phys. 9, 273 (1931).
10. G. B r e i t, E. T e l l e r, Astroph. Journ. 91, 215 (1940).
11. H. B e t h e, W. H e i t l e r, Proc. Roy. Soc. 146, 83 (1934).

12. H. W. Koch, J. W. Motz, *Rev. Mod. Phys.* **31**, 920 (1961).
13. Г. Л. Высоцкий, А. А. Креснин, Л. Н. Розенцвейг, *ЖЭТФ* **32**, 1078 (1957).
14. H. Olsen, L. Maximon, *Phys. Rev.* **110**, 589 (1958).
15. K. W. McVoy, *Phys. Rev.* **110**, 484 (1958).
16. A. Nordstieck, *Phys. Rev.* **93**, 785 (1954).
17. Б. Федюшкин, *ЖЭТФ* **28**, 140 (1952).
18. H. Bethe, L. Maximon, *Phys. Rev.* **93**, 768 (1954).
19. R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **74**, 1430 (1953); J. B. French, V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **75**, 1240 (1949).
20. R. Glauber, *Phys. Rev.* **84**, 395 (1951); R. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).
21. F. Low, *Phys. Rev.* **110**, 974 (1958).
22. G. Racah, *Nuovo Cim.* **13**, 69 (1936).
23. Y. Nishina, S. Tomonaga, S. Sakata, *Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Japan* **24**, № 17 (1934).
24. P. A. M. Dirac, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **26**, 361 (1930).
25. I. Tamm, *Zs. f. Phys.* **62**, 545 (1930).
26. L. A. Page, *Phys. Rev.* **106**, 394 (1957).
27. И. Я. Померанчук, *ДАН СССР* **60**, 218 (1947).
28. A. Ore, J. Powell, *Phys. Rev.* **75**, 1696 (1949).
29. E. Fermi, G. E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **44**, 510 (1933).
30. C. Moller, *Ann. d. Phys.* **14**, 531 (1932).
31. H. J. Vhabha, *Proc. Roy. Soc.* **154**, 195 (1936).
32. S. Sarkar, *Nuovo Cim.* **24**, 139 (1962).
33. H. J. Vhabha, *Proc. Roy. Soc.* **164**, 257 (1938); H. S. W. Massey, H. C. Corben, *Proc. Cam. Phil. Soc.* **35**, 463 (1939).
34. G. W. Ford, C. J. Mullin, *Phys. Rev.* **108**, 477 (1957).
35. В. Б. Берестецкий, И. Я. Померанчук, *ЖЭТФ* **29**, 864 (1955).
36. G. Breit, *Phys. Rev.* **34**, 553 (1929); Л. Ландау, *Sov. Phys.* **8**, 487 (1932); H. Bethe, E. Fermi, *Zs. f. Phys.* **77**, 296 (1932).
37. J. Pirenne, *Arch. Sc. Phys. et. Nat.* **29**, 207 (1947); В. Берестецкий, Л. Ландау, *ЖЭТФ* **19**, 673 (1949).
38. В. Берестецкий, *ЖЭТФ* **19**, 1130 (1949).
39. M. Deutsch, E. Dulit, *Phys. Rev.* **84**, 601 (1951).
40. И. Я. Померанчук, И. М. Шмушкевич, *Nucl. Phys.* **23**, 452 (1961).
41. E. Fermi, *Zs. f. Phys.* **29**, 315 (1924); C. Weizsacker, *Zs. f. Phys.* **88**, 612 (1934); E. Williams, *Phys. Rev.* **45**, 729 (1934); *Kgl. Dan. Vid. Selck.* **13**, 4 (1935).
42. Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Sov. Phys.* **6**, 244 (1934).
43. M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev.* **79**, 615 (1950).
44. D. R. Yenni, M. M. Levy, D. A. Ravenhall, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 144 (1957); Y. Glaser, В. Таксис, *Nuovo Cim.* **5**, 1197 (1957).
45. В. Берестецкий, *ЯФ* **3**, 1169 (1966).
46. G. Wick, *La Ricerca Scient.* **11**, 49 (1940); К. Тер-Мартirosян, *ЖЭТФ* **20**, 925 (1950).
47. M. H. Hebb, G. E. Uhlenbeck, *Physica* **5**, 605 (1938); S. M. Danhoff, P. R. Morrison, *Phys. Rev.* **55**, 423 (1939).
48. В. Берестецкий, И. Шмушкевич, *ЖЭТФ* **19**, 591 (1949); И. Шапиро, *ЖЭТФ* **19**, 597 (1949); M. Rose, *Phys. Rev.* **76**, 678 (1949).
49. Л. Слив, И. Банд, *Таблицы коэффициентов внутренней конверсии гамма-лучей*, Изд. АН СССР, М., 1956.

К главе V

1. R. Feynman, *Phys. Rev.* **16**, 769 (1949).
2. А. И. Ахиезер, Р. В. Половин, *УФН* **51**, 3 (1953).
3. E. A. Uehling, *Phys. Rev.* **48**, 55 (1935).
4. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **75**, 651 (1949).
5. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **75**, 1912 (1949).
6. C. M. Sommerfield, *Phys. Rev.* **107**, 328 (1957); A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* **30**, 409 (1957).
7. В. Б. Берестецкий, О. И. Крохин, А. К. Хлебников, *ЖЭТФ* **30**, 788 (1956).
8. F. Low, *Phys. Rev.* **88**, 53 (1952).
9. H. Bethe, *Phys. Rev.* **72**, 339 (1947).
10. N. Kroll, W. Lamb, *Phys. Rev.* **75**, 388 (1949).

11. R. Karplus, A. Klein, J. Schwinger, Phys. Rev. **86**, 288 (1952).
12. W. E. Lamb, R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
13. R. Karplus, A. Klein, Phys. Rev. **87**, 848 (1952).
14. V. W. Hugs, S. Marder, C. S. Wu, Phys. Rev. **106**, 934 (1957).
15. А. Галаннин, И. Померанчук, ДАН СССР **86**, 251 (1952).
16. F. Low, Phys. Rev. **88**, 53 (1952).
17. R. Dalitz, Proc. Roy. Soc. A **206**, 509 (1951).
18. L. Elton, H. Robertson, Proc. Roy. Soc. A **65**, 145 (1952).
19. J. Jauch, F. Rohrlich, Helv. Phys. Acta **27**, 613 (1954); D. R. Yennie, S. C. Frautchi, H. Suura, Ann. of Phys. **13**, 379 (1961).
20. V. Chung, Phys. Rev. **140**, в 1110 (1965); M. Greco, G. Ross; Nuovo Cim. **50A**, 168 (1967).
21. А. Ахиезер, Р. Половин, ДАН СССР **90**, 55 (1953).
M. Redhead, Proc. Roy. Soc. A **220**, 219 (1953).
22. L. Brown, R. Feunman, Phys. Rev. **85**, 231 (1952).
23. F. Low, Phys. Rev. **96**, 1428 (1954); M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, Phys. Rev. **96**, 1433 (1954).
24. J. Haggis, M. Brown. Phys. Rev. **105**, 1656 (1957).
25. П. Фомин, ЖЭТФ **35**, 707 (1958).
26. С. Гузенко, П. Фомин, ЖЭТФ, **38**, 513 (1960); **44**, 1687, 1093 (1963).
27. H. Euler, Ann. d. Phys. **26**, 398 (1936); А. И. Ахиезер, Sow. Phys. **11**, 263 (1937); H. Karplus, M. Neuman, Phys. Rev. **80**, 380 (1950).
28. W. Heisenberg, H. Euler, Zs. f. Phys. **98**, 714 (1936); V. Weisskopf, Kgl. Dan. Vid. Sels. Mat.-Fys. Medd. XIV, 6 (1936); J. Schwinger, Phys. **73**, 416; **74**, 1439 (1948).
29. О. Налперн, Phys. Rev. **44**, 855 (1933); А. Ахиезер, И. Померанчук, Sow. Phys. **11**, 478 (1937); А. Кеммер, G. Ludwig, Helv. Phys. Acta **10**, 182 (1937).
30. R. Jost, J. Luttinger, M. Slotnik, Phys. Rev. **80**, 89 (1950); H. Bethe, Proc. Camb. Phil. Soc. **30**, 524 (1934).
31. F. Rohrlich, R. Gluckstern, Phys. Rev. **86**, 1 (1952).
32. H. Bethe, F. Rohrlich, Phys. Rev. **86**, 10 (1952).
33. В. В. Судаков, ЖЭТФ **30**, 87 (1956).
34. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **30**, 386, 544 (1956).
35. В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Г. В. Фролов, ЖЭТФ **51**, 1093 (1966);
А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **30**, 386 (1956); В. Н. Байер, С. А. Хейфец,
ЖЭТФ **40**, 613, 15 (1961); В. Г. Горшков, А. Н. Грибов, Л. Н. Липатов,
Г. В. Фролов, ЯФ **6**, 129, 361 (1967).
36. В. Б. Берестецкий, УФН **76**, 25 (1962).
37. М. В. Терентьев, ЖЭТФ **43**, 619 (1962).
38. S. Mandelstam, Phys. Rev. **112**, 1344 (1958).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адрон 232, 471
Азимутальная асимметрия 149
Алгебра матриц Дирака 90
Амплитуда излучения 348
— рассеяния 147, 247
Аналитические свойства 77, 302, 599
Аннигиляционное взаимодействие 455
Аннигиляция пары 433, 439
Аномальный магнитный момент 507, 608, 610
Антикоммутатор 181
— электронного поля 188
Асимптотика волновой функции 144, 408
— функций Грина 342
- Билинейные формы биспиноров 105
Биспинор 83
Бозоны 194
Борновское приближение 151
- Вакуум** 203
Вакуумные средние 293
Вариационный принцип 20, 105, 167
Векторное сложение 42
Вероятность перехода 247
Вершинная диаграмма 285
— функция 287, 501
— — адрона 473
— — трехфотонная 324
Ветвление 601
Виртуальные частицы 241
Водородоподобный атом 138
Возбуждение ядер 482
Волновая функция фотона 30
- Гамильтониан взаимодействия 207, 210, 215
— с точностью v^2/c^2 159
Гейзенберговское представление 197
Генератор преобразования 261
Гипергеометрическая функция 137
Гиперкомплексные числа 90
Граничный импульс 328
Группа Лоренца однородная 18
— — собственная 18, 162
— Пуанкаре 260
- Дважды логарифмическая асимптотика 583, 591, 598
Двойное спектральное представление 614
Действие 21
- Диаграммы Фейнмана 234, 240
Дисперсионная формула 383
Дисперсионное соотношение 576, 603, 614
Дополнительное условие для потенциалов 16, 59, 192, 212
- Запаздывающее взаимодействие 446
Запаздывающие потенциалы 449
Зарядовая четность 275
— — системы e^+e^- 277
Зарядовое сопряжение 101, 272
Зееман-эффект в позитронии 460
Знаковая функция 185
- Излучение** 347
— двух фотонов 385
— мультипольное 348, 350, 354
— мягких фотонов 410, 424
Импульс электромагнитного поля 28, 59
— электронного поля 106
Инвариантность сечения 252
— уравнений квантовой электродинамики 259, 263, 272, 282
Инверсия 19, 98
Индефинитная метрика 63
Интегралы по инвариантному объему 490
Инфинитезимальные операторы группы Лоренца 131
Инфинитезимальный оператор 19, 96, 163
— — для биспинора 96
Инфракрасная расходимость 408, 530
- Калибровочное преобразование 16, 17, 66, 108, 282
— — 2-го рода 108, 169, 282
— — функции Грина 315
Квадратичная расходимость 327, 494
Ковариантные компоненты 41
Когерентное рассеяние фотонов внешним полем 569, 575, 582
Когерентные состояния электромагнитного поля 422
Коммутатор векторов поля 69
— потенциалов 71
Коммутаторы 51, 201
— импульсов 263
— моментов 263
Компактные диаграммы 281
Комптон-эффект 366

- Конверсия 484, 486, 488
 Континуальный интеграл 310
 Контравариантные компоненты 40
 Корреляционная поляризация 359
 Корреляция угловая 359
 Кросс-канал 611
 Коэффициенты Вигнера $3j$ 43
 — — $6j$ 44
 — Рака 43, 357
 — Клебша — Гордана 42, 43, 122
- Лагранжиан** 20, 167
 — взаимодействия 108, 199, 217
 — нелинейный 558, 560
 — электромагнитного поля 22
 — электронного поля 106
 Логарифмическая расходимость 321, 493
- Максвелла уравнения** 15
 Манделстама представление 614
 «Масса» фотона 412, 528
 Массовый оператор 289, 498, 511
 Матрица плотности позитрона 119
 — — фотона 34
 — — электрона 117
 — рассеяния 216
 Матрицы Дирака 84, 85, 89
 — Паули 82
 Метод Вейцеккера — Вильямса 465
 Момент электромагнитного поля 26
 Монополь 354, 482
 Мультипольное излучение 348
 Мультипольный момент магнитный 350, 354
 — — электрический 349, 354
 Мюон 232, 444, 510
- Нормальное произведение** 72, 190, 226
Нормировка биспинора 114
 — на объем 31
 — на сферу 32
- Обменное взаимодействие** 448, 454
Обращение времени 19, 99
 — — для биспинора 100
 — — — тока 20
 — — электромагнитного поля 20
 — — сильное 264
 — — слабое 278
Обращенные состояния 270
Оператор Деламбера 16
 — заряда 180, 202
 — зарядового сопряжения 272
 — инфинитезимальный 19, 163
 — калибровочного преобразования 66
 — преобразования 208, 216
 — проектирования 118
 — спина фотона 140
 — тока 183, 206
 — упорядоченный 229
Операторы взаимодействующих полей 205
 — импульса 261
 — испускания и поглощения фотона 61
- Операторы испускания и поглощения**
 электрона и позитрона 184
 — момента 261
 — полей 220
 Оптическая теорема 570
 Ортопозитроний 437, 458
 Отражение пространственное 19
 — сильное 264
 — слабое 277
 Отрицательная частота 110
- Параметры Стокса** 35, 255
 Парапозитроний 437, 458
 Парциальная волна 148
 Пары электронно-позитронные 425, 471
 Перенормировка вершинной функции 320
 — заряда 318
 — массы 315
 — матрицы рассеяния 325
 — функции Грина 320
 Перенормировочные константы 205, 206, 320
 Перенормируемость 325
 Перестановочные соотношения 57, 202
 — — для электромагнитного поля 69
 — — — электронного поля 181, 188
 Плоские волны 27, 113
 Позитрон 111
 Позитроний 437, 457
 Поляризационный момент 355
 — оператор 290, 499, 599, 604
 Поляризованные частицы 248, 253
 Поляризация в кулоновском поле 153
 — позитрона 116, 118, 436
 — при рассеянии 149
 — электрона 149, 378, 444
 — фотона 34, 358, 374, 376, 393, 435
 Поперечность 206
 Потенциальная яма для электрона 133
 Потенциалы перехода 449
 Потери энергии на излучение 398
 Правила Вика 226
 — отбора при излучении 352
 — Фейнмана 244
 Правило обхода полюсов Фейнмана 74
 Представление взаимодействия 207, 209
 — Майорана 89
 — Манделстама 614
 Представление группы Лоренца 162
 Преобразование Фирца — Паули 93
 Продольные фотоны 58, 62
 Произведение представлений 165
 Псевдоевклидова метрика 257
- Радиальные функции электрона** 124, 132
Радиационное смещение в водороде 518
 — — в μ -мезоводороде 519
 — — урвной 513
Радиационные поправки 523, 528, 536, 539, 550, 552, 554, 599
Распределение Пуассона 410, 415
Рассеяние в кулоновском поле 153
 — мягких фотонов 546
 — фотона фотоном 556

- Расходимости 327, 493
 Расходящиеся волны 144, 408
 Регуляризация 329, 332
 Регуляризованный оператор 321
 Резонансное рассеяние 384, 520
 Ренормализационная группа 341

 Свертка операторов 191
 Связь операторов 191, 235
 Сечение рассеяния 147, 251
 Сингулярные функции поля 71, 75, 78
 — — — электронного поля 192
 Следы матриц 91
 Собственно энергетическая диаграмма электронная 284
 — — — фотонная 285
 — энергетические функции 287
 Соотношение унитарности 569, 604
 Спектральное представление функции Грина 301
 Спинор 82
 Спин частицы 169
 Спин электрона 97
SPT-теорема 279
 Степень поляризации 36
 Сходящиеся волны 144, 408

 Тензор момента количества движения 25, 107, 168, 200
 — энергии — импульса 23, 106, 168
 Теорема Паули 194
 — *SPT* 279
 — Фарри 243
 Тождество Уорда 292
 Ток 87, 206
 — нейтральной частицы 481
 — перехода 352, 447
 — — адрона 472
 — — магнитного типа 353
 — — электрического типа 353
 Томсона формула 318, 371, 372
 Тонкая структура 139
 Тормозное излучение 387, 467, 469

 Уравнение Бергмана — Вигнера 179
 — Вейля 89
 — Дирака 83, 84, 85
 — — 2-го порядка 87
 — Дuffина — Кеммера 175
 — непрерывности 87
 — Паули 157
 — Шредингера для фотона 29
 Уравнения графические 289
 — Дайсона 290
 Унитарное рассеяние диаграмм 609
 Унитарность *S*-матрицы 223

 Упорядоченный оператор 229
 Условие Лоренца 16, 298

 Фаза рассеяния 148
 Фейнмана диаграммы 234, 235, 240
 — обозначения 257
 — правила 244
 — правило обхода полюсов 74
 Фермионы 194
 Формула Баба 443
 — Брейта 452
 — Клейна — Нишины 371
 — Комптона 368
 — Меллера 442
 — Мотта 153
 — Резерфорда 155, 153
 — Розенблюта 477
 Формфактор электрона 607
 Формфакторы электромагнитные 473
 Фотона состояние магнитного типа 49
 — — электрического типа 49
 Фотонная линия 288
 Фотоэффект 360
 Функциональные производные 305
 Функциональный интеграл 310
 Функция Грина 75, 76, 290, 293
 — — фотона 74
 — — электрона 192

 Хронологический оператор 72, 189, 219
 Хронологическое произведение 72, 226

 Частица со спином 0 174
 — — — 1 175
 — с произвольным спином 177
 Четность заряда 275
 — позитрона 112
 4-вектор энергии импульса 24, 202
 4-спинор 88

 Шаровой вектор 41
 — — поперечный 46
 — — продольный 45
 — спинор 122
 Ширина линии 384, 515
 Шредингеровское представление 197

 Эквивалентные фотоны 465
 Экранирование 395
 Электромагнитная масса 316
 Электрон в кулоновском поле 140
 — в магнитном поле 142
 — в потенциальной яме 133
 — отдачи 373
 Энергия электромагнитного поля 28, 59
 — электронного поля 183
 Эффективные линии 286

3р.13к.