Ж. АДАМАР

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Перевод с французского Ф. В. ШУГАЕВА

Под редакцией О. М. БЕЛОЦЕРКОВСКОГО

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

517.2
А 28
УДК 517.5

Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. Адамар Ж. Перев. с франц. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 352 стр.

Монография, написанная более 40 лет назад крупным французским математиком Адамаром, представляет собой классический труд по теории линейных уравнений с частными производными. В книге впервые построено фундаментальное решение линейного гиперболического и эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Обсуждается вопрос о принципе Гюйгенса.

$А \frac{20203—099}{053(02)-78} 31-78$

СОДЕРЖАНИЕ

КНИГА IV

УРАВНЕНИЯ С ЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И МЕТОД СПУСКА

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Имя французского ученого Жака Адамара (1865—1963) известно широкому кругу математиков и физиков. Его работы охватывают различные области математики: теорию чисел, теорию аналитических функций, теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Адамар занимался также вопросами распространения волн. Ему, в частности, принадлежит вывод условий совместности различного порядка на фронте волны, распространяющейся в сплошной среде.

Предлагаемая вниманию читателя книга возникла на основе лекций, прочитанных автором в 1920 г. в Иэльском университете. Издание этой книги на английском языке появилось в 1923 г. Оно было повторено без изменений в 1952 г. Французское издание, заново пересмотренное и существенно дополненное автором, вышло в свет в 1932 г. в Париже. Настоящий перевод сделан с этого издания.

Данная книга представляет собой фундаментальный труд по линейным гиперболическим уравнениям второго порядка со многими независимыми переменными.

Книга состоит из четырех частей. В первой части рассматриваются общие свойства задачи Коши. Здесь же приводится знаменитый пример, иллюстрирующий некорректность задачи Коши для уравнений эллиптического типа.

Во второй части путем обобщения метода Римана построено фундаментальное решение линейного гиперболического (и эллиптического) уравнения с переменными коэффициентами. Предварительно вводится метрика пространства. Фундаментальное решение записывается в виде ряда по степеням квадрата геодезического расстояния.

В третьей и четвертой частях решается задача Коши для нечетного и четного числа независимых переменных. При этом используется фундаментальное решение, построенное ранее. Решение задачи Коши выражается в виде «конечной части» расходящегося интеграла. Для нахождения решения при четном числе независимых переменных использован метод спуска.

В четвертой части исследованы свойства фундаментального решения и его коэффициентов. Во второй главе четвертой части рассмотрены гиперболические уравнения с неаналитическими коэффициентами. Построенное Адамаром решение позволяет описать распространение слабых возмущений в неоднородной среде.

За сорок с небольшим лет, прошедших со времени выхода в свет французского издания книги Адамара, появилось значительное количество работ, посвященных гиперболическим уравнениям с частными производными (библиография основных работ, посвященных задаче Коши для гиперболических уравнений, дана на стр. 350—351). Понятие «конечной части» расходящегося интеграла способствовало созданию теории обобщенных функций (С. Л. Соболев, Л. Шварц). Используя обобщенные функции, можно записать решение задачи Коши для гиперболических уравнений, не прибегая к понятию «конечной части». Вопрос о корректности задачи Коши на многообразиях непространственного типа для гиперболических (и ультрагиперболических) уравнений с постоянными коэффициентами получил решение благодаря работам Асгейрссона и Джона. В пятидесятых годах было доказано существование фундаментального решения у любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Тем не менее всестороннее и тонкое исследование задачи Коши, выполненное Адамаром для уравнения второго порядка, сохраняет свое значение и по настоящее время.

Книга Адамара написана живым и интересным языком.

При переводе были исправлены мелкие неточности и опечатки. Мы опустили приложения к книге. В конце книги помещены примечания редактора и переводчика. Ссылки на них отмечены звездочками.

В переводе принимала участие М. В. Пискарёва.

Книга представляет интерес для математиков, а также механиков и физиков, занимающихся вопросами распространения волн.

О. М. Белоцерковский

ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий труд представляет собой итог моих исследований в области линейных гиперболических уравнений с частными производными. Я имел удовольствие изложить некоторые его части американской публике в Колумбийском университете (1911), часть результатов докладывалась в Римском (1916) и Цюрихском (1917) университетах [1]).

Исходным пунктом этих исследований послужили работы Кирхгофа и особенно фундаментальные труды Вольтерра о сферических и цилиндрических волнах. Я стремился продолжить работу итальянского геометра, видоизменив ее и расширив, чтобы ее можно было применить ко всем нормальным гиперболическим уравнениям, а не к единственному из них. С другой стороны, настоящую монографию можно рассматривать как продолжение моих «Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique», заменяющее большую часть последней главы, которая, впрочем, была лишь попыткой показать трудности задачи, решение которой я теперь в состоянии дать.

Данную работу в дальнейшем можно будет распространить на уравнения более высокого порядка, на системы уравнений и даже применить ее к нелинейным уравнениям (исследование их было начато недавно на основе теории интегральных уравнений). Однако я умышленно не касался этих вопросов, так как первого из них вполне достаточно. Я был бы счастлив, если бы геометрам удалось применить излагаемые методы к этим случаям [2]).

Кроме фундаментальной работы Вольтерра (Acta Mathematica, v. XVIII) и его последующих работ, я сошлюсь также на исследования Тедоне, Кулона и Адемара [3]), развивающие и дополняющие точку зрения Вольтерра. Работа последнего (Адемара) Les équations aux dérivées à caractéristiques réelles (Collection scientia, Paris, Gauthiers-Villars) содержит полный библиографический обзор. Другой обзор дал Вольтерра в своих публичных лекциях в

---

[1]) Упомяну также краткое сообщение на Международном конгрессе математиков в Страсбурге (сентябрь 1920).

[2]) Важные исследования в этом направлении выполнил в последнее время Жиро (Giraud).

[3]) Исследования Пикара, на которые я сошлюсь в соответствующем месте, также существенны для некоторых частей настоящей монографии.

Стокгольме. Я не счел необходимым давать третий обзор, ни даже добавлять что-либо к цитированной литературе и довольствовался ссылками в примечаниях, заранее извиняясь перед авторами, которых я, возможно, забыл упомянуть [1]).

Я должен еще оправдать две замены терминов, ранее принятых в науке. Одна из них — «элементарное решение» вместо «фундаментального решения». Другая — «трансверсальный» вместо * слова «конормальный». Первая замена сделана для того, чтобы избежать смешения с фундаментальными решениями, введенными Пуанкаре и его последователями (решения однородных интегральных уравнений). Вторая замена сделана по причине «экономии мысли», так как данное понятие используется в вариационном исчислении, где оно обозначается словом трансверсальный.

1921 *Ж. А.*

---

[1]) Мои работы по этому вопросу опубликованы в Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (1904—1905), Acta Mathem. (v. XXXI, 1908). Эта последняя работа содержит несколько ошибок в числовых коэффициентах, например в формуле (30′) на стр. 349 число 2 в знаменателе должно быть опущено (нужно также добавить множитель 2 в предыдущей строке) — и во всех формулах, относящихся к четному m (что соответствует нашей книге IV). Они должны быть исправлены, что сделано в настоящей монографии. Необходимые исправления, на которые мы только что указали, были, впрочем, внесены в следующий том того же журнала.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ФРАНЦУЗСКОМУ ИЗДАНИЮ

Я намеревался в основном точно воспроизвести первоначальную редакцию. Если не считать мелких поправок (и, в частности, нескольких ссылок на работы, с которыми я не был знаком при выходе работы в свет), я отошел в сторону только в следующих пунктах.

Благодаря исследованиям, относящимся [1]) к 1924г., я смог дополнить решение задачи Коши с помощью метода «спуска» прямым решением (книга IV). Оказалось также полезным пересмотреть исследование смешанной задачи для плоской границы, уточнив доказательство существования решения. Это, впрочем, привело к некоторой переработке предыдущих частей.

С другой стороны, не предполагая у читателя, как и ранее (за исключением одного или двух мест, отмеченных особо), никаких знаний по теории относительности или абсолютному дифференциальному исчислению, я счел необходимым руководствоваться новыми идеями и ознакомить с решением в инвариантной форме. Некоторые вычисления представлены только в этой форме, которой посвящено приложение в конце монографии.

Работы Донде [2]) значительно облегчили мою задачу. Она еще более упростилась благодаря непосредственной помощи видного брюссельского геометра, которую он согласился мне оказать, просмотрев с этой точки

---

[1]) Bull. Sci. Math. France, t. LII, p. 241.

[2]) См. в частности, de D o n d e r, Sur équations aux dérivées partielles d'un ordre quelconque. Journ. de Math., 9 sér., t. VII, 1928.

зрения все вычисления. Я не сумею выразить ему в полной мере мою признательность за это.

Второе приложение посвящено общему случаю смешанной задачи, решение которой, как будет видно, можно представить в форме, абсолютно аналогичной той, которая используется в задаче Коши. Третье приложение посвящено исследованиям Г. Леви, который дополнил теорему единственности Хольмгрена, распространив ее на нелинейные уравнения.

Ж. А.

Книга I
ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ КОШИ

ГЛАВА I
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ *. ХАРАКТЕРИСТИКИ

Мы будем заниматься линейными уравнениями с частными производными гиперболического типа и в особенности задачей Коши для них.

Предполагая понятие линейного уравнения с частными производными известным, напомним, в чем состоит задача Коши. Далее мы поясним, что такое гиперболический тип.

1. Краевая задача в общем виде. Дифференциальное уравнение — независимо от того, является ли оно обыкновенным или содержит частные производные,— допускает бесчисленное множество решений. Прежняя, классическая, точка зрения на его интегрирование состояла в отыскании так называемого «общего интеграла», т. е. решения уравнения, содержащего столько произвольных элементов (произвольных параметров или произвольных функций), сколько необходимо, чтобы представить все решения, за исключением нескольких особых.

Однако в более поздних работах, особенно в тех, в которых исследуются уравнения с частными производными, отказались от этой точки зрения не только из-за трудности или невозможности получения этого «общего интеграла», но главным образом потому, что задача далеко не исчерпывается простым его определением. Задача в большинстве приложений состоит не в нахождении *любого* решения u дифференциального уравнения, а в выборе среди всех этих возможных решений некоторого из них, определяемого дополнительными условиями, заданными подходящим образом [1]). Уравнение с частными производными («неопределенное уравнение», выражаясь языком некоторых авторов), должно быть справедливо во всей m-мерной области R (m — число независимых переменных), в которой u может существовать. Иными словами, оно должно обращаться в тождество всюду, где u определено. И в то же самое время на границе R должны выполняться дополни-

[1]) Это дает способ получения общего интеграла, так как, варьируя дополнительные данные всеми возможными способами, всегда можно получить заданное решение уравнения.

тельные условия («определенные уравнения»). Примеры будут приводиться на всем протяжении данной монографии.

Если получен общий интеграл, остается выбрать входящие в него произвольные элементы, чтобы удовлетворить дополнительным условиям. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений произвольные элементы — это численные параметры, определяемые из уравнений, причем число последних равно числу первых, так что по крайней мере теоретически вопрос можно считать решенным — сведенным к обычной алгебре. Но в случае уравнений с частными производными произвольные элементы суть функции, и задача их определения представляет собой главную трудность. Например, известен общий интеграл уравнения Лапласа $\Delta u = 0$. Однако это не дает нам возможности решать без ряда сложных расчетов важные задачи, относящиеся к этому уравнению, например задачу о распределении заряда.

Действительные задачи, с которыми мы сталкиваемся,— это «краевые задачи», каждая из которых состоит в определении неизвестной функции u, удовлетворяющей:

1) «неопределенному» уравнению с частными производными;
2) некоторым краевым условиям, или «определенным» условиям.

Такая задача будет называться «корректно поставленной», если дополнительные условия таковы, что определяют решение и притом единственное уравнения с частными производными.

Самая простая из краевых задач — задача Коши.

2. Постановка задачи Коши. Задача Коши для уравнений с частными производными в точности аналогична основной задаче, хорошо известной для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теория этих последних была развита Коши на основе следующей теоремы. Пусть имеется дифференциальное уравнение второго порядка

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \tag{1}$$

Или, разрешив относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$, находим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = f(x, y, y'). \tag{1'}$$

Решение этого уравнения определено (при соответствующих предположениях), если для $x = 0$ известны численные значения y_0, y_0' величин y и $\frac{dy}{dx}$ (или, если порядок уравнения равен k, численные значения $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ky}{dx^k}$).

Пусть теперь уравнение с частными производными второго порядка (для двух независимых переменных) таково:

$$\Phi(u, x, y, p, q, r, s, t) = 0. \tag{2}$$

Или, если число независимых переменных равно m:

$$\Phi(u, x_i, p_i, r_i, s_{ik}) = 0, \tag{II}$$

где u есть неизвестная функция, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — независимые переменные, p_i $(i = 1,2, \ldots, m)$ — первые производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$; r_i — вторые производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, s_{ik} — вторые производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$.

Мы отдельно рассмотрим линейный случай, т. е. случай, когда левая часть линейна относительно u, p_i, r_i, s_{ik}, а коэффициенты — заданные функции $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Если требуется найти такое решение этого уравнения, для которого при $x_m = 0$ величина u и ее первая производная $\frac{\partial u}{\partial x_m}$ — заданные функции $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, а именно:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0) = u_0(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0) = u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}),$$

то это называется *задачей Коши* для $x_m = 0$, причем u_0 и u_1 — *данные Коши*, а многообразие $x_m = 0$ — гиперповерхность [1]), в данном случае гиперплоскость, которая «несет» данные.

3. Ясно, что нет оснований рассматривать только плоские поверхности. Допустим, что в m-мерном пространстве производится точечное преобразование

$$\begin{aligned} x_1 &= G_1(X_1, \ldots, X_m), \\ x_2 &= G_2(X_1, \ldots, X_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= G_m(X_1, \ldots, X_m) \end{aligned} \tag{T}$$

(u не изменяется при этом преобразовании). Гиперплоскость $x_m = 0$ станет в этом новом пространстве X некоторой произвольной поверхностью S:

$$G_m(X_1, \ldots, X_m) = 0. \tag{S}$$

---

[1]) В m-мерном пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ мы будем называть сокращенно *гиперповерхностью* (или даже *поверхностью*) $(m - 1)$-мерное многообразие, определяемое одним уравнением, связывающим x_i. Мы будем называть *ребром* $(m - 2)$-мерное многообразие, определяемое двумя уравнениями. *Линия*, как обычно,— это геометрическое место точек, координаты которых зависят от одного параметра. Она будет *прямой* линией, если x_i — линейные функции этого параметра.

Дифференциальное уравнение заменяется аналогичным уравнением

$$\Phi(u, X_1, X_2, \ldots, X_m, P_i, R_i, S_{ik}) = 0. \qquad \text{(IIa)}$$

Задача Коши для этого уравнения относительно поверхности S заключается в нахождении решения уравнения (IIa), удовлетворяющего во всех точках поверхности двум условиям

$$u = u_0, \qquad \frac{du}{dN} = U_1,$$

где N есть направление, заданное произвольным образом в каждой точке S, но не касательное к этой поверхности; функции u_0 и U_1 (величина, соответствующим образом полученная из u_0 и первоначальной величины u_1) задают в каждой точке S численные значения, и они опять-таки называются *данными Коши* для этого случая.

4. Физические примеры. Напомним, что задача Коши встречается в большинстве физических приложений. Например, пусть цилиндрическая труба, безграничная в обоих направлениях, наполнена однородным газом, который может испытывать небольшие возмущения. Примем гипотезу Бернулли, согласно которой движение среды можно рассматривать как одномерное. Смещение u частицы всегда продольное и зависит от начальной координаты x и времени t. Функция u должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (e_1)$$

где ω — постоянная величина. Движение полностью определено, если в момент $t = 0$ известны начальные положения (т. е. начальные смещения относительно положения равновесия) и начальные скорости всех частиц, что аналитически выражается условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \qquad (C_1)$$

То же самое справедливо для тока в однородном проводнике, безграничном в обоих направлениях, если задано начальное распределение силы тока и потенциала вдоль всего проводника. Единственное различие заключается в том, что задача описывается не уравнением (e_1), а «телеграфным уравнением».

Перейдем теперь к трехмерному случаю, т. е. к обычному пространству. Рассмотрим однородный газ, непрерывно заполняющий пространство во всех направлениях.

Малые движения такого газа описываются *уравнением акустики*, или *волновым уравнением в трехмерном пространстве*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad (e_3)$$

где u — неизвестная функция x, y, z, t, выбранная соответствующим образом (так называемый «потенциал скоростей»), ω — по-прежнему постоянная (скорость звука в газе). Если известны начальные возмущения и начальные скорости в момент $t = 0$, то известны следующие условия (условия Коши):

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = u_1(x, y, z), \tag{C$_3$}$$

причем u_0 и u_1 — заданные функции x, y, z.

4'. Мы говорили об одномерной и трехмерной средах. Мы можем, конечно, представить себе также среды двух измерений. Вообразим себе, что состояние газовой среды одно и то же в каждый момент вдоль каждой вертикальной линии, так что давление, плотность и скорость (последняя направлена по горизонтали) не зависят от вертикальной координаты z. Такое движение описывается *уравнением цилиндрических волн*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{e$_2$}$$

которое выводится из (e$_3$) в предположении, что u не зависит от z. Этот случай, очевидно, есть частный случай предыдущего, и мы можем для определения u дополнить уравнение данными Коши

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y). \tag{C$_2$}$$

Можно, конечно, представить эту же задачу как соответствующую предыдущей для существ, живущих в двумерном пространстве. Но нужно напомнить, что эта двумерная задача может рассматриваться просто как особый случай трехмерной задачи.

Нужно заметить, что в каждом случае число независимых переменных на единицу больше размерности среды. Время составляет дополнительную переменную или, можно сказать, играет роль новой координаты [1]). Известно, что физики в последнее время полностью приняли эту точку зрения. Комбинация точки пространства и определенного значения времени t называется событием или «мировой точкой». Совокупность всех точек пространства и всех значений t составляет «мир».

5. **Геометрическое представление.** Если снова рассмотреть одномерную среду, то графически можно представить комбинацию определенного значения x и определенного значения t (т. е. данную точку среды в данный момент) как точку плоскости xt.

Подобным же образом мы будем изучать движение двумерной среды, вводя координаты x, y, t в пространстве, аналогичном обычному, причем среда в момент $t = 0$ представляется в виде некоторой плоскости этого пространства, в то время как состояние среды в другие моменты (в частности, последующие) получается путем

---

[1]) Эта концепция выдвинута в поразительной форме несколько лет назад Уэллсом в его книге «Машина времени».

переноса плоскости в перпендикулярном направлении. Картина выглядит так, как будто одновременно с движением в двух измерениях горизонтальная плоскость, в которой оно совершается, обладает вертикальной скоростью, равной единице.

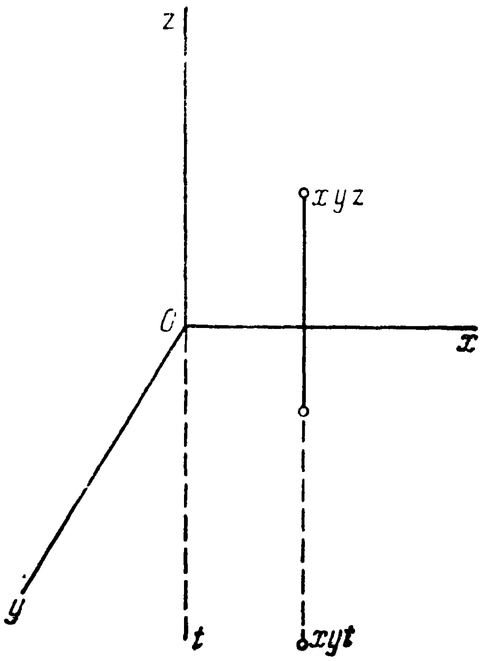

Рис. 1.

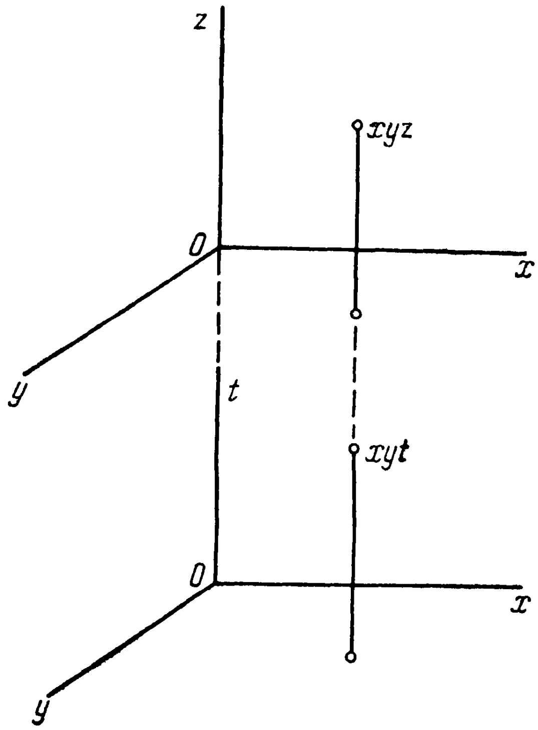

Рис. 2.

6. Случай движения в обычном пространстве представляет несколько большие трудности, так как при добавлении t необходимо ввести четырехмерное пространство. Самый простой способ сделать это заключается в точном использовании метода обычной начертательной геометрии. Мы одновременно чертим две системы координат x, y, z и x, y, t (рис. 1). Каждая точка четырехмерного пространства, или «мировая точка», представляется одновременно двумя точками (x, y, z) и (x, y, t). Плоскость xy играет роль «плана», причем единственное различие по сравнению с обычной проективной геометрией заключается в том, что для ясности этот план чаще всего рисуется дважды [1]), как на рис. 2.

[1]) Мы ограничимся чаще всего тем, что будем изображать «проекцию», например диаграмму (x, y, t), или даже проще, при любом m сечение m-мерной диаграммы двумерным пространством.

Представление четырехмерного пространства двумя проекциями на трехмерное пространство было дано в 1882 г. Veronese (Atti Ist. Veneto, ser. V, t. VIII, pp. 987—1024, в частности, p. 1016 и далее). См. интересный мемуар Totorja y Miret (Mem. de la Real Acad. de Ciencias y Artes, t. XVIII, n. 11, Barcelone, mai 1924) по этому вопросу со списком библиографии, к которому следует добавить исследования Mehmke (Конф. союза вюртембергских математиков и натуралистов 28 февр. 1904 г.). Это стало нам известно после выхода из печати английского издания (примечание при переводе).

7. Теорема Коши — Ковалевской. При рассмотрении задачи Коши, очевидно, возникают три следующих вопроса:

1) Имеет ли задача Коши решение?

2) Является ли решение единственным? (Другими словами, корректно ли поставлена задача?)

3) Наконец, как вычислить это решение?

Хотя два первых вопроса можно и не рассматривать отдельно[1]), мы собираемся начать с того, как можно на них ответить.

Известно, что сам Коши, затем Софья Ковалевская и в то же время Дарбу [2]) рассматривали случай, когда уравнения (2) или (II) могут быть разрешены относительно r (или r_m), а именно:

$$r = f(u, x, y, p, q, s, t) \tag{2'}$$

или

$$r_m = f(u, x_1, \ldots), \tag{II'}$$

что можно сделать, когда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \neq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_m} \neq 0. \tag{3}$$

При этом предположении они доказали (или по крайней мере обычно считается, что доказали), что *задача Коши* для $x = 0$ (или $x_m = 0$) всегда допускает решение и притом только одно.

8. Аналитические функции. Доказательство этой теоремы было упрощено Гурса [3]), так что мы можем дать его в нескольких строках. Но вначале мы должны вспомнить понятие аналитической функции.

---

[1]) Подробности см. в наших докладах во французском обществе физики (Journ. de phys., 1906), в Колумбийском университете (1911), New York, Columbia University Press (1915), первый доклад.

[2]) Cauchy C. R., Acad. Sci., t. XIV, p. 1020; t. XV, p. 44, 85, 131 (1842). Sophie Kowalewski, Thesis (диссерт.), Göttingen (1874); Journ. für Math., B. LXXX, S. 1—32 (1875) (см. также С. В. Ковалевская, К теории дифференциальных уравнений в частных производных. Научные работы, М.—Л., изд. АН СССР, 1948.— *Прим. ред. перевода*). Darboux, C. R. Acad. Sci., t. LXXX, p. 101—104, p. 317 (1975).

По-видимому, Софья Ковалевская была незнакома с работой Коши (оставшейся также неизвестной Дарбу и замеченной только Дженокки (Genocchi) — см. тот же т. LXXX C. R.). Она приписывает Вейерштрассу (Journ. für Math., B. LI, 1856, S. 43) первую формулировку теоремы, относящейся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. И самое удивительное, что она цитирует Брио и Буке (Journ. Ec. Polytechnique, t. XXI), которые вначале ссылаются на Коши (хотя не дают точной ссылки). Теорема была доказана заново в последующих работах Мере (Méray) и Рикье (Riquier).

[3]) Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XXVI, p. 129 (1898). Cours d'analyse math., t. II, t. 360. (Русск. пер. Э. Гурса, Курс математического анализа, ГТТИ, 1933 — *прим. ред. перевода.*)

Функция $f(x)$ действительной переменной x называется *аналитической* или, точнее, [1]) *аналитической и регулярной*, или также *голоморфной* на интервале (a, b), если в любой точке x_0 этого интервала f может быть представлена при x, достаточно близком к x_0, в виде ряда Тейлора по степеням $(x - x_0)$, радиус сходимости которого поэтому отличен от нуля.

В этом случае функция f определена вместе со своими производными любого порядка не только для действительных значений x, уже упоминавшихся выше, но также и для комплексных значений при условии, что точки, изображающие их, расположены достаточно близко к отрезку (a, b) действительной оси.

Но теория функций Коши показывает, что это второе свойство— а именно, существование в комплексной области вместе с непрерывностью и дифференцируемостью — включает в себя опять разложение в ряд Тейлора и дает, таким образом, второе определение аналитических функций, целиком эквивалентное первому.

Область сходимости ряда Тейлора для f может быть ограничена особенностями f на (a, b). Но этот интервал обычно не имеет никакой видимой связи с этими особенностями, и размер его меньше, чем следует из учета данных особенностей (в действительности он связан с особенностями в комплексной области).

Все это можно распространить на случай нескольких переменных, и аналитическая функция x, y, z характеризуется одним из двух эквивалентных определений:

A) $f(x, y, z)$ аналитична в объеме $\mathfrak{V}$, если f может быть представлена в виде сходящегося ряда Тейлора по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$ для (x, y, z), лежащих внутри сферы с центром в точке (x_0, y_0, z_0), где (x_0, y_0, z_0) — точка объема $\mathfrak{V}$.

B) $f(x, y, z)$ аналитична в объеме $\mathfrak{V}$, если можно определить f так, чтобы она была непрерывна и дифференцируема не только в действительных точках $\mathfrak{V}$, но и для любой точки $x = x' + x''i$, $y = y' + y''i$, $z = z' + z''i$ такой, что (x', y', z') находится в $\mathfrak{V}$, а $|x''|$, $|y''|$, $|z''|$ достаточно малы.

Аналитические функции являются единственными, получаемыми в общем случае нашими математическими методами. Однако среди прочих функций они довольно специфичны [2]). Это находит выражение в следующем простом и важном факте: *продолжение аналитической функции однозначно определено.* Если $f(x)$ аналитична на (a, b), то знание ее значений на любом подынтервале (a', b')— как бы мал он ни был — позволяет вычислить ее на всем интервале.

---

[1]) Часто аналитики продолжают называть аналитической функцию, область существования которой содержит особые точки (полюсы, существенно особые точки и т. д.).

[2]) Для полноты см. нашу работу La série de Taylor et son prolongement analytique. 2 éd. P., Gauthier — Villars, 1927.

Для неаналитических функций продолжение, вообще говоря, не имеет никакого смысла. Если такая функция задана на интервале (0, 1/2), ее значения на интервале (1/2, 1) могут быть определены бесчисленным числом способов, и, вообще говоря, нет оснований для того, чтобы предпочесть одно из этих продолжений другому.

9. Регулярные функции. Мы будем заниматься функциями разного рода, и они не обязательно будут аналитическими. На них, однако, будут наложены некоторые требования регулярности.

Функция одной или нескольких переменных называется *регулярной*, если она непрерывна и допускает непрерывные производные вплоть до некоторого порядка p. Этот порядок изменяется согласно природе рассматриваемого вопроса. Строго говоря, его нужно точно указывать в каждом случае. Я должен сказать, однако, что я часто буду это опускать, так как это уточнение, как мне кажется, в данном случае не стоит той иногда скучной осмотрительности, которую оно влечет за собой. Нам достаточно знать, что такой порядок существует, и это, вообще говоря, очевидно в каждом частном случае.

Регулярная функция допускает разложение в ряд Тейлора, ограниченный членами некоторого порядка, и так как ее производные также можно разложить в соответствующие ряды, то все операции, основанные на таком разложении, и, вообще говоря, все операции дифференциального исчисления, справедливые для аналитических функций, остаются таковыми для «регулярных» функций при условии, что они не вводят производных порядка выше p. Например, точечное преобразование (T) (п. 3) не меняет регулярности, если сами функции G являются регулярными (конечно, при условии, что якобиан не обращается в нуль).

Голоморфность функции равносильна тому, что она «аналитична и регулярна».

10. Доказательство теоремы Коши — Ковалевской. Напомним, что для основной теоремы, относящейся к *обыкновенным* дифференциальным уравнениям, Коши и его последователи дали два рода доказательств.

1. Одно из них — это доказательство, которое Коши называет «исчислением пределов» [1]), а современные авторы — «методом мажорирующих функций». При этом необходимо сделать предположение, что правая часть уравнения (1′) (п. 2) голоморфна относительно x, y, y' в окрестности точки ($x = 0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$). Исходя из того факта, что для любого сходящегося ряда Маклорена по степеням x, y, z мажорантой будет разложение в

[1]) См. Goursat, Cours d'analyse и наш Cours d'analyse de l'école polytechnique, t. II.

ряд какой-либо из форм

$$\frac{K}{1-\frac{x+y+z}{\rho}}, \quad \frac{K}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)\left(1-\frac{z}{\rho}\right)},$$

$$\frac{K}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{y+z}{\rho_1}\right)}$$

(K, ρ, ρ_1 — постоянные, выбранные соответствующим образом для каждого случая), доказательство устанавливает (согласно предыдущим предположениям), что существует, и притом единственный, сходящийся ряд Маклорена по степеням x, удовлетворяющий данному уравнению и начальным условиям.

2. В методах второго рода (последовательные приближения) аналитичность дифференциального уравнения не обязательна. В них лишь требуется, чтобы правая часть обладала очень простыми свойствами (непрерывностью и удовлетворяла «условиям Липшица»). Тем не менее получается тот же самый результат, а именно: существование и единственность решения,— что и в первом случае, за исключением, конечно, того, что само решение, вообще говоря, может и не быть аналитическим.

Доказательство теоремы, относящейся к уравнениям с частными производными, соответствует *первому* классу вышеупомянутых методов. Мы дадим его в форме Гурса [1]).

Сводя для упрощения обозначений число независимых переменных к двум, будем исходить из уравнения

$$r = f(u, x, y, p, q, s, t). \tag{2'}$$

Задача Коши состоит в нахождении функции, удовлетворяющей этому уравнению и определенным условиям

$$u(0, y) = u_0(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = u_1(y). \tag{4}$$

Попытаемся удовлетворить всем этим требованиям, взяв u в виде ряда по степеням x:

$$u = u_0 + u_1 x + \ldots + \frac{u_h}{h!} x^h + \ldots \tag{5}$$

Каждый коэффициент $u_h = \left(\frac{\partial^h u}{\partial x^h}\right)_{x=0}$ есть функция от y, которую мы должны определить.

Величины u_0 и u_1 заданы. Для того чтобы найти u_2, u_3, ..., заметим, что каждая производная $\frac{\partial^{h+k} u}{\partial x^h \partial y^k}$ при $x = 0$ есть производ-

[1]) См. Goursat, цит. соч. (примечание 3 на стр. 17).

ная от u_h, каким бы ни было k. Итак, если в (2′) положить $x = 0$, то правая часть будет содержать, кроме самого y, только функции u_0, u_1 и их производные $p = u_1$, $q = u_0'$, $s = u_1'$, $t = u_0''$, так что левую часть $(r)_{x=0} = u_2$ можно считать известной.

Более того, дифференцируя выражение (2′) по x и полагая $x = 0$, получаем $\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)_{x=0} = u_3$ как функцию u_0, u_1, u_2 и их производных. Аналогично последовательное дифференцирование по x дает нам значения u_4, u_5, . . ., причем каждый коэффициент u_h есть полином относительно u_0, u_1, u_2, . . ., u_{h-1} и их производных, так же как относительно f и ее производных.

Можно также рассматривать каждый из коэффициентов u_h как ряд по степеням $(y - y_0)$ (где y_0 — фиксированное значение y) и заменить (5) формулой

$$u = S = \sum\sum \frac{u_{hk}}{h!\,k!} x^h (y - y_0)^k, \tag{5′}$$

причем численное значение любого коэффициента u_{hk} определяется с помощью операций, о которых только что было сказано, из выражений для предыдущих членов (т. е. для величин u_{hk}, соответствующих меньшим h и меньшим или равным значениям k) и коэффициентов разложения функции f в ряд Тейлора[1]), т. е. посредством некоторого полинома P.

Видно, что условия (2′) и (4) определяют каждый коэффициент в формулах (5) или (5′). Следовательно, мы можем утверждать, что *наша задача Коши не может иметь более одного решения, представимого в виде сходящегося ряда, т. е. более одного решения, голоморфного по x.*

Нужно теперь показать, что решение действительно существует. Если считать, что функция f голоморфна по переменным, которые она содержит, и сделать то же самое предположение относительно функций u_0 и u_1 в окрестности некоторого фиксированного значения $y = y_0$, то мы должны показать, что *ряд* (5) *сходится* при достаточно малых[2]) значениях $|x|$ и что *то же самое справедливо для двойного ряда* (5′) при условии, что $|x|$ и $|y - y_0|$ меньше некоторых положительных величин, выбранных подходящим образом.

Для начала отметим, что, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, последовательные операции по определению u_h включают в себя только дифференцирование, умножение

---

[1]) Мы имеем в виду разложение в ряд по степеням x, $(y - y_0)$, $[u - u_0(y_0)]$, $[p - u_1(y_0)]$, $[q - u_0'(y_0)]$, $[s - u_1'(y_0)]$, $[t - u_0''(y_0)]$.

[2]) Тот факт, что ряд (5′), когда он сходится, действительно определяет решение задачи, устанавливается так же, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений (тем же способом, который будет нами использован в книге II для аналогичной цели).

и сложение (знак « — » не используется). Другими словами, полином, обозначенный ранее буквой P, содержит только члены, перед которыми стоит знак $+$. Следовательно, для ряда (5′) можно получить мажоранту, если заменить разложение каждой из функций f, u_0, u_1 мажорирующим рядом. Вопрос сводится к нахождению таких мажорирующих рядов, чтобы соответствующая задача заведомо имела решение.

Для этого прежде всего положим, что u_0, u_1 равны нулю и что значение u_2, найденное из уравнения, также равно нулю. Действительно, в общем случае (u_0, u_1, $u_2 \neq 0$) можно вместо u ввести новую переменную u' при помощи преобразования

$$u' = u - u_0 - u_1 x - u_2 x^2,$$

и новая задача для u' будет соответствовать предыдущему особому случаю. При этом условии (если взять y_0 равным 0) мажорантой для f будет следующее выражение:

$$\frac{K}{\left(1 - \frac{x + y + u + p + q}{\rho}\right)\left(1 - \frac{s + t}{\rho_1}\right)} - K$$

(так как начальные значения x, y, u, p, q, s, t, а также соответствующее значение f все равны нулю). Можно заменить u_0, u_1 рядами Маклорена с произвольными положительными коэффициентами, поскольку любой такой ряд, очевидно, мажорирует нуль. Следовательно, доказательство будет завершено, если мы покажем, что уравнение

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{K}{\left(1 - \frac{x + y + u + p + q}{\rho}\right)\left(1 - \frac{s + t}{\rho_1}\right)} - K$$

имеет решение, представимое в виде ряда Маклорена, все коэффициенты которого положительны или равны нулю, или если мы покажем, что это справедливо для другого уравнения, полученного путем замены правой части мажорирующим выражением. Гурса вводит такую мажоранту, заменяя x величиной x/α, где α — положительное число, меньшее единицы, выбором которого мы сейчас займемся.

Для нового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\frac{x}{\alpha} + y + u + p + q}{\rho}\right)\left(1 - \frac{s + t}{\rho_1}\right)} - K$$

ищем решение, зависящее только от переменной

$$\sigma = x + \alpha y.$$

Функция u от σ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u'' = \frac{d^2u}{d\sigma^2} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\frac{\sigma}{\alpha} + u + (1+\alpha)u'}{\rho}\right)\left(1 - \frac{(\alpha+\alpha^2)u''}{\rho_1}\right)} - K$$

или уравнению

$$\left[1 - \frac{K}{\rho_1}(\alpha + \alpha^2)\right]\frac{d^2u}{d\sigma^2} - \frac{\alpha+\alpha^2}{\rho_1}\left(\frac{d^2u}{d\sigma^2}\right)^2 = \frac{K}{1 - \frac{\frac{\sigma}{\alpha} + u + (1+\alpha)\frac{du}{d\sigma}}{\rho}} - K.$$

Если мы теперь возьмем α таким, что $1 - \frac{K}{\rho_1}(\alpha + \alpha^2) > 0$, то это дифференциальное уравнение в силу первой теоремы Коши обладает голоморфным решением, обращающимся в нуль одновременно с σ, а все коэффициенты разложения этого решения в ряд положительны [1]). Что и требовалось доказать.

Если перейти к случаю нескольких независимых переменных x y, z, . . ., то никаких существенных изменений в том, что было изложено, не потребуется: двойной ряд S становится многократным, величина σ равна $x + \alpha(y + z + \ldots)$, в мажорирующих функциях появляется несколько новых численных коэффициентов.

11. Полученный таким образом ряд (5′) зависит от выбора y_0. Предполагается, что не только $|x| < R$, но также и то, что мы ограничиваемся соответствующим интервалом I около точки y_0. Ряд (5), напротив, не зависит от y_0. Точнее, если заданы два различных значения y_0 таких, что два соответствующих интервала I перекрываются друг с другом, то каждая функция u_h будет в обоих случаях одной и той же в общей части интервалов. Это следует из факта, что голоморфное решение задачи Коши единственно.

Следовательно, если наши предположения относительно f, u_0, u_1 выполняются на отрезке оси y, как бы велик он ни был, предыдущие вычисления дают ряд (5) в окрестности этого отрезка. Величины K, ρ и ρ_1 имеют, как известно, первая — максимум, а две другие — минимум вдоль вышеупомянутого отрезка. Поэтому интервал сходимости R для $|x|$ можно считать при необходимости постоянным.

Как уже было сказано, вычисление величины R (даже если считать ее разной для различных значений y_0), вообще говоря, дает для интервала сходимости ряда (5) и тем более для области сущест-

[1]) Величина Y, определяемая уравнением $aY - bY^2 = X$, разлагается в ряд Маклорена по X с положительными коэффициентами при условии, что a и b положительны. Это можно видеть, например, из решения квадратного уравнения.

вования решения *и* значения, которые слишком малы, чтобы их использовать на практике.

12. Характеристики. Совершенно иными будут выводы в особом случае, когда знак $\neq$ в соотношении (3) (стр. 17) заменяется знаком $=$. В этом случае *решение задачи Коши, вообще говоря, не существует, а когда оно существует, оно не единственно.*

На этот раз положение меняется, когда число независимых переменных больше двух. Примем, что оно равно трем и одновременно введем новые обозначения, которыми мы будем пользоваться, начиная с этого момента. Полагая уравнение линейным, представим его в форме [1])

$$\sum_{i,k} A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}+\sum_i B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f,$$

где A_{ik}, B_i, C и f — заданные функции x. В особом случае мы должны предположить [2]), что A_{mm} $(=A_{33})=0$, и уравнение сводится к виду

$$2A_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}+2A_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}+A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+$$
$$+2A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}+A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\sum_{i=1}^{3} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f \tag{6}$$

с данными Коши

$$u=u_0(x_1,\ x_2),\quad \frac{\partial u}{\partial x_3}=u_1(x_1,\ x_2)\qquad \text{при}\qquad x_3=0.$$

Видно, что в левой части отсутствует вторая производная по x_3, так что при $x_3=0$ уравнение не содержит коэффициента u_2 при x_3^2, а содержит только u_0 и u_1. Поэтому оно не определяет неизвестной, а дает *условие разрешимости* задачи Коши

$$2A_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+2A_{23}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+B_3u_1+H=0, \tag{7}$$

где

$$H=A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}+2A_{12}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1 \partial x_2}+A_{22}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}+B_1\frac{\partial u_0}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial u_0}{\partial x_2}+Cu_0-f.$$

Если u_0 и u_1 не удовлетворяют этому уравнению, задача не имеет решения.

---

[1]) Это обычное обозначение для квадратичных форм, причем $A_{ik}=A_{ki}$, так что каждый член второго порядка с различными индексами входит дважды.

[2]) Равенство $A_{mm}=0$ может быть тождеством относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$ или в более общем виде тождеством относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ при $x_m=0$. Для большей простоты мы будем рассматривать первый случай, причем, как это легко видеть, выводы останутся теми же самыми во втором случае.

Если, например, u_0 задано заранее, то в качестве u_1 нужно взять решение уравнения (7). Заметим, что для u_1 мы получаем линейное уравнение с частными производными первого порядка, интегрирование которого дает, как известно, в проекции на нашу плоскость $x_3 = 0$ систему линий (l), определяемых дифференциальным уравнением [1])

$$\frac{dx_1}{A_{13}} = \frac{dx_2}{A_{23}}. \tag{l}$$

Предположим теперь, что условие (7) выполнено. До сих пор у нас не было условия для определения u_2. Но мы можем вывести такое условие из уравнения (которое уже использовалось в общем случае для нахождения u_3), полученного путем однократного дифференцирования исходного уравнения по x_3 и приравнивания x_3 нулю. Это сразу же дает

$$2A_{13}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + 2A_{23}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + B_3 u_2 + H_1 = 0, \tag{7$'$}$$

где

$$H_1 = 2\frac{\partial A_{13}}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2\frac{\partial A_{23}}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}u_1 + \frac{\partial H}{\partial x_3}$$

не зависит от u_2.

Итак, видно, что функция u_2 не вполне произвольна, однако ее можно выбрать бесчисленным множеством способов: ее можно взять равной любому решению линейного уравнения с частными производными (7$'$). *Это уравнение имеет те же самые характеристики, что и уравнение* (7), а именно, линии (l).

Тот факт, что при заданных u_0 и u_1 выбор величины u_2 неоднозначен, можно выразить следующим образом. *Два решения одного и того же уравнения* (соответствующие одним и тем же u_0 и u_1, но разным u_2) *могут касаться друг друга* [2]) *в каждой точке плоскости* $x_3 = 0$ (или в более общем случае плоскости $x_m = 0$).

Последовательное дифференцирование по x_3 дает нам аналогичным образом линейные уравнения с частными производными первого порядка для функций $u_3, u_4, \ldots$, причем их характеристиками по-прежнему будут линии (l).

Позднее мы снова займемся этими линиями, и тогда станет ясным их геометрическое построение. Пока что предыдущие расчеты

---

[1]) Линии (l), соответствующие $m > 3$, определяются $m - 2$ дифференциальными уравнениями для $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$.

[2]) Говорят, что две функции u, v (от одной или от нескольких независимых переменных) *касаются* друг друга в определенной точке (т. е. для некоторой системы значений независимых переменных), если они сами и все их первые производные принимают в рассматриваемой точке одни и те же численные значения. Касание имеет *порядок* p, если аналогичные равенства выполняются не только для первых производных, но также для всех производных вплоть до порядка p.

позволяют нам сделать следующее предположение: когда задача Коши разрешима (т. е. когда условие (7) выполнено), *она становится неопределенной*, так как каждое из последовательных значений u_h можно выбрать с некоторой степенью произвола. Это, однако, только предположение, так как мы не знаем, можно ли выбрать u_h таким образом, чтобы ряд (5) был сходящимся. Мы докажем это позднее, и это нам даст степень неопределенности функции u.

Если считать, что доказательство завершено, то результат можно кратко выразить следующим образом. Задача Коши сводится к решению системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными. Детерминант системы равен нулю.

Мы рассматривали линейное уравнение, так как только этот случай интересен для последующего изложения. Нелинейный случай приводит к аналогичным результатам с некоторыми различиями в начале вычислений. Он также сводится к первому посредством дифференцирования данного уравнения.

13. Особый случай, упомянутый выше, очень важен для нашего последующего исследования и для всех работ по уравнениям с частными производными. Как выделить этот случай, если данные Коши задаются не на плоскости $x_m = 0$, а на произвольной поверхности S (п. 3)? Для этого мы должны видоизменить условие (3), применяя точечное преобразование (T): такой расчет элементарен. Итак, видно, что *особый случай* (при обозначениях п. 3) *определяется условием* [1])

$$\sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial R_i}\left(\frac{\partial G_m}{\partial X_i}\right)^2 + \sum_{i,k} \frac{\partial\Phi}{\partial S_{ik}} \frac{\partial G_m}{\partial X_i} \frac{\partial G_m}{\partial X_k} = 0.$$

Предположим снова, что задача линейна и что уравнение с частными производными имеет форму

$$\sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f \tag{E}$$

(где A_{ik}, B_i, C и f — заданные функции $x_1, x_2, \ldots, x_m$). Условие, что многообразие $G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ соответствует особому случаю, таково:

$$\sum A_{ik} \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_k} = 0. \tag{A}$$

Иными словами, получаем следующее правило:

в данном уравнении нужно учитывать только члены второго порядка и в этих членах каждая вторая производная

[1]) Это условие можно сразу же найти. Вычисления предыдущего пункта можно даже закончить, не используя точечного преобразования. См. наши «Leçons sur la propagation des ondes» (Hermann, 1903), chap. VII, nn. 278—288.

функции и заменяется квадратом или произведением первых производных функции G соответственно.

Если условие (A) выполнено (т. е. если вышеупомянутая величина равна нулю в каждой точке [1] поверхности S), то S называется *характеристикой* [2]) уравнения (E). Квадратичная форма

$$A(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = \sum_{i, k} A_{ik}\gamma_i\gamma_k$$

называется *характеристической формой.*

Основное свойство характеристик, согласно предыдущим рассуждениям, заключается в том факте, что они являются единственными поверхностями, вдоль которых два решения уравнения могут касаться друг друга. Касание это может быть любого порядка (поскольку в вычислениях предыдущего пункта можно допустить, что значения $u_0, u_1, \ldots, u_{h-1}$ одни и те же для двух различных решений, а значения u_h разные).

Это свойство в точности аналогично определению характеристик для уравнения с частными производными первого порядка, и именно поэтому им дают то же самое название, хотя в первом случае характеристики — это поверхности, а во втором — линии (каким бы ни было число независимых переменных).

Уравнение (A) есть уравнение с частными производными первого порядка, которому должна удовлетворять поверхность S. С геометрической точки зрения это можно интерпретировать следующим образом. В каждой своей точке S должна иметь касательную плоскость, которая касается некоторого конуса второго порядка. Дифференциальное уравнение этого конуса есть $A(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = 0$ и называется он *характеристическим.* (Если A_{ik} не являются постоянными, то каждая система значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ дает разные характеристические конусы. Мы будем рассматривать характеристический конус в общем виде, вершина которого — точка в m-мерном пространстве.)

Характеристики имеют важное физическое значение. Действительно, они представляют собой то, что физики называют *волнами.* Легко видеть, что их определение, данное выше (точнее, их введение как поверхностей касания между двумя решениями) в точности эквивалентно концепции Гюгонио о волнах (для более

---

[1]) Случай, когда условие (A) выполняется только в некоторых точках поверхности S, а в других не выполняется, хотя и встречается в некоторых уже рассмотренных задачах, представляет трудности, которые до сих пор не изучены, так как они, по-видимому, мало интересны в приложениях.

[2]) Теория характеристик для двух независимых переменных известна со времен Монжа и Ампера. (См. D a r b o u x, Théorie des surfaces, t. II, G o u r s a t, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre). Обобщение на случай $m > 2$ первоначально было дано Бэклундом (B ä c k l u n d, Math. Annalen, Bd. XIII, 1878), но стало общеизвестно лишь после того, как было вновь открыто Бедоном (B e u d o n, Bull. Soc. Math. Fr., t. XXV, 1897).

полного доказательства см. наши Leçons sur la propagation des ondes). Действительно, тождество обеих концепций будет очевидным не только в каждом отдельном случае, который мы будем рассматривать, но и в общем, как следствие *апостериори* нашей конечной формулы.

14. Таким образом, результат анализа, выполненного Коши и Софьей Ковалевской, как будто бы заключается в том, что задача Коши имеет решение (и притом единственное) всякий раз, когда *поверхность, несущая начальные данные, не является характеристикой и нигде не касается характеристики* [1]).

[1]) Мы оставим в стороне случай *систем* уравнений с частными производными. Однако для полноты мы скажем о них здесь несколько слов. Основная теорема в своей классической форме распространяется на такие системы в тех случаях, когда число уравнений равно числу p неизвестных и когда уравнения могут быть разрешены относительно производных высшего порядка по x. Например, она справедлива для трех уравнений второго порядка

$$F_1(r, r', r'', \ldots) = 0, \quad F_2(r, r', r'', \ldots) = 0, \quad F_3(r, r', r'', \ldots) = 0$$

с тремя неизвестными u, u', u'', если они могут быть разрешены относительно r, r', r'' (мы выделили три вторых производных

$$\left. r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad r' = \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}, \quad r'' = \frac{\partial^2 u''}{\partial x^2} \right).$$

Особый случай есть тот, когда система неразрешима, т. е. когда якобиан $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(r, r', r'')}$ обращается в нуль. В этом случае $x = 0$ можно рассматривать как характеристику. Отсюда мы легко выведем с помощью точечного преобразования (п. 3) или путем непосредственных вычислений условие того, что поверхность $G = 0$ является характеристикой. В случае упомянутой системы это дает (см. наши «Leçons sur la propagation des ondes», chap. VII, n. 321) уравнение с частными производными первого порядка шестой степени (степени $2p$, если имеется p уравнений второго порядка с p неизвестными).

Часто считают, что от особого случая всегда можно избавиться при помощи подходящего точечного преобразования. Однако это неверно. Другими словами, *может получиться так, что определенное выше уравнение характеристик есть тождество*. Существуют различные примеры этого. Один из них дает классическая задача об *изгибании поверхностей*. Она сводится к трем уравнениям с частными производными первого порядка относительно x, y, z, рассматриваемых в качестве функций от u, v. Эти уравнения не могут быть разрешены относительно $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ при любом выборе независимых переменных u, v.

Как именно должна измениться постановка задачи Коши при сохранении предположения об аналитичности в самом общем случае (без использования замены переменных), выяснено благодаря работам Мерэ и Рикье, рассмотревшим и случай, когда число уравнений не равно числу неизвестных.

Точечное преобразование само по себе может оказать определенное влияние и может дать новое уравнение для характеристик даже тогда, когда обычное условие для них теряет силу вследствие того, что оно обращается в тождество. Это было установлено нами для одного частного случая (Bull. Soc. Math. Fr., t. XXXIV, 1906) и обобщено Гюнтером (Gunther) и М. Жане (M. Janet). (См. C. R. Acad. Sci., 1913.)

ГЛАВА II
ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ КОШИ. ТРИ ТИПА УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

15. Читатель, вероятно, удивится тому, что мы постоянно используем сослагательное наклонение и, по-видимому, считаем сомнительным одно из самых классических и наиболее известных доказательств анализа. Дело заключается в том, что не все так просто, как может показаться на основании предыдущих рассуждений. В действительности обстоятельства, с которыми мы сталкиваемся, кажутся на первый взгляд совершенно парадоксальными с чисто математической точки зрения, и предусмотреть их можно только из физических соображений. Нет другого вопроса, который давал бы такую же поразительную иллюстрацию мыслям, развитым Пуанкаре на I Международном конгрессе математиков в Цюрихе в 1897 г. (см. также La valeur de la science, pp. 137—155. Русский перевод: А. Пуанкаре, Ценность науки, 1906— *прим. ред.*): именно физические приложения указывают нам на важные задачи, которые мы должны поставить перед собой, и опять-таки физика позволяет нам предугадать решения.

Рассуждения Коши, Софьи Ковалевской и Дарбу, аналог которых дан выше, совершенно строгие. Однако заключение, полученное ими, нельзя считать наиболее общим. Причина состоит в предположении, сделанном ранее, о том, что начальные данные, так же как и коэффициенты уравнений, выражаются при помощи *аналитических* функций, и теорема часто неприменима. когда не выполнена эта гипотеза.

Мы сказали часто, а не всегда, потому что может получиться так, что формулировка Коши — Ковалевской, приведенная ранее, будет выполняться при довольно общем выборе начальных данных, и поистине один из наиболее любопытных фактов теории заключается в том, что уравнения, по виду очень близкие, ведут себя совершенно противоположным образом.

Если сначала мы возьмем задачу Коши в таком виде, как мы ее ставили в п. 4 (задача Коши при $t = 0$ для уравнений (e_1), (e_2), (e_3)), то предыдущие результаты *справедливы*, как мы увидим далее, и *без гипотезы об аналитичности.*

Но выводы будут совершенно иными, если, например, рассмотреть классический случай *уравнения* Лапласа для *потенциала*:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Этот факт сразу же устанавливается путем сравнения с другой классической краевой задачей: я имею в виду *задачу Дирихле.* Она, как известно, состоит в том, чтобы определить решение уравнения Лапласа в заданном объеме $\mathfrak{V}$, причем значение u задано в каждой точке поверхности S, ограничивающей этот объем. Хорошо известно, что эта задача корректно поставлена, т. е., что существует ее решение и притом единственное.

Этот факт, по-видимому, противоречит теореме Коши — Ковалевской. Если знание численных значений u в заданных точках одновременно с уравнением в частных производных само по себе достаточно для определения неизвестной функции в объеме $\mathfrak{V}$, то, очевидно, нет никаких оснований налагать на u любое другое дополнительное условие и, следовательно, нельзя, помимо значений u, произвольно выбрать значения $\frac{du}{dn}$. Действительно, между этими значениями существует бесконечное множество соотношений, которые должны выполняться для того, чтобы гармоническая функция, соответствующая этим данным, могла существовать. Любая точка a, лежащая вне объема $\mathfrak{V}$, дает такое соотношение, поскольку, если обозначить через r расстояние от точки a до произвольной точки M поверхности S, должно соблюдаться хорошо известное тождество

$$\iint\limits_S \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn} \right) dS = 0. \tag{8}$$

Почему же выводы Коши — Ковалевской, наоборот, приводят к произвольному выбору в каждой точке S не только функции u, но также одной из ее первых производных таких, как производная по нормали $\frac{du}{dn}$?

Этому противоречию можно дать двоякое объяснение. Сразу же видна первая причина, по которой эти условия нельзя сравнивать друг с другом. Сначала мы доказали разрешимость задачи Коши для плоскости, затем — для любой поверхности, которую можно получить из плоскости путем точечного преобразования. Это — случай любой регулярной *части* поверхности при условии, что она достаточно мала, а не *всей* замкнутой поверхности. Например, вся поверхность сферы не может быть непрерывно преобразована в плоскую поверхность. Она имеет другую форму в смысле Analysis situs.

Это возражение, однако, не является решающим, что ясно из замечания в п. 8. Если мы разрешим задачу Коши в окрестности каждой части S, то эти различные элементы решения будут продолжением друг друга и вместе составят решение, которое справедливо для всей поверхности S и ее окрестности.

Но, кроме того, наша теорема доказывает существование решения задачи Коши только в *окрестности* первоначальной поверхности S. Для задачи Дирихле решение должно существовать во всем объеме $\mathfrak{V}$. Это первое требуемое объяснение. По этой причине и только благодаря ей соотношение (8) является необходимым. Если оно не выполняется для совокупности аналитических значений u и $\frac{du}{dn}$, то эти значения соответствуют некоторой гармонической функции u в окрестности S, но u неизбежно будет иметь особенности или даже перестанет быть определенной в некоторой части объема $\mathfrak{V}$.

Этот первый ответ на наш вопрос не является полным и не исчерпывает всех причин, по которым задача Коши не всегда разрешима. Используя геометрические понятия точно таким же образом, как это делал Коши, мы увидим, что если отказаться от аналитичности начальных данных, то не существует, вообще говоря, никакого решения, даже в непосредственной окрестности S или даже в окрестности сколь угодно малой части σ поверхности S.

Это можно рассматривать как следствие хорошо известного свойства гармонических функций (т. е. решений уравнения $\Delta u = 0$) быть аналитическими в каждой точке внутри области существования, где они непрерывны вместе со своими производными, и терять свойство аналитичности только на границе этой области. Другая форма этого свойства заключается в следующем [1]): если две гармонические функции, определенные с разных сторон некоторой поверхности, имеют в каждой ее точке то же самое значение и ту же самую производную по нормали, то они являются аналитическим продолжением друг друга, а их совокупность образует единую гармоническую (и, следовательно, аналитическую) функцию во всей области, расположенной по обе стороны от поверхности.

Это показывает, что задача Коши с неаналитическими начальными данными не может иметь решение по обе стороны σ (в предположении об аналитичности). Согласно предыдущей теореме эти два решения u' и u'' составляют единую аналитическую функцию во всей области, внутри которой расположена σ. Это, очевидно, противоречит предположению, что u_0 (общее значение u' и u'') или u_1 (общая производная по нормали) не являются аналитическими на σ.

Очевидно, что, *вообще говоря*, ни u', ни u'' не существуют, так как нет причин, по которым одна из них существовала бы, а другая нет, если начальные данные взяты случайно.

15′. Сделаем дополнительное предположение, что u_0 (или u_1) равно нулю. При этом можно совершенно строго показать, что не существует решения даже с одной стороны σ в том случае, когда σ есть часть плоскости $x = 0$. В самом деле, если, например, u' существует при $x \geqslant 0$, то можно определить u'' для $x \leqslant 0$

---

[1]) Это подчеркивал Дюгем (см. Hydrodynamique, élasticité, acoustique, Hermann, 1891, t. 1, p. 169).

следующим образом:

$$u(-x, y, z) = -u(x, y, z), \tag{9}$$

причем u' и u'' имеют на плоскости $x = 0$ одно и то же значение, а именно — нуль, и одну и ту же производную по нормали. Случай сводится к предыдущему. Решение, следовательно, не может существовать, если $u_1(y, z)$ не является аналитической функцией.

(Аналогичным образом, если u_1 равно нулю, а значение u_0 произвольно, то решение u' для $x \geqslant 0$ можно распространить на область $x \leqslant 0$ при помощи соотношения $u(-x, y, z) = u(x, y, z)$. Это приводит к той же самой невозможности существования решения, если u_0 — неаналитическая функция.)

Если функция $u_0(y, z)$ взята отличной от нуля, то знание ее значений определит u с точностью до аналитической функции [1]) от x, y, z и, следовательно, $u_1(y, z)$ — с точностью до аналитической функции от y, z.

16. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

интересно исследовать с этой же точки зрения, хотя мы и не собираемся им заниматься. Это было сделано Хольмгреном [2]). Рассмотрим снова задачу Коши относительно плоскости $x = 0$, причем первую функцию $u_0(y)$ возьмем опять равной нулю. Как и ранее, допустим, что наше решение определено только с одной стороны плоскости $x = 0$, например при $x \geqslant 0$, и распространим его на область $x \leqslant 0$ при помощи формулы (9). Благодаря этому u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ остаются непрерывными при $x = 0$.

Итак, решение уравнения теплопроводности, непрерывное и имеющее непрерывные производные первого порядка, не обязательно является аналитическим относительно независимых переменных в противоположность тому, что было для уравнения потенциала. Можно только доказать [3]), что оно аналитично относительно x. Так как, с другой стороны, это нечетная функция при $u_0 = 0$,

---

[1]) Можно выбрать в качестве u произведение $1/2\,\pi$ на потенциал двойного слоя с плотностью u_0 на нашей плоскости. Соответствующее значение u_1 есть производная по нормали от этого потенциала. Комбинация ее и величины, упомянутой в тексте, дает u_1 в наиболее общем виде, если задан вид u_0.

[2]) Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik (1904), p. 324, примечание. См. также т. II (1905—1906).

[3]) С. Бернштейн (Thèse, Paris, 1904) (см. также С. Н. Бернштейн, собр. соч. т. III, М., изд. АН СССР, 1960—*прим. ред.*) доказал аналогичный факт для наиболее общего параболического уравнения с аналитическими коэффициентами. Очень простые доказательства позднее были даны Жеврэ (Gevrey, C. R. Acad. Sci., t. CLII, Thèse, Paris).

то ее можно разложить в сходящийся ряд вида

$$u = u_1 x + \frac{u_3}{3!} x^3 + \ldots + \frac{u_{2p+1}}{(2p+1)!} x^{2p+1} + \ldots \tag{10}$$

Первый коэффициент u_1 равен производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x = 0$. Дифференциальное уравнение дает

$$u_{2p+1} = \left(\frac{\partial^{2p+1} u}{\partial x^{2p+1}}\right)_{x=0} = \frac{\partial^p}{\partial y^p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{d^p u_1}{dy^p}.$$

Ясно, следовательно, что u_1 имеет производные всех порядков; наконец, что существует ограничение на порядок их величины, так как вследствие сходимости ряда (10) имеем

$$\left|\frac{d^p u_1}{dy^p}\right| = |u_{2p+1}| < \frac{M(2p+1)!}{\rho^{2p+1}}, \tag{11}$$

где M, ρ — два фиксированных положительных числа.

Аналитичность функции u потребовала бы таких неравенств:

$$\left|\frac{d^p u_1}{dy^p}\right| < \frac{Mp!}{\rho^p}, \tag{12}$$

так что система условий (11) менее жесткая, чем условие аналитичности.

17. Мы видим, что наши соображения относительно уравнений с частными производными приводят к результатам, представляющим интерес для теории функций действительной переменной. Такие функции классифицируются, как известно, по степени их регулярности. Усилия современных геометров привели к тому, что найдены важные и интересные функции, занимающие промежуточное положение между произвольными функциями и непрерывными функциями. Более жестким оказывается понятие функции с ограниченной вариацией. Затем идут функции, дифференцируемые один раз, два раза, . . ., p раз и, наконец, функции, дифференцируемые сколько угодно раз.

Функции u_1, удовлетворяющие неравенству (11), свидетельствуют о том, насколько полезна новая классификация[1]): они занимают промежуточное положение между бесконечно дифференцируемыми функциями и аналитическими функциями. Гурса и Жеврэ[2]) назвали функции u_1 *функциями класса* 2. Аналогичным образом функции класса α, т. е. функции $\Phi(y)$, бесконечно дифференцируемые и такие, что

$$\left|\frac{d^p \Phi}{dy^p}\right| < \frac{M(\alpha p)!}{\rho^{\alpha p}} \quad (\alpha > 1) \tag{11'}$$

---

[1]) См. далее примечание на стр. 36.

[2]) См. примечание на стр. 32.

появляются [1]), если с той же точки зрения рассмотреть уравнения

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} = \frac{\partial^n u}{\partial y^n} \qquad (m > n),$$

исследованные Блоком [2]): в этом случае α равно m/n.

То, что действительно существуют функции, удовлетворяющие условиям (11) и не являющиеся аналитическими, или, в более общей форме, которые удовлетворяют этой системе условий для некоторого значения α, но не для меньших значений α, легко видеть на примере тригонометрического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos ny, \tag{13}$$

где c_n, к примеру, действительные положительные числа. Такой ряд можно дифференцировать почленно сколько угодно раз, если ряд

$$\sum c_n n^p \tag{14}$$

сходится для всех значений p. Примем, в частности, что $c_n = e^{-n^{1/\alpha}}$, где α — заданное число, большее единицы. Это выражение удовлетворяет предыдущему условию. Ряд (14), а именно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^p e^{-n^{1/\alpha}}, \tag{14'}$$

который для четного p представляет собой значение p-й производной при $y = 0$ (это максимальное значение производной) имеет, как известно, тот же самый порядок величины, что и интеграл

$$\int_0^{\infty} n^p e^{-n^{1/\alpha}}\, dn = \alpha\Gamma\,[(p+1)\,\alpha]. \tag{14''}$$

Это показывает, что соответствующий ряд (13) принадлежит к классу α, а не к другому классу низшего ранга по крайней мере в пределах интервала, содержащего точку $y = 0$.

Если мы возьмем для n в формуле (13) значения $n = b^\nu$, где b есть целое число, а $\nu = 1, 2, \ldots \infty$, то это существенно

---

[1]) Замечательно, что класс, определяемый *для аналитических функций* неравенством (11′) при $\alpha < 1$, уже рассматривался в анализе. Это класс целых конечных функций.

Понятие «класс» использовано Бэром (Baire) в его работах по разрывным функциям в совершенно ином смысле, и по этой самой причине, как заметил Жеврэ, недоразумение невозможно.

[2]) Henrik B l o c k, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, v. VII (1911).

не изменит порядок выражения (14), а интеграл (14″) будет заменен выражением

$$\int_0^\infty b^{p\nu} e^{-b^\nu/\alpha}\, d\nu = \frac{\alpha}{\log b}\, \Gamma(p\alpha).$$

Мы можем утверждать, что этот новый ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-b^\nu/\alpha} \cos(b^\nu y)$$

не может быть более низкого класса, чем α, не только вблизи точки $y = 0$, то также и на любом интервале. В самом деле, при замене y на $y + 2l\pi/b^k$ (каковы бы ни были целые числа k и l) меняются только первые члены этого ряда, а числа $2l\pi/b^k$ могут как угодно близко аппроксимировать любое действительное число.

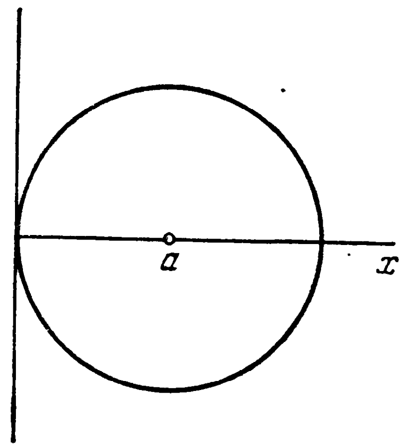

Рис. 3.

Жеврэ[1] (цит. соч.) показал, что функции класса α остаются таковыми, если над ними совершать обычные операции, например умножение, подстановку одной или нескольких функций в другую функцию, интегрирование дифференциальных уравнений. Но эти функции отличаются от аналитических и от хорошо известных обобщенных аналитических функций Бореля[2] в том отношении, что у них отсутствует одно из классических свойств: продолжение функции класса α из одной части области в соседнюю не определено. Если такая функция задана на интервале (0, 1), то она может быть продолжена, например, в область (1, 2) бесчисленным количеством способов и при этом останется в классе α.

Это легко можно видеть по крайней мере для $\alpha = 2$, если ввести функцию $e^{-1/x}$. Эта функция, голоморфная на любом интервале (a, b) при $a > 0$, $b > 0$, не является таковой на интервале $(0, b)$ но принадлежит к классу 2, что видно непосредственно из вычислений[3]. Чтобы вычислить $\Phi^{(p)}(a)$ (при $a>0$), возьмем интеграл

$$\frac{p!}{2\pi i} \int \frac{\Phi(z)}{(z-a)^{p+1}}\, dz$$

вдоль окружности радиуса a в комплексной области. Для $\Phi(z) = e^{-1/z}$ мы можем взять окружность, касающуюся мнимой оси (рис. 3) и абсолютное значение $\Phi(z)$ на этой окружности будет

[1]) См. также его работы (Ann. Ec. Norm. Supre, t. XXXV, sér. 3).

[2]) См. C. R. Acad. Sci., t. CLIV, Acta Math., t. XXIV.

[3]) Для этой же цели можно ввести аналогичную функцию $e^{-1/x} 1/\sqrt{x}$, которая встречается в теории теплопроводности.

тогда постоянным и равным $e^{-1/(2a)}$, так что

$$\frac{1}{p!}\,|\Phi^{(p)}(a)| = \frac{1}{p!}\left|\frac{d^p}{dx^p}(e^{-1/x})_{x=a}\right| \leqslant \frac{1}{a^p}e^{-\frac{1}{2a}}.$$

Последняя величина достигает максимального значения при $a = \frac{1}{2p}$. Имеем

$$|\Phi^{(p)}(a)| < e^{-p}(2p)^p p! = (\text{асимптотически})\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2^p}(2p)!$$

Так как все производные $\Phi(x)$ равны нулю при $x = 0$ с положительной стороны оси x, то это показывает, что функция, равная нулю для всех отрицательных значений x, может быть продолжена в область $x > 0$ при помощи функции $e^{-1/x}$ и при этом будет принадлежать к классу 2.

От этого примера можно перейти к более общему, если рассмотреть интеграл

$$\psi(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{x-z}}\chi(z)\,dz, \qquad (x > 0),$$

где χ — произвольная (непрерывная) функция. Любая производная ψ может быть вычислена путем дифференцирования под знаком $\int$ (члены, соответствующие дифференцированию по верхнему пределу, отсутствуют, поскольку при этом подынтегральное выражение обращается в нуль). Таким образом, ψ тоже принадлежит к классу, по крайней мере равному 2. Легко можно видеть, что ее можно продолжить бесконечным числом способов за пределы любого значения $x = a$ независимой переменной, так как это продолжение зависит от произвольной функции χ.

С. Бернштейн [1]) распространил это заключение на функции любого класса $\alpha > 1$, причем это положение совместимо с бесчисленным множеством продолжений одной и той же заданной функции.

Был поставлен вопрос [2]), могут ли существовать функции $F(p)$, возрастающие быстрее, чем $R^{-p}p!$ и тем не менее такие, что ограничение $|\Phi^{(p)}(x)| < F(p)$ влечет за собой единственность продолжения функции Φ. Бернштейн пришел к отрицательному

[1]) Math. Ann., t. LXXV, S. 40, и след.

[2]) Это было написано в апреле 1921 г. Впоследствии задача была решена благодаря превосходным исследованиям Данжуа и Карлемана (см. C. R. Acad. Sci. v. 173—174, 1921—1922). Они дали теорию квазианалитических функций. См. работу Карлемана Les fonctions quasianalytiques, Paris, Gauthier — Villars, 1926. Продолжение всегда единственно, если $F(p)$ таково, что ряд $\Sigma 1/\sqrt[p]{F(p)}$ расходится (добавлено при корректуре).

ответу для функций более высокого класса, чем 1. Впрочем, он показал, что это заключение отпадает, если неравенство $F(p) > R^{-p}p!$ соблюдается не для *всех* значений p, т. е. если имеется бесконечное число значений p, для которых неравенство соблюдается, и бесконечное число значений p, для которых знак неравенства меняется на обратный.

18. Возвращаясь к задаче Коши в общем виде, мы видим, что нужно избегать смешения между случаем произвольных функций и случаем аналитических функций и что наши предыдущие заключения должны быть пересмотрены с этой точки зрения. Это относится также к искомой функции. Наш первый результат, а именно: то, что решение, если оно существует, является единственным, исключая случай характеристики, должен быть исследован заново. Мы дали доказательство, что задача допускает только единственное *голоморфное* решение.

По этому поводу получен следующий результат. Хольмгрен [1]) доказал, что для линейных уравнений с аналитическими коэффициентами, за исключением особого случая, решение, аналитическое или неаналитическое, является единственным [2]).

Что касается второй части результата, т. е. вопроса существования решения, то здесь, как мы видели, дело обстоит гораздо

---

[1]) Ofversigt af Kongl. Vetenskaps Akad. Förh. (9 января 1901), pp. 91—105. См. также наши Leçons sur la propagation des ondes, note 1. Доказательство основано на хорошо известной теореме Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами. Было бы интересно распространить результат Хольмгрена на уравнения с неаналитическими коэффициентами и на нелинейный случай.

Примечание при переводе (на франц.). Этот вопрос на сегодняшний день разрешен в недавних работах Г. Леви для гиперболического случая и для эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами. В мемуаре Г. Леви и К. Фридрихса рассмотрены также уравнения любого порядка (всюду гиперболические, т. е. характеристики которых всюду действительны).

[2]) Как совершенно справедливо отметил Бохер (Bôcher) (лекции в Парижском университете в 1913—1914 гг.), при формулировке таких результатов важно уточнить, что подразумевается под решением. В данном случае функция u должна иметь первые и вторые производные, удовлетворяющие уравнению с частными производными в окрестности $x = 0$, но не обязательно на самой плоскости $x = 0$. Наоборот, условия, что u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ принимают заданные значения в точках плоскости $x = 0$, заключают в себе утверждение, что эти величины существуют и непрерывны в окрестности этих точек. Точнее, нужно, чтобы u и ее различные производные первого порядка были непрерывны. Это необходимо для того, чтобы доказательство Хольмгрена было законным. В ходе его уравнение заменяется системой уравнений первого порядка. Первые производные вводятся в качестве вспомогательных переменных, как это классически было сделано С. Ковалевской в первоначальном доказательстве основной теоремы (см., например, Goursat, Cours d'analyse, 3 éd., t. II, p. 642), и применяется (как мы будем это делать на протяжении этой книги) обычное преобразование интегралов по формулам Остроградского и Грина, предполагающее непрерывность введенных функций.

сложнее. На первый взгляд в этом отношении невозможно дать общее аналитическое правило. Аналогия с обыкновенными дифференциальными уравнениями, которая, очевидно, вдохновила Коши, оказалась в конце концов ошибочной[1]). Примеры волнового уравнения и уравнения потенциала также показывают, как мало можно полагаться на аналогии для уравнений с частными производными, с виду очень похожих.

С другой стороны, замечательно то, что можно найти надежного проводника в виде физической интерпретации. Аналитическая задача всегда корректно поставлена в смысле, указанном ранее, когда есть механическое или физическое истолкование вопроса. И мы видели, что это имеет место для задачи Коши в приведенных вначале примерах.

Наоборот, ни одна из физических задач, связанных с уравнением $\Delta u = 0$, не формулируется аналитически в форме Коши [2]). Каждая из них приводит к таким формулировкам, как задача Дирихле, т. е. к заданию численных данных в каждой точке границы. То же самое относится и к уравнению теплопроводности. Это согласуется с тем фактом, что начальные данные (или данные Коши), если они не являются аналитическими, не в состоянии определить решение какого-либо из этих уравнений.

В этом замечательном совпадении между двумя точками зрения состоит главная причина, позволяющая нам считать, что позиция, которую мы заняли в предыдущем изложении (и которая заключается в систематическом отказе от гипотезы об аналитичности начальных данных), лучше согласуется с истинной природой явлений, чем первоначальная концепция Коши и его последователей.

Мы будем часто подчеркивать (в противоположность некоторым геометрам) важность этого различия. Часть из них исходит из того факта, что любые функции можно рассматривать как аналитические, поскольку в противоположном случае их можно с лю-

---

[1]) Эта аналогия была бы законной, если бы методы второго рода, упомянутые в п. 10 (последовательные приближения), могли быть распространены на случай уравнений с частными производными. Это противоречило бы нашим предыдущим утверждениям и, следовательно, невозможно, по крайней мере в общем случае (в этом направлении было сделано несколько попыток, разумеется, оказавшихся, безуспешными). Наоборот, для подходящих случаев Пикар и его последователи смогли применить эти методы, учтя природу уравнения и другие особенности задачи (в частности, характеристики).

[2]) Можно попытаться связать эти результаты, относящиеся к уравнению $\Delta u = 0$, с теми, которые были найдены ранее для случая, когда многообразие, несущее начальные данные, является характеристикой. Это было бы ошибочным. Действительно, в последнем случае задача, когда она допускает решение, становится неопределенной, чего никогда не может быть, согласно теореме Хольмгрена, для уравнения $\Delta u = 0$. Задачу Коши для уравнения $\Delta u = 0$ в общем случае можно сравнить с алгебраической задачей, когда условий больше, чем неизвестных.

бой желаемой точностью аппроксимировать аналитическими функциями. Но с нашей точки зрения эта аргументация несостоятельна. Вопрос заключается не в том, насколько такая аппроксимация изменяет начальные данные, а в том, насколько она изменяет решение. Легко видеть, что в том случае, который нас интересует, эти два вопроса никоим образом не эквивалентны. Возьмем классическое двумерное уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

со следующими данными Коши [1]):

$$u(0, y) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = u_1(y) = A_n \sin ny, \tag{15}$$

где n — очень большое число, а A_n — функция, которая очень мала, когда n становится очень большим (например, $A_n = 1/n^p$). Эти данные как угодно близко подходят к нулю. Однако такая задача Коши имеет решение

$$u = \frac{A_n}{n} \sin ny \operatorname{sh} nx,$$

которое, если $A_n = 1/n$ или $1/n^p$, или $e^{-\sqrt{n}}$, очень велико для любого значения x, отличного от нуля (вследствие степени роста e^{nx} и, следовательно, $\operatorname{sh} nx$).

В этом случае из-за присутствия множителя $\sin ny$ поверхность становится волнистой, и видно, что эта волнистость, незаметная в непосредственной близости от оси y, делается громадной на фиксированном расстоянии от этой оси, как бы оно мало ни было, при условии, что n достаточно велико.

19. Непрерывность относительно начальных данных. Сравним этот пример с решением задачи Коши для уравнения (e_1) (уравнение колебаний струны). Общий интеграл этого уравнения есть

$$u(x, t) = \Phi(x + \omega t) + \Psi(x - \omega t). \tag{16}$$

Данные Коши

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x),$$

как известно, без труда дают

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{1}{2}\left[u_0(\xi) + \frac{1}{\omega}\int u_1(\xi)\, d\xi\right], \\ \Psi(\xi) &= \frac{1}{2}\left[u_0(\xi) - \frac{1}{\omega}\int u_1(\xi)\, d\xi\right]. \end{aligned} \tag{16'}$$

---

[1]) Мы впервые дали этот пример на конгрессе Швейцарского математического общества в Цюрихе (1917).

Постоянная интегрирования опущена при условии, что она одна и та же в обеих формулах. Подставив (16′) в (16), получим решение задачи. Предположим теперь, что на некотором интервале размера A функции u_1, u_0 слегка изменились, т.е. заменим их величинами $u_1 + \delta u_1$ и $u_0 + \delta u_0$, причем величины $|\delta u_0|$ и $|\delta u_1|$ таковы, что при произвольном значении x они меньше некоторой малой постоянной величины ε. Согласно уравнению (16′) видно, что соответствующее изменение функций Φ и Ψ всегда меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{A}{\omega}\right)$, а изменение функции u меньше, чем $\varepsilon\ (1 + A/\omega)$, т. е. мало при малом ε.

Мы будем говорить, что значения u *зависят непрерывно* от значений u_0, u_1. Это понятие введено по очевидной аналогии с обычной непрерывностью.

Напротив, пример предыдущего пункта показывает, что решение задачи Коши для уравнения потенциала *не зависит* непрерывным образом от начальных данных.

20. Различные порядки близости и непрерывности. Предыдущее определение нужно уточнить при помощи соображений, ныне классических, развитых в вариационном исчислении [1]) и в функциональном анализе.

Неравенства $|\delta u_0| < \varepsilon$, $|\delta u_1| < \varepsilon$ в некоторых задачах достаточны для того, чтобы считать $u_0 + \delta u_0$, $u_1 + \delta u_1$ очень близкими к u_0 и u_1, но это не имеет места в случае других приложений. Например, $y = g(x) = \frac{1}{n}\sin nx$ для очень большого n представляет собой кривую, каждая точка которой близка к соответствующей точке оси x. Однако эту кривую нельзя заменить приближенно прямой $y = 0$, если, например, нас интересует ее длина. Ее длина между точками $x = 0$ и $x = \pi$ не стремится [2]) к π при $n \to \infty$.

Это вызвано тем фактом, что в данном примере $g(x)$ стремится к нулю как $1/n$ равномерно по x, *чего нельзя сказать* о $g'(x) = \cos nx$. Говорят, что такая функция имеет с нулем *близость нулевого порядка.*

Функция $\frac{g(x)}{n} = \frac{1}{n^2}\sin nx$ имеет с нулем *близость первого порядка* для очень больших n, т. е. $\left|\frac{g(x)}{n}\right|$ и $\left|\frac{g'(x)}{n}\right|$ очень малы, но это несправедливо для $\frac{g''(x)}{n} = -\sin nx$.

В более общем виде говорят, что $g(x)$ и $h(x)$ имеют на интервале (a, b) *близость порядка p*, если $p + 1$ разность $|g(x) -$

---

[1]) Zermelo, Untersuchungen zur Variationsrechnung, Diss., Berlin, Mayer und Müller, 1894.

[2]) Она остается постоянной, если n имеет только целые значения.

$- h(x) |$, $| g'(x) - h'(x) |, \ldots, \left| \frac{d^p g}{dx^p} - \frac{d^p h}{dx^p} \right|$ очень мала на (a, b), например, меньше ε, причем близость тем больше, чем меньше ε.

Если рассматриваемые функции и их производные вплоть до порядка p непрерывны, что всегда имеет место в приложениях, то можно также сказать, что две функции g, h имеют близость порядка p, если между x' и x'' можно установить такое соответствие, что $| x'' - x' | < \varepsilon$ и что это же будет справедливо для всех разностей

$$| g(x') - h(x'') |, \quad | g'(x') - h'(x'') |, \ldots, \left| \frac{d^p g(x')}{dx^p} - \frac{d^p h(x'')}{dx^p} \right|. \qquad (\delta)$$

Это условие эквивалентно предыдущему, причем ε просто заменено другой величиной, которая становится бесконечно малой вместе с ней. В самом деле, $| x'' - x' | < \varepsilon$ влечет за собой

$$| h(x') - h(x'') | < \eta, \qquad \left| \frac{d^q h(x')}{dx^q} - \frac{d^q h(x'')}{dx^q} \right| < \eta$$

для всех q между 1 и p, причем η есть бесконечно малая величина, так же как и ε.

С геометрической точки зрения две плоские кривые имеют друг с другом близость порядка p, если между ними можно установить соответствие такое, что расстояние между соответственными точками будет очень мало, так же, как и разности (δ) (это означает, к примеру, для $q = 1$, что угол между соответствующими касательными будет очень мал). В этом случае, как следует из предыдущего замечания, выбор соответствия между точками произволен. В частности, если касательная нигде не параллельна оси $x = 0$, то можно взять в качестве соответственных точек те, которые имеют одну и ту же абсциссу, или такие, что отрезок, который их соединяет, пересекает обе кривые под конечным углом.

Все это, очевидно, очень похоже на классическую теорию касания. Действительно, *эта теория есть частный случай наших теперешних рассуждений*. Можно кратко сказать, что две кривые имеют соприкосновение порядка p в общей точке A, если их дуги, исходящие из A, имеют близость порядка p, когда дуги достаточно малы. Это, естественно, применимо к функциям, имеющим между собой касание порядка p для определенного значения независимой переменной.

Обобщение на случай многих переменных очевидно, и нет необходимости формулировать его. Например, когда две поверхности имеют соприкосновение порядка p в точке A, то части их, лежащие вблизи A, имеют близость порядка p, которая может быть как угодно велика, если соответствующие части поверхностей достаточно малы.

Если $G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ есть уравнение поверхности при условии, что G имеет непрерывные производные до порядка p и что первые производные от G не обращаются в нуль одновременно, то уравнение второй поверхности, имеющей с первой близость порядка p, будет $G + \delta G = 0$, где δG очень мало, так же как и его первые производные до порядка p.

20'. Понятие близости различного порядка влечет за собой понятие *непрерывности различного порядка*. Если величина u зависит от значений $g(x)$ на (a, b), то эта зависимость называется непрерывной порядка p, если u меняется очень мало всякий раз, когда мы заменяем $g(x)$ другой функцией $h(x)$, имеющей с ней на (a, b) близость порядка p. Итак, решение задачи Коши для уравнения струны, данное ранее, является *непрерывным нулевого порядка* относительно u_0, u_1. Длина дуги кривой (равная $\int \sqrt{1 + y'^2}dx$) имеет непрерывность не нулевого, а первого порядка. Следует заметить, что близость порядка p налагает более жесткие ограничения, чем близость нулевого порядка, и что, следовательно, непрерывность порядка p означает менее жесткое требование, чем непрерывность нулевого порядка.

Решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (п. 18) *не обладает непрерывностью какого-либо порядка относительно* u_0, u_1. В самом деле, $A_n \sin ny$ имеет с нулем при $A_n = 1/n^p$ близость порядка $p - 1$, т. е. произвольно большую, и даже для $A_n = e^{-\sqrt{n}}$ близость будет бесконечного порядка, так как каждая производная этой величины стремится к нулю при $1/n \to 0$. Тем не менее соответствующее значение u не стремится к нулю.

Решение этой задачи не может быть выражено при помощи формул, аналогичных (16) или (16'), потому что, как мы видели, такие выражения подразумевают непрерывность нулевого порядка.

В следующих главах мы встретимся с формулами, более или менее похожими на (16'), за исключением того, что их правые части могут содержать под знаком $\int$ или вне его производные от u_0 или u_1 до определенного порядка. Так как выражения этого рода обладают непрерывностью порядка p, то ни одно из них никоим образом не может представлять собой решение задачи Коши для уравнения потенциала, рассмотренной нами в п. 18.

21. Если мы посмотрим на вещи с конкретной точки зрения, то появится другое парадоксальное следствие.

Мы видели (в этом заключается теорема Хольмгрена), что совокупность данных Коши u_0, u_1, говоря строго математически, соответствует не более чем одному решению уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, так что, если эти величины u_0 и u_1 «известны», то u определяется без какого бы то было произвола.

Но во всех конкретных приложениях «известен» означает «известен с некоторым приближением», возможны всякого рода ошибки при условии, что их величина лежит ниже некоторого предела. С другой стороны, мы видели, что простая замена нулевого значения u_1 произвольно малым значением (15) меняет решение, но не слабо, а очень сильно. Физически все происходит таким образом, что знание данных Коши не определяет неизвестную функцию.

Это показывает нам, как по-разному все происходит в этом случае и в тех, которые соответствуют физическим вопросам. Если физическая задача сводится к аналитической, такой, как задача Коши для уравнения $\Delta u = 0$, то нам будет казаться, что ею управляет чистый случай (согласно Пуанкаре, это состоит в том, что детерминизм нарушается), и она не подчиняется никакому закону. Поскольку физическая интерпретация привела нас к необходимости сделать упомянутые различия, мы должны теперь попытаться сформулировать их аналитически. Это зависит от классификации линейных уравнений с частными производными второго порядка.

22. Три типа линейных уравнений в частных производных. Эти типы различаются алгебраической природой характеристической формы $A(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$.

Если эта форма содержит m различных квадратов и все они одного и того же знака (другими словами, если это *определенная форма*), то говорят, что уравнение принадлежит к эллиптическому типу (характеристики мнимые).

Если она содержит меньше, чем m различных квадратов (*полуопределенная форма*, когда все квадраты одного и того же знака, как это имеет место во всех известных приложениях), то уравнение принадлежит к параболическому типу.

Если характеристическая форма содержит m различных квадратов и знак их не один и тот же (*неопределенная форма*), так что характеристики действительны, то мы имеем гиперболический тип.

Далее, при $m > 3$ нужно сделать еще одно различие для последнего типа, так как знаки могут быть распределены различным образом между m квадратами. Единственный случай, который встречается в физических приложениях, есть тот, в котором все квадраты, за исключением одного, имеют один и тот же знак. Мы назовем его *нормальным гиперболическим типом*. Каждое из уравнений, отмеченных выше: (e_1), (e_2), (e_3) — принадлежит к нормальному гиперболическому типу.

С геометрической точки зрения, как заметил Кулон [1]), нормальный гиперболический тип отличается от других следующим образом. Предположим, что характеристическая форма сведена при помощи соответствующего линейного преобразования к алгебраической сумме квадратов, так что

$$A(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = A_m\gamma_m^2 - A_1\gamma_1^2 - A_2\gamma_2^2 - \ldots - A_{m-1}\gamma_{m-1}^2,$$

причем $A = 0$ есть дифференциальное уравнение характеристического конуса. Его алгебраическое уравнение имеет совершенно похожую форму

$$H(X_1, X_2, \ldots X_m) = \frac{X_m^2}{A_m} - \frac{X_1^2}{A_1} - \ldots - \frac{X_{m-1}^2}{A_{m-1}} = 0. \tag{17}$$

Такой конус состоит из двух полостей и делит m-мерное пространство на *три* области. Внутренняя часть конуса ($H > 0$) состоит из двух отдельных частей ($X_m > 0$ и $X_m < 0$), между которыми нет иного возможного перехода, за исключением внешней части конуса или самой вершины, так как $X_m = 0$ несовместимо с $H > 0$.

Наоборот, такой конус, как

$$\frac{X_1^2}{A_1} + \frac{X_2^2}{A_2} + \ldots - \frac{X_{m-1}^2}{A_{m-1}} - \frac{X_m^2}{A_m} = 0 \tag{17'}$$

(левая часть содержит по крайней мере два положительных и два отрицательных квадрата), состоит только из одной полости и делит m-мерное пространство только на две области. При $m = 4$ этим формулам можно дать интерпретацию в обычном пространстве, если рассматривать X_i как однородные координаты, а $X_m = X_4 = 0$ как бесконечно удаленную плоскость. Уравнение (17) представляет собой тогда двуполостный гиперболоид, а уравнение (17′) — однополостный гиперболоид.

Нормальный гиперболический тип — это единственно известный тип, для которого задача Коши поставлена корректно. Более того, гиперболические типы, не являющиеся нормальными (не встречающиеся в физических приложениях), не приводят ни к какой задаче, о которой было бы известно, что условие корректности выполняется [2]).

[1]) Thèse (1902), p. 30.

[2]) Гамель (Hamel) (Diss., Göttingen, 1901) путем геометрических соображений, заимствованных из вариационного исчисления, пришел к уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t}$, не имеющему нормального вида. Он определил неизвестную функцию u из этого уравнения и из краевых условий. Но он вынужден был наложить на эти последние требование аналитичности (однако не по всем переменным). Кулон (Thèse) при рассмотрении задачи Коши разбирает также случай уравнений, не имеющих нормального вида. Но даже из его вычислений следует, что необходимо бесконечное число условий разрешимости задачи.

Эллиптические уравнения никогда не приводят к корректно поставленным задачам Коши, ибо (см. кн. II) решения такого уравнения, если его коэффициенты аналитические, как и решения уравнения $\Delta u = 0$, обладают в области их существования теми же свойствами аналитичности, которые упоминались и использовались в п. 15. Следовательно, к ним можно применить рассуждения, использованные в этом пункте. Если данные, которые несет аналитическая поверхность S, не являются аналитическими, то решение задачи Коши может существовать только с одной стороны начальной поверхности S, за пределы которой оно не может быть продолжено.

23. Но даже для нормальных гиперболических уравнений физические приложения не всегда приводят к задаче Коши. Эта последняя появляется только тогда, когда исследуются движения в *неограниченной* среде. Дело меняется, если каким-либо образом ввести границы, как, например, в классической задаче о колебании струны, решение которой выражается аналитически при помощи интегрирования уравнения (e_1) с условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \tag{18}$$

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \tag{18'}$$

где l — длина струны, а $x = 0$ — один из ее концов. Движение рассчитывается при $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, т. е. графически — в заштрихованной части R плоскости xt (рис. 4). Условия (18) должны быть выполнены для $0 \leqslant x \leqslant l$, а (18′) — для $t \geqslant 0$.

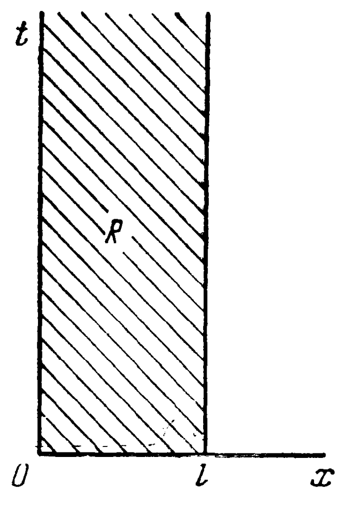

Рис. 4.

Очевидно, что первые условия принадлежат к типу Коши, но не вторые, так что мы имеем дело не с задачей Коши, а с так называемой *смешанной* задачей.

В действительности оба типа условий играют, очевидно, различную роль с механической точки зрения, и их часто с полным основанием называют по-разному.

Однако по геометрическим соображениям мы будем использовать понятие «краевые (граничные) условия». Если же теперь вдуматься в его механический смысл, то условиям (18) нужно дать название начальные данные, сохранив название «граничные условия» для условий (18′), которые соответствуют концам струны.

Начальные условия всегда выражаются в форме Коши, но это не имеет места для *граничных условий* в узком смысле слова. Они скорее похожи на те, которые встречаются в задаче Дирихле. Таким образом, смешанные задачи появляются всякий раз, когда присутствуют границы.

24. Возьмем другой пример. Рассмотрим снова однородный проводник, предположив, что он безграничен в одном направлении, в направлении положительных значений x. В другом направлении он оканчивается в точке, которая соединяется при помощи металлического контакта с источником, имеющим в каждый момент заданный потенциал (постоянный или переменный). Начальное состояние проводника задано (потенциал и сила тока для $t=0$). Тогда потенциал u должен удовлетворять телеграфному уравнению и следующим условиям (если предположить, что контакт находится в начале координат):

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \tag{19}$$

$$u(0, t) = \mathrm{u}_0(t) \tag{19'}$$

что соответствует смешанной задаче.

Два рода данных заданы соответственно на оси x (что соответствует на рис. 4 проводнику при $t=0$) и на оси t (представляющей начало координат в каждый положительный момент времени).

Очевидно, что (19) и (19′) не должны противоречить друг другу при $x = t = 0$, так что

$$u_0(0) = \mathrm{u}_0(0), \qquad u_1(0) = \mathrm{u}_0'(0). \tag{20}$$

24′. Рассмотрим второй пример. Вообразим себе, что металлический контакт не закреплен в точке $x=0$, а является (рис. 5)

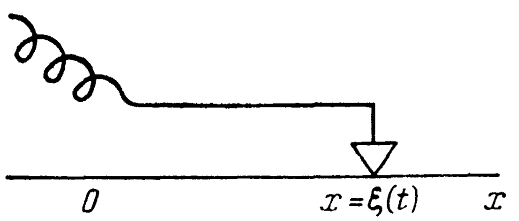

Рис. 5.

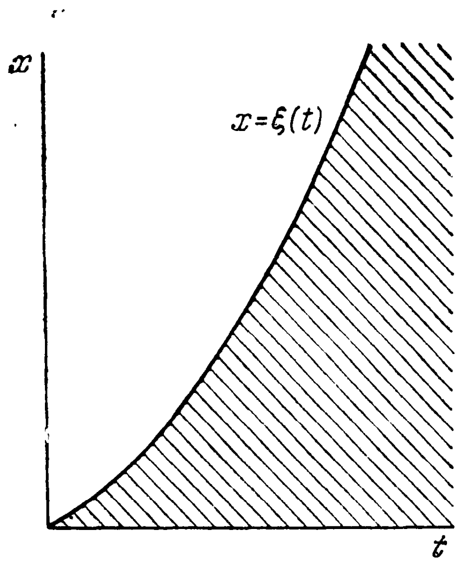

Рис. 6.

подвижным и способен скользить вдоль проводника согласно некоторому заданному закону $x = \xi(t)$, так что мы теперь имеем две функции при $t \geqslant 0$. Одна $\xi(t)$ характеризует положение контакта на проводнике, а другая $\mathrm{u}(t)$ дает в тот же момент времени значение потенциала в этой точке. Задача определения электрического состояния при $t > 0$, если оно задано при $t = 0$, состоит в нахождении решения $u(x, t)$ телеграфного уравнения, удовлетворяющего условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x) \end{aligned}\right\} \quad x \geqslant \xi(t)$$

и

$$u[\xi(t), t] = \mathrm{u}(t).$$

Кривая, несущая данные, представлена на плоскости xt так, как это показано на рис. 6. Такая задача разрешима и полностью определена (что очевидно с физической точки зрения и что можно также получить аналитически). Следовательно, нам нельзя задавать произвольным образом данные Коши на кривой $x = \xi(t)$.

25. Аналогичный пример появляется в задачах с тремя независимыми переменными при изучении поперечных колебаний плоской мембраны, закрепленной в каждой точке своего контура s. Уравнение с частными производными есть уравнение (e_2) цилиндрических волн (п. 4). Начальные условия таковы:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y), \tag{21}$$

где u_0 (начальное смещение по нормали) и u_1 (начальная скорость по нормали) — заданные функции x, y на площади S, которую покрывает мембрана. Граничные условия таковы:

$$u = 0 \tag{21'}$$

в каждой точке s и для каждого значения t, которое мы считаем положительным. При графическом представлении (п. 5) u должно быть рассчитано внутри полуцилиндра, основание которого есть часть S' плоскости xy, а боковая поверхность S'' соответствует различным положительным значениям t. Мы приходим к смешанной задаче, причем условия (21′) соответствуют типу Дирихле.

Аналогичные заключения можно сделать при рассмотрении движения любой ограниченной среды в двух или трех измерениях.

26. Следует заметить, что это применимо, какова бы ни была природа налагаемых ограничений. Например, если взять, следуя Дюгему [1]) случай твердой пульсирующей сферы, находящейся в воздухе, заполняющем пространство *вне* сферы, то малые движения газа приводят не к задаче Коши [2]), а к смешанной задаче

---

[1]) Hydrodynamique, élasticité, acoustique, t. I., chap. XII, pp. 235—237.

[2]) Они не являются в точности данными типа Дирихле, а представляют собой данные, которые носят название типа Неймана, или гидродинамического типа. Однако они аналогичны данным Дирихле в том смысле, что в каждой точке сферической поверхности задаются не все величины, а только одна — значение $\frac{du}{dn}$.

с данными, соответствующими каждой точке поверхности твердой сферы и отличающимися от данных Коши.

27. Во всех предыдущих примерах геометрическая форма многообразий, которые несут начальные данные, очевидно, заметно отличается от случая задачи Коши.

Ясно, что одновременное введение двух родов начальных данных связано с углами или ребрами наших многообразий, несущих начальные данные. При $m > 2$ можно пойти дальше. Для уравнения цилиндрических волн (или колебаний мембраны) уравнение характеристического конуса в системе координат, начало которой находится в его вершине, таково:

$$x^2 + y^2 - \omega^2 t^2 = 0.$$

Плоскость, несущая данные Коши, есть плоскость $t = \mathrm{const}$. *Такая плоскость пересекает только одну полость характеристического конуса, и в сечении образуется эллипс* (в нашем случае — круг).

Мы будем говорить, что плоскость *пространственного типа* (или *пространственно подобна*) относительно нашего уравнения, которое предполагается нормальным гиперболическим, если плоскость пересекает только одну полость характеристического конуса, причем ребро [1]) пересечения замкнуто, или, что то же самое, если параллельная плоскость, проведенная через вершину конуса, не имеет с ним общих точек, кроме самой вершины. В противном случае мы говорим, что она *временного типа* [2]).

Боковая цилиндрическая поверхность S'' в геометрическом представлении задачи о колебании мембраны везде временного типа: каждая из ее касательных плоскостей пересекает характеристический конус по гиперболе. Этот факт является общим. Как заметил Вольтерра [3]), если на поверхности S, состоящей из нескольких частей (независимо от того, отделены ли они друг от друга ребрами или нет), одни относятся к пространственному типу, а другие — нет, то корректные данные на этих последних принадлежат к типу Дирихле.

Никогда не встречается задача Коши, корректно поставленная на многообразиях временного типа (даже лишенных ребер). Например, для уравнения (e_2) или (e_3) нельзя задать произвольным образом данные Коши на плоскости $x = 0$ [4]). Чтобы это показать, выберем данные, не зависящие от времени. Тогда сама

---

[1]) См. примечание на стр. 13.

[2]) Термины, взятые из теории относительности.

[3]) Congr. intern. Roma, v. II, p. 90 (1908).

[4]) К настоящему времени неизвестна никакая система данных, которые несет плоскость $x = 0$ и которые в состоянии корректно определить решение уравнения (e_2) или (e_3).

функция u тоже не будет зависеть от времени[1]) и, следовательно, должна удовлетворять уравнению $\Delta u = 0$. Это, вообще говоря, невозможно, если u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x = 0$ выбраны произвольно.

Условия, которые должны быть наложены на u_0 и $u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$ для того, чтобы задача имела решение, пока еще мало изучены. Они могут оказаться интересными с точки зрения теории функций. Мы их кратко рассмотрим в книге IV.

---

[1]) См. далее п. 30.

Книга II
ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА И ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РЕШЕНИЕ*

ГЛАВА I
КЛАССИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

28. Приступим теперь собственно к нашему предмету, т. е. к решению задачи Коши, которую мы будем рассматривать, вообще говоря, только в тех случаях, когда она корректно поставлена.

Это решение давно известно для некоторых частных случаев, из них наиболее простой — уравнение (e_1) с данными, относящимися к $t = 0$ (малые движения воздуха в безграничной трубе или колебания бесконечной струны). Им мы занимались в п. 19.

Известно также решение Пуассона, относящееся к задаче Коши для уравнения акустики [1]). Его можно выразить в следующей форме.

Пусть (x_0, y_0, z_0, t_0) — данная мировая точка, для которой мы хотим рассчитать значение функции u, определенной условиями (C_3) (п. 4). Пусть, как всегда, $M_r(\varphi)$ — среднее значение функции $\varphi(x, y, z)$ на поверхности сферы Σ радиуса r, описанной в обычном пространстве с центром в точке (x_0, y_0, z_0). Мы имеем

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t_0}[t_0 M_{\omega t_0}(u_0)] + t_0 M_{\omega t_0}(u_1). \tag{P}$$

Эта формула Пуассона была доказана различными способами и следует, например, из теории Кирхгофа (см. далее п. 43). Она — частный случай общего метода, который мы разовьем в кн. IV. Широко известное доказательство [2]), которое мы воспроизведем здесь, опустив детали, является синтетическим доказательством. Оно заключается в непосредственной проверке того, что правая часть удовлетворяет каждому из требуемых условий. В силу теоремы Хольмгрена это единственное выражение, удовлетворяющее всем условиям.

---

[1]) P o i s s o n, Mémoire sur l' integration de quelques équations aux dérivées partielles et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques (прочитан в Парижской Академии наук 19 июля 1819 г.). См. также R a y l e i g h, Theory of sound, v. 2, p. 88. (Русск. пер.: Р э л е й, Теория звука, т. II, стр. 106. Гостехиздат, М.—Л., 1944 — *прим. ред. перевода*); P o i n c a r é, Leçons sur la théorie mathématique de la lumière, chap. III, pp. 76—98.

[2]) Ср. P o i n c a r é, цит. соч.

Такая проверка дается в цитированных работах и в других классических трудах. По поводу начальных условий (C_3) мы просто отсылаем к этим работам с тем, чтобы ограничиться проверкой уравнения с частными производными.

Как мы отметили ранее (стр. 37, примечание 2), необходимо точно договориться о том, что именно нужно считать решением. В настоящем случае мы должны наложить на искомую функцию требование, чтобы она, вообще говоря, имела производные первого и второго порядков, удовлетворяющие самому уравнению; но вторые производные могут в известных случаях испытывать разрывы первого рода на некоторых особых поверхностях. Наоборот, как мы уже говорили в только что упомянутом месте, сама функция и ее производные первого порядка должны быть непрерывны всюду *без исключения*. В самом деле, ясно, что условия Коши (C_3) теряют всякое значение, если их левые части могут испытывать разрыв при $t = 0$ или даже на некоторой поверхности, находящейся в более или менее удаленной окрестности от рассматриваемой гиперплоскости.

Легко также видеть, что допускать в реальной задаче существование разрывов первого порядка, т. е. разрывов первых производных, было бы произвольным и безосновательным. Допустим, что дано решение уравнения u' в области R пространства. Пусть S — проведенная в R нехарактеристическая поверхность, которая делит эту область на две части R' и R''. Сохраняя в R' функцию u', мы можем определить в R'' новое решение u'' уравнения по данным Коши на S, а именно, по значениям, равным на S значениям u', и по *произвольным* значениям одной из ее производных (все эти данные должны быть аналитическими, если S временного типа, и не подчинены этому условию в противоположном случае).

В частности, видно, что если допускается существование решений с разрывами первого порядка (представляющих собой функцию, равную u' в R' и u'' в R''), ничто не обязывает подобные разрывы распространяться вдоль характеристик, по крайней мере в отсутствие новых условий.

В физических задачах, в которых вводятся разрывы первого порядка (или «ударные волны»), чаще всего нужно пересмотреть целиком сами уравнения. Это, например, удалось сделать Риману и Гюгонио для волн в воздухе. Равным образом нужно рассматривать, следуя Ляву (Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2 v. 1, 1903), случай, когда волна первого порядка считается пределом «квазиволн» в смысле Дюгема (C. R., t.C. XXXV, 1902, p. 761), т. е. движений, в которых первые производные испытывают изменения не мгновенные, а просто очень быстрые, хотя и непрерывные. Этот вопрос здесь не рассматривается. Следует, однако, заметить, что Ляв, действуя таким образом, находит, что распространение волн происходит непременно вдоль характеристики. Расхождение этого результата с только что сделанным замечанием показывает, что эти две задачи не эквивалентны, что разрывы, которые получают путем предельного перехода, исходя из квазиволн, рассмотренных Лявом, не являются наиболее общими разрывами первого порядка, которые могут испытывать решения уравнения (e_3).

Таким образом, для получения решений, обладающих непрерывностью первого порядка (т. е. непрерывных вместе с первыми производными), нам нужно предположить, что сами начальные данные удовлетворяют соответствующим условиям регулярности. Как мы увидим несколько далее, те условия, которые мы вынуждены постулировать, приводят именно к этой рассмотренной непрерывности первого порядка при $t = 0$, т. е. к минимуму из того, что мы вынуждены предположить для согласования с условиями задачи, указанными выше.

28′. Для начала мы предположим, что выполняются все условия непрерывности любого порядка, обычно принимаемые в классическом доказательстве результата, о котором идет речь, так что первые и вторые производные двойных интегралов Пуассона можно получить при помощи дифференцирования под знаком $\iint$ (отметим в данный момент, что эти условия включают в себя непрерывность первого порядка каждой из функций u_0, u_1).

Рассмотрим, к примеру, второй член правой части нашей формулы $\frac{1}{4\pi} t_0 I_1 = t_0 M_{\omega t_0}(u_1)$ и найдем сперва производные по x_0, y_0, z_0. Они получаются путем дифференцирования под знаком $\iint$ или, что то же самое для первой из них, например, путем сравнения между аналогичными элементами, один из которых взят на сфере σ с центром в точке (x_0, y_0, z_0), а другой — на сфере σ' того же радиуса ωt_0 с центром в точке $(x_0 + h, y_0, z_0)$, т. е. между элементами, которые получаются друг из друга при помощи переноса на расстояние h параллельно оси x. Таким образом, исходя из непрерывности u_1, с очевидностью находим, что

$$\frac{1}{4\pi} t_0 \frac{\partial I_1}{\partial x_0} = t_0 M_{\omega t_0}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right).$$

Можно также продифференцировать повторно, если $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ предполагается непрерывной. Выполняя таким же образом дифференцирование по y_0 и z_0, имеем

$$\Delta I_1 = \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z_0^2} = 4\pi M_{\omega t_0}(\Delta u_1).$$

Этот первый расчет хорошо известен. Мы, напротив, уклонимся от классического метода при дифференцировании по t_0. Это дифференцирование выполняется обычно при помощи преобразования поверхностного интеграла в тройной, т. е. посредством задания значений u_0, u_1 и их производных не только на поверхности сферы Пуассона, но и во всем объеме этой сферы. Нам будет полезно избежать рассмотрения этого объема следующим образом.

Вторая производная по t_0, а именно:

$$t_0 \frac{\partial^2 I_1}{\partial t_0^2} + 2 \frac{\partial I_1}{\partial t_0},$$

определяемая также при помощи дифференцирования под знаком $\iint$, дает нам для величины $u = \frac{1}{4\pi} t_0 I_1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_0^2} = \frac{1}{4\pi} \iint \left(\omega^2 t_0 \frac{d^2 u_1}{dn^2} + 2\omega \frac{du_1}{dn}\right) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

причем $\frac{du_1}{dn}$ и $\frac{d^2 u_1}{dn^2}$ — первая и вторая производные по внешней нормали. Существует тождество [1])

$$\frac{d^2 u_1}{dn^2} + \frac{2}{\omega t_0} \frac{du_1}{dn} = \Delta u_1 - \mathfrak{K}_2 u_1,$$

где $\mathfrak{K}_2$ — «второй дифференциальный параметр Ламе — Бельтрами», который на поверхности сферы имеет вид

$$\frac{1}{\omega^2 t_0^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}\right].$$

Итак, вследствие классического интегрального тождества [2]), которому удовлетворяет $\mathfrak{K}_2$, и предполагаемой регулярности uт, интеграл от последнего выражения в правой части по поверхноси$_1$ сферы равен нулю. Это приводит к равенству величины $\frac{\partial^2 u}{\partial t_0^2}$ и предыдущей величины $\omega^2 \Delta u$. Второй член $t_0 I_1$ выражения (P) Пуассона удовлетворяет, следовательно, уравнению с частными производными.

Аналогичным образом можно показать, что величина $t_0 I_0 = t_0 M_{\omega t_0}(u_0)$ тоже есть решение нашего уравнения (e_3) и что, следовательно, так же обстоит дело с ее производной по t_0.

Выражение (P) удовлетворяет, следовательно, уравнению (e_3) по крайней мере тогда, когда u_0, u_1 предполагаются регулярными.

29. Посмотрим теперь, как изменится это заключение в присутствии разрывов. В дальнейшем речь будет идти, впрочем, только о разрывах первого рода самих функций u_0, u_1 или их производных.

---

[1]) См. наши Leçons sur la propagation des ondes, chap. 1, n. 34, p. 50.

[2]) См. D a r b o u x, Leçons sur la théorie des surfaces, t. III, n. 674 (формула (18)) и наши Leçons sur la propagation des ondes, n. 35. Обозначение $\mathfrak{K}$ используется здесь, чтобы отличить дифференциальные параметры на поверхности сферы от аналогичных параметров в пространстве.

Если u_1 испытывает разрыв такого рода при переходе через некоторую поверхность S, то выражение для производной $\frac{\partial I_1}{\partial x_0}$ вследствие этого изменится. Предположим, например, что u_1 отлично от нуля со стороны 1 поверхности S и обращается внезапно в нуль при переходе на сторону 2. Тогда двойной интеграл, который дает среднее значение M, должен быть распространен только на часть сферической поверхности σ. При этих условиях найдутся элементы σ, которые не будут иметь соответствия на σ', или, иначе это несоответствие будет иметь место на сферической поверхности, заключенной между линией $\mathfrak{C}$ пересечения σ с поверхностью S и линией ($\mathfrak{C}'$), полученной путем параллельного переноса линии пересечения $\mathfrak{C}'$ поверхности S с σ'. Это приводит к тому, что к выражению $\frac{\partial I_1}{\partial x_0}$ нужно добавить криволинейный интеграл, взятый вдоль $\mathfrak{C}$, в который входят под знаком $\int$ значения u_1, вычисленные, само собой разумеется, со стороны 1.

Аналогичное заключение справедливо для первых производных по y_0, z_0, t_0. Случай любого разрыва первого рода сводится, с другой стороны, к только что рассмотренному, при этом в криволинейные интегралы войдет величина соответствующего разрыва в каждой точке кривой $\mathfrak{C}$.

Следует заметить, что такой разрыв величины u_1 не нарушает непрерывности самой величины I_1 даже тогда, когда точка (x, y, z, t) пересекает характеристическую гиперповерхность G, проведенную через S; при этом σ, сначала не имеющая общих точек с поверхностью S, касается ее, а затем пересекает ее: часть сферы σ, заключенная в области 2, при этих условиях вначале действительно бесконечно мала. То же самое справедливо для соответствующей части сферы единичного радиуса или, по крайней мере, для сферы σ конечного радиуса (это не так в окрестности самой поверхности S; ясно, что там непрерывность величины I_1 нарушается одновременно с нарушением непрерывности u_1). Что касается величины $\frac{\partial I_1}{\partial x_0}$, то она разрывна, причем соответствующий криволинейный интеграл сразу же становится отличным от нуля (см. далее примечание на стр. 58), хотя он берется вдоль бесконечно малого отрезка $\mathfrak{C}$.

Если теперь u_1' непрерывно, а его первые производные разрывны при переходе через S, то очевидно, что:

1) первые производные соответствующего интеграла I_1 непрерывны при указанных условиях (т. е. при переходе через волну);

2) наоборот, выражение для вторых производных I_1 нужно изменить на величину криволинейного интеграла, взятого вдоль $\mathfrak{C}$ и относящегося к рассмотренным разрывам.

Если, наконец, только вторые производные u_1 разрывны, то криволинейный интеграл выпадает, и поскольку предыдущий расчет остается, конечно, в силе, то второй член (P) удовлетворяет уравнению с частными производными.

Покажем, что так же обстоит дело с первым членом. Действительно, это справедливо для произведения $t_0 I_0$ и, следовательно, для его производной по t_0, лишь бы существовали третьи производные рассматриваемого произведения. И это выполняется всюду, за исключением, может быть, самой характеристики G, при условии, что вторые производные существуют и имеют только разрывы первого рода.

Тот факт, что выражение Пуассона удовлетворяет уравнению (e_3), следовательно, установлен, если допустить:

1) непрерывность функции u_0 и ее первых производных, что является естественным, поскольку это приводит к непрерывности решения u и его первых производных по x, y, z при $t = 0$;

2) непрерывность функции u_1, или, что то же самое, производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$;

3) непрерывность производных u_1, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial z}.$$

Эта последняя гипотеза более жесткая по сравнению с теми, которые было бы логично сделать, так как она представляет собой условие непрерывности во втором порядке (непрерывность вторых производных u при $t = 0$).

Однако это дополнительное условие в действительности бесполезно. Чтобы доказать наше двойное заключение, нужно предположить только соответствие в первом порядке, выраженное условиями 1 и 2.

В действительности каждая из величин $t_0 I_0$, $t_0 I_1$ удовлетворяет уравнению с частными производными, каким бы ни был порядок разрыва одной из функций u_i ($i = 0, 1$) на определенной поверхности $S(x, y, z) = 0$, лишь бы, конечно, этот разрыв был первого рода как для функции u_i, так и для каждой из ее производных.

Именно это следует из общих заключений, к которым мы перейдем в дальнейшем (кн. IV).

Можно, конечно, выполнить непосредственную проверку, вычисляя криволинейные интегралы, о которых шла речь. Это мы здесь проделаем, ограничиваясь, однако, случаем разрыва первого рода и обращаясь с другой стороны, к геометрическим понятиям, изложенным несколько далее (п. 39) и более полно в нашем Cours d'analyse [1]).

[1]) Cours d'analyse, professé a l'école polytechnique. Paris, Hermann, t. 1, n. 354, p. 506, 507 (1925).

Итак, предположим, что функция u_i (x, y, z) задана двумя различными выражениями с двух сторон поверхности S, уравнение которой имеет вид $S(x, y, z) = 0$, но сами значения u_i непрерывны при переходе через эту поверхность. Наоборот, частные производные первого порядка $\frac{\partial u_i}{\partial x}$,... могут испытывать в этом месте разрывы первого рода, величина[1]) которых будет обозначаться так:

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x}\right], \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial y}\right], \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial z}\right].$$

Впрочем, мы можем, не уменьшая общности, предположить, как это только что делалось, что одно из двух выражений для u_i, а именно то, которое соответствует области 2, тождественно равно нулю [2]), так что u_i обращается в нуль и на S, и предшествующие величины будут теми же значениями частных производных в любой точке области 1 (для ясности положим, что в этой области $S(x, y, z) \geqslant 0$).

Интеграл $I = I_i$ будет распространен только на ту часть поверхности сферы σ, которая расположена в области 1. Это не вносит изменений в найденное выражение $\frac{\partial I}{\partial x_0}$, если u_i предполагается непрерывным. Изменится выражение для величины $\frac{\partial^2 I}{\partial x_0^2}$. Рассмотрим интеграл I, взятый по сфере σ_0 единичного радиуса с центром в начале координат, причем соответствие между двумя сферами осуществляется при помощи гомотетии, т. е. точка $(x_0 + \omega t_0 \sin\theta\cos\varphi,\ y_0 + \omega t_0 \sin\theta\sin\varphi,\ z_0 + \omega t_0\cos\theta)$ поверхности σ будет представлена точкой $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ поверхности σ_0. Этот интеграл распространен по переменной области поверхности σ_0, а именно той, которая ограничена линией

$$S_0(\theta, \varphi; x_0, y_0, z_0, t_0) = \\ = S(x_0 + \omega t_0 \sin\theta\cos\varphi,\ y_0 + \omega t_0 \sin\theta\sin\varphi,\ z_0 + \\ + \omega t_0 \cos\theta) = 0 \quad (\mathfrak{C}_0)$$

или, коротко,

$$S_0(\theta, \varphi, x_0) = 0.$$

---

[1]) Эти величины не являются произвольными (см. наши Leçons sur la propagations des ondes, liv. 2). Они пропорциональны величинам α, β, γ в тексте. Оказывается, что расчет удается провести без использования этой пропорциональности.

[2]) Действительно, всегда можно рассматривать заданное распределение значений u_i как сумму двух других, из которых одно непрерывно в совокупности областей 1 и 2 (так что значение $u(x, y, z, t)$, которое выводится из него, конечно, удовлетворяет уравнению с частными производными) и совпадает в области 2 с истинным значением. В этом случае мы должны рассматривать только оставшуюся часть, которая равна нулю в области 2.

Отсюда (Cours d'analyse, цит. место) производная $\frac{\partial I}{\partial x_0}$ по параметру x_0 содержит в себе, кроме двойного интеграла

$$\iint \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

криволинейный интеграл вдоль $\mathfrak{C}_0$

$$\int_{\mathfrak{C}_0} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x}\right] \frac{d\sigma_0}{dx_0} = \int_{\mathfrak{C}_0} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{d\sigma_0}{dx_0}.$$

Дифференциальный элемент $\frac{d\sigma_0}{dx_0}$ рассчитывается, как будет сказано в п. 39, при помощи элемента поверхности $d\sigma_0 = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$. Он также записывается в виде (см. цитированные места) $ds_0 \frac{dN_0}{dx_0}$, где ds_0 — элемент дуги $\mathfrak{C}_0$, а dN_0 — расстояние по нормали между двумя кривыми на сфере $S_0(\theta, \varphi, x_0) = 0$, $S_0(\theta, \varphi, x_0 + dx_0) = 0$, которое считается положительным, если вторая из них по отношению к первой находится со стороны области 1. В свою очередь (Cours d'analyse, цит. место) производная $\frac{dN_0}{dx_0}$ может быть заменена частным

$$\frac{dN_0}{dx_0} = -\frac{\partial S_0}{\partial x_0} : \frac{dS_0}{dN_0}.$$

Вернемся к сфере σ (принимая во внимание коэффициент подобия ωt_0 между σ и σ_0). Так как $\frac{\partial S_0}{\partial x_0}$, очевидно, равно $\frac{\partial S}{\partial x} = \alpha$, то отсюда следует выражение для криволинейного интеграла

$$\frac{1}{\omega^2 t_0^2} \int_{\mathfrak{C}} \alpha \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{ds}{\left(\frac{dS}{dN}\right)},$$

где N — направление на σ, параллельное N_0.

Аналогичный вид имеют члены, которые нужно добавить к выражениям

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}.$$

Обозначим через a, b, c направляющие косинусы внешней нормали к сфере: $a = \sin\theta\cos\varphi$, $b = \sin\theta\sin\varphi$, $c = \cos\theta$; через α, β, γ направляющие косинусы нормали к S, направленной в область 1, которые, если придать соответствующую форму уравнению поверхности, совпадают с частными производными от S; через A, B, C направляющие косинусы направления N_0 (а также для соответствующего направления N, проведенного на σ): через ψ угол, под которым пересекаются поверхности S и σ, определяемый следующим образом:

$$\cos\psi = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Величина (положительная при наших предположениях) $\frac{dS}{dN}$ равна $\sin\psi$.

Точно так же не изменится выражение для первой производной от I по t_0. Вторая производная будет содержать в качестве дополнительного члена криволинейный интеграл

$$\frac{1}{t_0^2}\int_{\mathfrak{C}} ds \frac{du_i}{dn}\frac{dS}{dn} : \left(\frac{dS}{dN}\right) = \frac{1}{t_0^2}\int_{\mathfrak{C}} \frac{ds\cos\psi}{\sin\psi}\left(a\frac{\partial u_i}{\partial x} + b\frac{\partial u_i}{\partial y} + c\frac{\partial u_i}{\partial z}\right),$$

взятый также вдоль $\mathfrak{C}$. Если подставить эти различные выражения[1]) в левую часть уравнения с частными производными и принять во внимание уже проделанный в предыдущем пункте расчет, то будем иметь

$$\omega^2\Delta(t_0 I) - \frac{\partial^2(t_0 I)}{\partial t_0^2} = \frac{1}{t_0}\left\{\iint_{S\geqslant 0}\mathfrak{K}_2 u_i d\sigma + \right.$$
$$\left. + \int_{\mathfrak{C}} ds \frac{\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x} + \beta\frac{\partial u_i}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u_i}{\partial z} - \cos\psi\left(a\frac{\partial u_i}{\partial x} + b\frac{\partial u_i}{\partial y} + c\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)}{\sin\psi}\right\},$$

причем

$$\alpha - a\cos\psi = A\sin\psi,\qquad \beta - b\cos\psi = B\sin\psi,$$
$$\gamma - c\cos\psi = C\sin\psi.$$

Коэффициент при ds в криволинейном интеграле есть не что иное, как $\frac{du_i}{dN}$, а, с другой стороны, согласно формуле, на которую мы ссылались[2]), интеграл от $\mathfrak{K}_2$, распространенный по площади, определяемой на σ неравенством $S \geqslant 0$, отличен от нуля и равен $-\int_{\mathfrak{C}}\frac{du_i}{dN}ds$.

29′. Другие свойства, которыми должно обладать наше решение: непрерывность u и ее первых производных — также имеют

---

[1]) Расчет, приведенный в тексте, несправедлив при переходе через характеристику, так как знаменатели $\frac{dS}{dN} = \sin\psi$, которые входят под знак интеграла, обращаются в нуль. В этом случае лучше всего исходить непосредственно из выражения (P), уподобляя бесконечно малую сферическую площадку сферическому сегменту. Таким образом, легко находят для производных $\frac{\partial^2 I_i}{\partial x_0^2}, \ldots, \frac{\partial^2 I_i}{\partial t_0^2}$ величину их разрывов: $2\pi\omega t_0\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x}, \ldots, 2\pi\omega^2 t_0\frac{du_i}{dn}$.

[2]) См. примечание 2 в предыдущем пункте, стр. 53.

место, благодаря условиям 1 и 2 предыдущего пункта. Итак, *выражение* (P) *удовлетворяет всем условиям задачи.*

Принятые нами предположения относительно начальных данных оказываются наименее жесткими из тех, какие следует сделать. Мы ограничились предположением о непрерывности при $t = 0$ тех же самых величин u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, которые должны быть непрерывными при всех значениях x, y, z, t. Разрыв одной из них противоречил бы требованиям, налагаемым на функцию u.

Может показаться, однако, согласно предыдущим замечаниям, что такое противоречие не должно представлять непреодолимого препятствия для тех задач, в которых оно может возникнуть. Предположения, содержащие противоречие этого рода, как мы уже видели (стр. 37, примечание 2) часто исследовались в связи с уравнениями эллиптического типа. Но здесь дело обстоит иначе. В гиперболическом случае влияние особенностей начальных данных не может оставаться сосредоточенным на границе. Оно с необходимостью распространяется в виде волны (см. далее п. 31), т. е. вдоль всей характеристики [1]).

30. Метод спуска. Особые трудности встречаются уже тогда, когда вместо волнового уравнения в трехмерном пространстве рассматривают уравнение (e_2) (цилиндрические волны). Однако в данный момент мы можем сразу же вывести решение задачи для уравнения (e_2) из соответствующего решения, полученного для (e_3).

Действительно, мы ранее видели, что первое уравнение есть не что иное, как частный случай второго. Чтобы его проинтегрировать, достаточно предположить, что в формуле (P) функции u_0 и u_1 не зависят от z.

Итак, перед нами первый пример того, что мы назовем «методом спуска». Может показаться излишним придумывание специальных слов для обстоятельства в общем-то незначительного, использовавшегося уже на первых стадиях теории [2]). Но так как мы будем часто обращаться к нему, то нам будет удобно располагать специальным термином для его обозначения. Метод состоит в том, что отмечается следующий факт: если можно сделать многое, то можно сделать и меньшее; если можно проинтегрировать уравне-

---

[1]) Решение u не может иметь разрыва определенного порядка (например, первого), который существовал бы при $t = 0$ и исчезал бы (вместо того чтобы распространяться) при $t > 0$. Строгое доказательство этого не представляет труда, если считать, что u определяется данными Коши для $t = T > 0$, и предположить, что величины $u_0(x, y, z) = u(x, y, z, 0)$ и $u_1(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0)$ рассчитываются по этим данным (путем нового применения формулы Пуассона).

[2]) P a r s e v a l, в кн. Traité des différences et des séries, de Lacroix, 1 éd., p. 515; P o i s s o n, Mémoire (уже цит.), art. 8; D u h e m, Hydrodynamique, élasticité, acoustique, t. II, chap. VIII.

ния с m независимыми переменными, то можно сделать это и для уравнений, в которые входят лишь $m-1$ независимых переменных. В данном случае, чтобы проинтегрировать уравнение (e_2), нужно только отметить, что каждое решение уравнения (e_2) есть решение (e_3), не зависящее от z, и наоборот.

Итак, задача Коши для уравнения цилиндрических волн

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\ \left.\begin{aligned} u&=u_0(x,y),\\ \frac{\partial u}{\partial t}&=u_1(x,y)\end{aligned}\right\}\quad \text{при } t=0\end{gathered}\tag{A}$$

эквивалентна той же самой задаче для волнового уравнения в трехмерном пространстве

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\ \left.\begin{aligned} u&=u_0(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial t}&=u_1(x,y)\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad t=0,\end{gathered}\tag{B}$$

которую мы уже рассматривали (уравнения (e_3), (C_3)), с той разницей, что правые части начальных условий (B) не содержат z. Полную эквивалентность этих двух задач можно доказать аналитически совершенно строго. То, что каждое решение (A) удовлетворяет (B), — вещь сама по себе очевидная. Обратно, решение (B) не должно зависеть от z. Если это не так: $u=\varphi(x, y, z, t)$ — тогда функция $u=\varphi(x, y, z+h, t)$, где h — произвольная постоянная, была бы вторым решением той же самой задачи, что противоречит теореме Хольмгрена. Следовательно, решение (B) должно быть решением (A).

30'. После того как мы это установили, нам остается только взять в качестве u_0 и u_1 в формуле (P) функции, зависящие исключительно от x и y. Найдем, какой она примет вид при этих условиях. Для этого достаточно вспомнить, что среднее значение на сфере или, что в данном случае одно и то же, на полусфере, ограниченной плоскостью, параллельной плоскости xy — выражается двойным интегралом

$$M_r(\varphi)=\frac{1}{2\pi r^2}\iint\varphi\, d\Sigma,$$

где интеграл распространен по всей поверхности полусферы. Беря x и y в качестве независимых переменных, мы видим, поскольку φ не зависит от z, что M выражается следующим образом:

$$M_r[\varphi(x,y)]=\frac{1}{2\pi r}\mu_r(\varphi),\qquad \mu_r(\varphi)=\iint\frac{\varphi\, dx\, dy}{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}\tag{1}$$

(интегрирование распространяется по площади круга $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2$). Формула (P) записывается так:

$$u(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{2\pi\omega}\left[\frac{\partial}{\partial t_0}\mu_{\omega t_0}(u_0) + \mu_{\omega t_0}(u_1)\right]. \qquad (P')$$

31. Введение волн. Отметим, что формулы (P) и (P′) согласуются с тем, что известно о звуковых и световых волнах [1]).

В случае любого из этих явлений мы видим, что для расчета значения u в точке (x_0, y_0, z_0) в момент t_0 нужно знать значения наших функций u_0 и u_1 (данные Коши для $t = 0$) не во всем пространстве, а только внутри и на поверхности сферы с центром в точке $O(x_0, y_0, z_0)$ радиуса ωt_0. Возмущения, созданные в начальный момент в точках, удаленных от O далее, чем на ωt_0, не могут подействовать в O ранее момента t_0.

Чтобы установить тождественность этого понятия волн с понятием характеристик, используем наше графическое представление. Для большего удобства рассмотрим уравнение (e_2), которое позволяет нам непосредственно получить полное наглядное изображение в трех измерениях. Проведем плоскость $t = 0$ и отметим мировую точку (x_0, y_0, t_0). Любое возмущение, созданное в точке (x, y) в некоторый момент t, повлияет на эту мировую точку, если только

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant \omega^2 (t - t_0)^2.$$

Если возьмем знак равенства, то получим поверхность прямого кругового конуса, имеющего вершину в точке (x_0, y_0, t_0) и ось, параллельную оси t, или, точнее (поскольку в данном случае t нужно взять строго меньше t_0), внутреннюю поверхность этого конуса. Что касается соответствующего неравенства, то оно означает, что точка (x, y, t) должна быть внутри конической поверхности. Круг, по которому должны быть распространены интегралы (1), есть след такого конуса на начальной плоскости xy.

Согласно удачному выражению, которое нам подсказал Донде, конус, определенный предыдущим уравнением, в трехмерном времени-пространстве играет роль *слуховой трубки*, способной принимать только данные, влияющие на состояние явлений в мировой точке (x_0, y_0, t_0).

Поверхность этого конуса удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 = 0, \qquad (2)$$

которое определяет характеристики уравнения цилиндрических волн согласно правилу п. 13.

---

[1]) Можно понять *априори* причины этого, если исходить из концепций Гюгонио (см. Hydrodynamique, élasticité, acoustique, t. I или наши Leçons sur la propagation des ondes, в особенности, гл. IV п. 165 и гл. VII п. 290).

При рассмотрении волнового уравнения в трехмерном пространстве не вносится никаких существенных изменений (за исключением того, что вводится четырехмерное пространство). Нужно заменить конус «гиперконусом» (рис. 7):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \text{или} \leqslant \omega^2 (t - t_0)^2.$$

След его на гиперплоскости $t = t_1 < t_0$ есть сфера с центром в точке (x_0, y_0, z_0) радиуса $\omega (t_0 - t_1)$. Этот гиперконус [1]) удовлетворяет уравнению с частными призводными первого порядка

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2 = 0, \tag{3}$$

определяющему характеристики уравнения (e_3).

В более общем виде условие (3) найдем, если выразим аналитически хорошо известное физическое правило, согласно которому нормальная скорость распространения волн равна ω [$G(x, y, z, t) = 0$ есть фронт волны].

Соотношение между решениями нашей задачи и волнами есть общее соотношение, что будет яснее видно в дальнейшем.

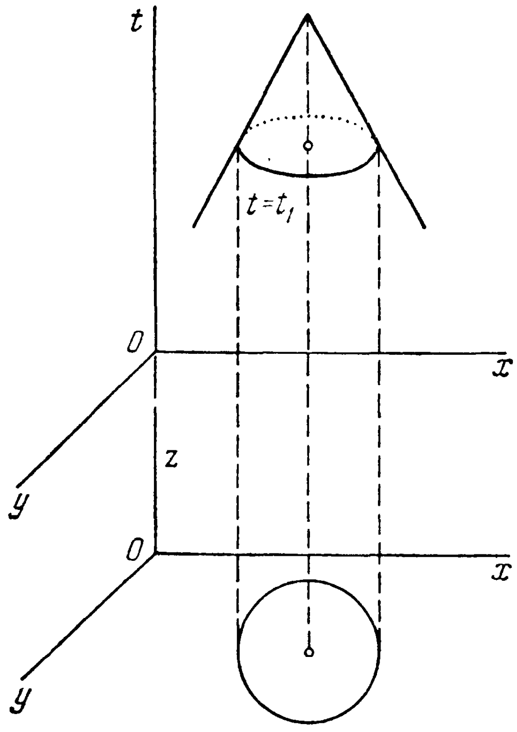

Рис. 7.

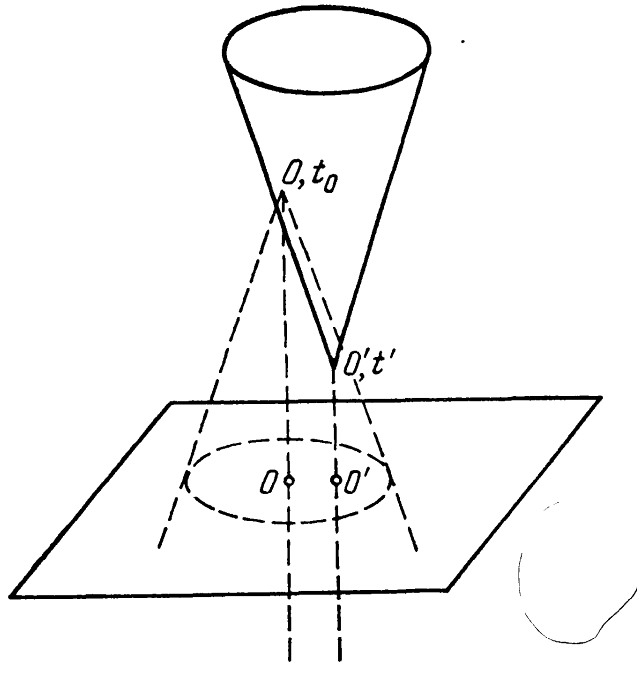

Рис. 8.

32. Волны, идущие назад. Заметим, что здесь, как и большей частью в дальнейшем, мы рассматриваем волны при помощи

[1]) В нашей Géometrie descriptive généralisée его нужно было бы представить как на вышеприведенном рис. 7 (обычный конус в пространстве (x, y, t), а в пространстве (x, y, z)— шар, являющийся основанием гиперконуса).

способа, несколько отличного от обычного, отсчитывая ход времени в обратном направлении. Вместо того чтобы отправляться из мировой точки (x', y', z', t') или (x', y', t') и рассматривать последовательные точки, достигнутые в моменты, следующие за t', волнами, испущенными в момент t из точки O' (x', y', z') (рис. 8) или (x', y'), мы задаемся конечной мировой точкой (x_0, y_0, z_0, t_0) или (x_0, y_0, t_0) и ищем, как нужно выбрать предшествующую точку, чтобы она была как раз «на волне», т. е. чтобы волна, испущенная этой начальной мировой точкой, достигла точки O (x_0, y_0, z_0) или (x_0, y_0) точно в момент t_0. Место таких предыдущих мировых точек есть обратная волна, совершенно тождественная обычной волне, за исключением того, что она распространяется при убывающих значениях t, т. е. ход времени обращен в другую сторону.

Необходимое и достаточное условие того, чтобы волна, испущенная в точке (x', y', z', t'), прошла как раз через точку (x_0, y_0, z_0, t_0), заключается в том, чтобы обратная волна, испущенная из последней точки, прошла как раз через первую точку. Этот факт носит совершенно общий характер, что мы в дальнейшем установим аналитически.

Такие условия, находящиеся в очевидном соответствии с принципом «обратного хода света», часто будут встречаться на протяжении этой монографии. Можно даже пойти немного дальше и рассмотреть случай, когда две мировые точки (x', y', t') и (x, y, t), например, в трехмерном пространстве находятся «за волной» одна по отношению к другой, т. е. когда волна, выходящая из точки O' в момент t', достигает точки O ранее момента t_0. Геометрически это означает, что (x_0, y_0, t_0) находится внутри «прямой полости» характеристического конуса с вершиной в (x', y', t'), т. е. внутри полости, обращенной к положительным t. Интересно отметить, что необходимое и достаточное условие для этого, как теперь очевидно, заключается в том, чтобы точка (x', y', t') находилась внутри «обращенной назад» или «обратной» полости характеристического конуса с вершиной в точке (x_0, y_0, t_0). Этот факт также является общим. Мы увидим, что условие, о котором идет речь, выражается в виде неравенства, первый член которого симметричен относительно двух точек, входящих в него.

33. Вопрос о принципе Гюйгенса. Как бы ни были просты предыдущие результаты, они послужили началом длительных и важных дискуссий, относящихся к тому, что называют *принципом Гюйгенса*.

В действительности, как это часто случается, обсуждаемый вопрос был плохо поставлен. В понятие принципа Гюйгенса может вкладываться различный смысл, и не всегда делается четкое различие между этими толкованиями. Известно, что в своей фундаментальном труде, посвященном природе света, великий голландский ученый изучал действие светового возмущения, существующего в начальный момент ($t = 0$) в данной точке O, на другую точку a. Вместо того чтобы строго следовать его изложению, мы для большей ясности представим его в форме силлогизма.

(A) (*в широком смысле*). «Действие явлений, существующих в момент $t = 0$, на состояние материи в последующий момент $t = t_0$ совершается через посредство каждого промежуточного момента $t = t'$, т. е. (предполагая, что $0 < t' < t_0$) для нахождения состояния в момент $t = t_0$ мы можем, исходя из состояния при $t = 0$, найти состояние при $t = t'$, а из этого последнего — искомое состояние в конечный момент $t = t_0$».

(B) (*в узком смысле*). «Если в момент $t = 0$, или, более конкретно, в течение короткого промежутка $\varepsilon \leqslant t \leqslant 0$ возникает световое возмущение, локализованное в непосредственной близости от точки O, то его воздействие будет сосредоточено при $t = t'$ в непосредственной окрестности поверхности сферы с центром в O и радиусом $\omega t'$, т. е. в очень тонком сферическом слое с центром в O, заключающем в себе предыдущую сферу».

(C) (*Заключение*). «Для того чтобы вычислить воздействие начального светового возмущения, возникшего в точке O в момент $t = 0$, можно заменить его соответствующей системой возмущений, возникших при $t = t'$ и распределенных на поверхности сферы с центром в точке O и радиусом $\omega t'$».

Случилось так, что разные авторы называли принципом Гюйгенса какое-то одно из этих трех положений. Как будет видно, наше суждение по поводу каждого из них должно быть совершенно различным.

Положение (A) есть то, что философы (если только я правильно использую их язык) называют одним из законов мысли, т. е. законом, не зависящим от доводов, существование которого мы никоим образом не можем отрицать и без которого мы не можем мыслить. Если мы сегодня обнаруживаем ассирийские надписи, то мы не можем представить, что в какой-то момент между временем написания и временем открытия их могло не быть и всякий след их существования исчезал. Следовательно, положение (A) должно рассматриваться как избитая истина. Это не означает, что она не может нас интересовать, ибо геометрия не боится избитых истин. Вышеприведенное положение соответствует тому факту, что интегрирование уравнений с частными производными определяет некоторые группы функциональных операций, и это, к примеру, приводит к замечательным тождествам, касающимся гипергеометрических функций, функций Бесселя, тета-функций и т. д.

Положение (C), хотя и не столь очевидное, оказывается общим свойством уравнений, которыми мы занимаемся.

Совершенно не так обстоит дело с положением (B). Далее мы увидим, что оно представляет собой совершенно особое свойство некоторых уравнений частного вида. В действительности неизвестно, является ли волновое уравнение в трехмерном пространстве (и другие, в сущности, не отличающиеся от него) единственным, обладающим этим свойством.

При случае мы будем говорить о положениях (А) и (В) как о принципе Гюйгенса в широком и узком смысле слова, отличая их от положения (С).

34. Это положение (С) было предметом и результатом основополагающих работ двух авторов. Кирхгоф занимался им для случая пространственных волн в своем классическом труде «Zur Theorie des Lichtstrahlen» [1]) и в своих «Лекциях по оптике». Потом Вольтерра доказал его для цилиндрических волн, в частности в Acta Mathematica, v. XVIII, и недавно вернулся к этому предмету во время своих публичных лекций в Стокгольме [2]).

Далее мы изложим, каким образом эти два автора ставят вопрос. Для большего удобства при представлении на графике мы ограничимся случаем уравнения (e_2). Предположим, что в начальный момент точки плоскости xy находятся в покое и что затем им сообщают возмущения внутри замкнутой кривой σ. В дальнейшем эти возмущения распространяются вне σ, а перед этим влияют на точки самой кривой σ. Отметим значения u и одной из ее производных, например $\frac{du}{dn}$, в различных точках кривой σ во все последующие моменты, помня, что при нашем способе представления эти последовательные состояния σ будут относиться к последовательным сечениям прямого цилиндра S, имеющего основанием кривую σ. Таким образом, именно боковая поверхность этого цилиндра несет вышеупомянутые значения u и $\frac{du}{dn}$. Условия остаются абсолютно теми же самыми для пространственных волн, за исключением того, что вводится четырехмерное пространство, а кривая σ заменяется поверхностью (и, следовательно, цилиндр заменяется гиперцилиндром).

Итак, Кирхгоф для второй задачи и Вольтерра для первой получили выражение u в любой положительный момент и для любой точки вне σ в функции от вышеупомянутых значений u и $\frac{du}{dn}$ вдоль цилиндра или гиперцилиндра (говоря обычным языком, вдоль кривой или поверхности σ, рассматриваемой во все последующие моменты). Эти выражения даются определенными интегралами, взятыми по S. Любой из предыдущих случаев допускает такое физическое истолкование: движение среды, которая окружает σ,

---

[1]) Sitzungsber. der K. Ak. der Wiss. (1882), S. 641 und f. См. также Beltrami, Rendic. Istituto Lombardo, 2 ser., v. XVII; Duhem, Hydrodynamique, élasticité, acoustique, t. 1, pp. 145—161.

[2]) Leçons sur l'integration des équations différentielles aux dérivées partielles. Upsala, 1906. Paris, Hermann, 1912.

можно рассматривать как результирующее подходящим образом выбранных возмущений, испущенных в различные моменты различными точками σ. Это составляет положение [1]) (C).

Аналитически эта задача Кирхгофа и Вольтерра есть не что иное, как задача Коши для части мирового пространства (которое является пространством $xyzt$ или xyt), расположенной вне S и выше $t = 0$ (т. е. в области $t \geqslant 0$); многообразие, которое несет данные, состоит из верхней части S (т. е. из части S, которая соответствует $t \geqslant 0$) и части (лежащей вне σ) гиперплоскости $t = 0$, причем данные на гиперплоскости равны нулю.

Сама по себе эта задача Коши не принадлежит к классу, который нас интересует, так как она не является той, какие мы называем «корректно поставленными». Ее разрешимость, как это можно видеть в работах самих вышеупомянутых авторов, зависит от бесконечного числа необходимых условий. В действительности для границы такой формы корректно поставленная задача есть то, что мы называем «смешанной» задачей. Она состоит в том, что задается u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ $\left(\text{например, } u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$ для $t = 0$ и только u $\left(\text{или только} \frac{du}{dn}\right)$ на упомянутой части многообразия S.

Методы Кирхгофа и Вольтерра представляют интерес с физической точки зрения, поскольку они дают доказательство справедливости принципа Гюйгенса в форме (C). Кроме того, эти методы непосредственно применимы к общему случаю задачи Коши для обоих соответствующих уравнений и дают полное решение задачи для всех форм многообразий, несущих начальные данные (строго говоря, формулы Вольтерра могут быть выведены из формул Кирхгофа методом «спуска»). Помимо этого, решение получается при помощи аналитического метода (вместо синтетического метода, которым мы доказали формулу Пуассона), так что мы можем попытаться обобщить эти методы для других типов уравнений.

35. Метод Римана. В действительности результаты Кирхгофа и Вольтерра не были ни единственными, ни даже первыми такого рода. Задолго до появления работы Кирхгофа и эпохи исследований Вольтерра было дано первое общее решение задачи Коши для широкого класса уравнений. Это знаменитый метод Римана, содержащийся в труде великого геометра «О распространении воздушных волн с конечной амплитудой» [2]). Хотя метод дан Риманом для уравнений несколько особого вида, он в действительности годится для любого линейного гиперболического уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными.

[1]) С точки зрения физической интерпретации интегралы Кирхгофа нуждаются в преобразовании, что было сделано Брюном (B. Brunhes), Travaux et mémoires des facultés de Lille, t. IV, 16 mémoire (1895).

[2]) Gött. Abhand., B. VIII (1860). Русск. пер.: Б. Риман, Соч., Гостехиздат, М.—Л., 1948 (*прим. ред. перевода*).

Но работа Римана оставалась неизвестной в течение довольно долгого времени. Внимание к ней было привлечено Дюбуа-Реймоном [1]) только после появления работы Кирхгофа. Она была доведена до сведения всех математиков в самой общей форме благодаря классической работе Дарбу [2]) «Leçons sur la théorie des surfaces».

Поэтому можно считать, что метод Римана повсюду известен, и мы в общем и целом не должны его излагать. Но его исходные точки так тесно связаны с нашим предметом, что мы должны с необходимостью рассмотреть основные моменты этого метода в следующих главах.

ГЛАВА II
ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА

36. Предметом этих лекций является обобщение методов Кирхгофа, Римана и в особенности Вольтерра применительно к любому линейному гиперболическому (нормальному) уравнению с любым числом m независимых переменных.

Исследуем, как поступают три упомянутых автора.

Можно считать, что все они исходят из одной и той же формулы. Действительно, можно сказать, что есть только одна формула (которую можно назвать основной формулой) во всей теории линейных уравнений с частными производными, к какому бы типу они ни принадлежали. Начнем с того, что выпишем эту формулу.

Она хорошо известна в теории потенциала — это классическая формула

$$\iiint (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz = -\iint \left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right) dS.$$

Известно, что она выводится из тождества

$$v\,\Delta u - u\,\Delta v = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,;$$

$$P = v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad Q = v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad R = v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Отправной точкой метода Римана, например, является совершенно аналогичная формула, а именно, тождество

$$v\mathfrak{F}(u) - u\mathfrak{G}(v) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

---

[1]) Leipzig, 1864; Tübingen, 1883 (см. следующее примечание).

[2]) См. далее п. 42. См. также Дини (Dini), Rendic. Accad. Lincei, t. V (1896), t. VI (1897).

что дает после интегрирования

$$\iint [v\mathfrak{F}(u) - u\mathfrak{G}(v)]\,dx\,dy = \int P\,dy - Q\,dx. \qquad (\mathrm{F}_1)$$

Однократный интеграл в правой части берется в положительном направлении по контуру, охватывающему площадь интегрирования в левой части. Функции u и v произвольны, но регулярны.

В этих двух формулах $\mathfrak{F}(u)$ символически означает любой заданный оператор *, линейный относительно u и ее производных по x, y и xy:

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C,$$

P и Q равны, к примеру [1]),

$$P = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + Auv, \qquad Q = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + Buv,$$

в то время как $\mathfrak{G}(v)$ означает следующий вполне определенный оператор или оператор, «сопряженный к $\mathfrak{F}$»:

$$\mathfrak{G}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(Av) - \frac{\partial}{\partial y}(Bv) + Cv.$$

Соотношение между двумя сопряженными друг к другу операторами взаимно, т. е. оператор, сопряженный к $\mathfrak{G}(v)$, равен $\mathfrak{F}(u)$. Конечно, это проверяется непосредственно. К тому же это следует из тождества [2]) (F_1), поскольку можно считать, что оно определяет сопряженный оператор. Тождество не меняется, если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ меняются местами (при одновременном изменении знаков у P и Q).

37. Можно написать аналогичное тождество для любого линейного дифференциального оператора при любом числе m независимых переменных

$$\mathfrak{F}(u) = \sum_{i,k} A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum_i B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu.$$

Умножив на v и интегрируя по частям, снова можем написать тождество (учитывая, что $A_{ik} = A_{ki}$)

$$v\mathfrak{F}(u) - u\mathfrak{G}(v) = \frac{\partial\mathfrak{P}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathfrak{P}_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial\mathfrak{P}_m}{\partial x_m}, \qquad (4)$$

---

[1]) См. следующее примечание.

[2]) Легко видеть, что можно изменить P и Q, не меняя правой части в в формуле (F_1). Но если оператор $\mathfrak{F}$ задан, то существует только один оператор $\mathfrak{G}$, который обращает в тождество уравнение (F_1), что следует из основной леммы вариационного исчисления. См. D a r b o u x, Leçons sur la théorie des surfaces, t. 2, liv. IV, chap. V, p. 114 (2 éd.); G o u r s a t, Cours d'analyse, t. II, p. 404, 2 éd.

где для $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m$ можно принять

$$\mathfrak{P}_i = v \sum_k A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \sum_k A_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} - uv \left(\sum_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} - B_i \right), \quad (4')$$

а $\mathfrak{G}(v)$ представляет оператор [1]:

$$\mathfrak{G}(v) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_k} (A_{ik} v) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i v) + Cv,$$

который называют *сопряженным* к $\mathfrak{F}$, а уравнение $\mathfrak{G}(v) = 0$ аналогичным образом называется сопряженным к рассматриваемому уравнению [2]). Соотношение между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, как и в предыдущем случае (по тем же причинам), является взаимным.

38. Исходя из (4), получаем интегральную формулу, аналогичную (F_1). Для этого потребуются некоторые понятия и определения, относящиеся к m-мерному пространству. Если в таком пространстве имеется произвольная гиперповерхность S, определяемая заданием $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в функции от $m - 1$ параметра (криволинейных координат) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, то косинусы нормали к S в произвольной точке, по определению, пропорциональны величинам

$$D_1 = \pm \frac{D(x_2, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})},$$

$$D_2 = \pm \frac{D(x_1, x_3, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_i = \pm \frac{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

причем правые части суть функциональные определители. Знаки выбираются таким образом, чтобы члены были пропорциональны коэффициентам разложения детерминанта

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial \lambda_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial \lambda_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \lambda_{m-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \lambda_{m-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial \lambda_{m-1}} \\ * & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

---

[1]) См. предыдущее примечание.

[2]) Сопряженное уравнение, если не оговорено противное, всегда берется без свободного члена, даже если исходное уравнение и содержит его.

по элементам последней строки. Знаки должны чередоваться (это условие оставляет произвол знаков). Чтобы была точная аналогия с направляющими косинусами в обычном пространстве, нужно выбрать эти «косинусы» таким образом, чтобы сумма их квадратов была равна единице, т. е. чтобы было

$$\pi_i = \cos(n, x_i) = \frac{\varepsilon D_i}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_m^2}}.$$

В формулах множитель ε равен ± 1, но один и тот же для всех.

«Элемент поверхности» dS около той же точки поверхности S по определению равен

$$dS = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_m^2}\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1},$$

так что

$$\pi_1 dS = D_1 d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1},$$
$$\pi_2 dS = D_2 d\lambda_1 \ldots d\lambda_{m-1}, \ldots, \pi_m dS = D_m d\lambda_1 \ldots d\lambda_{m-1}. \quad (5)$$

В этой формуле остается произвол знаков, соответствующий двум возможным направлениям нормали. Однако мы смогли выбрать определенный знак, так как мы всегда в состоянии изменить знак, меняя порядок криволинейных координат.

39. Мы определили косинусы и элемент поверхности, чтобы сохранить аналогию с понятиями обычной геометрии. Но дело заключается в том, что мы всегда должны рассматривать левые части в формулах (5) как единое целое, так что ничего не изменится, если умножить все косинусы на один и тот же множитель и разделить одновременно dS на этот множитель. В частности, мы часто будем пользоваться величинами (5) в другой форме, которая соответствует случаю, когда S дается уравнением $G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$. Косинусы нормали пропорциональны тогда величинам $\frac{\partial G}{\partial x_i}$, причем коэффициентом пропорциональности служит нормальная производная $\frac{dG}{dn}$. Обозначим через dS_G величину

$$dS_G = dS_G : \left(\frac{dG}{dn}\right).$$

Величины (5) равны (с точностью до знака)

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} dS_G, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m} dS_G.$$

Этот приведенный элемент поверхности dS_G таков, что $dS_G dG$ представляет собой цилиндрический элемент объема между элементом dS поверхности $G = 0$ и соответствующей величиной соседней поверхности $G = dG$ (где dG — очень малая константа).

Таким образом, можно говорить о величине dS_G как о «частном» $\dfrac{dx_1 dx_2 \ldots dx_m}{dG}$ от деления элемента пространства на dG.

40. При помощи этих определений и этой терминологии можно записать хорошо известное тождество (формулу Остроградского — Гаусса*) между кратными интегралами для m-мерного пространства

$$\iiint\left(\frac{\partial\mathfrak{P}_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\mathfrak{P}_m}{\partial x_m}\right)dT =$$

$$= -\iint(\pi_1\mathfrak{P}_1+\pi_2\mathfrak{P}_2+\ldots+\pi_m\mathfrak{P}_m)\,dS \qquad \text{(g)}$$

(dT означает элемент пространства $dx_1 dx_2 \ldots dx_m$).

В этой формуле и в последующих мы обозначаем, жертвуя точностью ради ясности, тройным знаком интеграла $\iiint$ то, что мы должны были бы обозначать m знаками интегрирования — m-кратный интеграл, распространенный по некоторой части нашего пространства; двойным знаком интеграла $\iint$ — $(m-1)$-кратный интеграл, распространенный по гиперповерхности в нашем пространстве; знаком $\int$, если в этом есть необходимость — $(m-2)$-кратный интеграл по ребру. Другими словами, обозначения соответствуют случаю $m = 3$. Интеграл по ребру отличается от криволинейного интеграла тем, что этот последний записывается при помощи обычного символа $\int$.

В формуле (g) интеграл $\iiint$ распространен по некоторой ограниченной части T пространства m измерений, а интеграл в правой части — по поверхности S, ограничивающей T. Обозначим через n направление внутренней нормали к S (знаки в формулах (5) выбраны в соответствии с этим). Как мы ранее видели, можно заменить $\cos(n, x_1)$, $\cos(n, x_2)$, ..., $\cos(n, x_m)$ величинами $\dfrac{\partial G}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial G}{\partial x_2}$, ..., $\dfrac{\partial G}{\partial x_m}$ соответственно, если одновременно заменить dS на dS_G (в предположении, что G возрастает вдоль направления внутренней нормали).

Применим это к тождеству (4). Если учесть выражения (4′) для $\mathfrak{P}_i$, то множитель при dS под знаком $\iint$ в правой части

(g) будет равен (с точностью до знака)

$$v\sum_{i,k} A_{ik}\pi_i\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\sum_{i,k} A_{ik}\pi_i\frac{\partial v}{\partial x_k} + Luv =$$
$$= v\sum \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial A}{\partial \pi_k} - u\sum \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial A}{\partial \pi_k} + Luv,$$

где A — характеристическая форма, определенная выше, а π_i — либо косинусы внутренней нормали к S, либо величины, пропорциональные им

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m},$$

если в последнем случае заменить dS на dS_G.

Мы введем, следуя Адемару [1], особое направление, зависящее от плоскости, касательной к S в произвольной точке M. Положим

$$\frac{dx_1}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_1}} = \frac{dx_2}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_2}} = \ldots = \frac{dx_m}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_m}} = d\nu. \tag{ν}$$

Знаменатели (которые не могут обратиться одновременно в нуль, поскольку дискриминант формы A предполагается отличным от нуля) пропорциональны направляющим косинусам некоторого направления, которое мы назовем *конормалью* к S в точке M. Очень простая геометрическая интерпретация этого понятия была дана Кулоном [2]. Она связывает его с характеристическим конусом (п. 13) в точке M, т. е. с конусом, вершина которого расположена в M, а дифференциальное уравнение есть $A(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = 0$. Конормаль есть тогда сопряженный диаметр плоскости, касательной к S, относительно этого характеристического конуса. Два направления обычно называются *конормальными*, если они сопряжены относительно этого конуса.

Заметим, что эта интерпретация Кулона должна быть дополнена, так как нужно охарактеризовать с геометрической точки зрения не только направление, но и величину элементарного отрезка $d\nu$. Это мы рассмотрим далее (пп. 60—61).

Для уравнения потенциала $\Delta u = 0$ характеристический конус есть изотропный конус, так что конормаль есть синоним нормали.

Сразу же видно, что конормальное направление лежит только тогда в касательной плоскости, когда последняя есть характеристика. (Она расположена с той же стороны от касательной плоскости, что и нормаль, тогда и только тогда, когда $A(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) > 0$.)

---

[1] C. R. Acad. Sci., 11 févr. 1901.

[2] Thèse, Paris, p. 34 (1902).

При помощи этого нового понятия *основная формула* принимает окончательный вид

$$\iiint [v\mathfrak{F}(u) - u\mathfrak{G}(v)]\, dT = -\iint \left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu} + Luv\right) dS, \quad \text{(F)}$$

L означает величину

$$L = \sum_i \pi_i \left(B_i - \sum_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k}\right). \quad (6)$$

Аналогичным образом в случае двух независимых переменных (п. 36) *однократный* интеграл

$$\iint \left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu} + Luv\right) dS$$

совпадает с тем, который входит в правую часть (F_1), т. е. с

$$\int P\,dy - Q\,dx = \int \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy - \\ - \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + uv\,(A\,dy - B\,dx).$$

При этом ν таково, что

$$\frac{dx}{d\nu} = -\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{d\nu} = \frac{dy}{ds}.$$

Это направление ν симметрично касательной к линии интегрирования относительно прямых, параллельных осям (это согласуется с нашим общим построением конормали, поскольку характеристический коноид сводится к двум прямым $x = \text{const}$, $y = \text{const}$).

Замечание. Формула (g) предполагает непрерывность функций, которые входят в нее, в особенности величин (4′). Они содержат, кроме коэффициентов уравнения и их производных, первые производные от u и v. Из формулы (F) видно, что функции u, v и их первые производные должны быть непрерывны в области интегрирования. Эти условия мы уже были вынуждены наложить на наши решения в п. 28, исходя из другой точки зрения.

40′. Сопряженный оператор в инвариантном виде. Формула, которую мы только что дали, имеет многочисленные приложения. Она, однако, имеет серьезный недостаток, состоящий в том, что она не инвариантна относительно точечного преобразования независимых переменных. Можно устранить это неудобство за счет небольшого усложнения.

Единственный неинвариантный элемент, входящий в предыдущие расчеты, есть не что иное, как элемент интегрирования $dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, который, как известно, при переходе к новым переменным x', являющимся функциями первых, не равен аналогичному элементу $dx'_1 dx'_2 \dots dx'_m$, а отличается от него множителем — якобианом преобразования. Поэтому, как и во всех других случаях, где имеются в виду расчеты, удовлетворяющие условию инвариантности, удобно рассматривать в качестве элемента объема не величину $dx_1 \dots dx_m$, а произведение $d\overline{T} = \rho dx_1 dx_2 \dots dx_m$ этого количества на множитель $\rho = 1/\sqrt{|\Delta|}$, где Δ есть дискриминант характеристической формы. Действительно, этот множитель ρ при точечном преобразовании умножается на обратную величину якобиана, так что произведение $d\overline{T}$ остается инвариантным.

Мы вынуждены видоизменить формулы п. 37 таким образом, чтобы выделить этот новый элемент объема (или риманов элемент объема, в противоположность прежнему элементу $dT = dx_1 dx_2 \dots$ $\dots dx_m$, который можно назвать евклидовым элементом объема). Наоборот, формула (g) остается такой же, какой мы ее записали в предыдущем пункте, так что множитель ρ должен быть связан с левой частью уравнения (4) (п. 37). Вводя новую произвольную функцию $\overline{v}$ и новый дифференциальный оператор $\overline{\mathfrak{G}}(\overline{v})$, мы должны определить этот последний так, чтобы было [1])

$$\rho\,[\overline{v}\mathfrak{F}(u) - u\overline{\mathfrak{G}}(\overline{v})] = \frac{\partial \overline{\mathfrak{P}}^1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \overline{\mathfrak{P}}^m}{\partial x_m}. \qquad (\overline{4})$$

Нет нужды снова проводить вычисления. Ясно, что для того, чтобы перейти от $(\overline{4})$ к (4), необходимо установить связь между неизвестным $\overline{v}$ и v при помощи соотношения

$$\rho\overline{v} = v$$

и, исходя из этого соотношения, определить $\overline{\mathfrak{G}}(\overline{v})$ при помощи формулы

$$\overline{\mathfrak{G}}(\overline{v}) = \frac{1}{\rho}\,\mathfrak{G}(v) = \frac{1}{\rho}\,\mathfrak{G}(\rho\overline{v})$$

или окончательно

$$\overline{\mathfrak{G}}(\overline{v}) = \frac{1}{\rho}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(\rho A_{ik}\overline{v}) - \frac{1}{\rho}\sum \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho B_i \overline{v}) + C\overline{v}. \qquad (\overline{\mathfrak{G}})$$

Если применить то же самое преобразование к величинам $\mathfrak{P}_i$, то это даст

$$\overline{\mathfrak{P}}_i = \rho\overline{v}\sum A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\sum \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\overline{v}A_{ik}) + \rho B_i u\overline{v}, \qquad (\overline{4}')$$

[1]) Употребление верхних индексов в правой части находится в согласии с принципами абсолютного дифференциального исчисления. Эти принципы требуют, чтобы то же самое обозначение было применено к самим переменным x. Мы это сделаем, когда вернемся к этому вопросу в вышеупомянутом приложении.

и мы должны заменить формулу (F) формулой

$$\iiint [\bar{v}\mathfrak{F}(u) - u\mathfrak{G}(\bar{v})]\,\rho\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m =$$

$$= -\iint \rho\, dS\left(\bar{v}\,\frac{du}{d\nu} - u\,\frac{d\bar{v}}{d\nu} + \bar{L}u\bar{v}\right). \quad (\overline{\mathrm{F}})$$

Величина $\bar{L}$ имеет значение

$$\bar{L} = \sum \pi_i\left(B_i - \sum_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k}\right) - \frac{d \log \rho}{d\nu}.$$

Замечание. Величины $\pi_i\, dS$, которые входят в предыдущие расчеты или, скорее, произведения их на множитель ρ, обладают, по крайней мере в своей совокупности, инвариантным характером, необходимым с точки зрения, принятой в предыдущем пункте. Они выступают как компоненты некоторой векторной величины, которая, однако, не совсем такая, как векторы в классическом смысле этого слова. Мы вновь отсылаем по этому вопросу к приложению 1.

41. Формула (F), как мы сказали, есть основа любого исследования, касающегося линейных уравнений с частными производными второго порядка и в особенности исследований, упоминавшихся ранее [1]). Мы будем обозначать через u неизвестную функцию задачи; v есть произвольная вспомогательная функция, и именно в выборе ее проявляется искусство вычислителя. Ее обычно выбирают таким образом, чтобы удовлетворить сопряженному уравнению [2])

$$\mathfrak{G}(v) = 0.$$

В обычной теории потенциала v — это просто элементарный потенциал

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

при $m = 3$ или $\log {}^1\!/r$ при $m = 2$, или одна из величин (*функции Грина*), полученных из элементарного потенциала добавлением некоторых членов, которые остаются регулярными при $r = 0$. Введение этого элементарного потенциала диктуется самыми очевидными математическими и даже физическими соображениями. Той ролью, которую он играет в теории, он обязан только своей особенности при $r = 0$, когда он становится бесконечным (что сра-

---

[1]) Кирхгоф в задаче о волнах в трехмерном пространстве не выписывает непосредственно четырехкратного интеграла, относящегося к левой части формулы (4). Но он последовательно выполняет тройное и однократное интегрирование, что эквивалентно этому.

[2]) Напоминаем условие, принятое в п. 37 (примечание 2).

зу же видно из формул). Непосредственно видно, что эта особенность имеется не только в одной действительной точке ($x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$), но также на всякой мнимой поверхности, а именно, на изотропном конусе с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0), совпадающем с соответствующим характеристическим конусом (в соответствии с общей теоремой, которую мы вскоре докажем).

42. Метод Римана. Если теперь обратиться к методу Римана для интегрирования гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu = f, \qquad (\varepsilon)$$

то на первый взгляд кажется, что величина, введенная Риманом в основной формуле, носит совсем иной характер, чем элементарный потенциал. Настало время кратко изложить этот метод, для изучения существа которого читателя можно отослать к уже упоминавшимся лекциям Дарбу [1]).

Пусть данные Коши несет дуга плоской кривой S, которая пересекает какую-нибудь характеристику (т. е. прямую, параллельную оси x или оси y) в одной точке. Для определения значения неизвестной u в данной точке a (x_0, y_0) Риман применяет основную формулу

$$\iint [v\mathfrak{F}(u) - u\mathfrak{G}(v)]\,dx\,dy = \int P\,dy - Q\,dx \qquad (\mathrm{F}_1)$$

внутри треугольной области T (рис. 9 или 10), ограниченной дугой $\alpha\beta$ кривой S и отрезками $a\alpha$, $a\beta$ характеристик, проведенных через a, которые пересекают S в точках α и β, причем $a\alpha$ параллельно оси x. Через u обозначена неизвестная функция.

Возьмем, следуя Риману, в качестве v величину [2]), которая есть функция x, y, но также зависит от положения точки a, так что нужно записать ее в виде $\mathfrak{B}$ (x, y; x_0, y_0). Она удовлетворяет при постоянных x_0, y_0 сопряженному уравнению [3]) $\mathfrak{G}(v) = 0$ и определяется дополнительными условиями

$$\mathfrak{B} = e^{\int_{y_0}^{y} A\,dy} \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

$$\mathfrak{B} = e^{\int_{x_0}^{x} B\,dx} \quad \text{при} \quad y = y_0,$$

[1]) t. II, liv. IV, nn. 357—359, p. 71—81 (2 éd.). См. также наши Leçons sur la propagation des ondes, chap. IV, pp. 153—166; G o u r s a t, Cours d'analyse, t. III, chap. XXVI, p. 146—152 (2 éd.). (Э. Г у р с а, Курс математического анализа, т. 3, ч. I, гл. XXXI, стр. 124—130. М.—Л., ГТТИ, 1933 — *прим. ред.*); P i c a r d, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles. 17[e] Leçon, p. 147 et suivantes, наш Cours d'analyse, t. II, nn. 346—348, p. 472—478.

[2]) По поводу существования этой величины см. Дарбу (Цит. соч., n. 364, 365, pp. 96—196) и ниже п. 51 и следующие.

[3]) См. примечание к п. 41.

В частности, это приводит к тому, что $\mathfrak{V} = 1$ при $x = x_0$, $y = y_0$. Сразу же видно, что оба интеграла $\int P\,dy - Q\,dx$ вдоль двух прямолинейных отрезков $a\alpha$, $a\beta$, а именно (если y вдоль S есть убывающая функция [1]) x)

$$\int_{x_0}^{x_1} Q(x, y_0)\,dx = -\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{2}\left(\mathfrak{V}\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right) + Bu\mathfrak{V}\right]dx,$$

$$\int_{y_2}^{y_0} P(x_0, y)\,dy = \int_{y_2}^{y_0}\left[\frac{1}{2}\left(\mathfrak{V}\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right) + Au\mathfrak{V}\right]dy$$

(где x_1, y_0 — координаты точки α, а x_0, y_2 — координаты точки β) сводятся соответственно к $\frac{1}{2}(u\mathfrak{V})_\alpha - \frac{1}{2}u_a$ и $\frac{1}{2}(u\mathfrak{V})_\beta - \frac{1}{2}u_a$,

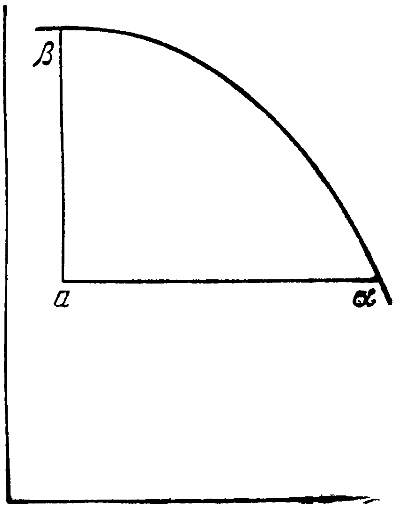

Рис. 9.

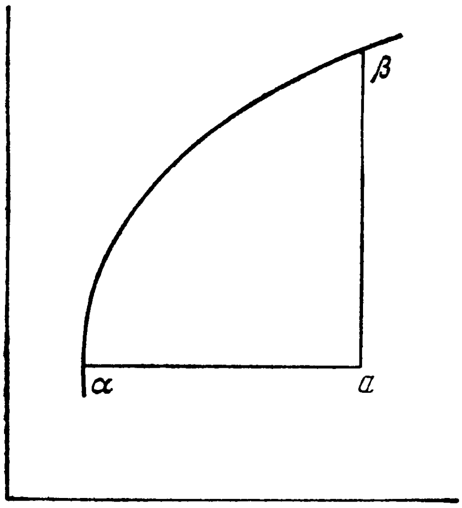

Рис. 10.

так что, поскольку $\mathfrak{S}(\mathfrak{V})$ обращается в нуль, а $\mathfrak{F}(u)$ равно f, находим

$$u_a = \frac{1}{2}(u\mathfrak{V})_\alpha + \frac{1}{2}(u\mathfrak{V})_\beta + \int_{\alpha\beta}(P\,dy - Q\,dx) - \iint \mathfrak{V}f\,dx\,dy.$$

Как и требуется, формула дает значение u в зависимости от величин, предполагающихся известными, а именно, данных Коши на S. В частности, ν есть направление конормали, проведенной согласно п. 40.

[1]) Когда y является убывающей функцией x вдоль S (рис. 9), то оба отрезка $a\alpha$ и $a\beta$, параллельные осям координат, имеют направления, совпадающие либо с положительным, либо с отрицательным направлением осей одновременно. Дуга $\alpha\beta$ соответствует обходу контура T в *положительном* направлении, что и предполагается в формуле (F_1). Если, наоборот, и x, и y одновременно возрастают вдоль S (рис. 10), то направление дуги $\alpha\beta$ является отрицательным, и нужно изменить знак у одного из членов в формуле (F_1). Можно дать единую формулу, годную для всех случаев, если воспользоваться обозначением Мерэ для кратных интегралов.

Если кривая является восходящей (т. е. y возрастает с ростом x), то нужно изменить знак перед двойным интегралом [1]).

Как видно, функция Римана $\mathfrak{B}$, так же, как элементарный потенциал, есть функция координат двух точек. Свойство симметрии распространяется и на данный случай и превращается в следующее *свойство взаимности* [2]). *Величина $\mathfrak{B}$ не меняется, когда одновременно заменяем x, y на x_0, y_0 и оператор $\mathfrak{F}$ на сопряженный к нему оператор $\mathfrak{G}$* (это обеспечивает симметрию по (x, y) и (x_0, y_0), если $\mathfrak{F}$ равен своему сопряженному оператору, как это имеет место для Δu).

Но сразу же ясно, что величина $\mathfrak{B}$, введенная таким образом в расчеты, априори не имеет особенности в точке a. Действительно, это голоморфная или, во всяком случае, полностью регулярная функция переменных, от которых она зависит, если таковыми являются сами коэффициенты уравнения [3]). Например, для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \lambda u = 0$ (λ постоянно) (см. далее п. 69 и кн. IV) $\mathfrak{B}$ равно

$$J_0\left[\sqrt{\lambda\,(x-x_0)(y-y_0)}\right],$$

где J_0 — функция Бесселя.

Однако, мы вскоре увидим, что функция Римана непосредственно получается из нашего элементарного решения.

43. Иначе обстоят дела для выражений, введенных Кирхгофом и Вольтерра. Первый из них использует выражение

$$\frac{1}{r} F(r - \omega t), \tag{7}$$

где по-прежнему $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, а F — *произвольная* функция одной переменной. Такая величина сингулярна при $r = 0$, а именно, при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Это соответствует на обычном языке (для обычного пространства) единственной точке, а в нашей концепции «мира» означает линию, вдоль которой t может принимать любые возможные значения.

Величина, которую использует Вольтерра, такова (по крайней мере для рассматриваемой здесь задачи)

$$v = \frac{t - t_0 + \sqrt{(t-t_0)^2 - r^2}}{r}. \tag{7'}$$

[1]) См. предыдущее примечание (стр. 77).

[2]) Darboux, цит. соч., n. 359, p. 81; Goursat, цит. соч.

[3]) Разрыв тем не менее присутствует благодаря тому, что интегрирование распространено на область, ограниченную двумя характеристиками, исходящими из точки (x_0, y_0). Так будет, если положить v равным 0 вне этой области, т. е. считать его разрывным вдоль границ области.

Эта величина имеет особенности двух родов в действительной области:

1) на поверхности

$$(t - t_0)^2 - r^2 = 0,$$

т. е. на характеристическом конусе с вершиной в точке (x_0, y_0, t_0), что абсолютно аналогично элементарному потенциалу;

2) на линии $r = 0$ (т. е. $x = x_0$, $y = y_0$, t произвольно).

Вследствие того, что присутствует последняя особенность, ни метод Кирхгофа, ни метод Вольтерра не дают непосредственно значения неизвестной u в выбранной точке, а только интеграл от u вдоль некоторого отрезка линии [1]) $r = 0$. Затем из него легко получают значение самой функции u (например, путем дифференцирования, как в мемуаре Вольтерра).

То же имеет место и для обобщения Тедоне [2]) применительно к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0,$$

которое аналогично предыдущим уравнениям (e_1) и (e_3) или (e_2) в зависимости от того, m четное или нечетное. Тедоне не получает непосредственно значения u, а лишь интеграл

$$\int_{t_1}^{t_0} (t_0 - t)^{m-3} u(t)\, dt$$

(через t обозначена переменная x_m), который нужно дифференцировать $m - 2$ раза по t_0.

44. Непрямой характер этого метода представляет собой второстепенное неудобство, но метод обладает другим более серьезным недостатком, заключающимся в том, что происхождение выражений (7) и (7′) (по крайней мере их аналитическое происхождение) неочевидно. Функция Кирхгофа подсказана физическими соображениями. Функция Вольтерра должна была быть образована

---

[1]) Естественно, в нашем трехмерном пространстве (для уравнения (e_2)) или четырехмерном (для (e_3)) точка $r = 0$ описывает прямую линию из-за того, что меняется t. Когда применяется основная формула, вся эта линия (а не просто отдельная точка) должна быть отделена от области интегрирования цилиндром (или гиперцилиндром), осью которого она служит. Упомянутый в тексте однократный интеграл появляется вместо интегралов $\iint$, распространенных по поверхности этого цилиндра, когда радиус его стремится к нулю.

[2]) Annali di Matematica, 3 ser., t. I (1898), p. 1.

априори. В этом состояла одна из величайших трудностей, которые пришлось преодолеть великому итальянскому геометру. Эта трудность возрастает при попытке обобщить предыдущие методы для того, чтобы применить их к другим уравнениям, отличным от (e_2) и (e_3). Здесь нет путеводной нити, по крайней мере надежной, для построения выражений, аналогичных выражениям (7) и (7′).

Именно так обстояло дело, когда два геометра, Кулон и Адемар, попытались распространить метод на уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Ku=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Ku=0$$

(уравнения затухающих волн в трехмерном пространстве или цилиндрических волн) или на уравнения с переменными коэффициентами. Формулы, полученные ими, никоим образом не были эквивалентны формулам Кирхгофа и Вольтерра. Чтобы получить искомое значение u, они должны были прибегнуть не к простому дифференцированию, а к решению более или менее сложных интегральных уравнений, требующих выполнения расчетов при помощи последовательных приближений. Причина, очевидно, заключается в том, что вспомогательные величины, введенные ими, не были в точности аналогичны формулам (7) и (7′). (Эти аналоги существуют, но они не могут быть найдены без соответствующей путеводной нити, что станет ясно из нашего последующего рассмотрения).

45. Можно лучше понять, почему эти методы Кирхгофа и Вольтерра не допускают непосредственного обобщения, если исследовать, в какой степени вышеупомянутая сингулярная линия $r = 0$ связана с самим уравнением. Оба автора, очевидно, поняли бы, что эта связь отдаленная, если бы в эпоху, когда они создавали свои труды, наука имела в своем распоряжении наши современные идеи об относительности.

В настоящее время известно, что нет смысла говорить о фиксированной точке пространства, рассматриваемой в последовательные моменты времени, что существует (как это знали и ранее) бесконечное множество линейных преобразований по x, y, z, t (или x, y, t), образующих «группу Лоренца», которые оставляют инвариантным наше уравнение с частными производными, и что эти преобразования не изменяют характеристического конуса, но могут изменить прямую $r = 0$ и любую другую прямую, проведенную через вершину внутрь характеристического конуса. Ясно, следовательно, что эта линия $r = 0$ не должна играть никакой особой роли в расчетах.

Далее мы увидим, что *все результаты теории могут и должны быть выведены из единственного элементарного решения.*

ГЛАВА III
ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РЕШЕНИЕ

1. Общие замечания

46. Теперь нам, естественно, нужно определить, что такое элементарное решение, и построить его. Первым обобщением элементарного потенциала для уравнений, отличающихся от уравнений Лапласа, мы обязаны Пикару [1]). Он рассматривает уравнение с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+Cu=0,$$

где C — заданная функция x и y, и доказывает, что если (x_0, y_0) — любая заданная точка, называемая полюсом, а r — величина, равная $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, то уравнение имеет решение в форме

$$\mathfrak{U}\log\frac{1}{r}+w, \tag{8}$$

где $\mathfrak{U}$ и w — подходящим образом выбранные функции x, y (а также x_0, y_0), регулярные в окрестности точки $x=x_0$, $y=y_0$. Конечно, w в некоторой степени произвольно, так как к нему можно добавить любое регулярное решение заданного уравнения.

Этот результат был обобщен Гильбертом и Гедриком [2]), а также независимо от них нами [3]) применительно к более общему уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu=0. \tag{9}$$

Использованный в этом случае метод предполагает, однако, что A, B, C суть аналитические функции x, y (это не являлось необходимым в доказательстве Пикара).

Этот метод приводит нас к ответу на вопрос, поставленный ранее, о соотношении между функцией Римана и элементарным решением.

Очевидно, что если мы ограничимся случаем аналитичности, то не будет существенной разницы между уравнением (9) и гиперболическим уравнением Лапласа

$$\mathfrak{F}(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu=0 \tag{ε}$$

[1]) C. R. Acad. Sci., 6 апр. 1891, 5 июня 1900. Эквивалентный результат получен Зоммерфельдом (Encycl. der Math. Wiss., II, 7 c., 1900).

[2]) Гильберт, Геттингенские лекции, 1901 (не опубликованы); Hedrick, Über den analytischen Character der Lösungen von Differenzialgleichungen (Diss., Göttingen, 1901).

[3]) Deuxième congrès international des mathématiciens, Paris, 1901. Notice scientifique, Paris, Hermann, 1901.

(A, B, C — по-прежнему функции x, y), которое, очевидно, выводится из первого путем замены $x+iy$, $x-iy$ на x, y. Так как при этом $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ заменяется на $(x-x_0)(y-y_0)$, то решение уравнения (ε) нужно искать в форме

$$\mathfrak{U}\log[(x-x_0)(y-y_0)]+w.$$

Для этого достаточно подставить первый член в уравнение (ε). В результате получим регулярную функцию

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{U}\log(x-x_0)(y-y_0)]=\mathfrak{M}.$$

Если это так, то для w можно взять любое решение уравнения

$$\mathfrak{F}(w)=-\mathfrak{M}.$$

Итак,

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{U}\log[(x-x_0)(y-y_0)]\}=\mathfrak{F}(\mathfrak{U})\log[(x-x_0)(y-y_0)]+\\+\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}+A\mathfrak{U}\right)+\frac{1}{y-y_0}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+B\mathfrak{U}\right).$$

Это будет регулярная функция x, y в окрестности каждой линии $x=x_0$, $y=y_0$, если [1]:

1) логарифмический член обращается в нуль, так что сама функция $\mathfrak{U}$ есть решение уравнения (ε);

2) числители обеих дробей обращаются в нуль одновременно со знаменателями, так что

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}+A\mathfrak{U}=0 \qquad (\text{при} \quad x=x_0),$$

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+B\mathfrak{U}=0 \qquad (\text{при} \quad y=y_0).$$

Но эти условия (вместе с условием $\mathfrak{U}=1$ при $x=x_0$, $y=y_0$) в точности совпадают с теми, которые определяют функцию Римана. О ней уже шла речь (с той разницей, что мы написали $\mathfrak{F}$ вместо [2]) его сопряженного оператора $\mathfrak{G}$).

Итак, видно, что функция Римана совпадает с коэффициентом при логарифмическом члене в элементарном решении уравнения, так что этот коэффициент находится в прямой связи с логарифмическим выражением (8). Это частный случай общих соотношений, к которым приведет нас дальнейший анализ.

47. Обобщения элементарного решения на случай $m>2$ были последовательно даны в основополагающем мемуаре Фредголь-

[1]) Очевидно, что эти условия не только достаточны, но и необходимы: см. наши Leçons sur la propagation des ondes, chap. VII, n. 344.

[2]) Такая перестановка эквивалентна перестановке x, y и x_0, y_0, благодаря свойству взаимности (см. выше п. 42).

ма [1]) для уравнений любого порядка, аналогичных (e_2), и Хольмгреном [2]). Однако даже в работах этого последнего ученого обобщение не является полным, так как он предполагает, что коэффициенты при членах второго порядка постоянны. При $m = 2$ этого можно добиться с помощью точечного преобразования, а при $m > 2$ это, вообще говоря, невозможно [3]).

Мы собираемся построить элементарное решение для самого общего линейного уравнения второго порядка (аналитического и непараболического).

48. Характеристический коноид. Мы уже видели в случае элементарного потенциала, что элементарное решение должно иметь особенность не только в точке — в полюсе, но также вдоль некоторой поверхности (действительной или мнимой).

Чем должна быть эта поверхность, видно из важной теоремы Леру и Делассю [4]): *всякая сингулярная поверхность, представляющая решение линейного уравнения в частных производных* [5]) (с регулярными коэффициентами), *должна быть характеристикой.* Следовательно, сингулярная поверхность должна удовлетворять дифференциальному уравнению первого порядка

$$A\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}; x_1, x_2, \ldots, x_m\right) = 0, \qquad (A)$$

написанному ранее. Среди решений этого уравнения главную роль в наших теперешних рассуждениях играет то, которое было особо рассмотрено Дарбу [6]). Это решение, для которого данная точка

$$a\,(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m)$$

---

1) Acta Matematica, v. XXIII, p. 1—42, 1900. Исследование Фредгольма были недавно обобщены Цейлоном (Zeilon) (Arkiv för Mat., Astr. och Phys., t. VI, 1911, Acta Soc. Scient. Upsaliensis, (4), n. 3—4, 1919—1921 и Герглоцем (Herglotz) (Leipz. Berichte, t. LXXVIII, 1926, S. 43—73, 287—318).

2) Arkiv för Mathematik, Astr. Och. Phys., t. I, 1904, p. 209.

3) Возможность такого представления зависит, как увидим, от возможности конформного отображения некоторого линейного элемента на евклидов элемент ds^2. Эти условия даны в исследованиях Коттона (Thèse, Paris, 1899, chap. II, n. 15—17).

4) Le Roux, Thèse, Paris, 1895; Delassus, Ann. scient. éc. norm. sup., 3 série, t. XIII (1896), p. 35.

5) При этом сделано предположение о природе особенности, а именно, что главная часть решения u есть $UF(G)$, где U регулярно, а F таково, что $F''(G)/F'(G)$ и $F'(G)/F(G)$ обращаются в бесконечность при $G = 0$. Условие это подтверждается во всех обычных случаях, в частности при $F(G) = G^p$ и $F(G) = \log G$ (некоторые из них мы используем). Леру (Le Roux) (Journ. de Math. (5), IV, 1898, p. 402) дает другое доказательство, не использующее этого предположения.

6) Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, n. 2, p. 34 (Mémoires des savants étrangers, t. XXVII, 1880).

служит вершиной конической поверхности (касательный конус к поверхности есть характеристический конус, определенный выше). Мы назовем его *характеристическим коноидом.* Он совпадает с характеристическим конусом, когда коэффициенты уравнения (или, по крайней мере, коэффициенты при членах второго порядка) постоянны. В общем случае это вид конуса, образующие которого кривые. Ниже мы напомним, как строится этот коноид, что хорошо известно благодаря мемуару Дарбу. Мы сделаем это в несколько более точной форме, поскольку мы запишем его уравнение.

2. Решения с алгебраической особенностью

49. Исследуем вначале случай поверхности без особых точек (результат этого исследования можно также применить к характеристическому коноиду вне окрестности его вершины). Мы собираемся доказать не только теорему Делассю при тех предположениях, которые нас интересуют, но также и обратную теорему, которая имеет для нас особую важность при построении решения нашего уравнения в форме

$$u = UG^p + w, \tag{10}$$

где $G = 0$ есть уравнение заданной регулярной поверхности, p — заданный постоянный показатель степени, U и w — регулярные функции. Как и в п. 46, нужно удостовериться, что результат подстановки первого члена формулы (10) в левую часть уравнения есть регулярная функция.

Будем исходить из уравнения (E), которое считаем однородным ($f = 0$):

$$\mathfrak{F}(u) = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = 0. \tag{E}$$

Заменим u на $UF(G)$. Записывая π_i вместо $\dfrac{\partial G}{\partial x_i}$, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = U\pi_i F'(G) + \frac{\partial U}{\partial x_i} F(G),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = U\pi_i\pi_k F''(G) + \left(\pi_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + \pi_k \frac{\partial U}{\partial x_i} + U \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k}\right) F'(G) + \\ + \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} F(G).$$

Умножим первую строку (для каждого значения i) на B_i, вторую (для каждой пары значений i, k) на A_{ik} и прибавим [1]) CUF. Можно видеть, что

[1]) При суммировании индексы i и k можно менять местами, так как $A_{ik} = A_{ki}$.

1) коэффициент при $UF''(G)$ есть $A(\pi_1, \ldots, \pi_m)$;

2) в коэффициенте при $F'(G)$ члены, содержащие $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, равны

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} 2 \sum A_{ik}\pi_k,$$

т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i}.$$

Следовательно, имеем

$$UF''(G)\, A(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) + F'(G)\left(\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i} + MU\right) + \\ + F(G)\, \mathfrak{F}(U) = 0,$$

где M равно

$$M = \mathfrak{F}(G) - CG. \tag{11}$$

В частности, для $F(G) = G^p$ получаем

$$p(p-1)\, G^{p-2} UA(\pi_1, \ldots, \pi_m) + G^{p-1} p \left(\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i} + MU\right) + \\ + G^p \mathfrak{F}(U) = 0. \tag{12}$$

Если исключить случаи $p = 0$ и $p = 1$, то первый член имеет, очевидно, наибольший порядок по сравнению с другими членами, и сумма не может быть тождественно равна нулю или даже быть регулярной функцией, когда коэффициент $A(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ не равен нулю, т. е. когда $G = 0$ не есть характеристика. Уравнение

$$A\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}\right) = 0$$

должно быть либо тождеством, либо, по крайней мере, следствием уравнения $G = 0$, так что в любом случае

$$A\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}\right) = A_1 G, \tag{12'}$$

где A_1 регулярно даже при $G = 0$. Таким образом, теорема Делассю доказана. Предположим теперь, что это условие выполнено, так что G^{p-2} выпадает из формулы (12). Выразим тот факт, что член, содержащий G^{p-1}, также обращается в нуль. Мы должны записать, что на поверхности $G = 0$ выполняется

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i} + [M + (p-1) A_1]\, U = 0. \tag{13}$$

Это линейное уравнение с частными производными первого порядка относительно U. Интегрирование его приводит к введению кривых, определяемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_1}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_1}} = \frac{dx_2}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_2}} = \ldots = \frac{dx_m}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_m}} = ds. \qquad (L_1)$$

В знаменателе стоят направляющие косинусы конормали к поверхности $G = 0$. В настоящем случае эта кривая есть касательная к поверхности (поверхность есть характеристика; конормаль есть направление образующей касания между плоскостью $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ и характеристическим конусом). Таким образом, кривая, удовлетворяющая уравнению (L_1) и выходящая из точки поверхности $G = 0$, *целиком лежит на этой поверхности*. Эти кривые являются характеристиками уравнения (A), что следует из общей теории уравнений с частными производными первого порядка. Их называют *бихарактеристиками* [1]).

Если $A_1 = 0$, т. е. если функция G тождественно удовлетворяет уравнению $A = 0$ и даже без этого ограничения, теория уравнений в частных производных первого порядка [2]), как известно, дает, что, помимо уравнений (L_1), эти кривые удовлетворяют также уравнениям

$$ds = \frac{d\pi_1}{-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_1}} = \frac{d\pi_2}{-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{d\pi_m}{-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_m}}. \qquad (L_2)$$

Таким образом, их можно определить *априори* (т. е. не зная уравнения $G = 0$) путем интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (L_1) и (L_2).

Ясно, что бихарактеристики входили в наши предыдущие расчеты. Таковы кривые, рассмотренные в п. 12 (книга I), определяемые на плоскости $x_1 = 0$ дифференциальным уравнением (l) и использовавшиеся для нахождения последовательных значений $u_1, u_2, \ldots$ Так как $x_3 = 0$ касается характеристического конуса в каждой его точке, направляющие косинусы образующей касания пропорциональны A_{31}, A_{32}.

50. Рассмотрение этих кривых и тот факт, что они сохраняются при всех точечных преобразованиях (что, очевидно, вытекает из их аналитического или геометрического смысла) позволяют нам с самого начала упростить уравнение. Если предположить, что данная характеристическая поверхность является регулярной, то можно заменить переменные таким образом, что ее уравнение будет $x_m = 0$. При этом каждая поверхность $x_m = \text{const}$ будет

---

[1]) Их физический смысл — звуковые или световые лучи (см. наши Leçons sur la propagation des ondes, chap. VII, nn 309, 319, 351).

[2]) Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, n. 87.

характеристической. Это находит выражение в том, что A_{mm} тождественно равно нулю.

Предположим, кроме того, что ребро [1]) пересечения между $x_m = 0$ и $x_{m-1} = 0$ нигде не касается бихарактеристики, вследствие чего можно взять такие новые переменные, что бихарактеристики, расположенные на $x_m = \text{const}$, будут определяться уравнениями $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}, \ldots, x_{m-2} = \text{const}$. Это выразится с помощью соотношения

$$A_{im} = 0 \quad (i \neq m - 1).$$

Можно разделить [2]) на $A_{m,m-1}$ и также избавиться от B_m, заменяя u на $ue^{\int B_m\, dx_{m-1}}$. Обозначая x_m и x_{m-1} соответственно через x и y, мы видим, что можно записать уравнение в форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \mathfrak{F}_1(u) = 0, \tag{14}$$

где новое выражение $\mathfrak{F}_1(u)$ не содержит никаких производных по x.

51. **Результат Бедона ($p = 0$).** Ранее мы полностью исключили случаи $p = 0$ и $p = 1$. Они соответствуют функции u, не имеющей особенностей, и вновь приводят к соображениям из первой книги [3]). Но они представляют для нас интерес в случае характеристической поверхности по той причине, что дают ответ на вопрос, поставленный в п. 12, а именно, о степени неопределенности задачи Коши при этих условиях.

Ответ на этот вопрос дает следующий результат.

В случае, когда $x = 0$ есть характеристика [4]), можно определить решение дифференциального уравнения, если известны его значения

$$u(x_1, \ldots, x_{m-2}, 0, y) = u_0(x_1, \ldots, x_{m-2}, y),$$

$$u(x_1, \ldots, x_{m-2}, x, 0) = u(x_1, \ldots, x_{m-2}, x)$$

на каждой из поверхностей [5]) $x = 0$, $y = 0$. Эти функции могут быть выбраны произвольно при условии, что они не противоречат

---

[1]) См. примечание 1 на стр. 13.

[2]) Величина $A_{m,m-1}$ должна быть отлична от нуля. Иначе при $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{m-1} = 0$ обращаются в нуль все производные от $A(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, что исключается, поскольку мы рассматриваем непараболический случай.

[3]) Можно считать, что как наши предыдущие, так и последующие рассуждения включают в себя случай целого $p > 1$: $p = 2$, например (при $U_1 = 0$, так что $u = Ux^2$), соответствует задаче Коши с данными $u_0 = u_1 = 0$. Для этого случая мы, как известно, уже не можем получить решение, отличное от нуля, если $x = 0$ не является характеристикой.

[4]) Достаточно даже предположить, что $x_m = 0$ касается характеристики в каждой своей точке, общей с $x_{m-1} = 0$.

[5]) Здесь снова делается предположение, что линия пересечения нигде не касается бихарактеристики.

друг другу на линии пересечения, а именно:

$$u_0(x_1, \ldots, x_{m-2}, 0) = u(x_1, \ldots, x_{m-2}, 0) = u_0(x_1, \ldots, x_{m-2}). \tag{15}$$

Эта теорема включает в себя как частный случай доказательство существования функции Римана (п. 40). Она была впервые сформулирована с этой целью Дарбу для $m = 2$ (так что $x = 0$, $y = 0$ представляют собой две линии) в предположении, что *обе* эти линии $x = 0$, $y = 0$ являются характеристиками, а данные Коши аналитичны. Она была распространена Гурса [1]) на нелинейные уравнения при единственном предположении, что начальные касательные в точках их пересечения имеют характеристические направления.

Бедон (цит. соч.) [2]) обобщил результаты Дарбу и Гурса на случай $m > 2$ и, следуя Гурса, воспользовался этим для доказательства неопределенности задачи Коши на характеристике.

Как показал Пикар [3]) (считая, что начальные данные не аналитические) и затем Гурса (с обобщением на нелинейные уравнения), для случая $m = 2$ предположение о том, что $y = 0$ есть характеристика, не является необходимым. Докажем теорему Бедона с этим обобщением.

Предположим, по крайней мере на время, что все начальные данные — аналитические, так что коэффициенты в $\mathfrak{F}_1$ будут голоморфными функциями независимых переменных [4]), и заменим снова u разложением в ряд по степеням x:

$$u = u_0 + u_1 x + \ldots + u_h x^h + \ldots \tag{16}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим последовательные условия

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial y} = \mathfrak{F}_1(u_0), \\ &2\,\frac{\partial u_2}{\partial y} = \mathfrak{F}_1(u_1) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &h\,\frac{\partial u_h}{\partial y} = \mathfrak{F}_1(u_{h-1}) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{17}$$

система которых в свою очередь эквивалентна (14).

[1]) Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, t. II, pp. 91—94. Goursat, Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.

[2]) См. примечание 2 на стр. 27.

[3]) Darboux, Leçons, pp. 355—359 (n. 1); Équations aux dérivées partielles du second ordre, t. II, pp. 303—308.

[4]) Вообще говоря, x содержится в явном виде среди коэффициентов выражения $\mathfrak{F}_1$; члены, появляющиеся вследствие этого,— те, которые заменены многоточием в правой части уравнения (17) (в первом члене, наоборот, надо положить $x = 0$).

Первое из них даст нам $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ (правая часть не содержит других членов из (16), кроме u_0), второе нам даст $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ и т. д. Правая часть уравнения для $\frac{\partial u_h}{\partial y}$ зависит только [1]) от $u_0, u_1, \ldots, u_{h-1}$ и коэффициентов выражения $\mathfrak{F}_1$. Итак, мы видим:

1) что u_0 остается произвольным;

2) что мы можем также выбрать произвольно значения для каждого из последующих u_h при $y = 0$, после чего мы будем иметь (если $\boldsymbol{u}_h$ есть значение u_h при $y = 0$)

$$u_h = \boldsymbol{u}_h + \int_0^y \mathfrak{F}_1 (u_{h-1})\, dy. \tag{18}$$

Этот последний факт эквивалентен тому, что *при $y = 0$ ряд, соответствующий уравнению* (14), а именно, функцию

$$\boldsymbol{u}(x_1, x_2, \ldots, x) = \sum \boldsymbol{u}_h x^h \tag{19}$$

можно взять в произвольном виде, за исключением первого члена $\boldsymbol{u}_0 (x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})$, который должен быть равен значению u_0 при $y = 0$.

51'. *Замечания.* Это последнее условие есть не что иное, как условие (15).

Условие, наложенное на величину $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, является условием разрешимости задачи Коши (условие (7) в п. 12 кн. I). Видно, что когда оно выполняется, ряд (16) остается неопределенным, а его произвольные элементы будут последовательными коэффициентами $\boldsymbol{u}_h$ разложения (19).

Подобным же образом другие уравнения (17) или эквивалентные им уравнения (18) представляют собой соотношения, приведенные в п. 12 (соотношение (7′) и его аналоги).

Эти соотношения или, по крайней мере, первые из них, можно написать и в том случае, когда начальные данные и решение предполагаются попросту регулярными и разложимыми в ряд Маклорена до некоторого порядка.

Так как u_h определены для всех значений y, если известны их величины при $y = 0$, то *два решения, которые совпадают на всей характеристической поверхности и которые имеют касание некоторого определенного порядка $p \geqslant 1$ в точке этой поверхности, имеют касание того же порядка на всей длине бихарактеристики, выходящей из этой точки.* Мы видим, что при $p = 1$ в

---

[1]) Из предыдущего замечания вытекает, что величины $u_{h'}$ с показателем h' меньшим, чем $h - 1$, содержатся также в выражениях для $\frac{\partial u_h}{\partial y}$.

четырехмерном пространстве-времени *решение, непрерывное по* x, y, z, t *вместе со своими первыми производными во всех точках плоскости* $t = 0$, не характеристической и не касательной к бихарактерсстике, *имеет непрерывные первые производные во всем пространстве.*

52. Мы пока не имеем права говорить о решении u, обладающем степенью неопределенности, указанной выше. Мы сможем сказать об этом только в аналитическом случае, когда докажем сходимость ряда (16). Это мы сделаем [1]) с помощью гипотезы о голоморфности данных Коши в окрестности данной точки ребра $x = y = 0$ (точки, которую мы взяли за начало координат). Благодаря этому мы дадим требуемое доказательство для кратного ряда Маклорена, в который разлагается u по степеням x, y, x_1, $x_2, \ldots, x_{m-2}$.

Прежде всего, видно, что каждый этап вычислений (18) содержит только операции интегрирования (с нижним пределом, равным нулю), дифференцирования, умножения и сложения. Таким образом, каждый из коэффициентов в (16) зависит от членов, полученных на предыдущем этапе вычислений (соответствующих меньшим значениям h и не превосходящих общего порядка дифференцирования), и от коэффициентов разложения в ряд величин A_{ik}, B_{ik}, C, которые входят в $\mathfrak{F}_1$, т. е. определяется с помощью полинома, содержащего только положительные члены.

Следовательно, достаточно показать существование решения при замене рядов для $\mathfrak{F}_1$, u_0, $\boldsymbol{u}$ мажорантами, соответствующим образом выбранными.

Можно также допустить, что функции u_0, $\boldsymbol{u}$ тождественно равны нулю, так как в противном случае достаточно ввести вместо u новую неизвестную

$$u - u_0 - \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_0.$$

Предположим, что это сделано заранее.

Любой ряд с положительными коэффициентами мажорирует эти нулевые значения u и u_0 (п. 10 кн. I).

Мажорирующий ряд для функции $\mathfrak{F}_1$ имеет вид

$$K\frac{u + \Sigma' p_i + \Sigma' r_{ik}}{1 - \dfrac{x + y + x_1 + \ldots + x_{m-2}}{\rho}} \qquad (K > 0, \rho > 0 - \text{константы}) \tag{20}$$

---

[1]) Точнее, мы собираемся построить решение, удовлетворяющее условиям задачи, для x достаточно малого и *для малой области* D *значений* $x_1, x_2, \ldots \ldots, x_{m-2}, y$. Что касается противоположного случая, когда D имеет любую протяженность, то мы просто укажем на замечательный результат (относящийся к нелинейным уравнениям, которые мы оставляем в стороне), принадлежащий Гурса (Ann. fac. sci. Touluse, (2), VIII, 1906), согласно которому может случиться, что задача Коши, на первый взгляд неопределенная для $x = 0$, не имеет никакого решения, регулярного во всей области D. Но это обстоятельство не может иметь места в линейном случае.

(где p_i есть $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, r_{ik} есть $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$, а $\sum'$ означает суммирование по всем значениям i или i и k от 1 до $m - 1$).

Достаточно снова показать, что уравнение, которое получается, если приравнять $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ этой величине или другой мажоранте, имеет решение, представимое в виде ряда Маклорена с положительными коэффициентами.

Воспользуемся, кроме того, приемом Гурса [1]) и запишем мажоранту для (20), заменив в знаменателе x на x/α при $\alpha < 1$, так что мы будем исходить из уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = K \frac{u + \Sigma' p_i + \Sigma' r_{ik}}{1 - \dfrac{\dfrac{x}{\alpha} + y + x_1 + \ldots + x_{m-2}}{\rho}}.$$

Для него нужно найти решение в виде ряда Маклорена с положительными или нулевыми коэффициентами. Будем считать, что u есть функция переменных:

$$X = x + \alpha y, \quad Y = x_1 + \ldots + x_{m-2}. \tag{21}$$

Если обозначить через C величину $(m-1)(m-2)/2$, то уравнение для u примет вид

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = K \frac{u + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial X} + (m-2)\dfrac{\partial u}{\partial Y} + \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \alpha(m-2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial X \, \partial Y} + C \dfrac{\partial^2 u}{\partial Y^2}}{1 - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{X}{\alpha} + Y\right)}.$$

Или, разрешив относительно $\partial^2 u / \partial X^2$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{K}{\alpha} \frac{u + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial X} + (m-2)\dfrac{\partial u}{\partial Y} + \alpha(m-2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial X \, \partial Y} + C \dfrac{\partial^2 u}{\partial Y^2}}{L - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{X}{\alpha} + Y\right)}, \tag{22}$$

где $L = 1 - K\alpha$.

Возьмем α таким, что $L > 0$. Разложив дробь в правой части формулы (22) в ряд по степеням X и Y, мы увидим, что каждый из коэффициентов положителен.

Вследствие теоремы Коши — Ковалевской, уравнение (22) допускает решение, обращающееся в нуль одновременно с $\frac{\partial u}{\partial X}$

[1]) В первоначальном мемуаре Бедона это не было необходимым. Бедон предполагал, что $y = 0$ также является характеристикой, т. е. что $A_{m-1,m-1}$ равно нулю. Поэтому распространение теоремы на случай, когда только $x = 0$ является характеристикой, связано с параметром α, введенным Гурса.

при $X = 0$, и разложение в ряд этого решения, как и в п. 10, содержит только положительные коэффициенты.

Подставляя вместо X и Y значения (21), мы получаем искомую мажоранту, что и доказывает теорему.

53. Произвольное значение p. Теперь мы докажем аналогичное утверждение для произвольного значения показателя p, лишь бы он не был целым отрицательным числом. Положив $u = Ux^p$, мы получим для U уравнение

$$x\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + p\frac{\partial U}{\partial y} = x\mathfrak{F}_1(U). \tag{14'}$$

Заменяя U выражением

$$U = U_0 + U_1 x + \ldots + U_h x^h + \ldots \tag{23}$$

и приравнивая коэффициенты при одних и тех же степенях x (многоточие в правой части имеет тот же смысл, что и в п. 51), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U_0}{\partial y} = 0, \\ &(p+1)\frac{\partial U_1}{\partial y} = \mathfrak{F}_1(U_0) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(p+h)\frac{\partial U_h}{\partial y} = \mathfrak{F}_1(U_{h-1}) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{17'}$$

Обратно, система уравнений (23) (если ряд в правой части сходится) и (17′) эквивалентна (14′).

Если p есть целое отрицательное число, что эта система не имеет, вообще говоря, решений [1]; невозможность удовлетворить этой системе очевидна из того, что одно из решений (17′), например, второе при $p = -1$, не содержит U_1 и превращается в уравнение

$$\mathfrak{F}_1(U_0) = 0.$$

Это последнее должно иметь решение, не зависящее от y.

Если исключить случай целого отрицательного p, то уравнение (17′) позволяет нам найти последовательные значения U_h. Однако в каждую из этих функций входит произвольная аддитивная постоянная. Следовательно, можно выбрать произвольным образом значения этих функций при определенном значении y, например при $y = 0$.

Чтобы доказать сходимость полученного таким образом ряда, достаточно отметить следующее обстоятельство (используемое в

---

[1] См. Leçons sur la propagation des ondes, p. 339, n. 346.

классической теории дифференциального уравнения

$$x \frac{dy}{dx} = ax + by + \ldots).$$

Отношение $\frac{p+h}{h}$, которое при принятых предположениях никогда не обращается в нуль и предел которого равен 1 при безграничном возрастании h, всегда больше по своему численному значению некоторого положительного числа q. Следовательно, мы получим мажоранты для последовательных значений U_h, если возьмем мажорирующее выражение для $\mathfrak{F}$ и одновременно заменим в уравнении для $\frac{\partial U_h}{\partial y}$ коэффициент $(p + h)$ величиной qh.

Это эквивалентно [1]) тому, что в уравнении (14′), мы положили $p = 0$ и предварительно умножили правую часть на $1/q$. В этом случае оказывается возможным непосредственно произвести деление на x, и мы приходим к уже рассматривавшейся задаче Бедона. Поскольку в этой задаче *можно выбрать произвольным образом значения неизвестной при* $y = 0$, т. е. *на любой поверхности, которая пересекает первую поверхность и не касается ни одной из ее бихарактеристик*, то тоже самое будет иметь место и в нашей задаче.

Требуемое заключение, таким образом, установлено, по крайней мере в предположении, что мы имеем дело с аналитическим случаем. Это ограничение, вообще говоря, существенно, как мы уже видели.

3. Случай характеристического коноида. Построение элементарного решения

54. Характеристический коноид с вершиной в произвольной точке $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ имеет особенность в этой точке, так что предыдущие вычисления перестают быть законными. Действительно, видно, что p не может быть взято произвольным образом, как это делалось выше.

Чтобы рассмотреть этот новый случай, нужно вначале записать уравнение характеристического коноида, о котором идет речь. Он представляет собой, как известно, геометрическое место всех бихарактеристик, исходящих из x. Говоря аналитически, нужно взять любую систему величин $p_{01}, \ldots, p_{0m}$, удовлетворяющих

---

[1]) Строго говоря, первое уравнение (17′), а именно $\frac{\partial U_0}{\partial y} = 0$, исчезает при $p = 0$, поскольку член в левой части первоначально умножался на p. Его, конечно, нужно сохранить при настоящем обсуждении. Если известны значения U при $y = 0$, то уравнение определяет их при $x = 0$, давая, таким образом, все данные, необходимые для теоремы Бедона.

условию (А), и проинтегрировать дифференциальные уравнения п. 49

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_i} \tag{L}$$

с начальными условиями: $p_i = p_{0i}$, $x_i = a_i$ при $s = 0$.

Так как величины $p_{01}, \ldots, p_{0m}$ (или, более точно, их отношения) при выполнении условия (А) зависят от $m - 2$ параметров, геометрическим местом построенных таким образом кривых будет поверхность. Следует дать уравнение этой поверхности в точной форме. Эта форма была указана Кулоном [1]). Вычисления, которые мы собираемся дать далее, несущественным образом отличаются от его расчета.

55. Введение геодезических линий. Для того чтобы получить эту форму, мы должны построить все кривые, исходящие из точки $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, и проверить при помощи системы дифференциальных уравнений (L), удовлетворяют ли начальные значения $p_{01}, \ldots, p_{0m}$ переменных p_i условию (А). Такие кривые суть не что иное, как геодезические линии соответствующим образом выбранного линейного элемента.

Результаты, заимствованные из общей теории геодезических линий [2]). Пусть

$$H\,(dx_1, dx_2, \ldots, dx_m; x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum H_{ik} x_i dx_k$$

есть произвольная квадратичная форма (ее дискриминант, однако, предполагается не равным нулю) относительно $dx_1, \ldots, dx_m$, причем коэффициенты H_{ik} — заданные функции $x_1, \ldots, x_m$. Если считать $dx_1, \ldots, dx_m$ дифференциалами $x_1, \ldots, x_m$, то H можно рассматривать как линейный элемент или метрическую форму [3]) m-мерного многообразия. Интеграл

$$\mathfrak{C} = \int \sqrt{H\,(dx_1, \ldots, dx_m)} = \int \sqrt{H\,(x_1', \ldots, x_m')}\,dt$$

(где в правой части x_i' представляют собой $\frac{dx_i}{dt}$) есть, следователь-

[1]) Thèse, p. 22.

[2]) См. D a r b o u x, Leçons, t. II.

Многие из последующих понятий, таких, как геодезические для неопределенного линейного элемента, геодезические нулевой длины, дифференциальные параметры и т. д. знакомы большинству читателей, так как они постоянно используются в недавно появившейся теории относительности. Однако здесь мы не предполагаем знакомства с этой теорией.

[3]) В рамках этой концепции квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками x, $x + dx$ считается равным $H\,(dx; x)$. Именно это соглашение приводит к тому, что для элемента пространства, как мы это делали в п. 40′, нужно взять величину $\sqrt{|D|}\,dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, где D — дискриминант формы H. Примером этого служит классическая теория двумерного элемента. Эта величина инвариантна относительно любого точечного преобразования x_i, поскольку при таком преобразовании D умножается на квадрат якобиана прежних переменных по новым.

но, длина дуги кривой этого многообразия, а соответствующие геодезические линии — это кривые, которые обращают в нуль вариацию $\mathfrak{C}$. Их дифференциальные уравнения таковы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i'}\right)-\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,m). \tag{24}$$

Согласно принципам классической динамики эти дифференциальные уравнения записываются в иной форме, а именно:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i'}\right)-\frac{\partial H}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,m). \tag{24$'$}$$

Уравнения в этой форме описывают движение системы, кинетическая энергия которой равна $H(x', x)$ и на которую не действует никакая сила.

Эти две формы, соответствующие двум формам принципа наименьшего действия, не являются полностью эквивалентными, но становятся таковыми при одном условии. Форма (24) определяет искомые кривые, но не t. Эта последняя величина остается произвольным параметром, выбор которого несуществен. Уравнения (24) не меняются при замене независимой переменной t на $\varphi(t)$, где φ — произвольная функция.

Вторая форма (24′) определяет не только кривую, но также движение по этой кривой, и это движение не является произвольным во времени: оно должно удовлетворять интегралу кинетической энергии

$$H=\text{const}, \tag{25}$$

так что выделенная точка $(x_1, \ldots, x_m)$ должна двигаться по кривой с постоянной кинетической энергией. Если мы воспользуемся этим последним уравнением, то две системы (24) и (24′) будут, вообще говоря, эквивалентными [1]).

---

[1]) Если предположить, что в (24) произвольный параметр t выбран таким образом, что $H=\text{const}$, тогда знаменатель $2\sqrt{H}$ в

$$\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i'}=\frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{\partial H}{\partial x_i'}$$

можно вынести из-под знака $\frac{d}{dt}$, откуда находим (24′).

Обратно, пусть мы хотим записать (24′) в таком виде, чтобы независимая переменная t могла быть произвольной. Для этого нужно только заметить, что благодаря выражению (25) можно легко вычислить s как функцию величины t, а именно: $ds=\sqrt{H}dt$. Заменяя ds этим значением и одновременно x_i' величиной $x_i'/\sqrt{H}$, находим (24). См. Darboux, Leçons, t. II, n. 571, 2 éd. Все это теряет смысл для бихарактеристики.

Но вторая из них обладает с нашей точки зрения ценным преимуществом, заключающимся в том, что она допускает решения, для которых постоянное значение интеграла (25) равно нулю и которые представляют собой не что иное, как бихарактеристики. Эти линии нужно также рассматривать как геодезические при некотором расширении смысла этого слова, так как для одной из них первоначальная система теряет смысл.

Исходя из системы (24′), сведем ее к форме Гамильтона, вводя величины

$$p_i = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x_i'} . \tag{26}$$

Если исключить x_i', то H превращается в квадратичную форму A относительно p, сопряженную [1]) форме H, деленную на дискриминант D величины H. Как известно, m уравнений (24′) второго порядка заменяются $2m$ уравнениями Гамильтона первого порядка

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p_i} \tag{L$_1$}$$

(уравнения, эквивалентные системе (26)) и

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_i} . \tag{L$_2$}$$

Эти уравнения снова имеют интеграл $A = \text{const}$, эквивалентный (25).

56. Используем предыдущие вычисления, считая, что квадратичная форма A — та же самая величина, которая ранее обозначалась этой буквой, а именно — характеристическая форма нашего уравнения. Известно, как нужно выбрать для этого H: соотношение между A и H взаимно обратное, так что H равно сопряженной форме A, деленной на дискриминант Δ формы A. Каждый коэффициент H получается, если взять алгебраическое дополнение детерминанта Δ относительно соответствующего коэффициента A и разделить его на Δ. Дискриминанты D и Δ форм H и A являются взаимно обратными величинами. Переменные p_i формы A связаны с переменными x_i' формы H при помощи одной из двух эквивалентных систем (26), (L$_1$). Естественно, переменные x_i одни и те же в обеих формах.

---

[1]) $A(p_1, \ldots, p_m) = \Sigma A_{ik} p_i p_k$, причем коэффициент A_{ik} есть частное от деления на D алгебраического дополнения детерминанта D, соответствующего элементу H_{ik}.

Название «сопряженная форма» стало классическим со времен Гаусса, как и «сопряженное линейное уравнение», использованное в предыдущем тексте, так что оба они приняты к употреблению. Вряд ли следует отмечать, что эти два значения слова «сопряженный» никак не связаны между собой.

Полезно отметить, что смысл понятия геодезических линий в нашем случае слегка отличается от обычного (оставляя в стороне, по крайней мере, приложения в теории относительности), так что A (или H) может быть неопределенной формой. И это имеет место в гиперболическом случае, который представляет для нас особый интерес. Это, очевидно, несущественно для большинства аналитических свойств геодезических линий. Длина $\mathfrak{C}$ может стать мнимой, но не ее квадрат, представляющий именно ту величину, которую нам предстоит ввести [1]).

57. Мы рассмотрим геодезические линии, определенные выше, используя метод, по существу эквивалентный хорошо известному методу Липшица [2]).

Как мы уже отмечали, уравнения (24′) не остаются неизменными при произвольной замене независимых переменных, но они сохраняют свой вид при линейной замене, а именно, при замене s на $\alpha s+\beta$, где α и β — произвольные постоянные. Действительно, такая замена не меняет уравнение (25). Меняется только постоянная в правой части.

Соответствующее свойство уравнений (L) заключается в том, что они не меняются, если заменить s на αs и p_i на p_i/α (где α — константа), не меняя при этом x_i. Это оставляет неизменной каждую из интегральных кривых (L), меняется только ее параметрическое представление.

Рассмотрим теперь только те геодезические линии, которые исходят из данной точки a $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ m-мерного пространства, причем s равно нулю в этой точке. Одна из этих кривых будет определена, если задать начальные значения (при $s=0$) $p_{01}, \ldots, p_{0m}$ для $p_1, \ldots, p_m$. Как мы уже видели, мы получим тот же самый результат, если заменим s на αs; $p_1, \ldots, p_m$ на $p_1/\alpha, \ldots, p_m/\alpha$, величина p_{0i}, естественно, заменится на p_{0i}/α. Это можно выразить, сказав, что $2m+1$ величина

$$p_1, \ldots, p_m, \; p_{01}, \ldots, p_{0m}, \; s$$

присутствует только в $2m$ комбинациях:

$$P_i = sp_i, \quad q_i = sp_{0i} \qquad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{27}$$

Итак, интегралы системы (L) должны иметь форму:

$$\begin{aligned} x_i &= \Phi_i\,(q_1, \ldots, q_m;\; a_1, \ldots, a_m), \\ P_i &= \Psi_i\,(q_1, \ldots, q_m;\; a_1, \ldots, a_m). \end{aligned} \tag{28}$$

---

[1]) Единственное важное различие, вводимое в расчеты вследствие того, что форма A может стать неопределенной, состоит в следующем. Нельзя выбрать на каждой геодезической, как это часто делают, переменную s так, чтобы константа в интеграле $A = \text{const}$ стала равной 1, поскольку случай $A=0$ именно тот, который нас больше всего интересует.

[2]) Bull. des Sci. Math., 1 sér., t. IV, p. 99—110. См. Darboux, Leçons, t. 2, liv. V, n. 518.

Можно сразу же заметить, что эти формулы не изменятся, если поменять местами x_i и a_i и одновременно P_i заменить на $-q_i$ (это видно из уравнений (L_1), (L_2), если в них заменить s на $-s$).

Рассмотрим теперь первый ряд уравнений (28), считая, что они преобразуют x_i в q_i, причем точка a соответствует точке $q_1 = \ldots = q_m = 0$. Так как

$$\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_{0i}},$$

то видно, что разложение в ряд величины $x_i - a_i$ содержит $\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial q_i}$ в качестве члена первого порядка. Якобиан

$$J = \frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(q_1, \ldots, q_m)} \tag{29}$$

имеет, следовательно, в точке a значение Δ, отличное от нуля, так что величины q можно выразить в функции от x в окрестности точки a.

Переменные q очень просто связаны с *нормальными переменными* Липшица [1]). Последние, по определению, равны

$$\xi_i = s\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_0,$$

так что между ними и q существует линейное соотношение с постоянными коэффициентами

$$q_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{H}_0}{\partial \xi_i}$$

или в эквивалентной форме:

$$\xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{A}_0}{\partial q_i}.$$

Здесь $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ — значения величин A и $\boldsymbol{H}$ в начальной точке a, а именно:

$$\boldsymbol{A}_0(q_1, \ldots, q_m) = \boldsymbol{A}(q_1, \ldots, q_m;\ a_1, \ldots, a_m),$$
$$\boldsymbol{H}_0(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \boldsymbol{H}(\xi_1, \ldots, \xi_m;\ a_1, \ldots, a_m).$$

Если воспользоваться координатами q_i (или ξ_i), то геодезические линии, исходящие из точки a, будут представлены прямыми, а координаты их точек будут пропорциональны s.

57′. Предыдущие формулы не требовали предположения об аналитичности коэффициентов A_{ik}. Нужно только, чтобы они были регулярными, поскольку это необходимо для применения общих теорем существования интегралов дифференциальных уравнений

---

[1]) Цит. место. См. предыдущее примечание.

и их дифференцируемости относительно начальных условий (см. дополнительное замечание в конце настоящей книги).

Если A_{ik} — голоморфные функции от x_i, то x_i будут в окрестности точки a голоморфными функциями от q_i и, наоборот, q_i будут голоморфными функциями от x_i.

Все эти соображения — и соображения следующего пункта — справедливы до тех пор, пока первый ряд уравнений (28) можно разрешить относительно q_i, другими словами, пока задачу соединить точку x $(x_1, \ldots, x_m)$ с точкой a с помощью геодезической линии можно считать вполне определенной. Область $\mathfrak{R}$, в которой результаты справедливы, можно определить, если рассмотреть, например, однопараметрическое семейство поверхностей, вложенных друг в друга (таких, как сферы с центром в точке a). Пространство внутри поверхности[1]) принадлежит $\mathfrak{R}$, если каждая из поверхностей пересекает геодезическую линию, исходящую из точки a, только в одной точке P и если, кроме того, якобиан (29) не обращается в нуль на дуге aP.

Вместо того чтобы рассматривать якобиан (29), можно рассмотреть произвольную геодезическую линию, исходящую из точки a, как функцию от $m - 1$ параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, определяющих ее начальное направление, причем каждая точка такой геодезической линии определяется системой значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s$. Якобиан

$$J = \frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s)} \tag{29'}$$

играет ту же самую роль, что и якобиан (29).

58. Уравнение характеристического коноида. Определив таким образом вспомогательные величины P и q, составим следующее выражение:

$$\Gamma = A(P_1, \ldots, P_m; x_1, \ldots, x_m) = A(q_1, \ldots, q_m; a_1, \ldots, a_m).$$

Это квадратичная форма относительно q_i с постоянными коэффициентами, являющаяся голоморфной функцией x_i (через которые, по предположению, выражаются P_i и q_i). Разложение в ряд этой величины по степеням $(x_i - a_i)$ начинается с членов второго

---

[1]) См. наши Leçons sur le calcul des variations, Note finale A. Чаще всего получают область $\mathfrak{R}$ так. На каждой геодезической, исходящей из точки a, определяют дугу, проведенную через a, вблизи которой сохраняется требуемое свойство (т. е. то обстоятельство, что каждую точку можно соединить с начальной точкой при помощи непрерывной, вполне определенной геодезической линии). Эта дуга оканчивается в точке, определяемой (формула (29)) условием $J = 0$, которая называется сопряженным фокусом точки a (см. Leçons sur le calcul des variations, liv. II, chap. III). Здесь геодезическая может касаться огибающей выбранного соответствующим образом однопараметрического семейства других геодезических, исходящих из a. Однако в некоторых случаях такое определение $\mathfrak{R}$ может быть ошибочным.

порядка, а именно:

$$\Gamma = H_0 (x_1 - a_1, \ldots, x_m - a_m) + \ldots \tag{30}$$

(поскольку в окрестности точки a приближенно выполняется $x_i - a_i = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial q_i}$).

Величина Γ *есть квадрат геодезического расстояния от точки* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *до точки* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, причем это расстояние вычислено с помощью линейного элемента H, определенного в п. 56.

Это позволяет найти частные производные величины Γ. Действительно, производные от $\sqrt{\Gamma}$ даются классическим уравнением вариационного исчисления [1])

$$\delta \sqrt{\Gamma} = \sum_i \frac{\partial \sqrt{H}}{\partial x_i'} \delta x_i = \frac{1}{\sqrt{H(x')}} (p_1 \delta x_1 + \ldots + p_m \delta x_m). \tag{30'}$$

Если принять во внимание, что

$$\Gamma = A(P) = s^2 A(p) = s^2 H(x'),$$

то видно, что частная производная от Γ по x_i есть не что иное как [2]) $2sp_i = 2P_i$, *и функция* Γ *есть решение уравнения с частными производными первого порядка*:

$$A\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}; x_i\right) = 4\Gamma. \tag{31}$$

Выражение Γ симметрично по отношению к обеим точкам $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(a_1, \ldots, a_m)$, от которых оно зависит.

Уравнение характеристического коноида имеет вид $\Gamma = 0$. Если нормальные координаты ξ взять в качестве декартовых координат, то характеристический коноид будет обычным конусом (или, вернее, гиперконусом при $m > 3$), который является действительным для гиперболического уравнения. Если, кроме того, уравнение имеет нормальную форму, то, как об этом говорилось в книге I, он состоит из двух полостей, которые делят пространство на три области: две внутренние и одну внешнюю.

Эти свойства справедливы также для первоначального пространства, в котором координаты суть $x_1, \ldots, x_m$, поскольку преобразование координат x_i в ξ_i является регулярным. Можно, следовательно, говорить о двух полостях характеристического коноида или коротко о двух полуконоидах с данной вершиной a.

---

[1]) См. наши Leçons sur le calcul des variations, liv. II, chap. III, p. 142.

[2]) Следовательно, плоскость, касательная к любой поверхности $\Gamma = \text{const}$ есть конормаль (п. 40) к соответствующей геодезической линии (факт, известный в вариационном исчислении — см. наши Leçons sur le calcul des variations, n. 137).

Чаще всего мы будем писать уравнение таким образом, что $\Gamma > 0$ будет соответствовать внутренним областям, т. е. характеристическая форма состоит из одного положительного квадрата и $m-1$ отрицательного.

59. Дифференциальные параметры Ламэ — Бельтрами для величины Г. Известно [1]) определение дифференциальных параметров, образованных с помощью произвольного линейного элемента. Те из них, которые выводятся из метрической формы H, введенной выше, играют первостепенную роль в вопросах, которыми мы занимаемся. Это, очевидно, справедливо для первого из них [2]), $\Delta_1(U)$, который для метрической формы H есть не что иное, как сама характеристическая форма

$$A\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\sum A_{ik}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}.$$

Видно, что *уравнение характеристик есть не что иное, как*

$$\Delta_1(U)=0.$$

Найдем значения, которые принимают интересующие нас параметры, если вместо U ввести величину Г. Основное свойство дифференциальных параметров заключается [3]) в их инвариантности относительно точечных преобразований координат x. Поэтому проделаем вычисления в инвариантной форме, используя понятия, введенные в п. 40′ [4]).

Прежде всего, уравнение (31) предыдущего пункта показывает, что

$$\Delta_1(\Gamma)=4\Gamma.$$

Этот результат, впрочем, можно рассматривать как простое следствие хорошо известного уравнения [5])

$$\Delta_1(\sqrt{\Gamma})=1, \tag{31′}$$

которому удовлетворяет геодезическое расстояние.

В более общей форме мы можем легко найти выражение для дифференциального параметра [6]) $\Delta_1(\Gamma, U)$, где U есть любая функция. В самом деле, добавим к дифференциальным уравнениям (L_1) (п. 55) m соотношений:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}=2sp_i. \tag{32}$$

[1]) См. Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, t. III, liv. III, chap. I.
[2]) Цит. место, п. 672. Там же, t. II, n. 531, 2 éd.
[3]) Darboux, Цит. место, t. III, liv. VII, chap. 1.
[4]) Это изменение обозначений не влияет на выражение первого параметра Δ_1. Наоборот, параметр Δ_2 изменяется.
[5]) Там же, t. II, n. 531, 2 éd.
[6]) Там же, t. III, n. 673.

Если умножим их на соответствующие производные $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ произвольной функции U и сложим, то получим

$$\frac{dU}{ds}=\sum_i \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial p_i},$$

что дает в обозначениях Ламэ

$$\Delta_1(\Gamma, U)=2\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i}=2s\frac{dU}{ds}. \tag{33}$$

Перейдем теперь ко второму дифференциальному параметру, который определяется [1]) при помощи предыдущего путем преобразования, аналогичного тому, которое дало нам сопряженный оператор (п. 39 и далее). Удобно выполнить расчет в форме, инвариантной относительно точечного преобразования, и, следовательно, ввести, как в п. 40', риманов элемент [2]) $d\overline{T}=\rho\, dT$. Искомый дифференциальный параметр $\Delta_2\Gamma$, имеющий значение

$$\Delta_2\Gamma=\frac{1}{\rho}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \rho A_{ik}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_k}\right),$$

определяется из условия, что для любой функции U справедливо интегральное тождество

$$\iiint \rho\Delta_1(\Gamma, U)\, dx_1 dx_2\ldots dx_m+$$

$$+\iiint \rho U\Delta_2\Gamma\, dx_1 dx_2\ldots dx_m=\iint\ldots, \tag{34}$$

где m-кратные интегралы в левой части распространены по области m-мерного пространства; $(m-1)$-кратный интеграл в правой части — по границе этой области, причем величина, замененная многоточием под знаком $\iint$, есть [3]) произведение U на линейную комбинацию первых производных Γ.

Используем это, преобразуя первые интегралы $\iiint$ путем введения координат $s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, определенных ранее. Обоз-

---

1) D a r b o u x, цит. место, t. III, n. 674.

2) Что касается инвариантности этого элемента, см. стр. 74.

3) Можно легко видеть, что эта величина равна $\pm 2\rho s J U$, т. е. выражению, стоящему в (35). Такая проверка, впрочем, бесполезна, так как, согласно основной лемме вариационного исчисления, не может существовать двух преобразований вида (34) для одной и той же величины (справедливых при произвольном U), не совпадающих почленно друг с другом.

начая по-прежнему через J якобиан от $x_1, x_2, \ldots, x_m$ по этим параметрам, получим, что первый интеграл равен

$$\iiint 2s \frac{\partial U}{\partial s} \rho\, |J|\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1} ds.$$

Это можно непосредственно преобразовать в выражение

$$\pm \iint 2U\rho\, |J|\, s\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1} -$$
$$- \iiint 2U \frac{\partial (\rho\, |J|\, s)}{\partial s} d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1} ds =$$
$$= \pm \iint 2\rho U\, |J|\, s\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1} -$$
$$- \iiint 2U \frac{1}{J} \frac{d(\rho J s)}{ds} dx_1 dx_2 \ldots dx_m \qquad (35)$$

В этом окончательном выражении коэффициент при $\rho U dx_1 dx_2 \ldots dx_m$ под знаком m-кратного интеграла есть, само собой разумеется, искомое значение $\Delta_2 \Gamma$

$$\Delta_2 \Gamma = 2\left(1 + s \frac{d \log (\rho J)}{ds}\right). \qquad (36)$$

Замечание. Напомним, что дифференциальный параметр Δ_2 равен своему сопряженному оператору, *записанному*, *разумеется*, в *инвариантном виде* (п. 40′), поскольку мы приняли именно эту точку зрения. Для оператора Лапласа Δ это свойство используется со времени появления теории потенциала. В общем случае, как и в данном частном, оно основано на том, что оператор $\Delta_1 (U, V)$ симметричен относительно двух функций, от которых он зависит. Интегральное тождество (п. 40′), которое характеризует сопряженные операторы, выводится при этих условиях из формулы (34), определяющей Δ_2, если поменять местами обе функции U и Γ или, вернее, U и V, заменяя Γ произвольной функцией V, и произвести вычитание.

Если выбрать метрическую форму H так, как об этом сказано выше, то члены второго порядка в выражении Δ_2 будут идентичны членам данного уравнения. Отсюда следует, что его можно написать, следуя Коттону и Леви-Чивита:

$$\Delta_2 u + \sum B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = 0. \qquad (\bar{\text{E}})$$

Преимущества этой формы будут особенно ясны в книге IV.

59′. Интересно отметить, что уравнение (31) описывает метрическую форму характеристического коноида, т. е. произвольная функция, удовлетворяющая формуле (32), голоморфная [1]) вблизи a и обращающаяся в нуль на коноиде, есть не что иное, как сама величина Г.

Действительно, такая величина должна иметь форму

$$\Gamma\Pi,$$

где П голоморфно. Подставляя ее в (31), будем иметь

$$4\Pi\Gamma = \Pi^2\Delta_1\Gamma + 2\Pi\Gamma\Delta_1(\Pi, \Gamma) + \Gamma^2\Delta_1\Pi$$

или (вследствие формулы (33), а также замечая, что уравнение удовлетворяется при $\Pi = 1$)

$$\Pi + s\frac{d\Pi}{ds} + \frac{\Gamma}{4\Pi}\Delta_1\Pi - 1 = \frac{d}{ds}[(s(\Pi - 1))] + \frac{\Gamma}{4\pi}\Delta_1\Pi = 0.$$

Это показывает, что $\Pi = 1$ на всем коноиде, откуда

$$\Pi = 1 + \Gamma^l R,$$

где l — положительный показатель степени, а новая голоморфная функция R не обращается в нуль на всей поверхности коноида. Но это приводит к противоречию, так как, подставив $\Pi - 1 = \Gamma^l R$ в предыдущее уравнение, найдем, что на поверхности коноида

$$s\frac{dR}{ds} + (2l + 1)R = 0.$$

Это уравнение не имеет регулярных решений, отличных от нуля.

60. Предыдущие исходные положения, относящиеся к геодезическим линиям и к первому дифференциальному параметру Δ_1, позволяют ответить на вопрос, который мы поставили в п. 40 и который состоит в том, чтобы дать геометрическую интерпретацию не только направлению конормали, но также бесконечно малой величине $d\nu$, входящей в формулу (F). Чтобы дать такую интерпретацию, нужно прежде всего уточнить, как выбрать элемент, который ранее обозначался dS и от которого зависит $d\nu$ через посредство π_i. Предположим, что мы взяли, согласно п. 39, $dS = \frac{dT}{dG}$, что, впрочем, оставляет произвольным множитель пропорциональности, входящий в dS, поскольку форма, которую мы придали левой части G уравнения, остается произвольной. Величины π_i представляют собой при этих условиях частные производные $\frac{\partial G}{\partial x_i}$.

Если это так, то уравнения (ν) п. 40, которые определяют конормаль вместе с величиной $d\nu$, будут иметь ту же форму, что

[1]) Наоборот, существует бесконечное число неголоморфных решений, а именно, квадрат геодезического расстояния (вычисленного при помощи H) от точки $(x_1, \ldots, x_m)$ до любой поверхности, вписанной в коноид.

и уравнения (L_1) (п. 49), которые определяют геодезические линии. Величина ν есть не что иное, как переменная s, входящая в уравнение геодезической линии, конормальной к S, если мы условимся о том, чтобы соответствующие переменные p_i были идентичны π_i.

Это сразу же получится, если предположить, что плоскость, касательная к S, не есть характеристика, и взять в качестве G просто геодезическое расстояние точки x от S, величина которого, по предположению, мала. Согласно принципам вариационного исчисления это расстояние отсчитывается вдоль геодезической, конормальной к S. Поскольку эта геодезическая не есть бихарактеристика (вследствие гипотезы, сделанной об ориентации S), то можно выбрать переменную s в точности равной длине дуги кривой, измеренной с помощью метрической формы $\boldsymbol{H}$. Как показывает формула (30') п. 58, которая, согласно принципам вариационного исчисления, применима, если заменить $\sqrt{\Gamma}$ нашим геодезическим расстоянием G, при этих условиях производные $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ представляют собой не что иное, как p_i.

Если в качестве G взять геодезическое расстояние, о котором идет речь, то переменная ν есть ни что иное, как дуга s конормали к S, т. е. само геодезическое расстояние.

60'. Однако так делать нельзя, если мы хотим, чтобы результат был применим даже тогда, когда S есть характеристика. Действительно, в этом последнем случае конормали, исходящие из какой-либо точки поверхности S, лежат целиком на самой поверхности S. И, обратно, через точку x, расположенную вблизи поверхности S, но не лежащую на ней, не проходит ни одна геодезическая линия, которая пересекала бы S конормально через очень короткий отрезок пути. Можно преодолеть эту трудность, во-первых, следующим образом. На геодезической линии, конормальной к S в рассматриваемой точке α (независимо от того, пересекает эта линия поверхность S или нет), возьмем точку a, не совпадающую с первой. Пусть, как и ранее, Γ есть квадрат геодезического расстояния произвольной точки x от точки a. Поверхность S по построению касательна к поверхности $\Gamma = \text{const}$, так что величины P_i, т. е. частные производные Γ, деленные на два, с необходимостью пропорциональны производным величины G, стоящей в левой части уравнения поверхности S. Можно выбрать G таким образом, что эта пропорциональность превратится в равенство. Проделав это и взяв элемент dS равным $\frac{dT}{dG}$, будем, очевидно, иметь

$$d\nu = \frac{ds}{s},$$

где через s обозначена переменная, которая (п. 55) входит в уравнение геодезической линии $a\alpha$. Считаем, что начало ее находится в точке a.

61. Этот первый ответ на вопрос не является полным. Он не дает ясного геометрического смысла переменной s, особенно в случае геодезической линии нулевой длины, на который мы должны обратить особое внимание. Удовлетворительный ответ будет получен, если мы рассмотрим свойства оператора $\Delta_1(u, v)$ и, в особенности, его симметрию относительно двух функций, входящих в него.

Действительно, введем произвольную функцию u и найдем $\frac{du}{d\nu}$. Если π_i равны соответственно частным производным G, то величина

$$\frac{du}{d\nu}=\frac{1}{2}\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial \pi_i}$$

есть не что иное, как $\Delta_1(u, G)$. Это, впрочем, является естественным обобщением классического определения рассматриваемого инварианта, который связан с нормальной производной (Darboux, Leçons, t. III, n. 673).

Учтя это замечание, проведем через рассматриваемую точку α поверхности S поверхность σ, касательная плоскость к которой не является ни характеристикой, ни конормалью по отношению к S. Пусть ν_1 есть направление, конормальное к σ в точке α. Согласно сделанной двойной гипотезе оно не является касательным ни к S, ни к σ. Мы можем обозначить через u геодезическое расстояние (по конормали) от произвольной точки x до σ и через G — расстояние от этой точки до S, *отсчитываемое по геодезическим, конормальным к* σ (независимо от того, является S характеристической поверхностью или нет). Из этого последнего определения следует, что $dS=\frac{dT}{dG}$.

В соответствии с тем, что было сказано в п. 60, бесконечно малая величина $d\nu_1$ (определяемая таким образом, что в качестве величин π_i в формуле (ν) п. 40 взяты частные производные u) будет не чем иным, как значением самой величины u. Итак, ясно, что вдоль геодезической, проведенной через рассматриваемую точку в направлении ν_1, величины u и G тождественно равны друг другу. Следовательно, в этой точке $\frac{dG}{d\nu_1}=1$.

С другой стороны,

$$\frac{dG}{d\nu_1}=\Delta_1(u, G)=\frac{du}{d\nu}$$

благодаря свойству симметрии оператора Δ_1.

Таким образом, *значение $d\nu$ в точке β на конормали к поверхности S, проведенной через точку α, есть не что иное как, расстояние du по конормали от β до σ*. Это полностью решает вопрос.

Например, в обычном евклидовом пространстве построение п. 60 приводит к тому, что нужно взять в качестве ν расстояние δ от точки β до S, отсчитываемое обычным образом по нормали, причем dS имеет свое обычное геометрическое значение. Указанное в конце построение дает $\nu = \delta/\cos\theta$, где через θ обозначен угол между двумя поверхностями S и σ, причем dS нужно умножить на $\cos\theta$. Если S не является характеристикой, то можно взять в качестве σ поверхность, совпадающую с S, и тогда построение будет таким же, как и в п. 60.

62. Построение элементарного решения. Установив это, приступим к нашей главной задаче и будем искать для данного уравнения решение в форме

$$u = U\Gamma^p, \tag{37}$$

где Γ есть функция, которую мы только что построили, для которой точка a с координатами $a_1, a_2, \ldots, a_m$ считается заданной точкой, а точка x с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — переменная точка. Мы начнем с аналитического случая, так что коэффициенты предполагаются голоморфными по x.

Соединим снова точку x с точкой a при помощи геодезической, на которой

$$\frac{dx_1}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_m}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_m}} = ds. \tag{L$_1$}$$

Запишем при этих условиях решение (12). Величина A_1, определяемая формулой (12'), тождественно равна 4 согласно уравнению (31). Что касается величины

$$M = \sum A_{ik}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B_i \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i},$$

то формула (30) дает ее значение в начальной точке. Имеем

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i \partial x_k} = 2H_{ik} + \ldots$$

и, следовательно, поскольку производные $\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}$ в начальной точке равны нулю,

$$M = 2\sum A_{ik}H_{ik} + \ldots = 2m + \ldots$$

Величины π_i в формуле (12), т. е. производные Γ, должны быть заменены величинами $2P_i$.

Следовательно, деля (12) на $p\Gamma^{p-1}$ и заменив предварительно G на Γ, будем иметь

$$2\sum \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} + (M + 4p - 4)U + \frac{\Gamma}{p}\mathfrak{F}(U)| =$$
$$= 2\sum \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} + (2m + 4p - 4 + \ldots)U + \frac{\Gamma}{p}\mathfrak{F}(U) = 0. \tag{38}$$

При $\Gamma = 0$, деля на 2 и учитывая (33) (п. 59), найдем

$$2s\frac{dU}{ds} + \left(\frac{M}{2} + 2p - 2\right)U = 2s\frac{dU}{ds} + (m + 2p - 2 + \ldots)U = 0. \tag{38'}$$

Поскольку U есть регулярная функция s, *это уравнение имеет смысл только при*

$$p = -\frac{m-2}{2} - p_1, \tag{39}$$

где p_1 — целое положительное число или нуль. Следовательно, U при s, близком к нулю, имеет порядок s^{p_1}. При $p_1 = 0$ и, следовательно, при

$$p = -\frac{m-2}{2} \tag{39'}$$

функция U в точке a будет иметь значение, отличное от нуля. Мы его примем [1]) равным $1/\sqrt{|\Delta a|}$, обратной величине квадратного корня из модуля дискриминанта в точке a.

Решение u, полученное таким образом, является единственным, которое необходимо рассмотреть, потому что другие, полученные при $p_1 > 0$, легко можно вывести из него. Действительно, u, когда оно вычислено, будет функцией не только x_i, но также a_i, и будет аналитической по этим переменным [2]). Величины

$$\frac{\partial u}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial a_m}$$

являются решениями данного уравнения. Они имеют в точке a особенность, соответствующую $p_1 = 1$. Аналогично можно [3]) получить решения, соответствующие последующим значениям p_1, выполняя заново дифференцирование по a_i.

Согласно тому, что было показано ранее, существует целый ряд значений m, при которых ни одно из этих решений не суще-

[1]) Это условие соответствует той форме, в которой мы здесь выполняем вычисления, и, в частности, связано с построением сопряженного уравнения, как это было указано в п. 40. При инвариантной форме вычислений, когда форма сопряженного уравнения совпадает с той, которая дана в п. 40′, принимается, что $U_a = 1$.

[2]) Это свойство функции u можно считать почти очевидным вследствие гипотезы о голоморфности A_{ik}, B_{ik}, C. Строго говоря, оно следует, по крайней мере для нечетного m, из того факта, что каждый член ряда (42) (см. ниже) удовлетворяет этому условию, а также, с другой стороны, из того, что этот ряд равномерно сходится. Это будет справедливо для четного m, если дать достаточно точное определение функции u.

[3]) Решения Пикара при $m = 2$, имеющие одновременно полюс и логарифмическую особенность (C. R. Acad. Sci., t. CXXXVI, p. 1293, juin 1903), также вытекают из элементарного решения в том виде, в каком оно было найдено в п. 46, если выполнить расчет, указанный в тексте.

ствует и при которых, следовательно, *задача, вообще говоря, неразрешима*: это четные значения, при которых число p есть целое отрицательное число. Мы, естественно, вновь столкнемся с этой неразрешимостью в процессе расчета, который определяет решение.

62′. Этот расчет использует прежде всего уравнение (38′), которое дает значение U на коноиде. Имеем (поскольку U равно $1/\sqrt{|\Delta a|}$ в вершине)

$$U = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}} e^{-\int\limits_0^s \frac{1}{2s}\left(\frac{M}{2}+2p-2\right) ds}. \tag{40}$$

Мы начнем с функции U_0, равной во всем пространстве (или в той части пространства, где Γ определено) вышенаписанному выражению. Другими словами, с функции, которая удовлетворяет во всем пространстве уравнению (38′). Величина U_0 есть голоморфная функция x_i, что можно сразу видеть, если взять q_i в качестве переменных (ср. с уравнением (44′)). Очевидно, будем иметь

$$U = U_0 + \Gamma U_1,$$

где U_1 есть регулярная функция.

Заменим U этим выражением в уравнении (38). Видно, что U_1 должно удовлетворять уравнению

$$2(p+1)\sum_i \frac{\partial U_1}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} + (p+1)(M+4U)U_1 + \Gamma\mathfrak{F}(U_1) + \mathfrak{F}(U_0) =$$

$$= (p+1)\left[4s\frac{dU_1}{ds} + (M+4p)U\right] + \mathfrak{F}(U_0) + \Gamma\mathfrak{F}(U_1) = 0. \tag{41}$$

Функцию U_1 определим с помощью уравнения

$$4s\frac{dU_1}{ds} + (M+4p)U_1 + \frac{1}{p+1}\mathfrak{F}(U_0) = 0, \tag{41′}$$

которое, по предположению, выполняется во всем пространстве. Это дифференциальное уравнение имеет регулярное решение и притом единственное. В самом деле, его можно записать:

$$\frac{d}{ds}\frac{sU_1}{U_0} = -\frac{1}{4(p+1)U_0}\mathfrak{F}(U_0).$$

Если U_1 остается конечным при $s = 0$, то это с необходимостью дает

$$U_1 = -\frac{U_0}{s}\int_0^s \frac{1}{4(p+1)}\frac{\mathfrak{F}(U_0)}{U_0}\,ds.$$

Функция U_1, как и U_0, является голоморфной по q_i и, следовательно, по x_i. Остальная часть расчета теперь очевидна. Полагаем

$$U = U_0 + \Gamma U_1 + \ldots + \Gamma^h U^h + \ldots \tag{42}$$

Записанный таким образом ряд дает решение задачи, если U_h определяется последовательными уравнениями [1])

$$4s\frac{dU_h}{ds} + [M + 4(p+h-1)]\,U_h + \frac{1}{p+h}\mathfrak{F}(U_{h-1}) = 0, \tag{43}$$

где левая часть есть коэффициент при $(p+h)\Gamma^{p+h-1}$ в выражении $\mathfrak{F}(U\Gamma^h)$, откуда

$$U_h = -\frac{U_0}{4(p+h)s^h}\int_0^s s^{h-1}\mathfrak{F}(U_{h-1})\,ds. \tag{43'}$$

Если m нечетно, и, следовательно, p — не целое, все $(p+h)$ равны целым числам плюс половина. Итак, все выражения (43′) существуют. Они будут голоморфными функциями. Если в качестве независимых переменных взять q_i (или, что то же самое, нормальные переменные Липшица), а величина $\frac{1}{U_0}\mathfrak{F}(U_{h-1})$ имеет значение

$$\frac{1}{U_0}\mathfrak{F}(U_{h-1}) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k + \ldots, \tag{44}$$

где $Q_0, Q_1, \ldots$ — однородные полиномы по взятым переменным (их степень соответствует их индексу), то будем иметь

$$\frac{U_h}{U_0} = -\frac{1}{4(p+h)h}Q_0 - \frac{1}{4(p+h)(h+1)}Q_1 - \\ - \ldots - \frac{1}{4(p+h)(h+k)}Q_k + \ldots \tag{44'}$$

В силу (40) аналогичное выражение, в котором нужно заменить h нулем, а правую часть в формуле (44) величиной $(M/2) - m$, применимо также к случаю, когда берется $\log U_0$ (при этом нужно добавить постоянный член, равный $^1/_2 \log|\Delta_a|$).

Если бы коэффициенты были только регулярными (п. 9), то можно было бы сказать, что величины U_h существуют и обладают

[1]) Видно, что этот метод позволяет построить решение (притом единственное), имеющее форму $u = U\Gamma^{p'+1}$ для любого заданного уравнения с частными производными такого, что $\mathfrak{F}(u) = W\Gamma^{p'}$ (W голоморфно) при условии, что p' не равно ни одному из чисел

$$-\frac{m-2}{2}-1,\quad \frac{m-2}{2}-2, \ldots,\quad \frac{m-2}{2}-p_1, \ldots$$

Наоборот, когда p принимает одно из предыдущих значений, уравнение не имеет решений в форме $U\Gamma^{p'+1}$ (и вообще решений с алгебраической особенностью, как это можно видеть). Это ясно из текста.

вышеупомянутыми свойствами до некоторого определенного значения h.

63. Теперь нужно доказать сходимость ряда (42) в предположении, что коэффициенты голоморфны.

Для этой цели мы найдем мажоранты для последовательных членов на этот раз непосредственно, а не путем сравнения.

Несколько упростим расчет путем замены неизвестной. Определив U_0, как и ранее, запишем вместо (E) новое уравнение:

$$\mathfrak{F}_1(u) = \frac{1}{U_0}\mathfrak{F}(U_0 u) = 0. \tag{E$_1$}$$

Очевидно, что всякое решение уравнения (E_1) выводится из соответствующего решения уравнения (E) путем деления его на U_0 и что элементарные решения обоих уравнений связаны тем же самым образом (с точностью до постоянного множителя). Это справедливо для каждого члена в разложении в ряд числителей обоих решений (мы вернемся к этому в книге IV). Это легко проверить [1]), в частности для U_0. Следовательно, новое значение U_0, соответствующее уравнению (E_1), сводится к постоянной:

$$\frac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}}.$$

Пусть в качестве x_i взяты нормальные переменные [2]) (q_i или нормальные переменные Липшица), соответствующие полюсу в данной точке a.

Пусть σ — сумма абсолютных значений переменных, выбранных таким образом. Каждый коэффициент данного уравнения (E_1) допускает мажоранту

$$\frac{\alpha}{1-\frac{\sigma}{r}},$$

так что, если

$$v \lhd \frac{K}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^n}, \tag{45}$$

то имеем (учитывая, что $\mathfrak{F}$ включает один недифференцируемый

---

[1]) Для этого удобно взять уравнение в форме ($\overline{E}$) (п. 59, замечание), чтобы выделить в левой части величину $\Delta_2 u$, и использовать вместе с формулой (36) п. 59 соотношения Дарбу (Leçons, t. III, n. 679).

[2]) Операции, определяемые формулами (38′), (43), очевидно, инвариантны по отношению к точечному преобразованию независимых переменных.

член, m членов первого порядка [1]) и m^2 членов второго порядка)

$$\mathfrak{F}(v) < \frac{\alpha' K n (n+1)}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{n+3}}, \qquad \alpha' = \alpha\left(1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right). \tag{46}$$

При этих условиях можно записать:

$$U_h < \frac{K_h}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{2h}}, \tag{47}$$

где K_h — положительные числа, которые будут определены несколько позже.

Допустим, что неравенство (45) справедливо для некоторого значения h. Докажем его для $h+1$. Вспоминая, что U_0 есть постоянная величина, имеем

$$\mathfrak{F}(U_h) < \frac{\alpha' K_h 2h (2h+1)}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{2h+3}}.$$

Откуда для U_{h+1} получаем

$$U_{h+1} < \frac{\alpha' K_h 2h (2h+1)}{4(p+h+1)} \frac{1}{s^{h+1}} \int_0^s \frac{s^h ds}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{2h+3}}.$$

Поскольку величина σ пропорциональна s на каждой геодезической, множитель

$$\frac{1}{s^{h+1}} \int_0^s \frac{s^h ds}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{2h+3}}$$

можно записать в виде

$$\frac{1}{\sigma^{h+1}} \int_0^\sigma \frac{\sigma^h d\sigma}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{2h+3}}.$$

Можно без труда видеть [2]), что мажоранта для него такова:

$$\frac{1}{h+1} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{2h+2}},$$

поскольку $2h + 3 > h + 2$.

---

[1]) Мы принимаем за два члена двойной член

$$(A_{ik} + A_{ki}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 2A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}.$$

[2]) Ибо

$$\frac{1}{h+1} \left[\frac{\sigma^{h+1}}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{l-1}} \right]' = \frac{\sigma^h}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^l} \left[1 - \frac{\sigma}{r} + \frac{l-1}{h+1} \frac{\sigma}{r}\right] > \frac{\sigma^h}{\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^l}$$

(при $l > h+2$).

Следовательно,

$$U_{h+1} < \frac{\alpha' K_h 2h(2h+1)}{4(h+1)(p+h+1)} \frac{1}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{2h+2}}.$$

Это и есть требуемое условие

$$U_{h+1} < \frac{K_{h+1}}{\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^{2(h+1)}},$$

причем

$$K_{h+1} = K_h \cdot \alpha' \frac{2h(2h+1)}{4(h+1)(p+h+1)}.$$

Так как отношение K_{h+1}/K_h при $h \to \infty$ стремится к конечному пределу α', то ряд (42) сходится при $|\Gamma| < \frac{1}{\alpha'}\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)^2$.

Существование u полностью доказано.

Можно добавить, что если менять положение точки a в произвольной области, лежащей строго внутри $\mathfrak{R}$, то числа r, α будут иметь: первое — минимум, а второе — максимум, так что сходимость выражения (42) равномерная.

64. Заметим, что вышеприведенный анализ без всяких видоизменений применим к определению голоморфного решения уравнения (E), принимающего заданные значения на характеристическом коноиде (при условии, что известна любая голоморфная функция $\mathfrak{U}_0$, которая принимает эти значения при $\Gamma = 0$). Запишем

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_1\Gamma + \ldots + \mathfrak{U}_k\Gamma^k + \ldots \tag{48}$$

Уравнения для последовательных значений $\mathfrak{U}_k$ будут такими же, как и ранее, если в них положить $p = 0$, а именно:

$$4s\frac{d\mathfrak{U}_1}{ds} + M\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{F}(\mathfrak{U}_0) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$4s\frac{d\mathfrak{U}_k}{ds} + (M + 4k - 4)\mathfrak{U}_k + \frac{1}{k}\mathfrak{F}(\mathfrak{U}_{k-1}) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

или, интегрируя снова с помощью U_0:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= -\frac{U_0}{4s^{1-p}}\int_0^s \frac{s^{-p}}{U_0}\mathfrak{F}(\mathfrak{U}_0)\,ds, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{U}_k &= -\frac{U_0}{4ks^{k-p}}\int_0^s \frac{s^{k-p-1}}{U_0}\mathfrak{F}(\mathfrak{U}_{k-1})\,ds. \end{aligned} \tag{48'}$$

Такая задача имеет, следовательно, голоморфное решение и притом единственное.

65. Предположим теперь, что m четно. Пусть, например, $m=4$, откуда $p=-1$. Если U_0 по-прежнему имеет значение (40), то уравнение (41) имеет смысл только в том случае, когда вдоль характеристического коноида

$$\mathfrak{F}(U_0) = 0.$$

Очевидно, что это условие, вообще говоря, невыполнимо. Если, например, заданы все коэффициенты уравнения, за исключением C, то из него можно найти значения C на всем коноиде с вершиной в точке a (поскольку выражение для U_0 не зависит от C и отлично[1]) от нуля).

Аналогичное заключение, очевидно, справедливо для любого другого четного значения m, причем отсутствие решения следует из уравнения (43) при значении $h = -p = (m-2)/2$, а именно:

$$\mathfrak{F}(U_{-p-1}) = 0. \tag{49}$$

Полученные ранее результаты Пикара (см. п. 46) приводят к тому, что нужно добавить в выражение (37) логарифмический член, положив

$$u = U\Gamma^p - \mathfrak{U}\log\Gamma. \tag{50}$$

Подставив это новое значение u, найдем

$$\mathfrak{F}(U\Gamma^p) - \left[2\sum \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} + (M-4)\,\mathfrak{U}\right]\frac{1}{\Gamma} - \log\Gamma\,\mathfrak{F}(\mathfrak{U}) = 0,$$

где первый член уже разлагался в ряд по степеням Γ.

Как и ранее, логарифмические члены исчезают только тогда, когда само $\mathfrak{U}$ есть решение уравнения (E). Более того, учитывая разложение в ряд для $\mathfrak{F}(u)$, записанное выше, мы видим, что уравнения (43), соответствующие $h < -p$, не меняются. Но для $h = -p$, т. е. для значения, которое обращает в нуль коэффициент при $1/\Gamma$, следует записать вместо (43) уравнение

$$4s\frac{d\mathfrak{U}}{ds} + (M-4)\,\mathfrak{U} - \mathfrak{F}(U_{-p-1}) = 0, \tag{51}$$

которое, как видно, имеет ту же форму, что и (43), и отличается от него только знаком и отсутствием знаменателя (который должен был бы обратиться в нуль).

Пусть $\mathfrak{U}_0$ есть функция, определенная в области $\mathfrak{R}$ при помощи дифференциального уравнения (51). Функция $\mathfrak{U}$ должна быть

[1]) Нахождение условий, необходимых для того, чтобы это выполнялось при любом положении точки a (и, следовательно, условий существования элементарного решения в форме (37)), потребовало бы гораздо более трудоемкого исследования. Но как мы увидим в книге IV, это исследование было бы особенно важным. Можно добавить, что при этом играло бы важную роль значение (36) величины $\Delta_2\Gamma$, полученное выше (п. 59).

таким решением уравнения (E), которое принимает на коноиде то же самое значение, что и $\mathfrak{U}_0$.

Мы видели, как нужно определить эту функцию $\mathfrak{U}$. Коэффициенты разложения ее по степеням Г удовлетворяют уравнениям (48'). Видно снова, что они абсолютно те же самые, что и те, которые определяли U_h, если принять, что $h = p + k$.

Другими словами, мы приходим совершенно к тем же самым операциям, что и ранее (с точностью до численного коэффициента, который изменяется при расчете $\mathfrak{U}_0$), причем U_{-p+k} для $k = 0, 1, 2, \ldots$, обозначается теперь через $\mathfrak{U}_k$.

Обратно, если вычислять U_h для $h = 0, 1, 2, \ldots, (-p-1)$ и $\mathfrak{U}$ так, как сейчас было объяснено, и если подставить в данное уравнение выражение

$$-\mathfrak{U}\log\Gamma + \Gamma^p \sum_{p=0}^{-p-1} U_h\Gamma^h, \tag{52}$$

то в результате подстановки члены, содержащие $\Gamma^{p-1}, \ldots, 1/\Gamma$ и $\log\Gamma$, исчезнут. Результат этой подстановки, обозначенный буквой $\mathfrak{M}$, будет, следовательно, голоморфной функцией, и нам останется только добавить к выражению (52) произвольное голоморфное решение w уравнения

$$\mathfrak{F}(w) = -\mathfrak{M}$$

(существование которого следует из основной теоремы Коши), чтобы получить решение

$$u = -\mathfrak{U}\log\Gamma + U\Gamma^p \quad \left(U = w\Gamma^{-p} + \sum_{h=1}^{-p-1} U_h\Gamma^h\right)$$

данного уравнения [1]).

[1]) Можно было бы также найти величину w, если написать для нее

$$w = W_{-p} + W_{-p+1}\Gamma + \ldots + W_{-p+k}\Gamma^k + \ldots,$$

подставить всю величину u в уравнение и приравнять нулю коэффициенты при степенях Г, превышающих $-p-1$, которые до сих пор не рассматривались. Это дает для последовательных значений W_{-p+k}:

$$4s\,\frac{dW_{-p+k}}{ds} + (M + 4k - 4)\,W_{-p+k} + \\ + \frac{1}{k}\left[\mathfrak{F}(W_{-p+k-1}) - 4s\,\frac{d\mathfrak{U}_k}{ds} - (M + 8k - 4)\,\mathfrak{U}_k\right] = 0,$$

начиная с W_{-p+1}, в то время как величина W_{-p} остается произвольной, обеспечивая требуемую неопределенность.

Результат будет зависеть аналитически от координат полюса, если позаботиться о том, чтобы выбрать этот произвольный элемент (при каждом положении точки a) по определенному аналитическому закону, например, если положить $U_{-p} = 0$.

В этом случае в противоположность тому, что имеет место для m нечетного, результату присуща большая степень неопределенности, поскольку w можно видоизменить, добавив к нему любое регулярное решение уравнения (E).

Можно вычислить элементарное решение для любого непараболического уравнения в предположении, что коэффициенты аналитичны.

Позднее мы увидим, как можно получить тот же самый результат без этой гипотезы.

66. Приложение к эллиптическому случаю. Если придерживаться предположения об аналитичности, то для эллиптического и гиперболического случаев все является общим. В будущем мы будем заниматься только этим последним. Нужно заметить, что существование элементарного решения есть основа, на которой покоится теория эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами. На эту теорию распространяются основные свойства, справедливые для уравнения $\Delta u = 0$. Для общего случая можно сразу же сформулировать свойства, полученные Зоммерфельдом [1] для случая двух переменных:

эллиптическое уравнение с аналитическими коэффициентами имеет только аналитические решения (внутри области их существования, исключая границу);

если два решения касаются друг друга [2] вдоль поверхности, то одно из них является аналитическим продолжением другого.

Доказательство этого основывается на замене $\log 1/r$ или $1/r^{m-2}$ элементарным решением в классическом рассмотрении Дюгема [3] и в последующем рассмотрении функций, аналогичных функциям Грина [4]).

Если для сопряженного уравнения задача о нахождении решения внутри области по значениям, заданным на границе, всегда разрешима, то это определяет решение данного уравнения.

67. Параболический случай выпадает из предыдущего анализа. Роль элементарного решения в этом случае играет величина, имеющая значение

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\, e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}. \tag{53}$$

---

[1]) Encyclopädie der Math. Wiss. II A 7.

[2]) См. примечание 2 на стр. 35.

[3]) Это следует из того факта, что элементарное решение является аналитической функцией не только x_i, но также a_i.

[4]) Здесь следует заметить, что в эллиптическом случае можно видоизменить элементарное решение, добавив совершенно произвольные регулярные решения уравнения (E) (что должно иметь место для функций Грина). Это справедливо как для четного, так и для нечетного m. Это не будет иметь места в наших последующих вычислениях, относящихся к гиперболическим уравнениям.

Она хорошо известна для классического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{или} \quad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Распространение на уравнения более общего вида, содержащие те же самые члены второго порядка и члены первого порядка, сделано Жеврэ [1]) и мною. Мы не будем здесь более подробно останавливаться на параболическом уравнении. Этот вопрос рассматривал Вольтерра в своих лекциях в Стокгольме. Мы просто отошлем к его трудам. Заметим также, что элементарное решение параболического уравнения в самом общем виде можно получить из эллиптического или гиперболического случая путем предельного перехода, при котором коэффициенты изменяются так, что квадрат характеристической формы стремится к нулю. Например, можно легко получить первое выражение (53) как предельное значение функции Римана.

Возьмем уравнение самого простого вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{54}$$

Рассмотрим его как предельный случай уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{54'}$$

при $K = 0$ (K — постоянная). Введем характеристики в качестве новых переменных

$$y = Y, \qquad x - y/K = X.$$

Уравнение принимает следующую форму (практически эквивалентную так называемому «телеграфному уравнению»):

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{1}{K}\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y} = 0.$$

Функция Римана (x_0, y_0 для простоты равны нулю) в данном случае равна [2])

$$e^{\frac{X}{K} - \frac{Y}{K^2}} J_0\left(2\sqrt{\frac{XY}{K^3}}\right),$$

где J_0 — функция Бесселя:

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{\xi^4}{2^4 \cdot (2!)^2} - \ldots + (-1)\frac{\xi^{2h}}{2^h (h!)^2} + \ldots$$

---

[1]) C. R. Acad. Sci., t. CLII, 1911, Gevrey, Thèse, Paris, 1913, chap. V.

[2]) См. далее п. 69.

Это дает в прежних переменных

$$e^{\frac{x}{K}-\frac{2y}{K^2}} J_0\left(\frac{2}{K^2}\sqrt{y(Kx-y)}\right). \tag{55}$$

Итак, когда K стремится к нулю, аргумент, входящий в J_0, стремится к бесконечности. В этом случае функция Бесселя допускает хорошо известную асимптотическую оценку

$$J_0(i\eta) \sim \frac{e^{\eta}}{\sqrt{2\pi\eta}}.$$

Если, с другой стороны, разложить $\sqrt{y(Kx-y)}$ в ряд до членов, содержащих K^2, а именно:

$$\frac{i}{2}\left(2y - Kx - \frac{K^2x^2}{4y}\right) + \ldots,$$

то видно, что выражение (55) сводится к виду

$$\frac{K}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}.$$

Это равно величине, используемой в теории уравнения (54) с точностью до множителя $K/\sqrt{4\pi}$. Он сокращается с соответствующим знаменателем, если сделать подстановку в формулу п. 42.

68. Общее заключение. Резюмируя то, что было найдено для непараболического случая, мы видим, что:

линейное непараболическое уравнение второго порядка с m независимыми переменными (обладающее аналитическими коэффициентами) допускает элементарное решение, имеющее полюсом произвольную точку m-мерного пространства;

если $\Gamma = 0$ есть уравнение характеристического коноида с вершиной в точке a, то это элементарное решение имеет форму $U/\Gamma^{\frac{m-2}{2}}$ (через U обозначена голоморфная функция, которая принимает в самом полюсе значение $1/\sqrt{|\Delta|}$) для m нечетного; оно имеет форму $U/\Gamma^{\frac{m-2}{2}} - \mathfrak{U}\log\Gamma$ для m четного (через $\mathfrak{U}$ обозначена другая голоморфная функция, которая может быть равна нулю);

*в первом случае выражение для этого решения полностью определено *.*

69. Несколько знакомых примеров. Элементарное решение уравнения $\Delta u = 0$ с числом $m > 2$ переменных равно

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i - a_i)^2\right]^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Если не проводить различия между действительными и мнимыми величинами, то это сразу же дает соответствующий результат для уравнений (e_2), (e_3), ... и, вообще говоря, для любого уравнения, имеющего форму (уравнения Кулона)

$$\Delta^{p,\,q} u = \left(\sum_{h=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\right) u = 0,$$

а именно:

$$u = \frac{1}{\left(\sqrt{\pm\left[\sum_h (x_h - a_h)^2 - \sum_k (y_k - b_k)^2\right]}\right)^{m-2}}.$$

Например, для (e_2)

$$u = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}.$$

Для несколько более общего уравнения затухающих волн [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Ku = 0 \tag{56}$$

соответствующий результат можно легко получить путем обобщения данного расчета. Если положить $\omega t \sqrt{-1} = x_m$, $\omega t_0 \sqrt{-1} = a_m$, то уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + Ku = 0.$$

Обозначая

$$\rho^2 = \sum_{1}^{m} (x_h - a_h)^2$$

и считая u функцией ρ, будем иметь для нее обыкновенное дифференциальное уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{m-1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + Ku = 0. \tag{57}$$

---

[1] Напомним, что всякое линейное уравнение второго порядка (непараболическое) с постоянными коэффициентами можно привести к форме, записанной выше, так как:

1) линейное преобразование переменных приводит его к форме

$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta u = 0;$$

2) коэффициенты a_i становятся равными нулю при замене неизвестной функции

$$u = e^{-\frac{1}{2}(a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m)} u'.$$

Это уравнение обладает следующим свойством. Если известно решение u для некоторого значения $m = m_0$, то решение u_1 уравнения, соответствующего $m = m_0 + 2$, определяется из равенства

$$u_1 = \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho}, \tag{58}$$

так что достаточно проинтегрировать его для $m = 1, 2$.

При $m = 1$ имеем $u = \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} (\sqrt{K}\rho)$, что дает ответ для $m = 3, 5, \ldots$ Именно, при $m = 3$ получаем $u = \frac{1}{\rho} \cdot \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} (\sqrt{K}\rho)$, где, так же как и для следующих нечетных значений m, нужно взять символ cos для получения необходимого элементарного решения. Если в соответствии с п. 58 и с тем, что мы будем делать в последующих книгах, изменить знаки в формуле (56), введя в качестве Г величину

$$\omega^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2,$$

то для уравнения затухающих цилиндрических волн

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - Ku = 0$$

найдем элементарное решение в виде

$$u = \omega \frac{\operatorname{ch} \sqrt{K [\omega^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]}}{\sqrt{\pm [\omega^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]}} \tag{59}$$

(гиперболический косинус появляется из-за изменения знака Г).

Для $m = 2$ уравнение (57) имеет голоморфное решение и решение с логарифмической особенностью, причем это последнее есть элементарное решение. Оба этих решения выражаются при помощи функции Бесселя

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2^2} + \frac{\xi^4}{2^4 (2!)^2} + \ldots + (-1)^h \frac{\xi^{2h}}{2^{2h} (h!)^2} + \ldots$$

В частности, решение уравнения (58) с логарифмической особенностью таково:

$$J_0(\rho\sqrt{-K}) \log \rho + w, \quad \rho^2 = \omega^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2, \tag{60}$$

где w голоморфно. С учетом вышеприведенного замечания о знаке эта формула дает элементарное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Ku = 0.$$

Следовательно, для $m = 4$ решение уравнения (57) выводится из предыдущего (а именно: из (60)) с помощью соотношения (58), что дает $\frac{1}{\rho^2} J_0(\rho\sqrt{-K}) + \frac{\sqrt{-K}}{\rho} J_0'(\rho\sqrt{-K}) \log \rho +$ голоморфная функция $= \frac{1}{\rho^2} j\left(\frac{K\rho^2}{4}\right) + \frac{K}{2} j'\left(\frac{K\rho^2}{4}\right) \log\, \rho \,+$ голоморфная функция, где

$$\rho^2 = \omega^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = \Gamma.$$

Функция j равна

$$J_0(2\sqrt{-\lambda}) = j(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{1^2} + \frac{\lambda^2}{(2!)^2} + \ldots + \frac{\lambda^n}{(n!)^2} + \ldots$$

причем

$$j'(\lambda) = \frac{dj}{d\lambda}.$$

Это дает элементарное решение уравнения затухающих волн в трехмерном пространстве

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - Ku = 0, \tag{E$_3$}$$

а именно, поскольку множитель при $1/\Gamma$ в начальной точке должен быть равен $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} = \omega$:

$$\frac{\omega j\left(\frac{K}{4}\Gamma\right)}{\Gamma} + \frac{\omega K}{4} j'\left(\frac{K}{4}\Gamma\right) \log \Gamma + \text{голоморфная функция.} \tag{60'}$$

Эта величина обладает требуемой сингулярностью при

$$\omega^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = 0.$$

Числитель в первом члене может быть заменен постоянной величиной ω, поскольку соответствующее изменение дроби есть голоморфная функция. Но это будет несправедливо, если рассмотреть элементарное решение (56) при $m = 6, 8, \ldots$, применяя последовательные операции (58) к вышенаписанному уравнению.

70. Метод спуска. Полезно посмотреть, какой вид примут наши расчеты, если применить метод спуска, о котором говорилось выше (п. 30). Другими словами, одновременно с уравнением $\mathfrak{F}(u) = 0$, содержащим m независимых переменных, рассмотрим новое уравнение:

$$\mathfrak{F}_1(u) = \mathfrak{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

где z есть дополнительная независимая переменная, которая не входит ни в один из коэффициентов. Для этого нового уравнения рассмотрим заново характеристический коноид $\Gamma = 0$ с вершиной в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_m, c)$, где через c обозначено определенное значение $(m+1)$-й координаты z. Новая характеристическая форма имеет вид

$$A'(P_1, \ldots, P_m, R) = A(P_1, \ldots, P_m) - R^2.$$

Нужно дополнить уравнения (L) равенствами

$$ds = \frac{dz}{-r} = \frac{dr}{0},$$

где r и R — дополнительные переменные, аналогичные $p_1, \ldots$ $\ldots, p_m$; $P_1, \ldots, P_m$. Это дает $r = \text{const}$, $z - c = sr = R$. Следовательно,

$$\Gamma' = s^2 [A(p_1, \ldots, p_m) - r^2] = A(P_1, \ldots, P_m) - R^2 = \\ = \Gamma - (z-c)^2.$$

Новое значение величины M (формула (11)), очевидно, равно $M' = M + 2$.

Положим c равным нулю. Итак, если требуется построить функцию

$$U' = U'_0 + U'_1\Gamma' + \ldots = \\ = U'_0 + U'_1(\Gamma - z^2) + \ldots + U'_{h'}(\Gamma - z^2)^h + \ldots,$$

аналогичную U, то это приводит к последовательным уравнениям:

$$2\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U'_0}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} - 4R\frac{\partial U'_0}{\partial z} + \left[M' + 4\left(p - \frac{1}{2}\right) - 4\right]U'_0 = \\ = 2\sum \frac{\partial U'_0}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} - 4R\frac{\partial U'_0}{\partial z} + (M + 4p - 4)U'_0 = 0,$$

$$2\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U'_1}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} - 4R\frac{\partial U'_1}{\partial z} + (M' + 4p - 2)U'_1 + \frac{1}{p + \frac{1}{2}}\mathfrak{F}_1(U'_0) = \\ = 2\sum \frac{\partial U'_1}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i} - 4R\frac{\partial U'_1}{\partial z} + (M + 4p)U'_1 + \frac{1}{p + \frac{1}{2}}\mathfrak{F}_1(U'_0) = 0,$$

. . . .

$$2\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U'_h}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i}-4R\frac{\partial U'_h}{\partial z}+\left[M'+4\left(p-\frac{3}{2}+h\right)\right]U'_h+$$
$$+\frac{1}{p+h-\frac{1}{2}}\mathfrak{F}_1(U'_{h-1})=$$
$$=2\sum\frac{\partial U'_h}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial P_i}-4R\frac{\partial U'_h}{\partial z}+[M+4(p+h-1)]U'_h+$$
$$+\frac{1}{p+h-\frac{1}{2}}\mathfrak{F}_1(U'_{h-1})=0,$$

. . . .

Первое из них отличается от уравнения (38′), которому удовлетворяет U_0, только членом, содержащим $\frac{\partial U'_0}{\partial z}$. Следовательно, U_0 также удовлетворяет этому уравнению. Нам известно, что решение полностью определяется уравнением и условием в точке a, где решение равно $1/\sqrt{|\Delta|}$. Отсюда видно, что U'_0 совпадает [1]) с U_0.

Аналогичным образом второму уравнению, определяющему U'_1, в котором $\mathfrak{F}_1(U'_0)=\mathfrak{F}_1(U_0)=\mathfrak{F}(U_0)$, удовлетворяет функция

$$U'_1=\frac{p+1}{p+\frac{1}{2}}U'.$$

И так как его решение, регулярное в окрестности точки a, является единственным, то U'_1 равно именно этому значению [2]).

Каждое из последующих уравнений ведет себя подобным же образом. Мы видим, что все U' не зависят от z и отличаются от соответствующих значений U только численными множителями. Итак,

$$U'_0=U_0,\quad U'_1=\frac{p+1}{p+\frac{1}{2}}U_1=\frac{-\frac{m}{2}+2}{-\frac{m}{2}+\frac{3}{2}}U_1=\frac{\frac{m}{2}-2}{\frac{m}{2}-\frac{3}{2}}U_1,\ \dots,$$
$$U'_h=\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+h)}{\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{3}{2}\right)\dots\left(p+h-\frac{1}{2}\right)}U_h=$$
$$=\frac{\left(\frac{m}{2}-2\right)\left(\frac{m}{2}-3\right)\dots\left(\frac{m}{2}-h-1\right)}{\left(\frac{m}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{m}{2}-\frac{5}{2}\right)\dots\left(\frac{m}{2}-h-\frac{1}{2}\right)}U_h,\ \dots \tag{61}$$

---

[1]) Это заключение очевидно, если рассмотреть последовательные значения U_h, определяемые из формул (44′).

[2]) См. предыдущее примечание.

Эти выражения остаются справедливыми, пока знаменатель или числитель (в зависимости от четности или нечетности m) не обратятся в нуль вследствие того, что $p+h=0$ или $p+h-{}^1/_2=0$. Они и после этого останутся справедливыми, изменится только значение численного множителя, а именно [1]):

$$\mathfrak{U}'_{p-\frac{1}{2}+h}=U'_h=$$

$$=\frac{\left(m_1-\frac{5}{2}\right)\left(m_1-\frac{7}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}{(m-2)(m-3)\ldots 1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\left(h-m_1+\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\ldots(h-m_1+1)}U_h, \tag{61'}$$

начиная с $h=\frac{1}{2}-p=m_1-1$ для нечетного $m=2m_1-1$, и

$$U'_h=\frac{(m_1-2)(m_1-3)\ldots 1}{\left(m_1-\frac{3}{2}\right)\left(m_1-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 2\ldots(h-m_1+1)}{\frac{1}{2}\cdots\left(h-m_1+\frac{1}{2}\right)}U_h \tag{61''}$$

(при $U_h=\mathfrak{U}_{p+h}$), начиная с $h=-p=m_1-1$ для четного $m=2m_1$.

В книге IV мы получим это заново в более простой и более поучительной форме, установив соотношение не только между коэффициентами U_h, U'_h, но и между самими элементарными решениями.

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ ОБ УРАВНЕНИЯХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Выше мы рассматривали геодезические линии, определяемые уравнениями Гамильтона [2])

$$\dot{x}_i=\frac{dx_i}{ds}=\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i=\frac{dp_i}{ds}=-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_i}, \tag{L}$$

и, в частности, те, которые исходят из определенной точки a $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Общий интеграл уравнений (L), — иначе говоря, геодезическая линия в самой общей форме и ее наиболее общее представление с помощью независимой

---

[1]) Как мы видели ранее, изменение состоит просто в том, что множитель в числителе или знаменателе выражений (61), обращающийся в нуль, заменяется на —1. Остальные множители остаются без изменения.

В правых частях формул (61′) и (61″) соответствующие множители выписаны отдельно.

[2]) Ниже дифференцирование по s обозначается символом Ньютона: $\dot{x}$. Это позволяет нам использовать обычные штрихи для уравнений и неизвестных вспомогательной системы.

переменной s (определяемой с точностью до линейного преобразования) — зависят от $2m$ произвольных постоянных $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2m}$. Что касается геодезических линий, которые исходят из данной точки a, то каждая из них характеризуется значениями $m-1$ параметра $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, так что координаты x являются функциями этих параметров и s.

Мы теперь должны также рассмотреть производные этих функций не только по s, но также по любому λ или μ. Ныне классические [1]) общие теоремы показывают, что частные производные вида

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_m, p'_1, p'_2, \ldots, p'_m$$

существуют [2]), и они на определенной геодезической линии,— иными словами, для определенной системы значений λ или μ — удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений— «уравнениям в вариациях» по терминологии Пуанкаре («вспомогательной системе» Дарбу):

$$\frac{dx'_i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial A'}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp'_i}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A'}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Здесь A' — квадратичная форма относительно x и p, а именно: квадратичная часть в разложении в ряд Тейлора функции

$$A(x_1 + x'_1,\ x_2 + x'_2,\ \ldots,\ x_m + x'_m,\ p_1 + p'_1,\ p_2 + p'_2,\ \ldots,\ p_m + p'_m),$$

по степеням $x'_1, x'_2 \ldots, x'_m, p'_1, p'_2 \ldots, p'_m$. Производные по λ являются решениями этой системы, так что x первоначально равны нулю, поскольку мы ограничиваемся геодезическими линиями, исходящими из общего начала a.

То же самое можно сказать о частных производных высших порядков по λ (или по μ). Если обозначить через x''_i, p''_i производные не первого порядка, а порядка h, например по λ, а именно:

$$x''_i = \frac{\partial^h x_i}{\partial\lambda_1^{h_1}\partial\lambda_2^{h_2}\ldots}, \qquad p''_i = \frac{\partial^h p_i}{\partial\lambda_1^{h_1}\partial\lambda_2^{h_2}\ldots},$$

то эти величины удовлетворяют линейной системе (отличающейся от (L′) только тем, что она неоднородна)

$$\frac{dx''_i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial A'}{\partial p''_i} + X_i, \qquad \frac{dp''_i}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A'}{\partial x''_i} + P_i.$$

Здесь X и P зависят от уже известных производных от x и p, т. е. от производных порядка ниже h, и содержат также коэффициенты A_{ik} и их частные производные до порядка $(h-1)$. Величины x'' по-прежнему равны нулю при $s=0$ (до сих пор шла речь о производных по λ) и, следовательно, являются величинами по крайней мере первого порядка относительно s.

Это не только показывает, что можно говорить об интересующих нас производных, но также позволяет получить — что может оказаться полезным — верхние грани их абсолютных значений, если известны: 1) их начальные значения или по крайней мере соответствующие верхние грани; 2) верхние грани

---

[1]) См., например, Goursat, Cours d'analyse, 2 éd., t. III (1913), гл. XXIII, в особенности п. 462; наши Leçons sur le calcul des variations, пп. 20—22 или наш Cours d'analyse, t. II, n. 243.

[2]) Предполагается, что переменные λ_i выбраны так, что величины p_{0i} зависят от них регулярным образом.

абсолютных значений A_{ik} и их производных до $(h+1)$-го порядка. Для первой системы в вариациях (L′) этот факт есть следствие хорошо известных методов, используемых для доказательства основной теоремы теории дифференциальных уравнений[1]. Для следующей системы (L″) это можно доказать аналогичным образом или, проще, вывести с помощью хорошо известного способа интегрирования линейной неоднородной системы, когда получено решение соответствующей однородной системы.

Из предыдущих замечаний также вытекает, что *точечное преобразование* (п. 57), *которое вводит вместо x нормальные переменные, является регулярным* (на единицу меньшего порядка, чем A_{ik}) *во всей области $\mathfrak{R}$, где оно определено.*

Можно рассмотреть выражения для решений x, p с другой точки зрения. Они зависят не только от соответствующих начальных значений, но также от функций $A_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, которые представляют собой коэффициенты уравнения с частными производными (коэффициенты при членах второго порядка). Можно найти порядок их непрерывности (п. 20′ кн. I) относительно этих A_{ik}.

Из предыдущего следует, что этот порядок равен единице для самих x, p; двум для их первых производных по $\lambda, \ldots, (h+1)$ для их производных порядка h. Построим геодезическую линию, начиная от точки a, для данного уравнения $\mathfrak{F}(u)=0$, коэффициенты которого (при членах второго порядка) равны A_{ik}. Уравнение этой кривой справедливо в интервале $0 \leqslant |s| \leqslant s_0$. Если мы, задавшись произвольным положительным числом s_0', меньшим s_0, и положительным сколь угодно малым числом η, рассмотрим видоизмененные значения наиболее общего вида $A_{ik}+\delta A_{ik}$ такие, что абсолютные значения приращений δA_{ik} и их частных производных первого порядка всюду меньше ε, то величина ε может быть выбрана достаточно малой, чтобы при всяком изменении такого рода величин[2] A_{ik} выполнялось: 1) из a выходит только одна новая геодезическая, имеющая те же величины p_{0i}, что и первоначально, уравнение которой справедливо при $0 \leqslant |s| \leqslant s_0'$; 2) значения x и p для этой новой геодезической отличаются от соответствующих значений первоначальной геодезической на приращение, меньшее чем η. Это сразу же следует из общего доказательства основной теоремы. Соответствующее заключение справедливо для производных от x и p, рассмотренных выше.

---

[1]) Пикар доказал основную теорему в следующей формулировке: «Если в линейной однородной системе

$$\frac{dy_i}{ds} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{iN}y_N \qquad (i=1, 2, \ldots, N)$$

величины a_{ik} по абсолютному значению всюду меньше K и если начальные (при $s=0$) значения функций y все меньше M, то для любого значения s имеем $|y_i| < Me^{NKs}$».

[2]) Само собой разумеется, что, конечно, для первых производных (по самим x и p) от новых коэффициентов A_{ik}, как и от старых, выполняется условие Липшица (принятое в основной теореме).

Книга III
УРАВНЕНИЯ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА I
ВВЕДЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ НОВОГО ВИДА

1. Обсуждение предыдущих результатов

71. Посмотрим теперь, какое применение может найти элементарное решение и как оно связано с функциями, использовавшимися ранее.

Для уравнения (e_2) цилиндрических волн при $\omega = 1$ (что можно положить при соответствующем выборе единиц) элементарное решение таково:

$$\frac{1}{\sqrt{(t_0-t)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(t_0-t)^2-r^2}}. \tag{1}$$

Как мы уже говорили, Вольтерра воспользовался не этой величиной, а следующей:

$$v = \log \frac{t_0 - t + \sqrt{(t_0-t)^2-r^2}}{r}. \tag{2}$$

Эти два выражения просто связаны друг с другом: выражение (2) можно вывести из (1) путем интегрирования по t_0, а именно:

$$v = \int \frac{dt_0}{\sqrt{(t_0-t)^2-r^2}}.$$

С геометрической точки зрения это выражение получается при перемещении вершины характеристического конуса вдоль линии $x = x_0$, $y = y_0$ путем интегрирования в пределах[1]), соответствующих этому перемещению. Нет ничего удивительного в том, что подстановка такой величины в основную формулу дает выражение в виде интеграла $\int u\,(t_0)dt_0$ вдоль той же самой линии.

Как отметил Вольтерра[2]), такая процедура для уравнения $\Delta u = f$ эквивалентна тому, что сначала мы интегрируем, а затем

---

[1]) См. далее п. 73.

[2]) Conférences de Stock. (Hermann, 1912), p. 45.

дифференцируем по z_0 классическую формулу

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right)dS - \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz,$$
$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Это дает

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{1}{4\pi}\iint_S \left(u\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{du}{dn}\right)dS - \frac{1}{4\pi}\iiint \varphi f\,dx\,dy\,dz\right],$$

где

$$\varphi = \log\left[\frac{z-z_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + \sqrt{1 + \frac{(z-z_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right].$$

Иными словами, мы выполнили интегрирование и сразу же вслед за этим дифференцирование. То же самое замечание относится и к обобщению Тедоне (п. 43).

Вольтерра имел веские основания для того, чтобы поступать таким образом. Если бы он подставил в основную формулу непосредственно элементарное решение $v = 1/\sqrt{(t_0 - t)^2 - r^2}$, то получил бы интегралы, не имеющие смысла, в которых подынтегральные величины обращаются в бесконечность непозволительным образом на поверхности характеристического конуса. Это сразу же ясно из вычислений. То же можно заметить, если выполнить эквивалентную операцию дифференцирования в формуле, приведенной в п. 30, а именно (при $\omega = 1$):

$$u(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\mu_{t_0}(u_1) + \frac{\partial}{\partial t_0}\mu_{t_0}(u_0)\right], \tag{1'}$$
$$\mu_{t_0}(f) = \iint \frac{f(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{t_0^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}}.$$

Согласно обычным методам нужно выполнить дифференцирование по t_0 под знаком $\iint$, что повлияет только на знаменатель. С другой стороны, нужно учесть тот факт, что предел интегрирования зависит от t_0, благодаря чему появится дополнительный член, а именно: криволинейный интеграл вдоль окружности. Очевидно, что двойной и криволинейный интегралы лишены смысла: первый благодаря присутствию степенной особенности порядка $^3/_2$ вдоль границы, а второй — потому, что каждый из его элементов является неограниченным. Конечно, можно довольно просто избежать этого неудобства с помощью простых приемов [1]),

[1]) Мы могли бы, например, представить внутреннюю часть круга в полярных координатах r, φ, поместив начало в точку (x_0, y_0), и ввести вместо первой из них вспомогательную переменную λ, определяемую равенством $r = \lambda t_0$. Поскольку теперь интегрирование по λ и φ будет происходить в фиксированных пределах $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, то дифференцирование по t_0 не вызовет особых трудностей.

но они не представляют для нас никакого интереса, потому что, как бы парадоксально это ни казалось, наш метод состоит в том, чтобы не избегать его.

72. Прежде всего, заметим, что можно точно следовать процедуре Вольтерра и Тедоне. Рассмотрим, например, при $m = 3$ уравнение

$$\mathfrak{F}(u) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum_{i=1}^{3} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f.$$

Сопряженное уравнение таково:

$$\mathfrak{G}(v) = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}(A_{ik}v) - \sum \frac{\partial}{\partial x_i}(B_i v) + Cv = 0,$$

а его элементарное решение есть

$$v = V/\sqrt{\Gamma}.$$

Предположим, что точка (a_1, a_2, a_3) описывает произвольный отрезок линии $\mathfrak{C}$, прямой или кривой, на который наложено единственное условие: он лежит целиком внутри характеристического коноида, вершина которого находится в одной из точек отрезка. Рассмотрим интеграл

$$\boldsymbol{v}(x) = \int_{\mathfrak{C}} v(x; a)\,\chi(t)\,dt. \tag{3}$$

Здесь t — параметр, который определяет положение точки (a_1, a_2, a_3) на $\mathfrak{C}$, $\chi(t)$ — произвольная функция. Если исходить из формулы (1), а также считать, что линия $\mathfrak{C}$ параллельна оси t, и взять $\chi(t)$ равным единице, то мы придем к формуле (2). Для других целей (таких, например, как решение задачи Коши для систем) Вольтерра ввел аналогичные выражения, которые получаются из (3), если выбрать иной вид [1]) функции $\chi(t)$.

Видно, что такое выражение, как и (2), имеет логарифмическую особенность. Этот расчет иногда оказывается полезным, и мы поясним его в нескольких словах. Предположим, что в уравнении характеристического коноида

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_m;\ a_1, \ldots, a_m) = 0$$

одна из точек $(x_1, \ldots, x_m)$ или $(a_1, \ldots, a_m)$ лежит вблизи линии

$$\mathfrak{C}\ (a_1 = a_1(t), \ldots, a_m = a_m(t)),$$

в то время как другая движется по самой этой линии.

[1]) Решение Ф, которое Вольтерра построил в своем мемуаре (Acta Mathem., v. XVIII, p. 169) и которое он использует для того, чтобы распространить теорию на системы (такие, которые встречаются в теории упругости), соответствует $\chi(t) = t_0 - t$.

Предположим, что все функции разложимы в ряд Тейлора (по крайней мере до членов некоторого порядка) в окрестности точки

$$a_0\ [a_1^0 = a_1(t_0), \ldots, a_m^0 = a_m(t_0)],$$

что соответствует некоторому значению t_0 параметра, и вновь обратимся к формуле (30) п. 58 для первых членов разложения Г в случае, когда обе точки x и a очень близки друг к другу. При этом оказывается, что в окрестности a_0 разложение $v[x; a(t)]$ по степеням $(x_i - a_i^0)$, $(t - t_0)$ начинается с членов второго порядка. Коэффициент при $(t - t_0)^2$, а именно:

$$N_0 = \boldsymbol{H}\,[a_1'(t_0), a_2'(t_0), \ldots, a_m'(t_0)]$$

отличен от нуля, так как $\mathfrak{C}$ не является касательной к характеристическому конусу [1]). Используя «теорему факторизации» [2])

[1]) Поскольку касательная к линии $\mathfrak{C}$ находится внутри характеристического конуса, величина N_0 будет положительна, если мы запишем наше уравнение так, что $H > 0$ соответствует внутренней части конуса (об этом говорилось ранее).

[2]) Bull. de Férussac, 1831; Excercices d'analyse, t. II; см. Lindelöf, Leçons sur la théorie des residus, note, p. 27; Osgood, Madison Colloquium, 4 conf., n. 1. В последней работе, однако, проводится различие между двумя формами теоремы, которые мы выше считали эквивалентными. Можно, впрочем, не прибегать к теореме факторизации или по крайней мере ограничиться совсем элементарным случаем, относящимся к первой степени: ряд

$$c_1\tau + c_2\tau^2 + \ldots - T = 0$$

при $c_1 \neq 0$ может быть «обращен»

$$\tau - \left(\frac{T}{c_1} + C_2T^2 + \ldots\right) = 0.$$

Очевидно, что отношение левых частей есть ряд по степеням τ, T с постоянным членом, равным c_1. Чтобы убедиться в сказанном выше, разрешим сначала уравнение $\frac{\partial}{\partial t}\Gamma[x; a(t)] = 0$ относительно t, что можно выполнить (поскольку коэффициент при $(t - t_0)$ равен $2N_0$). Это дает $t = \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — ряд по степеням $(x_i - a_i^0)$. Полагая $t - \mathfrak{D} = \tau$, находим

$$\Gamma[x; a(t)] = -K + N_0\tau^2 + \ldots,$$

где K (минимальное значение Г, когда x фиксировано, а a движется вдоль $\mathfrak{C}$) снова есть ряд по степеням $x_i - a_i^0$, начинающийся с квадратичного члена (многоточие означает члены, содержащие τ^3, τ^4 и т. д.). Из добавки к величине $-K$ можно извлечь квадратный корень, что дает

$$\Gamma[x; a(t)] = -K + N_0(\tau + \ldots)^2 =$$
$$= [-\sqrt{K} + \sqrt{N_0}(\tau + \ldots)]\,[+\sqrt{K} + \sqrt{N_0}(\tau + \ldots)].$$

Если мы теперь применим к каждому сомножителю вышеупомянутый принцип обращения ряда, мы найдем, что первый множитель, например, Вейерштрасса и Пуанкаре (или, вернее, Коши) для функции многих переменных, можно написать:

$$\Gamma\,[x;\,a\,(t)] = N\,(x,\,t)\,[(t-\beta)^2-\gamma], \qquad N = N_0 + \ldots,$$

где β и γ — это снова ряды по степеням $(x_1 - \overset{0}{a}_1), (x_2 - \overset{0}{a}_2), \ldots$ $\ldots (x_m - \overset{0}{a}_m)$, причем первый ряд начинается обычно с линейных, а второй с квадратичных членов. Рассмотрим интеграл (3), полагая в данный момент, что $m = 3$, а $v = V/\sqrt{\Gamma}$. Мы можем предположить, что $V\,[x;\,a\,(t)]\chi\,(t)/\sqrt{N\,(x,\,t)}$ разлагается в ряд по степеням $(t-\beta)$, так что

$$\frac{V}{\sqrt{N}} = P_0 + P_1(t-\beta) + \ldots, \qquad \frac{V}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{P_0 + P_1(t-\beta)+\ldots}{\sqrt{(t-\beta)^2-\gamma}},$$

причем P_i — регулярные функции x_i.

Каждый нечетный по $(t-\beta)$ член дает при интегрировании положительную степень $\sqrt{(t-\beta)^2-\gamma}$. Можно тогда ввести в четных по $(t-\beta)$ членах переменную $(t-\beta)^2-\gamma$ вместо $(t-\beta)^2$. Пусть ряд по целым степеням этой новой переменной имеет вид

$$Q_0 + Q_1\,[(t-\beta)^2-\gamma] + Q_2\,[(t-\beta)^2-\gamma]^2 + \ldots$$

Мы видим, что каждый член, за исключением первого, представляет собой конечную величину и даже бесконечно малую в окрестности $\mathfrak{C}$. Первый член, с другой стороны, дает неопределенный интеграл

$$Q_0\int\frac{dt}{\sqrt{(t-\beta)^2-\gamma}} = Q_0\log\left[\frac{t-\beta+\sqrt{(t-\beta)^2-\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\right]. \tag{4}$$

Это выражение, с нашей точки зрения, полностью аналогично выражению (2), причем $\sqrt{\gamma}$ соответствует величине $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ Вольтерра [1]).

пропорционален следующему ряду:

$$\tau - C_1\sqrt{\frac{K}{N_0}} - C_2\frac{K}{N_0} - C_3\left(\frac{K}{N_0}\right)^{\frac{3}{2}} - \ldots = \tau - \mu\sqrt{K} - \nu$$

(где μ, ν — степенные ряды по K). Произведение

$$(\tau - \mu\sqrt{K} - \nu)\,(\tau + \mu\sqrt{K} - \nu) = (\tau-\nu)^2 - \mu^2 K$$

имеет требуемый вид, причем $\mathfrak{D} + \nu = \beta$, $\mu^2 K = \gamma$.

Результатом, приведенным в тексте, и способом использования его мы обязаны мемуару Пуанкаре «Sur les propriétés du potential et sur les functions abéliennes» (Acta Mathem., v. XXII, 1899, p. 114 и сл.).

[1]) С точностью до множителя, голоморфного и отличного от нуля, γ равно минимуму величины Γ, когда точка a описывает кривую $\mathfrak{C}$, а точка x остается фиксированной.

73. Мы ограничились рассмотрением неопределенного интеграла

$$\int v\,(x;\,a)\chi\,(t)dt.$$

Для наших целей, однако, нужно сделать существенное замечание относительно пределов интегрирования.

Если считать их постоянными, так что отрезок интегрирования на $\mathfrak{C}$ абсолютно не будет зависеть от положения точки x, то интеграл (3), полученный таким образом, конечно, будет удовлетворять данному уравнению при любых значениях этих постоянных. Причины этого те же, что и в классической теории потенциала (дифференцирование по x каждый раз может быть выполнено под знаком $\int$; при этом t рассматривается как постоянная).

Насколько нам известно, Дарбу [1]) был первым, кто открыл заслуживающий внимания факт, частные случаи которого уже встречались в предыдущих формулах. Факт этот состоит в том, что данное свойство функции v остается справедливым и для переменных пределов интегрирования, выбранных подходящим образом. Можно считать, что это замечание Дарбу содержит некоторый принцип, который будет основой для наших последующих расчетов. Его рассуждение замечательно просто и в наших обозначениях может быть проведено следующим образом.

Интегрируя сначала вдоль фиксированной дуги $\mathfrak{C}$, мы видим, что Г может изменить знак вдоль этой дуги. Так будет, в частности, в том случае, когда по крайней мере одна из полостей характеристического коноида с вершиной в точке x пересекает $\mathfrak{C}$ внутри рассматриваемой дуги. Предположим, например (рис. 11), что это выполняется для одной из полостей — прямой. Отрезок интегрирования, который соответствует, например, $t_1 \leqslant t \leqslant t_0$, делится в точке пересечения a на две части. Одна из них лежит

---

[1]) См. Leçons sur la théorie des surfaces, t. II, p. 67. Дарбу оперирует с интегралом

$$\int \varphi\,(u)\,(u-x)^{\mu}\,(y-u)^{\mu'}\,du,$$

который при постоянных пределах интегрирования является функцией x и y и удовлетворяет уравнению с частными производными Эйлера — Пуассона. Предполагается, что x и y одновременно заключены между пределами интегрирования. На нашей фигуре это соответствует случаю, когда обе полости характеристического коноида с вершиной в точке u пересекают линию $\mathfrak{C}$ внутри первоначального (фиксированного) отрезка интегрирования, причем используемая часть интеграла относится к части линии $\mathfrak{C}$, лежащей вне коноида. Относительно постоянных μ и μ' Дарбу замечает, что проводимое рассуждение справедливо всегда, когда значения их — дроби вида $\dfrac{2p+1}{2q}$ (p и q — целые числа).

вне коноида, другая — внутри него. Предположим, что последняя соответствует большим значениям t, т. е. содержит верхний предел t_0. Тогда, если θ есть значение t, которое соответствует точке a, то интеграл, в котором, само собой разумеется, V и χ являются действительными величинами, будет состоять из двух частей: мнимой v_1 и действительной v_2. Ясно, следовательно, что каждая из них в отдельности есть решение заданного уравнения.

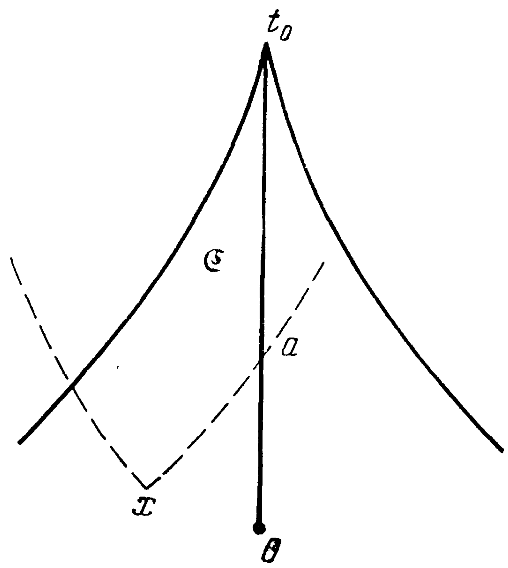

Рис. 11.

Таково общее заключение Дарбу. Понятно, что вместо интегрирования от 0 до t_0 можно взять один из пределов равным θ. Эта величина в обозначениях предыдущего пункта равна

$$\beta + \sqrt{\gamma}.$$

Таковы, к примеру, пределы, в которых нужно проинтегрировать формулу (1), чтобы получить величину (2) Вольтерра (при этом θ равно $t + r$). С другой стороны, t можно заменить на t_0, и неопределенный интеграл, вычисленный в предыдущем пункте, станет определенным интегралом и даст значение (3), если определить его так, как было сказано выше. Естественно, это выражение для решения дифференциального уравнения справедливо только тогда, когда θ меньше, чем t_0, т. е. когда x находится внутри обратного полуконоида с вершиной в точке $t = t_0$.

Это решение, как мы только что доказали, имеет на $\mathfrak{C}$ логарифмическую особенность. Можно видеть, что если подставить его в основную формулу, то полученное выражение будет играть ту же роль, что и выражение (2) в методе Вольтерра (при этом малый цилиндр Вольтерра[1]) нужно заменить поверхностью трубки, окружающей $\mathfrak{C}$). Это даст значение интеграла

$$\int_{\mathfrak{C}} \chi(t)\, u\,[a(t)]\, dt.$$

74. В аналогичных случаях для точки x удобно ввести специальную систему криволинейных координат. Одна из них — уже использовавшаяся величина θ. Зададим значение θ. Пусть вершина характеристического коноида находится в точке ω, соответствующей значению $t = \theta$ на линии $\mathfrak{C}$. Место точки x на характеристическом полуконоиде будет полностью определено, если

[1]) Acta Mathem., v. XVIII, p. 174.

заданы: 1) параметр [1]) λ, определяющий начальное направление одной из бихарактеристик, которые являются образующими коноида; 2) значение s, определяющее точку на этой бихарактеристике.

В величину s входит (см. кн. II) произвольный множитель пропорциональности (α в обозначениях п. 57). Можно выбрать этот множитель так, чтобы для каждого значения λ выполнялось следующее:

a) на рассматриваемом полуконоиде (обратном) с вершиной в точке ω величина s положительна;

b) начальные значения, т. е. (значения в вершине) $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$, $\frac{dx_3}{ds}$ на каждой бихарактеристике (λ) являются регулярными функциями θ и λ;

c) эти три величины не обращаются одновременно в нуль, и сумма их квадратов больше некоторого заданного положительного числа, какими бы ни были θ и λ.

При выполнении этих гипотез можно принять θ, λ и s за криволинейные координаты; при этом x_1, x_2, x_3 будут регулярными и голоморфными функциями θ, λ и s. Обратное заключение будет справедливо, если только мы не находимся в непосредственной близости от $\mathfrak{C}$.

75. Пусть a — точка на кривой $\mathfrak{C}$, соответствующая значениям t, большим θ, тогда величина $\Gamma\,(x;\,a)$ будет иметь форму

$$\Gamma = (t-\theta)\, w\,(\theta, \lambda, s, t), \tag{5}$$

где функция $w > 0$ регулярна и отлична от нуля, когда точка x приближается к точке коноида, не совпадающей с вершиной a (если полуконоид, в котором берется величина w, содержит направление, соответствующее возрастанию t вдоль $\mathfrak{C}$, то знак первого множителя нужно изменить на обратный).

В окрестности вершины это выражение теряет смысл и вместо него нужно взять следующее выражение:

$$\Gamma = 2Ms\tau + N\tau^2.$$

Здесь через τ обозначена разность $\tau = t - \theta$, а M и N — две регулярные функции, принимающие в точке $x = a$ значения

$$M_0 = \frac{1}{2}\sum_i \xi_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}, \qquad N_0 = H\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

где α_i и ξ_i равны

$$\alpha_i = \frac{da_i}{dt}, \qquad \xi_i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_{s=0} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

[1]) Мы рассматриваем случай $m = 3$. Аналогичные расчеты справедливы для всех нечетных значений m.

Величины M_0 и N_0 не только отличны от нуля, но также положительны (N_0 — вследствие нашей гипотезы о знаке $\boldsymbol{H}$, о чем было сказано ранее; M_0 — вследствие нашей гипотезы а) о знаке [1]) s на полуконоиде).

Принимая во внимание, что второй член представляет собой $\Gamma(\omega; a)$, а первый есть разность $\Gamma(x; a) - \Gamma(\omega; a)$, мы сразу же получаем вышеприведенную формулу. Ясно также, что можно считать величину N не зависящей от s и от λ. Это заключение, конечно, несправедливо для M, но можно предположить, что начальное значение M_0 не зависит от λ и является функцией только θ при соответствующем выборе множителя пропорциональности для s (это не противоречит нашим предыдущим гипотезам а), b), с)). Итак, при малых значениях s приближенно выполняется

$$x_i = a_i + s\frac{dx_i}{ds} = a_i + s\xi_i.$$

Геометрически это означает, что при таких значениях s направления касательных к обеим координатным линиям, которые соответствуют изменению только одного θ или только одного λ, являются конормальными друг к другу, т. е. сопряженными относительно характеристического коноида. Таким образом, если это малое значение s остается постоянным, а меняется только θ или только λ, то соответствующая точка опишет небольшой эллипс, плоскость которого конормальна к $\mathfrak{C}$.

Вычислив таким образом Γ, получим

$$v = \int_0^{t_0-\theta} \frac{\chi(\theta+\tau) V(\theta, \lambda, s, \theta+\tau)}{\sqrt{2Ms\tau + N\tau^2}}\,d\tau,$$

где V есть голоморфная функция, равная $1/\sqrt{\Delta}$ при $s = \tau = 0$. Что касается функции $\chi(t)$, то мы предполагаем, что она регулярна и не меняет знака. Пусть, например, $\chi(t) > 0$ в окрестности определенной точки A ($t = \theta_0$) на кривой $\mathfrak{C}$, которую мы, в частности, рассмотрим.

Возьмем точку x вблизи точки A. Попытаемся найти асимптотические значения v и производных $\frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial \lambda}$, $\frac{dv}{ds}$. Начнем с последней величины. Имеем

$$\frac{dv}{ds} = -\int_0^{t_0-\theta} \frac{\chi V\left(M + s\frac{dM}{ds}\right)\tau\,d\tau}{(2Ms\tau + N\tau^2)^{3/2}} + \int_0^{t_0-\theta} \frac{\chi\frac{dV}{ds}\,d\tau}{\sqrt{2Ms\tau + N\tau^2}}. \qquad (6)$$

[1]) В самом деле, точка x должна находиться внутри коноида с вершиной в точке a и, следовательно, Γ положительно, когда обе величины s и τ положительны (последняя при этом достаточно мала).

Первый член этого выражения вносит, очевидно, основной вклад. Из A как из центра можно описать небольшую сферу такую, что она содержит внутри себя точки x и a. Величины M, N χ и V можно заменить с малой ошибкой значениями M_0, N_0, $\chi = \chi(\theta_0)$, $1/\sqrt{\Delta_A}$, которые они принимают в точке A. Если обозначить через τ_1 положительное значение τ, при котором эта сферическая поверхность пересекает $\mathfrak{C}$, то интеграл от τ_1 до $t_0 - \theta$ остается конечным и непрерывным, когда s стремится к нулю. Интеграл от нуля до τ_1, в котором подынтегральное выражение положительно, можно с очень небольшой относительной ошибкой представить в виде

$$\frac{M_0}{\sqrt{\Delta}}\chi(\theta)\int_0^{\tau_1}\frac{\tau\, d\tau}{(2M_0 s\tau + N_0\tau^2)^{3/2}} = -\frac{\chi}{s\sqrt{\Delta}}\sqrt{\frac{\tau_1}{2M_0 s + N_0\tau_1}}\,.$$

Так как τ_1 фиксировано, то при s, стремящемся к нулю, мы получим

$$\frac{dv}{ds} \sim -\frac{\chi}{s\sqrt{N_0\Delta}}\,, \tag{6'}$$

причем знак $\sim$ означает асимптотическое равенство.

Аналогичный метод дает приближенное значение $\boldsymbol{v}$. Его, однако, можно легко найти, интегрируя предыдущее асимптотическое равенство, что дает

$$\boldsymbol{v} \sim \frac{-\chi}{\sqrt{N_0\Delta}}\log s. \tag{6''}$$

Легко видеть, что это значение согласуется с результатом п. 72. Очевидно, что аналогичные вычисления можно произвести для второго члена (6).

Точно так же можно получить асимптотические выражения для других производных.

Исследуем особенность $\boldsymbol{v}$ на полуконоиде с вершиной в точке $t = t_0$. Легко найти, как будет вести себя $\boldsymbol{v}$, когда x приближается к определенной точке полуконоида, не совпадающей с вершиной. Мы имеем

$$\Gamma = (t - \theta)\, w,$$

где w есть голоморфная функция, отличная от нуля даже тогда, когда θ и t приближенно равны друг другу. Это дает

$$\boldsymbol{v} = \int_\theta^{t_0}\chi(t)\, v(x;\, a)\, dt = \int_\theta^{t_0}\frac{W\, dt}{\sqrt{t-\theta}}\,,$$

где $W = \dfrac{V\chi(t)}{\sqrt{w}}$ — опять-таки голоморфная функция. Это выражение приближенно равно

$$2W_0\sqrt{t_0 - \theta},$$

где W_0 — значение W в предельной точке x. Производные $\boldsymbol{v}$ по λ или s имеют, очевидно, совершенно аналогичную форму.

76. Таким образом, аналогия между v и величиной (2) Вольтерра совершенно очевидна. Посмотрим, какие из этого можно сделать выводы для нашей задачи интегрирования уравнения.

Пусть в трехмерном пространстве имеется поверхность S, в каждой точке которой известны данные Коши. Считаем, что эта поверхность пространственного типа относительно характеристических коноидов (п. 27). Пусть a — точка, в которой нужно найти значение решения u заданного уравнения

$$\mathfrak{F}(u) = f \qquad \text{(E)}$$

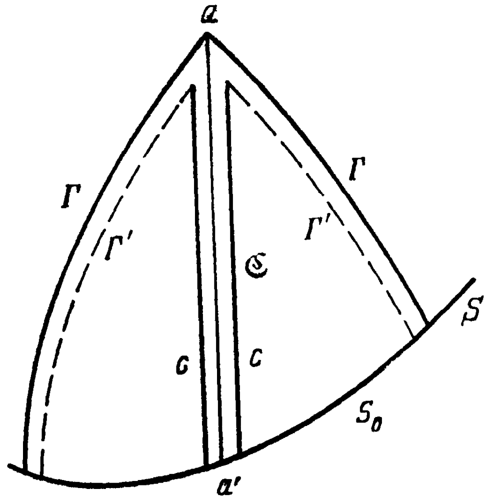

Рис. 12.

с начальными данными на S. Из a как из вершины проведем полуконоид Γ, который вместе с поверхностью S ограничит определенный объем (рис. 12). Проведем внутри Γ из той же точки в точку a' поверхности S произвольную линию $\mathfrak{C}$ (на которую налагается, как и выше, единственное условие: она должна находиться внутри любого коноида, вершина которого лежит в одной из ее точек). Данная точка a соответствует значению t_0 параметра. При помощи v и произвольной функции $\chi(t)$ строим функцию $v(x)$, представляющую собой решение уравнения $\mathfrak{G}(v) = 0$. Затем подставляем v и неизвестную функцию u в основную формулу

$$\iiint [v\mathfrak{F}(u) - u\mathfrak{G}(v)]\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iint \left(u \frac{dv}{d\nu} - v \frac{du}{d\nu}\, Luv\right) dS. \qquad \text{(F)}$$

Выполнить интегрирование сразу во всей области T не удастся. Вначале нужно исключить особенности v, т. е. линию $\mathfrak{C}$ и, прежде всего, поверхность коноида Γ. Легко, однако, понять, что это последняя не оказывает никакого влияния на результат. Действительно, заменим коноид близким коноидом Γ′, вершина которого лежит в точке $t = t_0'$ на $\mathfrak{C}$. Известно, что на поверхности Γ′ величина Γ имеет порядок $(t_0 - t_0')$. То же самое справедливо для величины $\frac{d\Gamma}{d\nu}$, потому что конормальное направление к Γ′ есть, как известно, направление бихарактеристики, а $\frac{d}{d\nu}$ есть производная по s. Следовательно, устремляя t_0' к t_0, мы можем взять Γ в качестве границы нашей области интегрирования. Кроме того, как и в методе Вольтерра, которому мы строго следуем, мы не должны вводить никаких членов, соответствующих интегрированию по поверхности.

77. Рассмотрим теперь особенность на линии $\mathfrak{C}$, которую мы должны исключить из T. Для этого возьмем трубку C малого сечения (соответствующую цилиндру Вольтерра), уравнение которой получим, приравнивая криволинейную координату s очень малой положительной постоянной. Двойной интеграл в правой части формулы (F) нужно взять по поверхности именно этой трубки.

Можно пренебречь членами, которые имеют множителем только $\boldsymbol{v}$, поскольку эта величина обращается в бесконечность как $\log s$, в то время как элемент поверхности имеет порядок s. Вычислим теперь $d\boldsymbol{v}/d\nu$. Величины π_i на C равны

$$\pi_1\, dS = \left(\frac{\partial x_2}{\partial \lambda}\frac{\partial x_3}{\partial \theta} - \frac{\partial x_3}{\partial \lambda}\frac{\partial x_2}{\partial \theta}\right) d\lambda\, d\theta, \qquad \pi_2\, dS = \ldots$$

с точностью до знака (или, что то же самое, с точностью до соответствующей перестановки величин x_i). Знак в этих формулах можно получить, если заметить, что направление возрастания s на каждой бихарактеристике обращено внутрь области интегрирования. Таким образом, если записать вышеприведенные величины в виде

$$\pi_1 \frac{\partial x_1}{\partial s} + \pi_2 \frac{\partial x_2}{\partial s} + \pi_3 \frac{\partial x_3}{\partial s},$$

т. е. в виде детерминанта (якобиана x_1, x_2, x_3 по s, λ, θ)

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial s} & \frac{\partial x_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

то он должен быть положителен (с геометрической точки зрения трехгранник положительных направлений s, λ, θ образует правую тройку). Предположим, что это имеет место (чего можно достичь перестановкой x_i или изменением знака λ, если это необходимо). Обозначим через φ_1, φ_2, φ_3 частные производные произвольной функции φ. Тогда вследствие того, что $x_i = \alpha_i + s\xi_i$, конормальная производная φ вдоль C дается формулой (п. 38—40)

$$\frac{d\varphi}{d\nu} dS = \frac{1}{2}\sum_i \pi_i\, dS \frac{\partial A}{\partial \varphi_i} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \end{vmatrix} d\lambda\, d\theta =$$

$$= (\text{приближенно})\ s \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varphi_1} & \xi_1' & \alpha_1 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varphi_2} & \xi_2' & \alpha_2 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varphi_3} & \xi_3' & \alpha_3 \end{vmatrix} d\lambda\, d\theta$$

где $\xi_i' = \frac{\partial \xi_i}{\partial \lambda}$. Для детерминанта, являющегося множителем при $d\lambda d\theta$, можно использовать сокращенное обозначение

$$s\left|\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varphi_i} \quad \xi_i' \quad \alpha_i\right|. \tag{7}$$

Можно убедиться в том, что коэффициенты $\frac{\partial A}{\partial \varphi_i}$ являются голоморфными функциями θ, λ, s, содержащими s в качестве множителя. Значение выражения (7) легко можно найти, умножив его на дискриминант формы $\boldsymbol{H}$

$$\frac{1}{\Delta} = |H_{i1}H_{i2}H_{i3}|.$$

Если принять во внимание, что три соотношения $\psi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varphi_i}$ эквивалентны $\varphi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \psi_i}$, то это дает

$$s\left|\varphi_i \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \xi_i} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \alpha_i}\right|.$$

Умножим, наконец, его на предыдущий якобиан j. Это даст

$$s\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ 0 & s\boldsymbol{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3') & * \\ M_0 & * & N_0 \end{vmatrix}.$$

Элементы, вместо которых стоит знак $*$, приближенно равны sM_0'. Следовательно, они, во всяком случае, имеют порядок s. Если сделать предположение[1]), что M_0 не зависит от λ, то они будут иметь порядок s^2. Вышеприведенный детерминант содержит, таким образом, s в качестве множителя, и выражение (7) при малых s приближенно равно

$$s^2\frac{\Delta}{j}\boldsymbol{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3')\left(N_0\frac{\partial \varphi}{\partial s} - M_0\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right).$$

Детерминант j, который в нашем случае положителен, приближенно равен

$$j \sim s\,|\,\xi_i, \ \xi_i' \ \alpha_i\,|,$$

так что

$$\iint_c u\frac{dv}{dv}\,ds = \iint_c \frac{us\Delta \boldsymbol{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3')}{\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}}\left[(N_0 + \ldots)\frac{\partial v}{\partial s} - \right.$$

$$\left. - (M_0 + \ldots)\frac{\partial v}{\partial \theta} + (\ldots)\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right] d\lambda\, d\theta$$

---

[1]) Когда это предположение выполняется, направление λ приближенно совпадает с конормалью к плоскости направлений θ и s.

(где многоточием обозначены члены более высокого порядка по s).

Можно исключить $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ $\left(\text{а также} \frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)$ в интеграле по θ от соответствующего члена $\left(\text{т. е. в} \iint P \frac{\partial v}{\partial \theta} d\lambda\, d\theta\right)$: интегрирование по частям дает однократный интеграл $\left(\int Pv d\lambda \text{ при } \theta = t_1,\ t_0\right)$ и двойной интеграл, содержащий v, а именно, $\iint v \frac{\partial P}{\partial \theta}\, d\lambda\, d\theta$. Оба они, как и ранее, являются бесконечно малыми по s. Наконец, учитывая (6′), видим, что нужно проинтегрировать по θ произведение интеграла

$$\int \frac{\boldsymbol{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3')}{l}\, d\lambda = \int \frac{\boldsymbol{H}(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \end{vmatrix}} \tag{8}$$

на величину

$$-u\chi \sqrt{N_0 \Delta}. \tag{9}$$

Интеграл вида (8), взятый вдоль конического сечения

$$\boldsymbol{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

которое описывает точка с координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3, очевидно, конечен, если точка $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ лежит внутри этого сечения, что имеет место в данном случае. Значение интеграла можно найти, заметив, что подынтегральное выражение не меняется, если умножить ξ_1, ξ_2, ξ_3 на произвольный общий множитель (постоянный или зависящий от λ), кроме того, эта величина умножается на $\mathfrak{R}^{-1}$, когда переменные ξ (и, следовательно, a) подвергаются линейным преобразованиям, детерминант которых равен $\mathfrak{R}$. Так как с помощью этой операции форму $\boldsymbol{H}$ можно привести к виду $\bar{\xi}_3^2 - \bar{\xi}_1^2 - \bar{\xi}_2^2$ (где через $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$ обозначены новые переменные) и положить $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_3 \cos\lambda$, $\bar{\xi}_2 = \bar{\xi}_3 \sin\lambda$ (при этом детерминант $\mathfrak{R}$ равен $\sqrt{\Delta}$), то вышеприведенный интеграл равен

$$\pm \frac{1}{\mathfrak{R}} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_1 \cos\lambda - \alpha_2 \sin\lambda} = \pm \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}_3^2 - \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2}} =$$

$$= \pm 2\pi \frac{1}{\sqrt{\Delta \boldsymbol{H}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}} = \pm 2\pi \sqrt{\frac{1}{\Delta N_0}}. \tag{8′}$$

Знак зависит от направления обхода конического сечения. В настоящем случае, как мы уже видели, это направление таково, что детерминант в знаменателе формулы (8) положителен. Так как точка (ξ_1', ξ_2', ξ_3') принадлежит внешней области коноида, а именно, той, в которой $\boldsymbol{H}(\xi_1', \xi_2', \xi_3') < 0$, то нужно взять знак

«—». Множитель $\sqrt{N_0\Delta}$, входящий в выражение (9), исчезает вследствие (8′), и интегрирование по θ окончательно дает

$$\iint u \frac{dv}{d\nu} dS = 2\pi \int_{\mathfrak{C}} \chi(t)\, u\,[a(t)]\, dt.$$

Поскольку $\mathfrak{F}(u) = f$ и $\mathfrak{G}(v) = 0$, то основная формула принимает вид

$$2\pi \int_{\mathfrak{C}} \chi(t)\, u\,[a(t)]\, dt = \iiint_T vf\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \\ + \iint_{S_0} \left(v \frac{du}{d\nu} - u \frac{dv}{d\nu} + Luv\right) dS. \quad (10)$$

Этот результат точно соответствует результату Вольтерра и на него, очевидно, наложены ограничения, приведенные ранее.

78. Случай большего числа независимых переменных. Мы уже говорили, что теория уравнений (e_2) и (e_3) была распространена Тедоне на аналогичные уравнения с m независимыми переменными. Так же, как и для уравнений (e_2) и (e_3), формулы, данные Тедоне (Annali di Mat., 3 ser., v. 1, 1898) для интегрирования уравнения

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2}\right) = 0, \quad (e_{m-1})$$

не дают непосредственно значения u_a, а дают лишь интеграл, имеющий форму

$$\int_{t_1}^{t_0} u\,(a_1, \ldots, a_m, t)\,(t_0 - t)^{m-3}\, dt. \quad (10')$$

Отсюда можно получить u_a при помощи (m — 2)-кратного дифференцирования.

Можно предположить, что выражения (аналогичные величинам (2) Вольтерра), введенные Тедоне в его расчетах для нечетного m, выводятся из элементарного решения с помощью конечного числа интегрирований вдоль линии, аналогичной $\mathfrak{C}$ (которая может быть параллельна оси t). Далее мы увидим, что так оно и есть. Дело, однако, заключается в том, что для этого необходимо ввести несобственные интегралы, которые будут определены ниже.

Прежде всего нужно отметить замечательную особенность решений Тедоне. Если рассмотреть формулу Пуассона для волн в трехмерном пространстве (формула (P) книги II), то сразу же видно, что нужно находить производные по крайней мере по радиусу от заданных значений функции u_0. Таким образом, необходимо считать, что эта функция имеет первые производные для таких приращений, т. е. по любому направлению, поскольку точка (x_0, y_0, z_0) является произвольной. Мы вскоре увидим, что существование таких производных неявно предполагается в формуле (P′) (книга II), относящейся к цилиндрическим волнам. Очевидно, мы можем считать это предположение вполне естественным, поскольку, если не существуют первые или даже вторые производные, то можно сказать, что само дифференцальное уравнение не имеет смысла (хотя задачи, содержащие такие очевидные противоречия, часто исследуются [1]) аналитиками).

Если теперь заняться решениями Тедоне для больших значений m, то мы увидим, что они выражаются через производные порядка $m/2 - 1$ для четного m и порядка $m/2 - \frac{3}{2}$ для нечетного m, т. е. через производные сколь угодно высокого порядка, если число независимых переменных достаточно велико.

Что будет, если функции u_0 и u не имеют производных нужного порядка? Следует ожидать, что *решения задачи Коши* в этом случае *не существует*.

Чтобы доказать это со всей строгостью, мы будем исходить не из окончательных формул (на которые мы ссылались выше), дающих само решение u, а из промежуточных формул, которые (как только что было объяснено) дают значение величины (10′).

Известно, что эта величина имеет по крайней мере $m - 2$ производных, причем $(m - 2)$-я с точностью до численного множителя равна $u(t_0)$. Чтобы это удовлетворялось, достаточно потребовать ограниченности и непрерывности u. Ясно также, что должны быть возможными все операции дифференцирования, выполненные Тедоне над правыми частями рассматриваемых формул (формулы (11), (12) его мемуара), которые используются для получения последующих формул (13)—(24).

Возьмем в качестве S гиперплоскость [2]) $t = 0$ (так что в выражении (10) $t = 0$) и учтем только первую заданную функцию u_0, положив вторую u_1 равной нулю. Рассмотрим случай четного [3]) m (чтобы избежать трудностей, которые встретятся далее).

Тогда, если обозначить через r расстояние

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_{m-1} - a_{m-1})^2}$$

между точкой $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ многообразия $t = 0$ и точкой $(a_1, \ldots, a_{m-1})$, то величина, которую нужно дифференцировать, в наших обозначениях [4]), будет равна (при $\omega = 1$) произведению

[1]) Такова задача Дирихле для дифференциального уравнения второго порядка, которую тем не менее аналитики пытаются решить, даже не предполагая существования первой производной данных Коши на границе. Конечно, дифференциальное уравнение теряет всякий смысл на самой границе, но предполагается, что оно справедливо в любой сколь угодно малой окрестности этой границы.

[2]) Сам Тедоне рассматривает поверхность S произвольной формы.

[3]) Соответствующее заключение для нечетного m вытекает отсюда, если применить метод спуска (см. кн. IV).

[4]) См. формулу (22) Тедоне (стр. 13). В обозначениях Тедоне m есть $m - 1$, а φ есть u_0. Число p у него равно $m/2 - 1$ (для четного m).

численного множителя на интеграл

$$\int_0^{t_0} (t_0^2 - r^2)^{\frac{m}{2}-2} r M_r \, dr, \tag{11}$$

где M_r представляет собой среднее значение u_0 вдоль ребра (кн. I, п. 2, примечание) пересечения гиперсферы радиуса r с гиперплоскостью S. Первые ($m/2$ — 2) операций дифференцирования можно выполнить под знаком $\int$. Результат, полученный таким способом, имеет форму

$$\int_0^{t_0} r X (t_0, r) M_r \, dr, \tag{11'}$$

где X (t_0, r) есть однородный [1] многочлен степени $m/2 - 2$ по t_0. Величина r такова, что ξ (t) $= tX$ (t, t) не обращается в нуль (за исключением случая $t = 0$), и последующие $m/2$ производных выражения (11) не могут существовать, если [2] не существует $m/2$—1 первых производных от M_r.

2. Конечная часть однократного расходящегося интеграла

79. Вследствие предыдущих соображений можно сказать, что по крайней мере для $m = 3$ решение Вольтерра полностью применимо к самому общему нормальному гиперболическому уравнению. Нужно только отметить косвенный характер этого реше-

[1] С точностью для численного множителя X (t, 1) равно полиному Лежандра порядка $m/2 - 2$.

[2] Можно непосредственно убедиться в том, что первая производная выражения (11′) равна

$$M_{t_0} \xi (t_0) + \int_0^{t_0} M_r r \frac{\partial X}{\partial t_0} dr.$$

Второй член можно, конечно, снова продифференцировать. Этого нельзя сказать про все выражение, если заключение несправедливо для M_{t_0}.

Если допустить, что величина M' существует, то вторая производная выражения (11′) будет включать в себя член ξ $(t_0) M'_{t_0}$, член, содержащий M_{t_0}. и интегральный член. Если мы попытаемся найти третью производную, то это можно сделать для всех членов, кроме ξ $(t_0) M'_{t_0}$, так что необходимо существование величины M''_{t_0}; и так далее для всех производных, что доказывает заключение, даваемое в тексте.

Так как под знаком $\int$ степень коэффициента при M_r уменьшается на единицу после каждой операции, производная порядка ($m/2$ — 1) не содержит такого интегрального члена, и, следовательно, выражается интегралом $\int$ по сферическому ребру радиуса $r = t_0$, как это имеет место для уравнения (e_3). Мы вернемся к этой существенной разнице между четными и нечетными значениями m.

ния, основанного на введении произвольной кривой $\mathfrak{C}$, которая, конечно, должна быть исключена по окончании расчета. Если, к примеру, мы хотим найти решение уравнения цилиндрических волн

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - Ku = 0,$$

то нужно взять (как это следует из выражения для элементарного решения, найденного в книге II) функцию v, равную

$$v = \int \frac{\operatorname{ch} \sqrt{K[(t-t_0)^2 - r^2]}}{\sqrt{(t-t_0)^2 - r^2}}\, dt_0. \tag{12}$$

Это как раз то самое выражение, которое ввел Кулон в своих вычислениях (см. Thèse), чтобы точно следовать методу Вольтерра. Его сложность позволяет хорошо понять, почему его нельзя было угадать, когда не был известен общий метод. В то же самое время ясно, что эта сложность целиком связана с квадратурой, которая в конечном итоге никак не влияет на результат.

Можно ли получить требуемый результат, не прибегая к этой процедуре, ненужной с точки зрения окончательного вида решения? Может быть, стоит попытаться найти другой выход из положения, хотя сделать это можно только в том случае, если ввести довольно парадоксальное понятие, о котором еще предстоит сказать.

80. Применим дифференцирование, которым мы только что занимались, или, проще, соответствующую операцию к однократным интегралам. Будем исходить из интеграла

$$\int_a^b \frac{A(x)}{\sqrt{b-x}}\, dx. \tag{13}$$

Мы уже отмечали, что для дифференцирования его по b нужно воспользоваться соответствующей заменой переменных (которую легко, впрочем, найти), так как непосредственное дифференцирование невозможно. Действительно, выполнив его, мы вынуждены написать выражение, не имеющее смысла:

$$-\frac{1}{2}\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{3/2}} + \left[\frac{A(x)}{\sqrt{b-x}}\right]_{x=b}, \tag{13'}$$

т. е. сумму двух членов, из которых первый не имеет смысла, поскольку он имеет степенную особенность порядка 3/2 под знаком интеграла, а второй, очевидно, вообще лишен всякого смысла.

Тем не менее существует способ выполнить это дифференцирование непосредственно (т. е. без замены переменных). Он состоит в том, что действительный интеграл (13) заменяется половиной комплексного интеграла, взятого вдоль линии, состоящей из двух отрезков ab, соединенных небольшой дугой окружности вокруг точки b (рис. 13). Для такого контура дифференцирование легко выполняется[1].

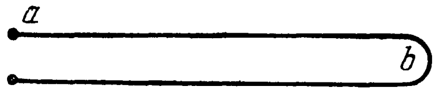

Рис. 13.

80′. Очевидно, должен существовать способ, с помощью которого можно достичь той же самой цели и без введения комплексных величин. Действительно, достаточно заметить, заменив b на x в верхнем пределе, что при x, стремящемся к b, существует совершенно определенный предел, но не интеграла

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{3/2}}\,dx, \tag{14}$$

а алгебраической суммы

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{3/2}}\,dx - 2\frac{A(x)}{\sqrt{b-x}}.$$

Кроме того, это же справедливо для выражения

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{3/2}}\,dx + \frac{B(x)}{\sqrt{b-x}}, \tag{15}$$

где B — любая функция x при условии, что она дифференцируема (или по крайней мере удовлетворяет условию Липшица: $|B(x_2) - B(x_1)| < K\,|x_2 - x_1|$) — и такая, что $B(b) = -2A(b)$.

Кроме того, *полученный результат не зависит от выбора этой функции* B, удовлетворяющей предыдущим условиям. Это следует из того факта, что знаменатель имеет степенную особенность дробного порядка, в то время как изменение функции B (при наших предположениях) вводит в числитель члены, содержащие множитель $(b - x)$ по крайней мере в первой степени, так что соответствующие члены дроби с необходимостью обращаются в нуль при $x = b$. Следовательно, чтобы вычислить предел выражения (15), нет необходимости указывать конкретный вид функции B. Назовем этот предел «конечной частью» интеграла* (13′) и запишем

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{3/2}}\,dx.}\right. \tag{16}$$

Знак $\left|\overline{}\right.$ означает «конечная часть». В соответствии с предыдущим это выражение обозначает предел суммы интеграла (14) и добавоч-

[1] Здесь предполагается, что A аналитично. От этой гипотезы легко избавиться, ограничившись предположением, что A имеет производную.

ного члена вида $B(x)/\sqrt{b-x}$, содержащего дробную степень $(b-x)$. В качестве B берется любая функция такая, что:

а) она дифференцируема по крайней мере один раз (или удовлетворяет условию Липшица);

в) рассматриваемая сумма имеет предел (значение этого предела не зависит от выбора добавочного члена, если B удовлетворяет вышеупомянутым условиям).

Предыдущее определение предполагает, что само A удовлетворяет условию Липшица.

Если A есть аналитическая функция, то можно определить выражение (16) как половину соответствующего интеграла, взятого вдоль контура, упоминавшегося выше.

81. Не вызывает никаких затруднений введение того же самого символа для расходящихся интегралов, подынтегральное выражение в которых имеет степенную особенность более высокого порядка при условии, что этот порядок дробный. Интеграл

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}}\,dx$$

при целом p не имеет никакого смысла, но можно определить величину

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}}\,dx}\right. \tag{16'}$$

(«конечную часть» рассматриваемого интеграла):

1) как половину соответствующего интеграла вдоль контура ab, если A — аналитическая функция;

2) как предел при $x \to b$ суммы

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}}\,dx + \frac{B(x)}{(b-x)^{p-\frac{1}{2}}}, \tag{15'}$$

если просто предположить, что A имеет p производных в окрестности b. Здесь $B(x)$ — любая функция, на которую налагаются два условия:

а) рассматриваемый предел существует;

b) B имеет по крайней мере p производных в окрестности точки $x = b$.

Можно проверить непосредственными вычислениями, что оба определения совпадают друг с другом (см. ниже).

Произвольный выбор B никак не влияет на значение получаемого предела: условие а) определяет значения $(p-1)$ первых производных от B в точке b, так что произвольный добавочный член в числителе есть бесконечно малая величина, по меньшей мере порядка $(b - x)^p$.

Можно сказать кратко — смысл этого, надеемся, ясен из предыдущих объяснений, — что интегралу придают определенное значение, отбрасывая члены, имеющие степенную особенность дробного порядка в точке b.

Не следует, однако, забывать, что само A, по предположению, имеет соответствующие производные в точке b.

82. Можно, конечно, ввести то же самое понятие для интеграла

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\mu}}}\right.,$$

где μ не обязательно равно $^1/_2$, а лежит в пределах от 0 до 1, исключая сами эти пределы. Эту величину можно определить при тех же самых предположениях, что и величины (16) или (16′).

Как и в предыдущих случаях, его можно выразить при помощи контурного интеграла (рис. 13), который на этот раз нужно разделить на $1 - e^{2i\pi\mu}$.

Можно считать, что он получен в результате дифференцирования выражения

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{\mu}}\,dx. \tag{12'}$$

Интеграл

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{[(x-a)(b-x)]^{p+\frac{1}{2}}}}\right.,$$

в котором подынтегральное выражение обращается в бесконечность при верхнем и нижнем пределах, есть половина соответствующего

Рис. 14.

Рис. 15.

комплексного интеграла вдоль контура на рис. 14. Для аналогичного интеграла

$$\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{[(x-a)(b-x)]^{p+\mu}}$$

контуру нужно придать форму, представленную на рис. 15, так что конечное значение подынтегрального выражения равно его начальному значению.

Ясно, что вместо степеней $(b - x)$ можно также ввести другие функции, например

$$\frac{1}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}} \log(b-x)$$

и их можно рассматривать аналогично.

83. Эти соображения можно отчасти распространить на выражения

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^p}\,dx \tag{17}$$

при целом p.

Это выражение можно сделать конечным, добавив члены

$$\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1}} + B_1(x)\log(b-x). \tag{17'}$$

Но для $p > 1$ при добавлении к $B(x)$ членов, содержащих $(b - x)^{p-1}$, получается произвольный результат. Значение не определено, если известен только интеграл (17); требуется знание добавочных членов (17').

Это неприменимо к случаю $p = 1$. С другой стороны, полученный результат не является инвариантным относительно замены независимой переменной, что мы увидим далее в случае дробного μ. Однако в анализе бесконечно малых уже использовались некоторые операции этого рода, при этом добавочные члены (17') давались в явной форме. Такими примерами являются «главное значение» Коши и даже некоторые формы вторых производных ньютонова потенциала в пространстве (мы воспользуемся ими далее в п. 115').

84. Практический расчет. Простой способ получения величины (16) состоит в нахождении

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\frac{3}{2}}}} = -\frac{2}{(b-a)^{\frac{1}{2}}}\right. \tag{18}$$

и в последующей замене $A(x)$ на $[A(x) - A(b)] + A(b)$, так что выражение распадается на обычный несобственный интеграл

$$\int_a^b \frac{A(x)-A(b)}{(b-x)^{3/2}}\,dx$$

(поскольку предполагается, что A удовлетворяет условию Липшица) и на член

$$\frac{2A(b)}{(b-a)^{1/2}}.$$

Аналогично для вычисления интеграла

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}}}\right.$$

нужно выделить из $A(x)$ его разложение в ряд Тейлора по степеням $(b-x)$ вплоть до членов $(b-x)^{p-1}$, благодаря чему выражение становится обычным интегралом. Затем нужно проинтегрировать (в нашем теперешнем смысле) такие члены, как

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{q+\frac{1}{2}}}}\right.,$$

значение которых равно

$$\frac{1}{q-\frac{1}{2}}\frac{1}{(b-a)^{q-\frac{1}{2}}},$$

так что

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}}}\right. = -\frac{A(b)}{\left(p-\frac{1}{2}\right)(b-a)^{p-\frac{1}{2}}} + \ldots$$

$$\ldots - \frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\,\frac{1}{2}(b-a)^{1/2}} + \int_a^b \frac{A_1(x)\,dx}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}}, \tag{16'}$$

$$A_1(x) = A(x) - [A(b) - A'(b)\ (b-x) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}].$$

Это эквивалентно использованию первого определения, причем для $B(x)$ взято выражение

$$\frac{B(x)}{(b-x)^{p-\frac{1}{2}}} = \frac{A(b)}{\left(p-\frac{1}{2}\right)(b-x)^{p-\frac{1}{2}}} - \frac{A'(b)}{\left(b-\frac{3}{2}\right)(b-x)^{p-\frac{3}{2}}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\,\frac{1}{2}(b-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Если считать, что $B(x)$ выбрано таким образом, то видно, что разность между выражением (15′) и его пределом, которую можно назвать «остатком» несобственного интеграла, равна

$$\int_x^b \frac{A_1(x)}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}}\,dx.$$

Следовательно, существует верхняя грань остатка, а именно, $M(b-x)$, если она существует для абсолютного значения $A_1(x)/(b-x)^p$, или, что то же самое, верхняя грань M для p-й производной от A (деленной на $p!$) в окрестности $x = b$.

Если A есть функция не только x, но и некоторого числа параметров α, β,. . . (от которых может также зависеть b), а M не зависит от α, β,. . ., то можно дать оценку для остатка в функции от $|b - x|$ независимо от значений α, β,. . . Можно сказать, что (16′) сходится равномерно.

85. Основные свойства. Правила вычислений, относящиеся к символу $\overline{|}$ в формуле (16′), вообще говоря, совершенно идентичны правилам, которые применяются для обычных интегралов в таких *равенствах*, как

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \quad \text{и т. д.}$$

В частности, можно выполнить замену переменных при условии, что она регулярна по b, т. е. что одна переменная имеет конечную и отличную от нуля производную по другой переменной, так что порядок бесконечно малых в окрестности точки b не меняется.

Но любое свойство, относящееся к *неравенствам*, требует соответствующих предосторожностей. Прежде всего, если известен знак функции A, то из этого нельзя вывести никакие заключения о знаке выражения

$$\overline{\left| \int \frac{A(x)\,dx}{(b+x)^{p+\frac{1}{2}}} \right.},$$

что непосредственно показывает пример формулы (18).

Оценки для значений несобственных интегралов. Речь идет, в частности, об отыскании верхних граней для выражений вида (16′). Для этого недостаточно, как в случае обыкновенных интегралов, знать верхнюю грань подынтегрального выражения в интервале интегрирования.

Вычисляя

$$I = \overline{\left| \int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}} \right.} \qquad (16')$$

так же, как это сделано в п. 84, сразу же находим из хорошо известного выражения для остатка в ряде Тейлора, что:

$$I \leqslant \frac{|A(b)|}{\left(p-\frac{1}{2}\right)(b-a)^{p-\frac{1}{2}}} + \frac{A'(b)}{\left(p-\frac{3}{2}\right)(b-a)^{p-\frac{3}{2}}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{|A^{(p-1)}(b)|}{(p-1)!\,\frac{1}{2}(b-a)^{1/2}} + \frac{2(A_p)}{p!}\sqrt{b-a}, \qquad (19)$$

где (A_p) есть верхняя грань модуля p-й производной от A на ab.

Следовательно, можно найти, в каких пределах заключено абсолютное значение I, если известны:

1) верхняя и нижняя грани интервала интегрирования;

2) верхние грани абсолютных значений функции A и ее первых p производных [1] (самой A и ее $p-1$ первых производных в точке b, p-й производной на интервале) или по крайней мере (так как интервал можно разбить на $(a, b-\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon, b)$) верхние грани абсолютного значения A на (a, b) (как обычно), $p-1$ первых производных в точке $x = b$ и p-й на некотором подынтервале $(b-\varepsilon, b)$, прилегающем к точке b (обратная величина $1/\varepsilon$ этого интервала также входит в оценки, так что, если a стремится к b, то несобственный интеграл стремится не к нулю, а, вообще говоря, к бесконечности).

86. Непрерывность. Заменяя функцию A другой функцией $\bar{A}$ и заменяя при этом I на $\bar{I}$, а также применяя вышеупомянутое ограничение к разности $(\bar{I} - I)$, мы получим, что *значения оператора* (16′) *непрерывны порядка p относительно функции A* (непрерывность нулевого порядка неочевидна).

87. Дифференцирование. Исходя из понятия, которое привело нас к нашему новому символу, ясно, что *он допускает непосредственное дифференцирование по b*, которое выполняется под

[1] Легко привести примеры выражений типа (16′), принимающих сколь угодно большие значения, хотя A конечно. Достаточно взять следующее выражение:

$$I = \left| \int_a^b \frac{f(Nx)\,dx}{x^{p+\frac{1}{2}}} \right.,$$

где N — очень большое положительное число, а f — функция, конечная при любом значении x, как бы велико оно ни было. Если выполнить замену переменной $Nx = z$, то, как сразу же станет ясно, мы получим асимптотическое равенство

$$I = N^{p-\frac{1}{2}} I_1, \qquad I_1 = \left| \int_0^\infty \frac{f(z)\,dz}{z^{p-\frac{1}{2}}} \right..$$

Тогда, если I_1 отлично от нуля, I бесконечно возрастает как $N^{p-1/2}$.

знаком интеграла; *члены, соответствующие верхнему пределу, отсутствуют*, поскольку они включены в члены, имеющие особенность дробного порядка, которые нужно добавить для того, чтобы интеграл был конечен.

Отсюда следует, что если существует линейное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет интеграл, рассматриваемый как функция b, когда пределы a, c интегрирования постоянны, то он удовлетворяет этому уравнению и тогда, когда один из пределов точно равен b.

Как отмечено в примечании к п. 73, в этом состоит основное замечание Дарбу.

3. Случай кратных интегралов

88. Распространим предыдущее понятие на кратные интегралы, сведя их обычным способом к однократным интегралам. Пусть, например, в обычном пространстве задан интеграл

$$\iiint_T \frac{A(x, y, z)}{[G(x, y, z)]^{p+\frac{1}{2}}}\, dx\, dy\, dz, \tag{20}$$

причем часть S' границы области интегрирования T есть поверхность $G = 0$, для которой выполняется основное предположение о том, что эта часть границы не содержит особых точек, т. е. ни в одной из ее точек первые частные производные G не обращаются в нуль одновременно. Тогда расстояние от границы (или, вернее, от рассматриваемой части S') до любой близкой точки есть бесконечно малая точно такого же порядка, что и значение G. Предположим сначала, что, в частности, $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$ повсюду и что линия, параллельная оси z, пересекает рассматриваемую поверхность только в одной точке $z = z_1$ и *под конечным углом*, так что можно написать $G = (z - z_1)\, G_1$. Предположим, кроме того, что каждая часть границы, прилегающая к $G = 0$, состоит из цилиндрической поверхности, параллельной оси z (рис. 16). Пусть, например, (z_1, Z) — отрезок прямой, параллельной оси z, заключенный внутри области T, причем z_1 — нижний его конец, а его верхний конец Z не соответствует какой-либо особенности

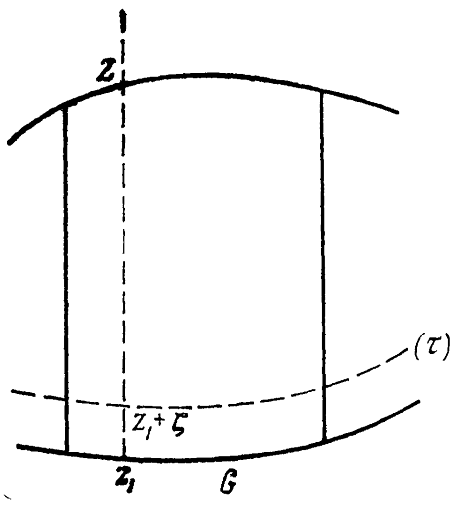

Рис. 16.

подынтегрального выражения. Тогда запишем по определению:

$$\left|\overline{\iiint_T \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\,dx\,dy\,dz}\right. = \iint dx\,dy \left|\overline{\int_{z_1}^{Z} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\,dz}\right. =$$

$$= \iint dx\,dy \left|\overline{\int_{z_1}^{Z} \frac{A\,dz}{G_1^{p+\frac{1}{2}}(Z-z_1)^{p+\frac{1}{2}}}}\right. . \qquad (21)$$

Пусть ζ есть функция x, y и очень малого параметра ε, бесконечно малая по ε и разложимая в ряд по степеням ε, по крайней мере до порядка p, причем член, содержащий ε в первой степени, всегда отличен от нуля. Тогда вычисление выражения (21) сводится к вычислению предела

$$\iint dx\,dy \int_{z_1+\zeta}^{Z} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\,dz \qquad (22)$$

после вычитания соответствующих членов, имеющих особенность дробного порядка по ε (а именно, членов в форме

$$\left.\frac{\mathfrak{B}(x,y,\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} = \frac{\mathfrak{B}_0(x,y)+\varepsilon\mathfrak{B}_1+\ldots+\varepsilon^{p-1}\mathfrak{B}_{p-1}}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}\right)$$

при условии, что интеграл

$$\left|\overline{\int_{z_1}^{Z} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\,dz}\right.$$

сходится равномерно (п. 84) по x и y, так что можно поменять местами переход к пределу и интегрирование по x и y. Это справедливо, если величина

$$\frac{\partial^p\left(\dfrac{A}{G_1^{p+\frac{1}{2}}}\right)}{\partial z_1{}^p}$$

ограничена на всей поверхности S' и в ее окрестности. С другой стороны, предполагается, что G имеет производные до p-го порядка по x, y, так что это заключение справедливо для рассматриваемой поверхности, если z считать функцией x, y.

Это определение, очевидно, эквивалентно следующему.

Пусть окрестность поверхности $G=0$ отделена от области T поверхностью (τ) такой, что

$$G = \gamma(x, y, z, \varepsilon), \qquad (\tau)$$

где γ означает величину, имеющую с нулем близость порядка p (п. 20), т. е. величину, которая очень мала вместе со своими частными производными вплоть до порядка p при ε, стремящемся к нулю. Например, пусть γ равно εD, где через D обозначено дифференцируемое выражение, не зависящее от ε. Тогда интеграл, распространенный по области T_1, которая получается из T при вычитании окрестности T_2 вблизи поверхности, не стремится к определенному пределу при ε, стремящемся к нулю. Но он будет иметь предел, если из него вычесть выбранное подходящим образом выражение, имеющее форму

$$\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} = \frac{B_0 + B_1\varepsilon + \ldots + B_{p-1}\varepsilon^{p-1}}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} \tag{23}$$

(это условие, естественно, полностью определяет коэффициенты B). Этот предел равен выражению (21), ибо (τ), очевидно, можно записать в форме $z = z_1(x, y) + \zeta$, совершенно не зависящей от выбора функции D и даже от γ при условиях, оговоренных ранее.

89. Эта новая форма определения также не зависит от предыдущих ограничений, относящихся к расположению области T по отношению к осям координат. Сам расчет можно сделать свободным от этих ограничений (при наложении требований о регулярности, которые будут уточнены) с помощью точечного преобразования.

Считая, что число измерений m произвольно, введем в окрестности поверхности $G = 0$ систему криволинейных координат, одна из которых есть G, а другие обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$. Пусть они имеют производные порядка p по декартовым координатам, и их якобиан K никогда не обращается в нуль. При этом элемент объема равен

$$dT = dx_1 dx_2 \ldots dx_m = K\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1} dG,$$

где $K\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1}$ есть как раз та величина, которую мы ранее называли dT_G, или отношением dT/dG. Кривые

$$\lambda_1 = \text{const}, \quad \lambda_2 = \text{const}, \quad \ldots, \quad \lambda_{m-1} = \text{const},$$

которые мы обозначим через l и которые заменяют линии, параллельные оси z, должны пересекать S' под конечными углами.

Предположим сначала, что каждая часть границы, прилегающей к $G = 0$, есть геометрическое место координатных кривых l. Нужно сразу же отметить, что эта гипотеза вместе с теми, которые уже сделаны, предполагает:

1) что поверхность $G = 0$ регулярна (п. 9), точнее, что одна из ее декартовых координат, рассматриваемая как функция других, имеет непрерывные частные производные до p-го порядка;

2) что каждая часть границы, прилегающая к $G = 0$, обладает тем же свойством;

3) что эти части границы пересекают поверхность $G = 0$ под углом, который никогда не обращается ни в нуль, ни в π.

Эти условия необходимы для того, чтобы было справедливо только что приведенное определение. Обратно, если они выполнены, существует бесконечное число способов построения системы криволинейных координат, о которой сказано выше. В таком случае можно записать:

$$\left|\overline{\iiint \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m}\right. = \left|\overline{\iiint_T \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\, K\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1} dG}\right. =$$

$$= \iint d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1} \left|\overline{\int \frac{AK}{G^{p+\frac{1}{2}}}\, dG}\right. .$$

Эта третья форма определения эквивалентна второй и, очевидно, не зависит от использованного точечного преобразования, если справедлива вышеупомянутая гипотеза [1]).

Можно получить конечную часть однократного интеграла вдоль l, вычисляя его не от поверхности $G = 0$, а от $G = \gamma$ и добавляя потом дополнительный член

$$\frac{\mathfrak{B}}{\gamma^{p-\frac{1}{2}}},$$

где $\mathfrak{B}$ есть регулярная функция от $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \gamma$ (и, следовательно, от x). Интегрируя по λ, получаем $(m - 1)$ кратный интеграл вдоль (τ), а именно:

$$\iint \frac{\mathfrak{B}}{\gamma^{p-\frac{1}{2}}}\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1}. \tag{24}$$

Добавляя $\iiint_{T_1}$ к (24), а затем устремляя ε (и, следовательно, γ) к нулю, получаем значение (21′).

При $p = 1$ дополнительный член (24) можно записать так, что будет очевидна его независимость от выбора вида точечного преобразования, а именно (вследствие нашего предварительного

---

[1]) Часто криволинейные координаты можно использовать только в окрестности особой поверхности S'. В таком случае удобно разделить T на две части: центральную T'', где интеграл вычисляется, как обычно, и другую часть T', содержащую всю окрестность поверхности S', где будет использовано выражение (23).

замечания о величине $K\,d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1}$):

$$-2\iint \frac{A}{\sqrt{\gamma}}\,d\tau_G.$$

90. Для дальнейшего полезно заметить, что можно отказаться от одного из геометрических ограничений. Возьмем например выражение (20). Если мы хотим начать с интегрирования по z, то мы можем выполнить его даже тогда, когда некоторые части поверхности S'' области T, прилегающие к G, наклонены к оси z.

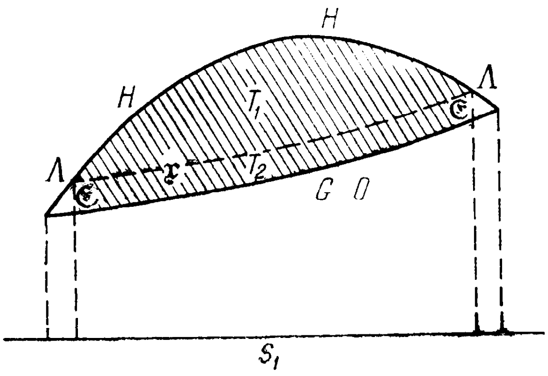

Рис. 17.

Для того чтобы убедиться в этом, снова разделим T на две части с помощью поверхности (τ), попрежнему обозначая обе части через T_1 и T_2. Эта поверхность пересекает S'' вдоль некоторого ребра Λ, которое является линией в обычном пространстве. Если из каждой точки Λ провести прямую, параллельную оси z до пересечения с G, то мы получим цилиндр $\mathfrak{C}$, внутренняя область которого [1]) будет заполнена прямыми, параллельными оси z. Они пересекают (τ) внутри T. Пусть $\mathfrak{x}$ есть общая часть этой внутренней области и T, а J есть интеграл:

$$J = \left|\overline{\iiint \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\,dx\,dy\,dz,}\right.$$

распространенный по области $\mathfrak{x}$. Пусть T_1 есть обычный интеграл, взятый по области T_1.

Поскольку $\mathfrak{C}$ есть цилиндр, интеграл J, как об этом уже говорилось, выражается следующим образом:

$$J = \iint_{s_1} dx\,dy \left|\overline{\int_{z_1}^{Z} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\,dz,}\right.$$

где z_1 — по-прежнему ордината G, а двойное интегрирование распространяется по основанию s цилиндра $\mathfrak{C}$ на плоскости xy. Обозначим через $z_1 + \zeta$ соответствующую координату (τ). Если ζ зависит от ε так же, как и раньше, мы получим по определению

[1]) Для большего удобства предполагается, что в данном случае (единственном, который нас интересует) используемые части поверхности S'' и даже вся область T проектируются на плоскость xy внутри области s, по которой распространен интеграл I. На рис. 17 представлены сечения областей T, $\mathfrak{x}$ (заштриховано) и т. д. плоскостью, параллельной оси z.

нашего символа

$$j(x, y) = \left|\overline{\int_{z_1}^{Z}}\right. = \int_{z_1+\zeta}^{Z} + \frac{\mathfrak{B}(x, y, \varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} + \eta(x, y, \varepsilon),$$

где $\mathfrak{B}$ есть функция, разложимая в ряд Маклорена по степеням ε, по крайней мере до p-го порядка, а $\eta = \eta(x, y, \varepsilon)$ есть бесконечно малая величина. Это дает в результате интегрирования по s_1

$$\iint_{s_1} j(x, y)\,dx\,dy = J = I_1 + \iint \eta\,dx\,dy + \frac{1}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} \iint \mathfrak{B}(x, y, \varepsilon)\,dx\,dy.$$

Двойной интеграл, содержащий η, есть также бесконечно малая величина [1]) по ε. В последнем члене вследствие предполагаемой регулярности (τ) и S'' второй множитель (для которого нужно учитывать одновременное изменение подынтегрального выражения и области интегрирования) допускает последовательное дифференцирование [2]) по ε. Следовательно, он может быть разложен в ряд Маклорена (по крайней мере, до $(p-1)$-го порядка), так что

$$J - I_1 = \varepsilon_1 + \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}, \tag{25}$$

где ε_1 представляет собой бесконечно малую величину $\iint \eta\,dx\,dy$, а $B(\varepsilon)$ по-прежнему регулярно по ε.

Если теперь обозначить через I интеграл (21), который мы хотим вычислить, то разность $I - J$ будет, вообще говоря, бесконечной (это справедливо для однократных интегралов, взятых вдоль образующих цилиндра $\mathfrak{C}$, когда их длина стремится к нулю). Эта разность ведет себя таким же образом, как выражение (23), имеющее степенную особенность дробного порядка, поскольку обе величины $J - I_1$ (как только что доказано) и $I - I_1$ (по определению) имеют ту же форму. Другими словами, можно записать

$$I = \left|\overline{\iint_{s} j(x, y)\,dx\,dy}\right. = \left|\overline{\iint_{s} dx\,dy \left|\overline{\int_{z_1}^{Z} \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\,dz}\right.}\right., \tag{26}$$

[1]) Мы считаем, что η стремится к нулю равномерно по x, y. Это является законным (п. 84), когда p-я производная $\dfrac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\dfrac{A}{G_1^{p+\frac{1}{2}}}\right)$ конечна во всей окрестности S'.

[2]) Следует, однако, заметить, что это предполагает существование производных от величины B до $(p-1)$-го порядка по x, y, z. Так как B содержит $p-1$ производную (по z) от A и G_1, то необходимо, чтобы подынтегральное выражение имело производные порядка $(2p-2)$.

так что конечная часть тройного интеграла сводится к двум «конечным частям», одна из них есть однократный интеграл, а другая — двойной.

Это остается справедливым для интегралов любой кратности и тогда, когда прямые, параллельные оси z, заменяются кривыми l, которые ранее уже рассматривались.

Следовательно, от этих кривых не требуется, чтобы они проектировались на несингулярную часть S границы.

Что касается условия, согласно которому угол между одной из кривых и сингулярной частью G нигде не становится бесконечно малым, то оно остается существенным, как мы увидим на примерах, когда воспользуемся этим способом вычисления.

91. Это замечание относится также к нашему первому предположению о регулярности поверхности.

Если поверхность границы $G = 0$ имеет особую точку a (именно это имеет место в приложениях, которыми мы будем заниматься), то нужно поступать точно так же, как и при рассмотрении обычных несобственных интегралов, т. е. сначала отделить окрестность этой особой точки при помощи малой части поверхности Σ, а затем перейти к пределу. Поверхность Σ должна иметь с этой особой точкой близость порядка p, т. е. с учетом п. 20 должен быть очень мал не только радиус-вектор [1]), соединяющий особую точку с произвольной точкой Σ, но также должны быть очень малы его производные до p-го порядка по его направляющим косинусам. Это условие, впрочем, обычно выполняется (например, оно выполняется в том случае, если Σ получается из регулярной фиксированной поверхности при помощи гомотетии с центром в особой точке или путем переноса и т. д.). Мы будем исследовать в каждом случае, существует ли этот предел (хотя, конечно, можно без особых затруднений сформулировать достаточные для этого условия довольно общего вида).

92. Предыдущие соображения применимы и тогда, когда G есть произведение двух множителей $G = G'G''$, так что $G = 0$ состоит из двух пересекающихся частей $G' = 0$, $G'' = 0$. Так будет, например, в том случае, когда T — прямоугольная область, а G есть произведение функций, представляющих уравнения четырех сторон.

---

[1]) Такие радиусы-векторы могут быть прямолинейными. Но вместо них также можно взять отрезки вдоль произвольного регулярного пучка кривых (что равносильно предыдущему вследствие классических правил дифференциального исчисления). Иными словами, вдоль пучка кривых, проходящих через a и зависящих от $m - 1$ параметра (например, от $m - 1$ направляющего косинуса их касательных в точке a) таких, что существуют непрерывные производные координат до порядка p по этим параметрам и дуге s, причем якобиан нигде не обращается в нуль. Мы воспользуемся этим методом, беря геодезические (п. 55), исходящие из точки a. Мы еще вернемся к этому вопросу (см. п. 106).

Предположим, к примеру, что $G = xy$. При этом область интегрирования такова: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Тогда, чтобы вычислить интеграл

$$\left|\iint_T \frac{A(x, y)\,dx\,dy}{x^{p+\frac{1}{2}} y^{p+\frac{1}{2}}},\right.$$

начнем [1]) с того, что ограничим область интегрирования: $x \geqslant \varepsilon'$ $y \geqslant \varepsilon''$, обозначив через ε' и ε'' два малых положительных числа. После этого интеграл можно сделать конечным, если вычесть дополнительные члены

$$\frac{B}{\varepsilon'^{p-\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{B}{\varepsilon''^{p-\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{B}{\varepsilon'^{p-\frac{1}{2}} \varepsilon''^{p-\frac{1}{2}}} \tag{27}$$

это станет ясным, если разложить $A(x, y)$ в ряд по степеням x, y и вычислить

$$\iint \frac{dx\,dy}{x^{q+\frac{1}{2}} y^{r+\frac{1}{2}}} \qquad (q, r = 0, 1, 2, \ldots, p)).$$

Здесь B означает величину, регулярную по ε', ε''. Сводя общий случай $G = G'G''$ к предыдущему при помощи точечного преобразования (причем G', G'' берутся в качестве новых переменных вместо x и y), получим тот же самый результат с помощью дополнительных членов вышеупомянутой формы, если T_1 отделено от T_2 поверхностями $G' = \varepsilon'$, $G'' = \varepsilon''$. При этом в обозначение B вкладывается тот же смысл. Так как члены третьего типа обладают, как и два предыдущих, тем свойством, что никогда не остаются конечными для произвольных бесконечно малых величин ε', ε'', не обращающихся в нуль, то предыдущая теория все еще применима. Иными словами, имеется бесконечное число способов, с помощью которых можно выбрать члены (27) так, чтобы получить конечный предел. Этот предел имеет то же самое значение независимо от используемых способов.

В общем случае для других типов особенности дело обстоит иначе. Нужно принять особые предосторожности, на которые мы ссылались в предыдущем пункте. Впрочем, можно видеть, что они меняют результат.

93. Для кратных интегралов можно повторить все то, что было сказано о равенствах и неравенствах для однократных интегралов.

---

[1]) Мы упрощаем рассуждения, предполагая, что заданы не только две поверхности $G' = 0$, $G'' = 0$, но также левые части G', G'' их уравнений (ранее в этом не было необходимости). Это условие будет выполнено, когда нам придется воспользоваться настоящим результатом, так что не будет более необходимости в том, чтобы брать разделяющие поверхности (τ) в более общем виде (п. 88).

В частности, можно производить *замену переменных*, если смешанные частные производные существуют вплоть до p-го порядка и если якобиан не обращается в нуль на особой поверхности $G = 0$.

В случае, когда параметр влияет на форму сингулярной части поверхности $G = 0$, *при дифференцировании* не добавляется никаких дополнительных членов (как и в случае однократного интеграла, взятого вдоль любой линии l).

Мы получим *верхнюю грань*, выполняя интегрирование вдоль линий [1] l и применяя к каждому однократному интегралу формулу (19) (п. 85). Для этой цели необходимо еще, конечно, знать верхние грани подынтегральных выражений и их производных до p-го порядка. С другой стороны, этого будет достаточно, если известны *как нижние, так и верхние* грани длин дуг кривых l, заключенных в T.

94. Одним словом, смысл нашего нового символа заключается в том, что интегралу присваивают некоторое конечное значение, вычитая члены, имеющие степенную особенность дробного порядка. Следовательно, при расчетах их нужно отбрасывать. Если два различных интеграла предыдущего типа, распространенные по одной и той же области T таковы, что в области T' они различаются на величину, о которой известно, что она с необходимостью имеет форму (23), то их конечные части должны быть равны, и, следовательно, не нужно учитывать эту разницу.

Предположим, например, что в формуле (g) подынтегральное выражение в левой части имеет форму $A/G^{p+1/2}$, а величины $\mathfrak{P}_i$ имеют форму $B_i/G^{p+1/2}$, где B — функции, регулярные по x. Если граница области интегрирования T целиком состоит из поверхности $G = 0$ (для которой сделаны обычные предположения), то *конечная часть соответствующего многократного интеграла равна нулю*. Действительно, этот интеграл, распространенный по поверхности

$$G = \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) \tag{τ}$$

вследствие упомянутого тождества (g) сводится к выражению со степенной особенностью дробного порядка по ε. Это эквивалентно предыдущему заключению.

Если только некоторые части S' границы принадлежат поверхности $G = 0$, то следует писать знак $\iint$ только для остающихся частей S'' (или, вернее, конечных частей этих интегралов). При

---

[1] Если действовать так, как в п. 90, то нужно знать верхние грани для производных порядка $2p - 2$; с другой стороны, нет необходимости знать нижнюю грань длины дуг кривых l, заключенных в T (нужна только нижняя грань углов между этими кривыми и поверхностью $G = 0$).

этом формула (g) запишется в виде

$$\left|\overline{\iiint_T}\right. = -\left|\overline{\iint_{S''}}\right. .$$

Интуитивно это станет ясным, если использовать комплексные переменные, как в пп. 80—81. Чтобы облегчить геометрическую интерпретацию, ограничимся двойным интегралом $\iint \frac{A(x, y)\,dx\,dy}{x^{p-\frac{1}{2}}}$ по прямому углу, одна из сторон которого лежит на прямой $x = 0$. Оставляя y действительным, заменим x на $x + ix'$ и будем рассматривать x' как третью координату в трехмерном пространстве. Величина I тогда равна половине интеграла, взятого по двойному листку, сложенному вдоль оси $x = 0$, который покрывает два раза прямой угол (или, если угодно, взятому по половине бесконечно тонкого эллиптического цилиндра, фокус которого расположен на оси $x = 0$, а противоположная сторона служит осью).

Если нужно вычислить

$$\left|\overline{\iint \frac{A(x, y)\,dx\,dy}{[x(a-x)]^{p+\frac{1}{2}}}}\right. ,$$

причем противоположными сторонами прямоугольника интегрирования служат линии $x = 0$ и $x = a$, то нужно рассмотреть часть полного эллиптического цилиндра, имеющего эти стороны в качестве фокусов.

Во всех случаях с помощью предыдущего преобразования сразу же получается связь с криволинейным интегралом (этот интеграл должен быть распространен по сторонам прямоугольника, которые соответствуют границам цилиндрической поверхности и количество которых равно трем в первом из двух примеров и двум — во втором).

4. Несколько важных примеров

95. Применим предыдущую теорию к интегралу

$$\int \frac{dz}{(z^2-\alpha)^{n+\frac{1}{2}}} .$$

Вычислим его вначале в пределах от $+\sqrt{\alpha}$ до фиксированного числа $z_1 > \sqrt{\alpha}$. Для $n = 0$ получаем

$$\int_{\sqrt{\alpha}}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z^2-\alpha}} = \log \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{1}{2}\log\alpha + P(\alpha),$$

где

$$P(\alpha) = \log(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \alpha}) = \log z_1 + \log\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha}{z_1^2}}\right)$$

есть ряд по целым степеням α.

Выведем с помощью дифференцирования

$$\boxed{\int_{\sqrt{\alpha}}^{z_1} \frac{dz}{(z^2 - \alpha)^{n + \frac{1}{2}}}} = \frac{(-1)^n}{2nC_n} \frac{1}{\alpha^n} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \frac{d^n}{d\alpha^n} P(\alpha), \tag{28}$$

где C_n означает численный коэффициент [1])

$$C_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \left(n - \frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2 \ldots n} = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \mathrm{B}\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}. \tag{29}$$

При $z_1 = \infty$ последний член в правой части формулы (28) исчезает (так как $P(\alpha)$ есть ряд по степеням $\alpha/z^2{}_1$ и, следовательно, каждый член, за исключением первого, содержит z_1 в знаменателе), откуда [2])

$$\boxed{\int_{\sqrt{\alpha}}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \alpha)^{n + \frac{1}{2}}}} = \frac{(-1)^n}{2nC_n\alpha^n} \quad \text{(при целом } n > 0\text{)}. \tag{30}$$

Следует также отметить, что значение интеграла при $n < 0$ равно

$$\int_{+\sqrt{\alpha}}^{z_1} dz\,(z^2 - \alpha)^{n - \frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{n-1}}{2} C_n\alpha^n \log\alpha + P_1(\alpha), \tag{28'}$$

где C_n означает тот же самый численный коэффициент, что и ранее. Это также можно вывести из случая $n' = 0$ путем интегрирования по α — значение интеграла при $\alpha = 0$ очевидно — или,

---

[1]) В частности, $C_0 = 1$, $C_1 = 1/_2$.

[2]) Можно было бы также найти значение выражения (30), исходя из другой точки зрения, иллюстрирующей наше первое определение (п. 80). Если заменить действительный отрезок $(\sqrt{\alpha}, \infty)$ контуром, содержащим его, соответствующий интеграл, равный удвоенному выражению (30), может быть преобразован по теореме Коши в интеграл вдоль мнимой оси, равный $e^{-ni\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\alpha + z^2)^{n + \frac{1}{2}}}$. Эта последняя величина сразу же приводится классическим способом к эйлерову интегралу B первого рода.

проще, с помощью разложения подынтегрального [1]) выражения по степеням α/z^2.

96. Формулы для случаев, когда пределы равны $-\sqrt{\alpha}$ и $+\sqrt{\alpha}$, особенно важны для последующего. *Интеграл*

$$\left|\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} \frac{dz}{(\alpha - z^2)^{n+\frac{1}{2}}}\right| \tag{31}$$

($n > 0$ — целое) *равен нулю.*

Интеграл

$$\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} (z^2 - \alpha)^{n'-1} \sqrt{\alpha - z^2}\, dz \qquad (n' \text{ — целое, } n' \geqslant 0)$$

равен $2\pi A$, *где* A *означает коэффициент при* $\log \alpha$ *в выражении* (28′), а именно:

$$\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} (z^2 - \alpha)^{n'-1} \sqrt{\alpha - z^2}\, dz = (-1)^{n'-1} \pi C_{n'} \alpha^{n'}, \tag{31′}$$

так что

$$\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} (\alpha - z^2)^{n' - \frac{1}{2}} dz = \pi C_{n'} \alpha^{n'}. \tag{31″}$$

Эта форма результата, из которой видна связь между (28′) и (31′), в последующем будет представлять для нас особый интерес (можно также считать, что существует связь между (28) и (31)). Можно установить эту связь, если считать, что выражение (31′) есть период (28′). Предположим, что α изменяется, начиная с определенного положительного значения, и возвращается к нему после обхода положительного контура, проведенного вокруг начала координат в комплексной области. Тогда точка $\sqrt{\alpha}$ описывает половину контура, изменяясь от $+\sqrt{\alpha}$ до $-\sqrt{\alpha}$. Так как в то же самое время z_1 остается фиксированным (конечным или бесконечным, в зависимости от рассматриваемого случая) выражение (28′) изменяется на $2i\pi A$, и наше соотношение доказано.

Само собой разумеется, те же самые формулы (31′), или, вернее, (31″) можно получить непосредственно, точнее, выразить через эйлеровы интегралы первого рода. Так, при замене переменной $z = \sqrt{\alpha t}$ интеграл (31″) принимает вид

$$\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} (\alpha - z^2)^{n' - \frac{1}{2}} dz = \alpha^{n'} \int_0^1 (1 - t)^{n' - \frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$
$$= \alpha^{n'} \mathrm{B}\left(n' + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

[1]) Единственный член, который содержит z в степени -1 и, следовательно, дает логарифм, имеет коэффициент, равный α^n.

Он также непосредственно сводится к интегралу Валлиса с помощью замены $z = \sqrt{\alpha}\cos\rho$.

Если продифференцировать это выражение по α, для чего нужно выполнить простое дифференцирование под знаком интеграла (при этом не появляется никаких дополнительных членов, соответствующих пределам интегрирования), то после достаточного числа операций мы получим нулевое значение для выражения (31).

Аналогично, если q есть целое положительное нечетное число (для четных q рассматриваемые интегралы равны нулю), то для $n' \geqslant 0$ получим (левую часть также можно привести к интегралам Эйлера или Валлиса)

$$\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} z^{q-1}(\alpha - z^2)^{n'-1/2}dz = \alpha^{n'+\frac{q-1}{2}}\int_0^1 t^{\frac{q-2}{2}}(1-t)^{n'-1/2}dt =$$

$$= \alpha^{n'+\frac{q-1}{2}} \mathrm{B}\left(n' + \frac{1}{2}, \frac{q}{2}\right). \qquad (32)$$

Если снова исходить из значения $n' = 0$, то дифференцируя по α (или с помощью классического интегрирования по t по частям, примененного ко второй форме интеграла), получим конечные части интегралов, содержащих $(1 - t)^{n+1/2}$ или $(\alpha - z^2)^{n+1/2}$ в знаменателе. Таким образом, видно, что:

1)

$$\left|\overline{\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} \frac{z^{q-1}}{(\alpha - z^2)^{n+\frac{1}{2}}}dz}\right. \quad \text{или} \quad \left|\overline{\int_0^1 \frac{t^{\frac{q-2}{2}}}{(1-t)^{n+\frac{1}{2}}}dt}\right.$$

есть нуль, когда q нечетно и $n > (q-1)/2$

2) для $n \leqslant (q-1)/2$ справедливо

$$\left|\overline{\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} \frac{z^{q-1}}{(\alpha - z^2)^{n+\frac{1}{2}}}dz}\right. =$$

$$= \alpha^{\frac{q-1}{2}-n} \frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)\left(q-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{q+1}{2}-n\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-n+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{q}{2}\right) =$$

$$= \alpha^{\frac{q-1}{2}-n} \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q-1}{2}-n\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

Почти очевидно (в этом можно убедиться непосредственно, выражая B-функцию через Г-функцию), что численный множитель здесь тот же самый, что и в формуле (32), с той разницей, что нужно заменить n' на $-n$, т. е. он равен

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}-n, \frac{q}{2}\right).$$

В частности,

$$\left|\int_{-1}^{+1} \frac{z^{q-1}}{(1-z^2)^{n+\frac{1}{2}}}\, dz = \right|\int_0^1 \frac{t^{\frac{q}{2}-1}}{(1-t)^{n+\frac{1}{2}}}\, dt = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}-n, \frac{q}{2}\right), \qquad (33)$$

так что в этом случае мы получаем формулы, совершенно аналогичные (32) с точностью до нового символа $|\overline{}$.

97. Объем *m*-мерного гиперболоида. Рассмотрим m-мерную гиперповерхность второго порядка

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{m-1}^2 - x_m^2 = 1, \qquad (\mathbf{H}_1)$$

аналогичную однополостному гиперболоиду, и m-мерный объем, заключенный между этой гиперповерхностью и асимптотическим конусом

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{m-1}^2 - x_m^2 = 0. \qquad (c)$$

Для вычисления этого объема можно выразить $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ через

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{m-1}^2}$$

и угловые параметры $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-2}$, определяющие направление из начала координат в $(m-1)$-мерном пространстве $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{m-1})$, откуда

$$dx_1 dx_2 \ldots dx_{m-1} = r^{m-2} dr\, d\Omega_{m-2},$$

где величина $d\Omega_{m-2}$ (соответствующая изменению φ_i) есть элемент поверхности сферы единичного радиуса в $(m-1)$-мерном пространстве. Интегрируя сначала по всем возможным направлениям в этом пространстве, мы получим для нашего объема выражение, в которое входит двойной интеграл

$$\Omega_{m-2} \iint r^{m-2} dr\, dx_m, \qquad (34)$$

где Ω_{m-2} есть величина поверхности гиперсферы единичного радиуса в $(m-1)$-мерном пространстве. Она равна $\dfrac{2\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}$, т. е.

$2\dfrac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}$ (объем этой сферы равен $\dfrac{1}{m-1}\,\Omega_{m-2}$; заметим, что это выражение дает возможность говорить даже о величине Ω_0, значение которой равно $\int_{-1}^{+1} dx = 2$).

Можно проинтегрировать (34) по объему между ветвью гиперболы $r^2 - x_m^2 = 1$ и ее асимптотами. Итак, пусть

$$x_m = rz,$$

где $z = \mathrm{const}$ представляет в плоскости (r, x_m) радиус-вектор, исходящий из начала, а в нашем первоначальном m-мерном пространстве — гиперконус. Объем, заключенный между двумя близкими гиперконусами $(z, z + dz)$ и гиперповерхностью второго порядка (который легко вычисляется, если в формуле (34) выразить x_m и r через z и $\rho = \sqrt{r^2 - x_m^2}$, причем ρ меняется от 0 до 1), равен

$$\frac{\Omega_{m-2}}{m} \frac{dz}{(1 - z^2)^{m/2}}.$$

Если проинтегрировать это выражение от $-z$ до $+z$ при $0 < z < 1$, то получим объем, заключенный между двумя соответствующими конусами и гиперповерхностью второго порядка.

Если m нечетно, то при z, стремящемся к единице, такой интеграл имеет конечную часть. По определению ее называют «конечной частью объема, заключенного между гиперповерхностью второго порядка и ее асимптотическим конусом».

Мы видим, что в силу выводов предыдущего пункта *эта конечная часть равна нулю.*

Рассмотрим далее гиперповерхность второго порядка

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{m-1}^2 - x_m^2 = 1,$$

которая при $m = 3$ представляет собой *двуполостный гиперболоид.* Снова вычислим объем, заключенный между полостью, соответствующей $x_m > 0$, и асимптотическим конусом (c).

Этот объем выражается в виде

$$\frac{\Omega_{m-2}}{m} \int \frac{dz}{(z^2 - 1)^{m/2}},$$

где интеграл нужно взять в пределах от 1 до $+\infty$. *Если m нечетно* и равно $2m_1 + 1$, то полученное таким образом выражение имеет конечную часть, которую называют «конечной частью» рассматриваемого объема. *Значение этой конечной части равно*

$$\frac{\Omega_{2m_1-1} (-1)^{m_1}}{(2m_1 + 1)\, 2m_1 C_{m_1}}. \tag{35}$$

Например, для обычного двуполостного гиперболоида имеем

$$\frac{2\pi}{3} \left| \overline{\int_1^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - 1)^{3/2}}} \right. = -\frac{2\pi}{3}.$$

Если гиперповерхность задана в самой общей форме

$$\boldsymbol{H}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$$

(где $\boldsymbol{H}$ — произвольная квадратичная форма с одним положительным и $m - 1 = 2m_1$ отрицательными квадратами), то результат нужно, очевидно, разделить на $\sqrt{|D|}$, где D есть дискриминант формы $\boldsymbol{H}$.

Знак полученной конечной части может меняться, что следует из формулы (35). Согласно тому, что было сказано в п. 85, он зависит от четности $m_1 = \frac{m-1}{2}$.

98. Тот же самый метод применим к гиперповерхности второго порядка

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_q^2 = 1,$$

которая связана с уравнениями $\Delta^{p,q} u = 0$ Кулона. Вводя вспомогательные переменные

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2}, \qquad r' = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_q^2},$$

мы, как и ранее, сведем вычисление объема к вычислению двойного интеграла

$$\Omega_{p-1}\Omega_{q-1} \iint r^{p-1} r'^{q-1} dr\, dr',$$

который с помощью замены $r' = rz$ приводится к однократному интегралу

$$\frac{\Omega_{p-1}\Omega_{q-1}}{p+q} \int \frac{z^{q-1} dz}{(1-z^2)^{\frac{p+q}{2}}}. \tag{36}$$

Если взять этот интеграл в пределах от $z = -1$ до $z = +1$, то его конечная часть будет существовать при $(p + q)$ нечетном. При q *нечетном она будет равна нулю* (п. 96).

Только при q четном и p нечетном конечная часть объема, заключенного между гиперплоскостью $(\boldsymbol{H}')$ и ее асимптотическим конусом

$$\sum_1^p x^2 - \sum_1^q y^2 = 0,$$

существует и отлична от нуля. Ее значение равно

$$\mathrm{B}\left(\frac{p+q}{2} - 1, \frac{q}{2}\right) \frac{\Omega_{p-1}\Omega_{q-1}}{p+q}.$$

99. Числа Ω очень просто связаны с коэффициентами C_n, введенными ранее. Действительно

$$\Omega_{m-1} = \Omega_{m-2} \frac{m}{m-1} \pi C_{\frac{m}{2}} = \Omega_{m-2} \pi C_{\frac{m}{2}-1}$$

(в более общем виде существует соотношение между Ω_{p-1}, Ω_{q-1} и Ω_{p+q-1}).

Это очень легко проверить, причем ход рассуждений почти не отличается от рассуждений предыдущего пункта. Классическое определение величины Ω_{m-1} (как частного случая интеграла Дирихле) полностью аналогично предыдущему расчету. Использование этого последнего для получения объема m-мерной сферы единичного радиуса (равного $\frac{1}{m}\,\Omega_{m-1}$) приводит к формуле

$$\Omega_{m-2}\iint r^{m-2}dr\,dx,$$

т. е. к двойному интегралу по области $r^2+x^2\leqslant 1$. Это, как и ранее, сразу же приводит к формуле (31′).

100. Рассечем объем одного из этих гиперболоидов $m=2m_1+1$ измерений плоскостью, проходящей через его центр. Тогда ее можно считать диаметральной плоскостью, и, следовательно, два объема, получаемые таким образом, должны быть равны друг другу. Вследствие этого, конечная часть полуобъема однополостного гиперболоида равна нулю, а двуполостного гиперболоида — половине значения, полученного в п. 97.

Отсюда вытекает следующее. Пусть произвольные плоскости такого рода пересекаются внутри асимптотического конуса (если речь идет о двуполостном гиперболоиде). Тогда в части пространства, заключенной между этими плоскостями, поверхностью и ее асимптотическим конусом, содержится бесконечный объем, конечная часть которого равна нулю.

101. Понятие несобственного интеграла в том смысле, в каком оно было только что развито, позволяет найти соотношение между выражениями Тедоне[1]) и элементарным решением. Можно видеть (для начала, например, при $m=3$), что это последнее нужно проинтегрировать несколько раз, по крайней мере m_1 раз, по t_0 для того, чтобы были возможными обычные операции.

Итак, такое последовательное интегрирование функции $F(t)$ от нижнего предела T до верхнего предела t' можно заменить одним-единственным интегрированием, если ввести множитель $(t'-t)^{n-1}$. Поэтому для изучения обобщенного уравнения цилиндрических волн (e_{m-1}) при $m=2m_1+1$, если исходить из элементарного решения

$$\frac{1}{[(t_0-t)^2-r^2]^{m_1-1/2}},$$

нужно ввести определенный интеграл

$$\int_T^{t'}\frac{(t'-t_0)^{n-1}\,dt_0}{[(t_0-t)^2-r^2]^{m_1-1/2}}.$$

---

[1]) В обозначениях Тедоне наше число m соответствует $m+1$, а наше число m_1 (для нечетных значений m) обозначено p.

Как и в п. 73, мы считаем, что t' в этом интеграле не зависит от t, а нижний предел T равен $t+r$.

Выражения Тедоне соответствуют большему числу интегрирований, чем это, строго говоря, необходимо, а именно, в них $n = m - 2 = 2m_1 - 1$ (достигаемое преимущество заключается в том, что получаются довольно простые выражения, которые зависят только от отношения $(t' - t)/r$). С точностью до численного множителя его функция [1]) равна определенному несобственному интегралу [2])

$$v_1 = \left| \int_{t+r}^{t'} \frac{(t'-t_0)^{2m_1-2}}{[(t_0-t)^2 - r^2]^{m_1-1/2}} dt_0. \right.$$

---

[1]) В его обозначениях φ_2.

[2]) Если рассматривать v_1 как функцию t и x, то она будет удовлетворять уравнению (e_{m-1}), что следует из наших заключений. Тот факт, что она является простой функцией $\dfrac{t'-t}{r}$ (переменная θ в обозначениях Тедоне) и одновременно обладает логарифмической особенностью (которая легко устанавливается при помощи теории функций), доказывает ее тождество с выражением Тедоне. Непосредственный расчет, дающий v_1 в форме Тедоне, можно выполнить, если положить

$$\frac{t_0 - t - r}{t_0 - t + r} = \tau$$

и аналогично

$$\frac{t' - t - r}{t' - t + r} = \tau'.$$

Это дает

$$v_1 = \left| \int_0^{\tau'} \frac{1}{(1-\tau')^{2m_1-2}} \frac{(\tau'-\tau)^{2m_1-2}}{\tau^{m_1-1/2}(1-\tau)} d\tau = \right.$$

$$= \int_0^{\tau'} \frac{d\tau}{(1-\tau)\sqrt{\tau}} + \frac{1}{(1-\tau')^{2m'-2}} \cdot I,$$

$$I = \left| \int_0^{\tau'} \frac{1}{\tau^{m_1-1/2}} \frac{(\tau'-\tau)^{2m_1-2} - \tau^{m_1-1}(\tau'-1)^{2m_1-2}}{1-\tau} d\tau. \right.$$

Первый член является логарифмическим. Так как

$$\frac{(\tau'-\tau)^{2m_1-2} - \tau^{m_1-1}(\tau'-1)^{2m_1-2}}{1-\tau} =$$

$$= [\tau(\tau'-1) + \tau'(\tau'-\tau)] \sum (\tau'-\tau)^{2(m_1-h-1)} \tau^{h-1} (1-\tau')^{2h-2},$$

то оставшийся несобственный интеграл I можно разложить в ряд по степеням

$$\frac{4\tau'}{(1-\tau')^2} = \frac{(t'-t)^2 - r^2}{r^2}$$

с общим множителем

$$1 + \frac{2\tau'}{1-\tau'} = \frac{t'-t}{\tau},$$

причем коэффициентами являются эйлеровы B-функции (см. п. 96).

Применяя основную формулу к этой величине и к известной функции u, мы находим значение (10') п. 78, откуда выражение для u получается с помощью дифференцирования, что сейчас очевидно *априори*. Видно, что для этой же цели можно использовать $(m_1 - 1)$-ю производную от u.

ГЛАВА II
ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

102. Вспоминая основные положения, которые были получены ранее, мы можем приступить к задаче Коши для уравнения

$$\mathfrak{F}(u) = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f. \tag{E}$$

Уместно отметить, что следует различать случаи m четного и m нечетного. Мы начнем с последнего. Элементарное решение состоит в этом случае из одного члена. Оно не содержит логарифмического члена, в него входит иррациональный знаменатель.

Мы построим решение не для данного уравнения, а для сопряженного [1])

$$\mathfrak{G}(v) = 0.$$

Для него элементарное решение будет иметь ту же самую форму, а именно:

$$v = v(x; a) = \frac{V}{\Gamma^{m_1 - 1/2}}$$

при $m = 2m_1 + 1$. Здесь Γ по-прежнему есть квадрат геодезического расстояния между двумя точками $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $a(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, в то время как V есть голоморфная функция $2m$ координат этих двух точек, принимающая значение $1/\sqrt{|\Delta|}$, если они совпадают.

Далее мы будем предполагать, что уравнение принадлежит к гиперболическому типу и, более того, к нормальному гиперболическому типу, так что характеристическая форма

$$A = \sum A_{ik} \gamma_i \gamma_k$$

состоит из квадратов, которые все, за исключением одного, имеют один и тот же знак. Характеристический коноид состоит тогда из двух полостей и делит пространство на три области, две из которых

[1]) Сопряженное уравнение всегда берется однородным (т. е. $\mathfrak{G}(v) = 0$), даже если исходное уравнение содержит правую часть ($\mathfrak{F}(u) = f \neq 0$).

внутренние, т. е. расположены внутри каждой полости. Мы предполагаем, что уравнение записано таким образом, что Γ положительно в каждой из внутренних полостей (говоря физическим языком, оно положительно, когда обе точки находятся «за волной» по отношению друг к другу в смысле п. 32). Таким является случай, когда форма A имеет один положительный квадрат и $m - 1$ отрицательных [1]).

При этих условиях дискриминант Δ положителен.

102′. Задача Коши состоит в нахождении решения u уравнения (Е), если известны значения u и одной из ее первых производных в каждой точке некоторой поверхности S. Так как знание любой первой производной (считается, что u известно на всей поверхности S, а именно: $u = u_0$ на ней) эквивалентно знанию любой другой производной (при условии, что соответствующее направление не является касательным к S), то мы предположим, что известны значения *конормальной* [2]) производной (п. 40). Пусть $\frac{du}{d\nu} = u_1$.

Мы хотим вычислить значения u в некоторой области $\mathfrak{R}$ пространства m измерений. Предположим, что если из произвольной точки a области $\mathfrak{R}$ как из вершины провести характеристический коноид, то одна из его полостей вырежет часть S_0 поверхности S, ограниченную во всех направлениях, и образует вместе с S_0 границу некоторой части T пространства. Это геометрическое условие можно выразить следующими словами: говорят, что имеют дело с внутренней задачей (ясно, что для гиперболических уравнений, не являющихся нормальными, не существует внутренних задач).

Мы должны еще точно определить, что понимать под решением. Вначале мы это сделаем при довольно больших ограничениях, а именно, потребуем, чтобы u имело частные производные до m_1-го порядка, или по крайней мере до $(m_1 - 1)$-го порядка, причем эти последние производные должны удовлетворять условию Липшица. Это ограничение может показаться довольно искусственным, но благодаря замечанию п. 78 оно выглядит правомерным.

При выполнении этих требований наши данные позволяют нам вычислить u, и, наоборот, если справедливо предположение о том, что S всюду пространственного типа (п. 27), а также выполнены предположения о регулярности начальных данных (совершенно аналогичные тем, которые мы только что сделали для самой функции u), то функция u, определенная таким образом, удовлетворяет всем требуемым условиям (*внешняя* задача Коши, напротив, не имеет, решений при произвольных регулярных начальных данных).

---

[1]) При этом нам нужно было бы изменить знаки в уравнении (e_2) по сравнению с тем, как оно записано в п. 4.

[2]) Если поверхность S не является характеристической, то конормаль не касается S. Относительно противоположного случая см. далее п. 113.

103. Итак, если $a\ (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ есть точка в $\mathfrak{R}$, в которой мы хотим вычислить значение u, то мы должны построить характеристический полуконоид Γ с вершиной в точке a, который пересекает S по замкнутому ребру и полость которого мы назовем *обратной*, или *идущей назад* (п. 32). Пусть T — часть области $\mathfrak{R}$, ограниченная [1]) таким образом, т. е. внутренняя по отношению к Γ и расположенная с той же стороны S, что и a (рис. 18).

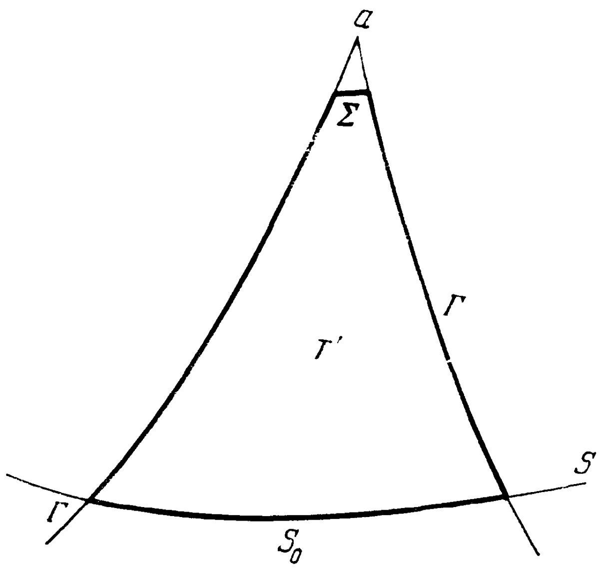

Рис. 18.

В области T применим основную формулу [2]) к неизвестной функции u и к элементарному решению $v\ (x;\ a)$ сопряженного уравнения, имеющему особенность в точке a.

Величина $vf = fV/\Gamma^{m_1-1/2}$ бесконечна вдоль части границы, а именно, на коноиде Γ. Эта величина имеет на нем степенную особенность дробного порядка $m_1 - 1/2$. К m-кратному интегралу от этой величины применимы соображения, изложенные выше (они не нужны только при $m_1 = 1$, т. е. при $m = 3$).

Исключительный случай имеет место в окрестности точки a, где Γ есть бесконечно малая не первого, а второго порядка. Следовательно, здесь нужно использовать ту же процедуру, что и в случае обычных многократных интегралов: нужно отделить от области интегрирования окрестность точки a при помощи малой поверхности Σ (рис. 18), окружающей эту точку. Само собой разумеется, бесконечно малая окрестность между Σ и точкой a должна быть m-го порядка малости (п. 91) (это имеет место, например, если взять малую сферу с центром в a).

---

[1]) Как и ранее, мы даем схематическую фигуру, получаемую при пересечении рассматриваемой m-мерной области двумерной плоскостью, проходящей через эту точку a.

[2]) Основная формула, о которой будет идти речь,— та, которая записана в пп. 37—40. Как мы упомянули в п. 40, если мы хотим, чтобы уравнения были инвариантны по отношению к точечному преобразованию переменных x, формулы следует записать иначе, вводя под знак $\iiint$ не элемент $dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, а произведение этого элемента на $1/\sqrt{|\Delta|}$. Это видоизменение, бесполезное, впрочем, в большинстве приложений, настоятельно необходимо в некоторых теоретических исследованиях, относящихся к данному вопросу. Изменения, которые нужно внести в вычисления, чтобы учесть это, указаны в приложении, помещенном в конце монографии.

Пусть T' — остаток области T, после того как от нее отделили область при помощи поверхности Σ.

В области T' применим основную формулу

$$\Big|\overline{\iiint vf\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m} +$$

$$+\Big|\overline{\iint\left(v\frac{du}{d\nu}-u\frac{dv}{d\nu}+Luv\right)dS} = 0. \tag{F}$$

От левой части берется конечная часть, т. е. вычитаются бесконечные на Г величины, имеющие степенную особенность дробного порядка. Следовательно, нужно:

1) взять конечную часть первого интеграла (F) (m-кратный интеграл по области T');

2) вычислить аналогичным путем конечную часть второго ($m-1$)-кратного интеграла, распространенного по заданному многообразию S;

3) *исключить интеграл, относящийся к границе* Г, поскольку этот последний имеет степенную особенность дробного порядка. Именно этот интеграл исключается в методе Кирхгофа, так как он интегрируется точно, и в методе Вольтерра, поскольку он тождественно равен нулю. Здесь получается тот же результат с помощью другой процедуры, которая была объяснена в п. 94. Поскольку рассматриваемый интеграл имеет степенную особенность дробного порядка, дополнительные члены на границе, неявно учитываемые в 1), 2) и 4) (см. ниже), будут такими же[1]. Сам факт, что сумма интегралов (F) обращается в нуль, влечет за собой, что сумма этих четырех величин, имеющих степенную особенность дробного порядка, обращается в нуль.

104. 4) Если форма области T такова, что точка a расположена вне ее (рис. 19 и 20), то можно просто применить основную формулу и получить

$$\Big|\overline{\iiint vf\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m} + \Big|\overline{\iint\left(v\frac{du}{d\nu}-u\frac{dv}{d\nu}+Luv\right)dS} = 0.$$

В теории потенциала это соответствует классической формуле (формула (8) книги I, п. 15) для случая, когда начало радиус-векторов лежит вне поверхности интегрирования.

Но в настоящем случае нужно учесть интеграл по Σ, из которого нужно выделить (как и для S) конечную часть. Нужно

[1]) В условии (1) интеграл от этого дополнительного члена берется по Г или, вернее, по поверхности, которая в конечном итоге совпадает с Г. В условиях (2) и (4) предельные положения областей интегрирования, соответствующих дополнительным членам, являются ребрами пересечения Г с S и Σ.

определить, во что обращается эта величина, когда Σ стягивается в точку a.

Проведем через эту точку внутрь T геодезические линии, определяемые дифференциальными уравнениями (L) и зависящие от $m-1$ параметра $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$. Положение точки на каждой из них определяется переменной s п. 55. В каждой точке поверхности Σ переменная s имеет определенное значение (зависящее от

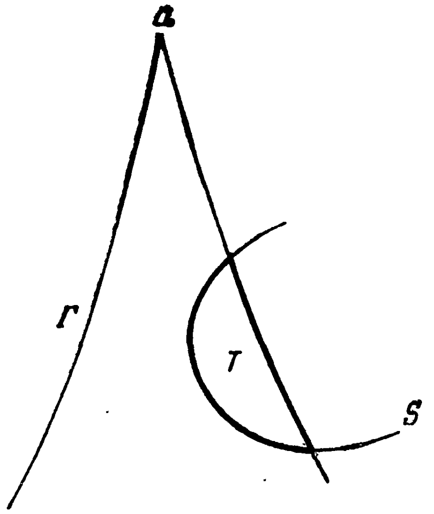

Рис. 19.

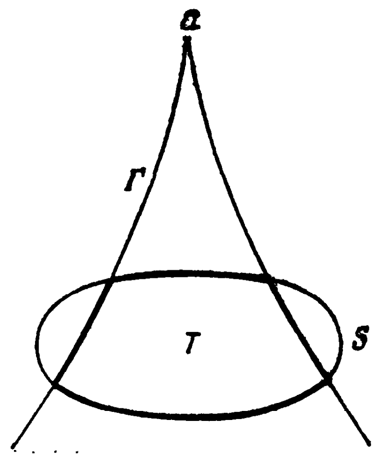

Рис. 20.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$), которое очень мало, так же как и ее производные до порядка [1] m_1. Интеграл

$$\left|\iint\left(v\frac{du}{d\nu}+Luv\right)dS\right| = \left|\iint\frac{V\dfrac{du}{d\nu}+LuV}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}\,ds\right| \tag{37}$$

стремится к нулю. Так как величины

$$\pi_i\,dS = \pm\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1})}\,d\lambda_1\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{m-1},$$

которые входят в числитель под знаком $\iint$, имеют порядок s^{m-1}, в то время как знаменатель

$$\Gamma^{\frac{m-2}{2}} = s^{m-2}H^{\frac{m-2}{2}}(x_1', x_2', \ldots, x_m'),$$

где $x_i' = \dfrac{dx_i}{ds}$, содержит множителем только s^{m-2}, то коэффициент при

$$\frac{1}{H^{\frac{m-2}{2}}(x_1', x_2', \ldots, x_m')}$$

[1] Это вытекает из принципов, установленных в дополнительном замечании к кн. II. См. ниже п. 106.

имеет, следовательно, порядок s, и то же самое справедливо для его производных различного порядка по $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$. При этих условиях вычисления пп. 85 и 93 показывают, что интеграл (37) также имеет порядок s.

То же самое применимо к члену

$$-\left|\overline{\iint u \frac{dv}{d\nu}\, dS}\right.$$

с частью

$$\left|\overline{\iint \frac{u\dfrac{dV}{d\nu}}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}\, dS}\right. ,$$

в которую не входят производные Г.

105. Наконец, возьмем оставшуюся часть

$$\frac{m-2}{2}\left|\overline{\iint \frac{uV\dfrac{d\Gamma}{d\nu}}{\Gamma^{m/2}}}\right. = \frac{m-2}{2}\left|\overline{\iint \frac{\frac{1}{2}uV\sum \dfrac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\dfrac{\partial A}{\partial \pi_i}\, dS}{\Gamma^{m/2}}}\right. . \qquad (37')$$

Пользуясь обозначениями пп. 55—58, будем иметь

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i} = 2sp_i,$$

и, следовательно,

$$\sum \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial \pi_i} = 2s\sum p_i \frac{\partial A}{\partial \pi_i} = 2s\sum \pi_i \frac{\partial A}{\partial p_i} = 4s\sum \pi_i \frac{dx_i}{ds}.$$

Возвращаясь к выражению $\pi_i\, dS$, записанному выше, мы видим, что коэффициент при $4s$, умноженный на dS, есть разложение в ряд детерминанта

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{ds} & \dfrac{dx_2}{ds} & \cdots & \dfrac{dx_m}{ds} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\lambda_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\lambda_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\lambda_{m-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\lambda_{m-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial\lambda_{m-1}} \end{vmatrix} d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1},$$

где λ взяты в таком порядке, чтобы детерминант был положителен, поскольку s возрастает от нулевого значения в точке a по направлению к области T'.

Все строки предыдущего детерминанта, за исключением первой, содержат множителем [1] s, так что подынтегральное выражение (при определенных значениях λ) остается конечным, когда s стремится к нулю.

С другой стороны, на Σ приближенно выполняется

$$uV = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a}}\, u(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a}}\, u_a.$$

Слово «приближенно» употреблено здесь в смысле, несколько отличающемся от обычного в аналогичных случаях. Оно означает, что величины, которыми мы пренебрегаем, очень малы *вместе со своими производными по* λ (до m_1-го порядка).

Учитывая это, мы можем заменить $\frac{dx_i}{ds}$ значениями x_i' в начале координат, а производные $\frac{\partial x_i}{\partial \lambda}$ на $s\frac{\partial x_i'}{\partial \lambda}$. Таким образом, мы получаем выражение

$$\frac{(m-2)\,u_a}{\sqrt{\Delta}} \iint \frac{\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \ldots & x_m' \\ \frac{\partial x_1'}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_2'}{\partial \lambda_1} & \ldots & \frac{\partial x_m'}{\partial \lambda_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1'}{\partial \lambda_{m-1}} & \frac{\partial x_2'}{\partial \lambda_{m-1}} & \ldots & \frac{\partial x_m'}{\partial \lambda_{m-1}} \end{vmatrix}}{H^{m/2}(x_1', x_2', \ldots, x_m')}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1} \tag{38}$$

Интеграл, который умножается на $(m-2)u_a$, легко привести к результату п. 97. Если мы обычным способом проведем через начало координат прямую

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_m}{\alpha_m},$$

направление которой зависит от $m-1$ параметра $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, и если мы выберем на ней точку

$$P(x_1 = \alpha_1 s, \quad x_2 = \alpha_2 s, \quad \ldots, \quad x_m = \alpha_m s)$$

[1] Каждый элемент содержит, правда, кроме члена, пропорционального s, член, содержащий производные от этой величины по λ. Однако, согласно гипотезе относительно Σ, приведенной в тексте, это не изменит порядка величины детерминанта.

(обозначая через s другую функцию от λ), то интеграл

$$\frac{1}{m}\iint \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial\lambda_1} & \dots & \frac{\partial\alpha_m}{\partial\lambda_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial\lambda_{m-1}} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial\lambda_{m-1}} & \dots & \frac{\partial\alpha_m}{\partial\lambda_{m-1}} \end{vmatrix} s^m\, d\lambda_1 \dots d\lambda_{m-1}$$

будет представлять [1]) собой объем, заключенный между поверхностью S, описанной точкой P и конусом, имеющим контур на S в качестве основания и начало координат в качестве вершины.

Интеграл $\iint$ в формуле (38) равен, следовательно, конечной части объема двуполостного гиперболоида, умноженной на $m = 2m_1 + 1$ в соответствии с вычислениями п. 97 и имеет, следовательно, значение

$$\frac{1}{2m_1+1}\,\frac{(-1)^{m_1}\Omega_{2m_1-1}}{2m_1 C_{m_1}}\,\frac{1}{\sqrt{D}},$$

где D — дискриминант формы H. Интеграл, распространенный вдоль Σ, имеет, следовательно (ввиду равенства $D\Delta = 1$), предельное значение (п. 99):

$$\frac{(-1)^{m_1}\Omega_{2m_1-1}}{C_{m_1}}\cdot\frac{2m_1-1}{2m_1}u_a = (-1)^{m_1}\frac{\Omega_{2m_1-1}}{C_{m_1-1}}u_a = (-1)^{m_1}\pi\Omega_{2m_1-2}u_a.$$

---

[1]) В самом деле, пусть dS — элемент поверхности S, а $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ — направляющие косинусы внешней нормали. Учитывая значения $\pi_1 dS$, $\pi_2 dS, \dots,$ будем иметь

$$V = \iint \frac{1}{m}(\pi_1 x_1 + \dots + \pi_m x_m)\, dS =$$

$$= \frac{1}{m}\iint \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_m \\ \frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial x_m}{\partial\lambda_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial\lambda_{m-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_{m-1}} & \frac{\partial x_m}{\partial\lambda_{m-1}} \end{vmatrix} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{m-1}.$$

Если теперь заменить x_i на $s\alpha_i$ и, следовательно, $\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_k}$ на $s\frac{\partial\alpha_i}{\partial\lambda_k} + \alpha_i\frac{\partial s}{\partial\lambda_k}$, то можно отбросить вторые члены этого выражения (при $i = 1, 2, \dots, m$), поскольку они пропорциональны величинам x_i, которые составляют первую строку детерминанта. Мы получаем результат, приведенный в тексте.

Искомое значение u_a дается формулой

$$(-1)^{m_1}\pi\,\Omega_{2m_1-2}u_a = (-1)^{m_1}\frac{\Omega_{2m_1-2}}{C_{m_1-1}}u_a =$$

$$= -\left|\overline{\iiint_T vf\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m} + \left|\overline{\iint_{S_0}\left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} - Luv\right)dS}\right.\right. =$$

$$= -\left|\overline{\iiint_T vf\,dx_1\ldots dx_m} + \left|\overline{\iint_{S_0}\left(u_0\frac{dv}{d\nu} - u_1 v - Lu_0 v\right)dS}\right.\right.. \qquad (39)$$

При $m = 3$ ($m_1 = 1$) коэффициент при u_a равен

$$-\Omega_1\frac{1}{2C_1} = -2\pi\,(= -\pi\Omega_0).$$

106. Из предыдущего следует, что интеграл $\iiint$ в формуле (39) по области T существует по крайней мере тогда, когда Σ стремится к a так, что близость имеет порядок m_1. Это можно также видеть непосредственно. Вычисляя этот член с помощью криволинейных координат $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, s$, будем иметь

$$\iiint_T vf\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m =$$

$$= \left|\overline{\iiint \frac{Vf}{s^{m-2}H^{\frac{m-2}{2}}}\,\frac{D(x_1,\ldots,x_m)}{D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},s)}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{m-1}\,ds.}\right.$$

Функциональный определитель $\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, s)}$ содержит множителем s^{m-1} и, следовательно, в подынтегральное выражение входит величина

$$\frac{1}{H^{\frac{m-2}{2}}\left(\frac{x_1-a_1}{s}, \frac{x_2-a_2}{s}, \ldots, \frac{x_m-a_m}{s}\right)},$$

имеющая лишь особенность дробного порядка.

Из этой формулы или из предыдущей видно, что ошибка, которую мы делаем, заменяя T на T', т. е. разность между интегралами $\iiint$ по объему T' и по объему T, можно выразить в функции от:

частных производных f до порядка $m_1 - 1$ и коэффициентов уравнения до порядка m_1;

соответствующих производных от V;

частных производных до порядка m_1 по λ от координат точки, в которой каждая геодезическая, выходящая из a, пересекает Σ

или, что то же самое, от соответствующего значения s. Действительно, сами эти производные выражаются [1]) через соответствующие производные от x по s на геодезической, через соответствующие частные производные левой части $\Sigma(x_1, \ldots, x_m)$ уравнения для Σ и величину, обратную $\frac{d\Sigma}{ds}$. Это можно видеть, если выразить x и, следовательно, Σ через $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s$, а именно:

$$\Sigma(x_1, \ldots, x_m) = \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s)$$

и продифференцировать неявную функцию

$$\Phi(\lambda_1, \ldots, s) = 0.$$

Это доказывает, чем мы и воспользуемся в дальнейшем, что величина под знаком $\iiint$ сходится равномерно [2]). Иными словами, в области, где коэффициенты уравнения голоморфны (и, следовательно, V голоморфно по $2m$ переменным, которые оно содержит), а f регулярно (имеет непрерывные производные вплоть до порядка $m_1 - 1$), не надо знать положение точки a, чтобы указать верхнюю грань (очень малую) упомянутой ошибки, если только известны верхние грани (очень малые) расстояния между Σ и точкой a — пусть это будет ε — и частных производных вплоть до m_1-го порядка от x по λ. Эта последняя величина существует и очень мала при малом ε (нижняя грань величины $\frac{d\Sigma}{ds}$ внутри коноида предполагается известной), если производные любого порядка $k \leqslant m$ от Σ по x остаются конечными или даже если их произведения на ε^{k-1} остаются по абсолютному значению ниже фиксированной грани [3]), как это имеет место, например, в случае, когда Σ — сфера радиуса ε с центром в a.

---

[1]) Выбор параметров λ и множителя пропорциональности для s (см. п. 57) на каждой геодезической предполагается таким, что он удовлетворяет просто условиям регулярности (имеется в виду регулярность начальных значений x' по λ).

[2]) Следует заметить, что смысл этого слова отличается от того, в котором он употреблялся в п. 84.

[3]) Это эквивалентно тому, что абсолютные значения соответствующих производных на Σ_1 лежат ниже верхней фиксированной грани, причем Σ_1 получается из Σ при помощи гомотетии, центр которой есть точка a, а коэффициент равен $1/\varepsilon$.

Такая гомотетия меняет производные x по $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s$, но не увеличивает порядка величины их отношений к s (как легко можно видеть, эти отношения производных по s даже уменьшаются).

Такого изменения можно избежать, если, прежде чем производить гомотетию, преобразовать фигуру, введя «нормальные» координаты (п. 57 кн. II). Как известно, точечное преобразование не меняет порядка величины производных, если конечны производные от A_{ik} вплоть до того же порядка дифференцирования плюс один (см. дополнительное замечание в кн. II).

107. Формула, приведенная выше, имеет смысл только тогда, когда поверхность S регулярна и когда величины u_0, $u_1 = \frac{du}{d\nu}$ дифференцируемы по криволинейным регулярным координатам на S или, например, по $m - 1$ декартовым координатам. Так как с самого начала сделано соответствующее предположение относительно u (п. 102), то предыдущего рассуждения недостаточно для того, чтобы показать, что эти условия необходимы для существования u и что, применяя этот метод, мы не упустили решений, которые не являются дифференцируемыми достаточное число раз.

Ответом служит пример п. 78 для случая (e_{m-1}), в котором ясно непосредственно из вычислений, что, вообще говоря, решений нет.

Тот же самый метод (подобный методу Тедоне) можно было бы применить для общего уравнения (E). Иными словами, путем повторного интегрирования вдоль линии $\mathfrak{C}$ можно было бы вывести из v другое решение $\boldsymbol{v}$ сопряженного уравнения, имеющее на $\mathfrak{C}$ логарифмическую особенность и обращающееся в нуль (а не в бесконечность)на Г. Следуя этому методу, можно было бы получить значение интеграла типа (10′), и, наконец, найти само u с помощью $(m - 2)$-кратного дифференцирования. Если это дифференцирование возможно, то результат является единственным, так что:

вообще говоря, решения не существует, когда формула (39) не имеет смысла;

в противном случае не существует другого решения, отличного от того, которое дается этой формулой.

108. Ясно, что при $m = 3$ предыдущие результаты должны быть эквивалентны тем, которые выводятся из расчетов пп. 72—77 с помощью дифференцирования формулы (10) по t_0. Действительно, можно показать, что это заключение справедливо и что можно выполнить дифференцирование при помощи элементарных методов и получить требуемое значение u_a как предел суммы двойного и криволинейного интегралов, а также получить явное выражение для последнего дополнительного члена. Пусть точкам на S_0 сопоставлены криволинейные координаты θ и λ (в функции которых S_0, следовательно, и рассматривается). Разделим S_0 на две части S_1 и S_2, причем последняя содержит окрестность кривой γ, по которой пересекаются S и Г. Таким образом, граница (τ) между S_1 и S_2 будет соответствовать $\theta = t_0 - \tau'$, где через τ' обозначена малая величина, являющаяся либо постоянной, либо функцией λ (в последнем случае она такова, что ее производная по λ обладает тем же порядком малости, что и само τ'). Устремим, наконец, τ' и, следовательно, S_2 к нулю, так что можно пренебречь всеми членами, бесконечно малыми по τ'.

Интеграл, распространенный по S_1, можно без труда [1]) дифференцировать под знаком $\iint$. Это равносильно тому, что функция v заменяется ее производной по t_0, т. е. величиной $\chi(t_0)\cdot v$. При этом, очевидно, мы получаем член, соответствующий формуле (38), с той разницей, что интегрирование ограничено поверхностью S_1, а не поверхностью S_0.

Эта предосторожность является излишней для членов, которые содержат в качестве множителя только v. В самом деле, поскольку эта последняя величина пропорциональна $\sqrt{t_0-\theta}$, ее производная обращается в бесконечность как $\frac{1}{\sqrt{t_0-\theta}}$. Интегрирование этого выражения можно производить на всей поверхности S_0, или, что то же самое, интегралы по S_2 от соответствующих членов дадут (если действовать аналогично) производные, которые обращаются в нуль одновременно с τ'.

Следовательно, остается рассмотреть член, содержащий $dv/d\nu$. Мы видим (ср. п. 75), что

$$v = 2\left(\frac{\chi V}{\sqrt{w}}+\ldots\right)\sqrt{t_0-\theta}\,.$$

Члены, замененные многоточием, содержат более высокие степени [2]) $t_0-\theta$. Следовательно, если ν означает конормаль к S, то имеем

$$\frac{dv}{d\nu} = -\left(\frac{\chi V}{\sqrt{w}}+\ldots\right)\frac{1}{\sqrt{t_0-\theta}}\frac{d\theta}{d\nu},$$

что можно записать (по-прежнему заменяя многоточием члены более высокого порядка по $t_0-\theta$) в виде [2])

$$\frac{dv}{d\nu} = \left(\frac{\chi V}{w\sqrt{w}}+\ldots\right)\frac{1}{\sqrt{t_0-\theta}}\frac{d\Gamma}{d\nu}, \tag{40}$$

так как $\Gamma = w(t_0-\theta)$, причем первый множитель не равен нулю.

Теперь нужно получить выражение для $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ или, точнее, для $\frac{d\Gamma}{d\nu}dS$. Следует заметить, что существует два вида производных от x по λ. Действительно, можно считать x функцией либо трех независимых переменных θ, λ, s, либо только двух первых из них, причем s будет функцией θ и λ, определяемой уравнением для S. Сохраним символ ∂ для производных первого рода, а производные

---

[1]) Это также справедливо для пространственного интеграла, который можно, впрочем, не учитывать, так как при $m=3$ нет нужды в особых предосторожностях при его рассмотрении.

[2]) Мы исходим из гипотезы об аналитичности начальных данных. Вычисления легко распространить на случай, когда эти данные предполагаются просто регулярными, если использовать соответствующие приемы, такие, как интегрирование по частям.

второго рода будут обозначаться буквой d. Они связаны с первыми соотношениями

$$\frac{dx_i}{d\theta} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta} + \frac{\partial s}{\partial \theta}\frac{\partial x_i}{\partial s}. \tag{41}$$

Аналогичные равенства справедливы для $\frac{dx_i}{d\lambda}$. Отсюда получаем (выбирая для x соответствующий порядок по отношению к направлению нормали)

$$\frac{d\Gamma}{d\nu}\,dS = \sum \pi_i\,dS\,\frac{\partial A}{\partial P_i} = \pm \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{d\theta} & \frac{dx_2}{d\theta} & \frac{dx_3}{d\theta} \\ \frac{dx_1}{d\lambda} & \frac{dx_2}{d\lambda} & \frac{dx_3}{d\lambda} \\ \frac{\partial A}{\partial P_1} & \frac{\partial A}{\partial P_2} & \frac{\partial A}{\partial P_3} \end{vmatrix} d\theta\,d\lambda. \tag{40'}$$

Величины $\frac{\partial A}{\partial P_i}$, как известно, равны $2s\frac{\partial x_i}{\partial s}$. Это показывает, что полные производные d в вышеприведенной формуле можно заменить частными производными ∂, ничего более не меняя как это следует из формулы (41).

Получим другое выражение для $\frac{d\Gamma}{d\nu}\,dS$, исходя из уравнения $G(x_1, x_2, x_3) = 0$ для S и записывая равенство

$$\pi_i\,dS = \frac{\partial G}{\partial x_i}\,dS_G.$$

С учетом предшествующих выражений для $\frac{\partial A}{\partial P_i}$ это дает, что величина $\frac{d\Gamma}{d\nu}\,dS$ равна

$$2s\frac{dG}{ds}\,dS_G.$$

Мы не будем вводить эту величину в последующие расчеты. Однако из нее мы легко получаем ответ [1]) на вопрос о знаке в формуле (40′). Известно, что формула для G должна быть записана таким образом, чтобы в области интегрирования, т. е. с той стороны S, где находится точка a, она была положительной. Величина $s\frac{\partial G}{\partial s}$ очевидно, отрицательна. Отсюда видно, что в левой части формулы (40′) нужно взять знак «—», если берется абсолютное значение детерминанта.

---

[1]) С геометрической точки зрения можно заметить, что конормаль ν направлена к той же стороне S, что и соответствующая нормаль (вследствие того, что $A(\pi_1, \pi_2, \pi_3) > 0$). Так как, с другой стороны, это конормальное направление лежит внутри характеристического конуса, ясно (рис. 21), что оно направлено к *внешней* стороне Г.

Учитывая формулу (40′), мы найдем выражение для стоящего под интегралом члена $u\frac{dv}{d\nu}dS$, который имеет форму

$$\frac{Q}{\sqrt{t_0-\theta}}\,d\theta\,d\lambda,$$

где Q разлагается по степеням $(t_0-\theta)$, а именно: $Q=Q_0+\ldots$ Отложим пока интегрирование по λ. К нему мы вернемся в конце расчета. В результате интегрирования по θ от $\theta=t_0-\tau'$ до $\theta=t_0$ мы получим

$$2(Q_0+\ldots)\sqrt{\tau'}$$

(коэффициент при $2\sqrt{\tau'}$ мы разложим здесь в ряд по степеням τ' с постоянным членом Q_0).

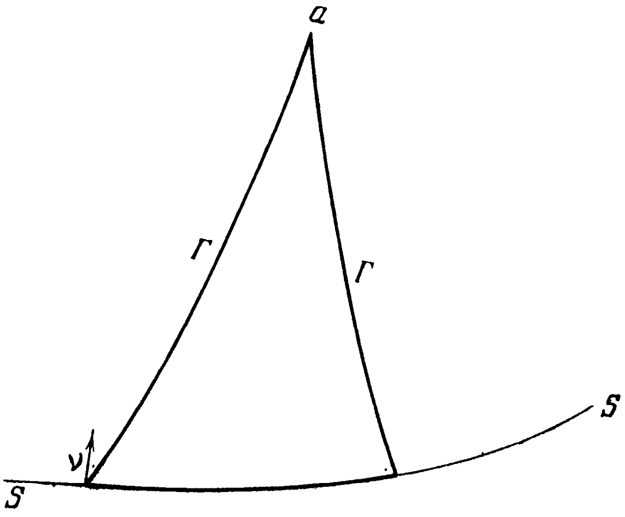

Рис. 21.

Именно это выражение нужно продифференцировать по t_0. Дифференцировать нужно как член $\sqrt{\tau'}$, так и коэффициенты разложения Q. Однако единственный нужный член, т. е. член, не являющийся бесконечно малым при малом τ', есть, очевидно, $\frac{Q_0}{\sqrt{\tau'}}$. Деля его на χ и учитывая значение Q, определяемое формулами (40) и (40′), будем иметь

$$-\frac{uV}{w\sqrt{w\tau'}}\left|\frac{dx_i}{d\theta}\,\frac{dx_i}{d\lambda}\,\frac{\partial A}{\partial P_i}\right|=$$

$$=-uv\frac{1}{w}\begin{vmatrix}\frac{dx_1}{d\theta} & \frac{dx_2}{d\theta} & \frac{dx_3}{d\theta}\\ \frac{dx_1}{d\lambda} & \frac{dx_2}{d\lambda} & \frac{dx_3}{d\lambda}\\ \frac{\partial A}{\partial P_1} & \frac{\partial A}{\partial P_2} & \frac{\partial A}{\partial P_3}\end{vmatrix}=-uvK.$$

Здесь берется абсолютное значение детерминанта, а для каждого множителя, за исключением v, взято то значение, которое он принимает на Г.

Начальное значение w то же, что и $\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}$, и это позволяет нам записать множитель при $-uv$ в другой форме. Из соотношений

$$P_1\frac{dx_1}{d\lambda}+P_2\frac{dx_2}{d\lambda}+P_3\frac{dx_3}{d\lambda}=0$$

и (так как Г есть характеристика)

$$2A(P_1, P_2, P_3) = P_1 \frac{\partial A}{\partial P_1} + P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} + P_3 \frac{\partial A}{\partial P_3} = 0$$

следует, что величины

$$\frac{dx_2}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_3} - \frac{dx_3}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_2}, \quad \frac{dx_3}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_1} - \frac{dx_1}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_3}, \quad \frac{dx_1}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_2} - \frac{dx_2}{d\lambda}\frac{\partial A}{\partial P_1}$$

пропорциональны $2P_1$, $2P_2$, $2P_3$, а так как

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = 2\left(P_1 \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + P_2 \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + P_3 \frac{\partial x_3}{\partial \theta}\right),$$

то множитель пропорциональности точно равен K. Вводя (подобно тому, как это делается в теории абелевых функций и как это делал Фредгольм в своем мемуаре в Acta Math. v. XXIII) три произвольных величины k_1, k_2, k_3, выбор которых несуществен, мы видим, что после интегрирования по λ результат принимает вид [1])

$$2\pi u_a = \lim_{\tau' \to 0} \left\{ \iint_{S_1} \left(v \frac{du}{d\nu} - u \frac{dv}{d\nu} + Luv\right) dS + \int_{(\tau')} \left| \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \frac{\partial A}{\partial P_1} & \frac{\partial A}{\partial P_2} & \frac{\partial A}{\partial P_3} \end{vmatrix}}{2(k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3)} \right| uv \right\}. \tag{42}$$

Предполагается, что f равно нулю. Функция χ и выбор кривой $\mathfrak{C}$ не оказывают никакого влияния на результат.

109. Присутствие символа $\overline{|}$ приводит к тому, что значение u, выражаемое при помощи определенного интеграла, содержащего величины u_0, u_1, f под знаком $\iint$ или $\iiint$, не является непрерывным нулевого порядка по отношению к этим величинам. Оно непрерывно порядка m_1 (п. 20) по отношению к u_0 и порядка $m_1 - 1$ по отношению к u_1 и f.

Кроме того, u непрерывно порядка m_1 по отношению к форме поверхности S. Это можно вывести из следующего. Если с поверхностью S в точке M пересекается под конечным углом геодезическая, исходящая из произвольной заданной точки a и определяе-

---

[1]) Если τ' постоянно, то на γ' величина $\frac{dx_i}{d\lambda} d\lambda$ равна dx_i. Это несправедливо, если τ' переменно, но соответствующая относительная ошибка бесконечно мала (вследствие предположения относительно $d\tau'/d\lambda$) и предельное значение, приведенное в тексте, не изменится.

мая $m - 1$ параметром $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, то производные до p-го порядка по λ от координат точки пересечения являются функциями самих координат, производных (вплоть до того же порядка) вдоль геодезической и производных вдоль S. Итак, новую поверхность $\overline{S}$, очень близкую к S, та же геодезическая пересечет в точке $\overline{M}$, очень близкой [1]) к M. Если близость поверхностей имеет порядок p, то вышеупомянутые производные меняются очень слабо при переходе от $\overline{S}$ к S. То же самое заключение справедливо для несобственного интеграла.

Первая производная от u_a также будет непрерывной порядка $m_1 + 1$ по отношению к u_0, порядка m по отношению к u_1 и f и порядка $m_1 + 1$ по отношению к форме поверхности S.

110. Следствия, относящиеся к волнам и их диффузии. С другой стороны, из формы области интегрирования S_0 в формуле (38) непосредственно выводятся классические результаты. Очевидно, что эта формула наглядно показывает значение характеристик, имеющих физический смысл волн, как это уже имело место в начале книги II в формулах для отдельных уравнений, используемых чаще всего. Ясно, что на значение u_a влияют не все данные на S а только те из них, которые заданы в точках на S_0, т. е. в точках, находящихся внутри обратного полуконоида с вершиной в точке a.

Итак, этот характеристический полуконоид ведет себя подобно акустическому рожку, что уже отмечалось для уравнения цилиндрических волн, где эту роль играла полость конуса вращения (п. 31).

---

[1]) Этот факт едва ли отличается от классической теоремы о непрерывности неявных функций f и доказывается с помощью тех же самых рассуждений. Проведем через точку M поверхности S геодезическую линию такую, что $\frac{dG}{ds} \neq 0$, где $G = 0$ есть уравнение S а s есть длина (обычная) дуги геодезической, отсчитываемая от точки M, причем производная берется в самой точке M (при $s = 0$). С каждой стороны от точки M будет расположена некоторая дуга этой геодезической, вдоль которой dG/ds сохраняет свой знак. Пусть s' равна длине этой дуги, когда она меньше ε, и $s' = \varepsilon$ в противоположном случае. Тогда для $s = \pm s'$ функция G будет иметь значения G' и $-G''$, положительное и отрицательное соответственно. Проведем через каждую точку M поверхности S (или через ограниченную часть поверхности S) все геодезические, для которых $\left(\frac{dG}{ds}\right)_0$ больше фиксированного числа $a > 0$. Поскольку они зависят непрерывным образом от $2m$ параметров, входящих в общее уравнение геодезических, то отсюда следует, что соответствующие им величины G', G'' будут иметь минимум G_1.

Ясно, что вторая поверхность $\overline{S}$ пересечет каждую из предыдущих геодезических на расстоянии от S, меньшем ε, если она находится в достаточно близкой (даже нулевого порядка) окрестности S, т. е. ее уравнение имеет форму $G = \delta$, причем $|\delta| < G_1$.

Отсюда, а также из положений дополнительного замечания к книге II вытекает основное заключение относительно производных.

Обратно (ср. п. 32 книги II), значения u_0 и u_1 в определенной точке x' на S (рис. 22) не влияют на значения u в точках, которые находятся вне прямого полуконоида с вершиной в x'. С физической точки зрения это означает, как и ранее (книга II), что ни один начальный импульс, исходящий из точки x', не может подействовать на другую точку раньше, чем ее достигнет соответствующая волна.

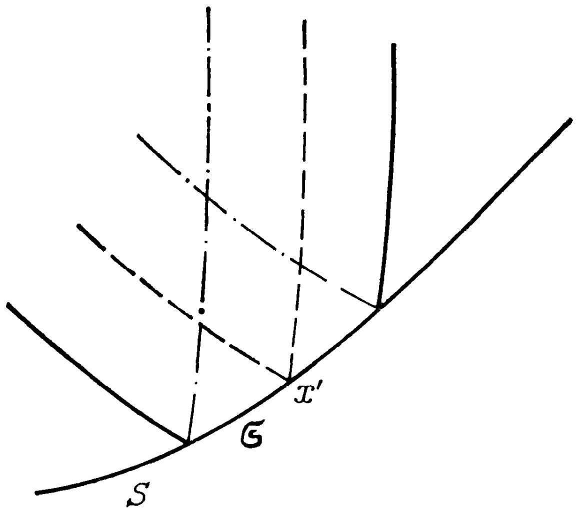

Рис. 22.

Если начальный импульс выходит не из точки, а из области $\mathfrak{S}$ поверхности S, то часть пространства (или, вернее, мира), на которую может подействовать этот импульс, состоит из внутренних частей всех полуконоидов, вершины которых находятся внутри $\mathfrak{S}$. Такая область ограничена огибающей рассматриваемых полуконоидов, вершины которых x' расположены вдоль контура Λ на поверхности $\mathfrak{S}$. Эта огибающая (вследствие хорошо известных теорем для уравнений с частными производными первого порядка) снова удовлетворяет условию (A). Она является характеристикой, или, другими словами, волной [1]).

Из этих заключений также следует, как это уже отмечалось для волн в трехмерном пространстве или для цилиндрических волн [2]), что решения гиперболического уравнения могут быть и неаналитическими [3]). Ибо, если сами данные не являются аналитическими, то, очевидно, не существует соотношения, связывающего между собой значения u в окрестности точек a и a', если исходящие из этих точек характеристические коноиды пересекаются с поверхностью S по линиям, которые находятся одна вне другой. Следовательно, одна совокупность значений не является аналитическим продолжением другой. Можно добавить, что разрыв N-й производной u_0 или u_1 вызывает соответствующий разрыв решения в некоторой точке a, расположенной на том же самом коноиде. Если различные множества значений u_0 и u_1 имеют вдоль

---

[1]) Рассматриваемая огибающая состоит из двух поверхностей: внешней (соответствующей распространению волн вне $\mathfrak{S}$) и внутренней (для волн, распространяющихся внутрь $\mathfrak{S}$). Первая, если не учитывать последующие уточнения (см. далее), ограничивает область, упоминаемую в тексте.

[2]) См. Duhem, Hydrodynamique, élasticite, acoustique.

[3]) Обратное заключение противоречило бы самому факту существования (которое будет доказано далее) решения задачи Коши, что вытекает из рассуждений п. 15 кн. I.

ребра соприкосновение друг с другом произвольного порядка N, то соответствующие им функции u будут иметь соприкосновение того же порядка вдоль всей вышеупомянутой волны, исходящей из этого ребра.

111. Диффузия волн. Мы уже видели, что при распространении волн нужно проводить различие с точки зрения принципа Гюйгенса в его специальном смысле, что мы называли положением (B), или принципом Гюйгенса в узком смысле.

Из формул (P) и (P′) (книга II) видно, что поведение волн в трехмерном пространстве и цилиндрических волн носит совершенно различный характер. Формула (P) дает значение решения в виде двойного интеграла — в наших обозначениях это просто $\int$,— взятого вдоль поверхности сферы, т. е. вдоль *ребра* пересечения характеристического конуса с начальной плоскостью. Точка x' может повлиять на мировую точку, лежащую в вершине конуса, тогда, когда она находится по отношению к ней точно «на волне» (п. 32 кн. II), и только в этом случае. Если u_0 и u_1 равны нулю, за исключением малой окрестности определенной точки x' (начальный импульс, локализованный в непосредственной близости от точки x'), то значение u, которое представляет собой последующее действие этого импульса, будет равно нулю всюду, кроме непосредственной окрестности прямого полуконоида с вершиной в x' Для любой данной точки (x_0, y_0, z_0) обычного трехмерного пространства это соответствует малому интервалу времени, после которого все возвращается к состоянию покоя. Именно в этом заключается положение (B).

Совсем иным будет поведение цилиндрических волн. Формулы Вольтерра или формула (P′), если ограничиться самым простым случаем задачи, относящейся к $t = 0$, выражают решение уравнения (e_2) в функции от u_0 и u_1, стоящих под знаком двойного интеграла (в наших обозначениях соответствующего символу $\iint$), который берется в плоскости $t = 0$ по всей внутренней части следа характеристического коноида. Они показывают, следовательно, что для таких волн точка начальной плоскости $t = 0$ может повлиять на мировую точку (x_0, y_0, t_0), т. е. на точку (x_0, y_0) в момент t_0 не только тогда, когда они находятся «на волне», но даже тогда, когда они находятся «за волной» по отношению друг к другу. Другими словами, начальный импульс в двумерной среде распространяется с постоянной скоростью ω, и его влияние в точке (x_0, y_0) становится заметным как раз в тот момент, когда волна достигает этой точки. Но это влияние не исчезает и *после* этого момента. Существует так называемый *остаточный интеграл*, соответствующий действию импульса уже после того момента, как волна прошла. Предположим, что в начальный момент ($t = 0$) импульс локализован в некоторой области $\mathfrak{S}$ плоскости. Тогда функции u_0 и u_1 будут тождественно равны нулю вне этой области, а величина $u(x_0, y_0, t_0)$ будет равна нулю только в том случае, если круг, по которому распространен $\iint$ в формуле (39), находится целиком вне $\mathfrak{S}$ (с физической точки зрения это означает, что волна, испущенная начальным импульсом, еще успела не достичь этой точки). Функция, конечно, станет отличной от нуля, когда окружность этого круга пересечет $\mathfrak{S}$ (это соответствует тем моментам времени, когда волны от начальных импульсов проходят через нашу точку). Она останется отличной от нуля и тогда — именно это и характеризует собой остаточный интеграл,— когда вышеупомянутый круг заключает в себе целиком поверхность $\mathfrak{S}$[1]. Это означает, что *в данном случае* принцип Гюйгенса в узком смысле (положение, ранее обозначенное буквой (B)) *несправедлив*. Спустя заданный промежуток времени t действие волны, исходящей из точки O, локализовано в данном случае не только на окружности с центром в O и с радиусом ωt, но также внутри этого круга. В этом случае часто говорят, что цилиндрические волны *диффундируют* в противоположность волнам (обычным, незатухающим) в трехмерном пространстве.

Если мы возьмем теперь любое другое уравнение с нечетным числом независимых переменных, то, очевидно, согласно формуле (39), мы всегда придем к тому же самому заключению.

Принцип Гюйгенса в узком смысле слова несправедлив для любого явления, которое описывается линейным уравнением с частными производными второго порядка с нечетным числом независимых переменных.

Всякое уравнение этого типа (с нечетным числом независимых переменных) дает остаточные интегралы[2].

---

[1]) Область влияния начального возмущения, локализованного вблизи поверхности $t = 0$, ограничена, как объяснено выше (см. примечание (1) на стр. 186), внешней волной, исходящей из ребра, являющегося границей $\mathfrak{S}$. Для волн, у которых диффузия отсутствует (волны в трехмерном пространстве), эта область заключена между двумя поверхностями (внешней и внутренней) характеристики, исходящей из этого ребра (см. рис. 22) и имеет кольцеобразную форму.

[2]) Дюгем (Hydrodynamique, élasticite, acoustique, t. II, p. 139) пытался выяснить, имеет ли уравнение (e_2) решения вида $\psi(r)F(r - \omega t)$, содержащие произвольную функцию F (предполагается, что ψ —определенное выражение, зависящее от r). Полученное им отрицательное заключение можно считать *апостериори* очевидным благодаря результату, приведенному в тексте. Ибо уравнение (e_3) имеет такие решения, и их существования достаточно (см. там же, t. I, liv. III, п. 2) для доказательства принципа Гюйгенса в форме (B). То же самое предложение для уравнения (e_2) привело бы, следовательно, к такому же заключению, которое, как мы теперь знаем, является ложным.

112. Отметим, кроме того, замечательный факт, относящийся к знаку этих остаточных интегралов. Предположим для простоты, что уравнение (E) не имеет свободного члена, т. е. $f = 0$, так что нужно учитывать только поверхностные интегралы $\iint$. Ясно, что по крайней мере для точки a, достаточно близкой к поверхности S, главную часть любого элемента, входящего в такой интеграл, будет давать член с наиболее высокой степенью Γ в знаменателе, т. е. член $u\frac{dv}{d\nu}$ или, в частности, выражение

$$-\frac{m-2}{2}\frac{uV\frac{d\Gamma}{d\nu}}{\Gamma^{m/2}} = -(m-2)uVs\frac{\sum \pi_i \frac{dx_i}{ds}}{\Gamma^{m/2}},$$

где π_i обозначают направляющие косинусы внутренней нормали к S в области T, т. е. той нормали, которая направлена в сторону точки a. Так как сумма $\sum \pi_i \frac{dx_i}{ds}$ отрицательна, то знак вышеприведенного выражения совпадает со знаком функции u.

Если бы мы имели дело с однократным интегралом, то его знак совпадал бы со знаком u на S (в предположении, что этот знак остается постоянным). Но здесь знак $\iint$ изменяется благодаря дополнительному $(m-2)$-кратному интегрированию, в результате которого с необходимостью получается противоположный знак.

Итак, левая часть должна иметь тот же знак, что и значения u на S, если мы по-прежнему предполагаем, что точка, в которой берется u, находится в окрестности поверхности S.

Следовательно, для четных значений m_1, т. е. для $m = 5, 9, 13, \ldots$ *знак определяется* $(m-1)$*-кратным интегралом*; *наоборот для* m_1 *нечетного, т. е. для* $m = 3, 7, \ldots$ *основной вклад дает дополнительный член, который имеет перевес.*

Если вернуться к вышеупомянутому случаю, когда присутствуют остаточные интегралы, то дополнительный член обращается в нуль. Следовательно, если u *положительно, то остаточный интеграл положителен для уравнения с* $4p+1$ *переменными и отрицателен для уравнения с* $4p+3$ *переменными.*

Так будет, в частности, по крайней мере тогда, когда рассматриваемая точка находится достаточно близко от поверхности S и заданные значения $\frac{du}{d\nu}$ не слишком велики по сравнению с u.

113. Случай, когда границами являются характеристики. Особым случаем будет тот, в котором S состоит из частей характеристик, что уже имело место при использовании метода Римана [1]) для $m = 2$.

Предыдущие формулы справедливы и для этого случая (что отмечалось Адемаром [2]) и Кулоном) при условии, что S пересекает характеристический коноид Г, вершина которого находится в произвольной точке некоторой области $\mathfrak{R}$ и ограничивает вместе с Г часть T пространства.

В этом случае уже не выполняется условие, что конормальная производная, которую мы систематически использовали, направлена вне поверхности S. Эту производную $\frac{dv}{d\nu}$ можно рассматривать как производную вдоль кривых (бихарактеристик), проведенных на самой S. Зная u, мы знаем значение ее в любой точке S.

Из наших формул следует, что u и $\frac{du}{d\nu}$ — это единственные величины, которые нужно знать на S, чтобы определить неизвестную функцию. Поэтому ясно, что *решение уравнения* (E) *определено, когда известны значения функции на границе, состоящей из частей характеристик* (при геометрических условиях, упомянутых ранее).

Хотя в каждой точке на S задано численное значение только одной величины, все же такая задача обладает всеми свойствами задачи Коши [3]).

114. Свойство взаимности. Возьмем в качестве S поверхность характеристического коноида Γ' с вершиной в точке a', расположенную таким образом, что она ограничивает вместе с Г область T. В качестве u возьмем решение заданного уравнения без свободного члена

$$\mathfrak{F}(u) = 0,$$

аналогичное v, т. е. сингулярное в a' и имеющее вблизи этой точки порядок

$$\frac{1}{\Gamma'^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Эта величина не является конечной в T. Она обращается в бесконечность вдоль Γ'. Однако особенность снова имеет дробный порядок, так что, если взять интеграл по области T, то члены, относящиеся к границам Г, Γ', исчезнут. Это заключение не изменится

---

[1]) См. Darboux, Leçons, t. II, n. 359, p. 79 (2 éd.).

[2]) D'Adhemar, C. R. Acad. Sci., 11 févr. 1901; Coulon (Thèse, p. 53).

[3]) Таким путем характеристические поверхности образуют переход между поверхностями пространственного типа, для которых ставится задача Коши, и поверхностями временного типа, в каждой точке которых можно произвольно брать только одно численное значение.

и в том случае, если поверхности Г и Г′ пересекаются, что следует из п. 92. Как и ранее, нужно изолировать точки a и a', применяя для этого способ, о котором было сказано в пп. 104, 105. Тогда, очевидно, получим

$$u_a = v_{a'}.$$

Элементарное решение не меняет своего значения, если одновременно поменять местами обе точки, от которых оно зависит, и заменить заданное уравнение на сопряженное к нему.

В этом заключается *соотношение взаимности*. Оно полностью аналогично тому соотношению, которую существует для функции Римана, построенной для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными, а также свойству симметрии Грина в теории потенциала. Оно выражается в таком простом виде, в каком мы его привели, благодаря тому, что мы разделили на $\sqrt{|\Delta_a|}$ решение, сингулярное в точке a.

Из этого соотношения мы видим, что величина v, *рассматриваемая как функция точки* a ($x_1, x_2, \ldots, x_m$ фиксированы), есть решение заданного однородного уравнения $\mathfrak{F} = 0$.

Так как обе части соотношения, записанного ранее, являются аналитическими функциями, то можно заметить, что *свойство взаимности остается справедливым в эллиптическом случае* [1]).

ГЛАВА III

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ *

115. Теперь нужно доказать, что функция u, определенная формулой (39), действительно удовлетворяет всем условиям задачи [2]). Тогда и только тогда будет доказано, что задача Коши имеет решение. Это доказательство, естественно, состоит из двух частей. Сначала мы покажем, что решение удовлетворяет уравнению с частными производными, затем, сделав геометрическую гипотезу о том, что поверхность S всюду пространственного типа, покажем, что оно удовлетворяет начальным условиям.

Проверка самого уравнения в частных производных, которая наталкивается на трудности при другом способе исследования,

---

[1]) Прямое доказательство этого сложнее, чем в гиперболическом случае, и в то же время не представляет такого интереса. Причина этого заключается в том, что теория эллиптических уравнений основывается не на самом элементарном решении, а на функциях Грина, которые, хотя и выводятся из него путем добавления регулярных членов, строятся отдельно для каждого вида граничных условий.

[2]) Впервые это было выполнено Адемаром (Bull. Soc. math. fr., t. XXIX, 1901, p. 190; Thèse, Paris, 1904), по крайней мере для уравнений без правой части. См. также его работу «Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles», Paris, Gauthier-Villars, 1907.

становится совсем простой при использовании нашего специального символа интегрирования. Она легко выполняется для уравнения без свободного члена, т. е. в том случае, когда выражение для величины $(-1)^{m_1} \pi\Omega_{2m_1-2} u_a$ в формуле (39) сводится ко второму члену в правой части. В самом деле, известно (пп. 87, 95), что для того, чтобы продифференцировать его по a, достаточно выполнить дифференцирование под знаком $\iint$. Итак, выражение, которое нужно проинтегрировать, содержит a только в множителе v, который (см. предыдущий пункт) представляет собой решение данного уравнения.

115′. Пусть теперь $f \neq 0$. Тогда остается рассмотреть только m-кратный интеграл

$$-\left|\overline{\iiint_T vf\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m.}\right. \tag{43}$$

Применим к нему методы, полностью аналогичные тем, которые используются в классической теории потенциала.

Чтобы найти первую производную от этого интеграла по одной из координат a, достаточно выполнить дифференцирование под знаком $\iiint$. Интеграл, полученный таким образом,

$$\left|\overline{\iiint \frac{\partial v}{\partial a_i} f\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m,}\right. \tag{43′}$$

существует: в самом деле, отделив точку a близкой к ней поверхностью Σ (рис. 18), мы получим интеграл, который стремится к определенному пределу при Σ, стремящемся к a. Это можно видеть, если воспользоваться рассуждениями пп. 104—105. Более того, вышенаписанный интеграл сходится равномерно, так что ошибка, совершаемая при замене области интегрирования T областью T' (рис. 18) имеет верхнюю грань, не зависящую от точки a, если эта точка достаточно близка к поверхности Σ.

Следовательно, исходя из хорошо известных рассуждений, мы получаем, что интеграл (43′) есть производная от интеграла (43) даже тогда, когда он распространен по области T.

Чтобы продифференцировать повторно, рассмотрим поверхность, которая делит область интегрирования на две части. Одна из них — T' заключена между S и Σ, а другая — T'' между Σ и a. В области T' выполняем дифференцирование непосредственно под знаком $\iiint$. В области T'' запишем

$$-\frac{\partial v}{\partial a_i} = -\left(\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial v}{\partial x_i}\,.$$

Член, содержащий $\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}$, можно дифференцировать под знаком $\iint$, причем доказательство этого факта едва ли отличается от доказательства п. 106, если мы заметим, что первая степень выражения Г содержит только комбинации $(x_1 - a_1)$, $(x_2 - a_2)$, ..., $(x_m - a_m)$. Учитывая это, мы получим, что величина $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial a_i}\right)$, разложенная в ряд по степеням этих разностей, начинается с квадратичных членов, и мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial a_k}\left[\frac{1}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}\left(\frac{\partial V}{\partial a_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{m-2}{2}\frac{V}{\Gamma^{m/2}}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial a_i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)\right] = \frac{Q_3}{\Gamma^{\frac{m}{2}+1}},$$

причем числитель Q_3 начинается с кубических членов. Если взять в качестве координат s, λ (пп. 104—106), то знаменатель величины, которую нужно проинтегрировать, не будет содержать, следовательно, s, а содержит только $H^{\frac{m}{2}+1}$, что и требовалось доказать. Таким образом, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\left|\overline{\iiint\left(\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx_1 \ldots dx_m}\right. =$$
$$= \left|\overline{\iiint \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx_1 \ldots dx_m}\right.. \tag{44}$$

Что касается интеграла

$$\left|\overline{\iiint_{T''} f\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_1 \ldots dx_m}\right.,$$

то он преобразуется по формуле Грина [1])

$$-\left|\overline{\iiint_{T''} v\,\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1 \ldots dx_m}\right. + \left|\overline{\iint v f \pi_i dS}\right., \tag{44'}$$

где π_i, как и ранее, направляющие косинусы нормали к Σ, которая направлена внутрь T' (и, следовательно, наружу по отношению к T'').

[1]) Мы снова действуем, как в п. 94.

Дифференцирование под знаком $\iint$ не представляет больше никаких затруднений. Имеем

$$-\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k}\overline{\left|\iiint_T vf\,dx_1\ldots dx_m\right.} =$$

$$= -\overline{\left|\iiint_{T''}\frac{\partial^2 v}{\partial a_i \partial a_k} f\,dx_1\ldots dx_m\right.} +$$

$$+\overline{\left|\iint_\Sigma f\pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k}\,dS\right.} + R + R_1.$$

Здесь R есть m-кратный интеграл (44), распространенный по области T''; R_1 есть первый член в уравнении (44'). Устремим Σ к точке a:

$$-\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k}\overline{\left|\iiint_T vf\,dx_1\ldots dx_m\right.} =$$

$$= \lim_{\Sigma\to a}\left\{-\overline{\left|\iiint_{T'}\frac{\partial^2 v}{\partial a_i \partial a_k} f\,dx_1\ldots dx_m\right.} +\right.$$

$$\left.+\overline{\left|\iint_\Sigma f\pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k}\,dS\right.}\right\}.$$

Результат подстановки выражения (43) в дифференциальный оператор $\mathfrak{F}$ таков:

$$\lim_{\Sigma\to a}\overline{\left|\iint_\Sigma f\sum_{i,k} A_{ik}\pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k}\,dS.\right.}$$

Этот предел полностью аналогичен [1]) пределу выражения (37) п. 105, к которому он легко сводится.

116. Перейдем к граничным условиям.

Нужно сделать соответствующую геометрическую гипотезу о форме S. Предположим, что плоскость, касательная к ней, всюду пространственного типа. Известно (см. кн. I), что если эта гипотеза не выполняется, то задача, вообще говоря, не имеет решений. Допустим также на короткое время, что это условие выполняется строго. Иными словами, ни одна плоскость, касательная к S, не имеет характеристического направления. Следовательно, такие касательные плоскости образуют конечный угол с направлением

---

[1]) Эти два выражения различаются между собой заменой $\frac{\partial v}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial v}{\partial a_k}$ и тем обстоятельством, что в одном случае A_{ik} берутся в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а в другом—в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

любой бихарактеристики или кривой, находящейся внутри характеристического конуса.

Если это так, то в случае, когда a стремится по произвольному закону к определенной точке P, взятой на S, соответствующий характеристический коноид вырезает на S бесконечно малую площадку в непосредственной близости от P, причем все отрезки геодезических, исходящих из a, заключенные между этой точкой и S_0, будут также бесконечно малы.

Если, более того, поверхность S является регулярной, так что одна из координат имеет конечные частные производные по другим координатам вплоть до некоторого порядка p, то производные от s по $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ до того же самого порядка будут также бесконечно малы.

Нам нужно доказать:

1) что u стремится к заданному значению $(u_0)_P$;

2) что конормальная производная $\frac{du}{d\nu}$ в точке P стремится к заданному значению $(u_1)_P$.

Первое утверждение доказывается сразу же. Интегралы $\iint$ в формуле (39) очень мало отличаются от тех, которые рассматривались нами в формуле (4) (пп. 104, 105) при нахождении предельных значений, за исключением следующего. Здесь поверхность интегрирования S остается фиксированной, а не стягивается в точку a; наоборот, предполагается, что эта последняя точка приближается к ней по произвольному закону. Так как в предыдущем рассуждении не предполагалось, что точка a фиксирована, то можно утверждать, что один из интегралов $\iint$ формулы (39) стремится к

$$(-1)^{m_1}\pi\Omega_{2m_1-2}u_P$$

и что остальная часть стремится к нулю. По тем же причинам можно утверждать (см. п. 96), что член, содержащий $\iiint$, бесконечно мал. Первое заключение, следовательно, доказано.

117. Непосредственное доказательство второго заключения, касающегося $\frac{du}{d\nu}$, несколько труднее. Из-за присутствия $\frac{dv}{d\nu}$ интеграл $\iint$ в выражении для u можно сравнить с потенциалом двойного слоя. Таким образом, трудности, которые появляются при исследовании нормальной производной такого потенциала, возникнут также в ходе нашего доказательства. Введение символа Γ вносит дополнительные осложнения.

С помощью косвенного рассуждения мы быстрее придем к нужному результату. Это рассуждение использует следующий факт. Искомое заключение останется конечно, справедливым, если поверхность S является аналитической наряду с другими заданными величинами u, $\frac{du}{d\nu}$ и f. В самом деле, в этом случае, как известно, согласно основной теореме Коши, задача имеет решение и это решение с необходимостью дается вышеприведенной формулой.

С другой стороны, можно рассмотреть аналитическую поверхность $\bar{S}$, имеющую с S в точке P соприкосновение некоторого порядка q (для этого требуется, чтобы поверхность S была регулярной до этого же порядка). Можно также рассмотреть две аналитические функции $\bar{u}_0$ и $\bar{u}_1$ от координат произвольной точки $\bar{M}$ на поверхности $\bar{S}$, имеющие с u_0 и u_1 (значениями этих величин в точке M, соответствующей точке $\bar{M}$) соприкосновение порядка q в точке P, и аналитическую функцию $\bar{f}$, имеющую с f соприкосновение того же порядка. Если заменить S на $\bar{S}$, а f, u_0, u_1 на $\bar{f}$, $\bar{u}_0$, $\bar{u}_1$ и u на $\bar{u}$, то сходимость $\frac{d\bar{u}}{d\nu}$ к $(u_1)_P$ не будет вызывать сомнений. Но, с другой стороны, если точка a приближается по произвольному закону к точке P, то, как известно, область интегрирования сведется к непосредственной окрестности точки P, а в этой окрестности поверхность S и функции f, u_0, u_1 имеют с $\bar{S}$, $\bar{f}$, $\bar{u}_0, \bar{u}_1$ соответственно близость порядка q. Следовательно (п. 109), при достаточно большом q разность $\frac{du}{d\nu} - \frac{d\bar{u}}{d\nu}$ стремится к нулю, а $\frac{du}{d\nu}$ будет иметь предел, равный $u_1(P)$.

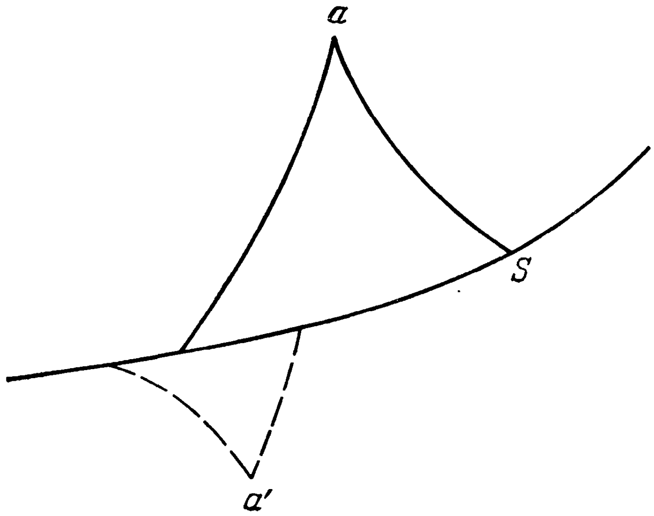

Рис. 23.

118. Аналогия с обычными потенциалами. Предельное значение $u_0(P)$ получается из нашей формулы, если применить ее к малой коноидальной области T, вершиной которой служит точка a и которая расположена от нее с той же самой стороны, с какой a приближается к S (рис. 23). Это предельное значение будет одним и тем же для обеих сторон S. Следует, однако, заметить, что когда мы переходим с одной стороны на другую, направление нормали, как и направление конормали ν, нужно изменить (вследствие правила п. 38 кн. II). Если в обоих случаях сохранить одно и то же направление для ν, то значение $\iint$ меняет знак как раз при пересечении S. Разрыв, очевидно, аналогичен разрыву обычных поверхностных потенциалов. Эту аналогию (см. далее), так же как и другие аналогии того же типа, которые отметил Вольтерра (Congrès de Rome 1908, t. 2, p. 90), можно дополнить: на самой поверхности S наш интеграл $\iint$ принимает нулевое значение, т. е. значение, равное среднему арифметическому на противоположных сторонах.

119. Случай, когда одна из границ является характеристикой. Очевидно, что успех нашей проверки в существенной степени обусловлен нашей геометрической гипотезой, относящейся к S, в связи с тем, что область, которую вырезает характеристический коноид на поверхности S, сводится к малой области вокруг P, когда a стремится по произвольному закону к этой точке.

Следует ожидать, что все будет иначе, если это геометрическое условие не выполнено. Это произойдет, когда S не будет поверхностью пространственного типа.

Замечательно, что проверка проходит успешно и тогда, когда площадка S_0 не будет бесконечно малой в любом направлении, в случае, который является промежуточным между поверхностями пространственного и временного типов, а именно, когда S есть характеристика (это, впрочем, можно было бы предвидеть, исходя из того, что мы знаем об аналитических [1]) начальных данных).

Как мы видели в п. 113, при этом нужно задавать только значения u в каждой точке, так что нужно проверить выполнимость лишь одного граничного условия (конечно, ничего не меняется в отношении самого уравнения с частными производными).

Однако эта проверка осложняется двумя обстоятельствами. Одну из возникающих трудностей мы только что упомянули, она была отмечена Адемаром (см. Rendic. Circ. Mat. di Palermo, t. XX, p. 143, 1909). Она происходит из-за того, что настоящий случай является промежуточным между рассуждениями в пп. 116, 117 и теми, с которыми мы встретимся далее. Предположим, к примеру, что мы должны рассмотреть уравнение цилиндрических волн (при $\omega = 1$), так что Γ есть круговой конус с прямым углом при вершине, а S есть плоскость характеристического направления, которая составляет с осью t угол в 45°. Тогда эта последняя пересекает Γ не по эллипсу, а по параболе (рис. 24), которая, когда a приближается к S, сводится не к точке, а к линии, именно, к образующей конуса Γ, причем объем, заключенный между S и Γ (при любом положении точки a вне S), обладает бесконечной про-

[1]) В п. 64 кн. II построено решение, когда u задано на характеристическом коноиде.

тяженностью в одном из направлений. Как видно из этого примера, регулярная характеристика S, вообще говоря, не образует вместе с Г замкнутую поверхность области T. Чтобы замкнуть объем, необходимо либо (как в предыдущем примере) построить вторую поверхность S' такую, как вторая характеристическая плоскость, пересекающая первую (рис. 24), либо предположить, что S имеет особую точку (и сама, как в п. 64 кн. II, является характеристическим конусом или неким многогранником с характеристическими сторонами и т. п.). Общее доказательство должно учитывать все эти возможные особенности [1]).

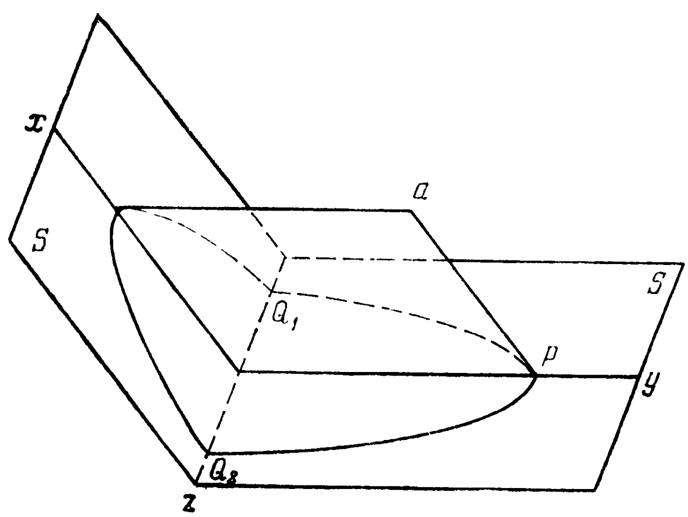

Рис. 24.

Ограничиваясь для простоты случаем $m = 3$, предположим вначале, что граница состоит из двух регулярных характеристик S и S', пересекающихся друг с другом. Нужно доказать, что если точка a стремится к точке P поверхности S, то величина u, даваемая формулой (39), стремится к заданному значению $(u_0)_P$. Полезно заметить, что это равносильно доказательству того, что задача имеет решение [2]) (поскольку не может быть иного решения, кроме того, которое дается формулой (39)).

При помощи соответствующего точечного преобразования можно сделать так, что S и S' будут двумя координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$, причем все плоскости $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ станут характеристиками, а соответствующие бихарактеристики будут параллельны осям y и x. Сама ось y при этом пройдет через P. Допустим также, что нужные части плоскостей S и S', т. е. те части, которые несут начальные данные, являются плоскостями, на которых x и y положительны.

---

[1]) Доказательство Адемара (Circ. Mat. di Palermo, цит. место) относится к случаю, когда S есть характеристический конус.

[2]) Важность этого основывается на том факте, что вначале нужно (см. ниже) произвести замену переменных и только после этого может быть выполнена проверка. *Априори* тот факт, что проверка может быть успешной при первоначальных переменных, не является очевидным, если не показано, что при таких преобразованиях выражение (39) остается инвариантным (или инвариантным с точностью до подходящего множителя). Такого доказательства можно избежать с помощью замечания в тексте (поскольку существование решения, очевидно, является инвариантным свойством). Даже инвариантность выражения (39) в случае необходимости может быть выведена из нашего рассуждения.

Легко убедиться в том, что общее расположение фигуры будет тем же самым, как и в вышеприведенном примере. Обозначим через (x, y, z) координаты произвольной точки, через x_0, y_0, 0 координаты[1]) точки a, через которую проводится бихарактеристика, параллельная оси y. В окрестности точки $(x_0, y, 0)$ этой линии можно разложить Г в ряд по степеням $x - x_0$, z, причем коэффициенты будут функциями y. Вспоминая,

1) что поверхность $\Gamma = 0$ касается плоскости $x = x_0$ вдоль линии $z = 0$;

2) что она расположена по отношению к этой плоскости со стороны убывающих x;

3) что $\Gamma > 0$ соответствует внутренней части коноида, и, следовательно, $\Gamma < 0$ в точках $x = x_0$, $z \neq 0$, мы видим, что разложение должно иметь форму

$$\Gamma = n(x_0 - x) - Nz^2 - 2N_1(x_0 - x)z - N_2(x_0 - x)^2 + \ldots \quad (45)$$

Здесь многоточием обозначены члены более высокого порядка, причем оба коэффициента n и N положительны. Первый из них, в отличие от второго, обращается в нуль в точке a и, вообще говоря, приближенно пропорционален $(y_0 - y)$.

Приравняв (45) нулю и положив $x = 0$, получим параболу с вершиной в точке P и осью $z = 0$, которая приближается к этой линии, когда x_0 стремится к нулю. Всякая линия $y = \text{const}$ пересекает эту кривую в двух точках $z = \alpha \pm \sqrt{\beta}$, где через α и β обозначены ряды по степеням x_0 без постоянных членов. Теорема факторизации (см. п. 112 и соответствующее примечание, которое применимо и к настоящему случаю) показывает, что можно записать

$$\Gamma = [\beta - (z - \alpha)^2]\, G(x, y, z, x_0, y_0), \quad (46)$$

где G есть другой ряд по степеням $(x_0 - x)$, z, в котором N представляет собой постоянный член.

Установив это, перейдем к нахождению предельного значения u_a. Имеем

$$u_a = -\frac{1}{2\pi}\left[-\iiint fv\,dx\,dy\,dz + \left|\overline{\iint\left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} - Luv\right) dS}\right.\right]. \quad (39')$$

Здесь символы $\int$ заменены обычными символами $\int$.

При рассмотрении случая $m = 3$ появляется то преимущество, что отпадают трудности, связанные с применением символа $\lceil$.

---

[1]) Предположение, что $z_0 = 0$ не уменьшает общности. Мы можем принять, что P меняется с изменением положения точки a, заменив ее другой точкой P', расположенной на прямой, параллельной оси y, проходящей через точку a, а затем устремив P' к P одновременно с точкой a. Для законности этого рассуждения необходим перенос осей, что не вызывает неудобства.

Это ясно, прежде всего, для пространственного интеграла (первый член), в котором v имеет степенную особенность порядка $^1/_2$. Интеграл имеет определенное значение в классическом смысле и становится бесконечно малым одновременно с объемом интегрирования.

В двойном интеграле присутствует только степенная особенность порядка $^3/_2$ благодаря члену $\frac{dv}{d\nu}$. Ее можно исключить при помощи интегрирования по частям. Так как на S направление ν параллельно оси y, то можно принять $d\nu = dy$, положив

$$dS = K\,dy\,dz,$$

где K — соответствующая функция от y, z. На S' также можно принять $d\nu = dx$ и положить

$$dS' = K'\,dx\,dz.$$

Следовательно, двойной интеграл $\left|\overline{\iint u \frac{dv}{d\nu} dS}\right.$ по S будет равен $\left(\text{с точностью до множителя } \frac{1}{2\pi}\right)$

$$\left|\overline{\iint Ku \frac{\partial v}{\partial y} dy\,dz}\right. = \int dz \left|\overline{\int Ku \frac{\partial v}{\partial y}\,dy}\right. = \int dz \left[Kuv - \int v\,\frac{\partial (Ku)}{\partial y}\,dy\right].$$

Пределы интегрирования для произвольного значения z задаются ребром двугранного угла (т. е. отрезком Q_1Q_2 оси z) и характеристическим коноидом. Однако член, сответствующий последней границе, имеет особенность дробного порядка и, следовательно, должен быть исключен, так что значение интеграла по S в формуле (39′), умноженное на (— 2π), равно

$$-\int_{Q_1}^{Q_2} Kuv\,dz + \iint\left(-K\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial (Ku)}{\partial y} - KLu\right) v\,dy\,dz, \tag{47}$$

причем однократный интеграл берется вдоль оси z. Таким образом, все особенности порядка выше, чем $^1/_2$, исчезли.

Кроме того, значение v равно

$$v = \frac{V}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{V_0}{\sqrt{\Gamma}} + V_1\sqrt{\Gamma} + \ldots$$

В первом члене — он, очевидно, единственный, который может дать отличный от нуля результат в формуле (47),— заменим Γ значением (46), первый множитель которого можно также записать в виде

$$-(z - z_1)(z - z_2).$$

Здесь $z = z_1$ и $z = z_2$— точки пересечения прямых, параллельных оси y, с характеристическим коноидом, имеющим вершину в точке a, так что z_1 и z_2 являются функциями y (так как $x = 0$) и координат точки a.

Таким образом, однократный интеграл, взятый вдоль Q_1Q_2, принимает вид

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{KuVdz}{\sqrt{(z-z_1)(z_2-z)G}}\,.$$

Когда a стремится к P, и следовательно, Q_1Q_2 становится бесконечно малым, такой интеграл приближенно равен

$$\frac{-K^0u^0V^0}{\sqrt{N^0}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(z-z_1)(z_2-z)}}\,, \tag{48}$$

где K^0, u^0, V^0, N^0 обозначают значения величин K, u, V, N в начале координат. Предел интеграла можно написать сразу же, так как последний множитель, как известно, всегда равен π.

Тот же самый метод применим к двойному интегралу, если записать его в виде

$$\int dy \int_{z_1}^{z_2} \left(-K\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial (Ku)}{\partial y} - KLu\right) \frac{V}{\sqrt{(z-z_1)(z_2-z)G}}\, dz.$$

Проделав то же самое с каждым однократным интегралом по z, получим, что выражение (47) стремится к переделу

$$\pi \int \left(-K\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial (Ku)}{\partial y} - KLu\right) \frac{V_0}{\sqrt{N}}\, dy. \tag{48'}$$

Совершенно аналогично поступаем с интегралом по S', который имеет более простой вид, так как в этом случае однократный интеграл отсутствует, в отличие от выражения (47) (соответствующий отрезок стремится к нулю). Соответствующий предел равен

$$\pi \frac{K^0u^0V^0}{\sqrt{N^0}}\,. \tag{48''}$$

Вопрос заключается в том, равна ли сумма выражений (48), (48′) и (48″) величине $2\pi u_p$. Чтобы ответить на него, мы воспользуемся методом, хорошо известным в вариационном исчислении: мы вынесем $\frac{\partial u}{\partial y}$ из-под знака интеграла при помощи интегрирования по частям, что даст требуемое значение суммы, если:

1) после такого преобразования члены, содержащие u, обращаются в нуль под знаком интеграла [1];

2) члены, содержащие u^0, также взаимно уничтожаются;

3) коэффициент при u_p равен 2π.

[1] Другими словами, должно выполняться тождество (при $x = z = 0$)

$$\left(\frac{\partial K}{\partial y} + KL\right)\frac{V_0}{\sqrt{N}} = 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{KV_0}{\sqrt{N}}\right).$$

Эти условия являются достаточными. Известно (в силу основной леммы вариационного исчисления), что они являются также *необходимыми*. Следовательно, в данном случае можно утверждать *априори*, что они выполняются и что поэтому не нужно производить никаких вычислений. В самом деле, мы видели в п. 64 кн. II, что задача имеет решение (и, следовательно, данная проверка *должна* быть успешной) всякий раз, когда начальные данные аналитичны. Итак, сумма величин (48) — (48'') сводится к $2\pi u_P$ для любого аналитического u, и это будет тогда и только тогда [1]), когда три вышенаписанных условия выполнены.

120. Непосредственный расчет выражений (48), (48') и (48'') тем не менее представляет интерес и его стоит проделать. На первый взгляд кажется, что он наталкивается на непреодолимую трудность из-за того, что значения V вдоль бихарактеристики выводятся (с помощью M) из значений вторых производных Γ, а эти последние зависят от общего интеграла дифференциальных уравнений для геодезических, или по крайней мере соответствующих уравнений в вариациях [2]). Однако в настоящем случае, значение V, которое на бихарактеристике становится равным V_0, можно найти при помощи квадратуры. Причина этого заключается в том, что хотя все геодезические, вообще говоря, неизвестны, неявно допускается, что известны геодезические нулевой длины [3]), т. е. бихарактеристики (при соответствующем выборе координат, указанном выше).

Чтобы получить такое выражение для V_0, дополним упрощения предыдущего пункта замечаниями п. 50 кн. II. Мы видели там, что если координаты выбраны так, как указано выше, то однородное

---

[1]) Как известно, основная лемма применима и в том случае, если потребовать, чтобы произвольная функция, которая в ней фигурирует, была аналитической. В рассуждении, по-видимому, предполагается, что сама поверхность S (или S') аналитична. В противном случае можно подставить вместо S другую аналитическую характеристику, имеющую с ней соприкосновение произвольного порядка в точке оси y (и, следовательно, благодаря хорошо известным свойствам уравнений с частными производными первого порядка, вдоль всей этой характеристики). Эта замена (как и в п. 117) не изменит результата. Следовательно, предположение об аналитичности поверхности S несущественно.

[2]) См. дополнительное замечание к кн. II. Точнее, как мы увидим, V_0 связано с якобианом J (вследствие уравнения (39) п. 59).

[3]) Не настаивая на этом пункте — это мы, возможно, сделаем в другой раз,— отметим просто, что в конечном счете мы применяем хорошо известную теорему, согласно которой интеграл системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений может быть найден при помощи квадратуры, если известен общий интеграл соответствующей однородной системы. Рассматриваемая здесь линейная система состоит из уравнений в вариациях, причем одно из них заменено (вариационным) соотношением, выведенным из теоремы живых сил. Правая часть его берется равной нулю, когда рассматриваются только бихарактеристики, и равной произвольной постоянной когда исследуются геодезические линии вообще.

уравнение с частными производными можно привести к форме

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \mathfrak{F}_1(u) = 0, \tag{E}$$

где $\mathfrak{F}_1$ не содержит производных по x (аналогичную форму имеет сопряженное уравнение).

Учитывая это и предыдущие гипотезы об осях x и z, мы получим, что характеристическая форма A (если обозначить через α, β, γ переменные, которые в нее входят) примет вид

$$A = 2\alpha\beta - \lambda\gamma^2,$$

где коэффициент λ должен быть положительным, так, чтобы был только один положительный квадрат. Это дает для дискриминанта Δ значение λ.

Теперь мы должны приступить к нахождению в функции от y коэффициентов n и N в формуле (45). Для этого достаточно подставить (45) в уравнение с частными производными первого порядка по Γ

$$A\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}, \frac{\partial\Gamma}{\partial y}, \frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right) = 4\Gamma.$$

Обозначая штрихами дифференцирование по y, получим

$$\begin{gathered} 2\,[-n + 2N_1 z + 2N_2(x_0 - x) + \ldots]\;[n'(x_0 - x) - N'z^2 - \\ -2N_1'(x_0 - x)z - N_2'(x_0 - x)^2 + \ldots] - \\ -4\lambda\,[Nz + N_1(x_0 - x)^2 + \ldots]^2 = \\ = 4n(x_0 - x) - 4Nz^2 - 8N_1(x_0 - x)z - 4N_2(x_0 - x)^2 + \ldots, \end{gathered}$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка.

Требуемый результат получаем, приравнивая коэффициенты при $(x_0 - x)$, а также при z^2, что дает

$$-2nn' = 4n, \quad 2nN' - 4\lambda N^2 = -4N.$$

Первое соотношение дает (n с необходимостью обращается в нуль в точке a)

$$n = 2(y_0 - y). \tag{49}$$

Тогда для N получаем

$$-N'(y - y_0) + N - \lambda N^2 = 0. \tag{49'}$$

Это уравнение типа Бернулли, только одно решение которого конечно в точке a, а именно

$$N = \frac{y_0 - y}{\int_{y_0}^{y} \lambda\,dy}. \tag{50}$$

Получив этот первый результат, мы можем вычислить величину M (п. 49). Выражение для нее при $x = x_0$, $z = 0$ сводится к виду

$$M = 2\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x\, \partial y} - \lambda \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} = -2n' + 2\lambda N$$

(все другие члены обращаются в нуль, поскольку Γ и $\frac{\partial \Gamma}{\partial z}$ равны нулю вдоль этой линии). Учитывая (49), (49'), получаем

$$M = 4 + 2\lambda N = 6 + \frac{2N'}{N}(y_0 - y).$$

Следовательно, согласно определению п. 62 кн. II (в котором нужно положить $s = y - y_0$):

$$V_0 = \text{const}\sqrt{N} = \sqrt{N},$$

где постоянный множитель равен 1, поскольку обе величины: V_0 и $\sqrt{N}$ — равны $\sqrt{\lambda}$ в точке a.

121. Вернемся теперь к предыдущим формулам (48) — (48"). Если учесть вышеприведенное значение A и равенства, относящиеся к S

$$\pi_1 dS = dy\, dz, \quad \pi_2 = \pi_3 = 0,$$

то из определения ν мы получаем, что $K = 1$. Что касается L, то оно равно нулю (см. формулу (7) п. 40 кн. II). Итак, как мы и хотели показать, в выражении (48') не остается интеграла, и оно сводится к

$$-2\pi\,(u_P - u^0), \tag{51}$$

в то время как (48) дает $-\pi u^0$.

Единственный член, который остается найти, есть (48"). Но, как и выше, мы видим, что K_0', как и K_0, равно единице, так что (48) и (48") взаимно уничтожаются со вторым членом (51). Таким образом, проверка завершена.

122. Итак, требуемое заключение установлено. Оно заключает, конечно, в себе и первоначальную форму (п. 119) результата: можно сказать, пользуясь обозначениями п. 119, что предельное значение двойного интеграла на первой характеристике, содержащей P, равно

$$-\pi\left[2u_P - \left(\frac{KuV}{\sqrt{N}}\right)_0\right],$$

где величина K такова, что [1]) для любого φ

$$\frac{d\varphi}{d\nu}\, dS = K\frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy\, dz,$$

---

[1]) Величина K, так же как и K' в формуле (48") равна коэффициенту при $2\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ в уравнении (в этом можно убедиться тем же способом, как и в п. 120).

а N есть коэффициент при z^2 в разложении Г. Заключение в этой форме остается справедливым и тогда, когда S не является координатной плоскостью (на плоскость $x = 0$ все еще, однако, наложено требование, чтобы она была касательной к S вдоль оси y). Отношение K к $\sqrt{N}$, естественно, не зависит [1]) от выбора второй переменной z, которая является криволинейной координатой на S.

123. Если теперь перейти к случаю, когда S не составляет двугранного угла, а имеет особую точку O, которая взята за начало координат, то трудностей, присущих этому случаю, можно избежать, сводя его к предыдущему с помощью соответствующих геометрических гипотез.

Сначала отметим, что S нельзя более считать координатной плоскостью (поскольку она сингулярна в точке O), так что мы вынуждены поступать так, как сказано в предыдущем пункте. Но мы допустим, что поверхность S целиком лежит с одной стороны характеристики, которая и берется в качестве координатной плоскости. Далее допустим, что S может быть образована регулярными линиями (λ), исходящими из точки O, каждая из которых направлена в сторону возрастающих x. Таким образом, если x, y, z выражаются в виде регулярных функций дуги s, то $\frac{dx}{ds} \geqslant 0$. Кроме того, так как некоторые из этих линий (λ) образуют бесконечно малые углы с плоскостью $x = 0$, рассмотрим снова плоскости $y = \text{const}$, которые по-прежнему будем считать характеристическими. Допустим, что касательная к любой линии (λ) в окрестности O составляет угол, больший θ, по крайней мере с одной из плоскостей $x = 0$ или $y = 0$, где θ — некоторый положительный угол.

Следовательно, если рассечь S характеристической плоскостью $y = \varepsilon$, где ε мало, то часть S_2 поверхности S, прилегающая к O и ограниченная этой плоскостью и полуконоидом с вершиной в точке a, вырежет из каждой линии (λ) отрезок дуги, меньший σ (где σ как угодно мало), если ε достаточно мало, а точка a достаточно близка к P.

Область S_2 включает в себя часть S_2' первой характеристики (по крайней мере ту угловую область, для которой бихарактеристика OP является внутренней). Остающуюся часть обозначим через S_2''.

Координаты x, y, z будут непрерывны по двум параметрам λ и s.

---

[1]) Это можно проверить непосредственно. Если ввести новую переменную Z вместо z, а переменную y оставить без изменения, по крайней мере при $z = 0$, то эта переменная Z сведется с точностью до бесконечно малых высшего порядка к $\gamma z + \beta y + \alpha$ (α, β, γ — постоянные) в окрестности любой точки оси y, а обе величины K и N будут поделены на γ.

Предположим, что они регулярны по s:

$$
\begin{aligned}
x &= \xi_1 s + \xi_2 s^2 + \ldots \\
y &= \eta_1 s + \eta_2 s^2 + \ldots \\
z &= \zeta_1 s + \zeta_2 s^2 + \ldots
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Самой собой разумеется, все коэффициенты ξ_h, η_h и ζ_h непрерывны по λ. Но их производные, или величины $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial z}{\partial \lambda}$ могут иметь конечное число разрывов первого рода (значения $\frac{\partial \xi_h}{\partial \lambda}, \ldots$ существуют по обе стороны разрыва, но отличаются друг от друга). Сумма $\left(\frac{d\xi_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_1}{d\lambda}\right)^2$ отлична от нуля, так что угол между двумя близкими линиями (λ) имеет тот же порядок, что и разность между соответствующими значениями λ.

В силу предыдущего величины $\pi_i dS$ на поверхности S_2 будут произведениями $d\lambda\, ds$ на функциональные определители типа $\frac{D(y,z)}{D(\lambda,s)}$, каждый из которых содержит множителем s. Элемент поверхности будет иметь форму $Hs\, d\lambda\, ds$, где H конечно и всюду отлично от нуля и, следовательно, больше некоторого фиксированного положительного числа.

124. Установив это, вычислим теперь двойной интеграл в формуле (39′):

1) по части S_1 поверхности S, которая соответствует $y > \varepsilon$;

2) по S_2.

Предельное значение первого интеграла равно (это было найдено ранее)

$$
-2\pi u_P + \pi \left(\frac{Kuv}{\sqrt{N}}\right)_{x=0,\ y=\varepsilon,\ z=0}. \tag{53}
$$

Для начала заметим, что на S_2 направление конормали ν совпадает с касательной и что, следовательно, для произвольной [1]) функции φ справедливо

$$
\frac{d\varphi}{d\nu} dS = \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) d\lambda\, ds,
$$

[1]) Если линии (λ) являются бихарактеристиками, то остается только второй член. Именно это имеет место для случая Адемара, в котором S есть характеристический коноид. Прием, используемый в тексте, необходим для рассмотрения некоторых форм S_2 таких, как многогранный угол, часть которого S_2' есть регулярная характеристика.

где α и β — регулярные функции λ и s, причем вторая из них содержит s множителем [1]).

Относительно заданных на S_2 значений u, предположим, что они имеют конечные первые производные и что производные $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ обращаются в нуль одновременно с s. Предположим также для начала, что само u равно нулю в точке O (следовательно, $|u|$ имеет верхнюю грань, пропорциональную s). В интеграле, который нужно записать в виде

$$\iint\left[u\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial \lambda}+\beta\frac{\partial v}{\partial s}\right)-\right.$$
$$\left.-v\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial \lambda}+\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right)-Luv\right]d\lambda\, ds,$$

члены, содержащие $\frac{\partial v}{\partial s}$ и $\frac{\partial v}{\partial \lambda}$, преобразуем по формуле Грина.

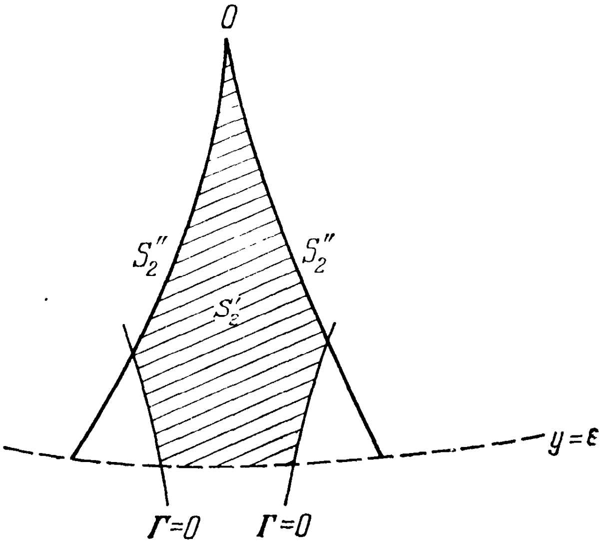

Рис. 25.

Как и ранее, однократный интеграл, взятый вдоль пересечения S_2 и Γ, нужно исключить. Интеграл, взятый вдоль пересечения с $y=\varepsilon$, уничтожает соответствующий член в формуле (53) (поскольку координаты λ и s можно также использовать на части поверхности S_1, прилегающей к S_2') [2]).

---

[1]) Чтобы получить выражение для этих коэффициентов, заметим следующее. В силу гипотезы о том, что s есть обычная длина кривой (λ) величина

$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\,\partial s}+\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda\,\partial s}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda\,\partial s}$$

равна нулю. Умножая уравнения

$$\frac{dx}{d\nu}=\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \pi_1}=\alpha\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\beta\frac{\partial x}{\partial s},\qquad \frac{dy}{d\nu}=\ldots$$

(в них мы взяли $dS=d\lambda\, ds$ и соответствующие значения π) на $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial z}{\partial \lambda}$ или на $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, получим значения производных. Так как в обоих случаях порядки равны соответственно s^2 и s, то отсюда получаем тот порядок величины, который упомянут в тексте.

[2]) Часть пересечения S и $y=\varepsilon$, содержащаяся в S_2, при достаточно малом x_0 находится целиком внутри S_0'. Относительное положение S_2, $\Gamma=0$, $y=\varepsilon$ соответствует рис. 25.

Точку $s = 0$ нужно рассматривать как часть границы, но соответствующий член исчезает, поскольку u обращается в нуль одновременно с s.

Следовательно, остается вычислить однократные интегралы, имеющие форму

$$\int huv\,ds = (s)\int \frac{H\,ds}{\sqrt{\Gamma}} \tag{54}$$

(где (s) есть значение s на интервале интегрирования, а H есть конечная величина), взятые вдоль линий $\lambda = \text{const}$ (расположенных на S_2'' и соответствующих разрывам $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ на ребрах многогранного угла), а также двойные интегралы вида

$$\iint \frac{Hu\,d\lambda\,ds}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \iint \frac{H\,\frac{\partial u}{\partial \lambda}\,d\lambda\,ds}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \iint \frac{H\beta\,\frac{\partial u}{\partial s}\,dy\,ds}{\sqrt{\Gamma}}. \tag{54'}$$

Здесь H по-прежнему конечно, а множитель s появляется в числителе под знаком $\int$ благодаря присутствию одного из множителей u, $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ или β.

Вспомним теперь разложение Γ в ряд, приведенный выше, а именно:

$$\Gamma = n(x_0 - x) - Nz^2 - \ldots = 2(y_0 - y)(x_0 - x) - Nz^2 - \ldots \tag{45}$$

или (поскольку каждый не написанный явно член содержит множителем $(x_0 - x)$ или z^2)

$$\Gamma = 2\hat{y}_0(x_0 - x) - \hat{N}z^2.$$

Здесь $\hat{y}_0$ и $\hat{N}$ представляют собой величины, бесконечно мало отличающиеся от y_0 и N соответственно. Нужно прежде всего подставить это выражение вместо Γ в однократные интегралы (54), которые все соответствуют линиям, принадлежащим S_2''. Каждая из этих линий, следовательно, составляет конечный угол либо с плоскостью $x = 0$ (так что $\xi_1 > \xi_1' > 0$), либо с плоскостью $z = 0$ (так что $|\zeta_1| > \zeta_1' > 0$), где ξ_1' и ζ_1' постоянны.

Первый случай всегда имеет место, когда коэффициент ξ_2 разложения x по степеням s отрицателен и превосходит по абсолютному значению $N\zeta_1'^2/2$ (т. е. меньше $-N\zeta_1'^2/2$). Ибо, если это так, то коэффициент ξ_1 должен быть больше некоторого положительного фиксированного числа [1]). То же будет выполняться для $\frac{dx}{ds}$ при достаточно малом s.

В первом случае, если обозначить через s_1 значение s, которое соответствует точке пересечения (λ) с коноидом, интеграл примет форму

$$\int_0^{s_1} \frac{H}{\sqrt{2\hat{y}_0(\xi_1+\ldots)}} \frac{ds}{\sqrt{s_1-s}},$$

т. е. он меньше, чем

$$2\sqrt{s_1}\max\left|\frac{H}{\sqrt{2\hat{y}_0\xi_1'}}\right| < H_1\sqrt{s_1},$$

где H_1 конечно.

125. Во втором случае, если учесть неравенство $\xi_2 > -\frac{N}{2}\zeta_1'^2$, то получим, что разложение Γ по степеням s будет содержать отрицательный член (член, содержащий z^2), причем коэффициент при этом члене по модулю больше заданной величины $\frac{N}{2}\zeta_1'^2$. Если исключить множитель (s), то из теоремы факторизации следует, что остающийся множитель в подынтегральном выражении есть частное от деления $K\,ds$ (K конечно) на квадратный корень из полинома второй степени по s с коэффициентом при s^2, равным -1. Интеграл берется от нуля до корня полинома. Такой интеграл

---

[1]) Пусть существуют линии (λ) такие, что

$$\xi_2 < -\frac{N\zeta_1'^2}{2}.$$

При ξ_1, стремящемся к нулю, они имели бы по теореме Больцано — Вейерштрасса предельное положение такое, что $\xi_1 = 0$ и

$$\xi_2 \leqslant -\frac{N\zeta_1'^2}{2}.$$

Это противоречит гипотезе о том, что $dx/ds \geqslant 0$. Аналогично пусть при

$$\xi_2 < -\frac{N\zeta_1'^2}{2}$$

и при соответствующих значениях λ и s величина $\frac{dx}{ds}$ стремится к нулю. При этом s либо остается больше фиксированного значения s_1, что можно исключить, если взять ε и x_0 достаточно малыми; либо $\frac{dx}{ds}$ стремится к нулю при s_1 стремящемся к нулю, что невозможно: как мы только что видели, величина ξ_1 должна оставаться больше некоторого фиксированного числа.

(соответствующий неопределенный интеграл есть arcsin) всегда меньше, чем $K\pi$. Если учесть множитель (s), то выражение (54) будет бесконечно малым при малых ε и x_0.

Вычисление двойных интегралов (54′) по S_2'' сводится непосредственно к интегрированию по λ выражений типа (54), что сразу же выводится из предыдущего.

На S_2' поступаем иначе. Введем снова y и z, в функции которых можно выразить x [1]). Элемент $s\,d\lambda\,ds$, как мы видели, отличается только конечным множителем от элемента поверхности S_2' и, следовательно, от $dy\,dz$. С другой стороны, коэффициент при z^2 в разложении x в ряд (для любого фиксированного y) с необходимостью положителен [2]), так что коэффициент при z^2 по модулю больше N. Следовательно, подынтегральная величина равна (при любом определенном значении y) частному от деления конечной величины K на корень квадратный из полинома второй степени по z с коэффициентом при z^2 равным -1, так что интеграл по z всегда меньше, чем $K\pi$. Если выполнить интегрирование по y, то результат будет бесконечно малым при бесконечно малом ε.

Поскольку интеграл по S_2 есть сумма бесконечно малых величин и члена, который исчезает вместе со вторым слагаемым в формуле (53), то заключение доказано, если предположить, что u в точке O равно нулю.

Последняя гипотеза нисколько не уменьшает общности. В самом деле, всегда можно вначале взять множество u' значений u (отличных от нуля в точке O), совпадающих со значениями данного решения уравнения (E). Для u', следовательно, проверка должна пройти успешно, поскольку заранее известно, что задача имеет решение. Затем положим, что $u = u' + u''$, где функция u'' равна нулю в O и может быть рассмотрена при помощи предыдущего анализа. Таким образом, доказательство завершено.

Следует ожидать, что при $m = 5, 7, \ldots$ в аналогичных расчетах появятся дополнительные трудности, особенно из-за присутствия символа $\lceil$. Однако мы не будем входить в эти детали.

126. Граница временного типа. Из предыдущего со всей ясностью следует, что успех проверки в последнем случае зависит от совершенно особых обстоятельств. Они не проявляются, когда S перестает быть характеристикой, так что плоскость, касательная к ней в какой-либо точке, пересечет характеристический конус, проведенный из этой точки, по двум различным образующим, и ни

---

[1]) Если S_2' принадлежит регулярной характеристике, то можно принять, что на ней $x = 0$. Если S_2' принадлежит характеристическому коноиду, то x есть функция y и z. Производные ее разрывны в точке O, но остаются конечными и обращаются в нуль на оси y.

[2]) Он даже неограниченно возрастает как $1/y$ вместе с кривизной поверхности, если S есть характеристический коноид.

один из размеров области интегрирования не будет бесконечно малым.

Если, к примеру, уравнение с частными производными имеет форму (e_2) и S, как в п. 25, состоит из области на плоскости xy и боковой поверхности S_1 цилиндра, для которого эта область есть нормальное сечение, то формула (39) позволяет вычислить значение u_a внутри выделенного таким образом объема — каким бы ни было заданное распределение u_0 и u_1 в различных точках S —

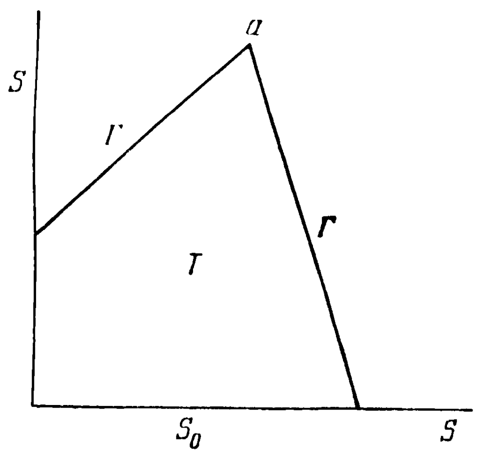

Рис. 26.

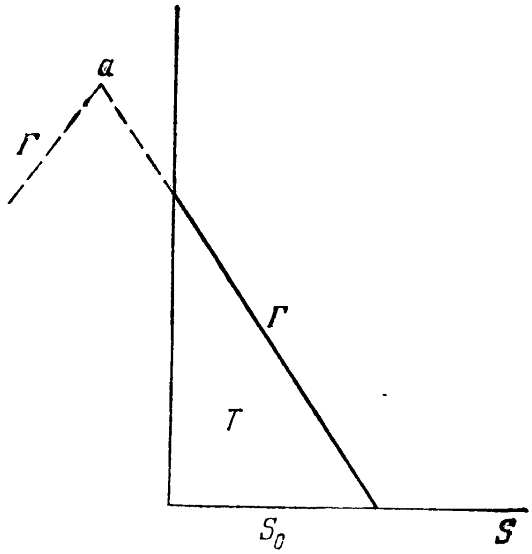

Рис. 27.

и эта величина u удовлетворяет уравнению с частными производными. Но если точка a приближается к определенной точке P поверхности S, то совершенно не обязательно, чтобы u_a стремилось к u_0 (P), что можно видеть из рассмотрения рис. 26.

Таким образом, мы находим (об этом уже шла речь в п. 23), что задача Коши в этом случае, вообще говоря, не имеет решений, и можно сразу же записать бесчисленное множество условий разрешимости (полностью аналогичных условиям (8) п. 15), беря теперь a вне цилиндра (рис. 27). Если точка a выбрана именно так, то внутри области интегрирования T больше нет особой точки коноида. Поскольку в вышеприведенном примере f считается равным нулю, то результат применения основной формулы сводится, как и в п. 104, к выражению

$$\iint \left(u \frac{dv}{d\nu} - v \frac{du}{d\nu} - Luv\right) dS = 0.$$

Итак, решение не может существовать, если это условие не выполняется при любом положении точки a вне цилиндра.

Следовательно, мы имеем дело с некорректно поставленной задачей. Представляется, однако, важным сделать одно замечание в связи с принадлежащими Кирхгофу и Вольтерра доказательствами справедливости принципа Гюйгенса в последней из трех его форм, о которых говорилось в п. 33, т. е. того, что мы назвали положением (C). Вообразим для этой цели, что явление изучается вне некоторой замкнутой кривой σ плоскости xy, так что область $\mathfrak{R}$, в которой мы хотим определить u, расположена с положительной стороны плоскости $t = 0$ и вне цилиндра $\mathfrak{C}$, в основании которого находится контур σ. Первоначально среда находится в покое, так что величины u_0, u_1 равны нулю на всей плоскости x. Затем на σ появляются некоторые возмущения.

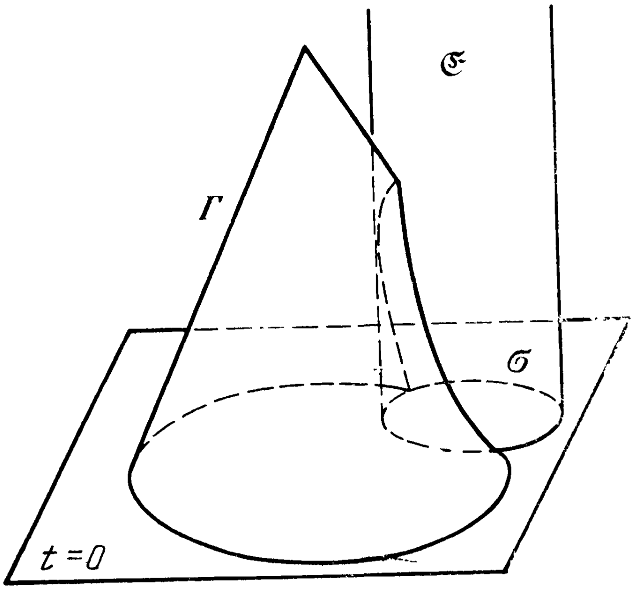

Рис. 28.

Так как возникающее движение описывается уравнением (e_2), то соответствующее значение u *определяется выражением* [1]) (39), которое в данном случае сводится к интегралам по $\mathfrak{C}$. Поскольку область интегрирования на $\mathfrak{C}$ состоит (рис. 28) из точек, лежащих «на волне» или «за волной» относительно a, то, как отметил Вольтерра, можно представить, что движение как бы вызвано центрами, соответствующим образом распределенными по $\mathfrak{C}$. Совершенно аналогичным является метод Кирхгофа для уравнения (e_3) в предположении, что последнее уравнение интегрируется, что будет показано в следующей книге.

Ясно, что для любого явления, описываемого гиперболическим уравнением с тремя независимыми переменными, справедлив принцип Гюйгенса в такой форме.

Это всецело подчеркивает необходимость различий, которые мы установили выше между разными формами принципа Гюйгенса. Действительно, мы видим, что наши формулы можно рассматривать как доказательство *справедливости* этого принципа в форме (C), что сделано, например, в основном мемуаре Вольтерра (Acta Math., v. XVIII), и в то же время (см. п. 111) они доказывают *ложность* этого принципа в форме (B).

127. Несколько замечаний о внешней задаче. С другой точки зрения случай контура временного типа рассмотрел также Вольтерра при анализе того, что итальянский геометр назвал «внешней задачей».

[1]) Явное выражение, соответствующее этому случаю, дается далее (п. 131).

Речь идет о том случае, когда область интегрирования T_1 расположена не внутри одной из полостей характеристического коноида с вершиной в точке a (будучи ограничена поверхностью этой полости и поверхностью S), а лежит *вне* коноида и заключена между *двумя* полостями и частями поверхности S (рис. 29). Получается так, что по крайней мере в самых обычных примерах S не является поверхностью пространственного типа (это не имеет места во внутренней задаче).

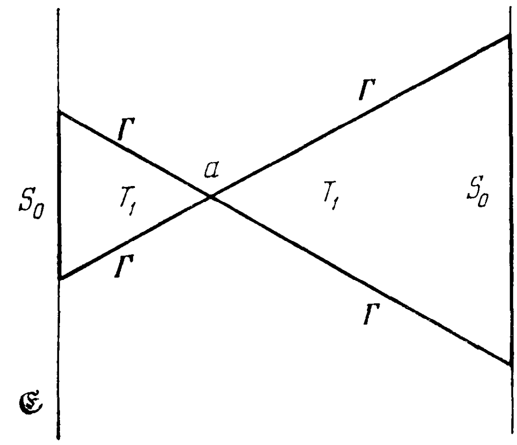

Рис. 29.

Такая задача резко отличается от предыдущей вследствие заключений п. 97. В области T_1 мы будем действовать так же, как и ранее в области T, применяя основную формулу к неизвестной функции u и к элементарному решению v (с полюсом в точке a), в котором мы изменим только знак Γ, чтобы сделать его положительным вне коноида. Все будет так же, как и в предыдущих расчетах, так что появится интеграл $\iiint$ по области T и интеграл $\iint$ по кольцевой части S_0 поверхности S, заключенной между полостями коноида. Но если снова построить малую поверхность Σ (которая необходима для того, чтобы исключить окрестность точки a), то предельное значение соответствующего несобственного интеграла будет содержать в качестве множителя не конечную часть объема двуполостного гиперболоида, а конечную часть объема однополостного гиперболоида, которая равна нулю, как мы видели в п. 97. Следовательно, члена, соответствующего особенности в точке a, не будет, и формула примет вид

$$\left|\overline{\iiint v f\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m} + \right|\overline{\iiint \left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu} + Luv\right) dS} = 0. \tag{55}$$

Она больше не определяет значения u_a. Поскольку в нее входят начальные данные задачи, она *дает условия ее разрешимости*.

Выбирая произвольным образом точку a на поверхности S, можно получить бесконечное число таких необходимых условий. Но, конечно, можно получить и другие условия, беря a вне поверхности S (рис. 30), что сделано в предыдущем пункте.

Нужно заменить v другими величинами, чтобы получить требуемую сингулярность в точке a, которая приводит к выражению для u_a. Более того, вопрос о нахождении такой величины v уже не является определенной задачей именно потому, что задача поставлена некорректно, и, следовательно, решения, если они существуют, можно записать бесчисленным множеством способов в зависимости от начальных данных (комбинируя их с условиями разрешимости (55)).

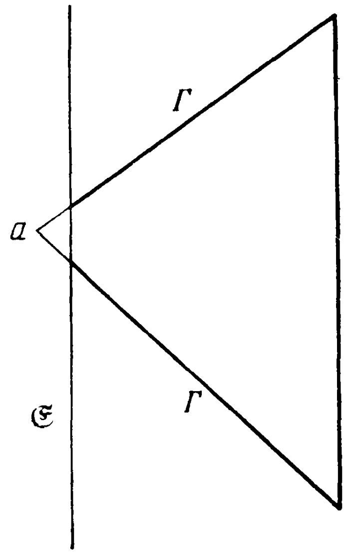

Рис. 30.

Вольтерра использует выражение

$$\int_0^\Theta \log(1-\Theta^2)\frac{d\Theta}{\sqrt{1-\Theta^2}} + \log r \cdot \arcsin\Theta$$

$\left(\text{при } \Theta = \frac{t-t_0}{r}\right)$, в котором нужная особенность появляется на линии, параллельной оси t. Если в вышеприведенном случае мы будем поступать так же, как это делалось при рассмотрении выражения (2) (т. е. выполним дифференцирование по t_0), то мы найдем

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_0)^2}} \log\frac{r^2-(t-t_0)^2}{r}.$$

Видно, что это последнее выражение имеет особенность при $r = 0$. Но этот факт в данном случае никоим образом не является аномальным вследствие вышеупомянутой неопределенности выражения для решения.

Определение аналогичных величин для общего гиперболического уравнения зависит от исследования особенностей этого типа (алгебраически-логарифмической на характеристическом коноиде и логарифмической на другом многообразии [1]).

128. Обращение к обобщенным поверхностным потенциалам. Вернемся к внутренней задаче, считая что S не везде пространственного типа. Выражения

$$\iint u_1 v\, dS, \tag{56}$$

$$\iint u \frac{dv}{d\nu}\, dS \tag{57}$$

ведут себя как поверхностные потенциалы простого или двойного слоя (то же было в п. 118), однако характер их поведения несколько иной, чем ранее. Область интегрирования для обычного поверхностного потенциала простирается по всей поверхности, независимо от положения точки a, в которой вычисляется потенциал. В случае, рассмотренном в п. 118, площадь интегрирования

[1]) Указания по этому поводу в нашем мемуаре (Acta Math., v. XXXI, p. 367) являются ошибочными.

S_0 становится бесконечно малой, когда a приближается к S. Настоящий случай является промежуточным для поверхности S_0. Возьмем, например, уравнение (e_2). Пусть S содержит плоскость, параллельную оси t. Тогда S_0 есть внутренняя часть, заключенная между ветвью гиперболы (линией пересечения плоскости с полостью конуса вращения — рис. 31). Когда a достигает

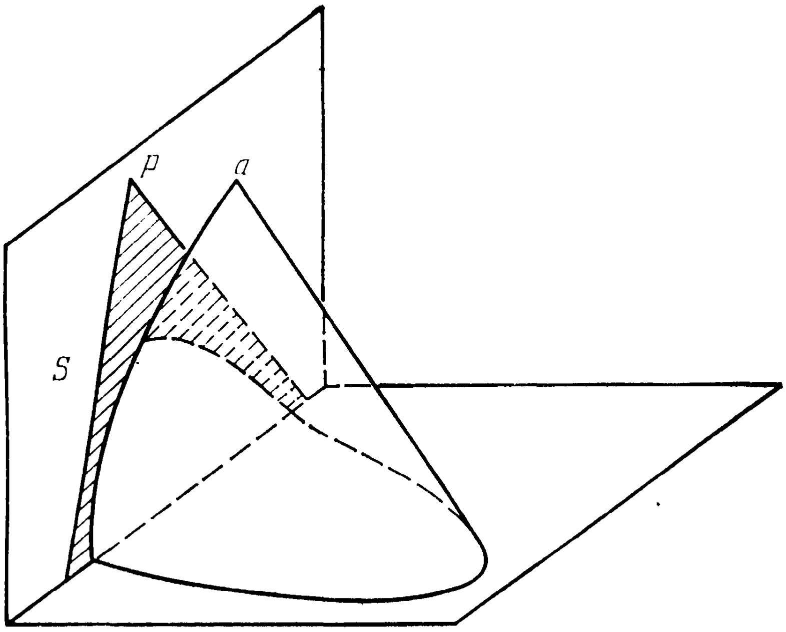

Рис. 31.

плоскости, гипербола сводится к своим асимптотам, а S_0 — к угловой части, заключенной между ними.

Как и в обычной теории потенциала, выражения (56) и (57) имеют смысл и тогда, когда a находится на S. Что касается формулы (56), то это можно понять [1], если действовать так же, как и в п. 104, т. е. надо отнести S к линиям (λ), исходящим из точки a, причем каждая из них характеризуется [2] значениями m — 2 параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-2}$, а положение точки на линии определяется $(m - 1)$-м параметром s. Множитель s^{m-2} в знаменателе сокращается с соответствующим множителем в выражении для элемента поверхности S, так что все совершенно аналогично п. 104. Более того, сходимость является равномерной относительно положения точки a на поверхности S или вне S, так что выражение (56) остается непрерывным.

---

[1]) В этом пункте рассуждения сокращены. Читатель легко их дополнит, комбинируя предыдущие методы с хорошо известными методами теории потенциала.

[2]) Можно допустить, что выражения для x на (λ) близки к соответствующим выражениям на геодезической, которая касается λ в точке a, так что соответствующие точки на обеих кривых при одном и том же значении s находятся друг от друга на расстоянии порядка s^2.

В формуле (57) знаменатель содержит множитель s^{m-1}. Однако, так же как и для обычного потенциала двойного слоя, в знаменателе появляется дополнительный множитель s из-за присутствия члена $\frac{d\Gamma}{d\nu}$. Действительно, эта последняя величина равна нулю (п. 58) в любой точке x поверхности S, если направление ν конормально к геодезической ax. Примерно таким является случай, когда x, изменяясь на S, приближается к точке a, так как ν есть конормаль к координатной линии (λ), проходящей через точку x и составляющей с геодезической бесконечно малый угол порядка s.

Если a находится вблизи точки P поверхности S, но вне S, то множитель $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ не будет бесконечно малым для точек x вблизи P, так что сходимость выражения (57) не является равномерной, и интеграл испытывает разрыв.

Исследуем тип этого разрыва. Для этого допустим, что S есть геометрическое место геодезических, исходящих из точки P (начальные направления которых, конечно, все лежат в одной и той же $(m-2)$-мерной плоскости, так что S регулярно). Рассмотрим произвольную функцию u, которая определена и регулярна вне S и совпадает на S с заданной функцией. Пусть $f = \mathfrak{F}(u)$. Если будет необходимо, то мы присоединим к S другую часть поверхности S' (поверхности пространственного типа), чтобы с помощью одного из полуконоидов выделить замкнутую часть T пространства (см. рис. 26 и 27). Применим нашу формулу к такой области, поместив точку a сначала на одной стороне поверхности S, затем на другой ее стороне и, наконец, в точке P. В первом случае сумма интегралов $\iiint$ и $\iint$ равна $-2\pi\, u_a$, во втором случае она равна нулю. В промежуточном случае, когда a совпадает с P, интеграл (38) (см. п. 105) берется по начальным направлениям, заключенным между характеристическим конусом и плоскостью, касательной к S. Он, следовательно, сводится к конечной части половины объема двуполостного гиперболоида (п. 100), которая равна $-\pi u_P$. Итак, рассматриваемый разрыв алгебраической суммы интегралов, как и в классической теории, точно в два раза больше того значения, которое он принимает, когда точка a находится на S.

С другой стороны, этот разрыв присущ только интегралу (57) который распространен по S. Действительно, интегралы, распространенные по S, очевидно, непрерывны, а остальные интегралы равномерно сходятся.

Нам остается отказаться от гипотезы, что S есть геометрическое место геодезических. Это можно сделать, рассмотрев геодезические, касательные к S в точке P, которые образуют вторую поверхность $\bar{S}$. Если вычесть друг из друга потенциалы (57), относящиеся к обеим этим поверхностям и к одной и той же точке a, то разность будет интегралом, который сходится равномерно [1]) относительно положения a. Следовательно, заключение можно распространить на регулярную поверхность S любой формы.

ГЛАВА IV
ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ОБЫЧНЫМ УРАВНЕНИЯМ

129. Дадим несколько простых примеров расчета по нашим формулам. Первый из них относится к уравнению цилиндрических волн (e_2) с правой частью ($\omega = 1$). Элементарное решение таково:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}, \qquad \Gamma = (t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2,$$

где x_0, y_0, t_0 и x, y, t — координаты точек a и x. Так как в этом случае $L = 0$, то общая формула решения задачи Коши будет иметь вид

$$2\pi u_a = 2\pi u(x_0, y_0, t_0) = \iiint_T \frac{f\,dx\,dy\,dt}{\sqrt{\Gamma}} + \left| \iint \left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma}} u_1 - u \frac{d}{d\nu} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \right) dS. \right. \tag{58}$$

Второй член под знаком $\iint$ является единственным, который нужно преобразовать, чтобы присутствовали только обычные символы анализа. Общий метод для этой цели был впервые дан в п. 108. Введем

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

и азимутальный угол φ. Тогда координаты произвольной точки полуконоида с вершиной в точке a будут равны

$$x = x_0 + r\cos\varphi, \quad y = y_0 + r\sin\varphi, \qquad t = t_0 - \varepsilon r,$$

где $\varepsilon = +1$, если используемый обратный полуконоид направлен к убывающим значениям t (случай $t_0 > 0$, когда S есть плоскость $t = 0$) и -1 в противоположном случае. Мы получим

$$P_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\Gamma}{\partial x} = -(x - x_0), \qquad P_2 = -(y - y_0), \qquad P_3 = t - t_0.$$

---

[1]) Здесь используется примечание предыдущего пункта. Поскольку расстояние, заключенное между соответственными точками на поверхностях S и $\overline{S}$, второго порядка малости, а угол между их касательными плоскостями бесконечно мал, то легко видеть, что, как и в случае обычных потенциалов, разность между значениями $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ в этих точках имеет порядок s^2. Что касается значений u, то их можно считать одними и теми же в соответственных точках.

Выражение, которое нужно проинтегрировать в правой части формулы (42) п. 108, примет вид

$$\left|\frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \dfrac{\partial A}{\partial P_1} & \dfrac{\partial A}{\partial P_2} & \dfrac{\partial A}{\partial P_3} \end{vmatrix}}{2\,(k_1P_1+k_2P_2+k_3P_3)}\right| uv = uvr\,d\varphi,$$

и формула (58) запишется следующим образом (сохранены обозначения п. 108):

$$2\pi u\,(x_0,\,y_0,\,t_0)=\iiint_T \frac{f\,dx\,dy\,dt}{\sqrt{\Gamma}}+$$
$$+\lim_{\tau'\to 0}\left\{\iint_{S_1}\left(\frac{u_1}{\sqrt{\Gamma}}-u\frac{d}{d\nu}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\right)dS+\int_{(\tau')}\frac{ur}{\sqrt{\Gamma}}\,d\varphi\right\}. \qquad (59)$$

130. Эта формула годится для любой формы поверхности S. Но мы придадим ей более удобную для практических вычислений форму путем использования наших общих правил, относящихся к символу $\overline{|}$ (см., в частности, п. 84). Мы это сделаем, ограничившись двумя видами поверхностей, которые рассматривали ранее.

Пусть для начала S есть плоскость $t=0$. Тогда

$$dS = dx\,dy = r\,dr\,d\varphi.$$

Конормаль ν совпадает (с точностью до направления) с внутренней нормалью, так что $\frac{d}{d\nu}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{d}{d\nu}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}=\frac{|t_0|}{\Gamma^{3/2}}$, каким бы ни был знак t_0. Второй член (отрицательный) под знаком $\iint$ в формуле (58) запишется в виде

$$|t_0|\int d\varphi\,\left|\overline{\int_0^{|t_0|}\frac{ur\,dr}{(t_0^2-r^2)^{3/2}}}\right..$$

В соответствии с тем, что было объяснено ранее,

$$\left|\overline{\int_0^{|t_0|}\frac{ur\,dr}{(t_0^2-r^2)^{3/2}}}\right.=\int_0^{|t_0|}\frac{(u-\bar u)\,r\,dr}{(t_0^2-r^2)^{3/2}}-\frac{\bar u}{|t_0|},$$

где $\bar u$ представляет собой значение $u=u_0$ на конце соответствующего луча, а именно:

$$\bar u = u_0\,(x_0+|\,t_0\,|\cos\varphi,\ y_0+|\,t_0\,|\sin\varphi).$$

Окончательно получаем

$$2\pi u\,(x_0,\,y_0,\,t_0)=\iiint\frac{f\,dx\,dy\,dt}{\sqrt{\Gamma}}+$$
$$+\iint\left[\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}u_1-\frac{|t_0|}{\Gamma^{3/2}}(u-\bar u)\right]r\,dr\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\bar u\,d\varphi. \qquad (60)$$

Введение модуля $|t_0|$, дающее два различных выражения в зависимости от знака t_0, согласуется с нашими замечаниями в п. 118 о разрывности $\iint$ в общей формуле [1]).

Можно проверить также заключение п. 112 о знаке остаточного интеграла, считая, что в формуле (60) u_0 положительно при r, меньшем некоторого значения $r_1 < |t_0|$, и равно нулю при $r > r_1$ (так что $\bar{u} = 0$) и что $f = u_1 = 0$.

131. Пусть теперь S состоит из части S' (конечной или безграничной, как на рис. 28) плоскости $t = 0$ и цилиндрической части, имеющей в качестве нормального сечения контур σ на S'. Далее мы придадим t_0 такое значение, чтобы полуконоид с вершиной в точке a пересекал S'', а не S' (рис. 32). Таковы (см. п. 126) условия, из которых исходил Вольтерра, чтобы доказать для уравнения (e_2) справедливость принципа Гюйгенса в форме (C).

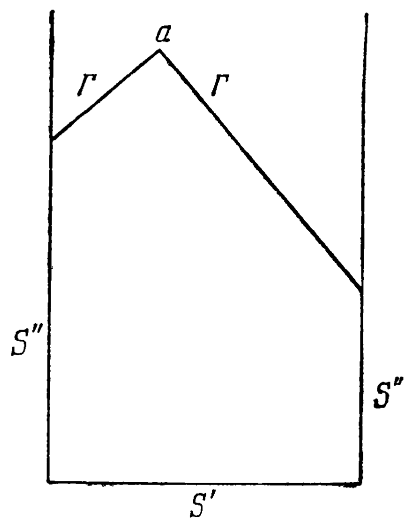

Рис. 32.

Тройной интеграл и двойной интеграл по S' таковы:

$$\iiint_T \frac{f}{\sqrt{\Gamma}}\, dx\, dy\, dt + \iint_{S'} \left(\frac{u_1}{\sqrt{\Gamma}} - \frac{|t_0|}{\Gamma^{3/2}}\, u\right) dx\, dy. \tag{61}$$

На этот раз символ $\overline{|}$ не нужен. На поверхности S'' конормаль (вследствие того, что $A(\pi_1, \pi_2, \pi_3) > 0$) имеет направление, противоположное внутренней нормали n (которая параллельна нормали на контуре σ, направленной внутрь S'). Это дает

$$\iint \left(u \frac{d}{dn} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{du}{dn}\right) d\sigma\, dt = \iint \left(\frac{ur \dfrac{dr}{dn}}{\Gamma^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{du}{dn}\right) d\sigma\, dt,$$

где $d\sigma$ — элемент дуги σ.

Преобразовать нужно только первый член. Интегрируем его сначала по t вдоль отрезка l соответствующей образующей цилиндра, заключенного внутри Γ, т. е. от $t = 0$ до $t = t_0 - \varepsilon r$, заменяя u на $(u - \bar{u}) + \bar{u}$, где

$$\bar{u} = u(x, y, t_0 - \varepsilon r)$$

[1]) Разрывность проявляется также в знаке u_1. Как сказано в п. 118, не нужно забывать, что $u_1 = \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t}$ и, следовательно, меняет знак, когда точка a пересекает плоскость $t = 0$.

есть значение u на пересечении образующей с полостью коноида. Итак, независимо от знака t_0

$$\left|\overline{\int_l \frac{dt}{\Gamma^{3/2}}}\right. = \left|\overline{\int_l \frac{dt}{[(t-t_0)^2-r^2]^{3/2}}}\right. = \left|\overline{\int_r^{|t_0|} \frac{dt'}{(t'^2-r^2)^{3/2}}}\right. = -\frac{1}{r^2}\frac{|t_0|}{\sqrt{t_0^2-r^2}},$$

так что значение $2\pi u_a$ равно сумме выражения (61) и выражения

$$\iint_{S_0'}\left[\frac{(u-\bar{u})\,r\,\frac{dr}{dn}}{\Gamma^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\frac{du}{dn}\right]d\sigma\,dt - |t_0|\int \frac{\bar{u}}{r}\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{\sqrt{t_0^2-r^2}}. \qquad (61')$$

Мы считаем, что однократный интеграл берется вдоль кривой пересечения S'' и Γ, хотя $d\sigma$ и r относятся к основанию σ цилиндра.

132. Выполним аналогичный расчет для уравнения затухающих цилиндрических волн

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Ku = 0,$$

изученного Кулоном, о чем уже было сказано. Элементарное решение равно

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\operatorname{ch}\sqrt{K\Gamma},$$

где ch — гиперболический косинус, принимающий на окружности значение, равное единице, а Γ имеет то же значение, что и ранее. Мы получаем

$$2\pi u_a = \left|\overline{\iint_{S_0}\left[\frac{u_1 \operatorname{ch}\sqrt{K\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} + \frac{1}{2}\frac{d\Gamma}{d\nu}\left(\frac{\operatorname{ch}\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma^{3/2}} - \frac{\sqrt{K}\operatorname{sh}\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma}\right)u\right]dS}\right..$$

Преобразование, описанное в п. 129, дает

$$2\pi u_a = \lim_{\tau'\to 0}\left\{\iint_{S_1}\left[\frac{u_1 \operatorname{ch}\sqrt{K\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\frac{d\Gamma}{d\nu}\left(\frac{\operatorname{ch}\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma^{3/2}} - \frac{\sqrt{K}\operatorname{sh}\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma}\right)u\right]dS + \int_{\tau'}\frac{u}{\sqrt{\Gamma}}\,r\,d\varphi\right\},$$

где S_1 и τ' имеют тот же смысл, что и в п. 108. Однократный интеграл полностью совпадает с интегралом в формуле (59) (в обоих случаях берется то же самое значение v, поскольку замена $\operatorname{ch}\sqrt{K\Gamma}$ на 1 в числителе v не вносит никаких изменений при бесконечно малом τ'). Преобразование п. 130, если в качестве S взять плоскость $t = 0$, дает

$$2\pi u_a = \iint\left[\frac{\operatorname{ch}\sqrt{K\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}u_1 - |t_0|\left(\frac{\operatorname{ch}\sqrt{K\Gamma}-1}{\Gamma^{3/2}} - \frac{\sqrt{K}\operatorname{sh}\sqrt{K\Gamma}}{\Gamma}\right)u\right]r\,dr\,d\varphi -$$
$$- |t_0|\iint\frac{(u-\bar{u})\,r\,dr\,d\varphi}{\Gamma^{3/2}} + \int_0^{2\pi}\bar{u}\,d\varphi.$$

Простоту этого результата можно сравнить с трудностями, с которыми, как мы сказали, встретился Кулон, и со сложностью выражения (12) (п. 79), которое он должен был ввести, чтобы точно следовать расчетам Вольтерра. Нам кажется, что это в достаточной степени показывает, насколько выгодно отказаться от метода, состоящего, по сути, в том, что сначала производится интегрирование, а затем вновь дифференцирование.

Если уравнение имеет правую часть f, то нужно добавить соответствующий член

$$\iiint_T \frac{f \operatorname{ch} \sqrt{K\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\, dx\, dy\, dt.$$

Легко также рассмотреть случай цилиндрической поверхности с помощью способа, аналогичного описанному в п. 131.

133. Вернемся к обычному волновому уравнению, увеличив число независимых переменных на два:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}\right) = f. \tag{e_4}$$

Элементарное решение имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma^{3/2}} = \frac{1}{[(t_0 - t)^2 - r^2]^{3/2}},$$

где r, естественно, равно $\sqrt{(x_1-a_1)^2 + \ldots + (x_4 - a_4)^2}$. В наших обозначениях решение задачи Коши для плоскости дается формулой

$$4\pi^2 u_a = -\left|\overline{\iiint \frac{f}{\Gamma^{3/2}}\, dx_1 \ldots dx_4\, dt}\right. + \left|\overline{\iint_{t=0} \left(u_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Gamma^{3/2}} - \frac{u_1}{\Gamma^{3/2}}\right) dS}\right. =$$

$$= -\left|\overline{\iiint \frac{f}{\Gamma^{3/2}}\, dx_1 \ldots dx_4\, dt}\right. + \left|\overline{\iint \left(\frac{3\,|\,t_0\,|\,u_0}{\Gamma^{5/2}} - \frac{u_1}{\Gamma^{3/2}}\right) dx_1 \ldots dx_4}\right..$$

В объемном (т. е. в пятикратном) интеграле и в интеграле по поверхности, содержащем u_1, введем значения $\bar{f}$, $\bar{u}_1$ функций f и u_1 в точке, где перпендикуляр к оси характеристического конуса, проведенный через произвольную точку $(x_1, \ldots, x_4, t)$, пересекает поверхность этого конуса.

Если обозначить через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0$ направляющие косинусы направления, параллельного плоскости $t = 0$, так что

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3} = \frac{x_4 - a_4}{\alpha_4} > 0,$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1.$$

то $\bar{f}$ представляется в виде

$$f(a_1 + \alpha_1 | t_0 - t |,\quad a_2 + \alpha_2 | t_0 - t |,\quad a_3 + \alpha_3 | t_0 - t |,\quad a_4 + \alpha_4 | t_0 - t |,\ t).$$

Так как интеграл, содержащий u_0, включает в себя

$$\frac{1}{\Gamma^{5/2}} = \frac{1}{(t_0^2 - r^2)^{5/2}},$$

то нужно использовать не только величину $\bar{u}$, но также и $\bar{u}'$ значение производной по радиусу: $\bar{u}' = \frac{1}{2r}\frac{\partial u_0}{\partial r}$ в произвольной точке ребра $r = |t_0|$, вдоль которого характеристический конус пересекает плоскость $t = 0$. Если обозначить через $d\Omega$ элемент телесного угла в четырехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3, x_4), то формула примет вид

$$4\pi^2 u_a = -\iiint \frac{f - \bar{f}}{\Gamma^{3/2}}\, dx_1 \dots dx_4\, dt + \\ + \iint \left[3|t_0| \frac{u - \bar{u} + \bar{u}'(t_0^2 - r^2)}{\Gamma^{5/2}} - \frac{u_1 - \bar{u}_1}{\Gamma^{3/2}} \right] dx_1 \dots dx_4 + \\ + 2\left[\int |t_0 - t|\, dt \int \bar{f}\, d\Omega + \int (|t_0|\, \bar{u}_1 + 3t_0^2 \bar{u}')\, d\Omega \right] + 2\int \bar{u}\, d\Omega.$$

Если f и u_1 имеют производные первого порядка, а u_0 до второго порядка, то каждый из написанных членов имеет теперь обычный смысл.

Естественно, не возникает никаких затруднений при написании аналогичной формулы в случае, когда присутствует член Ku, характеризующий затухание.

Книга IV

УРАВНЕНИЯ С ЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И МЕТОД СПУСКА

ГЛАВА I

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С $2m_1$ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Формулы, дающие решение

134. Те случаи, для которых решение задачи Коши впервые стало известно в анализе, не принадлежат, как мы видели, к классу, которым мы только что занимались. Методы Римана и Кирхгофа относятся к значениям $m = 2$ и $m = 4$ соответственно.

Отметим, что в этих случаях особенности, которые встречались в предыдущей книге, отсутствуют, и каждый из несобственных интегралов также исключается. Это объясняет, почему решения, о которых шла речь, были найдены первыми.

Тем не менее следует считать, что в общем случае четные значения m вызывают новые трудности. Предыдущие методы несправедливы. Это происходит по двум причинам:

1) элементарное решение не является *вполне определенным* (п. 65);

2) уже невозможно ввести *конечную часть* интегралов, которые приходится использовать, поскольку показатель $\frac{m-2}{2}$ или $\frac{m}{2}$, с которым входит Г в знаменатель элементарного решения или его производных, есть целое число.

Впрочем, из самой формы выражений, к которым мы придем, следует, что их нельзя получить простым копированием нашего первого метода.

Но так как мы умеем теперь рассматривать случай $2\,m_1 + 1$ независимых переменных, следует ожидать, что мы сможем получить нужный результат, когда число независимых переменных равно $2\,m_1$, используя метод *спуска* (п. 30). Решение уравнения

$$\mathfrak{F}(u) = \sum\sum A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad \text{(E)}$$

где $m = 2m_1$, выводится из соответствующего решения уравнения с $2\,m_1 + 1$ переменными

$$\mathfrak{F}'(u) = \mathfrak{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad \text{(E')}$$

где через z обозначена $(m + 1)$-я вспомогательная переменная.

Если, как это предполагалось и ранее, характеристическая форма

$$A(P_1, P_2, \ldots, P_m) = \sum A_{ik} P_i P_k$$

уравнения (E) содержит один положительный и $m-1$ отрицательных квадратов, то соответствующая форма

$$A'(P_1, \ldots, P_m, R) = A - R^2$$

уравнения (E′) содержит один положительный и m отрицательных квадратов. Мы уже видели, что величина Γ', аналогичная Γ и относящаяся к (E′), равна

$$\Gamma' = \Gamma - (z-c)^2,$$

где через $(x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$ и $(a_1, a_2, \ldots, a_m, c)$ обозначены две точки $(m+1)$-мерного пространства. Мы также нашли в п. 70, какие соотношения существуют между элементарными решениями двух уравнений: мы видели, что коэффициенты при последовательных степенях Γ в одном из них отличаются численными множителями от коэффициентов при соответствующих степенях Γ' в другом.

Рассмотрим уравнения

$$\mathfrak{G}(v) = 0 \qquad (\mathfrak{E}) \qquad\qquad \mathfrak{G}'(v) = \mathfrak{G}(v) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \qquad (\mathfrak{E}')$$

сопряженные к (E) и (E′). Формулы п. 70 выражают следующее. Если

$$v' = \frac{V'}{\Gamma'^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{V'}{\Gamma'^{m_1 - \frac{1}{2}}}$$

есть элементарное решение уравнения $(\mathfrak{E}')$, причем

$$V' = \sum_0^\infty V'_h \Gamma'^h = \sum (-1)^h V'_h [(z-c)^2 - \Gamma]^h, \tag{1}$$

то элементарное решение уравнения $(\mathfrak{E})$ имеет вид

$$v = \frac{V}{\Gamma^{m-1}} - \mathfrak{B} \log \Gamma + w, \tag{2}$$

где w — регулярная функция. Если использовать коэффициенты C_n п. 95, то формулы (62) и (62″) п. 70 применительно к сопряженному уравнению можно записать в виде

$$V=(m_1-1)\,C_{m_1-1}\sum_{h=0}^{m_1-2}\frac{1}{(m_1-h-1)\,C_{m_1-h-1}}V'_h\Gamma^h, \tag{3}$$

$$\mathfrak{V}=(m_1-1)\,C_{m_1-1}\sum_{h=m_1-1}^{\infty}C_{h-m_1+1}V'_h\Gamma^{h-m_1+1}=$$
$$=(m_1-1)\,C_{m_1-1}\sum_{k=0}^{\infty}C_kV_{k+m_1-1}\Gamma^k. \tag{3'}$$

Итак, это можно получить непосредственно, оперируя с v' (или, вернее, с аналогичной величиной

$$(v')=\frac{V'}{(-\Gamma')^{\frac{m-1}{2}}},$$

которая соответствует $\Gamma'<0$), как мы видели в п. 73. Образуем выражение, также являющееся решением уравнения ($\mathfrak{E}'$):

$$\left|\overline{\int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1}(v')\,dc}\right.=\left|\overline{\int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1}\frac{V'}{[(c-z)^2-\Gamma]^{m_1-\frac{1}{2}}}\,dc},\right. \tag{4}$$

где c_1 — постоянная. Если заменить c на $z+c'$ под знаком $\int$, то его можно записать:

$$\left|\overline{\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1-z}(v')\,dc'}\right.=\left|\overline{\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1}}\right.-w_1, \tag{4'}$$

где $w_1=\int_{c_1-z}^{c_1}(v')\,dc'$ есть регулярная функция. Первый член в правой части, который не зависит от z, представляет собой с точностью до численного множителя нерегулярную часть [1]) элементарного решения v уравнения ($\mathfrak{E}$). В самом деле, если подставить (1) вместо V', то интеграл от каждого члена будет найден с помощью вычислений п. 95 (формулы (28), (28′) этого пункта), и эти члены дадут в результате именно величину требуемой формы.

---

[1]) Разность (4′) есть решение уравнения ($\mathfrak{E}'$), и поскольку второй член справа является голоморфным, то будем иметь

$$\mathfrak{G}\left(\left|\overline{\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1}}\right.\right)=\mathfrak{G}'_1(w_1).$$

Общее значение этих двух членов есть голоморфная функция (что можно видеть из второго выражения), не зависящая от z (что видно из первого выражения). Следовательно, как уже отмечалось, существует функция w, зависящая только от $x_1, x_2, \ldots, x_m$ такая, что

$$\mathfrak{G}(w)=\mathfrak{G}'(w_1).$$

Более того, мы снова получаем значения коэффициентов выражения (3), которые, естественно, становятся тождественными коэффициентам в п. 70 книги II, если умножить выражение (4') на постоянный множитель

$$(-1)^{m_1-1}\, 2\,(m_1-1)\, C_{m_1-1} = (-1)^{m_1-1}\, k. \tag{5}$$

Случай $m = 2$ является особым. Выражение (4') не требует употребления символа $\ulcorner$ и имеет значение

$$\sum \int (-1)^h V_h'(c^2-\Gamma)^{h-\frac{1}{2}}\, dc = -\frac{1}{2}\log\Gamma \sum c_h V_h' \Gamma^h + w. \tag{6}$$

Следовательно, не существует величины V, а имеется лишь величина $\mathfrak{V}$, равная $\sum C_R V_h' \Gamma^h$, которая, согласно сказанному выше, есть не что иное, как функция Римана, умноженная на постоянный множитель $1/\sqrt{|\Delta|}$, причем число k равно [1] 2.

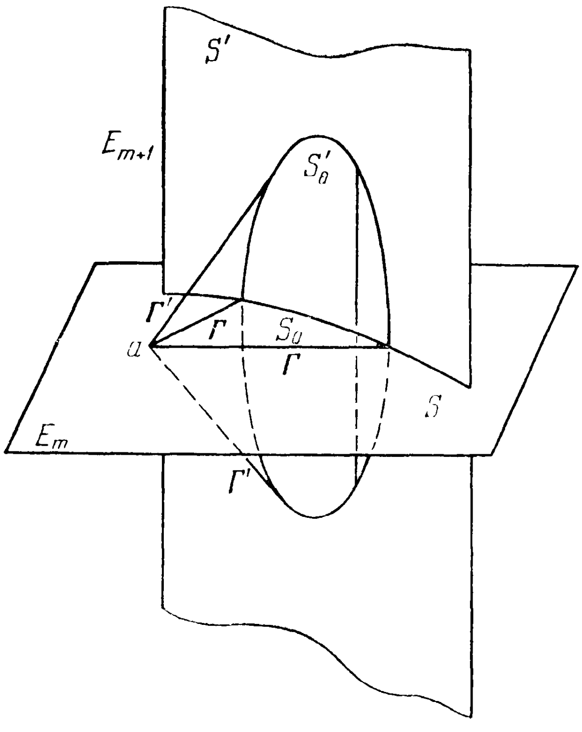

Рис. 33.

135. После того как мы это установили, для получения решения уравнения (E), удовлетворяющего начальным данным на многообразии S, мы рассмотрим в $(m+1)$-мерном пространстве E_{m+1}, определенном координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$, многообразие S' (гиперцилиндр), проекция которого есть S (рис. 33) [2], т. е. такое, которое получается, если брать последовательно в качестве x_1, x_2, ..., x_m координаты произвольной точки на S, а в качестве z все возможные действительные значения. Если S — пространственного типа относительно Γ, то S' будет пространственного типа относительно Γ'.

Так как мы должны рассмотреть кратные интегралы в m-мерном пространстве E_m и в $(m+1)$-мерном пространстве E_{m+1} одновременно, то мы изменим обозначения, использовавшиеся в п. 38,

[1]) Это не согласуется с выражением (5): множитель $(m_1 - 1)$, который должен быть равен нулю, заменен 1, как мы это делали не раз в книге II.

[2]) Рис. 33, соответствующий $m = 2$, в общем случае можно использовать как схематичный рисунок.

следующим образом. Сохраним символы $\iint$ и $\iiint$ для E_m. С другой стороны, поверхностный интеграл (т. е. интеграл, распространенный по m-мерному множеству, которое всегда является гиперцилиндром) в E_{m+1} будет обозначаться $\iint\!\!\int$; объемный интеграл, т. е. $(m+1)$-кратный интеграл в E_{m+1}, будет обозначаться $\iiint\!\!\int$.

Решение u уравнения (E) определяется таким двойным условием:

в каждой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$ поверхности S' функция u должна иметь значение, совпадающее со значением в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ поверхности S;

в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$ конормальная [1]) производная функции u должна иметь значение $\frac{du}{d\nu}$, заданное в точке $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_m)$.

Известно (п. 30), что это решение единственно, не зависит от z и удовлетворяет (E). Следовательно, такое решение есть решение данной задачи и наоборот.

Функция u дается формулой (39) (п. 105), а именно (в новых обозначениях):

$$(-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-2}u_a = -\left|\overline{\iiint\!\!\int_{T'} v' f dx_1 \ldots dx_m dz +}\right. \\ + \left|\overline{\iint\!\!\int_{S_0'} \left(u\,\frac{dv'}{d\nu} - v'\,\frac{du}{d\nu} - Luv'\right) dS'},\right. \qquad (7)$$

где T' обозначает часть $(m+1)$-мерного пространства, заключенную между S' и Γ', S_0' (рис. 33) обозначает соответствующую часть S', $m = 2m_1$.

136. Строго говоря, можно сказать, что мы таким образом решили задачу, но вспоминая знаменитые слова Пуанкаре [2]), следует признать, что она решена в «недостаточной степени», потому что предыдущее решение содержит чуждые элементы:

---

[1]) Согласно выражению для формы (A') (предыдущий пункт) конормальное направление к гиперцилиндру S' в любой из его точек параллельно конормали к S в соответствующей точке.

[2]) «Нет задач решенных и задач нерешенных. Есть только задачи более или менее решенные». Выступление Пуанкаре на IV конгрессе математиков (Рим, 1908).

пространство E_{m+1}, вспомогательную переменную z и все, что к ним относится.

Следует, очевидно, преобразовать его так, чтобы освободиться от этих посторонних элементов.

С геометрической точки зрения соотношение между фигурами, построенными в E_m и E_{m+1}, следующее. Область T' проектируется на m-мерное пространство E_m в виде области T, заключенной между S и Γ. Это означает, что если точка $(x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$ принадлежит области T', то точка $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ принадлежит области T, и наоборот, любая точка области T есть общая проекция бесконечного множества точек области T', т. е. всех тех, у которых z заключено между $-\sqrt{\Gamma}$ и $+\sqrt{\Gamma}$ (предполагается, что $(m+1)$-я координата точки a есть нуль).

Аналогичным образом поверхность S_0' проектируется на пространство E_m в виде поверхности S_0, причем каждая точка S_0 есть проекция бесчисленного множества точек S_0', у которых z заключено между $-\sqrt{\Gamma}$ и $+\sqrt{\Gamma}$.

137. Отметив это, преобразуем формулу (7).

Возьмем, например, первый член в правой части, представляющий собой интеграл $\iiiint$, распространенный по области T'.

Наш метод состоит в том, что вначале интегрирование выполняется по z.

При $m = 2$ функция v' имеет степенную особенность порядка $1/2$. Это не вызывает никаких затруднений. Но для целых четных значений m, больших 2, мы не имеем права действовать так во всей области интегрирования, потому что линии, проектирующие T' на T, пересекают особую поверхность Γ' под углом, который становится бесконечно малым в окрестности Γ. Мы должны, следовательно, разделить область T на две части: T_1 и T_2, где вторая часть содержит окрестность коноида — при помощи вспомогательной границы τ (которую устремим в конце концов к Γ).

В части T_1' области T', которая проектируется в виде области T_1 (и граница которой образована Γ' и цилиндром τ' с основанием τ), интегрирование по z является законным, так что соответствующий интеграл $\iiiint$ вычислим, интегрируя m раз в T_1 однократный интеграл

$$f\left|\int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} \frac{\sum V_h' (\Gamma - z^2)^h \, dz}{(\Gamma - z^2)^{m_1 - \frac{1}{2}}}\right. .$$

Интегрируя почленно[1]) множитель при f

$$\sum V'_h \left| \int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} \frac{dz}{(\Gamma - z^2)^{m_1 - h - \frac{1}{2}}} \right.,$$

мы видим, что над каждым членом выполняются операции, рассмотренные в п. 96.

Это показывает, что:

1) все члены, соответствующие h, меньшему чем $(m_1 - 1)$, исчезают;

2) следующие за ними члены при h, меняющемся от $m_1 - 1$ до ∞, дают в результате произведение 2π на коэффициент при логарифме в интеграле (4′) с точностью до множителя $(-1)^{m_1-1}$, т. е. на $\frac{1}{k}\mathfrak{B}$.

Следовательно, в этом первом члене обращающаяся в бесконечность на коноиде величина, которая появляется под знаком $\iiint$ в формулах, относящихся к случаю нечетного m, уже заменена регулярной величиной $\mathfrak{B}$.

Таким образом, для $m = 2$ преобразование завершено.

138. При $m > 2$ в области T_2 этот метод несправедлив. Мы увидим, что результат здесь существенно отличается от того, что дал бы этот метод. Линии интегрирования подчинены следующему условию: они должны подходить к Γ' под конечным углом, и теперь нужно рассмотреть систему кривых l, каждая из которых соединяет точку поверхности Γ (определенную координатами β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$) с точкой поверхности τ, и линии, которые получаются из этой системы путем переноса в произвольную плоскость $z = \text{const}$. Точка области T_2 будет, следовательно, определяться значениями $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ и Γ, причем последняя величина меняется на каждой линии l от нуля до некоторого значения γ, которое очень мало, если τ близко к Γ. Пусть

$$dx_1 dx_2 \ldots dx_m = K\, d\beta_1 d\beta_2 \ldots d\beta_{m-1}\, d\Gamma = d\tau_\gamma\, d\Gamma \tag{8}$$

есть выражение для элемента T_2.

Если T'_2 есть часть T', проектируемая в виде T_2, тогда точка области T_2 будет определяться координатами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}, \Gamma, z$.

Проинтегрируем сначала по кривым l, т. е. считая постоянными величины $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}, z$. Затем заставим изменяться z, и, наконец, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$.

Граница области T_2, не совпадающая с Γ' (т. е. цилиндр), не является геометрическим местом кривых l, так что отрезки кри-

[1]) Присутствие символа $\left|\right.$ не влечет за собой никаких трудностей, связанных со сходимостью, так как этот последний оказывает влияние только на конечное число членов суммы.

вых l, заключенные в T_2', становятся бесконечно малыми в окрестности пересечения цилиндра с Γ'. Поэтому применим правила из п. 90 книги III. Нужно взять конечную часть каждого однократного интеграла вдоль кривой l, и, проинтегрировав ее по z, снова взять конечную часть результата. Это дает двойной интеграл в сечении $\mathfrak{C}$ (рис. 34) объема T_2' произвольной двумерной плоскостью

$$\beta_1 = \text{const}, \qquad \beta_2 = \text{const}, \quad \ldots, \qquad \beta_{m-1} = \text{const}.$$

Этот интеграл остается конечным (что очевидно *априори* и что мы проверим), когда изменяются параметры $\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$. Интегрирование по этим параметрам будет выполнено в классическом смысле.

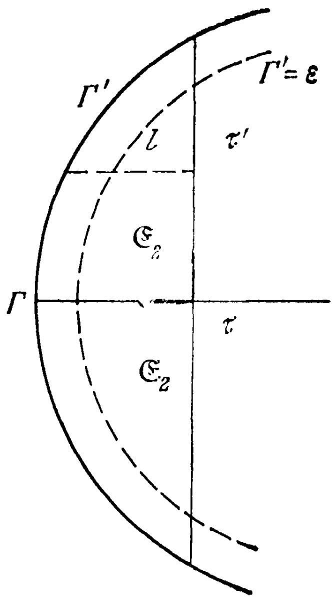

Рис. 34.

Можно сразу же отметить, что члены, соответствующие $h \geqslant m_1 - 1$ в разложении (1) величины V', дают только конечные интегралы в обычном смысле. Они становятся бесконечно малыми, когда γ стремится к нулю. Поэтому пренебрежем ими, нам нужно рассмотреть только конечное число $m_1 - 1$ членов этого разложения.

Как уже отмечалось, при $m = 2$ эти члены отсутствуют. При $m = 4$, т. е. при $m_1 = 2$, будет только один член, а именно, V_0', который нужно разделить на $(\Gamma - z^2)^{3/2}$ и проинтегрировать по β_i, Γ и z, предварительно умножив на Kf. Если записать

$$KfV_0' = F_0,$$

то интеграл по Γ равен (после интегрирова-ния по частям)

$$\left|\overline{\int_{z^2}^{\gamma} \frac{F_0 d\Gamma}{(\Gamma - z^2)^{3/2}}}\right. = -2 \frac{F_0}{\sqrt{\Gamma - z^2}} + \int_{z^2}^{\gamma} \frac{dF_0}{d\Gamma} \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma - z^2}}\,.$$

В правой части стоит обычный интеграл, который стремится к нулю при $(\gamma - z^2)$, стремящемся к нулю. Помимо однократного интеграла, имеется еще один член, обладающий особенностью дробного порядка в окрестности нижнего предела $\Gamma = z^2$. Нужно исключить член с этой особенностью и сохранить только член $-2F_0/\sqrt{\gamma - z^2}$.

Этот последний легко проинтегрировать по z, что дает $-2\pi F_0$. Аналогичным образом для любого m_1 и $h < m_1 - 1$ напишем:

$$KfV_h = F_h.$$

Беря соответствующий интеграл по $\mathfrak{C}_2$, мы легко исключим символ $\boxed{}$. В самом деле, так как

$$\frac{1}{(\Gamma - z^2)^{m_1-h-\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^{m_1-h-1}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{d^{m_1-h-1}}{d\Gamma^{m_1-h-1}}\frac{1}{\sqrt{\Gamma-z^2}},$$

то из классической формулы получаем

$$\int\frac{F_h d\Gamma}{(\Gamma-z^2)^{m_1-h-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\int\frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma-z^2}}\frac{d^{m_1-h-1}F_h}{d\Gamma^{m_1-h-1}} + R_h, \tag{9}$$

$$R_h = \frac{(-1)^{m_1-h-1}F_h}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\frac{d^{m_1-h-2}}{d\Gamma^{m_1-h-2}}\frac{1}{\sqrt{\Gamma-z^2}} -$$

$$\ldots - \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\Gamma-z^2}}\frac{d^{m_1-h-2}F_h}{d\Gamma^{m_1-h-2}} =$$

$$= \frac{-F_h}{m_1-h-\frac{3}{2}}\frac{1}{(\Gamma-z^2)^{m_1-h-\frac{3}{2}}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\Gamma-z^2}}\frac{d^{m_1-h-2}F_h}{d\Gamma^{m_1-h-2}}. \tag{10}$$

Первый член в правой части формулы (9) дает обычный интеграл, который обращается в нуль одновременно с γ и которым можно пренебречь. С другой стороны, значение R_h' величины R_h в окрестности контура $\Gamma = z^2$ имеет особенность дробного порядка, которую нужно исключить (действительно, по крайней мере для произвольного z она представляет собой здесь *единственную* особенность дробного порядка, которую следует отбросить по смыслу определения символа $\boxed{}$). Все это сводит конечную часть однократного интеграла (9) к значению R_h на другом конце интервала интегрирования $\Gamma = \gamma$, а именно:

$$R = -_h\frac{F_h}{m_1-h-\frac{3}{2}}\frac{1}{(\gamma-z^2)^{m_1-h-\frac{3}{2}}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\gamma-z^2}}\frac{d^{m_1-h-2}F_h}{d\gamma^{m_1-h-2}}.$$

Это значение нужно теперь проинтегрировать по z в пределах от $-\sqrt{\gamma}$ до $+\sqrt{\gamma}$ и взять конечную часть интеграла. Но значение интеграла

$$\left|\overline{\int_{-\sqrt{\gamma}}^{+\sqrt{\gamma}} \frac{dz}{(\gamma - z^2)^{n+\frac{1}{2}}}}\right. \tag{11}$$

оказалось равным нулю (п. 96 книги III) при любом положительном n. Следовательно, единственный член, который нужно рассмотреть — это последний. Он дает

$$-\frac{\pi}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m_1 - h - \frac{3}{2}\right)} \frac{d^{m_1-h-2}F_h}{d\gamma^{m_1-h-2}}.$$

Нужно взять вышеприведенную производную при $\Gamma = \gamma$, но в конце концов нужно устремить γ к нулю. Следовательно, мы берем рассматриваемую производную при $\gamma = 0$, что дает требуемый предел.

Остается только, взяв для h все значения от нуля до $m_1 - 2$, найти сумму результатов. Видно, что это непосредственно связано со значением полинома (3), так как $(m_1 - h - 2)$-ю производную от F при $\Gamma = 0$ можно рассматривать (вследствие классической формулы Лейбница для производной произведения) как $(m_1 - 2)$-ю производную от $F\Gamma^h$, умноженную на

$$\frac{(m_1 - h - 2)!}{(m_1 - 2)!}.$$

Итак, вводя снова коэффициенты C и учитывая (3), имеем [1])

$$\lim_{\gamma\to 0}\left|\overline{\iint \frac{v'd\Gamma\, dz}{(\Gamma - z^2)^{m_1-\frac{1}{2}}}}\right. =$$

$$= -\frac{\pi}{(m_1-2)!}\left(\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\left(\sum_0^{m_1-2}\frac{F_h\Gamma^{\gamma h}}{(m_1-h-1)\,C_{m_1-h-1}}\right)\right)_{\gamma=0} =$$

$$= -\frac{2\pi}{k}\frac{1}{(m_1-2)!}\left(\frac{d^{m_1-2}KfV}{d\gamma^{m_1-2}}\right)_{\gamma=0}. \tag{12}$$

139. Выше мы применили общие результаты п. 90. В данном случае, однако, легко непосредственно убедиться в том, что все происходит именно так, как показано в упомянутом месте. Действительно, исходя из определения символа $\overline{|\ }$ в том виде, в ка-

---

[1]) Когда f аналитично, можно получить ту же самую формулу, воспользовавшись разложением в ряд Маклорена, что мы делали в Acta Math., v. XXXI.

ком оно дано в пп. 88, 89, мы должны ограничить T_2' поверхностью $\Gamma' = \varepsilon$ (пунктир на рис. 34) и найти предел соответствующих интегралов $\iiint$ после вычитания членов, имеющих особенность дробного порядка по ε. Итак, из (10) сразу же видно, что значение R_h' (для $\Gamma = z^2 + \varepsilon$) имеет такую особенность. То же самое будет справедливо для остатка любого из интегралов (11), если мы возьмем отрезок интегрирования в пределах от $z = -\sqrt{\gamma} + \varepsilon$ до $z = +\sqrt{\gamma} - \varepsilon$. Подобно тому, что было проделано в п. 90 для общего случая, это доказывает следующее: процедура повторного интегрирования, использующая каждый раз символ $\overline{|}$, дает правильное значение двойного интеграла по Γ и по z.

140. Наконец, выполним интегрирование по $\beta_1, \beta_2, \ldots$ $\ldots, \beta_{m-1}$. На многообразии τ, определяемом уравнением $\Gamma = \gamma$, где γ — произвольная постоянная, произведение $K\, d\beta_1 d\beta_2 \ldots d\beta_{m-1}$ дает элемент, который в соответствии с выражением (8) мы ранее обозначили через $d\tau_\gamma \left(\text{или } \frac{dT}{d\gamma}\right)$. Интеграл

$$I_\gamma = \iint fV\, d\tau_\gamma = \iint KfV\, d\beta_1 d\beta_2 \ldots d\beta_{m-1} \tag{13}$$

будет функцией от γ, которую можно дифференцировать по γ, беря производную от KfV под знаком $\iint$ и интегрируя по β_i.

Следовательно, искомая величина оказывается пропорциональной коэффициенту при γ^{m_1-2} в разложении интеграла I_γ, или, другими словами, в силу (12) она равна [1])

$$\frac{2\pi}{k} \frac{1}{(m_1-2)!} \left(\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}} I_\gamma\right)_{\gamma=0}. \tag{14}$$

Видно, что она содержит производные f и V вплоть до $(m_1 - 2)$-го порядка. Эта функция V не определена полностью. Члены, содержащие множителем Γ^{m_1-1}, произвольны, но такие члены не влияют на выражение (14).

Величина, входящая в выражение u_a и соответствующая члену

$$\iiiint v' f dx_1 \ldots dx_m\, dz,$$

состоит из m-кратного интеграла

$$-\frac{2\pi}{k} \iiint f\mathfrak{B}\, dx_1 \ldots dx_m \tag{14'}$$

[1]) Нужно учесть знак — перед первым членом формулы (7).

по внутренней части области T и из выражения (14), представляющего собой $(m - 1)$-кратный интеграл по поверхности Г. Эти величины не содержат на этот раз никаких функций, обращающихся в бесконечность, а содержат только две регулярные функции: $\mathfrak{V}$ — в одном случае, V — в другом.

141. Следует, однако, заметить, что при $m > 2$ в соответствии с результатом книги III выражение (13) нужно вычислять лишь после того, как мы ограничим T и, следовательно, τ, небольшой частью поверхности z, исключающей окрестность точки a, а затем устремим z к a в соответствии с гипотезами, о которых сказано в п. 106. Эта процедура указана в пп. 105—106. То, чем мы занимаемся, это лишь ее осуществление. Очевидно, что по той же самой причине этот процесс сходится и притом равномерно, как об этом говорилось в п. 106.

Но дело заключается в том, что эта предосторожность не является необходимой. Можно получить то же самое окончательное значение, непосредственно распространяя интегралы $\iint$ по всей поверхности τ и применяя к полученному таким образом результату операцию $(m_1 - 2)$-кратного дифференцирования.

Чтобы доказать это, нужно показать, что если такой интеграл распространен по малой части τ, находящейся с той же стороны Σ, что и точка a, то его $(m_1 - 2)$-я производная по γ при $\gamma = 0$ существует и стремится к нулю, когда Σ стремится к a (при этом остаются в силе ограничения п. 106). Достаточно дать такое доказательство для соответствующим образом подобранного закона изменения Σ, так как мы знаем, что конечный результат не зависит от этого закона.

Мы сделаем это, вводя [1]) нормальные переменные ξ, которые были определены в п. 57. Это сводит Г к квадратичной форме с постоянными коэффициентами, которую с помощью соответствующего линейного преобразования переменных ξ можно привести к виду

$$\Gamma_0 = \xi_m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_{m-1}^2.$$

---

[1]) Следовало бы учесть влияние произведенной замены переменных. Как сразу же видно, оно проявляется в том, что под знаком $\iiint$ появляется множитель, равный якобиану преобразования, т. е. регулярная величина, которая не меняет, с точки зрения рассуждений текста, свойств функции F. Мы не будем обращать внимания на эту сторону расчета, поскольку самый простой путь заключается в том, чтобы изложить метод в инвариантной форме, т. е. в форме, не зависящей от любой замены переменных, как это будет сделано в приложении 1. Эта форма расчета отличается от только что указанной именно тем, что во всех формулах вводится множитель $\sqrt{|D|}$, где через D обозначен дискриминант формы H. Мы знаем, как связана эта величина с функциональным определителем, о котором мы только что говорили.

Мы запишем это так:

$$\Gamma_0 = t^2 - r^2 = t^2 - R,$$

где вместо ξ_m стоит t и $R = r^2$ вместо $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2$. Характеристический коноид с вершиной в точке a превращается в обычный гиперконус вращения, а $\Gamma = \gamma$ представляет собой гиперповерхность второго порядка, уже рассмотренную в п. 97.

Теперь можно выбрать Σ. Мы возьмем такие плоскости, для которых $t = \mathrm{const} = \varepsilon$.

Функция $F = Vf$ под знаком $\iiint$ предполагается регулярной (см. далее) и остается таковой при регулярной замене переменных. Если это принять, то нужно исследовать производную интеграла

$$\iint F\, d\tau_\gamma, \tag{15}$$

где $d\tau_\gamma$ таково, что произведение его на $d\gamma$ представляет собой m-мерный элемент $d\xi_1 \ldots d\xi_m$. Этот последний заменим выражением

$$r^{m-2}\, d\Omega_{m-2},$$

причем $d\Omega_{m-2}$ имеет то же значение, что и в п. 97. Это эквивалентно тому, что элементу ставятся в соответствие t, r и угловые параметры $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-2}$. Можно начать с интегрирования по $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_{m-2}$, в результате чего появится интеграл

$$\Phi = \int F\, d\Omega_{m-2}.$$

Это функция от t и r, четная по отношению к последней переменной [1]). Ее можно рассматривать как регулярную функцию от t и $R = r^2$. С помощью этой функции объемный интеграл $\iiint F\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_m$, распространенный по m-мерному объему, заключенному между коноидом $\Gamma = 0$, гиперповерхностью второго порядка $\Gamma = \gamma$ и гиперплоскостью $t = \varepsilon$, выразится через двойной интеграл

$$\iint \Phi r^{m-2}\, dr\, dt, \tag{16}$$

[1]) Так как F разлагается в ряд по формуле Тейлора по степеням ξ и, следовательно, по переменным t и r с коэффициентами в тригонометрической форме относительно φ, то каждый член, нечетный по r, при умножении на $d\Omega_{m-2}$ и интегрировании по φ_i соответствует интегралу, распространенному по внутренней части гиперсферы радиуса r. Этот интеграл равен нулю, поскольку в него входит одночлен по ξ, нечетный по крайней мере по одной из этих переменных.

причем площадь интегрирования ограничена (рис. 35) прямыми линиями $r = 0$, $t = \varepsilon$, $t = r$ и дугой гиперболы $t^2 - r^2 = \gamma$.

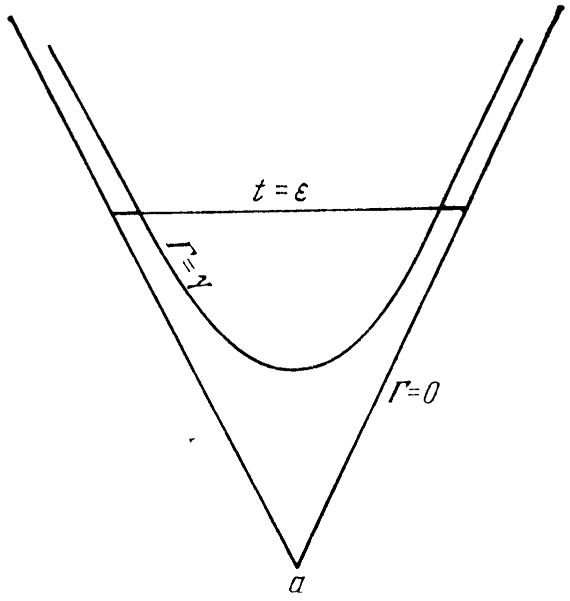

Рис. 35.

Выражение (15) есть производная [1]) по γ от выражения (16). Так как $d\tau_\gamma$ есть «частное» от деления элемента m-мерного пространства на $d\gamma$, то нужно заменить $dr dt$ соответствующим элементом $d\Pi_\gamma$ гиперболы, который есть частное от деления $d\Pi = dr\,dt$ на $d\gamma$. Это частное (см. п. 38) равно

$$dt : \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = \frac{dt}{2r},$$

так что

$$d\tau_\gamma = \frac{dT}{d\gamma} = \frac{1}{2} r^{m-3}\, d\Omega_{m-2}\, dt. \tag{15'}$$

Следовательно, вопрос состоит в том, имеет ли однократный интеграл

$$\int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} r^{m-3}\Phi\, dt = \int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} \Phi(t, R) R^{m_1 - \frac{3}{2}}\, dt =$$
$$= \int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} \Phi(t, t^2 - \gamma)(t^2 - \gamma)^{m_1 - \frac{3}{2}}\, dt \tag{17}$$

$(m_1 - 2)$-ю производную при $\gamma = 0$, бесконечно малую по ε. Согласно классическому правилу, первая производная равна

$$-\int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} \left[R\frac{\partial \Phi}{\partial R} + \left(m_1 - \frac{3}{2}\right)\Phi\right](t^2 - \gamma)^{m_1 - \frac{5}{2}}\, dt$$

(так как R равно $t^2 - \gamma$, то $\frac{\partial R}{\partial \gamma}$ равно -1). С другой стороны, мы не написали члена, соответствующего изменению нижнего предела. Этот член, очевидно, равен нулю, если предположить, что m_1 больше 1 (и даже больше 2 в данный момент). Итак, полагая

$$\Phi_1(t, R) = -\left[R\frac{\partial \Phi}{\partial R} + \left(m_1 - \frac{3}{2}\right)\Phi\right] = -\left[\frac{r}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \left(m_1 - \frac{3}{2}\right)\Phi\right], \tag{18}$$

мы видим, что рассматриваемая производная равна

$$\int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} \Phi_1(t, t^2 - \gamma)(t^2 - \gamma)^{m_1 - \frac{5}{2}}\, dt, \tag{17'}$$

---

[1]) Ср. далее п. 147.

т. е. аналогична самому выражению (17) с той лишь разницей, что m_1 заменено на $(m_1 - 1)$.

Производная $(m_1 - 2)$-го порядка от выражения (17) при $\gamma = 0$ есть $(m_1 - 3)$-я производная от (17′). Иными словами, если наше заключение справедливо для какого-то значения m_1, то оно справедливо и для следующего значения m_1.

Но при $m_1 = 2$ нужно исследовать значения только самого интеграла (не дифференцируя его), а именно:

$$\int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} \Phi(t, t^2 - \gamma) \sqrt{t^2 - \gamma}\, d\gamma.$$

При $\gamma = 0$ этот интеграл сводится [1] к виду

$$\int_0^{\varepsilon} \Phi(t, t)\, t\, dt,$$

т. е. к величине, меньшей $H\frac{\varepsilon^2}{2}$, где через H обозначено максимальное значение $|\Phi|$.

Доказательство, следовательно, завершено. Видно, что (m_1-2)-я производная от выражения (15) при $\gamma=0$ для бесконечно малого ε есть бесконечно малая величина порядка ε^2.

Для того чтобы не использовать символ Φ, заметим следующее. Член Φ_1 в левой части формулы (18) равен $\int F_1\, d\Omega_{m-2}$, где

$$F_1 = -\left[\frac{r}{2}\frac{\partial F}{\partial r} + \left(m_1 - \frac{3}{2}\right) F\right].$$

Если выполнить $m_1 - 2$ аналогичные операции (коэффициент внутри скобок каждый раз уменьшается при этом на единицу), то они приведут в конечном счете к некоторой функции F_{m_1-2}. Из этого рассуждения следует, что искомая $(m_1 - 2)$-я производная от I_γ равна

$$\int dt \int F_{m_1-2}\, d\Omega_{m-2}. \tag{19}$$

где в F_{m_1-2} нужно положить $r = t$. Это можно записать так:

$$\iint F_{m_1-2}\, d\Omega_{m-2}\, dt, \tag{19′}$$

---

[1]) При $m = 4$ и Φ, тождественно равном 1, первая форма выражения (17) принимает вид $\int_{\sqrt{\gamma}}^{\varepsilon} r\, dt$, откуда сразу же видно, что она представляет собой половину площади гиперболического сегмента, ограниченного хордой $t = \varepsilon$ и, следовательно, для $\gamma = 0$ — половину площади треугольника, ограниченного этой хордой и асимптотами.

причем интеграл распространен по Γ_0. Если вернуться к первоначальным координатам, то выражение можно рассматривать как интеграл по Γ. На этом коноиде параметры φ можно рассматривать как $m-2$ переменные из тех, которые обозначались через λ (каждая система значений φ определяет образующую коноида Γ_0, которая соответствует бихарактеристике коноида Γ), в то время как нормальную переменную t можно принять за параметр s.

142. После того как мы преобразовали таким образом первый член в формуле (7), выполним совершенно аналогичный расчет для интеграла

$$-\left|\overline{\iiint\left(v'\frac{du}{d\nu}+Luv'\right)dS'}\right. = -\left|\overline{\iiint v'(u_1+Lu_0)\,dS'}\right. .$$

Для этой величины получим значение

$$-\frac{2\pi}{k}\left[\iint_{S_0}\mathfrak{V}(u_1+Lu_0)\,dS-\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\int_\sigma V(u_1+Lu_0)\,d\sigma_\gamma\right],$$

где σ есть сечение поверхности S поверхностью $\Gamma=\gamma$, а $d\sigma_\gamma$ есть элемент σ, определяемый формулой

$$d\sigma_\gamma\,d\gamma = dS. \tag{8'}$$

143. Рассмотрим, наконец, член

$$\left|\overline{\iiint u\frac{dv'}{d\nu}\,dS'}\right. = \left|\overline{\iiint u\frac{dv'}{d\nu}\,dS\,dz}\right. . \tag{20}$$

К нему также можно применить совершенно аналогичный метод. Действительно, предыдущие расчеты показывают, что если w' — произвольное выражение, имеющее форму

$$w'=\frac{\sum W'_h\Gamma'^h}{\Gamma'^{\,p-\frac{1}{2}}},$$

где W'_h не зависит от z, и если положить $(w')=\dfrac{\sum W'_h\Gamma'^h}{(-\Gamma')^{p-\frac{1}{2}}}$ и, кроме того,

$$\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1}(w')\,dc'=(-1)^{p-1}\left(\frac{W}{\Gamma^{p-1}}-\mathfrak{W}\log\Gamma+\ldots\right) \tag{21}$$

(многоточие означает члены, регулярные при $\Gamma=0$), то получим

$$\left|\overline{\iiint w'u\,dS'}\right. = 2\pi\left(\iint_S u\mathfrak{W}\,dS-\frac{1}{(1-2)!}\frac{d^{p-2}}{d\gamma^{p-2}_{(\gamma=0)}}\int_\sigma uW\,d\sigma_\gamma\right). \tag{22}$$

Это будет иметь место, если принять, что $w' = k\frac{dv'}{d\nu}$, причем число p здесь равно $m_1 + 1$; величина w' будет равна $-k\frac{d(v')}{d\nu}$, что можно найти путем непосредственного дифференцирования. Интеграл (21) примет тогда вид

$$-k\left|\overline{\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1} \frac{d(v')}{d\nu}\, dc'}\right.$$

и, вследствие п. 134, будет, как известно, равен

$$-k\frac{d}{d\nu}\left|\overline{\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1} (v')\, dc'} = -(-1)^{m_1-1}\frac{d}{d\nu}\left(\frac{V}{\Gamma^{m_1-1}} - \mathfrak{B}\log\Gamma + \ldots\right),\right.$$

так что

$$\mathfrak{W} = \frac{d\mathfrak{B}}{d\nu}, \qquad W = -(m_1-1)V\frac{d\Gamma}{d\nu} + \Gamma\frac{dV}{d\nu} - \mathfrak{B}\Gamma^{m_1-1}\frac{d\Gamma}{d\nu}.$$

Таковы значения, которые нужно подставить в формулу (22). Результат при этом нужно разделить на k, что дает множитель $2\pi/k$ в правой части.

Заметим, что $(p-2)$-я, т. е. (m_1-1)-я производная от последнего члена в выражении для W при $\gamma = 0$ получается сразу же, а именно:

$$\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\mathfrak{B}\Gamma^{m_1-1}\frac{d\Gamma}{d\nu} = (m_1-1)!\,\mathfrak{B}\frac{d\Gamma}{d\nu},$$

так что

$$\frac{1}{(m_1-1)!}\left\{\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\left[\int u\mathfrak{B}\Gamma^{m_1-1}\frac{d\Gamma}{d\nu}\,d\sigma_\gamma\right]\right\}_{\gamma=0} = \int u\mathfrak{B}\frac{d\Gamma}{d\nu}\,d\sigma_\gamma \qquad (22')$$

(член, соответствующий изменению $d\sigma_\gamma$ при изменении γ, отсутствует вследствие того, что в дифференцируемое выражение входит множитель Γ^{m_1-1}).

Используя аналогичный ход рассуждений, получим, что член, стоящий перед W, дает только (m_1-2)-ю производную из-за того, что он содержит множитель Γ

$$\frac{1}{(m_1-1)!}\left\{\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\int \Gamma u\frac{dV}{d\nu}\,d\sigma_\gamma\right\}_{\gamma=0} = \frac{1}{(m_1-2)!}\,\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\int\limits_{(\gamma=0)} u\frac{dV}{d\nu}\,d\sigma_\gamma. \qquad (22'')$$

143′. На первый взгляд выражения, выписанные для последнего члена (20), кажутся неудобными по сравнению с теми, которые соответствуют другим членам. Может показаться, что они зависят от членов, которые содержат Γ^{m_1-1} в выражении для V и которые не определены.

Легко убедиться в том, что эта зависимость иллюзорна. Представим себе, что из каждой точки поверхности S' проведен малый отрезок вдоль конормали ν, так что соответствующая величина $d\nu$ равна очень малой постоянной. Обозначим через S'_ν геометрическое место точек, полученных таким образом, и придадим u в каждой из этих точек то же значение, которое оно имело в соответствующей точке поверхности S'.

При этих условиях член (20) будет производной по ν от величины

$$\iint\int_{S'_\nu} uv'dS' \tag{23}$$

и, следовательно, будет равен

$$\frac{2\pi}{k}\frac{d}{d\nu}\iint_{S_\nu}\mathfrak{B}u\,dS-\frac{2\pi}{k}\frac{d}{d\nu}\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\int_{\sigma_{\gamma\nu}}uV\,d\sigma_\gamma. \tag{24}$$

Во втором члене S_ν есть основание поверхности S'_ν в пространстве E_m, $\sigma_{\gamma\nu}$ — сечение поверхности S_ν поверхностью $\Gamma=\gamma$. Производные $\frac{d}{d\gamma}$ и $\frac{d}{d\nu}$ можно менять местами, так как γ и ν — это независимые переменные, входящие в выражение под знаком $\int$ через посредство величины $\sigma_{\gamma\nu}$. Следует заметить, что в первоначальном выражении (23) дифференцировать нужно только величину v': мы считаем, что u и dS' не зависят от ν. Это означает, что для вычисления данных величин, относящихся к произвольному элементу в точке X поверхности S'_ν, нужно рассмотреть соответствующий элемент вблизи соответствующей точки $X^{(0)}$ поверхности S', которая является «нормальной проекцией» точки X и при помощи которой нужно вычислить u и dS' (значение u берется в точке $X^{(0)}$, а dS' соответствует значению элемента не на S'_ν, а его конормальной проекции на поверхность S').

Аналогичные замечания применимы, следовательно, к формуле (24), так что вместо u, dS и $d\sigma_\gamma$ нужно взять их конормальные проекции на S. Однако необходимо заметить, что из этого нельзя сделать вывод о том, что дифференцируется только функция V: в самом деле, конормальная проекция величины $\sigma_{\gamma\nu}$ на S зависит от ν. Предположим, что между точками x поверхности σ_γ и бесконечно близкими точками X поверхности $\sigma_{\gamma\nu}$ установлено взаимно-однозначное соответствие (это можно сделать бесчисленным количеством способов), при помощи которого на поверхности S определяется точечное преобразование в бесконечном малом, переводящее точку x в конормальную проекцию $X^{(0)}$ точки X. Можно представить себе, что значение V в точке X и значение $u^{(0)}$ функции u в точке $X^{(0)}$ выражены через координаты точки x. Что касается соотношения между двумя элементами $d\sigma_\gamma$ — на поверхности σ_γ и на поверхности $\sigma_{\gamma\nu}$ — то его можно найти, вспомнив, что $d\sigma_\gamma$ есть частное от деления dS на $d\gamma$, причем эта последняя величина имеет одно и то же значение для x и X. Вспоминая также, что величину dS, относящуюся к точке X, нужно взять в виде конормальной проекции на S, мы видим, что интеграл во втором члене формулы (24) можно записать в форме

$$\int_{\sigma_\gamma} Vu^{(0)} \frac{dS^{(0)}}{dS}\, d\sigma_\gamma, \tag{25}$$

где $\frac{dS^{(0)}}{dS}$ есть отношение соответствующих элементов при переходе от x к $X^{(0)}$. Здесь также нужно учесть предыдущие замечания, относящиеся к V и $u^{(0)}$.

Теперь можно выполнить дифференцирование по ν на S. Это дает следующее значение для смешанной производной (первого порядка по ν и $(m_1 - 2)$-го порядка по γ) от выражения (25):

$$\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}} \frac{d}{d\nu} \int_{\sigma_{\gamma\nu}} uV\, d\sigma_\gamma =$$

$$= \frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}} \int_\sigma \left(u_0 \frac{\delta V}{\delta\nu} + V \frac{du_0}{d\nu} + u_0 V \frac{d}{d\nu} \frac{dS^{(0)}}{dS} \right) d\sigma_\gamma. \tag{26}$$

Производная $\frac{\delta V}{\delta \nu} = \lim\limits_{\nu\to 0} \frac{V_X - V_x}{\Delta\nu}$ соответствует, по определению, смещению вдоль поверхности $\Gamma = \mathrm{const}$, что необходимо для того, чтобы можно было дифференцировать $m_1 - 2$ раз по γ, причем для величины V нужно знать только разложение

$$V_0 + V_1\Gamma + \ldots + V_{m_1-2}\Gamma^{m_1-2},$$

которое мы научились вычислять в книге II. Для любого h, меньшего или равного $(m_1 - 2)$, будем иметь

$$\frac{d^h}{d\gamma^h} \frac{\delta V}{\delta\nu}\bigg|_{\gamma=0} = h!\, \frac{\delta V_h}{\delta\nu}.$$

Способ рассмотрения первого члена в формуле (24) не требует никаких новых замечаний и определяется только обычными правилами анализа бесконечно малых. Сначала нужно продифференцировать под знаком $\iint$, т. е. заменить $\mathfrak{B}$ на $\frac{d\mathfrak{B}}{d\nu}$. Затем нужно взять член, соответствующий изменению границы, поскольку область S_ν — точнее, ее конормальная проекция на S — зависит от ν. Этот член всегда отрицателен, если S есть поверхность пространственного типа. Причина этого заключается в том (ср. примечание на стр. 182 в п. 108 и рис. 21), что конормаль к S в произвольной точке ребра пересечения с Γ направлена вне Γ, и, следовательно, некоторая часть конормальной проекции S_ν лежит внутри S (рис. 36). Часть, вычитаемая таким путем из S, состоит из элементов, каждый из которых представляет собой малый $(m-1)$-мерный цилиндр, имеющий основанием элемент σ, а в качестве образующей — малый отрезок $xX^{(0)}$, определенный ниже (см. рис. 36). Объем такого элемента в наших обозначениях равен $d\sigma_\gamma d\gamma$. Второй множитель представляет собой приращение Γ при переходе от x к $X^{(0)}$, или, что то же самое, от X к $X^{(0)}$, и, следовательно, равен по абсолютному значению $\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right| d\nu$. Деля на $d\nu$, получаем производную

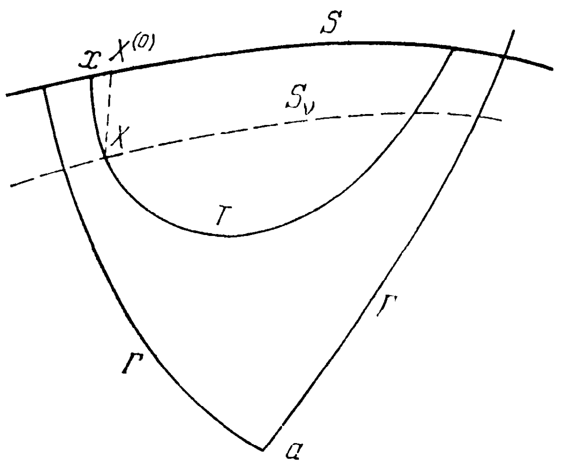

Рис. 36.

$$\frac{d}{d\nu}\iint_{S_\nu}\mathfrak{B}u_0\,dS=\iint_S u_0\frac{d\mathfrak{B}}{d\nu}\,dS-\iint_\sigma u_0\mathfrak{B}\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|d\sigma_\gamma. \tag{27}$$

Само собой разумеется, что эта формула относится только к тому случаю, когда S пространственного типа и, следовательно, $\frac{d\Gamma}{d\nu}<0$. Знак перед последним членом, естественно, должен измениться при замене $\left|\frac{d\Gamma}{d\nu}\right|$ на $\frac{d\Gamma}{d\nu}$. Полученная таким образом новая формула справедлива для любого типа поверхности S, поскольку условие $\frac{d\Gamma}{d\nu}>0$ (что справедливо для поверхности S временного типа) сопутствует тому обстоятельству, что соответствующие части конормальной проекции S_ν охватывают поверхность S (вместо того, чтобы находиться внутри нее).

Второе выражение для формулы (20), полученное путем комбинации формул (26) и (27), эквивалентно первому (для членов, содержащих $\mathfrak{B}$, это сразу же видно из сравнения с формулами (22) — (22″)). Мы видим, что на этот раз в выражении нет членов, содержащих Γ^{m_1-1}, которые появляются из выражения для V.

144. Вычисление члена (18) завершает решение задачи. Мы можем перевести в левую часть множитель

$$\frac{k}{2\pi}=\frac{1}{\pi}(m_1-1)\,C_{m_1-1},$$

который умножается на величину $(-1)^{m_1-1}\pi\Omega_{m-2}$, входящую в формулу (7) (ср. п. 135). Это дает коэффициент в виде

$$(-1)^{m_1}(m_1-1)\,C_{m_1-1}\Omega_{m-2}. \tag{28}$$

Учитывая соотношение п. 99 между Ω_{m-2} и Ω_{m-1}, запишем этот коэффициент так:

$$(-1)^{m_1}\frac{(m_1-1)}{\pi}\Omega_{m-1}=2\frac{(-1)^{m_1}}{(m_1-2)!}\pi^{m_1-1}, \tag{28'}$$

и мы приходим к следующему утверждению:

пусть $m=2m_1$,

V, $\mathfrak{V}$ — *две регулярные функции, которые входят в элементарное решение* (2) *сопряженного уравнения* $\mathfrak{G}(v)=0$;

Γ, T, S_0 — *области, аналогичные тем, которые были определены для нечетного* m; τ — *часть поверхности* $\Gamma=\gamma$ (γ — *очень малая положительная постоянная*), *заключенная в области* T; σ_γ — *сечение этой поверхности поверхностью* S_0; $d\tau_\gamma$ и $d\sigma_\gamma$ — *элементы многообразий* τ *и* σ, *определенные равенствами* (8) *в п.* 138 и (8′) *в п.* 142.

Решение задачи Коши выражается формулой

$$\begin{aligned}2\frac{(-1)^{m_1}}{(m_1-2)!}\pi^{m_1-1}u_a=&-\iiint_T \mathfrak{V}f\,dx_1\ldots dx_m-\\&-\iint_{S_0}\left[\mathfrak{V}(u_1+Lu_0)-u_0\frac{d\mathfrak{V}}{d\nu}\right]dS+\int_\sigma u_0\mathfrak{V}\frac{d\Gamma}{d\nu}\,d\sigma_\gamma+\\&+\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\left\{\iint_\tau fV\,d\tau_\gamma+\int_\sigma\left[V(u_1+Lu_0)-u_0\frac{dV}{d\nu}\right]d\sigma_\gamma\right\}_{\gamma=0}+\\&+\frac{1}{(m_1-2)!}\left\{\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\int_{\sigma_\gamma}u_0V\frac{d\Gamma}{d\nu}\,d\sigma_\gamma\right\}_{\gamma=0}\end{aligned} \tag{29}$$

или (в соответствии с предыдущим пунктом)

$$\begin{aligned}=&-\iiint_T\mathfrak{V}f\,dx_1\ldots dx_m-\iint_{S_0}\mathfrak{V}(u_1+Lu_0)\,dS+\\&+\frac{1}{(m_1-2)!}\left\{\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\left[\iint_\tau fV\,d\tau_\gamma+\int_{\sigma_\gamma}V(u_1+Lu_0)\,d\sigma_\gamma\right]\right\}_{\gamma=0}-\\&-\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\frac{d}{d\nu}\int_{\sigma_{\gamma\nu}}Vu_0\,d\sigma_\gamma+\frac{d}{d\nu}\iint_{S_\nu}u_0\mathfrak{V}\,dS.\end{aligned} \tag{29'}$$

Последний член можно вычислить по формуле (27), а предпоследний — по формуле (26).

Само собой разумеется, что в настоящем случае любое дифференцирование под знаками $\iint$ или $\iiint$ должно выполняться по классическим правилам анализа. Мы, впрочем, будем иметь возможность показать это более явно. Здесь также нет никаких трудностей, которые встречались в случае нечетного m.

145. Ясно также, что некоторые свойства, которыми обладает решение, построенное в предыдущей книге, непосредственно распространяются и на только что найденное решение, поскольку это последнее существенно не отличается от первого.

Это относится прежде всего к замечанию, сделанному в начале п. 104: если форма поверхности S такова, что она включает вместе с Г объем T, для которого точка a — внешняя (см. рис. 19 и 20), то справедливы формулы, тождественные формулам (29) и (29′), с той разницей, что левая часть заменена нулем. Это непосредственно следует из формулы (F′) п. 104.

Видно сразу же, что то же самое замечание применимо к «свойству взаимности» (п. 114), которое будет исследоваться заново в следующей главе.

Так же обстоит дело с замечанием, которое мы сделали (п. 113) для случая, когда поверхность S состоит из характеристик. В этом случае знание u_0 достаточно для того, чтобы записать решение, поскольку при задании u_0 известна величина $u_1 = \frac{du_0}{d\nu}$.

Наконец, и это главное, нам не нужно заново производить расчет, чтобы перейти от анализа решения к его проверке (при этом всегда предполагается, что границы — пространственного типа). То, что решение удовлетворяет всем условиям задачи [1]), нужно считать уже доказанным (согласно пп. 116, 117 гл. III предыдущей книги).

145′. Другой вид формулы. Члены, содержащие $d\tau_\gamma$ и $d\sigma_\gamma$ в формулах (29) и (29′), можно записать другим способом, заметив, например, что $d\tau_\gamma d\gamma$ есть элемент (малый цилиндр—см. п. 38 книги II) объема, заключенного между поверхностью τ и близкой поверхностью, для которой γ заменено на $\gamma + d\gamma$. Отсюда следует, что при таком изменении γ интеграл $\iiint fV\,dx_1 \ldots dx_m$ по области, которую мы обозначили через T_2, увеличится на $d\gamma \iint fV\,d\tau_\gamma$,

[1]) В случае, когда многообразие S есть характеристика, это также следует из проверки, относящейся к нечетному m. Доказательство п. 119 для $m = 3$ применимо и для $m = 2$.

так что $\iint fV\,d\tau_\gamma$ есть производная этого объемного интеграла[1]) по γ.

Аналогично интеграл $\int\left(V\frac{du}{d\nu}+LuV\right)d\sigma_\gamma$ есть производная по γ от интеграла $\iint\left(V\frac{du}{d\nu}+LuV\right)dS$, распространенного по области S_2 поверхности S, заключенной между $\Gamma=0$ и $\Gamma=\gamma$. Подобное преобразование применимо к другому члену, содержащему $d\sigma_\gamma$. Записывая сокращенные обозначения $\iiint_2$ и $\iint_2$ вместо $\iiint_{T_2}$ и $\iint_{S_2}$, мы видим, что формула (29′) эквивалентна формуле

$$2(-1)^{m_1}\frac{1}{(m_1-2)!}\pi^{m_1-1}u_a=$$
$$=-\iiint_T \mathfrak{B}f\,dx_1\ldots dx_m-\iint_{S_0}\mathfrak{B}(u_1+Lu_0)\,dS+$$
$$+\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\left[\iiint_2 fV\,dx_1\ldots dx_m+\iint_2 V(u_1+Lu_0)\,dS\right]-$$
$$-\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d}{d\nu}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\iint_2 u_0V\,dS+\frac{d}{d\nu}\iint_{S_\nu}u_0\mathfrak{B}\,dS. \qquad (29'')$$

Эта форма результата будет для нас полезна. Таким же способом[2]) можно преобразовать формулу (29).

---

[1]) Приращение объема T_2 (заключенного между двумя последовательными положениями τ) содержит нерегулярные части в окрестности ребра σ. Но они имеют второй порядок по $d\gamma$.

Можно схематически представить себе общее расположение подобной фигуры (ср. рис. 35 на стр. 236), если взять наиболее простой случай $m=2$ и, кроме того, для большей простоты, считать коэффициенты уравнения постоянными. Поверхность $\Gamma'=\gamma$ пространства E_{m+1} является в этом случае полостью двуполостного гиперболоида $\mathfrak{H}_2$; $\Gamma=\gamma$ есть ветвь гиперболы в главном сечении этого гиперболоида; T_1 есть область внутри этой ветви гиперболы (ограниченная поверхностью S); T_2 есть область (ограниченная той же поверхностью), заключенная между этой гиперболой и ее асимптотами.

[2]) Полезно также напомнить, что расчеты этого пункта несущественно отличаются от расчетов предыдущего пункта. Поэтому замечания, сделанные в п. 141 о сходимости интеграла $\iiint fV\,dx_1\ldots dx_m$ после его дифференцирования по γ, остаются справедливыми для вычислений в данной форме. Кроме того, в обоих случаях сходимость равномерная, если производные от fV вплоть до порядка (m_1-2) ограничены.

146. Случай Римана. Скажем несколько слов о случае $m = 2$, который уже рассматривался в книге II и который, как было сказано, несколько отличается от прочих.

Характеристический коноид вырождается в систему двух характеристических линий. Они параллельны осям, если уравнение взято в форме Лапласа. Мы запишем это уравнение так, чтобы выполнялось условие $|\Delta| = 1$, следовательно, умножим его на (± 2):

$$\pm 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu\right) = \pm 2f.$$

Нам нужно выбрать знак в соответствии с положением рассматриваемого угла, образованного характеристиками (т. е. угла, содержащего внутри себя дугу S), причем форма $A(\pi_1, \pi_2)$ должна быть положительной на всех прямых, которые пересекают этот угол. Следовательно, этот знак зависит (как мы это видели в п. 42) от направления изменения величины y, рассматриваемой в функции от x. В данном случае дело обстоит так, что тип кривой определяется не самой природой уравнения, а, наоборот, уравнение должно быть записано так, чтобы данная линия была пространственного типа.

Мы уже отметили, что каждый член формулы (вначале оставляя в стороне член, содержащий величину $\frac{dv'}{d\nu}$) можно преобразовать так, что не нужно проводить различий между T_1 и T_2 в силу отсутствия символа $\square$ и функции V. В любом из этих членов нужно записать $\mathfrak{V}$ вместо v', исключить один интеграл $\int$ и разделить [1]) на — 2.

Но то же самое рассмотрение можно также применить к члену, содержащему $\frac{dv'}{d\nu}$, если использовать метод п. 144. При этом линии $a\alpha$, $a\beta$, как и в п. 42 книги II — это две характеристики, исходящие из точки a (Г образовано именно этими двумя линиями). Пусть S есть линия, которая несет начальные данные и которая пересекает обе характеристики в точках α и β. Нужно провести близкую кривую S_ν такую, что каждая точка кривой S_ν получается из точки на S, если отложить на конормали ν к кривой S малый отрезок, соответствующий $d\nu = \text{const}$. Кривая S_ν пересечет характеристики в точках α', β' (рис. 37). Так как S'_ν есть прямой цилиндр с основанием S_ν, то нужно взять производную по ν от интеграла $\iint\int uv'dS'$ (см. п. 144). Само собой разумеется, что,

[1]) Множитель 2π, приведенный в п. 135, сокращается с коэффициентом в левой части.

по определению, величина dS' для произвольного элемента поверхности S'_ν и соответствующее значение u относятся к конормальной проекции на S'.

Но $\iiint uv'dS'$ равно [1] $\pi\iint_{S_\nu} u\mathfrak{V}ds$, т. е. однократному интегралу, который можно теперь записать, используя обычный символ $\int$, и производная которого состоит из произведения π на: 1) член $\int u \frac{d\mathfrak{V}}{d\nu}\, dS$, представляющий собой интеграл от бесконечно малой вариации величины $uv'dS$ для соответствующих точек поверхностей S и S_ν: 2) два члена, относящихся к дугам $\alpha\alpha^{(0)}$, $\beta\beta^{(0)}$ (рис. 37) одной из кривых, которые не имеют соответствия на другой кривой, так что пределы интегрирования по s зависят от ν. Производные обеих этих функций равны ± 1 вследствие того, что конормальное направление симметрично к касательной относительно линий, параллельных осям, так что оба треугольника $\alpha\alpha'\alpha^{(0)}$ и $\beta\beta'\beta^{(0)}$ являются равнобедренными. Оба рассматриваемых члена дадут $\frac{1}{2}(u\mathfrak{V})_\alpha$ или $\frac{1}{2}(u\mathfrak{V})_\beta$, т. е. величины, которые, очевидно, соответствуют второму члену формулы (27).

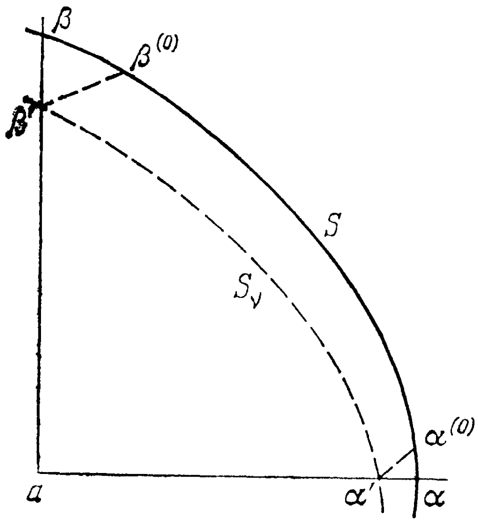

Рис. 37.

Эти два члена в данном случае являются единственными из тех, которые нужно прибавить к правой части формулы (7), предварительно заменив v' на $\mathfrak{V}$, $\iint$ и $\iiint$ на $\int$ и $\iint$ (отбросив, естественно, символ $\ulcorner$). Это дает точно такие же результаты, как те, которые были выведены с помощью метода Римана. Тот факт, что функция Римана $\mathfrak{V}$ есть коэффициент при логарифме в элементарном решении (мы уже нашли это в п. 45), на этот раз является частным случаем наших общих рассуждений.

147. После того как мы решили вопрос с помощью «метода спуска», можно спросить себя, существует ли другой способ получения того же самого результата, не использующий этого приема. Вот как это можно сделать практически.

---

[1] Буква S заменена на s в соответствии с п. 40 и с обычным обозначением дуги.

Пусть $G = 0$ — характеристика уравнения, которую мы вначале предполагаем регулярной. Иными словами, не только левая часть G уравнения является регулярной функцией координат (функцией, имеющей непрерывные производные до того порядка, который входит в рассуждения и в расчеты), но также, кроме того, в области, в которой мы работаем, не существует ни одной точки (особой), где m ее производных первого порядка обращались бы в нуль одновременно. Поскольку характеристическое уравнение

$$A\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}; x_1, \ldots, x_m\right) = 0$$

должно выполняться вдоль всей этой поверхности, то имеем тождественно

$$A = A_1 G, \tag{30}$$

где A_1 — регулярная функция x_i. Отметим далее, что отсюда следует выражение для конормальной производной к поверхности $G = \mathrm{const}$:

$$\frac{dG}{d\nu} = \frac{1}{2} \sum \pi_i \frac{\partial A}{\partial \pi_i} = A(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) = A_1 G, \tag{30'}$$

где $\pi_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$. Пусть, с другой стороны,

$$v = \frac{V}{G^p} - \mathfrak{W} \log G \tag{2'}$$

(где p — целое положительное число, V и $\mathfrak{W}$ — регулярные функции) есть решение уравнения ($\mathfrak{E}$). Это предполагает, что само $\mathfrak{W}$ есть решение данного уравнения. Пусть T (рис. 38) есть объем, заключенный между предыдущей поверхностью и второй поверхностью S, расположенной для определенности со стороны $G \geqslant 0$. Пусть T_γ — область, полученная в результате пересечения S не с поверхностью $G = 0$, а с поверхностью $G = \mathrm{const} = \gamma > 0$. Применим в области T_γ основную формулу (F) к регулярному решению u уравнения (E) и, с другой стороны, последовательно к решениям v и $\mathfrak{W}$ сопряженного уравнения. Введение $\mathfrak{W}$ сразу же дает, если по-прежнему обозначить через u_1 конормальную производную u

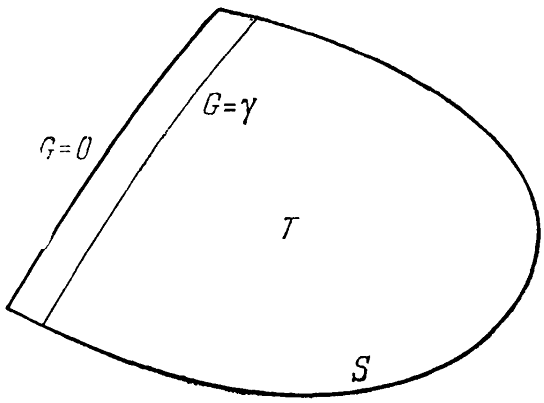

Рис. 38.

в произвольной точке поверхности S

$$-\iiint_{T_\gamma} \mathfrak{B} f\, dT + \iint_{S_\gamma}\left[u\frac{d\mathfrak{B}}{d\nu} - (u_1 + Lu)\,\mathfrak{B}\right] dS =$$

$$= -\iint_\gamma \left[u\frac{d\mathfrak{B}}{d\nu} - \left(\frac{du}{d\nu} + Lu\right)\mathfrak{B}\right] dS. \qquad (31)$$

В левой части этой формулы мы объединили объемные члены и члены, относящиеся к S, оставив в правой части члены, относящиеся к поверхности $G = \gamma$. Если мы по-прежнему будем считать, что u и u_1 вдоль S заданы, то член в правой части является единственной неизвестной величиной.

Обозначим его значение через $-\varkappa$.

Чтобы получить выражение для этой неизвестной, или вернее, его предельное значение $\varkappa_0$ при $\gamma = 0$, выпишем для области T_γ основную формулу, обозначив на этот раз решение сопряженного уравнения буквой v. Выполним дифференцирование по γ (или, если угодно, применим формулу к части T, заключенной между соседними поверхностями $G = \gamma$ и $G = \gamma + d\gamma$, и перейдем к пределу при $d\gamma \to 0$). Каждый элемент объема дает в качестве коэффициента при $d\gamma$ элемент $(m - 1)$-кратного интеграла, обозначавшийся ранее через $\frac{dT}{d\gamma}$. Аналогично каждый элемент поверхности S дает в качестве коэффициента при $d\gamma$ соответствующим образом рассчитанный $(m - 2)$-кратный элемент многообразия σ_γ, образованного пересечением S с поверхностью $G = \gamma$. Этот элемент ранее обозначался через $\frac{dS}{d\gamma}$. Итак, учитывая формулу (30) и значение (2') для v, находим следующее равенство:

$$\frac{Q_1}{\gamma^{p+1}} + \frac{Q}{\gamma^p} - \frac{\chi_1}{\gamma} - \chi\log\gamma = \frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\Pi}{\gamma^p} - \varkappa_1 - \varkappa\log\gamma\right), \qquad (31')$$

куда вместе с уже введенной величиной $\varkappa$ входят выражения:

$$Q_1 = -p\int_{\sigma_\gamma} uV\frac{dG}{d\nu}\frac{dS}{d\gamma},$$

$$Q = -\iint_\gamma Vf\frac{dT}{d\gamma} + \int_{\sigma_\gamma}\left[u\frac{dV}{d\nu} - (u_1 + Lu)V\right]\frac{dS}{d\gamma},$$

$$\chi_1 = \int_{\sigma_\gamma} u\mathfrak{B}\frac{dG}{d\nu}\frac{dS}{d\gamma},$$

$$\chi = -\iint_\gamma \mathfrak{B}f\frac{dT}{d\gamma} + \int_{\sigma_\gamma}\left[u\frac{d\mathfrak{B}}{d\nu} - (u_1 + Lu)\,\mathfrak{B}\right]\frac{dS}{d\gamma},$$

где ν обозначает конормаль к S, а

$$\Pi = \iint_{\gamma} \left[u \frac{dV}{d\nu} - \left(\frac{du}{d\nu} + Lu\right) V - pA_1 uV\right] dS,$$

$$\varkappa_1 = \iint_{\gamma} A_1 u \mathfrak{V} \frac{dT}{d\gamma}.$$

Здесь ν обозначает конормаль к $G = \gamma$, вычисленную в последней формуле при $\pi_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}$.

Видно, прежде всего, как и следовало ожидать, что коэффициенты при $\log \gamma$ слева и справа равны. Это соотношение получается при дифференцировании обеих частей формулы (31). Более того, при тех условиях, которые мы приняли, функции Π, $\varkappa_1$, $\varkappa$ разложимы в ряд по степеням γ (по крайней мере вплоть до того порядка, который нас будет интересовать). Поэтому видно также, что $\varkappa_0$ *есть коэффициент при единственном члене в правой части, содержащем* $1/\gamma$.

Итак, имеем

$$\varkappa_0 = -\frac{1}{p!}\left(\frac{d^p Q_1}{d\gamma^p}\right)_{\gamma=0} - \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{d^{p-1} Q}{d\gamma^{p-1}}\right)_{\gamma=0} + (\chi_1)_{\gamma=0}. \tag{32}$$

Таково предельное (т. е. при $\gamma = 0$) значение правой части (31). Исключая $\varkappa_0$ из уравнений (31) и (32), мы получим соотношение между значениями u и u_1 на поверхности S. Это подтверждает уже известный, впрочем, факт, что на данной фигуре эти значения не могут быть заданы произвольно.

147′. Возьмем теперь в качестве $G = 0$ не регулярную характеристику, а характеристический коноид, так что G есть не что иное, как Γ, а величина,[1] обозначавшаяся ранее буквой A_1, имеет постоянное значение, равное 4, в то время как p равно $(m-2)/2$. Предыдущие соображения нужно видоизменить из-за сингулярности, которая появляется в вершине коноида. Это ничего не меняет при вычислении левой части формулы (31′) (с точностью до одного члена при $m = 2$). Но член с коэффициентом $\varkappa$ в правой части не является более тем единственным членом, который дает $1/\gamma$ (т. е. тем, который до дифференцирования содержал $\log \gamma$).

Чтобы убедиться в этом, можно либо исключить из области интегрирования окрестность вершины коноида при помощи небольшой вспомогательной поверхности S_1 и асимптотически оценить соответствующие члены, добавляющиеся при этом в правую часть формулы (31′), либо рассмотреть целиком всю поверхность $\Gamma = \gamma$ и непосредственно исследовать изменение, которое нужно внести в правую часть. Мы последуем второму способу.

Дело, однако, выглядит существенно различным образом в зависимости от того, равно ли m двум или больше двух.

1. Рассмотрим вначале случай $m = 2$, т. е. классический случай Римана. Если, как обычно, привести уравнение в форме Лапласа (ε), то коноид сводится к прямому углу, вершину которого мы берем за начало координат, а линии $\Gamma = 4xy = \text{const}$ являются равнобочными гиперболами (рис. 39).

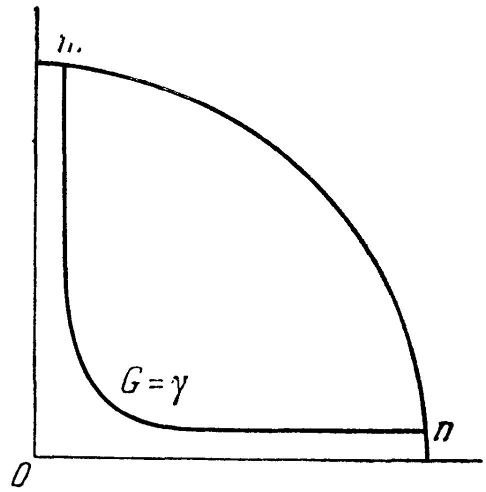

Рис. 39.

Число p здесь равно нулю. Величина Π (благодаря тому факту, что все члены под знаком интеграла содержат множителем π_1 или π_2) есть обычный криволинейный интеграл с регулярными коэффициентами, который мы выписывали в п. 40. Этот интеграл берется вдоль дуги mn гиперболы $\Gamma = \gamma$, содержащейся внутри S, и его производная по γ имеет порядок[1]), не больший чем $\log 1/\gamma$.

Напротив, благодаря членам $\varkappa_1$ и Q (в левой части) появляется элемент $\frac{dT}{d\gamma}$ На гиперболе имеем

$$\frac{dT}{d\gamma} = \pm \frac{\cos(n, x)\, ds}{\frac{\partial\Gamma}{\partial x}} = \pm \frac{\cos(n, y)\, ds}{\frac{\partial\Gamma}{\partial y}} = \pm \frac{dx}{x} = \mp \frac{dy}{y}. \quad (33)$$

Величина $\varkappa_1$ с точностью до знака представляет собой криволинейный интеграл

$$\int u\mathfrak{B} \frac{dx}{x},$$

распространенный по дуге mn, отсекаемой от гиперболы многообразием (в данном случае линией) S.

Можно свести $u\mathfrak{B}$ к его значению в начале координат. Действительно, вследствие того, что элемент $\frac{dT}{d\gamma}$ имеет двоякую форму

---

[1]) Производную от этого интеграла сразу же получим, преобразовав его в двойной интеграл. Таким образом, видно, что она имеет тот же порядок, что и производная от площади, заключенной под отрезком нашей гиперболы, отсекаемым фиксированной линией S (которая соединяет две точки, не лежащие в начале координат и взятые на положительных частях осей). Иными словами, тот же порядок, что и величина $\int_{\gamma/y_1}^{x_2} \frac{\gamma}{x}\, dx$, где y_1, x_2 — дифференцируемые функции от γ, конечные и отличные от нуля при $\gamma = 0$. Такая производная, вычисленная по классическому правилу, имеет порядок $\log 1/\gamma$.

Члены Q, $\frac{d\Pi}{d\gamma}$, $\frac{d\varkappa_1}{d\gamma}$ ошибочно считались в нашем предыдущем мемуаре (Bull. Soc. Math. Fr., t. LIII, p. 241) конечными при $\gamma = 0$ и $m = 2$.

(33), всякий член, содержащий множителем либо x, либо y, даст еще один криволинейный интеграл с конечными и регулярными коэффициентами, порядок которого не более чем $\log 1/\gamma$. Эта величина $u\mathfrak{B}$, которая сводится к u_a, если начальное значение $\mathfrak{B}$ принять равным единице, умножается на

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \log \gamma - \log (y_1 x_2),$$

где через x_1, y_1; x_2, y_2 обозначены координаты точек m, n, взятых в таком порядке, что $y_1 x_2$ не стремится к нулю при γ, стремящемся к нулю (это, очевидно, можно сделать).

Разность двух значений (31) и (32) величины $\varkappa_0$ не равна нулю, а равна u_a, и она позволяет определить эту величину.

Что касается части

$$\iint Vf \frac{dT}{d\gamma} = \pm \int Vf \frac{dx}{x}$$

члена Q, то видно, что она меньше или равна по абсолютному значению $\log \frac{x_2}{x_1} \max |Vf|$, т. е. по порядку величины не более чем $\log 1/\gamma$.

2. Пусть теперь m больше 2. Как и в п. 141[1]), приведем Γ к форме

$$\Gamma = \xi_m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_{m-1}^2 = t^2 - r^2,$$

обозначая через t последнюю переменную ξ_m и через r^2 сумму квадратов остающихся переменных. Эта форма Γ предполагает, что в начале координат величина $A(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ сводится к виду

$$A(P_1, P_2, \ldots, P_m; 0, 0, \ldots, 0) = P_m^2 - P_1^2 - \ldots - P_{m-1}^2$$

и, следовательно, в окрестности начала — к квадратичной форме, очень мало отличающейся от предыдущей. Так как элемент объема равен (п. 141)

$$dT = d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m = r^{m-2}\, d\Omega_{m-2}\, dr\, dt,$$

то элемент, обозначенный выше через $\frac{dT}{d\gamma}$, имеет выражение, полученное в п. 141:

$$\frac{1}{2} r^{m-3} d\Omega_{m-2} dt. \tag{15'}$$

[1]) Как и в п. 141, мы не обсуждаем влияния этой замены переменных. Самое лучшее с этой точки зрения — исходить из формы, в которой даны расчеты в приложении 1.

Следует заметить, что показатель степени при r здесь больше или равен единице.

Поступая при этих условиях так же, как и в п. 141, или так, как мы будем делать далее, мы легко увидим, что член $\varkappa_1$ не дает при дифференцировании ни одного члена, обращающегося в бесконечность одновременно с $1/\gamma$. Наоборот, иначе обстоит дело с членом, содержащим П. В этом последнем величина, которая стоит в скобках под знаком $\iint$, есть регулярная функция. Ее значение в начале координат однозначно задается ее последним членом — pA_1uV, поскольку все остальные содержат производные $\pi_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i}$, которые обращаются в нуль в вершине нашего коноида. Итак, если мы теперь произведем умножение на $d\Omega_{m-2}$ и проинтегрируем по $\varphi_1, \ldots \varphi_{m-1}$, то результатом будет некоторая регулярная функция $\Phi(r, t)$, четная по r, которая принимает при $r = t = 0$ значение

$$-2(m-2)\,\Omega_{m-2}u_aV_a. \tag{34}$$

В итоге мы будем иметь

$$\Pi = \frac{1}{2}\int r^{m-3}\Phi(r, t)\,dt. \tag{34'}$$

Интеграл берется в плоскости rt вдоль дуги гиперболы $t^2 - r^2 = \gamma$ (ср. рис. 35 на стр. 236), которую можно ограничить линией $t = h$. Если под знаком $\int$ ограничиться начальным значением (34) функции Φ, то оно умножится на интеграл

$$\frac{1}{2}\int r^{m-3}dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\gamma}}^{h} (t^2-\gamma)^{m_1-\frac{3}{2}}\,dt.$$

Этот последний имеет значение (п. 95):

$$\frac{(-1)^{m_1}}{4}\,C_{m_1-1}\gamma^{m_1-1}\log\gamma + \ldots,$$

где C_{m_1-1} — численный коэффициент, определенный выше. Члены, замененные многоточием, представляют собой ряд по целым степеням γ. Так как нужно произвести деление на γ^{m_1-1}, то это дает член в форме, представляющей для нас интерес. Коэффициент при этом есть величина (34).

Легко видеть, что для аналитических начальных данных этот член — единственный такого рода в случае, когда $\Phi(r, t)$ имеет форму

$$\Phi(r, t) = \Phi_1(r, t^2) + t\Phi_2(r, t^2),$$

где Φ_1 и Φ_2 обозначают ряды по целым степеням r и t^2. Для этого достаточно рассмотреть способом, аналогичным предыдущему, каждый член полученных таким образом рядов.

Если предположить, что величины, с которыми мы оперируем, являются только регулярными, т. е. имеют производные до некоторого достаточно высокого порядка, то нужно рассуждать так же, как и в п. 141, вычисляя производные интеграла (34') до порядка (m_1-1). Тогда, как это ясно из формулы Тейлора, величина

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\Pi}{\gamma^{m_1-1}}\right)=-(m_1-1)\frac{\Pi}{\gamma^{m_1}}+\frac{1}{\gamma^{m_1-1}}\frac{d\Pi}{d\gamma}$$

состоит из членов, содержащих $1/\gamma^{m_1}$, $1/\gamma^{m_1-1}$, . . ., $1/\gamma$ с постоянными коэффициентами, и из конечных членов; кроме того, нужно добавить член, содержащий $\log\gamma$, коэффициент при котором имеет в пределе выражение (34) с точностью до численного множителя $\frac{(-1)^{m_1}}{4}C_{m_1-1}$. Так или иначе мы возвращаемся к формуле (29).

Нужно, однако, отметить значительную разницу в предыдущем анализе, которая, как это кажется, существует между случаями $m=2$ и $m\geqslant 4$. Было бы трудно понять, что оба соответствующих расчета приводят в действительности к одному и тому же правилу, если бы не были известны существующие между функциями V и $\mathfrak{V}$ связи в том виде, в каком они появляются, когда мы выводим случай $m=2\,m_1$ из случая $m=2\,m_1+1$ при помощи «метода спуска». Итак, в конечном итоге метод спуска оказывается гораздо менее искусственным, чем это казалось на первый взгляд, и, по-видимому, связан с природой вещей.

148. Мы видим, что полученное выше выражение для неизвестной функции значительно отличается то того, которое было выведено для n нечетного. В этом последнем случае элементарное решение вводилось непосредственно. Здесь оно все еще является основой, но только постольку, поскольку дает нам функции V и $\mathfrak{V}$, и только эти последние входят в расчеты.

С другой стороны, значение неизвестной функции для m четного выражается в виде суммы двух интегралов. Один из них распространен по внутренней части характеристического коноида, и подынтегральное выражение в нем содержит множителем сами начальные данные, умноженные на известные функции; другой распространен по поверхности самого характеристического коноида и содержит при тех же условиях начальные данные и их производные до порядка (m_1-2) (или даже до порядка (m_1-1)). Если начальные данные регулярны, то интегралы, записанные таким образом, содержат только конечные величины.

В случае нечетного m присутствовал единственный интеграл, включающий в себя сами начальные данные (дифференцирование в явном виде отсутствовало), но обладающий парадоксальными свойствами, исследованными ранее, и содержащий поэтому в неявном виде интеграл по границе и некоторые производные введенных функций.

Таким образом, это выражение следует рассматривать как промежуточное между двумя выражениями вышеприведенного класса (обычными интегралами, встречающимися в случае четного m), соответствующими двум последовательным значениям m_1. Его порядок непрерывности, например, по отношению к u_1 или f, также является промежуточным [1]) между аналогичными значениями, соответствующими последовательным значениям m_1.

149. Приложение к принципу Гюйгенса. Вышеприведенные формулы позволяют нам дать ответ на следующий основной вопрос:

для каких уравнений справедлив принцип Гюйгенса в его узком смысле, т. е. в форме (B)?

Нам уже известно, что такие уравнения бесполезно искать среди тех, которые мы исследовали в книге III.

Но мы теперь видим, что в случае четного m остаточный интеграл, значение которого дается с помощью вычислений в области, которую мы обозначили через T_1', и в аналогичной области на поверхности S', зависит исключительно от величины $\mathfrak{V}$.

Необходимое и достаточное условие того, чтобы этот остаточный интеграл обращался в нуль, заключается в том, чтобы функция $\mathfrak{V}$ была тождественно равна нулю, т. е. чтобы элементарное решение не содержало логарифмического члена.

Если это не так, то для произвольных начальных данных остаточный интеграл отличен от 0. Вопрос о знаке, рассмотренный в п. 112, может иметь любой ответ в соответствии со значениями коэффициентов уравнения. В самом деле, по крайней мере для $m = 4$ замечание п. 65 с очевидностью показывает, что можно получить любой знак для $\mathfrak{V}$ путем соответствующего выбора коэффициента C, если другие коэффициенты выбраны заранее.

Мы сказали, что мы дали *один* из ответов, а не *определенный* ответ на вопрос, ибо ясно, что можно пожелать, чтобы он был «намного более полным». Было сформулировано необходимое и достаточное условие, но мы не знаем, как найти уравнения, которые удовлетворяют ему, и даже существуют ли уравнения, помимо (e_{2m_1-1}) (и, конечно, кроме тех, которые выводятся из (e_{2m_1-1}) с помощью очевидных преобразований). Этот пункт, как и многие другие вопросы, относящиеся к остаточному интегралу, требует дальнейших исследований.

---

[1]) Это полностью подтверждается путем применения методов функционального анализа, что было развито в нашем «Вариационном исчислении» (п. 243—248) и значительно уточнено Фреше (Fréchet) и Рисом (Riesz) (см. наш мемуар в Acta Math., v. XXX, p. 379).

Что касается последней формы (С) принципа, то можно считать, что она доказана нашими формулами интегрирования в том смысле, в каком это сделано для уравнений (e_3) или (e_2) благодаря результатам Кирхгофа и Вольтерра.

2. Классические примеры

150. Небесполезно дать некоторые приложения предыдущих общих формул и даже проверить, насколько они согласуются с результатами, известными ранее.

Мы уже видели (п. 146), как обстоит дело в случае $m = 2$.

а) Формула Пуассона. Далее следует случай $m = 4$ (что дает $m_1 = 2$, $k = 1$). Самым простым уравнением этого типа является уравнение (e_3) волн в трехмерном пространстве.

Обозначая через (x, y, z, t) и (x_0, y_0, z_0, t_0) две точки, от которых зависит Г, и принимая $\omega = 1$, будем иметь

$$\Gamma = (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = \\ = (t - t_0)^2 - r^2.$$

Логарифмический член в элементарном решении отсутствует (см. п. 69), и оно сводится к $1/\Gamma$, так что $\mathfrak{V} = 0$, $V = 1$.

Для этого уравнения (и вообще для $m = 4$, $m_1 - 2 = 0$) дифференцирование по γ и рассмотрение вспомогательной поверхности $\Gamma = \gamma$ необходимо только для членов, обсуждавшихся в п. 143 (последняя строка формулы (29)). Для этих членов можно даже избежать данных операций, если рассматривать их так, как это сделано в п. 144.

Предположим вначале, что S есть гиперплоскость $t = 0$, как это имеет место в анализе Пуассона, $\frac{d}{d\nu}$ равно $\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$ (гда $\varepsilon = \pm 1$ согласно уже использовавшемуся правилу в п. 129) и равно 0 для V и $-2|t_0|$ для Г. Элемент поверхности S (т. е. элемент объема в обычном пространстве) равен $r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$, элемент $d\sigma_\gamma$, т. е. частное от деления dS на

$$|d\Gamma| = 2r\,|dr|,$$

равен $\frac{1}{2} r \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$. Итак, член, содержащий u_1, равен (так как $r = |t_0|$ при $t = \Gamma = 0$ и $u_1 = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}$)

$$\int V u_1 d\sigma_\gamma = \frac{|t_0|}{2} \iint u_1 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{t_0}{2} \iint \frac{\partial u}{\partial t} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Член, содержащий u_0 (в котором $L = 0$), равен (поскольку $r = t_0 - t$ при $\Gamma = 0$, а производная от r по ν равна -1)

$$\frac{d}{d\nu}\left(\int V u_0 d\sigma_\gamma\right) = -\frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{t_0}{2}\iint u_0 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi\right).$$

Разность этих двух членов, деленная на 2π, т. е. значение коэффициента (28′), естественно, совпадает с правой частью формулы Пуассона.

Если в уравнении с частными производными правая часть $f \neq 0$ (что дает новый член $\iint fV \, d\tau_\gamma$), то значение

$$d\tau_\gamma = \frac{dx\,dy\,dz\,dt}{d\gamma},$$

которое входит в него, получается сразу же из $d\mathfrak{z}_\gamma$ путем умножения на dt. Таким образом, дополнительный член после деления на 2π оказывается равным

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{t_0} |t_0 - t| \, dt \iint f \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

где f в данном случае представляет собой

$$f\,[x_0 + (t_0 - t)\sin\theta\cos\varphi, \quad y_0 + (t_0 - t)\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z_0 + (t_0 - t)\cos\theta, \; t].$$

151. b) Случай Кирхгофа. Рассмотрим теперь гиперповерхность Кирхгофа, а именно гиперцилиндр, который мы обозначим через S'' и основанием которого служит замкнутая поверхность (обычная) s (по-прежнему предполагается, что уравнение не содержит правой части). Область интегрирования, согласно природе вопроса, может быть внутренней или внешней частью цилиндра. Примем также, что $t_0 > 0$.

Возьмем величины π_i соответственно равными направляющим косинусам нормали n к поверхности s (направленной внутрь нашей области: по отношению к s она может быть внутренней или внешней) и нулю для четвертой величины. Мы должны взять элемент dS'' равным элементу гиперцилиндра $ds\,dt$. Направление конормали ν противоположно направлению нормали n; члены, содержащие $(x - x_0)^2, \ldots$, отрицательны.

Интегрирование выполняется по ребру пересечения σ_0 поверхности S'' с Γ. При этом $d\sigma_\gamma$ таково, что

$$d\sigma_\gamma = ds : \frac{\partial\Gamma}{\partial t} = \frac{ds}{2(t_0 - t)} = \frac{ds}{2r}.$$

Эти выражения представляют собой с точностью до множителя $d\gamma$ объем dS'' малого произвольного цилиндра (можно предположить, что он параллелен оси t), заключенного на S'' между элементом характеристического коноида и соответствующим элементом соседней поверхности $\Gamma = \gamma$.

Это все, что необходимо для расчета в п. 142, поскольку не требуется дифференцировать по γ. Для выполнения операций из п. 144 устанавливаем соответствие между x и $x^{(0)}$ такое, что отрезок, соединяющий эти две точки, параллелен оси t. Другими словами, из произвольной точки x поверхности σ_0 (представляющей точку поверхности s, в которой значение t равно $t_0 - r$) проводим малый отрезок $\delta n = -\delta\nu$, нормальный к S'', который изменяет r на величину $\frac{dr}{dn}\delta n$ и увеличивает переменную t так, что на Γ она принимает свое первоначальное значение, т. е. на величину

$$\delta t = -\frac{r}{t_0 - t}\frac{dr}{dn}\delta n.$$

Приращение это таково, что если t на первоначальной поверхности гиперцилиндра S'' изменится на эту величину, мы перейдем от точки x к точке $x^{(0)}$. Следовательно,

$$u^{(0)} = u + \delta t\frac{\partial u}{\partial t} = u + \frac{r}{t_0 - t}\frac{dr}{dn}\frac{\partial u}{dt}\delta\nu,$$

$$\frac{dS''^{(0)}}{dS''} = 1 + \frac{r}{(t_0 - t)^2}\frac{dr}{dn}\delta\nu.$$

Подставляя эти значения в формулу (26), и замечая, что на коноиде $\frac{r}{t_0 - t} = 1$, в то время как V тождественно равно 1, получаем для интеграла («запаздывающего потенциала») по гиперцилиндру

$$\frac{1}{4\pi}\iint\left[\frac{\bar{u}_1}{r} - \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial t} + \bar{u}_0\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right]ds.$$

В этой формуле (как и в п. 131) ds относится к основанию цилиндра, в то время как $\bar{u}_0$, $\bar{u}_1$ представляют собой значения u_0, u_1 в соответствующих точках σ_0, а именно:

$$\bar{u}_i = u_i\,(x, y, z, t - r) \qquad (i = 0, 1).$$

Это полностью совпадает с формулой Кирхгофа (если учесть, что $u_1 = \frac{du}{d\nu} = -\frac{du}{dn}$).

152. Вообще говоря, предыдущее выражение не дает полностью значения u_a, так как граница области не может состоять только из цилиндрической поверхности [1]). Если мы для опре-

[1]) В классической форме теории Кирхгофа граница дополняется частью гиперплоскости $t = -T$ (где T положительно и очень велико), на которой все начальные данные предполагаются равными нулю. Таким образом, нам не нужно выписывать дополнительный член.

деленности предположим, что она дополнена частью S' гиперповерхности $t = 0$, то нужно добавить члены, относящиеся к S'.

Как и в формуле Пуассона, эти члены, очевидно, состоят из интегралов по сфере. Однако необходимо сделать замечание, относящееся к способу вычисления обоих интегралов $\int$, соответствующих выражению (20), в этом случае, как и в любом другом, когда S состоит их двух частей, пересекающихся друг с другом под углом, отличным от нуля.

В самой формуле Пуассона член, содержащий u_1, равен

$$t_0 M_{t_0}(u_1) = \frac{t_0}{4\pi} \iint u_1 d\Omega_2,$$

где $d\Omega_2 = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ — элемент телесного угла, а интегрирование распространено по всей поверхности сферы радиуса t_0 с центром в точке (x_0, y_0, z_0). Ясно, что на этот раз нужно записать тот же самый интеграл с той только разницей, что область интегрирования должна быть ограничена частью сферы, заключенной в данной области. Это, очевидно, справедливо также для первого члена $M_{t_0}(u_0)$ в производной $\frac{\partial}{\partial t_0}[t_0 M_{t_0}(u_0)]$. Что касается оставшейся части производной, то если отвлечься от множителя $\frac{1}{4\pi} t_0$, ее можно записать в одной из двух форм:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \iint u_0 d\Omega_2 \tag{35}$$

или (обозначая через d/dr производную вдоль радиуса, или производную по внешней нормали к сфере)

$$\iint \frac{du_0}{dr} d\Omega_2, \tag{35'}$$

которые эквивалентны друг другу.

Но в данной задаче вышеприведенные формы *более не являются* эквивалентными. Если для определенности взять в качестве s плоскость $x = 0$, причем рассматриваемая область находится с положительной стороны, и если обозначить через $\mathfrak{M}_0(x, \rho)$ среднее значение функции u_0 вдоль окружности радиуса ρ с центром в точке (x_0, y_0, z_0) на плоскости, параллельной $x = 0$, а именно

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0(x, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(x, y_0 + \rho\cos\varphi, z_0 + \rho\sin\varphi)\, d\varphi, \tag{36}$$

то M_{t_0} в данном случае будет заменено выражением

$$\frac{1}{2} \int \mathfrak{M}_0(x_0 - t_0\cos\theta, t_0\sin\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{\lambda_0} \mathfrak{M}_0(x_0 - \lambda t_0, t_0\sqrt{1-\lambda^2})\, d\lambda,$$

где λ есть $\cos\theta$. Верхний предел (равный $+1$ в случае первоначальной формулы Пуассона) на этот раз равен

$$\lambda_0 = x_0/t_0.$$

Мы получим формулу (35′), если заменим под знаком $\int$ величину $\mathfrak{M}_0$ на

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial t_0} = -\lambda \frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial x} + \sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial \rho}. \tag{36′}$$

Это выражение не равно более производной (35): в нем не хватает члена

$$-\frac{1}{2}\,\frac{x_0}{t_0^2}\,\mathfrak{M}_0\left(0, \sqrt{t_0^2 - x_0^2}\right), \tag{37}$$

который соответствует тому, что λ_0 зависит от t_0.

Какое из двух выражений — (35) или (35′) — нужно подставить в формулу? Можно легко найти ответ, если вспомнить, что рассматриваемый член получается из выражения (20) п. 143.

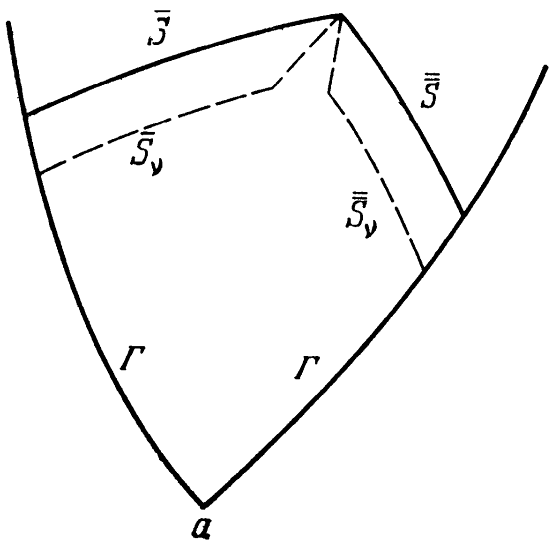

Рис. 40.

Итак, если предположить, что поверхность S (представленная ломаной линией на рис. 40) состоит из двух частей $\bar{S}$ и $\bar{\bar{S}}$, пересекающихся под некоторым углом, то ясно, что соответствующий формуле (20) интеграл нужно вычислить отдельно по каждой из них при помощи метода п. 143 или п. 144. В последнем случае ввиду присутствия $\bar{\bar{S}}$ не нужно смещать контур поверхности $\bar{S}$ при изменении ν, так что всюду, исключая Г, конормальные проекции границ $\bar{S}$ и $\bar{S}_\nu$ должны соответствовать друг другу. Вся поверхность S_ν должна быть построена так, как это показано пунктирными линиями на рис. 40. Итак, ни один из членов на границе не должен соответствовать общему ребру поверхностей $\bar{S}$ и $\bar{\bar{S}}$ (что ясно при простом применении результатов п. 143).

Следовательно, в вышеприведенной частной задаче *не* нужно вводить член (37). Записанный в правильном виде член, в который входит u_0, содержит выражение (35′), а не (35). Вся формула в целом такова:

$$4\pi u_a = \left[t_0 \iint \left(u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial r}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi + \iint u_0 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right] + \\ + \left[\iiint \left(\frac{\bar{u}_1}{r} - \frac{1}{r}\,\frac{dr}{dn}\,\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) ds\right], \tag{38}$$

где интегралы в первой скобке берутся при $t = 0$ вдоль части сферы, заключенной в данной области, а интеграл во второй скобке есть запаздывающий потенциал, относящийся к σ_0.

153. Замечания. *Величина* (38) *есть решение уравнения с частными производными.* В общем виде этим свойством обладают ранее вычисленные выражения (29) — (29″), даже если граница имеет угловые ребра, которые мы только что рассмотрели. Более того, вдоль ребра не предполагается никакого соответствия между начальными данными, относящимися к двум частям S. В выражении (38), например, не предполагается, что значения u или ее нормальной производной, вычисленные вдоль s при $t = 0$ с помощью начальных данных, относящихся к гиперцилиндру, совпадают с теми, которые дают данные Пуассона, относящиеся к $t = 0$. Это свойство также остается в силе, если эти данные испытывают произвольные разрывы первого рода (число которых конечно).

Действительно, рассуждения п. 115 (кн. III), относящиеся к нечетному m, справедливы, если ограничить гиперповерхность произвольным фиксированным ребром и если условиться вычислять интегралы $\iint$ только вдоль части S_0 поверхности, ограниченной таким образом. С другой стороны, многообразие S, которое обладает либо ребрами в виде углов, либо вдоль которого начальные данные испытывают разрывы первого рода, можно рассматривать как систему многообразий, ограниченных так, как мы только что предположили. Наконец, свойство, установленное для нечетного m, можно распространить на четное m при помощи метода спуска, поскольку обе задачи можно таким образом рассматривать как эквивалентные.

Что касается граничных условий, то вопрос об этом не ставится. Ясно следующее. Для условий, относящихся к $t = 0$, мы имеем не что иное, как случай Пуассона, так как формула (38) сводится к формуле Пуассона в окрестности $t = 0$.

Наоборот, условия, относящиеся к гиперцилиндру, вообще говоря, не выполняются: мы знаем, что задача поставлена некорректно.

154. c) Уравнение затухающих волн в трехмерном пространстве. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - Ku = 0 \tag{E$_3$}$$

изучалось в работах Биркеланда, Карвалло, Вебера, Бриллюэна[1])

[1]) B i r k e l a n d, C. R. Acad. Sci., t. CXX, p. 1046, 1895; C a r v a l l o, ibid., 14 janv. 1895; W e b e r, Partielle Differentialgleichungen der Math. Phys., B. II, p. 310, 1901. B r i l l o u i n, C. R. Acad. Sci., tXXXVI, p. 667, 1903.

и позднее в нескольких заметках Тедоне [1]). Сравнивая это уравнение с предыдущим (e_3), мы видим, что Г то же самое. Кроме того, можно принять $V = 1$, как было отмечено в кн. II (п. 69), так что можно выписать те же самые члены, что и в предыдущих расчетах (п. 151—153), добавив член, содержащий $\mathfrak{B}$ в формуле (29), где

$$\mathfrak{B} = -\frac{K}{4} j' \left[K \frac{(t-t_0)^2 - r^2}{4} \right],$$

причем элементарное решение дается формулой (61) п. 69. Здесь $j(\lambda)$ по-прежнему обозначает

$$1 + \frac{\lambda}{1^2} + \frac{\lambda^2}{(2!)^2} + \ldots + \frac{\lambda^h}{(h!)^2} + \ldots$$

Если S есть гиперплоскость $t = 0$, то формула примет вид (замечая, что $\frac{d}{d\nu} = \frac{\partial}{\partial t}$ и равно в данном случае $-\frac{\partial}{\partial t_0}$)

$$u_a = \frac{\partial}{\partial t_0}[t_0 M_{t_0}(u_0)] + t_0 M_{t_0}(u_1) + \\ + \frac{K}{2}\int_0^{t_0} r^2 M_r(u_1)\, j'\, dr + \frac{K}{2}\frac{\partial}{\partial t_0}\int_0^{t_0} r^2 M_r(u_0)\, j'\, dr. \qquad (39)$$

Здесь символ M имеет то же самое значение, что и ранее, а аргумент, от которого зависит j', равен $K\frac{t_0^2 - r^2}{4}$. Тождественность этого результата с результатами цитированных работ (например, Вебера и Бриллюэна) устанавливается без всяких трудностей.

Когда S состоит из части $t = 0$, т. е. из обычного пространства, ограниченного поверхностью s, и из гиперцилиндра с основанием s (см. Бриллюэн, цит. место), выражение (38) нужно дополнить следующими членами:

$$\frac{K}{2}\iiint u_1 j'\, dx\, dy\, dz + \frac{K}{2}\frac{\partial}{\partial t_0}\iiint u_0 j'\, dx\, dy\, dz + \frac{K}{2}\iint \bar{u}_0 \frac{dr}{d\nu}\, ds - \\ - \frac{K}{2}\iint ds \left[\frac{dr}{d\nu}\int_0^{t_0 - r} u_0 \frac{\partial j'}{\partial r}\, dt - \int_0^{t_0 - r} u_1 j'\, dt \right],$$

причем аргумент функции j равен здесь $\frac{(t-t_0)^2 - r^2}{4}$.

Два первых члена отличаются от членов соответствующего интеграла (39) (если не учитывать множитель 4π) только тем, что выражение

$$M_r(u_i) = \\ = \frac{1}{4\pi}\iint u_i(x_0 + r\sin\theta\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\theta\sin\varphi,\ z_0 + r\cos\theta) \times \\ \times \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{4\pi}\iint u_i\, d\Omega_2 \qquad (i = 0, 1),$$

[1]) Rend. Acc. Lincei, 5 sei. t. XXII, p. 757 (1913, 1 sem), t. XXIII, p. 63, 120, 473.

как и в предыдущем случае, заменено интегралом, распространенным только по части поверхности соответствующей сферы. Второй член, например, можно записать

$$\frac{K}{2} t_0^2 \iint u_0 \, d\Omega_2 + \frac{K}{2} \int_0^{t_0} r^2 \frac{\partial j'}{\partial t_0} \, dr \iint u_0 \, d\Omega_2,$$

где двойные интегралы относятся к соответствующим частям сферических поверхностей.

Для поверхности S произвольной формы (случай, который также рассматривал Тедоне [1]) формула такова:

$$2\pi u_a = \frac{K}{4} \left(\iiint_{S_0} u_1 j_0' \, dS - \frac{d}{d\nu} \iiint_{S_\nu} u_0 j_0' \, dS \right) + \\ + \iint u_1 \, d\sigma\gamma - \frac{d}{d\nu} \iint_{\sigma_\nu} u_0 \, d\sigma_\gamma .$$

Расчет последнего члена должен выполняться так, как это было установлено в п. 152 для случая, когда S имеет угловые ребра.

155. d) Уравнения с большим числом независимых переменных. Уравнение того же самого типа с 6, 8, ... переменными рассматриваются аналогичным образом путем применения формулы (29) или (29′).

Возьмем обычное волновое уравнение в гиперпространстве:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{2m_1-1}^2} = 0 \qquad (e_{2m_1-1})$$

и предположим, что S есть гиперплоскость $t = 0$, а $t_0 > 0$. Так как по-прежнему $V = 1$, а $\mathfrak{B} = 0$, то, как и ранее, все упрощается. Величина $d\sigma_\gamma$ дается формулой

$$d\sigma_\gamma = \frac{dS}{|d\gamma|} = \frac{r^{2m_1-2} d\Omega_{m-2} dr}{2r \, dr} = \frac{1}{2} r^{2m_1-3} \, d\Omega_{m-2},$$

где $d\Omega_{m-2}$ обозначает элемент гиперсферической поверхности еди-

---

[1]) На первый взгляд результаты Тедоне имеют совсем другой вид (для того чтобы найти формулу (39), к которой приходит Вебер, необходимо даже соответствующее преобразование) и получаются совсем другим методом, предполагающим разрешимость некоторых интегральных уравнений. Как и в случае, рассмотренном Кулоном (см. кн. III, п. 79), это вызвано невозможностью (которая, как мы теперь видим, имеет даже более радикальный характер, чем в случае нечетного m) непосредственно ввести элементарное решение. Поэтому вместо него мы должны использовать более или менее косвенные подстановки. С другой стороны, эта необходимость имеет свои преимущества, так как благодаря этому получены важные интегральные тождества для функции Бесселя. Этот вопрос связан с некоторыми следствиями так называемого «положения A» (кн. II, п. 33).

ничного радиуса. Так как $d\gamma = -2r\,dr$, то видно, что множитель $(-1)^{m_1}$ выпадает и что [1])

$$4\pi^{m_1-1}u_a = \left(\frac{\partial}{2t_0\,\partial t_0}\right)^{m_1-2}\left(t_0^{2m_1-3}\iint_{r=t_0} u_1\,d\Omega_{m-2}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{\partial}{2t_0\,\partial t_0}\right)^{m_1-2}\left(t_0^{2m_1-3}\iint_{r=t_0} u_0\,d\Omega_{m-2}\right). \qquad (40)$$

Если обозначить через $M_1(r)$ среднее значение u_1 на гиперсферической поверхности радиуса r, то можно записать:

$$\frac{4\pi^{m_1-1}}{\Omega_{m-2}}u_a = \left(\frac{\partial}{2t_0\,\partial t_0}\right)^{m_1-2}[t_0^{2m_1-3}M_1(t_0)] + \\ + \frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{\partial}{2t_0\,\partial t_0}\right)^{m_1-2}[t_0^{2m_1-3}M_0(t_0)]. \qquad (40')$$

Решение, полученное Тедоне в 1898 г. (Annali di Mat., цит. место), имеет другой вид. Например, член, содержащий u_1, равен

$$\sum_{h=0}^{m_1-2} A_h \frac{d^{m_1-2-h}}{dr^{m_1-2-h}}[r^{m_1-1-h}M_1(r)]_{(r=t_0)}, \qquad (41)$$

где A — численные постоянные. Из простого рассмотрения очевидно, что

$$\left(\frac{d}{2r\,dr}\right)^{m_1-2}[r^{2m_1-3}M_1(r)]$$

имеет вышеприведенную форму, а величины A можно определить из соотношения, тождественного по λ

$$\Pi(\lambda) = \frac{1}{2^{m_1-2}}(\lambda+3)(\lambda+5)\dots(\lambda+2m_1-3) = \\ = A_0(\lambda+2)(\lambda+3)\dots(\lambda+m_1-1)+\dots \\ \dots + A_h(\lambda+2)(\lambda+3)\dots(\lambda+m_1-h-1)+\dots \\ \dots + A_{m_1-3}(\lambda+2)+A_{m_1-2}. \qquad (41')$$

Это видно, если положить $M_1(r) = r^\lambda$ и отметить, с другой стороны, что такое тождество по λ можно записать одним и только одним способом. Простой метод определения постоянных [2]) A_h

[1]) Для того чтобы использовать выражение (29′), на этот раз необходимо, чтобы дифференцирование $\frac{d}{d\gamma} = \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t_0}$ выполнялось в последнюю очередь, поскольку его нужно применять к знаменателю выражения $\frac{\partial}{2t_0\partial t_0}$.

[2]) Выражение для них, конечно, можно также вывести из теории интерполяции (правая часть формулы (41′) сразу же сводится к интерполяционному многочлену Ньютона) или из теории рядов.

состоит в том, что левая часть предыдущего равенства представляется в виде контурного интеграла

$$\Pi(\lambda) = \frac{(m_1-2)!}{2i\pi}\int_C \frac{(1-z)^{-\frac{\lambda+3}{2}}}{z^{m_1-1}}\,dz$$

(интегрирование, как обычно, проводится вдоль замкнутой кривой вокруг начала координат). Если положить $1 - z = (1 - Z)^2$, откуда $z = 2Z - Z^2$, то этот интеграл принимает вид

$$\Pi(\lambda) = \frac{(m_1-2)!}{2i\pi}\int_{C'} \frac{(1-Z)^{-(\lambda+2)}\,dZ}{2^{m_1-2}Z^{m_1-1}\left(1-\frac{Z}{2}\right)^{m_1-1}},$$

причем новый контур интегрирования C' охватывает начало координат, как и C. Наконец, разлагая $(1 - Z/2)^{-(m_1-1)}$ и $(1 - Z)^{-(\lambda+2)}$ по степеням Z и сохраняя в подынтегральном выражении только члены, содержащие $1/Z$, получим

$$\Pi(\lambda) = \sum \frac{(m_1-2+h)!}{2^{m_1-2+h}h!\,(m_1-2-h)!}(\lambda+2)\ldots(\lambda+m_1-h-1),$$

так что коэффициенты A_h, которые нужно подставить в формулу (41), равны

$$A_h = \frac{(m_1-2+h)!}{2^{m_1-2+h}\,h!\,(m_1-2-h)!}.$$

Конечно, члены, содержащие u_0, выводятся из предыдущего, если записать $\left(\frac{d}{dr}\right)^{m_1-1-h}$ вместо $\left(\frac{d}{dr}\right)^{m_1-2-h}$, и это дает (с учетом коэффициента в левой части формулы (40)) результат в форме Тедоне (цит. место, формула (24)).

3. Задача смешанного типа. Приложение к разрешимости задачи Коши

156. Вернемся к формуле (38) п. 152. Она позволяет нам найти решение u уравнения (e_2) в предположении, что данные Коши известны одновременно для $t = 0$ и $x = 0$.

Но мы знаем, что такая задача поставлена некорректно. Чтобы удовлетворить предыдущему условию, мы должны заменить ее, как об этом говорилось в книге I, *смешанной задачей*.

В конце этой монографии мы вернемся к данному кругу вопросов. Но сейчас мы должны сделать о них общее замечание. Процесс решения любой смешанной задачи, относящейся к двум поверхностям S' и S'', из которых первая — пространственного типа — несет данные Коши, а вторая — временного типа — значения только u, и которые заключают внутри себя характеристику

$\mathfrak{C}$, проходящую через ребро пересечения s, состоит в действительности из двух этапов. Вначале решение определяется в области 1, заключенной между S' и $\mathfrak{C}$, что является просто задачей Коши. Затем в области 2, заключенной между $\mathfrak{C}$ и S'', рассчитывается то же самое решение, определяемое своими значениями на $\mathfrak{C}$ (что дает предыдущая операция) и значениями на S''. Эта последняя задача и есть та, которая исследовалась в п. 151 и которой эквивалентна, как мы видим, смешанная задача, если предварительно решена задача Коши.

Однако искомая функция u, определенная двумя различными операциями, имеет непрерывные производные до некоторого порядка при переходе через $\mathfrak{C}$ только тогда, когда обе функции, представляющие ее в областях 1 и 2, имеют между собой соприкосновение этого порядка во всех точках $\mathfrak{C}$. Согласно тому, что было сказано в п. 28 (кн. II), это должно выполняться по крайней мере до порядка, равного единице.

Замечания п. 51′ позволяют значительно упростить исследование этого соответствия. Согласно этим замечаниям достаточно, чтобы оно выполнялось в точке каждой бихарактеристики, расположенной на $\mathfrak{C}$, и, в частности, в каждой точке ребра пересечения s, из которого исходит характеристика $\mathfrak{C}$, поскольку в приложениях это ребро не касается ни одной бихарактеристики. Итак, именно в этом можно убедиться, исследуя сами начальные данные задачи, что мы и проделаем для самого простого случая, которым мы здесь ограничимся.

Этот случай относится к плоской границе [1]), которая приводится к вышеупомянутой категории с помощью некоторого метода, а именно, классического метода изображений из теории потенциала. Прием применим как к уравнениям (e_2), так и к (e_3). Разовьем его для этого последнего уравнения (теория которого, как известно, включает в себя теорию уравнения (e_2)). Задача состоит в отыскании величины u, определяемой уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (e_3)$$

и следующими условиями:

$$u=u_0(x, y, z); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=u_1(x, y, z) \qquad (\text{при } t=0,\ x\geqslant 0), \qquad (C_3)$$

$$u=u(y, z, t) \qquad (\text{при } x=0,\ t\geqslant 0). \qquad (C_3)$$

[1]) В противоположность задаче Коши, решение смешанной задачи в очень сильной степени зависит от формы границы (мы имеем в виду часть границы, не несущую данных Коши). Так, для случая двух независимых переменных задача об электрическом проводнике со скользящим контактом (п. 24′) требует вычислений различного вида в зависимости от разных законов движения контакта.

Само собой разумеется, что заданные величины в правых частях удовлетворяют условиям

$$u_0(0, y, z) = u\,(y, z, 0), \tag{42}$$

$$u_1(0, y, z) = \frac{\partial u}{\partial t}(y, z, 0). \tag{43}$$

Если обратный полуконоид с вершиной в точке a, ограниченный плоскостью $t = 0$, не пересекает плоскость $x = 0$, то u дается формулой Пуассона.

В противном случае, если известны значения $\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial x}$ вдоль $x = 0$, то решение задачи находится по формуле (38) или по формуле

$$4\pi u_a = I_1 + I_2, \tag{44}$$

где I_1 есть первая строка в правой части формулы (38), состоящая из частей каждого из интегралов Пуассона (а именно частей, относящихся к области $\overline{\sigma}$ сферы σ радиуса t_0, которые расположены с положительной стороны $x = 0$), а I_2 есть интеграл Кирхгофа вдоль $c = 0$:

$$I_2 = \iint \left(\frac{\overline{u}_1}{r} - \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) ds.$$

Здесь $\overline{u}_1$ равно $\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial x}$, причем величины с чертой имеют тот же смысл, что и в п. 151.

Остается исключить эти величины $\overline{u}_1$ в последнем интеграле. Для этого введем точку $a'\,(-x_0, y_0, z_0)$, симметричную точке a относительно плоскости $x = 0$. Пусть Γ' — часть соответствующего характеристического коноида (т. е. обратного полуконоида с вершиной в точке a'), которая находится в рассматриваемой области $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Пусть σ' (рис. 41) — след Γ' на плоскости $t = 0$ (часть сферической поверхности в обычном пространстве [1])). Сумма

$$I_1' + I_2' = I_1' + \iint \left(\frac{\overline{u}_1}{r'} - \frac{1}{r'}\frac{dr'}{dn}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\,\frac{d\frac{1}{r'}}{dn} \right) ds$$

аналогична правой части формулы (44), с той разницей, что точка a заменена точкой a', так что вместо r вводится величина

$$r' = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2};$$

[1]) Соответствующая фигура (рис. 41), являющаяся полной для уравнения (e_2), представляет собой проекцию истинной четырехмерной фигуры на пространство (x, y, t).

кроме того, I_1' относится к σ', а не к $\bar{\sigma}$. Сумма *равна нулю*, так как соответствующая область интегрирования не включает в себя вершину a' (п. 146). Эту сумму можно вычесть из формулы (44), и комбинация

$$u = I_1 + I_2 - I_1' - I_2'$$

есть *искомая величина*. В самом деле, поскольку значения r и r' равны между собой в каждой точке плоскости $x = 0$, то члены, содержащие u_1, исчезают из разности $I_2 - I_2'$.

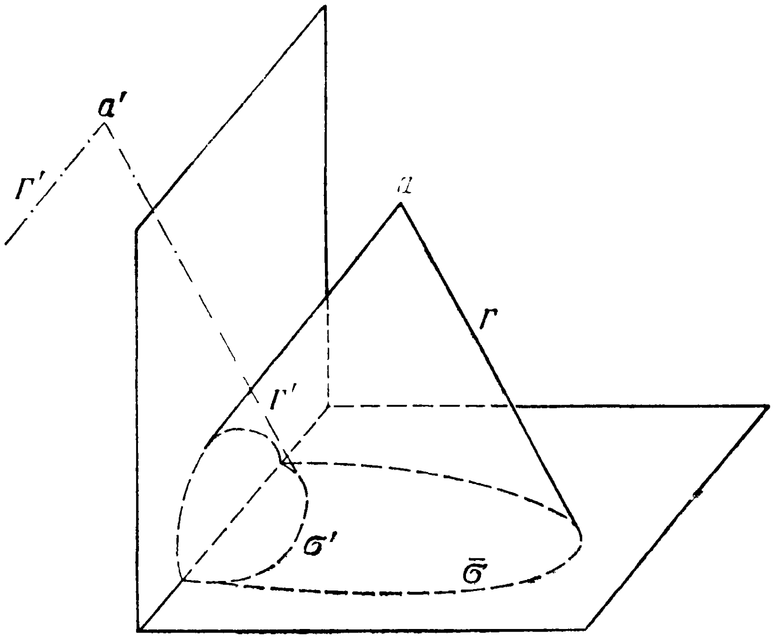

Рис. 41.

Другие члены выражения $I_2 - I_2'$ удваиваются, поскольку значения $\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$ и $\dfrac{d\frac{1}{r'}}{dn}$, взятые вдоль плоскости $x = 0$, имеют противоположные знаки, так что [1])

$$\begin{gathered} u_a = \frac{1}{4\pi}(I_1 - I_1') + \frac{1}{2\pi} J_2, \\ J_2 = \iint \left(-\frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) ds. \end{gathered} \tag{45}$$

[1]) Любую плоскость S'' временного типа (нормальную или наклонную к плоскости $t = 0$) можно исследовать таким же способом. Действительно, мы знаем, что линейное по x, y, z, t преобразование, переводящее S'' в плоскость, параллельную новой оси времени, может преобразовать уравнение (e_3) само в себя. В исходном пространстве конус Γ' пересекается с S'' вдоль того же ребра, что и Γ, причем линия, соединяющая вершины, конормальна к поверхности S'' и делится ею пополам.

Сошлемся на важные замечания Вольтерра (London Proc., 1904; Стокгольмские лекции) о том, что данный метод изображений ведет себя совершенно особым образом в гиперболическом случае.

Величина $I_1 - I_1'$ есть двойной интеграл, относящийся к системе двух сферических сегментов. Его можно выразить в более простом виде, если предположить, что фиктивные значения u и u_1 с отрицательной стороны плоскости $t = 0$ (т. е. относящиеся к $t = 0$, $x < 0$) равны по величине и противоположны по знаку соответствующим значениям с положительной стороны, а именно:

$$u_i(-x, y, z) = -u_i(x, y, z) \qquad (i = 0,1). \tag{46}$$

Благодаря этому $I_1 - I_1'$ выражается через двойные интегралы, распространенные по всей поверхности сферы σ. Они совершенно аналогичны тем, которые стоят в правой части формулы Пуассона.

Замечания. Предыдущее решение, как мы отметили несколько выше, дается двумя различными аналитическими выражениями в зависимости от того, с какой стороны мы находимся относительно гиперплоскости $x = t$, т. е. характеристики $\mathfrak{C}$ (внутренней по отношению к области, в которой мы работаем), проведенный через общее ребро двух частей $x = 0$, $t = 0$ границы, несущей соответствующие данные.

Во втором из этих выражений, согласно формуле (46), значения u_0 и u_1 под знаком интеграла разрывны вдоль ребра, если они не обращаются там в нуль. Наоборот, в силу того же самого соотношения непрерывность величины $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ сохраняется.

157. Как всегда, необходима проверка этого решения.

Для уравнения с частными производными она не вызывает никаких затруднений, потому что сумма $I_1 + I_2$ удовлетворяет уравнению (ср. п. 153), как и сумма $I_1' + I_2'$ (поскольку уравнение не меняется при замене x на $-x$).

Что касается данных Коши, то, как мы видели, нет никакой разницы между рассматриваемым случаем и случаем Пуассона.

Предположим теперь, что точка (x_0, y_0, z_0, t_0) достигает плоскости $x = 0$. При этом члены $I_1 - I_1'$ типа Пуассона исчезают, так как они равны по величине и противоположны по знаку. Член

$$2\iint \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial u}{\partial t}\,ds,$$

в котором производная $\frac{dr}{dn}$ конечна, ведет себя как потенциал простого слоя: следовательно, он непрерывен и принимает на плоскости $x = 0$ нулевое значение. Остающийся член

$$2\iint u\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,ds$$

ведет себя как потенциал двойного слоя (при этом подынтегральное выражение тождественно равно нулю, когда a принимает свое предельное положение P) и, таким образом, становится равным $4\pi u_P$, как это хорошо известно. Следовательно, это также предельное значение выражения $4\pi u_a$.

Та же самая проверка легко производится, если при расчете величины J_2, введем понятие (относящееся к границе $t=0$), аналогичное тому, которое было в п. 152. Построим по значениям величины u ее среднее значение вдоль окружности радиуса ρ с центром в (y_0, z_0, t):

$$\mathfrak{N}(t,\rho)=\mathfrak{N}(y_0,z_0,t,\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,(y_0+\rho\cos\varphi,\ z_0+\rho\sin\varphi,\ t)\,d\varphi.$$

Это значение, согласно формулам соответствия (42), (43), удовлетворяет соотношениям

$$\mathfrak{N}(0,\rho)=\mathfrak{M}_0(0,\rho),\qquad \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}(0,\rho)=\mathfrak{M}_1(0,\rho).$$

При помощи этой величины $\mathfrak{N}$ член $\frac{1}{2\pi}J_2$ выражается формулой

$$\frac{1}{2\pi}J_2=\int_{\lambda_0}^{1}\left[\mathfrak{N}\left(t_0-\frac{x_0}{\lambda},\ \frac{x_0\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)+\frac{x_0}{\lambda}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}\right]d\lambda, \tag{47}$$

где $\lambda_0=x_0/t_0$.

В этом выражении можно избавиться от частной производной $\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}$, вводя полную производную

$$\frac{d\mathfrak{N}}{d\lambda}=\frac{x_0}{\lambda^2}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}-\frac{1}{\lambda^2\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\rho}$$

и замечая, с другой стороны, что каждое из средних значений $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}$ по самой своей природе четно по ρ. Таким образом, это среднее значение является функцией от $\rho^2=R$, дифференцируемой даже при $R=0$ (по крайней мере один раз, как это легко видеть с помощью формулы Тейлора, если u_i или u имеют непрерывные первые и вторые производные), так что предыдущее соотношение можно записать в виде

$$\frac{d\mathfrak{N}}{d\lambda}=\frac{x_0}{\lambda^2}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}-\frac{2x_0^2}{\lambda^3}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial R}.$$

Если мы выразим из этого соотношения $\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}$, чтобы подставить его в (47), то появится полная производная от величины $(\lambda\mathfrak{N})$.

Замечая, что $\mathfrak{N}(t, 0) = u(y_0, z_0, t)$, получаем

$$\frac{1}{2\pi} J_2 = (\lambda \mathfrak{N})_{\lambda_0}^{1} + 2x_0^2 \int_{\lambda_0}^{1} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial R} d\lambda = u(y_0, z_0, t_0 - x_0) - $$
$$- \frac{x_0}{t_0} \mathfrak{N}(0, \sqrt{t_0^2 - x_0^2}) + 2x_0^2 \int_{\lambda_0}^{1} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial R} d\lambda.$$

Это выражение сводится к виду: $u(t_0) = u(y_0, z_0, t_0)$, когда x_0 обращается в нуль [1]), так как последний член по абсолютному значению меньше чем

$$\frac{2x_0^2 N'}{\lambda_0} = 2x_0 t_0 N',$$

где через N' обозначена верхняя грань абсолютного значения производной $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial R}$.

Что касается члена $I_1 - I_1'$, то он исчезает, о чем было сказано выше.

Замечание. Аналогичное заключение применимо к $\frac{\partial u}{\partial t_0}$, что необходимо будет отметить далее. Иными словами, эта величина стремится к $\frac{\partial u}{\partial t_0}$, когда x_0 стремится к нулю. Действительно, величина $\frac{\partial I_1}{\partial t_0} - \frac{\partial I_1'}{\partial t_0}$ обращается в нуль при этих условиях по той же самой причине, что и $I_1 - I_1'$. Для членов, относящихся к поверхности временного типа, все происходит так, как было бы при замене u на $\frac{\partial u}{\partial t}$, с точностью до величин, которые обращаются в нуль одновременно с x_0 (т. е. криволинейных интегралов вдоль окружности на ребре $x = t = 0$).

157'. Доказательство, по-видимому, завершено. В действительности мы знаем, что это не так. Нужно убедиться в том (ср. п. 28), что u и его первые производные непрерывны на гиперплоскости $x = t$, которая является характеристикой, проведенной через ребро s, общее для двух частей S. Без этого мы бы построили решение, удовлетворяющее (C_3), и решение, удовлетворяющее (C_3), но совокупность построенных таким образом двух функций нельзя рассматривать как одно решение, удовлетворяющее различным условиям задачи.

---

[1]) Следовало бы отдельно рассмотреть случай, когда t_0 стремится к нулю одновременно с x_0 (ср. п. 29). Предел выражения, приведенного в тексте, зависел бы тогда от предела отношения x_0/t_0. Сформулированное заключение осталось бы справедливым только благодаря членам, содержащим величины $M_{t_0}(u_i)$, предельные значения которых, как это вытекает из формулы (49), приведенной ниже, также зависели бы от λ_0.

Этот вопрос, однако, решен на основе замечаний п. 153. Если существует соответствие между значениями самой функции u, то в отношении первых производных, как нам известно, достаточно (п. 51′) убедиться в том, что они совпадают при $x = t = 0$. Что касается этих производных, то достаточно рассмотреть одну из них, например $\frac{\partial u}{\partial t_0}$. Действительно, соответствие значений $\frac{\partial u}{\partial y_0}$, $\frac{\partial u}{\partial z_0}$ следует из того, что значения u соответствуют друг другу и из того (ср. кн. I и Leçons sur la propagation des ondes, п. 72, гл. II), что значения $\frac{\partial u}{\partial x_0}$ в области 1 и 2 связаны с величинами u и $\frac{\partial u}{\partial t_0}$ соотношением

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial u}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial u}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial u}{\partial z_0} dz_0$$

при любом смещении вдоль $\mathfrak{C}$, т. е. при $dx_0 = dt_0$.

Итак, по тем же причинам, что и в п. 29 кн. II, непрерывность функции u очевидна [1]). С другой стороны, из предыдущего пункта следует, что значение $\frac{\partial u}{\partial t}$, взятое в области 2, есть не что иное, как соответствующее значение $\frac{\partial u}{\partial t}$. В области 1 оно равно u_1. Мы предположили, что между этими величинами существует соответствие (43).

Непосредственная проверка еще более облегчается с помощью понятий, введенных выше. В области 1, которая соответствует $x > t$, интегралы $\mathfrak{M}_0$ $\mathfrak{M}_1$ позволяют найти $M_{t_0}(u_0)$ и $M_{t_0}(u_1)$ из выражений

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathfrak{M}_0 (x_0 - \lambda t_0, t_0 \sqrt{1-\lambda^2})\, d\lambda, \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathfrak{M}_1 (\ )\, d\lambda \tag{48}$$

и $M_{t_0}\left(\frac{du_0}{dr}\right)$ из выражения $\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial t_0} d\lambda$, где $\frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial t_0}$ дается формулой (36′) п. 153.

С учетом нашего фиктивного распределения при отрицательных значениях x и указанного далее значения λ_0 величины $M_{t_0}(u_i)$ $(i = 0, 1)$ в области 2 $(x \leqslant t)$ равны

$$\overline{M}_{t_0}(u_i) = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{\lambda_0} \mathfrak{M}_i (\ )\, d\lambda - \int_{\lambda_0}^{1} \mathfrak{M}_i (\lambda t_0 - x_0, t_0 \sqrt{1-\lambda^2})\, d\lambda\right]. \tag{49}$$

Величина $M_{t_0}\left(\frac{du_0}{dr}\right)$ также состоит из двух интегралов, один из которых берется от -1 до λ_0, другой (со знаком минус) от λ_0 до

[1]) Здесь также следует отдельно рассмотреть случай, когда точка берется на самом ребре. Соответствие (ср. кн. II, цит. место) здесь следует из того, что при этом совпадают сами данные Коши согласно соотношению (42).

1. Но поскольку в этом последнем первый аргумент, от которого зависит функция $\mathfrak{M}_0$ равен $x = \lambda t_0 - x_0$, то выражение для производной отличается от формулы (35') знаком первого члена. Поэтому

$$\overline{M}_{t_0}\left(\frac{du_0}{dr}\right) = \frac{1}{2}\left[-\int_{-1}^{+1}\frac{\partial\mathfrak{M}_0}{\partial x}\,d\lambda + \int_{-1}^{\lambda_0}\sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial\mathfrak{M}_0}{\partial\rho}\,d\lambda - \right.$$
$$\left. - \int_{\lambda_0}^{1}\sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{\partial\mathfrak{M}_0}{\partial\rho}\,d\lambda\right]. \tag{50}$$

Первый интеграл зависит от величины, непрерывной во всем интервале интегрирования, хотя она имеет два различных выражения на двух частях этого интервала в соответствии с тем, что было сказано в замечаниях к п. 156.

Интеграл J_2 вычисляется по формуле (47). Каждый из вычисленных таким образом членов непрерывен вместе со своими первыми производными как в области 2, так и в области 1. При переходе из области 1 в область 2 величина λ_0 проходит через значение, равное 1, и непрерывность u сохраняется: новые члены, которые здесь появляются, а именно, интегралы в пределах от λ_0 до 1, вначале бесконечно малы (ср. п. 29).

В выражения для первых производных, наоборот, входят криволинейные интегралы, о которых мы говорили в п. 29 и которые представляют собой не что иное, как члены, появляющиеся при дифференцировании формулы (49) и соответствующие переменному пределу интегрирования λ_0. Эти члены удваиваются. Поскольку средние значения величин $\mathfrak{M}_i$ сводятся при $\rho = 0$ к значению u_i в единственной точке, в которую стягивается соответствующая окружность, то для производной по t_0, например, будем иметь дополнительный член

$$-\frac{x_0}{t_0^2}\left[t_0 u_1(0, y_0, z_0) + u_0\right] = -\frac{1}{t_0}(t_0 u_1 + u_0). \tag{51}$$

Что касается величины (50), то из нее не получается никаких членов этого рода, поскольку, как мы видели, первый член содержит под знаком $\int$ непрерывную величину. С другой стороны, переход через характеристику соответствует $\lambda_0 = 1$, $\rho = 0$, откуда (см. предыдущий пункт) $\dfrac{\partial\mathfrak{M}_0}{\partial\rho} = 0$.

Итак, производная от величины $I_1 + I_1'$ по t_0 испытывает разрыв (51).

Но этот разрыв полностью компенсируется разрывом величины $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial J_2}{\partial t_0}$, которая равна 0 в области 1, а в области 2 (как это видно из формулы (47)) принимает начальное значение, равное выражению (51)

$$\frac{x_0}{t_0^2}\left[\mathfrak{N}(0,\,0)+x_0\left(\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}\right)_0\right].$$

158. Воспользуемся этим решением смешанной задачи с плоской границей для изучения вопроса, поставленного в п. 27 кн. I, и касающегося задачи Коши* для уравнения (e_3) относительно плоскости $x=0$, т. е. задачи, которая состоит в нахождении функции $u\,(x,\,y,\,z,\,t)$ такой, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

(ω по-прежнему принято равным 1) и

$$u=u_0(y,z,t),\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=u_1(y,z,t)\quad \text{при}\quad x=0 \tag{52}$$

или задачи для уравнения (e_2), т. е. задачи о нахождении $u\,(x,\,y,\,t)$ такого, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{e_2}$$

и

$$u=u_0(y,t),\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=u_1(y,t)\quad \text{при}\quad x=0. \tag{52$'$}$$

Мы видели, что решения, вообще говоря, не существует. Следовательно, как это было в пп. 15, 16 для уравнения $\Delta u=0$ или для уравнения теплопроводности, встает вопрос о том, при каких значениях u_0 и u_1 решение будет существовать.

Достаточное условие очень простого вида было установлено Вольтерра [1]), а именно: решение наверняка существует, если u_0 и u_1 аналитичны по y, z (для уравнения (e_3)) или по y (для уравнения (e_2)), какова бы ни была их зависимость (регулярная) от t.

Для того чтобы это понять, достаточно заметить, что дифференциальные уравнения не меняются при замене x на it и t на ix.

Если, следовательно, для уравнения (e_3) написать выражение

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\Big[x\iint u_0\,(y+ix\sin\theta\cos\varphi,\ z+ix\sin\theta\sin\varphi,$$
$$t+x\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\Big],$$

то оно будет удовлетворять дифференциальному уравнению (проверка этого годится и в том случае, если взять уравнение в форме, которую мы ему придали в п. 28 книги II). Это справедливо,

[1]) Нижеследующее аналогично содержанию его статьи в Rivista Matem., t. IV, p. 1—14, 1894.

конечно, и для выражения

$$x \iint u_1 (y + ix \sin\theta \cos\varphi, z + ix \sin\theta \sin\varphi, t + x\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Сумма этих двух членов удовлетворяет краевым условиям, если в качестве u_0 и u_1 взять данные Коши (52) для нашей задачи.

Это, естественно, предполагает, что u_0 и u_1 аналитичны по y, z, поскольку в расчет входят мнимые значения этих переменных.

Совершенно аналогичное рассуждение применимо к задаче для уравнения (e_2), если рассмотреть формулу (1′) (п. 30 книги II), которая дает решение этого уравнения.

159. Можно ли теперь найти систему необходимых и достаточных условий? Ответ на этот вопрос, правда, очень неполный, дает предыдущее решение смешанной задачи, как мы показали на семинаре Вольтерра в Риме в 1916 г.[1]).

Как мы делали в предыдущих примерах, вначале берется произвольно заданное u_0 и делается попытка найти допустимую форму u_1 в самом общем виде, отыскивая наиболее общую форму решения u. Это то, что можно сделать, рассматривая u как решение смешанной задачи, определяемой условиями п. 156, в которой мы, однако, вместо начальной плоскости $t = 0$ берем для данных Коши параллельную плоскость $t = \theta$, выбранную соответствующим образом. Таким образом, можно записать, меняя обозначения для начальных данных:

$$u = u_0(x, y, z), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = \theta, \ x \geqslant 0,$$

$$u = u_0(y, z, t) \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Величина θ произвольна. Следовательно, можно допустить, что она принадлежит к интервалу значений t, в котором функция u_0 регулярна, или даже что она произвольно близка к значениям t, которые мы специально рассматриваем.

Итак, в соответствии с тем, что было найдено выше, выражение (45) дает

$$u = \frac{1}{2\pi} J_2 + M_{t_0-\theta}(u_0) + (t_0 - \theta)\left[\overline{M}_{t_0-\theta}\left(\frac{du_0}{dr}\right) + M_{t_0-\theta}(u_1)\right],$$

где $\overline{M}$ обозначают средние, вычисленные с учетом условия (46) в конце п. 156. От этого выражения нужно взять производную по x для $x = 0$, если мы хотим получить выражение u_1.

Снова поступая как в пп. 15, 16 кн. I, заметим, что первый член (единственный, который зависит от заданной функции u_0) приводит к одному из возможных решений. Мы никак не будем

[1]) Основные положения вычислений п. 160 были даны нами в Принстоне в 1901 г. (см. Princeton Univ. Bull., t. XIII, 1902).

учитывать его форму и не будем подвергать его в дальнейшем никаким преобразованиям.

Однако в предыдущей формуле остающиеся члены не являются полностью независимыми от u_0, поскольку u_0 и u подчинены условиям (42) и (43). Этого неудобства можно избежать, если записать:

$$u_0(x, y, z) = u_0(y, z, 0) + U_0(x, y, z),$$
$$u_1(x, y, z) = \frac{\partial u_0}{\partial t}(y, z, 0) + U_1(x, y, z).$$

На U_0 и U_1 наложено требование обращаться в нуль одновременно с x. Члены, которые получены при замене u_0 и u_1 на $u_0(0, y, z)$ и $\frac{\partial u_0}{\partial t}(0, y, z)$, будут рассматриваться как единое целое с членом $\frac{1}{2\pi}J_2$.

Исследуем оставшуюся часть:

$$u' = \overline{M}_{t_0-\theta}(U_0) + (t_0 - \theta)\left[\overline{M}_{t_0-\theta}\left(\frac{dU_0}{dr}\right) + \overline{M}_{t_0-\theta}(U_1)\right], \tag{53}$$

в которой на U_0 и U_1 наложено требование обращаться в нуль при $x = 0$ и которая представляет собой наиболее общее выражение для решения уравнения (e_3), равного нулю повсюду при $x = 0$. На этой же гиперплоскости $x = 0$ мы должны получить наиболее общее значение u_1' производной $\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_{x=0}$.

Легко видеть (комбинируя между собой соответствующие элементы двух сферических поверхностей, вдоль которых берутся M, т. е. элементы, которые имеют одну и ту же проекцию на плоскость $x = 0$), что с учетом условий $U_0(0, y, z) = U_1(0, y, z) = 0$ рассматриваемая производная равна [1])

$$u_1' = \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_{x=0} =$$
$$= M'_{t_0-\theta}(U_0') + (t_0 - \theta)\left[M'_{t_0-\theta}\left(\frac{dU_0'}{dr}\right) + M'_{t_0-\theta}(U_1')\right]. \tag{53'}$$

Средние значения M' берутся теперь в области положительных x по полусфере σ радиуса $(t_0 - \theta)$ с центром в точке $(0, y, z)$. Величины U_0' и U_1' обозначают производные U_0 и U_1 по x для произвольного положительного x. Сразу же заметим, что они являются произвольными функциями от x, y, z. При любом выборе U_0'

[1]) Если бы мы производили операции не с U_0 и U_1, а с u_0 и u_1, т. е. с функциями, которые не обращаются в нуль одновременно с x, то в формулу вошли бы дополнительные члены, содержащие средние значения этих функций на предельной окружности полусферы.

получаем

$$U_0 = \int_0^x U_0' \, dx.$$

Если, наоборот, u_1' задано, то задача нахождения u сводится к определению U_0', U_1' т. е. к решению уравнения (53′).

160. Это можно сделать по крайней мере теоретически следующим способом. Прежде всего, легко выделить два члена в правой части уравнения (53′). Если положить $t_0 - \theta = t'$, то один из них будет четным, а другой — нечетным по t', т. е. можно отдельно определить U_0' и U_1' с помощью формулы

$$\frac{\partial}{\partial t'}[t'M_{t'}'(U_0')] = \frac{1}{2}[u_1'(0, y, z, \theta + t') + u_1'(0, y, z, \theta - t')], \quad (54)$$

что эквивалентно

$$t'M_{t'}(U_0') = \frac{1}{2}\int_0^{t'} [u_1'(0, y, z, \theta + t') + u_1'(0, y, z, \theta - t')]\, dt' = W(y, z, t'), \quad (55)$$

и с помощью формулы

$$t'M_{t'}(U_1') = \frac{1}{2}\int_0^{t'} [u_1'(y, z, \theta + t') - u_1'(y, z, \theta - t')]\, dt' = W_1(y, z, t'). \quad (55')$$

Каждое из этих уравнений нужно рассматривать только для положительного t'. Они представляют собой особый случай *интегрального уравнения первого рода.*

На неизвестные величины U_0' и U_1' наложено только требование непрерывности. Умножим их на $t'dt'$ и проинтегрируем от 0 до t'. Результат (который мы должны записать только для U_0', поскольку левые части уравнений (55) и (55′) совершенно аналогичны) таков:

$$\int_0^{t'} t'W\, dt' = \int_0^{t'} t'^2 M_{t'}'(U_0')\, dt'.$$

Правая часть представляет интеграл по внутренней части полусферы

$$\frac{1}{2\pi}\iiint U_0'\, dx\, dy\, dz.$$

Принцип рассуждения состоит в следующем. Отметим, что этот последний интеграл имеет производную по каждой из переменных y и z. Относительно функции U_0' не делается никаких предположений, кроме того, что она считается непрерывной. Если центр

$(0, y_0, z_0)$ полусферы смещается параллельно оси y на dy, то новая сферическая поверхность в окрестности произвольной точки M (см. рис. 42, который является плоским сечением пространственной фигуры) смещается в нормальном направлении на величину

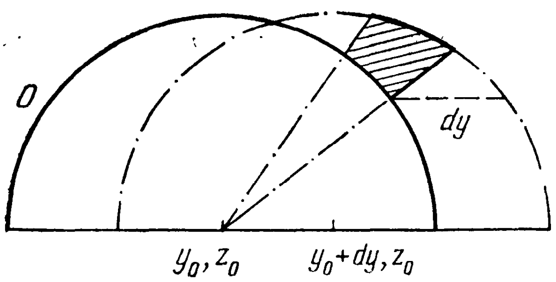

Рис. 42.

$$dy \cos (n, y) = \frac{y - y_0}{t'} dy.$$

Новый объем отличается от первоначального цилиндрическими элементами, которые нужно прибавить или вычесть и каждый из которых имеет высоту $\frac{y-y_0}{t'} dy$ и основание $t'^2 d\Omega$ ($d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$). Это дает член

$$t' (y - y_0)\, U_0' d\Omega$$

под знаком интеграла. Итак, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_0} \iiint U_0'\, dx\, dy\, dz = \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^{t'} t' W (y_0, z_0, t')\, dt' =$$
$$= \frac{t'}{2\pi} \iint (y - y_0)\, U_0' d\Omega = t' M_{t'}' [(y - y_0)\, U_0']. \qquad (56)$$

Выражение для производной по z_0 аналогично.

161. Определим теперь два функциональных оператора $\mathfrak{x}_y$ и $\mathfrak{x}_z$ при помощи формул

$$\mathfrak{x}_y \Phi = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{t'} t' \Phi(y, z, t')\, dt',$$
$$\mathfrak{x}_z \Phi = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{t'} t' \Phi (y, z, t')\, dt'.$$

Видно, что

$$\mathfrak{x}_{y_0} W = t' M_{t'}' [(y - y_0)\, U_0'],$$
$$\mathfrak{x}_{z_0} W = t' M_{t'}' [(z - z_0)\, U_0'].$$

С формулой (56) можно поступать так же, как с самой величиной U_0'. Следовательно, величина $\mathfrak{x}_{y_0}^2 W$ должна существовать так же, как и $\mathfrak{x}_{y_0} \mathfrak{x}_{z_0} W$ (эта последняя величина равна $\mathfrak{x}_{z_0} \mathfrak{x}_{y_0} W$). Обе эти величины имеют соответственно значения

$$t' M_{t'}' [(y - y_0)^2 U_0'], \qquad t' M_{t'}' [(y - y_0)(z - z_0)\, U_0'].$$

Можно снова применить к каждой из них оба оператора $\mathfrak{x}$. Мы видим, что таким образом можно поступать любое число раз в зависимости от того, *является ли заданная функция u_1' дифферен-*

цируемой бесконечное число раз или нет (последний случай является, конечно, более общим, когда U_0' имеет производные только до некоторого порядка). Имеем

$$T_{hk}(y_0, z_0, t') = \mathfrak{x}_y^h \mathfrak{x}_z^k W = t' M_{t'}' [(y - y_0)^h (z - z_0)^k U_0']. \qquad (57)$$

Мы видим, что это позволяет получить значения всякого двойного интеграла типа $t' M_{t'} [P(y, z) U_0']$, где P есть произвольный полином, так как P можно расположить по степеням $(y - y_0)$, $(z - z_0)$. Например, если обозначить через y_1, z_1 другую систему значений y, z, то величину

$$(y - y_0)^h (z - z_0)^k U_0'$$

можно записать в форме

$$\sum A_{hkmn} (y - y_1)^m (z - z_1)^n U_0',$$

так что среднее значение по новой полусфере σ с центром в точке $(0, y, z)$ и радиусом, равным t_1', можно найти из выражения

$$T_{hk}'(y_0, z_0; y_1, z_1, t_1') = \frac{1}{t'} \sum A_{hkmn} T_{mn}(y_1, z_1, t_1').$$

161′. Остается определить U_0' при помощи формулы (57) или (57′). Это — вид задачи о моментах, решение которой, если оно существует, можно получить при помощи известных методов. Например, достаточно рассмотреть такой интеграл

$$\frac{K^2}{\pi} \iint e^{-K^2[(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]} U_0'(\xi, y, z)\, t'^2 d\Omega =$$
$$= 2t' \sum (-1)^{h+k} \frac{K^{2(h+k+1)}}{h!\,k!} T_{2h, 2k}(y_0, z_0, t').$$

распространенный по поверхности первоначальной полусферы σ, который при $K \to \infty$ стремится к $U_0'(t', y_0, z_0)$. [Здесь ξ означает радикал

$$\sqrt{t'^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2}].$$

Можно [1]) рассмотреть аналогичное выражение, образованное при

---

[1]) Можно также рассмотреть величину

$$M_{t'} \left\{ \left[1 - \frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{t'^2} \right]^m U_0' \right\},$$

которую можно также записать в форме $\Sigma B_{hk} T_{hk}$ и предел частного от деления которой на выражение

$$M_{t'} \left\{ 1 - \frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{t'^2} \right\}^m$$

при m, стремящемся к бесконечности, также равен U_0'.

помощи T_{hk} и стремящееся к

$$\sqrt{t'^2-(y_0-y_1)^2-(z_0-z_1)^2}\times$$
$$\times U_0'\left[\sqrt{t_1'^2-(y_0-y_1)^2-(z_0-z_1)^2},\ y_0,\ z_0\right].$$

Итак, мы имеем серию операций, которые должны давать решение U_0', если оно существует. Естественно, в этом нужно убедиться, т. е. в том, что значения U_0', найденные таким образом, действительно удовлетворяют данному уравнению (55). Таким образом, система необходимых и достаточных условий, которым должно удовлетворять u_1' для того, чтобы существовало решение U_0', имеет следующий вид:

1) *На функцию* $W(y, z, t')$, *выведенную из* u_1' *при помощи формулы* (55), *можно действовать операторами* $\mathfrak{X}_y$, $\mathfrak{X}_z$ *произвольное число раз в любом порядке* (*причем эти операторы даже переставимы*); то же самое применимо к W_1;

2) *результат* T_{hk} *или* T_{hk}' *должен быть таким, что*

$$2x_0\sum(-1)^{h+k}\frac{K^{2(h+k+1)}}{h!\,k!}T_{2h,\,2k}(y_0, z_0, x_0)$$

(*или аналогичная комбинация для* T') *стремится к пределу при* $K\to\infty$;

3) *этот предел* $U_0'(x_0, y_0, z_0)$ *должен удовлетворять уравнению* (55).

162. Можно применить тот же самый метод к соответствующей задаче для уравнения (e_2). Ясно, что если начальными данными уравнения для u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x=0$ будут значения $u_0=0$ и $u_1'(y, t)$, то предыдущее уравнение (55) должно быть заменено уравнением (обозначения п. 30 кн. II)

$$W=t'\mu_{t'}(U_0'),$$

т. е. уравнением

$$W(y_0, t')=\frac{1}{\pi}\iint_{\{x\geqslant 0,\ x^2+(y-y_0)^2\leqslant t'^2\}}\frac{U_0'(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{t'^2-x^2-(y-y_0)^2}}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}U_0'(t\sin\varphi,\ y_0+t\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Единственная особенность, отличающая этот случай от предыдущего, заключается в том, что вначале нужно решить интегральное уравнение Абеля, а именно:

$$\frac{\pi}{2}\mu_t(U_0')=\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{W(y, t')\,t'\,dt'}{\sqrt{t^2-t'^2}}.\tag{58}$$

После того как это проделано, нужно поступать так же, как и в предыдущем случае, и мы придем к совершенно аналогичным заключениям.

163. Таким образом, задача в том и другом случае решена, хотя она и решена в очень малой степени в смысле Пуанкаре вследствие сложного характера условий и того факта, что нельзя даже сказать, отличается ли условие 3) п. 161′ от двух первых или представляет собой их следствие.

Более того, в этих условиях переменная t играет роль, совершенно отличную от той, которую играют другие переменные. Этого не должно было бы быть, так как эта задача, очевидно, инвариантна по отношению к группе Лоренца или, точнее, к подгруппе, которая оставляет x инвариантным. Для уравнения (e_2) она является хорошо известной группой

$$y' = y \operatorname{ch} \alpha + t \operatorname{sh} \alpha,$$
$$t' = y \operatorname{sh} \alpha + t \operatorname{ch} \alpha,$$

где α — произвольный параметр.

Ясно, что было бы желательно написать решение в форме, которая также была бы инвариантна по отношению к такой группе. Это имело бы место, если бы мы ввели изменения u_1' не вдоль линий, параллельных координатным осям, а вдоль бихарактеристик.

Результаты, полученные в п. 27 кн. I, показывают, что интегральные уравнения (55) или (58) не имеют решений, когда функция u_1' не зависит от t и не является аналитической функцией других переменных. Результат Вольтерра показывает, что они всегда имеют решение, когда функция u_1' аналитична по переменным, отличным от t. Естественно, все это можно было бы представить в другой, более общей форме, если использовать вышеупомянутую подгруппу группы Лоренца.

ГЛАВА II
ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА СПУСКА

1. Спуск от m четного к m нечетному

164. Мы получили решение задачи для четного числа независимых переменных, выведя его из результата, соответствующего нечетному m, т. е. из формул, данных в книге III. Можно ли сделать обратное? Могут ли настоящие формулы привести (при помощи метода спуска) к решениям, относящимся к случаю нечетного m? Мы сейчас увидим, что это возможно и что решение, полученное таким образом, в некоторых отношениях даже выгодно отличается от первого.

Мы применим метод спуска таким же образом, что и раньше, исходя из рис. 33 на стр. 226 и из сравнения уравнений (E) и (E′) с единственной разницей, что m теперь — нечетное число, так что можно записать $m = 2m_1 + 1$, если в вышеприведенных формулах заменить m_1 на $m_1 + 1$. Сохранится соотношение

$$\Gamma' = \Gamma - (z - c)^2,$$

в котором мы будем по-прежнему предполагать, что $c = 0$. Но вместо формулы (39), данной в книге III, будем теперь исходить из формул (29) и (29′) книги IV, которые применим к (E′). Итак, введем две функции, соответствующие функциям $\mathfrak{B}$ и V. Одна из них представляет собой ряд по целым степеням Γ'

$$\mathfrak{B}' = \sum_{k=0}^{\infty} V'_{m_1+k}\Gamma'^k = \sum V'_{m_1+k}(\Gamma - z^2)^k, \tag{59}$$

а другая — полином по той же самой величине степени $m_1 - 1$ (вследствие только что сделанного замечания относительно m), а именно:

$$V' = \sum^{m_1-1} V'_h\Gamma'^h = \sum V'_h(\Gamma - z^2)^h. \tag{60}$$

Коэффициенты V'_h в обоих случаях являются функциями переменных x.

Возьмем теперь решение u уравнения (E), которое мы будем также рассматривать как не зависящее от z решение уравнения (E′). Если оно определяется данными Коши на S' или, что то же самое, на S, то оно выражается формулами (29) или (29′), предыдущей главы, в которых:

1) m_1 нужно заменить на $m_1 + 1$;

2) Γ нужно заменить на Γ'; V и $\mathfrak{B}$ — выражениями V' и $\mathfrak{B}'$, которые были только что определены;

3) T, S, τ, σ нужно заменить соответствующими многообразиями T', S', τ', σ', относящимися к пространству E_{m+1};

4) $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m, dS, dS_\nu$ нужно умножить на dz, в то время как $d\tau'_\gamma$, $d\sigma'_\gamma$ вводятся так же, как было объяснено выше;

5) нужно написать [1]) символ $\int$ после каждого из $\iiint$ или $\iint$: этот знак представляет собой интегрирование по z.

[1]) Строго говоря, необходим другой символ для интегралов, которые дифференцируются по γ. Чтобы не усложнять обозначений, будем писать

Нам достаточно исследовать влияние этой последней операции. Расчет первых двух членов очевиден. Например, величина $\iiint\int$ запишется в виде

$$\iiint f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m\int \mathfrak{B}'\,dz =$$
$$= \iiint f\,dx_1 dx_2\ldots dx_m\int\Big[\sum V'_{m_1+k}(\Gamma - z^2)^k\Big]dz. \qquad (61)$$

Так как интегрирование под знаком $\int$ должно выполняться от $-\sqrt{\Gamma}$ до $+\sqrt{\Gamma}$ и

$$\int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}}(\Gamma - z^2)^k\,dz = \Gamma^{k+\frac{1}{2}}\mathrm{B}\left(k+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma^{k+\frac{1}{2}}}{(k+1)\,C_{k+1}},$$

то войдет величина, не зависящая от z,

$$\mathrm{l}v_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\,C_{k+1}}V'_{m_1+k}\Gamma^{k+\frac{1}{2}}, \qquad (62)$$

где произвольный численный коэффициент l будет выбран далее.

Итак, выражение (61) принимает вид $\mathrm{l}\iiint fv_2\,dx_1dx_2\ldots dx_m$, и аналогично во втором члене формулы (29) нужно заменить $\mathfrak{B}$ на $\mathrm{l}v_2$ [1]).

164'. Рассмотрим теперь оставшиеся члены, которые нужно дифференцировать по γ. До дифференцирования τ' принадлежит, к примеру, некоторому двуполостному гиперболоиду (ср. примечание 1 на стр. 245), и точка $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ должна описать область T_1, заключенную между $\Gamma = \gamma$ и S (ср. цитированное примечание), причем положение этой точки дает на τ' два значения z:

$$z = \pm\sqrt{\Gamma - \gamma}.$$

просто $\iiint$ и $\iint$ (вместо $\iint$ и $\int$), поскольку они в конце-концов выражаются (см. текст далее) через пространственные и поверхностные интегралы соответственно.

[1]) Не возникает никаких особых трудностей из-за присутствия производной d/dv, так как это дифференцирование, очевидно, перестановочно с операциями интегрирования.

По определению $d\tau'_\gamma$ таково, что его произведение на $d\gamma$ представляет собой объем части $(m+1)$-мерного пространства, заключенный между двумя последовательными поверхностями $\Gamma' = \text{const}$ в произвольном элементарном цилиндре, проходящем через рассматриваемый элемент (рис. 43). Если взять цилиндр,

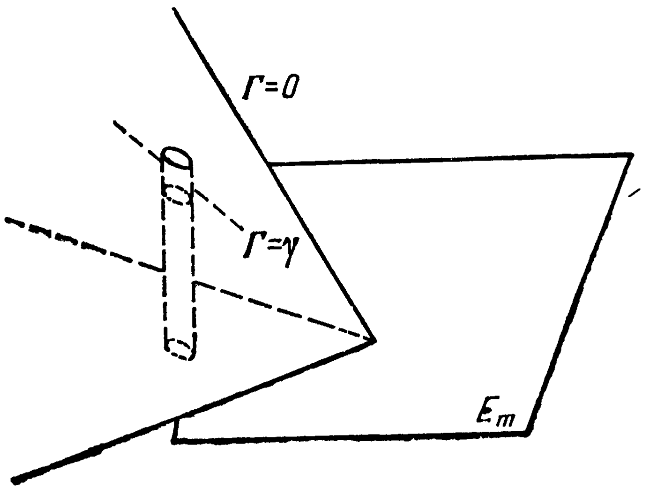

Рис. 43.

параллельный оси z, то объем будет равен прямому сечению (т. е. проекции на E_m, а именно: $dx_1 dx_2 \ldots dx_m$), умноженному на отрезок dz, отсекаемый на образующей. Итак:

$$d\tau'_\gamma = dx_1 \ldots dx_m : \left| \frac{\partial \Gamma'}{\partial z} \right| = \frac{dx_1 \ldots dx_m}{2\,|z|} = \frac{dx_1 \ldots dx_m}{2\sqrt{\Gamma - \gamma}},$$

что позволяет нам выразить интеграл, подлежащий дифференцированию по γ. Величина V' дается выражением (60), в котором $(\Gamma - z^2)$ должно быть заменено на γ. Поэтому данный интеграл принимает вид (двойка в знаменателе исчезает в силу того, что присутствуют два элемента $d\tau'$, имеющие одну и ту же проекцию на E_m)

$$\iiint f V' d\tau'_\gamma = \iiint_{T_1} f \frac{dx_1 \ldots dx_m}{\sqrt{\Gamma - \gamma}} \sum_{h=0}^{m_1 - 1} V'_h \gamma^h, \tag{63}$$

где T_1 есть опять-таки такая часть T, что $\Gamma \geqslant \gamma$.

Путем совершенно аналогичных рассуждений следует положить, что в других интегралах, подлежащих дифференцированию,

$$d\sigma'_\gamma = \frac{dS}{2\sqrt{\Gamma - \gamma}}.$$

Без существенных изменений это можно также применить к интегралам последней строки формулы, взятой в форме (29′) (заметив, что символы $\frac{d}{d\gamma}$ и $\frac{d}{d\nu}$ переставимы). Окончательно имеем

$$(-1)^{m_1+1}\frac{2\pi^{m_1}}{(m_1-1)!}u_a = -1\left[\iiint_T fv_2dx_1\dots dx_m + \right.$$

$$\left.+\iint_{S_0} v_2(u_1+Lu_0)\,dS\right] + \frac{1}{(m_1-1)!}\left\{\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\left[\iiint_T f\,dx_1\dots\right.\right.$$

$$\left.\left.\dots dx_m\frac{\Sigma V'_h\gamma^h}{\sqrt{\Gamma-\gamma}} + \iint_S (u_1+Lu_0)\,dS\,\frac{\Sigma V'_h\gamma^h}{\sqrt{\Gamma-\gamma}}\right]\right\}_{\gamma=0} -$$

$$-\frac{1}{(m_1-1)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\frac{d}{d\nu}\iint_{S_\nu} u_0\,dS\frac{\Sigma V'_h\gamma^h}{\sqrt{\Gamma-\gamma}} + 1\frac{d}{d\nu}\iint u_0v_2dS. \qquad (64)$$

Расчет последних двух членов связан с теми же замечаниями, которые были сделаны в п. 143′.

Эта новая формула полностью аналогична известной формуле Вольтерра (к которой она легко приводится, если применить ее к уравнению (e_2)). Она не содержит ни одного символа, которого не было бы в классическом анализе. Но она соединяет это преимущество с полной общностью, поскольку известно, что такая формула существует для любого уравнения (пока что аналитического).

165. Можно легко увидеть, как эта формула могла бы также привести к нашему первому решению. Достаточно выполнить дифференцирование по γ в соответствии с принципами книги III.

Так как подынтегральное выражение имеет дробный порядок в окрестности $\gamma=0$, то никаких членов, соответствующих пределам интегрирования, вводить не нужно. С другой стороны, необходимо использование символа $\overline{|}$. При помощи него можно просто дифференцировать под знаком $\iiint$ или $\iint$. Другими словами, нужно заменить $\frac{1}{\sqrt{\Gamma-\gamma}}\sum V'_h\gamma^h$ его производной[1] (m_1-1)-го порядка, после чего мы, например, находим

$$\frac{1}{(m_1-1)!}\left\{\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\left[\iiint\frac{f}{\sqrt{\Gamma-\gamma}}\left(\sum V'_h\gamma^h\right)dx_1\dots dx_m\right]\right\}_{\gamma=0} =$$

$$=1\overline{\left|\iiint v_1 f\,dx_1\dots dx_m\right.},$$

---

[1]) Однако это несправедливо в окрестности точки a, где нужно использовать соответствующий предельный переход (см. кн. II, п. 106).

где v_1 дается формулой

$$\mathrm{l}v_1 = \frac{1}{(m_1-1)!}\left[\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma-\gamma}}\sum V'_h\gamma^h\right)\right]_{\gamma=0} =$$

$$= \sum \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\left(m_1-h-\frac{3}{2}\right)}{(m_1-h-1)!}\,\frac{V'_h}{\Gamma^{m_1-h-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sum_{0}^{m_1-1} C_{m_1-h-1}\frac{V'_h}{\Gamma^{m_1-h-\frac{1}{2}}}. \qquad (65)$$

Поскольку тот же самый расчет применим к каждому члену формулы (64), мы приходим, очевидно, к формуле (39) п. 105 книги III, причем

$$\mathrm{l}v = \mathrm{l}(v_1 - v_2) =$$

$$= \sum_{h=0}^{m_1-1} C_{m_1-h-1}\frac{V'_h}{\Gamma^{m_1-h-\frac{1}{2}}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)C_{k+1}}V'_{m_1+k}\Gamma^{k+\frac{1}{2}}. \qquad (65')$$

Таким образом, величина v выводится из функций V' и $\mathfrak{B}$, как уже было показано в п. 70 кн. II, причем численное отношение соответствующих коэффициентов в формулах (59), (60) и (65′) соответствует [1]) значениям, найденным в цитированном месте, если для численного коэффициента l взять значение

$$\mathrm{l} = C_{m-1}.$$

Как мы видим, связь между v' и v можно также выразить при помощи формул (62), (65) и (65′), подобно тому, как в случае m четного она выражалась формулами (3) и (3′).

2. Свойства коэффициентов элементарного решения

166. Важность элементарного решения для нашей теории, очевидно, обусловлена его тесной связью с самим уравнением. Это явным образом следует из того факта, что данное линейное уравнение с частными производными второго порядка с нечетным числом независимых переменных имеет вполне определенное элементарное решение; аналогично данному уравнению с четным числом независимых переменных соответствует одна функция V и одна функция $\mathfrak{B}$. Это свойство сразу же показывает нам, как, например, рассматриваемое решение ведет себя по отношению

[1]) Непосредственная проверка выполняется при помощи соотношения между Ω_{2m_1} и Ω_{2m_1-1} (п. 99).

к некоторым простым преобразованиям таким, как замена переменных.

В какой степени это свойство присуще также операциям, при помощи которых ранее было построено это решение, т. е. различным членам разложения его в ряд? Такой вопрос интересен с точки зрения ценности нашего метода расчета величины u. Чем теснее связь между этими членами, взятыми отдельно, и самой задачей, тем более естественным является метод.

На этот раз связь более слабая, чем для значения величины в целом, хотя в рассматриваемом разложении (например, при нечетном m)

$$u = \frac{1}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}(U_0 + U_1\Gamma + \ldots + U_h\Gamma^h + \ldots)$$

сами коэффициенты U_h полностью определены как функции x и a, если известны выражения для коэффициентов уравнения. Можно легко предугадать, что u и даже U сохраняют свои значения самое большее с точностью до простого множителя [1]), когда производится замена независимых переменных, поскольку при таком преобразовании координат геодезические, введенные в п. 55 кн. II и, следовательно, величина Γ остаются неизменными. Но дело будет обстоять иначе, если произвести замену неизвестной функции, положив

$$u = K(x_1, x_2, \ldots, x_m)u_1,$$

или даже если умножить левую часть $\mathfrak{F}(u)$ на данную величину (а именно на заданную функцию от x). Любая из этих двух операций не приведет к какому-либо изменению элементарного решения, кроме умножения его на простой множитель. Но изменение, претерпеваемое каждой величиной U_h в отдельности, намного сложнее, так как такие операции, изменяющие характеристическую форму A, сильно меняют также геодезические линии и, следовательно, величину Γ.

Легко видеть, что получится в результате соответствующей комбинации этих двух операций, а именно, при подстановке вместо $\mathfrak{F}(u)$ нового дифференциального оператора

$$\mathfrak{F}_1(u) = \frac{1}{K}\mathfrak{F}(Ku),$$

сопряженный оператор, к которому (это можно получить непосредственно, если определить его из равенства (5) п. 37) есть

---

[1]) Этот множитель появляется только в силу присутствия множителя $1/\sqrt{|\Delta|}$ в формуле п. 63. Он, следовательно, исчезает в инвариантной теории (которая, как мы уже говорили, приводит к тому, что нужно брать $U = 1$ в точке a). Он не входит в последующие расчеты (пп. 168—170).

$\mathfrak{G}_1(v) = K\mathfrak{G}(v/K)$. При этом сохраняются значения A_{ik} (и, следовательно, Г). Что касается B_i, то, положив

$$K = e^k, \quad k_i = \frac{\partial k}{\partial x_i},$$

без труда найдем, что к каждой из них добавляется соответствующее значение $\frac{\partial A}{\partial k_i}$ (для нашей цели прямой расчет коэффициента C не является необходимым), так что новое значение M принимает вид (в обозначениях кн. II)

$$M_1 = M + \sum \frac{\partial A}{\partial k_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = M + 2 \sum k_i \frac{\partial A}{\partial P_i} = M + 4s \frac{dk}{ds}.$$

Следовательно, коэффициент U_0 умножится на величину

$$e^{-\int_0^s \frac{dk}{ds} ds} = \frac{K_a}{K_x}$$

(в которой учтен первоначальный множитель $1/\sqrt{|\Delta|}$).

Последовательные уравнения (42′), (44′) показывают, что также будет обстоять дело для каждой из величин U_h.

167. Другое доказательство тесной связи между различными коэффициентами U_h и рассматриваемым вопросом основывается на результате, полученном в п. 114 и распространенном в п. 146 на четные значения m.

Мы видели, что элементарное решение обладает свойством взаимности, т. е. оно не меняется по абсолютной величине, когда мы меняем местами обе точки x и a с одновременной заменой оператора $\mathfrak{F}(u)$ сопряженным к нему оператором $\mathfrak{G}(v)$.

Так как для нечетного m имеем

$$u = \frac{U}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}$$

и к тому же Г симметрично относительно x и a, то можно то же самое сказать о числителе U.

Можно ли сделать такое же заключение о коэффициентах U_h в разложении

$$U = U_0 + U_1\Gamma + \ldots + U_h\Gamma^h + \ldots ?$$

Конечно, это можно было бы сделать, если бы переменные $x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_m$ (от которых зависят U_h) и Г были независимы. Но это не выполняется, так что рассматриваемое заключение никоим образом не является очевидным.

Наоборот, оно станет таковым, если мы снова воспользуемся нашим методом спуска.

Иными словами, одновременно с заданным дифференциальным оператором

$$\mathfrak{F}(u)=\sum A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}+\sum B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu,$$

в котором с самого начала предполагается, что число m независимых переменных четно, рассмотрим вспомогательный оператор

$$\mathfrak{F}'(u)=\mathfrak{F}(u)-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

где z есть дополнительная $(m+1)$-я переменная. Оба сопряженных оператора соответственно равны

$$\mathfrak{G}(v),\ \mathfrak{G}'(v)=\mathfrak{G}(v)-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Известно, что новое значение Γ, соответствующее $\mathfrak{F}'$ или $\mathfrak{G}'$, равно

$$\Gamma'=\Gamma-(z-c)^2, \tag{66}$$

так что новое элементарное решение таково:

$$u'=\frac{U'}{[\Gamma-(z-c)^2]^{\frac{m-1}{2}}}=\frac{1}{[\Gamma-(z-c)^2]^{\frac{m-1}{2}}}\sum U_h'[\Gamma-(z-c)^2]^h, \tag{67}$$

причем коэффициенты U_h' отличаются от соответствующих коэффициентов U_h только численными множителями и, в частности, зависят только от

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\qquad a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$$

и не зависят от z и c.

Так как число $m+1$ нечетно, то величина (67) и, следовательно, ее числитель U' обладают свойством взаимности

$$\sum U_h'\Gamma'^h=\sum V_h'\Gamma'^h, \tag{68}$$

причем последовательные коэффициенты V_h' в правой части вычисляются так же, как соответствующие величины, входящие в U, с той лишь разницей, что:

1) нужно поменять местами x и a, т. е. x_1 и a_1, x_2 и a_2 и т. д. (так что в расчетах п. 62 точку x сначала нужно считать фиксированной, а переменными — только величины a; например, все геодезические, вдоль которых происходит интегрирование, выходят из одной точки x и достигают произвольных точек a);

2) оператор $\mathfrak{F}$ (в котором независимыми переменными являются x) нужно заменить на $\mathfrak{G}$ (в котором независимыми переменными являются a).

Итак, в формуле (68) $2m+1$ переменных $x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots$ $\ldots, a_m$, Γ' являются независимыми, поскольку в силу уравнения (66) величина Γ' содержит переменную $(z - c)$, которая отлична от переменных $x_1, \ldots, x_m$, $a_1, \ldots, a_m$ и не входит в коэффициенты.

Следовательно, уравнение (68) должно быть тождеством относительно Γ', что и дает требуемое заключение для уравнения $\mathfrak{F}(u) = 0$ по крайней мере при m четном.

Но новая процедура спуска позволяет, очевидно, распространить это заключение на нечетные значения m, так как можно считать, что любое уравнение $\mathfrak{F}(u) = 0$ с нечетным числом переменных выведено из другого уравнения $\mathfrak{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (с четным числом независимых переменных), элементарное решение которого с точностью до численных множителей имеет те же самые коэффициенты. Итак, мы полностью доказали требуемое утверждение.

168. Можно ли для того, чтобы его получить, заменить вышеупомянутый непрямой метод другим, более прямым, исходя из явного выражения для U_h?

Этот вопрос нужно рассматривать в связи с теорией геодезических линий. Действительно, любое уравнение (E) приводит, как мы видели, к рассмотрению геодезических линий, относящихся к метрической форме $\boldsymbol{H}$. Обратно, всякая метрическая форма $\boldsymbol{H}$ соответствует бесконечному числу линейных уравнений с частными производными таких, как (E).

Удобно, впрочем, представить расчет такого рода в инвариантной форме. Обозначения будут [1]) (до п. 171 включительно) такими же, как те, которые использованы в приложении 1 к этой монографии, причем в дальнейшем не предполагается никакого знакомства с тензорным анализом и абсолютным дифференциальным исчислением.

В частности, здесь выгодно ввести дифференциальный параметр $\Delta_2 u$, определение которого дано в п. 59. Действительно, следуя Коттону [2]), уравнение (E) без правой части, соответствующее заданной форме $\boldsymbol{H}$, в наиболее общем виде можно записать так:

$$\Delta_2 u + \sum_i \bar{B}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + \bar{C} u = 0, \tag{$\bar{\text{E}}$}$$

где Δ_2 есть второй дифференциальный параметр Ламе — Бельтрами, выражение которого таково (п. 59):

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\rho} \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho A^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^k}\right) = \sum A^{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial u}{\partial x^i} \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho A^{ik}).$$

---

[1]) Помимо введения сопряженного уравнения в инвариантной форме, это изменение обозначений состоит в том, что величины x, A, B помечаются верхними индексами, а величине U_0 в вершине a соответствующего характеристического коноида придается значение 1 (вместо $1/\sqrt{|\Delta_a|}$).

[2]) Ann. Ec. Norm. Supér. t. XVII, pp. 211—244, 1900. См. также Levi-Civita, Atti Ist. Veneto, t. LXXII, pp. 1331—1357, 1913.

Ясно, что левая часть уравнения ($\overline{\text{E}}$) имеет форму

$$\mathfrak{F}(u) = \sum A^{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + \sum B^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + Cu.$$

Обратно, любой дифференциальный оператор такой, как $\mathfrak{F}(u)$ можно представить в форме ($\overline{\text{E}}$), причем

$$\overline{B}^i = B^i - \frac{1}{\rho} \sum \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho A^{ik}). \tag{69}$$

Следовательно, любой вопрос, относящийся к произвольному уравнению (E), можно рассматривать как вопрос, относящийся к линейному элементу H и к системе $m+1$ функций $\overline{B}^1, \ldots, \overline{B}^m, C$ от $x^1, \ldots, x^m$.

169. Трудность поставленной выше задачи, очевидно, возрастает вместе с порядком рассматриваемого члена. Мы решим вопрос только для первого члена U_0, для которого требуемое заключение, как мы увидим, можно вывести из формулы, полученной в п. 59,

$$\Delta_2 \Gamma = 2\left[1 + s \frac{d}{ds} \log (\rho J)\right]$$

и из ставших классическими свойств геодезических линий.

Сопряженный оператор, который входит в наши рассуждения, будет, само собой разумеется, взят в инвариантном виде (п. 40).

Будем снова исходить из дифференциальных уравнений, записанных в п. 55 для геодезических линий, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^i}{ds} &= \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{ds} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x^i}. \end{aligned}\right\} \tag{L}$$

Известно, что их общий интеграл зависит от $2m$ произвольных постоянных $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2m}$.

Мы напоминали в дополнительном замечании к книге II, что если исходить из какого-то определенного решения системы (L) (которое соответствует определенной системе численных значений μ) и рассмотреть величины

$$\left.\begin{aligned} x'^i &= \frac{\partial x^i}{\partial \mu_j}, \\ p'_i &= \frac{\partial p_i}{\partial \mu_j} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

(j — произвольный индекс, заключенный между 1 и $2m$), то они удовлетворяют *системе в вариациях*

$$\frac{dx'^i}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\partial A'}{\partial p'_i}, \qquad \frac{dp'_i}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A'}{\partial x'^i}, \tag{L'}$$

которая является линейной (вспомним, что A' является квадратичной формой по x' и p').

Каждое значение индекса j в формуле (70) дает решение системы (L′) и, так как якобиан

$$\mathfrak{K} = \frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^m, p_1, p_2, \ldots, p_m)}{D(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2m})}$$

не равен нулю [1]), то $2m$ возможных значений j дают фундаментальную систему решений (L′).

Этими свойствами обладают все уравнения в вариациях, выведенные из системы дифференциальных уравнений. Но гамильтоновские системы типа (L) и их системы в вариациях (L′) обладают другим важным свойством [2]), заключающимся в том, что знаменатель $\mathfrak{K}$ постоянен вдоль каждой определенной линии, удовлетворяющей уравнениям (L) (другими словами, $\mathfrak{K}$ зависит только от $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2m}$ и не зависит от s).

Сами геодезические зависят только от $2m - 2$ параметров. Но каждое решение (L) содержит, кроме того, два параметра, а именно, величины α и β, которые упоминались в п. 56 и которые, следовательно, нужно рассматривать как две из величин μ (так что, написав общее уравнение геодезических с $2m - 2$ параметрами и заменяя s на $\alpha s + \beta$, мы выводим из него общий интеграл системы (L).

Возвращаясь к заданному уравнению в форме (69), вспомним для начала, что дифференциальный оператор $\Delta_2 u$ равен своему сопряженному оператору (п. 59, замечание). Следовательно, оператор, сопряженный к данному

$$\mathfrak{F}(u) = \Delta_2 u + \sum_i \bar{B}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + \bar{C}u,$$

---

[1]) Основная теорема теории дифференциальных уравнений показывает что μ_i могут быть выбраны так, что величинам $x_1, \ldots, x_m, p_i, \ldots, p_m$ при $s = 0$ можно придавать какие угодно значения. Детерминант $\mathfrak{K}$ есть то, что мы назвали в наших Leçons sur le calcul des variations «общим детерминантом» $2m - 2$ решений (L′), в то время как J есть то, что мы назвали «особым детерминантом».

[2]) См. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. III, n. 254 (Анри Пуанкаре, Новые методы небесной механики. Избр. труды в 3-х томах, т. I, «Наука», М., 1974. — *прим. ред.*).

равен (в обозначениях п. 40)

$$\overline{\mathfrak{G}}(\bar{v}) = \Delta_2\bar{v} - \sum_i \bar{B}^i \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^i} + \bar{C}_1\bar{v}, \qquad \bar{C}_1 = \bar{C} - \frac{1}{\rho}\sum_i \frac{\partial \bar{B}^i}{\partial x^i},$$

т. е. выводится из первого путем замены знаков всех $\bar{B}$ и соответствующего изменения $\bar{C}$.

Перейдем теперь к расчету величины U_0, которую мы определим, само собой разумеется, не совсем так, как в книге II, но так, как нужно сделать, следуя инвариантной теории, т. е. придавая ей в вершине коноида не значение $1/\sqrt{|\Delta|}$, а значение 1. Вначале мы должны построить выражение M по формуле (36) п. 59

$$\frac{M}{2} = \frac{1}{2}\left(\Delta_2\Gamma + \sum_i \bar{B}^i \frac{\partial \Gamma}{\partial x^i}\right) = 1 + s\frac{d \log(\rho J)}{ds} + s\sum \bar{B}^i p_i,$$

где J дается формулой (29′) п. 57:

$$J = \frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^m)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m-1}, s)}.$$

Здесь мы рассматриваем только те геодезические, которые исходят из точки a (а не все геодезические, как ранее). Они выражаются в функции от s и $m - 1$ параметров λ. Величина

$$\bar{J} = \rho J$$

инвариантна по отношению к точечному преобразованию, примененному к x, которое оставляет λ без изменения. При изменении λ величина J умножается на множитель (якобиан новых λ по старым), зависящий от s.

Введем m новых функций $\mathfrak{B}_i$ от $x^1, \ldots, x^m$, написав [1])

$$\bar{B}^i = \sum A^{ik}\mathfrak{B}_k = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \mathfrak{B}_i}.$$

Последний член в выражении для $M/2$, таким образом, принимает вид

$$\frac{s}{2}\sum p_i \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{B}_i} = \frac{s}{2}\sum \mathfrak{B}_i \frac{\partial A}{\partial p_i} = s\sum \mathfrak{B}_i \frac{dx^i}{ds}.$$

Если вспомнить, что

$$2p - 2 = -m,$$

[1]) Величины $\mathfrak{B}_i$ являются ковариантными компонентами, если использовать терминологию тензорного анализа.

то видно, что

$$\frac{M}{2}+2p-2=\frac{M}{2}-m=-(m-1)+s\frac{d\log\rho J}{ds}+s\sum_i \mathfrak{B}_i\frac{dx^i}{ds} \tag{71}$$

и, следовательно, первый член $\bar{U}_0$ (с чертой, чтобы напомнить, что используются инвариантные обозначения) равен

$$\bar{U}_0=e^{-\frac{1}{2}\int_0^s\left(\frac{M}{2}-m\right)\frac{ds}{s}}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)_0\Big/\left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)}\,e^{-\frac{1}{2}\int_a^x \mathfrak{B}_1dx^1+\mathfrak{B}_2dx^2+\ldots+\mathfrak{B}_m dx^m}, \tag{72}$$

где $(\rho J/s^{m-1})_0$ обозначает предельное значение $\rho J/s^{m-1}$ в случае, когда точка x стремится к точке a вдоль определенной геодезической. Этот предел существует и отличен от нуля[1]). Используя обозначение Ньютона $\dot{x}$ для производной по s вдоль определенной геодезической, без труда находим

$$\left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0=\begin{vmatrix}\frac{\partial\dot{x}^1}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\dot{x}^1}{\partial\lambda_2} & \ldots & \frac{\partial\dot{x}^1}{\partial\lambda_{m-1}} & \dot{x}^1\\ \frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\lambda_2} & \ldots & \frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\lambda_{m-1}} & \dot{x}^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\dot{x}^m}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\dot{x}^m}{\partial\lambda_2} & \ldots & \frac{\partial\dot{x}^m}{\partial\lambda_{m-1}} & \dot{x}^m\end{vmatrix}_0. \tag{73}$$

Индекс 0 в конце детерминанта означает, что величины x и их производные по λ взяты при $s=0$. В сокращенной записи

$$\left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0=\left|\frac{\partial\dot{x}^i}{\partial\lambda_1}\,\frac{\partial\dot{x}^i}{\partial\lambda_2}\ldots\frac{\partial\dot{x}^i}{\partial\lambda_{m-1}}\,\dot{x}^i\right|.$$

170. Экспоненциальный множитель в формуле (72), а именно:

$$e^{-\frac{1}{2}\int_0^x \mathfrak{B}_1dx'+\ldots+\mathfrak{B}_m dx^m}$$

обладает свойством взаимности, упоминавшимся выше. Действительно, как мы видели, замена одного из двух взаимно сопряженных операторов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ на другой приводит к изменению знаков B, а следовательно, и $\mathfrak{B}$. С другой стороны, перестановка величин a и x меняет направление интегрирования в криволинейном

---

[1]) Исходя именно из этого условия, мы выбрали значение числа p в п. 61.

интеграле

$$\int \mathfrak{B}_1 dx^1 + \ldots + \mathfrak{B}_m dx^m,$$

взятом вдоль геодезической.

Чтобы доказать то же заключение для остающегося множителя

$$\sqrt{\left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)_0 \Big/ \left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0 \Big/ \left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)},$$

мы преобразуем его, пользуясь известными принципами, относящимися к геодезическим [1]).

При замене параметров $\mu_1, \ldots, \mu_{2m}$ на $2m$ других параметров $\nu_1, \ldots, \nu_{2m}$ (причем эти последние являются функциями первых и наоборот) детерминант $\mathfrak{K}$, очевидно, умножится на якобиан

$$\frac{D(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2m})}{D(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2m})}$$

(который, конечно, постоянен вдоль каждого решения (L)).

Введем теперь новый важный детерминант [1])

$$\mathfrak{J} = \frac{D(x^1_{(0)}, x^2_{(0)}, \ldots, x^m_{(0)}, x^1_{(1)}, x^2_{(1)}, \ldots, x^m_{(1)})}{D(\mu_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \mu_{2m})},$$

который, как мы увидим, очень тесно связан с уже упоминавшимся якобианом J. Величины $x^1_{(0)}, \ldots, x^m_{(0)}, x^1_{(1)}, \ldots, x^m_{(1)}$ представляют собой значения, которые принимают x в двух точках одной и той же геодезической, соответствующих двум различным значениям s_0, s_1 величины s (эти последние считаются постоянными при дифференцировании по $\mu_1, \ldots, \mu_{2m}$).

Мы примем, что $s_0 = 0$; s_1 есть значение s, соответствующее x, так что

$$\mathfrak{J} = \frac{D(a^1, a^2, \ldots, a^m, x^1, \ldots, x^m)}{D(\mu_1, \ldots\ldots\ldots, \mu_{2m})}.$$

При замене $\mu_1, \ldots, \mu_{2m}$ на $\nu_1, \ldots, \nu_{2m}$ величина $\mathfrak{J}$ умножается на тот же самый множитель, что и $\mathfrak{K}$, причем отношение $\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{K}}$ не зависит от выбора произвольных постоянных, от которых зависит общий интеграл системы (L).

Предположим в соответствии с этим, что m параметров μ являются теми, которые мы раньше обозначали через $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ и α, так что значения x при $s = 0$ не зависят от них и остаются соответственно равными $a^1, \ldots, a^m$, в то время как m других параметров $\mu_1, \ldots, \mu_m$ остаются постоянными. Поэтому, так как

---

1) См. наши Leçons sur le calcul des variations, n. 283.

величины

$$\frac{\partial a^i}{\partial \lambda_l}\,[i = 1, \ldots, m;\ l = 1, \ldots, (m-1)] \quad \text{и} \quad \frac{\partial a^i}{\partial \alpha}$$

равны нулю и поскольку, с другой стороны, $\frac{\partial x^i}{\partial \alpha} = s\dot{x}^i = s\frac{dx^i}{ds}$, то имеем

$$\mathfrak{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a^i}{\partial \mu_1}\frac{\partial a^i}{\partial \mu_2}\cdots\frac{\partial a^i}{\partial \mu_m} & \vdots & \frac{\partial x^i}{\partial \mu_1}\frac{\partial x^i}{\partial \mu_2}\cdots\cdots\cdots\frac{\partial x^i}{\partial \mu_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\quad 0\quad\ldots\quad 0 & \vdots & \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_1}\frac{\partial x^i}{\partial \lambda_2}\cdots\frac{\partial x^i}{\partial \lambda_{m-1}}s\dot{x}^i \end{vmatrix}. \tag{74}$$

Это обозначение снова нужно понимать так: каждая из написанных строк соответствует m строкам, которые получаются, если придавать i последовательные значения

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Таким образом, мы имеем дело с детерминантом порядка $2m$ (в котором мы отделили многоточием m первых строк от m последних и то же самое сделали для столбцов). Так как m^2 элементов равны нулю, то такой детерминант распадается на произведение двух детерминантов порядка m, из которых второй равен sJ. Итак, получаем

$$\mathfrak{J} = QsJ, \qquad Q = \left|\frac{\partial a^i}{\partial \mu_1}\frac{\partial a^i}{\partial \mu_2}\cdots\frac{\partial a^i}{\partial \mu_m}\right|. \tag{75}$$

Если выбрать таким же образом параметры и положить $s = 0$, то постоянный детерминант $\mathfrak{K}$ примет вид (при тех же обозначениях)

$$\mathfrak{K} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a^i}{\partial \mu_1}\cdots\frac{\partial a^i}{\partial \mu_m} & \vdots & \frac{\partial p_{i0}}{\partial \mu_1}\cdots\cdots\frac{\partial p_{i0}}{\partial \mu_m} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\ \ldots\ 0 & \vdots & \frac{\partial p_{i0}}{\partial \lambda_1}\cdots\frac{\partial p_{i0}}{\partial \lambda_{m-1}}p_{i0} \end{vmatrix},$$

так как

$$\frac{\partial p_{i0}}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\alpha p_i\left(\frac{s}{\alpha}\right)\right]\right)_{s=0} = p_{i0}.$$

Этот детерминант снова есть произведение двух множителей

$$\mathfrak{K} = Q\left|\frac{\partial p_{i0}}{\partial \lambda_1}\cdots\frac{\partial p_{i0}}{\partial \lambda_{m-1}}\,p_{i0}\right|.$$

Множитель Q тот же самый, что и в формуле (75). Во втором множителе можно заменить каждую величину p_{i0} соответствующей величиной

$$\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_{i0}} = \dot{x}_0^i,$$

если одновременно произвести деление на детерминант этой линейной подстановки, т. е. на Δ_a. Это в точности дает правую часть формулы (73), т. е. значение $(J/s^{m-1})_0$. Следовательно,

$$\mathfrak{K} = Q\frac{1}{\Delta_a}\left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0$$

и в силу (75)

$$\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{J}} = \frac{1}{|\Delta_a|}\left(\frac{J}{s^{m-1}}\right)_0\frac{1}{sJ}.$$

Итак, преобразуем значение $\bar{U}_0$ в формуле (72) к виду

$$\bar{U}_0 = s^{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{\rho_x\rho_a}}\sqrt{\left|\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{J}}\right|}\cdot e^{-\frac{1}{2}\int_a^x \sum \mathfrak{B}_i dx^i} =$$

$$= s^{\frac{m}{2}}\sqrt[4]{\Delta_x\Delta_a}\sqrt{\left|\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{J}}\right|}e^{-\frac{1}{2}\int_a^x \sum \mathfrak{B}_i dx^i}.$$

Это дополняет доказательство вышеупомянутого свойства в отношении функции $\bar{U}_0$, поскольку $\mathfrak{K}$ есть постоянная, имеющая, следовательно, одно и то же значение в точке a и в точке x, а $|\mathfrak{J}|$, очевидно, обладает рассматриваемой симметрией (согласно формуле (74)).

3. Исследование неаналитических уравнений

171. Вернемся теперь к элементарному решению как единому целому. Мы сумели его построить (по крайней мере для двух достаточно близких точек x и a), предполагая, что коэффициенты аналитичны. Следует отметить, что в первом примере (исключая классические случаи), в котором было дано такое построение, а именно, в работе Пикара об уравнениях $\Delta u + Cu = 0$ (цитировано в кн. II) эта гипотеза не была необходимой. Мы теперь увидим, как можно от нее избавиться в настоящем случае.

Результат, соответствующий общему уравнению эллиптического типа, был получен, независимо друг от друга, Э. Э. Леви [1]), одним из молодых итальянских геометров, подававших прекрасные надежды (он отдал свою жизнь в последней войне) и Гиль-

[1]) Rendic. Circ. Mat. Palermo. t. XXIV, pp. 275—317, 1907.

бертом [1]) в форме, в конечном счете, эквивалентной. У них обоих метод состоит в построении первого приближения («параметрикс» Гильберта), которое не удовлетворяет данному уравнению, но, будучи подставлено в это уравнение, дает просто результат, имеющий особенность первого порядка в сингулярной точке. Благодаря введению этого «параметрикса» Э. Э. Леви сумел построить элементарное решение. Со своей стороны Гильберт его не вводил. У него «параметрикс» играет роль, которая принадлежит, вообще говоря, самому элементарному решению. Оба этих вопроса на самом деле едины и анализ Э. Э. Леви в общем идентичен анализу Гильберта. В обоих случаях задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма (это также относится к первоначальной процедуре Пикара).

Однако этот метод требует видоизменений для того, чтобы применить его в гиперболическом случае. Причина заключается в том, что у Леви и у Гильберта была только одна особая точка и не нужно было заниматься исследованием того, как ведет себя «параметрикс», или дополнительный член, вдоль мнимой особенности, которая в действительности различна в зависимости от того, рассматриваем ли мы ее в первом приближении («параметрикс») или в точной форме. В данном случае, наоборот, нужно сразу же принять во внимание характеристический коноид, который является действительным, и само первое приближение не может иметь других особенностей, кроме как на рассматриваемом коноиде.

Другие трудности, по-видимому, проистекают прежде всего из природы вышеупомянутых решений. Если m четно, то элементарное решение не полностью определено, а если m нечетно, то нужно учитывать особые сингулярности, встречавшиеся в книге III, которые требуют предосторожностей при применении метода Фредгольма. Дело заключается в том, что в последующем мы получим решение с помощью метода спуска, рассматривая одновременно оба случая.

172. Область существования решения в аналитическом случае. Прежде чем переходить к неаналитическим уравнениям, мы должны ответить на первую, не менее важную часть вопроса, относящегося к аналитическим уравнениям.

Не нужно забывать — и этот недостаток является общим для всех методов, основывающихся на использовании рядов Маклорена,— что полученные таким образом решения, какими бы полными они ни казались, являются в действительности недостаточными и не решают задачу в полной мере.

---

[1]) Grundzüge einer allg. Theorie des linearen Integralgleichungen. Шестой мемуар (1910). Впервые об этом заходит речь в конце пятого мемуара (1906). См. также F u b i n i. Rendic. Acc. Lincei, 5 ser., t. XVIII, p. 423 (1909). (Замечания текста относятся в равной степени и к этой работе).

Она была решена в первый раз, но недостаточно полно, в книге I при помощи рассуждений Коши — Ковалевской. Задача решена неполно не только потому, что выражение для u дается в очень сложной форме, полученной косвенным путем, но также потому, что область, в которой расчет справедлив, может быть (и, вообще говоря, так оно и есть) очень малой и недостаточной для наших нужд. Известно (см. п. 8 кн. I), что при использовании выражений, содержащих степенные ряды, вероятность этого всегда существует из-за присутствия мнимых особенностей.

В частности, радиус сходимости таких рядов в настоящей задаче зависит, если не доказано противное, не только от рядов, в которые разлагаются коэффициенты, но также от рядов, в которые разлагаются начальные данные u_0 и u_1 (ср. далее п. 187). Нужно знать мажоранты как для тех, так и для других разложений, чтобы сделать соответствующее заключение относительно ряда для функции u.

Как мы сейчас увидим, решения, которые мы получили выше, лучше даже с этой точки зрения. Они существуют и, как мы это покажем, являются аналитическими, если это справедливо для элементарного решения. В свою очередь, существование этого последнего (и, следовательно, справедливость нашей формулы) было доказано как следствие сходимости ряда (43) (п. 62 кн. II) только для некоторой области около вершины коноида. В какой именно области существует функция U или функции U и $\mathfrak{U}$, неизвестно. Радиус сходимости ряда (43) может быть намного больше нижней грани, выведенной из предыдущих рассуждений, и поэтому функции U и $\mathfrak{U}$ могут существовать вне области, где их разложения по степеням Γ сходятся.

Мы докажем (по-прежнему считая коэффициенты аналитическими) существование решения во всей области регулярности самих коэффициентов, а также его аналитичность (при тех же предположениях об аналитичности f, u_0, u_1). Соответствующее доказательство для эллиптического случая было, например, дано Э. Э. Леви в уже цитированной работе. Мы должны, однако, видоизменить использованный в этом случае метод, чтобы применить его к вопросу, которым мы занимаемся [1]) по тем же причинам, которые упоминались ранее (точнее, в связи с тем, что область интегрирования правых частей в наших формулах зависит от a).

173. Для того чтобы дать это доказательство, рассмотрим случай четного m (это не уменьшает общности благодаря методу спуска). Примем, по крайней мере для начала, геометрическую гипотезу, которую, строго говоря, не нужно делать, но которая

[1]) Метод, который мы собираемся здесь развить, сильно отличается от метода Э. Э. Леви. Действительно, поскольку наш метод основан на последовательных продолжениях, он абсолютно неприменим в эллиптическом случае. Далее мы укажем метод, соответствующий методу Э. Э. Леви.

выполняется во всех практических случаях. Предположим, что существует однопараметрическое семейство поверхностей пространственного типа (в *строгом* смысле слова, т. е. ни одна из них не является касательной к характеристическому конусу, так что угол между любой из них и любым направлением внутри конуса с вершиной в одной из ее точек имеет положительный минимум). Эти поверхности будут аналитическими (так что с помощью аналитической замены переменных соответствующий параметр t можно взять в качестве одной из координат — m-й), и одна из них, соответствующая $t = 0$, будет [1]) поверхностью S, а область $\mathfrak{R}$ будет находиться со стороны $t > 0$. Каждая бихарактеристика или внутренняя геодезическая, т. е. каждая геодезическая, для которой $H \geqslant 0$, будет иметь при этих предположениях прямое и обратное направления. Последнее соответствует условию $\frac{dt}{d\sigma} < 0$, где σ есть дуга в обычном смысле слова. Величина $\left|\frac{dt}{d\sigma}\right|$ имеет даже положительный минимум. Пусть форма области $\mathfrak{R}$ такова, что произвольная обратная геодезическая, исходящая из точки этой области, остается все время внутри нее при $t \geqslant 0$. Тогда эта геодезическая должна непременно достичь поверхности S. Предположим также, что на каждой из этих линий переменная s выбрана определенным образом (даже аналитическим), например, допустим, что $\frac{dt}{ds} = 1$ при $t = 0$, так что значение этой производной в области $\mathfrak{R}$ заключено между двумя фиксированными положительными гранями.

Далее мы воспользуемся инвариантными обозначениями, соответствующими пп. 168—170. Более того, x^m будет обозначать t и аналогично a^m будет обозначать c.

Допустим также, по крайней мере, впредь до дальнейших указаний, что в $\mathfrak{R}$ выполняется обычное предположение: любые две точки x и a, лежащие внутри $\mathfrak{R}$, можно соединить геодезической совершенно однозначным и непрерывным образом. Другими словами, первая система уравнений (29) в п. 57 имеет вполне определенное решение: систему функций q, зависящих от x и a. Мы предположим также, что якобиан величин q_i не обращается в нуль внутри $\mathfrak{R}$.

При этих условиях мы можем ввести нормальные переменные Римана — Липшица X, относящиеся к точке a, в зависимости от которых, как мы знаем, величины x выражаются в следующей форме:

$$x^i = a^i + X^i + (\quad)_2 + (\quad)_3 + \dots \tag{76}$$

[1]) То обстоятельство, что одна из поверхностей $t = \text{const}$ представляет собой поверхность S, является несущественным, как мы увидим далее. Мы его используем главным образом для упрощения записи.

Скобки представляют собой однородные полиномы по X, индексы отмечают их степень, а коэффициенты, вообще говоря, являются функциями от a. Так как дифференциальные уравнения геодезических имеют форму

$$\ddot{x}^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} = -\sum \begin{Bmatrix} jk \\ i \end{Bmatrix} \dot{x}^j \dot{x}^k \tag{77}$$

(где коэффициенты $\begin{Bmatrix} jk \\ i \end{Bmatrix}$ — символы Кристоффеля — вычисляются по ныне классическому правилу, исходя из коэффициентов метрической формы), то первые члены формулы (76) представляют собой не что иное, как

$$x^i = a^i + X^i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \begin{Bmatrix} jk \\ i \end{Bmatrix} X^j X^k + \ldots,$$

т. е. выражения, где члены второй степени выводятся из последних членов формулы (77), если в ней заменить $\dot{x}$ на X и разделить ее на 2.

К этим нормальным переменным можно также применить линейное преобразование [1])

$$X^i = \sum l_{ik} \xi_k \tag{78}$$

(с коэффициентами, вообще говоря, зависящими от a), которое можно даже считать вполне определенным и зависящим аналитически [2]) от a. Таким образом, квадратичная форма $\Gamma = \boldsymbol{H}(\xi)$ сводится к канонической форме

$$\Gamma_0 = \xi_m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_{m-1}^2$$

и, аналогично, поверхность $\xi_m = \text{const}$, проходящая через точку a, будет касательной в этой точке к поверхности $t = \text{const}$, причем $\partial\xi_m/\partial t < 0$. Линейное преобразование нормальных переменных Липшица ξ коснется только $m - 1$ первых из них, если пере-

---

[1]) Переменные ξ, выбранные особым образом, не обладают инвариантным характером. Они не являются ни ковариантными, ни контравариантными. В частности, когда переменные X преобразованы в переменные ξ, соответствующие ковариантные переменные p являются не чем иным, как самими ξ (с точностью до знака). Это будет нам полезно в дальнейшем.

[2]) Так как эти коэффициенты до некоторой степени произвольны, изложенное в тексте справедливо, если предположить, что они вычисляются определенным образом, например строго по классическому правилу Лагранжа (см. Serret, Algèbre supérieure, 4 éd., t. I, p. 430; Bôcher, Higher algebra, ch. X, n. 45, p. 131). Для того чтобы применить это правило (при предположении, сделанном далее в тексте о выборе переменных), мы всегда будем рассматривать общий случай, когда коэффициенты при квадратных членах отличны от нуля, так как, отвлекаясь от члена, содержащего ξ_m^2, получаем отрицательно определенную форму по $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$.

менные x выбраны так, что линии $x^1 = \text{const}$, $x^2 = \text{const}, \ldots$ $\ldots, x^{m-1} = \text{const}$ всюду конормальны к поверхностям $t = \text{const}$. Можно предположить, что выбранные нами переменные обладают этим свойством, и даже что при $t = 0$ дискриминант формы $\boldsymbol{H}$ (или формы $\boldsymbol{A}$) всегда равен 1 (с помощью соответствующего преобразования только величин $x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}$), так что

$$\frac{d}{d\nu} d\bar{S} = \frac{\partial}{\partial t} dx^1 \ldots dx^{m-1}.$$

При этом конормальные производные представляют собой не что иное, как производные по t. Все эти преобразования являются аналитическими и регулярными.

Мы даже можем пойти дальше, по крайней мере в некоторой части области $\mathfrak{R}$, расположенной в окрестности данной поверхности S. Пусть в каждой из ее точек проведена конормальная геодезическая, и пусть на этой геодезической от ее основания отложена дуга произвольной длины t (по-прежнему измеряемая в метрике $\boldsymbol{H}$). Точка пространства тогда определяется заданием t и $m - 1$ других координат $x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}$, определяющих основание геодезической на S. Все поверхности $t = \text{const}$ будут тогда, как известно, конормальны к предыдущим геодезическим, и метрическая форма примет вид

$$dt^2 + \sum{}' H_{ik} dx^i dx^k. \tag{79}$$

Знак $\sum{}'$ означает, что индексы i, k меняются только от единицы до $m - 1$, так что второй член является квадратичной формой (отрицательно определенной) только по $dx^1, dx^2, \ldots, dx^{m-1}$. Это дает для последнего уравнения (77)

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = \frac{1}{2} \sum{}' \frac{\partial H_{ik}}{\partial t} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}. \tag{80}$$

Однако используя такую систему координат, мы рискуем ограничиться той частью области $\mathfrak{R}$, в которой определение этой системы однозначно. Мы не будем предполагать впредь до дальнейшего, что мы ввели эти координаты, и, следовательно, не будем считать, что линии

$$x^1 = \text{const}, \quad x^2 = \text{const}, \ldots, x^{m-1} = \text{const}$$

(которые по-прежнему предполагаются конормалями к поверхностям $t = \text{const}$) являются геодезическими.

173′. Величину ξ_m с противоположным знаком мы будем также иногда обозначать буквой θ.

Величины ξ могут быть выражены в зависимости от θ и отношений

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\theta}, \quad \eta_2 = \frac{\xi_2}{\theta}, \ldots, \eta_{m-1} = \frac{\xi_{m-1}}{\theta},$$

причем эти последние удовлетворяют внутри коноида соотношению

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_{m-1}^2 \leqslant 1. \tag{81}$$

Любой системе таких постоянных значений η будет соответствовать определенная геодезическая (внутренняя или бихарактеристика), проходящая через точку a. Вдоль такой геодезической отношение $\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$ заключено между двумя положительными фиксированными гранями, и, следовательно, то же самое справедливо для отношения $\frac{\theta}{c-t}$.

Если a — определенная точка области $\mathfrak{R}$, то можно установить соответствие между точками x, которые являются внутренними одновременно для $\mathfrak{R}$ и для коноида с вершиной в точке a, и нормальными переменными ξ, относящимися к a, а также переменными $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}$, θ или $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}$, t. Эти две последние системы эквивалентны, с нашей точки зрения, в том смысле, что переменные каждой из них можно выразить в зависимости от переменных другой, причем эти выражения являются голоморфными в силу замечания, сделанного о величине $\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$.

174. Поскольку дела обстоят так, мы покажем, что если каким-либо образом построить входящие в элементарное решение функции $\overline{V}$ и $\overline{\mathfrak{R}}$ для всех возможных положений x и a в области $\mathfrak{R}$ (точнее, для всех положений этих точек, удовлетворяющих условию $\Gamma(x;\, a) \geqslant 0$) и если мы, кроме того, знаем, что эти величины голоморфны по x и a, то можно утверждать, что решение u задачи Коши относительно $t = 0$ или $t = t_0 > 0$ с голоморфными начальными данными также голоморфно.

Вначале мы проведем это доказательство для первого члена формулы (29′), содержащего $\iiint$. Мы покажем в общем виде, что m-кратный интеграл от голоморфной функции F

$$\iiint F(x^1, x^2, \ldots)\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^m, \tag{82}$$

распространенный по области, заключенной между обратным полуконоидом с вершиной в точке a и поверхностью S, является голоморфным по a. Функция F может даже содержать не только x, но также сами a и в случае необходимости другие параметры. Если она голоморфна по всем этим величинам, то то же самое будет справедливо для выражения (82) как функции от a и параметров. Этот факт можно считать практически очевидным. Его явный вывод прост благодаря предыдущим гипотезам и замечаниям.

Действительно, они показывают, что x являются голоморфными функциями (в $\mathfrak{R}$) от $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}, t$. Пусть K есть их якобиан

(записанный в таком виде, чтобы он был положителен, так что
$$dx^1 dx^2 \ldots dx^m = K\, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1} dt.$$
Рассматриваемая функция имеет вид
$$\iiint F(x^1, x^2, \ldots x^m)\, dx^1 dx^2 \ldots dx^m =$$
$$= \iint d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_{m-1} \int_0^c KF\, dt, \qquad (82')$$
причем интегрирование выполняется по η в действительной области (81) и по t от начала до значения c, которое соответствует точке a. Это можно записать так (полагая $t = \lambda c$):
$$c \iint d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1} \int_0^1 KF\, d\lambda, \qquad (82'')$$
причем интегрирование по λ нужно выполнить от 0 до 1. Нам достаточно заметить, что подынтегральное выражение является голоморфной и даже равномерно голоморфной [1]) функцией от η, λ и a. Его разложение в ряд по формуле Тейлора в некоторой точке a и для некоторой системы значений η и λ сходится равномерно по η и по λ. Поэтому можно интегрировать почленно, что дает искомое заключение: интеграл определен и голоморфен в $\mathfrak{R}$.

Если принять, что $F = \mathfrak{B} f$, то видно, что первый член $\iiint \mathfrak{F} f\, d\overline{T}$ формулы (29) или (29′) существует и является голоморфным в области $\mathfrak{R}$. Это заключение не меняется, если заменить формулы, о которых идет речь, соответствующими им формулами в инвариантной записи, которые, само собой разумеется, эквивалентны [2]) им. Эти формулы мы будем обозначать $(\overline{29})$, $(\overline{29}')$.

[1]) Функция, голоморфная в окрестности каждой точки непрерывной области (включая точки границы), является в ней равномерно голоморфной, т. е. ее разложение в ряд Тейлора допускает фиксированную мажоранту, в чем можно убедиться с помощью классического рассуждения, основывающегося на лемме Больцано — Вейерштрасса.

[2]) Эта эквивалентность, очевидная *априори* (поскольку все эти формулы должны представлять одно и то же единственное решение задачи Коши), вытекает:

1) из того, что при переходе от первых обозначений ко вторым элементы dT, $d\tau_\gamma$, dS, $d\sigma_\gamma$ умножаются на $\rho = 1/\sqrt{|\Delta|}$, в то время как V, $\mathfrak{B}$ делятся на тот же множитель, причем ν не меняет своего значения;

2) из того, что изменение, претерпеваемое производными $\frac{dV}{d\nu}$, $\frac{d\mathfrak{B}}{d\nu}$, компенсируется соответствующим изменением значения L. Использование инвариантных обозначений и уравнения в форме $(\overline{\mathrm{E}})$, которая придана ему в п. 168, имеет, в частности, то преимущество, что $\overline{L}$ просто принимает значение, равное $\Sigma \overline{B}^i \pi_i$.

Члены

$$\iint \left[\overline{\mathfrak{B}}\,(u_1 + \bar{L}u_0) - u_0\,\frac{d\overline{\mathfrak{B}}}{d\nu}\right] d\bar{S}$$

формулы $(\overline{29})$, относящиеся к S_0, очевидно, можно без труда рассмотреть аналогичным образом. То же самое относится к члену $\int_\sigma u_0 \overline{\mathfrak{B}}\,\frac{d\Gamma}{d\nu}\,d\bar{\sigma}_\gamma$ той же формулы.

175. Расчет остающихся членов (содержащих $\overline{V}$):

$$\frac{1}{(m_1-2)!}\left[\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\iint_\tau f\overline{V}\,d\bar{\tau}_\gamma\right]_{\gamma=0}, \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{1}{(m_1-2)!}\,\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}(\gamma=0)}\int_\sigma\left[\overline{V}\,(u_1 + \bar{L}u_0) - u_0\,\frac{d\overline{V}}{d\nu}\right]d\bar{\sigma}_\gamma, \qquad \text{(B)} \qquad (83)$$

$$\frac{1}{(m_1-2)!}\left[\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\int_\sigma u_0\overline{V}\,\frac{d\Gamma}{d\nu}\,\overline{d\sigma_\gamma}\right]_{\gamma=0}, \qquad \text{(C)}$$

которые входят в формулу (29), или, если исходить из уравнения $(\overline{29}')$, аналогичных членов

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{1}{(m_1-2)!}\,\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}{}_{\gamma=0}}\int_\sigma \overline{V}\,(u_1 + L\bar{u}_0)\,\overline{d\sigma_\gamma}, \qquad \text{(B}'\text{)} \qquad (83')$$

$$-\frac{1}{(m_1-2)!}\left[\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\,\frac{d}{d\nu}\int_{\sigma_{\gamma\nu}} \overline{V}u_0\overline{d\sigma_\gamma}\right]_{\gamma=0} \qquad \text{(C}'\text{)}$$

представляет собой трудность, подобную той, с которой мы встретились в п. 141 и которую мы преодолеем аналогичным способом. Эта трудность заключается в следующем. У величины γ, которую мы ввели как независимую переменную и по степеням которой мы разлагаем в ряд такие выражения, как интеграл I в п. 140, все частные производные в вершине a коноида равны нулю, так что замена переменных, с помощью которой вводится эта величина, будет неизбежно нерегулярной в этой окрестности.

Как и в п. 141, мы вначале рассмотрим x_i как функции от переменных a и ξ (п. 173), причем точка a является началом. Назовем величину

$$J_1 d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_m = \rho_a dx^1 dx^2 \ldots dx^m = d\overline{T}$$

элементом пространства (легко получаем, что

$$J_1 = \frac{\rho_x}{\rho_a}\,J = \sqrt{\frac{\Delta_a}{\Delta_x}}\,J, \qquad (84)$$

где $J = \frac{D(x)}{D(X)}$ является якобианом от x по нормальным переменным X).

Вместо переменных ξ можно ввести (по крайней мере в окрестности $\Gamma = 0$, которая нас только и интересует) те же угловые переменные $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}$, что и в п. 141, а также, как и там, величину

$$r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2}$$

или лучше, поскольку мы находимся в окрестности коноида, разность

$$\theta - r = \mu,$$

так что элемент объема $d\overline{T}$ запишется следующим образом:

$$J_1 (\theta - \mu)^{m-2} \, d\Omega_{m-2} \, d\theta \, d\mu,$$

где $d\Omega_{m-2}$, как и в п. 141, есть элемент сферической поверхности в $(m-1)$-мерном пространстве.

Величины x, являющиеся голоморфными функциями переменных a, ξ, будут также голоморфными функциями переменных

$$a^1, a^2, \ldots, a^m = c; \; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-2}; \; \theta, \mu, \tag{85}$$

из которых в дальнейшем будут использоваться $2m - 2$ первых [1]). Что касается двух оставшихся переменных, то мы собираемся подставить в качестве независимых переменных величины t и γ.

В зависимости от переменных (85) ξ будут иметь значения:

$$\xi_i = (\theta - \mu) e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1), \tag{86}$$

$$\xi_m = -\theta, \tag{86'}$$

где e_i зависят только от φ и представляют собой координаты (прямоугольные) текущей точки на поверхности гиперсферы единичного радиуса r в $(m-1)$-мерном пространстве. Как мы уже заметили в п. 141, каждая из этих величин e_i удовлетворяет соотношению

$$\int e_i \, d\Omega_{m-2} = 0. \tag{87}$$

[1]) Если рассматривать нормальные переменные ξ как прямоугольные координаты, то геометрическим местом точек, которые соответствуют постоянным значениям a и φ (следовательно, меняются только θ и μ), является полуплоскость или, вернее, (поскольку мы рассматриваем только точки «на волне» или «за волной» по отношению друг к другу) внутренняя часть обычного угла. В нашем пространстве (x, t) этот угол имеет вершину в точке a, а его сторонами, вообще говоря, криволинейными, являются бихарактеристика и геодезическая, конормальная к поверхностям S. Эта последняя сторона остается фиксированной при изменении величин φ.

Именно эти значения ξ_i мы должны подставить в формулы (76). Если вначале положить $\mu = 0$, то они определяют одну из бихарактеристик, исходящих из точки a. В частности, последнее из них в этом случае дает

$$c - t = \theta + \ldots (\quad)_2 + \ldots = T_0(\theta)$$

и, согласно геометрическим гипотезам п. 172, это уравнение разрешимо относительно θ во всей области. Если

$$\theta_0 = c - t + \ldots \tag{88}$$

есть полученная таким образом функция от t, то для постоянных a и φ и на любой дуге соответствующей бихарактеристики, проведенной из a до пересечения с начальной поверхностью S, обе величины θ_0 и $(c - t)$ представляют собой такие переменные, которые можно назвать эквивалентными в том смысле, что каждая из них является голоморфной и возрастающей функцией другой. Кроме того, они обращаются в нуль в одной и той же точке, а именно, в точке a, и являются в окрестности этой точки бесконечно малыми одного порядка.

Примем теперь, что μ отлично от нуля, но очень мало. Величины x разлагаются в ряд по степеням μ. В частности, будем иметь

$$c - t = T_0 + \mu T_1 + \ldots \tag{89}$$

и обратно

$$\theta = \theta_0 + \mu\theta_1 + \ldots \tag{90}$$

При этом мы учли то обстоятельство, которое следует из формы уравнений (76), что коэффициент T_1 при первой степени μ обращается в нуль в точке a и его, следовательно, можно записать, вынеся множитель θ; кроме того, можно считать, что коэффициент θ_1 при μ в формуле (90) содержит в качестве множителя величину $(c - t)$, или, что то же самое, величину θ_0.

176. Переменная γ имеет значение

$$\gamma = 2\mu\theta - \mu^2 = 2\mu(\theta_0 + \mu\theta_1 + \ldots) - \mu^2. \tag{91}$$

Мы воспользуемся этим уравнением, чтобы, наоборот, получить разложение в ряд величин μ по степеням γ. Но коэффициенты разложения — и именно здесь появляется нерегулярность, которая с необходимостью присутствует при нашей замене переменных,— будут содержать в знаменателе степени θ_0. Если мы сначала сведем предыдущее уравнение к виду

$$\gamma = 2\mu\theta_0 - \mu^2, \tag{92}$$

то мы увидим, что его можно рассматривать как соотношение между величинами

$$m = \frac{\mu}{\theta_0}, \qquad g = \frac{\gamma}{\theta_0^2}. \tag{93}$$

Оно дает для m степенной ряд по g с постоянными коэффициентами, который мы обозначим через m_0, так что в этом первом случае имеем

$$\mu = \theta_0 m_0(g) = \theta_0\left(\frac{g}{2} + \ldots\right). \tag{93'}$$

Если мы теперь произведем ту же самую замену переменных (93), но не в уравнении (92), а в уравнении (91), а именно:

$$\mu = m\theta_0,$$

то увидим, что m по-прежнему разлагается в ряд по целым степеням g. Точнее, полагая

$$m = m_0 + m'$$

и замечая, что, по определению, величина $2m_0 - m_0^2$ тождественно равна g, увидим, что m' выражается в виде ряда по степеням m_0:

$$m' = -m_0^2\theta_1 - m_0^3\theta_0\theta_2 - \ldots$$

и, следовательно, по степеням g. Все коэффициенты в нем содержат множителем θ_0, поскольку так обстоит дело для θ_1.

Величина μ таким образом разлагается в ряд по степеням γ, и это разложение, которое выводится из ряда по степеням g путем замены этой величины его значением (93), является законным при всех достаточно малых значений γ, пока θ_0 отлично от нуля, т. е. вне окрестности вершины коноида. Достаточно подставить полученное таким путем разложение в величины под знаком $\iint$ или $\int$ в формулах (83) и (83') и взять коэффициент при γ^{m_1-2} (или при γ^{m_1-1}) в окончательном разложении, которое выводится из него, чтобы найти голоморфный результат. Это заключение нужно дополнить исследованием в окрестности точки $\theta_0 = 0$, т. е. в окрестности вершины коноида.

177. Соотношение (91) позволяет нам заменить переменную θ переменной t, причем

$$d\theta = |\theta_0' + \mu\theta_1' + \ldots|\, dt.$$

Далее соотношение (92) дает возможность ввести переменную γ вместо μ, так что

$$d\mu = \frac{d\gamma}{2\left(\theta - \mu + \mu\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)} = \frac{d\gamma}{2(\theta_0 - \mu + 2\mu\theta_1 + 3\mu^2\theta_2 + \ldots)},$$

откуда для элемента $d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_m$ имеем

$$d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_m = \frac{(\theta-\mu)^{m-2}\,|\,\theta_0' + \mu\theta_1' + \ldots\,|\,d\Omega_{m-2}\,dt\,d\gamma}{2\left(\theta - \mu + \mu\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)}.$$

Элемент $\overline{d\tau_\gamma}$ выводится из этого выражения, если просто опустить множитель $d\gamma$ и учесть якобиан J_1, определенный формулой (84), так что (оставляя в стороне последний множитель) получаем

$$\frac{1}{J_1}\overline{d\tau_\gamma} = \frac{(\theta-\mu)^{m-2}\,|\,\theta_0' + \mu\theta_1' + \ldots\,|\,d\Omega_{m-2}\,dt}{2\left(\theta - \mu + \mu\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)}. \tag{94}$$

Такова величина, которую должны внести в первый из членов формулы (83). Ее нужно умножить на функцию от x, а именно:

$$F = J_1 f\overline{V}. \tag{95}$$

Мы разложим эту функцию в ряд по степеням μ:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \ldots,$$

причем коэффициенты F_0, F_1 зависят от t (так же, как и от переменных a и φ).

Коэффициент F_0 представляет собой в зависимости от t значение F вдоль бихарактеристики, соответствующей системе заданных постоянных значений a и φ.

Для начала положим, что φ постоянны, так что в члене, который мы вычисляем в данный момент, т. е. в первом члене формулы (83), единственной переменной, по которой ведется интегрирование, является θ_0, или, что то же самое, $(c - t)$. Мы должны вычислить однократный интеграл

$$\int \frac{F}{2}\,\frac{(\theta-\mu)^{m-2}\,|\,\theta_0' + \mu\theta_1' + \ldots\,|\,dt}{\theta - \mu + \mu\frac{\partial\theta}{\partial\mu}}, \tag{96}$$

который мы должны затем умножить на $d\Omega_{m-2}$ и проинтегрировать по φ. Прежде всего мы должны (ср. п. 141):

1) вначале взять интервал изменения t от 0 до $c - \varepsilon$, где через ε обозначена очень малая положительная константа;

2) разложить этот интеграл (или, если угодно, подынтегральное выражение) в ряд по степеням γ и взять коэффициент при γ^{m_1-2}, или, что то же самое, взять от него производную (m_1-2)-го порядка, разделить на $(m_1 - 2)!$ и положить $\gamma = 0$;

3) устремить в конце концов [1]) ε к 0.

---

[1]) Мы видим, что γ или μ при любых предположениях нужно рассматривать как бесконечно малые величины, даже по отношению к θ_0.

Имея в виду эту последнюю операцию, как и другие последующие расчеты, мы должны рассмотреть все члены, которые входят в разложение подынтегрального выражения, с точки зрения их общей степени (степени однородности) по отношению к двум переменным θ_0 (или, кроме того, $c - t$) и μ. Действительно, если в члене, который содержит множителем

$$\mu^h \theta_0^k = \theta_0^{h+k} m^h,$$

мы заменим μ величиной (93′), то увидим, что θ_0^{h+k} будет умножено на ряд по степеням g, начинающийся с члена, содержащего g^h и, следовательно, состоящий из членов, содержащих

$$g^{h'} \theta_0^{h+k} = \gamma^{h'} \theta_0^{h+k-2h'}.$$

Итак, не будет никаких членов, содержащих $\gamma^{h'}$, если

$$h' < h.$$

В противном случае коэффициент при $\gamma^{h'}$ будет содержать множителем

$$\theta_0^{h+k-2h'}.$$

Показатель степени при θ_0 может при известных условиях возрасти, если в соответствующем члене разложения величины m^h сам коэффициент при $g^{h'}$ содержит множителем θ_0. Эта возможность, несомненно, представится, если из разложения m^h мы вычтем разложение m_0^h и рассмотрим член остающейся части.

178. Рассмотрим вначале с этой точки зрения элемент коноида (94). Обратную величину знаменателя можно разложить по степеням μ/θ_0 или, что в данном случае более удобно, по степеням $\mu/(\theta - \mu)$, а именно:

$$\frac{1}{\theta - \mu + \mu \dfrac{\partial\theta}{\partial\mu}} =$$

$$= \frac{1}{\theta-\mu} - \frac{\mu}{(\theta-\mu)^2}\frac{\partial\theta}{\partial\mu} + \frac{1}{(\theta-\mu)^3}\cdot\left(\mu\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\theta-\mu} + R. \qquad (97)$$

В этом выражении каждый член имеет общую степень, по крайней мере равную -1, и в соответствии с замечанием, сделанным выше относительно выражения (90), весь член R имеет степень, большую или равную нулю.

Что касается числителя, то он содержит множитель $(\theta-\mu)^{m-2}$ и производную $|\,\theta_0' + \mu\theta_1' + \ldots\,|$, которая равна 1 в точке a при $\mu = 0$.

Произведение $f\overline{V d\tau_\gamma}$ имеет, таким образом, форму

$$F \,|\, \theta_0' + \mu\theta_1' + \ldots \,|\, \frac{d\Omega_{m-2}\, dt\, (\theta-\mu)^{m-2}}{2\left(\theta-\mu+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\, d\Omega_{m-2}\, dt\, [F_0 (\theta-\mu)^{m-3} + \ldots],$$

где члены, замененные многоточием, имеют общую степень, большую или равную $m-2$. Поэтому при тех же условиях получим следующее значение для коэффициента при dt в однократном интеграле (96):

$$\frac{1}{2} F_0 (\theta-\mu)^{m-3} + \ldots$$

Согласно тому, что было сказано, коэффициент при $(-\gamma)^{m_1-2}$ будет содержать множителем величину θ_0 по крайней мере в первой степени (поскольку $h+k \geqslant m-3 = 2m_1-3$, $h' = m_1-2$), а коэффициент при первой степени θ_0 однозначно дается членами, которые мы в явном виде записали в предыдущей формуле. Так как в величине $\theta-\mu = \sqrt{\theta^2-\gamma}$ можно, пренебрегая членами более высокого порядка, заменить θ на θ_0, то этот коэффициент будет равен

$$\frac{1}{2}\, \frac{\left(m_1-\frac{3}{2}\right)\left(m_1-\frac{5}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}}{(m_1-2)!}\, F_0 = (m_1-1)\, C_{m_1-1} F_0. \tag{98}$$

Здесь F_0 — значение величины (95) при $\mu=0$. Коэффициент при γ^{m_1-2} получается отсюда умножением на $(-1)^{m_1-2}$, так что множитель при F_0 в этом коэффициенте (ср. п. 144) есть коэффициент (28) и, следовательно, его нужно исключить.

Итак, в подынтегральном выражении (96) коэффициенты при степенях γ от нуля до m_1-2 ограничены по абсолютному значению и даже бесконечно малы порядка θ. Следовательно, в интеграле, взятом от 0 до ε, совокупность соответствующих членов будет по крайней мере порядка ε^2, что эквивалентно результату, найденному в п. 141.

В силу этого мы видим, что искомое значение получается, если взять 0 верхним пределом. Если заменить θ_0 его значением (88) в функции от t, то видно, что такой интеграл остается голоморфным для очень малого c и даже содержит c^2 множителем.

179. Расчет членов, относящихся к границе, будет проводиться совершенно подобным образом. Так как элемент $\overline{dS}$ по-прежнему выводится из элемента объема путем простого исключения множителя dt, значение $\overline{d\sigma_\gamma}$ получается из него путем исключения множителя $d\gamma$ или, если угодно, получается из значения для $\overline{d\tau_\gamma}$, которое следует из формулы (94), если опустить dt. Расчет, следовательно, совершенно такой же, как и предыдущий, с той лишь разницей, что не нужно интегрировать по t, а нужно положить $t = 0$ и что новое значение F будет равно

$$F = J_1\left[\overline{V}u_1 + u_0\left(\overline{L}\overline{V} - \frac{d\overline{V}}{d\nu}\right)\right], \tag{99}$$

если исходить из формулы $(\overline{29})$, и

$$J_1 f\overline{V}\,(u_1 + \overline{L}u_0), \tag{99'}$$

если исходить из формулы $(\overline{29}')$.

Итак, здесь в знаменатель не входит величина θ_0. Результат является голоморфным [1]) даже при $c = 0$ и содержит в качестве множителя c (а не c^2). Коэффициент при первом члене (т. е. при c) получается так же, как и ранее, т. е. дается формулой (98) при значении F, определяемом формулой (99) или (99′).

179′. Расчет членов, содержащих $\frac{d}{d\nu}$, сразу же выполняется, если взять формулу в виде $(\overline{29}')$. Достаточно представить себе, что расчет выполнен не только для поверхности S, но также для вспомогательной поверхности S_ν. Результат будет аналитической функцией не только от вышеупомянутых переменных, но также от ν, и, следовательно, дифференцирование по этой последней переменной не представляет никаких трудностей.

При особых предположениях, сделанных в п. 173 относительно выбора независимых переменных, вспомогательной поверхностью S_ν будет $t = \text{const}$.

180. Этот же самый факт можно проверить непосредственно, даже можно легко получить результат, исходя на этот раз из формулы $(\overline{29})$. Единственный член, который соответствует новым условиям, это последний член формулы (83), а именно:

$$\frac{1}{(m_1-2)!}\left[\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\int_\sigma u_0\overline{V}\,\frac{d\Gamma}{d\nu}\,\overline{d\sigma_\gamma}\right]_{\gamma=0}. \tag{C}$$

Величина, которую нужно умножить на $d\Omega_{m-2}$, равна

$$\Phi\frac{(\theta-\mu)^{m-2}\,|\,\theta_0' + \mu\theta_1' + \mu^2\theta_2' + \ldots\,|}{2\left(\theta-\mu+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)}\,\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu},$$

$$\Phi = J_1 u_0\overline{V} = \Phi\,(x;\,a).$$

---

[1]) Это обстоятельство очевидно *априори*. В противном случае, члены (B) в выражении (83) или (83′) были бы неограниченными в окрестности S, и задача Коши вообще не имела бы решения.

В множитель $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ в наинизшей степени (по-прежнему для x, близкого к a) входит разность $-2(c-t)$, т. е. в данном случае $-2c$, поскольку мы находимся на поверхности S. Следовательно, благодаря этому факту появляется новый множитель, обладающий минимальной степенью однородности, равной $m-2=2m_1-2$. Для h' нужно взять, наоборот, значение $h'=m_1-1$. Мы видим, что отрицательные степени величины c отсутствуют, но на этот раз будет член, не зависящий от c. Если учесть, что в формуле (C) в знаменатель (m_1-1)-й производной входит только факториал $(m_1-2)!$, то этот член с точностью до знака равен

$$\frac{\left(m_1-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}{(m_1-2)!}\Phi_0=(m_1-1)\,C_{m_1-1}\Phi_0. \qquad (98')$$

Здесь нужно ввести множитель $(-1)^{m_1-1}$, если задано новое значение h'. Но так как выражение, которое только что было получено для $\frac{d\Gamma}{d\nu}$, имеет знак —, то мы найдем в точности значение (98'), если, как и выше, мы исключим множитель $(-1)^{m_1}$.

Замечание. Все эти расчеты остаются справедливыми, если различные заданные величины (коэффициенты уравнения и данные Коши) не являются аналитическими, а предполагаются просто регулярными. Отсюда путем дифференцирования под знаками $\iiint$, $\iint$ или $\int$ можно также получить значение первых и вторых производных от u, если только коэффициенты уравнения и начальные данные имеют частные производные достаточно высокого порядка.

Более того, достаточно знать эти последние производные или иметь их приближенное значение, чтобы вычислить точные или приближенные значения u или его первых или вторых производных.

181. Можно отметить еще одно следствие предыдущих расчетов: они позволяют нам непосредственно убедиться в том, что решение, даваемое формулами $\overline{(29)}$ или $(\overline{29'})$ удовлетворяет на границе S данным Коши. В п. 145 мы установили этот факт при помощи общего приема, но при этом мы не смогли обойтись (ср. п. 117) без теоремы Коши — Ковалевской.

Теперь же нет никаких трудностей в отношении первой из формул. Среди членов, которые только что были вычислены, только один не обращается в нуль одновременно с c, а именно, (98') (предыдущий пункт), значение которого нужно взять при x, совпадающем с a, и проинтегрировать по φ, т. е. просто-напросто умножить на Ω_{m-2}, что дает

$$(m_1-1)\,C_{m_1-1}\Omega_{m-2}u_0, \qquad (100)$$

поскольку J_1 и $\overline{V}$ равны единице, когда точки x и a совпадают. Численный коэффициент точно равен выражению (28) с точностью до множителя $(-1)^{m_1}$, что уже было учтено. Итак, в каждой точке поверхности S имеем $u_a = u_0$, и первое условие Коши полностью выполняется.

В выражении для производной $\frac{\partial u}{\partial c}$ второй член (83) дает первую часть, не обращающуюся в нуль одновременно с c, а именно, коэффициент при c, определяемый по формулам (98), (99), который нужно умножить на Ω_{m-2}:

$$(m_1 - 1)\, C_{m_1-1}\Omega_{m-2}\left(u_1\overline{V} + u_0\overline{L}\overline{V} - u_0\frac{d\overline{V}}{d\nu}\right). \tag{100'}$$

Из этого выражения нужно исключить численный коэффициент при помощи формулы (28). Член, содержащий u_1, дает искомое значение рассматриваемой производной. Остается убедиться в том, что члены, содержащие u_0, и члены, которые мы нашли при дифференцировании формулы (83, C), взаимно уничтожаются.

Как и во всех аналогичных задачах, которые возникают, например, в теории потенциала, единственное затруднение вызывает дифференцирование этого последнего члена. Исходя из этого, необходимо вычислить в выражении

$$\Phi\frac{d\Gamma}{d\nu}\frac{|\theta_0' + \mu\theta_1' + \mu^2\theta_2' + \ldots|(\theta-\mu)^{m-2}}{2\left(\theta - \mu + \mu\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)} =$$

$$= J_1 u_0 \overline{V}\frac{d\Gamma}{d\nu}\frac{|\theta_0' + \mu\theta_1' + \ldots|(\theta-\mu)^{m-2}}{2\left(\theta - \mu + \mu\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)}, \tag{101}$$

которое входит в множитель при $d\Omega_{m-2}$ под знаком $\int$, члены степени однородности, равной 1. Для этого в каждом из разложений в ряд, которые содержит это выражение, нужно рассмотреть уже не первый член, появляющийся в расчетах в формуле (93'), а тот или те члены, степень которых (по-прежнему общая по θ_0 и μ) на единицу больше, чем у него.

Второй член Φ_1 разложения в ряд величины

$$\Phi = J_1 u_0 \overline{V} = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \ldots$$

не дает никакого вклада, и можно сразу положить для функции Φ

$$x' = a^1,\ x^2 = a^2,\ \ldots,\ x^{m-1} = a^{m-1}.$$

Заметим прежде всего, что переменная t должна принимать здесь значение, равное нулю. Переменные x^i при $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1$ можно заменить выражениями (76), где величины a^i

постоянны, а c переменно. Эти разложения мы можем свести к $a^i + X^i$, так как по-прежнему можно пренебречь членами, показатель однородности которых превышает единицу. По этой же самой причине при разложении величины Φ в ряд Тейлора по степеням $(x^i - a^i)$ можно ограничиться членами первого порядка: следовательно, разложение будет линейным по X^i, т. е. по ξ_i, а именно (приравнивая θ величине $c - t = c$):

$$\Phi = \Phi(x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, 0; a^1, a^2, \ldots, a^{m-1}, c) =$$
$$= \Phi(a^1, a^2, \ldots, a^{m-1}, 0; a^1, a^2, \ldots, a^{m-1}, c) + \sum{}' \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\right)_a \xi_i =$$
$$= \Phi_a + (\theta - \mu) \sum{}' \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\right)_a e_i = \Phi_a + (c - \mu) \sum{}' \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\right)_a e_i,$$

причем знак $\sum{}'$ означает суммирование по i, принимающему только значения $1, 2, \ldots, m - 1$.

Поскольку можно считать, что коэффициенты при e_i не зависят от φ, то интегрирование по этим переменным даст в результате нуль в силу формулы (87). Единственным членом, который здесь нужно добавить, является тот, который получается при непосредственном дифференцировании Φ по c. Если заменить $J_1\overline{V}$ на $\frac{\partial}{\partial c}(J_1\overline{V})$, то он будет равен (поскольку J_1 и $\overline{V}$ равны единице в точке a)

$$u_0\left(\frac{\partial J_1}{\partial c} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial c}\right) = u_0 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log|\Delta|}{\partial c} + \frac{\partial J}{\partial c} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial c}\right), \tag{102}$$

если по-прежнему не считать численных множителей (28).

182. Чтобы рассмотреть другие члены, входящие в величину (101), мы можем предположить, что переменные выбраны таким способом, при котором линейный элемент $\boldsymbol{H}$ принимает форму (79) п. 173. Мы не учитываем возражение, которое сформулировано в этом пункте, поскольку мы находимся в непосредственной окрестности начальной поверхности S. На основании формы уравнения (80) значение t запишется в виде

$$c - t = \theta - \frac{1}{4}\boldsymbol{H}'(X^1, X^2, \ldots, X^{m-1}) + \ldots,$$

где

$$\boldsymbol{H}'(X) = \boldsymbol{H}'(X^1, X^2, \ldots, X^{m-1}) = \sum_{i,k=1}^{m-1} \frac{\partial H_{ik}}{\partial t} X^i X^k = \sum{}' \frac{\partial H_{ik}}{\partial t} H^i H^k \tag{103}$$

(сумма $\sum{}'$ относится, как и выше, к значениям индексов, равным $1, 2, \ldots, m - 1$). Переходя к переменным ξ, получим

$$c - t = \theta - \frac{1}{4}\mathfrak{H}(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) + \ldots, \tag{104}$$

где все члены, замененные многоточием, имеют относительно θ, ξ степень выше второй, а форма

$$\sum' \mathfrak{H}_{ik}\xi_i\xi_k = \mathfrak{H}(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) = \boldsymbol{H}'(l_{11}\xi_1 + l_{12}\xi_2 + \ldots + l_{1,m-1}\xi_{m-1}, \ldots,$$
$$l_{m-1,1}\xi_1 + \ldots + l_{m-1,m-1}\xi_{m-1})$$

выводится из $\boldsymbol{H}'$ с помощью подстановки (78).

При этих условиях разложения (89)—(91) принимают соответственно вид

$$c - t = \theta - \frac{(\theta-\mu)^2}{4}\mathfrak{H}(e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}) + \ldots =$$
$$= \theta - \frac{(\theta-\mu)^2}{4}\mathfrak{H}(e) + \ldots, \qquad (89')$$
$$\theta = c - t + \frac{(c-t-\mu)^2}{4}\mathfrak{H}(e) + \ldots, \qquad (90')$$

так что

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= c - t + \frac{(c-t)^2}{4}\mathfrak{H}(e) + \ldots, \\ \theta_1 &= -\frac{\theta_0}{2}\mathfrak{H}(e) + \ldots, \\ \theta_2 &= \frac{1}{4}\mathfrak{H}(e) + \ldots, \\ \gamma &= 2\mu\left[\theta_0 + \left(\frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu\theta_0}{2}\right)\mathfrak{H}(e) + \ldots\right] - \mu^2. \end{aligned}\right\} \qquad (91')$$

Члены, замененные многоточием, по крайней мере, третьего порядка в (89′), (90′), четвертого порядка в (91′).

Для множителя при $^1/_2\Phi(d\Gamma/d\nu)(\theta - \mu)^{m-2}$ в формуле (101) получаем

$$\frac{|\theta_0' + \mu\theta_1' + \mu^2\theta_2' + \ldots|}{\theta - \mu + \mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\mu}} = \frac{1 + \dfrac{\theta-\mu}{2}\mathfrak{H}(e)}{(\theta-\mu)\left[1 - \dfrac{\mu}{2}\mathfrak{H}(e)\right]} =$$
$$= \frac{1}{\theta-\mu}\left[1 + \frac{\theta}{2}\mathfrak{H}(e) + \ldots\right] = \frac{1}{\theta-\mu}\left[1 + \frac{\theta_0}{2}\mathfrak{H}(e) + \ldots\right].$$

183. Величина $d\Gamma/d\nu = \partial\Gamma/\partial t$ вычисляется при помощи соотношения (ср. п. 58 кн. II).

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} = 2P_m = 2sp_m = 2s\left[p_{0m} + s\left(\frac{dp_m}{ds}\right)_0 + \ldots\right], \qquad (105)$$

в котором p_{0m}, согласно формуле (27) п. 55 кн. II, есть не что иное, как $\left(\dfrac{dt}{ds}\right)_0$ (так что $sp_{0m} = -\theta$), в то время как значение $\dfrac{dp_m}{ds}$ дается последним уравнением (L_2) того же самого пункта, а именно

$$\left(\frac{dp_m}{ds}\right)_0 = -\frac{1}{2}A'(p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0,m-1}), \qquad (106)$$

где через A' обозначена квадратичная форма

$$A'(p) = \sum{}' \frac{\partial A^{ik}}{\partial t} p_i p_k.$$

Представляется естественным отыскать соотношение между формой A' и формой H', записанной ранее. Мы знаем, что из соотношений

$$p_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}^i} \tag{107}$$

получается

$$\sum{}' A^{ik} p_i p_k = \sum{}' H_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k. \tag{108}$$

Я утверждаю, что при тех же самых условиях имеем

$$A'(p) = A'(p_1, \ldots, p_{m-1}) = -H'(\dot{x}). \tag{109}$$

Чтобы понять это, обозначим через δt дифференциал t и продифференцируем формулу (108), полагая величины $\dot{x}$ постоянными, причем величины p являются, вообще говоря, переменными, согласно формуле (107). Следовательно, правая часть в формуле (108) изменяется по двум причинам: из-за изменения p и из-за изменения коэффициентов A. Если учесть отдельно обе эти причины, то получим

$$\delta H(\dot{x}) = H'(\dot{x})\,\delta t = A'(p)\,\delta t + \sum{}' \frac{\partial A}{\partial p_i} \delta p_i =$$
$$= A'(p)\,\delta t + 2\sum{}' \dot{x}^i \delta p_i = A'(p)\,\delta t + 2\delta H,$$

что представляет собой именно соотношение (109).

Таким образом, если учесть формулы (86) и значения нормальных переменных X, то значение (105) величины $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ примет вид

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -2(\theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \ldots) + H'(X) =$$
$$= -2(\theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2) + (\theta - \mu)^2 \mathfrak{H}(e),$$

или, согласно (91′),

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -2c + \frac{(c-\mu)^2}{2} \mathfrak{H}(e) = -2c + \frac{(\theta-\mu)^2}{2} \mathfrak{H}(e)$$

с той точностью, которая нас интересует в данный момент, т. е. с точностью до величин третьего порядка относительно c, μ.

184. Наконец, коэффициент при Φ в выражении (101) равен (с той точностью, которая нас интересует)

$$\left[-2c + \frac{(\theta-\mu)^2}{2} \mathfrak{H}(e)\right] \frac{1 + \frac{\theta_0}{2}\mathfrak{H}(e)}{2(\theta-\mu)} (\theta-\mu)^{m-2}$$

или в более простом виде

$$-\left[c+\frac{c^2}{2}\mathfrak{H}(e)\right](\theta-\mu)^{m-3}+\frac{(\theta-\mu)^{m-1}}{4}\mathfrak{H}(e). \qquad (110)$$

С этой величиной мы, очевидно, обращаемся так же, как и с предыдущими. Однако в правой части выражения

$$\theta-\mu=\sqrt{\theta^2-\gamma}$$

мы должны заменить θ не на θ_0, а на выражение (90′), что дает

$$\theta^2-\gamma=\left[c+\frac{(c-\mu)^2}{4}\mathfrak{H}(e)\right]^2-\gamma=c^2-\gamma+\frac{c}{2}(c-\mu)^2\mathfrak{H}(e),$$

а это, так как множитель $(c-\mu)^2$ равен здесь $c^2-\gamma$ с точностью до членов более высокого порядка, приводится к виду

$$\theta^2-\gamma=(c^2-\gamma)\left[1+\frac{c}{2}\mathfrak{H}(e)\right]. \qquad (111)$$

Именно это выражение возводится в степень $(m-3)/2$ в первом члене формулы (110), в то время как во втором достаточно возвести $(c^2-\gamma)$ в степень $(m-1)/2$. Так как коэффициент при $(-\gamma)^{m_1-1}$ в выражении $(c^2-\gamma)^{(m-1)/2}$ равен, как мы уже сказали, C_{m_1-1}/c, а в выражении $(c^2-\gamma)^{(m-1)/2}$ равен $(m-1)\,C_{m_1-1}\cdot c$, то мы видим, заменяя

$$\left[1+\frac{c}{2}\mathfrak{H}(e)\right]^{\frac{m-3}{2}} \quad \text{на} \quad 1+\frac{m-3}{4}c\mathfrak{H}(e)$$

и

$$\left[1+\frac{c}{2}\mathfrak{H}(e)\right]^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{на} \quad 1+\frac{m-1}{2}c\mathfrak{H}(e),$$

что члены, содержащие $\mathfrak{H}(e)$, исчезают и что в множителе (110) коэффициент при $(-\gamma)^{m_1-1}$ равен $-C_{m_1-1}$ (следовательно, коэффициент при γ^{m_1-1} равен $(-1)^{m_1}C_{m_1-1}$) с точностью до членов второго порядка по c. Отсюда следует, что этот множитель не вносит никакого вклада в выражение для искомой производной $\frac{\partial u}{\partial c}$.

Итак, производная от последнего члена (83) приводится к выражению

$$\frac{\partial J}{\partial c}+\frac{\partial\overline{V}}{\partial c}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log|\Delta|}{\partial c},$$

полученному выше дифференцированием величины Φ из п. 180.

Этот расчет завершает вычисления, которые мы имели в виду. При $c=0$ в выражении (100′), которое появляется в результате дифференцирования второго члена (83), можно [1]) заменить $\frac{d\overline{V}}{d\nu}=$ $=\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}$ на $-\frac{\partial \overline{V}}{\partial c}$. Итак, мы видим, что члены, содержащие u_0, выпадают из выражения для $\frac{\partial u}{\partial c}$ и что выражение (29) п. 144 или эквивалентное выражение $(\overline{29})$, которым мы заменили прежнее в пп. 174, 175, удовлетворяет условиям Коши, если только обе функции $\overline{V}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$ являются регулярными, а первая из них в точке поверхности S при x, равном a, удовлетворяет двум соотношениям

$$\overline{V}=1, \qquad 2\frac{\partial \overline{V}}{\partial c}=-\frac{\partial J}{\partial c}-\frac{1}{2\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c}+\overline{L}. \tag{112}$$

185. Для того чтобы задача Коши могла иметь решение, необходимо, чтобы функция $\overline{V}$ действительно обладала этим двойным свойством, и мы знаем, что решение существует, если данные являются аналитическими. Но, кроме того, отсюда можно найти непосредственное доказательство независимо от теоремы Коши — Ковалевской.

Если точка x совпадает с вершиной коноида, то первое из соотношений (112) выполняется по определению.

Чтобы вычислить при этих же условиях частные производные первого порядка от функции $\overline{V}$, мы можем взять первый член $\overline{V}_0$ разложения ее в ряд, поскольку все другие члены содержат множителем Г, т. е. величину второго порядка. Ранее мы нашли [2]) (п. 169)

$$\overline{V}_0=\sqrt{\left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)_a \Big/ \left(\frac{\rho J}{s^{m-1}}\right)_x}\; e^{\frac{1}{2}\int_a^x \mathfrak{B}_1 dx^1+\ldots+\mathfrak{B}_m dx^m},$$

где J есть якобиан переменных x по параметрам λ, s книги II.

Это можно также записать в виде

$$\overline{V}_0=\sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_x}}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{D(x^1,x^2,\ldots,x^m)}{D(X^1,X^2,\ldots,X^m)}}}\, e^{\frac{1}{2}\int_a^x \mathfrak{B}_1 dx^1+\ldots+\mathfrak{B}_m dx^m}=$$

$$=\sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_x}}\,\frac{1}{\sqrt{J}}\, e^{\frac{1}{2}\int_a^x \mathfrak{B}_1 dx^1+\ldots+\mathfrak{B}_m dx^m},$$

[1]) Поскольку равенство $\overline{V}=1$ выполняется тождественно по $a^1,\ldots,a^{m-1}$, c при $x^i=a^i$, $t=c$, то то же самое будет справедливо и для $\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{V}}{\partial c}=0$.

[2]) Формула, написанная здесь, отличается от формулы (72) п. 169 знаком в показателе e в силу того, что наши рассуждения относятся к функции $\overline{V}_0$ (соответствующей сопряженному уравнению), а не к $\overline{U}_0$ (на этот раз мы не меняем местами переменные a и x).

как это можно видеть, образуя якобиан величин $X^i = s\dot{x}_0^i$ по переменным λ, s, который сводится к произведению s^{m-1} на правую часть соотношения (73) п. 169. Итак, произведение $\overline{V}_0\sqrt{J}$ (эквивалентное произведению $\overline{V}\sqrt{J}$), которое входит в предыдущее соотношение, имеет в вершине коноида (по-прежнему на основании того, что там $\overline{V}_0 = J = 1$) производную, в точности равную половине комбинации $2\frac{\partial\overline{V}}{\partial c} + \frac{\partial J}{\partial c}$, которая фигурирует во втором соотношении (112). С другой стороны, с точностью до членов более высокого порядка имеем

$$\overline{V}\sqrt{J} = \overline{V}_0\sqrt{J} = 1 + \sum\left[\frac{1}{2}\mathfrak{B}_i + \frac{1}{4}\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^i}(x^i - a^i)\right].$$

Нас интересует член, соответствующий $i = m$. Он дает искомый результат при условии, что здесь $\mathfrak{B}_m = \overline{B}^m$ и что $\overline{L}$ равно этому значению $\overline{B}^m$.

З а м е ч а н и е. В наших расчетах здесь не предполагается, что данные являются аналитическими. Они предполагаются только дифференцируемыми до некоторого порядка, который наши предыдущие рассуждения позволяют даже уточнить.

186. К настоящему моменту мы доказали существование и аналитичность решения u внутри произвольной части $\mathfrak{R}'$ области $\mathfrak{R}$, ограниченной так, что обратный полуконоид [1]) с вершиной в произвольной точке a, заключенной в $\mathfrak{R}'$, вместе с плоскостью $t = 0$ будет границей объема, внутреннего по отношению к области определения $\mathfrak{B}$. Например, этот объем лежит внутри области, где справедливы операции п. 62. От этого ограничения можно освободиться при помощи обычной процедуры аналитического продолжения.

Если ввести ограничение $|t| < T$, обозначая через T положительную постоянную, выбранную соответствующим образом, то заключение получается вследствие предположений относительно независимых переменных. В самом деле, эта постоянная может быть фиксированной во всей области $\mathfrak{R}$, так что $|t - c| \leqslant T$ влечет за собой (при $\Gamma > 0$) неравенство (п. 63)

$$|\Gamma| < \frac{1}{\alpha'}\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^2$$

и, следовательно, сходимость ряда для $\mathfrak{B}$.

Итак, поскольку значения u и $\partial u/\partial t$ при $t = 0$ нам заданы и поскольку они аналитичны, мы с уверенностью можем при помощи предыдущего вычислить значения этих величин для любого

---

[1]) Предполагается, что рассматриваемая часть полуконоида, исходящего из этой точки, целиком расположена внутри $\mathfrak{R}$, как об этом только что было сказано.

t, заключенного между 0 и T, причем значения, соответствующие $t = T$, снова голоморфны по $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ в окрестности произвольной точки плоскости $t = T$, заключенной в области $\mathfrak{R}$. Но эти аналитические значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ позволяют поставить новую задачу Коши, данные для которой берутся на плоскости $t = T$. Решение будет определяться из предыдущего и будет голоморфным по крайней мере до $t = 2T$ (по меньшей мере в части, содержащейся внутри $\mathfrak{R}$). Если продолжать решение тем же самым способом, то можно достичь любой плоскости $t = \text{const}$ (если она содержит точки области $\mathfrak{R}$).

187. Вышеприведенный результат и метод, использованный для его доказательства, напоминают, очевидно, аналогичное рассуждение из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующее заключение, а именно: *решения линейного дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами не могут иметь других особенностей, кроме тех, которые имеют сами коэффициенты.*

Одно из доказательств этой теоремы[1]) состоит как раз в следующем. Отмечается, что радиус сходимости ряда для какого-либо из рассматриваемых решений в окрестности произвольной точки (или, по крайней мере, нижнюю грань этого радиуса) можно получить, не зная, какое именно решение уравнения берется. Здесь также используется тот факт, что можно задать *априори* интервал значений t, на который можно распространить определение решения.

Такая аналогия может внушить мысль о том, что можно было бы получить тот же самый результат при помощи первоначальных методов, которые обыкновенно применяются к задаче Коши, т. е. при помощи классического рассуждения Коши — Ковалевской. Однако это было бы ошибкой. Иными словами, радиус сходимости разложения в ряд по t решения задачи Коши (относящейся к плоскости $t = \text{const}$), получаемый при помощи исчисления пределов, должен зависеть не только от разложения в ряд коэффициентов, но также от радиуса сходимости рядов (по другим переменным $x_1, x_2, \ldots$) для начальных данных u_0 и u_1. Действительно, если бы дело обстояло не так, то заключение было бы общим для гиперболических и эллиптических уравнений (первые имеют ту же мажоранту, что и последние при классическом методе расчета, который входит в доказательство основной теоремы Коши). Но это не так, что мы видим для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

[1]) См., например, J o r d a n, Cours d'analyse, t. III, 1887, n. 92, p. 108.

если рассмотреть самые простые примеры типа

$$u = \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} \quad \left(\text{действительная часть выражения } \frac{1}{1-x-iy}\right).$$

Значение u при $x = 0$ $\left(\text{а именно, } \frac{1}{1+y^2}\right)$, так же как и значение ее производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\left(\text{а именно, } \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}\right)$, является голоморфным для любого действительного y и тем не менее оба они имеют особенность при $x = 1$, $y = 0$.

Это, очевидно, другая форма, в которой проявляется парадокс, изученный в главе II книги I.

188. Мы доказали, что решение задачи Коши с аналитическими данными, несомненно, существует и является голоморфным в любой произвольной области $\mathfrak{R}$ (удовлетворяющей вышеприведенным условиям), в которой само элементарное решение существует и является аналитическим. А что можно сказать об этом последнем? Существует ли числитель элементарного решения и является ли он голоморфным, если: 1) сами коэффициенты уравнения голоморфны, а дискриминант формы A всегда отличен от нуля; 2) уравнения (29) п. 57 книги II могут быть разрешены однозначно, а их якобиан отличен от нуля; следовательно, две точки a и x могут быть соединены вполне определенной геодезической, расположенной в $\mathfrak{R}$ и изменяющейся непрерывно в зависимости от координат этих точек?

Во-первых, можно заметить, что эти гипотезы являются достаточными для построения каждого из последовательных коэффициентов U_h в расчетах п. 62 книги II. Более того, не представляет никакого труда показать, что эти функции будут голоморфны в области $\mathfrak{R}$ (что, впрочем, станет очевидным далее).

Сама функция U получается из коэффициентов U_h при помощи ряда

$$U = U_0 + U_1\Gamma + \ldots + U_h\Gamma^h + \ldots$$

Мы увидим, что этот ряд сходится не только вблизи точки a, что мы видели в книге II, но также в любой точке области (γ) такой, что Γ достаточно мало, т. е. в окрестности характеристического коноида (или, точнее, в части коноида, которая содержится в $\mathfrak{R}$).

Для этой цели, т. е. для того, чтобы получить верхние грани для $|U_h|$, мы воспользуемся «исчислением пределов» из п. 63, применяя его не только к рядам в окрестности точки a, но также к рядам в окрестности любой точки внутри $\mathfrak{R}$.

Как и в п. 63, возьмем нормальные переменные, относящиеся к a (так что геодезические, исходящие из этой точки, будут представлены прямыми линиями), причем сумма абсолютных значений этих переменных будет по-прежнему обозначаться через σ. Произведем замену неизвестной функции так, чтобы первый член U_0 ряда был равен

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}} \ (\text{или } \bar{U}_0 = 1).$$

Более того, только для упрощения обозначений [1]) можно допустить, что замена переменных такова, что одна из осей, а именно, ось x_m проходит через точку x', в окрестности которой можно исследовать разложение в ряд Тейлора. Переменную x_m заменим на y, значение ее в точке x' будет обозначаться через y', и нужно рассмотреть ряды по степеням $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ и $y - y' = Y$. Для любого коэффициента A уравнения этот ряд будет равен

$$A = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m} A_{k_1, \ldots k_m}(y')\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_{m-1}^{k_{m-1}} Y^{k_m}. \tag{113}$$

Предполагая, что все величины A голоморфны и, следовательно, равномерно голоморфны в области $\mathfrak{R}$, можно допустить, что все ряды (113) имеют общую мажоранту такую же, как и в п. 63 (с той разницей, что σ заменяется на $\sigma' = |x_1| + \ldots + |x_{m-1}| + |Y|$):

$$A < \frac{a}{1 - \frac{\sigma'}{r}}.$$

Эту мажоранту можно считать не зависящей от положения точки x и, следовательно, от координаты y' (которая определяет положение точки x' на оси y), а также от поворота осей. Отсюда выводится, как и в п. 63, что если

$$\frac{K_h}{\left(1 - \frac{\sigma'}{r}\right)^{2h}}$$

есть мажоранта ряда для U_h в окрестности точки x' (предполагается, что эта мажоранта не зависит от y'), то разложение $\mathfrak{F}(U_h)$,

[1]) Легко повторить рассуждение, данное в тексте, не используя этот особый выбор осей. Разложим функции в окрестности точки

$$(x_1', x_2', \ldots, x_m'),$$

полагая

$$x_i = x_i' + X_i.$$

Коэффициенты правых частей уравнений (113) и (114) (разложенные в ряд по степеням X) будут тогда функциями $x_1', \ldots, x_m'$, причем эти последние заменяются на $sx_1', \ldots, sx_m'$ в подынтегральном выражении (115); величина σ' будет равна

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m|.$$

а именно (коэффициенты по-прежнему являются функциями y'):

$$\mathfrak{F}(U_h)=\Psi^{(h)}=\sum \psi^{(k)}_{k_1 k_2 \ldots k_m}(y')\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_{m-1}^{k_{m-1}} Y^{k_m} \tag{114}$$

имеет мажоранту

$$\frac{2h(2h+1)\alpha' K_h}{\left(1-\frac{\sigma'}{r}\right)^{2h+3}}. \tag{114'}$$

Затем нужно написать интегралы (44′) из п. 62 (для $U_0 = \mathrm{const}$). Линия интегрирования представляет собой прямую линию, соединяющую начало координат с точкой $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y' + Y)$, так что можно представить координаты произвольной точки этой линии в виде $sx_1, sx_2, \ldots, s(y' + Y)$, где параметр s изменяется от нуля до конечного значения, равного 1. Величина s есть в точности переменная интегрирования этого уравнения (44′). Для каждого значения s величина (115) разлагается в ряд по формуле Тейлора, начиная от начальной точки $(0, 0, \ldots, 0, sy')$, т. е. в формуле (114) надо заменить $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y', Y$ на $sx_1, sx_2, \ldots, sx_{m-1}, sy', sY$. Интегрируя по s, находим искомое разложение для U_{h+1}, а именно:

$$U_{h+1} = \\ = -\frac{\sum\limits_{k_1, k_2, \ldots, k_m} \int_0^1 s^{h+k_1+\ldots+k_m} \psi^{(h)}_{k_1 \ldots k_m}(sy')\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_{m-1}^{k_{m-1}} Y^{k_m}\, ds}{4(p+h+1)}. \tag{115}$$

Мажоранту для этого выражения получим, если заменим каждый коэффициент $\Psi^{(h)}$ соответствующим значением (114′). Так как это последнее не зависит от y' и может быть вынесено за знак $\int$, то, в конце концов получим ту же самую мажоранту, что и в п. 63 (с той разницей, что нужно заменить σ на σ'). Видно, что ряд для U сходится, когда

$$|\Gamma| < \frac{1}{\alpha'}\left(1-\frac{\sigma'}{r}\right)^2,$$

Это неравенство имеет форму, совершенно не зависящую от нашего поворота осей [1]). Если заменить σ' большей величиной $\sqrt{m}D$, где через D обозначено расстояние между x и x', то нужно взять на самом коноиде точку x' и заставить ее занимать последовательно все возможные положения на этом коноиде. При этих условиях точка x, которая связана с ней так, что $\sqrt{m}D < {}^1/_2 r$, может занять любое положение такое, что Γ будет меньше подходящим образом выбранной положительной константы γ' (по-

[1]) Мы здесь ограничиваемся действительной областью.

скольку все действительные точки, заключенные между двумя гиперповерхностями второго порядка $\Gamma=\gamma'$ и $\Gamma=-\gamma'$ в конечной области $\mathfrak{R}$, находятся от коноида на расстоянии, меньшем $^1/_2 r$, если γ' достаточно мало).

Следовательно, функция U, несомненно, существует и будет голоморфной всегда, когда Γ меньше, чем γ, обозначая так меньшее из двух чисел γ' и $1/4\alpha'$. Заметим, что эта область существования не является очень малой ни в одном из направлений. На точку x не налагается требование, чтобы она была близкой к точке a. Единственное требование заключается в следующем. Она должна быть близка к тому, чтобы быть «на волне» вместе с ней.

189. Если мы теперь объединим вышеприведенный результат с результатами, полученными при помощи метода, изложенного ранее, то можно распространить определение функции U на любую часть области $\mathfrak{R}$ (последняя при этом по-прежнему удовлетворяет тем же самым гипотезам), которая находится внутри коноида, например, внутри его прямой полости. Точнее, можно достичь любой точки x такой, что плоскость $t = \text{const}$, проходящая через эту точку (t имеет то же значение, что и выше), ограничивает вместе с Γ объем, целиком заключенный внутри $\mathfrak{R}$.

Для этого обозначим через T положительное число такое, что расчеты п. 63 определяют U всякий раз, когда, с одной стороны, $\Gamma(x; a) \geqslant 0$ и, с другой, разность $|t-c|$ значений t, относящихся к x и к a, меньше, чем T. Заметим, что если, начиная с какой-то точки x' внутри Γ, провести обратный полуконоид такой, что $\Gamma > \gamma/2$, и если пересечь его плоскостью $t = t' - T$, то полученный таким образом объем будет целиком внутри коноида, если положительное число T достаточно мало [1]). Допустим, что так оно и есть, и допустим также, что оно меньше чисел, обозначенных той же самой буквой в п. 186.

При $0 \leqslant t \leqslant T$ (и $\Gamma \geqslant 0$, что неявно предполагается в вышеприведенном рассуждении) функция U определяется, как и в п. 63, и является голоморфной.

При $T \leqslant t \leqslant 2T$ могут представиться два случая. Либо обратный полуконоид, исходящий из точки x, пересекает плоскость $t = T$ целиком внутри Γ. Тогда u и $\partial u/\partial t$ известны в любой части S_0 плоскости $t = T$, полученной таким образом. И, следовательно, значение u_x дается обычными формулами для решения задачи Коши, причем эта величина является голоморфной, как об этом

[1]) Если допустить, что Γ равно $t^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots$, то условие, которое нужно наложить на T, будет таково:

$$T < \gamma/\left[4 \max\left(t + \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2}\right)\right].$$

уже было сказано [1]). Либо обратные бихарактеристики, исходящие из точки x, пересекут Γ, прежде чем встретят плоскость $t = T$. Но по определению величины T, это может произойти, если только в точке x выполняется $\Gamma < \gamma/2$, и тогда значение U_x определяется расчетами предыдущего пункта и является голоморфным. Более того, эти определения одновременно справедливы в некоторой области ($\gamma/2 < \Gamma < \gamma$) и оба совпадают с аналитическим продолжением уже найденных значений u. Итак, внутри Γ во всей области, соответствующей $0 \leqslant t \leqslant 2T$, существует единственная аналитическая функция.

Очевидно, что можно применить те же самые операции при $2T \leqslant t \leqslant 3T$ и т. д. Таким образом, мы полностью доказали наше заключение. Функция U является голоморфной по x и в силу тех же самых причин, что в выше, по a в любой области, общей для $\mathfrak{R}$ и для внутренней части коноида (включая даже окрестность поверхности этого коноида).

190. Метод для определения u, так же как и для определения U, состоял в том, что эти величины рассчитывались для удаленных точек (или «событий», как их можно назвать), при помощи промежуточных точек, взятых достаточно близко. Следовательно, можно сказать, что это — иллюстрация того, что мы назвали принципом Гюйгенса в широком смысле этого слова.

Полное изучение следствий из этого принципа (для чего, однако, необходимо более трудоемкое исследование [2])) дает нам новое обобщение наших результатов. Можно даже отметить такой удивительный факт: условие, что две произвольные точки x и a области $\mathfrak{R}$ могут быть соединены только одной геодезической, кажущееся фундаментальным, *не является* необходимым.

Мы пока что удовлетворимся тем, что отметим один пункт. Не предполагая, что область $\mathfrak{R}$ удовлетворяет рассматриваемым условиям, предположим тем не менее (для m четного), что функции V и $\mathfrak{V}$ существуют и что они аналитичны в $\mathfrak{R}$. В этом случае, даже если точка a выбрана на таком расстоянии от S, что в области, заключенной между Γ и S, решение первой системы уравнений (29) п. 57 перестает быть однозначным (якобиан (30) этого пункта, например, обращается в нуль в этой области и даже на S_0), *но все интегралы правых частей формул* (29) *или* (29′) п. 145 *все еще могут быть определены*. Единственное условие, необходимое для этого, заключается в том, чтобы каждая геодезическая,

---

[1]) Мы написали неравенства так, чтобы S_0 всегда было *строго* внутри Γ в первом случае, на основании чего не только U, но также и u с необходимостью голоморфны на S_0.

[2]) Мы возвращались к этому вопросу в нескольких последующих работах: Bulletin de la Société Mathématique de France, p. 241, t. LII (1924); Acta Math., v. XLIX, p. 203; Journal de Mathématiques, t. VIII, p. 197 (1929); Congrès des Mathématiciens slaves, Varsovie (1929); Acta Math., v. LIV, p. 247.

исходящая из точки a, лежащей внутри коноида или на нем, всегда пересекала S в определенной точке под конечным углом.

Действительно, для того чтобы определить рассматриваемые интегралы, достаточно выразить их через нормальные переменные ξ, соответствующие точке a. Ясно, что при наших новых гипотезах каждый из интегралов в п. 174, с одной стороны, и в пп. 177—180, с другой, по-прежнему будет существовать (x_i являются голоморфными функциями от ξ, причем мы не исследуем, выполнено ли обратное) и может быть голоморфной функцией от a.

Полная величина (29) или (29′), которая выводится из них, является голоморфной функцией от a. В подобласти $\mathfrak{R}_0$, где ξ являются однородными функциями x и a, как показано предыдущими расчетами, эта величина удовлетворяет уравнению (E). Но значения той же самой величины вне $\mathfrak{R}_0$ (хотя и лежащие внутри $\mathfrak{R}$) являются аналитическим продолжением значений, внутренних для $\mathfrak{R}_0$. Следовательно, *они также удовлетворяют* (E) и представляют собой решение задачи.

191. Неаналитический случай. Предположим теперь, что коэффициенты не являются аналитическими. Однако мы будем предполагать, что они регулярны, т. е. что они имеют производные по x до некоторого достаточно высокого порядка. Действительно, благодаря свойствам решений Тедоне (книга III), известно, что такая гипотеза связана с природой вещей. Как об этом говорилось в книге I, мы не будем точно определять требуемый порядок дифференцируемости. Для нас достаточно уверенности в том, что такой порядок существует для любого значения m.

Возьмем четное $m = 2m_1$. Пусть по-прежнему задано уравнение

$$\mathfrak{F}(u) = \sum A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f \tag{E}$$

и пусть

$$\mathfrak{G}(v) = 0 \tag{$\mathfrak{G}$}$$

является сопряженным к нему уравнением. Как и ранее, рассмотрим одновременно уравнение с $(2m_1 + 1)$ переменными:

$$\mathfrak{F}'(u) = \mathfrak{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f. \tag{E′}$$

Уравнение, сопряженное к нему таково:

$$\mathfrak{G}'(v) = \mathfrak{G}(v) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \tag{$\mathfrak{G}'$}$$

Предполагается, что коэффициенты имеют частные производные до некоторого порядка, что можно выразить, сказав, что до бесконечно малых этого порядка они совпадают с аналитическими функциями. Для нас, очевидно, достаточно существование производных до некоторого порядка, чтобы выполнить первую часть расчетов, т. е. построение величины Г. А существование частных производных вплоть до определенного порядка от коэффициентов влечет за собой существование частных производных от этой величины Г вплоть до некоторого соответствующего порядка (см. дополнительное замечание к книге II).

Построим теперь последовательные величины V_h (или V'_h) так, как было изложено в книге II. Хотя мы не можем продолжить их последовательность до бесконечности, мы можем, очевидно, вычислить некоторое число этих величин V_h. Это число тем больше, чем больше существует производных от коэффициентов (и, следовательно, от Г).

Предположим, что этот расчет возможен до членов $(m_1 - 1)$-го порядка по Г или по

$$\Gamma' = \Gamma - (z - c)^2$$

(как отмечено в книге II, операции, относящиеся к обоим случаям, одни и те же с точностью до численных коэффициентов), так что для уравнения ($\mathfrak{E}'$) справедливо разложение

$$[v'] = \frac{1}{\Gamma'^{m_1 - \frac{1}{2}}} \sum_{h=0}^{m_1-1} V'_h \Gamma'^h.$$

Оно тождественно с разложением для v', приведенным в п. 62 книги II, с той разницей, что оно ограничено. Соответствующие члены, относящиеся к ($\mathfrak{E}$), включают в себя:

1) величину V, в отношении которой предыдущие расчеты книги II (или п. 135 настоящей книги) не требуют никаких видоизменений:

$$V = C_{m_1-1} \sum_{h=0}^{m_1-2} \frac{1}{C_{m_1-h+1}} V'_h \Gamma^h;$$

2) первый член $\mathfrak{V}_{(0)}$ разложения в ряд величины, которую мы ранее обозначали $\mathfrak{V}$.

Величина $[v']$ не будет решением сопряженного уравнения ($\mathfrak{E}'$), однако расчеты книги II показывают, что

$$\mathfrak{G}'([v']) = (-1)^{m_1} \Omega_{m-2} \frac{\psi}{\sqrt{\Gamma'}} \tag{116}$$

где ψ — конечная величина[1]), непрерывная и даже дифференцируемая, если допускается существование производных от коэффициентов. Более того, эта величина ψ не зависит от z. Коэффициент $(-1)^{m_1}\Omega_{m-2}$, введенный для упрощения последующих рас-

[1]) $(-1)^{m_1} \Omega_{m-2}\psi = 2\mathfrak{G}(V'_{m_1-1})$.

четов, тот же самый, что и коэффициент при первом члене в формуле (7) (п. 135) с точностью до множителя π.

192. Рассмотрим теперь задачу с точки зрения Гильберта, т. е. выясним, можно ли разрешить задачу Коши, не имея в своем распоряжении истинного элементарного решения, а обладая только величиной $[v']$ — неполным элементарным решением, или «параметриксом» в смысле Гильберта. Следовательно, мы заново рассмотрим задачу Коши для уравнения (E) и одновременно эквивалентную задачу, соответствующую (E′). Для этого последнего мы заново выпишем основную формулу, в которой на этот раз v' заменим на параметрикс $[v']$, полученный выше.

Изменение, которое нужно внести в формулу, очевидно. Оно состоит в том, чтобы учесть значение (116), добавив дополнительный объемный интеграл:

$$\iiiint \frac{u\mathfrak{G}([v'])}{\sqrt{\Gamma}}\,dx_1dx_2\ldots dx_m dz =$$
$$= (-)^{m_1}\Omega_{m-2}\iiiint \frac{u\psi}{\sqrt{\Gamma'}}\,dx_1\ldots dx_m dz$$

(здесь не нужно использовать символ $\overline{|}$).

Используем тот же самый процесс, что и ранее, для того, чтобы перейти к $2m_1$-мерному пространству. Так как

$$\int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} \frac{dz}{\sqrt{\Gamma'}} = \int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} \frac{dz}{\sqrt{\Gamma - z^2}} = \pi,$$

то получаем

$$u = H + \iiint_{(a)} u\psi\,dx_1dx_2\ldots dx_m, \tag{117}$$

где для большей простоты через H обозначена величина, определяемая выражением

$$\begin{aligned}\frac{2(-1)^{m_1}\pi^{m_1-1}}{(m_1-2)!}H_a = &-\iiint_{(a)} \mathfrak{B}_{(0)}f\,dx_1\ldots dx_m - \\ &- \iint_{S_0} \mathfrak{B}_{(0)}(u_1 + Lu_0)\,dS + \\ &+ \frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\left[\iiint_2 fV\,dx_1\ldots dx_m + \iint_2 V(u_1+Lu_0)\,dS\right] - \\ &- \frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d}{d\nu}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\iint_2 u_0V\,dS + \frac{d}{d\nu}\iint_{S_\gamma} u_0\mathfrak{B}_{(0)}dS,\end{aligned} \tag{118}$$

т. е. формулой (29″) (которая здесь предпочтительнее, чем (29)), за исключением того, что $\mathfrak{B}$ заменено своим первым членом $\mathfrak{B}_{(0)}$.

В обеих вышеприведенных формулах предполагается, что точки a, x находятся с одной и той же стороны S, которую мы назовем «положительной», а знак (a), используемый, например, в качестве индекса у символа $\iiint$, представляет собой область, ранее обозначавшуюся через T, а именно: область с положительной стороны S, заключенную в обратном полуконоиде, исходящем из точки a.

193. Мы должны определить u при помощи уравнения (117). Оно, очевидно, принадлежит к хорошо известному типу интегральных уравнений второго рода. Ядро — а именно, ψ — является конечным, так что решение получается без труда при помощи классических методов [1]). В этом случае мы даже имеем дело с уравнением типа Вольтерра. Это следует из того обстоятельства, каким именно образом область интегрирования зависит от точки $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и как она стремится к нулю, когда эта точка приближается к S. Уравнение можно решить с помощью первоначального метода Лиувилля, не прибегая к алгоритму Фредгольма.

Искомая величина u дается последовательными приближениями

$$\begin{aligned}
&u^{(0)} = H,\\
&u_a^{(1)} = H_a + \iiint_{(a)} u_x^{(0)}\psi(x; a)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m,\\
&u_a^{(2)} = H_a + \iiint_{(a)} u_x^{(1)}\psi(x; a)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m, \qquad (119)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_a^{(n)} = H_a + \iiint_{(a)} u_x^{(n-1)}\psi(x; a)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m,
\end{aligned}$$

где u равно $\lim\limits_{n\to\infty} u^{(n)}$.

По только что указанной причине эти приближения будут сходиться таким же образом, как и в случае Вольтерра, т. е. при всех возможных положениях точек a и x («на волне» или «за волной» одна по отношению к другой) внутри $\mathfrak{R}$. Нет никаких ограничений на расстояние между этими двумя точками (в противоположность тому, что, вообще говоря, получается для уравнения с фиксированными границами).

Выберем координату t, рассматривая однопараметрическое семейство поверхностей S_t, так что S_0 совпадает с заданной по-

[1]) См. B ô c h e r, Introduction to the study of integral equations, § 5. Cambr. Univ. Press, 1909; F r é c h e t et H e y w o o d, L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. Paris, Hermann, pp. 35—42, 1912; L a l e s c o, Introduction à la théorie des équations integrales, Paris, Hermann, 1912, chap. 1.

верхностью S и, более того, каждая поверхность S_t является поверхностью пространственного типа и пересекает каждый характеристический коноид по замкнутому ребру. На любой такой поверхности S_t возьмем в качестве элемента dS_t частное от деления элемента объема m-мерного пространства на dt, так что

$$dS_t dt = dT = dx_1 dx_2 \ldots dx_m.$$

Далее обозначим через K_1 максимум $(m - 1)$-кратного интеграла $\iint |\psi(x; a)|\, dS_t$, распространенного по сечению обратного полуконоида произвольной поверхностью S_t (вершина коноида лежит в произвольной точке a внутри $\mathfrak{R}$). Тогда, если задана функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$, абсолютное значение которой на каждой поверхности S_t меньше чем $\Phi(t)$, то абсолютное значение интеграла

$$\iiint_T \varphi(x)\, \psi(x; a)\, dx_1 \ldots dx_m,$$

распространенного по обратному полуконоиду с вершиной в точке a (ограниченному поверхностью S), имеет верхнюю грань

$$\left| \iiint_T \varphi(x)\, \psi(x; a)\, dx_1 \ldots dx_m \right| < K_1 \int_0^c \Phi(t)\, dt, \tag{120}$$

где c обозначает значение t в точке a.

Это неравенство дает требуемую сходимость точно так же, как в исследованиях Вольтерра и в классическом методе Пикара для обыкновенного дифференциального уравнения. Поскольку разность $W^{(n)} = u^{(n)} - u^{(n-1)}$ между двумя последовательными приближениями удовлетворяет соотношению

$$W_a^{(n)} = \iiint \psi(x;\ a)\, W_x^{(n-1)} dT_x, \tag{119'}$$

начиная с $n = 1$, причем

$$W^{(0)} = u^{(0)} = H, \tag{119''}$$

то неравенство (120) показывает, что если

$$|u^{(0)}| = |H| < H_1,$$

где H_1 — положительная постоянная, то

$$|W_a^{(n)}| = |u_a^{(n)} - u_a^{(n-1)}| < H_1 \frac{(K_1 C)^n}{n!}, \tag{120'}$$

что представляет собой общий член сходящегося ряда.

Как следует из суммирования этого ряда $u_0 + \sum_1^{\infty}(u^{(n)} - u^{(n-1)})$ и что хорошо известно из теории интегральных уравнений, решение u, полученное в окончательном виде, имеет форму

$$u_a = H_a - \iiint_{(a)} \Psi(x; a) H_x dT_x, \tag{121}$$

где dT_x есть сокращенная запись члена $dx_1 dx_2 \ldots dx_m$ и где

$$\Psi(x; a) = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_m; a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

есть определенная функция x и a, называемая *резольвентой* [1]) рассматриваемого интегрального уравнения, значение которой зависит от выражения для ψ.

194. Посмотрим теперь, как зависит это решение от самих данных, а не от формы H. Начнем с членов, содержащих f. В выражении для H первый член равен

$$\iiint \mathfrak{B}_{(0)}(x; a) f(x)\, dT_x, \tag{122}$$

---

[1]) Расчет величины Ψ с помощью ψ производится обычным методом теории интегральных уравнений (см. цитированные в предыдущем примечании работы). После расчета двух первых приближений $u^{(0)}$ и $u^{(1)}$ находим, что третье приближение $u^{(2)}$ выражается через $u^{(1)}$. Чтобы получить последнее в зависимости от $u^{(0)} = H$, заменим само $u^{(1)}$ его выражением. Действуя так, как объяснено в тексте, мы видим, что

$$u_a^{(2)} = H_a + \iiint_{(a)} [\psi_1(x; a) + \psi_2(x; a)] H_x dT_x,$$

где $\psi_1 = \psi$ и где ψ_2 представляется в виде интеграла по области, которую мы обозначим (a) (x) (см. далее текст), а именно:

$$\psi_2(x; a) = \iiint_{(a)(x)} \psi(x; a')\, \psi(a'; a)\, dT_{a'}.$$

Продолжая подобным же образом, мы видим, что $u_a = \lim\limits_{n \to \infty} u_a^{(n)}$ представляется в виде (121), причем

$$-\Psi(x; a) = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n + \ldots$$

Члены ψ_n являются «итерированными ядрами», так что $\psi_1 = \psi$ и

$$\psi_n(x; a) = \iiint_{(a)(x)} \psi_{n-1}(x; a')\, \psi(a'; a)\, dT_{a'}.$$

Этот ряд, дающий величину $(-\Psi)$, соответствует ряду (5) Бохера (B ô c h e r) (цит. соч., § 6), ряду (8) на стр. 38 работы Фреше (F r é c h e t) и Хейвуда (H e y w o o d). Он сходится вследствие тех же самых причин, что и ряд для u.

где $\mathfrak{B}_{(0)}$ есть функция одновременно от x и от a. Подставляя эту величину в (121) и беря там, где это необходимо, в качестве переменных интегрирования a' вместо x, получаем

$$\iiint \mathfrak{B}_{(0)} f(x)\, dT_x - \iiint \Psi(a'; a) \iiint \mathfrak{B}_{(0)}(x; a') f(x)\, dT_x dT_{a'}.$$

Второй член есть ($2m = 4m_1$)-кратный интеграл, который берется по совокупности положений двух точек a' и x таких, что:

1) точка a' находится между S и обратным полуконоидом с вершиной в точке a;

2) точка x в свою очередь находится между S и обратным полуконоидом с вершиной в точке a'.

Можно поменять местами порядок интегрирования, т. е. можно интегрировать, оставляя x фиксированным и изменяя a'. Поскольку f является множителем, то это дает для другого сомножителя величину

$$\mathfrak{B}_{(1)}(x; a) = \iiint_{(a)(x)} \Psi(a'; a)\, \mathfrak{B}_{(0)}(x; a')\, dT_{a'}. \qquad (123)$$

Область изменения a', которая обозначена символом $(a)(x)$ (заштрихованная часть на рис. 44) и по которой распространено интегрирование в этой формуле, заключена между обратным полуконоидом с вершиной в точке a, который мы рассматривали, и прямым полуконоидом (полость коноида, обращенная в противоположную от S сторону) с вершиной в точке x. Итак, рассматриваемый член равен

$$\iiint_{(a)} \mathfrak{B}_{(1)}(x; a) f(x)\, dT_x. \qquad (122')$$

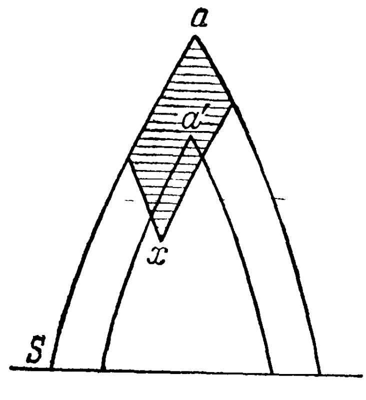

Рис. 44.

Возьмем теперь другой член, содержащий f в выражении для H, а именно:

$$\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}} \iiint_{(a)_2} Vf\, dT_x, \qquad (124)$$

причем интеграл $\iiint$ распространен по всему пространству $(a)_2$, заключенному с положительной стороны S между обратным полуконоидом с вершиной в точке a и поверхностью $\Gamma(x; a) = \gamma$. Это нужно подставить в выражение для H в правой части (121), что дает

$$\frac{1}{(m_1-2)!}\left[\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\iiint_{(a)_2} Vf\,dT_x -\right.$$

$$\left.-\iiint_{(a)}\Psi(a';a)\,dT_{a'}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\iiint_{(a')_2}V(x;a')\,f(x)\,dT_x\right]. \qquad (125)$$

Согласно обычным правилам [1]) дифференцирования под знаком $\int$ это можно заменить выражением

$$\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\left[\iiint_{(a)_2} Vf\,dT_x -\right.$$

$$\left.-\iiint_{(\bar{a})}\Psi(a';a)\,dT'_a\iiint_{(a')_2}V(x;a')\,f(x)\,dT_x\right].$$

Двойной символ $\iiint$, который представляет собой $(4m_1)$-кратный интеграл, будет преобразован, как и ранее, к виду

$$\iiint_{(a)} f(x)\,dT_x\left[\iiint_{(a)(x)_2}\Psi(a';a)\,V(x;a')\,dT_{a'}\right]. \qquad (125')$$

В формуле (125) точка a' пробегает все положения с положительной стороны S внутри полуконоида с вершиной в точке a, а точка x находится с положительной стороны S между обратным полуконоидом $\Gamma(x;a')=0$ и поверхностью $\Gamma(x;a')=\gamma$ в области, определенной условием

$$0 \leqslant \Gamma(x;a') \leqslant \gamma$$

(рис. 45) [2]). Следовательно, в формуле (125) точка x расположена где-то в области (a), и для каждого заданного положения точки x область интегрирования, относящая-

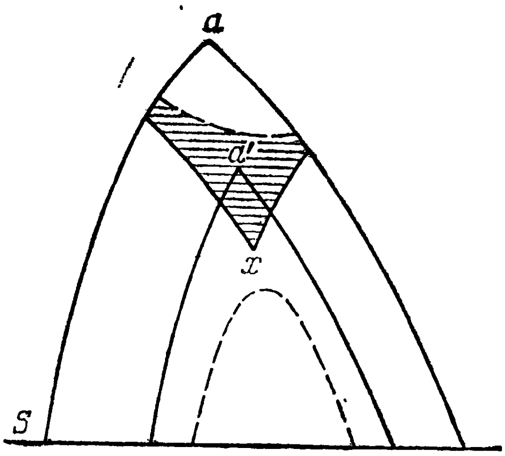

Рис. 45.

[1]) Строго говоря, прежде чем выполнять дифференцирование, сначала нужно было бы, как об этом сказано выше, исключить вершины коноидов с помощью малых поверхностей Σ, например, налагая на точки x и a' требование находиться друг от друга по крайней мере на расстоянии ε. Для областей, ограниченных таким образом, операции дифференцирования под знаком $\iiint$ были бы законны. Легко видеть благодаря предыдущим соображениям (включающим в себя примечание к п. 147), что они справедливы также, если сразу же взять для ε нулевое значение (поскольку сходимость операций п. 141 или 178 равномерная).

[2]) Схематические рис. 44 и 45 — это двумерные сечения пространственных фигур $2m_1$ измерений.

ся к a', ограничена обратным полуконоидом с вершиной в точке a, прямым полуконоидом с вершиной в точке x и поверхностью $\Gamma(x; a') = \gamma$ (рис. 45). Эту область мы будем обозначать через $(a)(x)_2$.

В формуле (125') $(m_1 - 1)$-кратное дифференцирование по γ можно выполнить под внутренним знаком $\iiint$, т. е. над величиной $\iiint_{(a)(x)_2}$. Таким образом, видно, что результат подстановки (124) в нашу формулу для решения (аналогичную формуле Вольтерра) равен члену (124), уменьшенному на величину

$$\iiint_{(a)} f(x)\,\mathfrak{V}_{\mathrm{II}}(x; a)\,dT_x, \tag{122''}$$

где

$$\mathfrak{V}_{(\mathrm{II})}(x; a) = \frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\iiint_{(a)(x)_2}\Psi(a', a)\,V(x'; a')\,dT_{a'}. \tag{123''}$$

В итоге мы получаем таким образом все члены, зависящие от f. Если положить

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{(0)} - \mathfrak{V}_{(\mathrm{I})} + \mathfrak{V}_{(\mathrm{II})}, \tag{126}$$

где $\mathfrak{V}_{(\mathrm{I})}$ и $\mathfrak{V}_{(\mathrm{II})}$ определяются соответственно по формулам (123) и (123''), то совокупность этих членов равна

$$-\iiint f(x)\,\mathfrak{V}(x; a)\,dT_x + \frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\iiint f(x)\,V(x; a)\,dT_x.$$

195. Приведенные выше пояснения по поводу того, как обращаться с членами, содержащими f, позволяют нам быть краткими в отношении других членов, содержащих u_0 и u_1, так как расчеты совершенно аналогичны. Интеграл по x будет интегралом $\iint$ $\left(\text{вместо } \iiint\right)$, когда точка x описывает S. Так как связь между этой точкой и точкой a', как и между a и a', остается той же самой для всякой точки x поверхности S, то области интегрирования по a' строятся, как и ранее.

Можно выполнить аналогичные операции тогда, когда точка x описывает поверхность, которую мы называли S_ν, чтобы получить результат, который можно дифференцировать по ν. Это нам показывает без каких-либо новых затруднений, что именно дает каждый член рассматриваемого рода, входящий в H, при подстановке в формулу (121):

член $-\iint_{S_0} \mathfrak{B}_{(0)}(u_1 + Lu_0)\, dS$ дает

$$-\iint_{S_0} \mathfrak{B}_{(0)}(u_1 + Lu_0)\, dS + \iint_{S_0} \mathfrak{B}_{(\mathrm{I})}(u_1 + Lu_0)\, dS;$$

член $\dfrac{1}{(m_1-2)!}\dfrac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\iint_2 V(u_1 + Lu_0)\, dS$ дает

$$\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-2}}\iint_2 V(u_1 + Lu_0)\, dS - \iint_{S_0} \mathfrak{B}_{(\mathrm{II})}(u_1 + Lu_0)\, dS;$$

член $\dfrac{1}{(m_1-2)!}\dfrac{d}{d\nu}\dfrac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\iint_2 u_0 V\, dS$ дает

$$-\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d}{d\nu}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\iint_2 u_0 V\, dS + \frac{d}{d\nu}\iint_{S_\nu} u_0 \mathfrak{B}_{(\mathrm{II})} dS;$$

наконец, $\dfrac{d}{d\nu}\iint_{S_\nu} u_0 \mathfrak{B}_{(0)}\, dS$ дает

$$\frac{d}{d\nu}\iint_{S_\nu} u_0 \mathfrak{B}_{(0)} dS - \frac{d}{d\nu}\iint_{S_\nu} u_0 \mathfrak{B}_{(\mathrm{I})} dS,$$

Сумма этих результатов, к которой добавлены выражения (122) (122′), за вычетом (122″) дает в конце концов само u в форме (29″), причем V вычисляется так, как было сказано в п. 192, а $\mathfrak{B}$ выражается формулой (126).

196. Мы построили выражение для искомого решения в случае, если оно существует. Однако остается доказать обратное, т. е. что то, что мы вычислили, есть решение, удовлетворяющее условиям задачи.

Для этого мы воспользуемся результатами, полученными ранее для аналитического случая. В этом случае мы доказали, что решение существует и является аналитическим в $\mathfrak{R}$. Это решение не может отличаться от того, которое мы только что получили, и которое, следовательно, тоже является аналитическим.

Более того, мы построили элементарное решение и, в частности, функцию $\mathfrak{B}$ (аналитическую по x и по a). Эта величина не может отличаться от величины, определяемой формулой (126), так как, в силу основной леммы вариационного исчисления, одна и та же величина не может иметь два различных выражения в форме (29″), равных между собой при произвольном выборе u_0, u_1, f.

Следовательно, величина $\mathfrak{B}$, определяемая формулой (126), при этих гипотезах будет голоморфна по z и a.

197. Использовавшийся Э. Э. Леви метод для непосредственного доказательства аналитичности результатов, полученных в предыдущих расчетах, если исходить из аналитических начальных данных, в принципе совершенно иной и состоит в том, чтобы распространить определения различных величин, которые нам встречались, на комплексную область или, по крайней мере, на часть этой области, достаточно близкую к действительной области. Этот метод может быть распространен, по крайней мере, частично[1]), на гиперболический случай. Однако при этом, как мы увидим, появляются некоторые геометрические трудности, которых не было в анализе итальянского геометра.

Аналитичность H (в предположении, что $\mathfrak{B}_{(0)}$ аналитично) следует из расчетов п. 174 и 177—180. Это справедливо во всей области $\mathfrak{R}$.

Теперь речь идет о том, чтобы доказать тот же самый факт для решения интегрального уравнения (117). Для этого мы снова рассмотрим объемный интеграл (82) п. 174, однако внесем изменения, необходимые для того, чтобы распространить его на соответствующим образом определенную комплексную область.

Мы будем исходить из действительной области $\mathfrak{R}$, на которую наложены те же самые ограничения, что и выше (в частности, предполагается, что всякая внутренняя геодезическая или бихарактеристика, проведенная в обратном направлении из точки a области $\mathfrak{R}$, остается в $\mathfrak{R}$ до того момента, пока она не встретит S).

Пусть x и a — две точки $\mathfrak{R}$, которые, как и предполагалось, можно соединить определенной геодезической. Так как якобиан $\dfrac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(q_1, q_2, \ldots, q_m)}$ всегда предполагается отличным от нуля (при соответствующих значениях a и q), то q (и, следовательно, ξ) представляют собой аналитические функции, и они будут голоморфными, какой бы ни была система действительных или мнимых значений $\bar{x}$, $\bar{a}$ этих переменных такая, что

$$|\bar{x}_i - x_i| < \delta, \; |\bar{a}_i - a_i| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где δ — некоторая положительная величина, которая, как известно, имеет положительный минимум, когда x и a принимают все возможные значения в $\mathfrak{R}$. Если одна из точек в $\mathfrak{R}$ описывает поверхность $t = \text{const}$, в то время как другая остается произвольной, появится другой минимум, который будет функцией t и который обозначим через δ_t. Можно ввести для $\mathfrak{R}$ некоторую комплексную область (δ_t), а именно, область, содержащую все точки

[1]) Метод, даваемый ниже, соответствует методу Э. Э. Леви (цит. соч.). Но доказательство Э. Э. Леви для эллиптического случая является более полным, так как оно применимо к самому элементарному решению. Из-за трудностей, упомянутых в тексте, мы вместо этого ограничимся рассуждениями о решении u задачи Коши.

с координатами (действительными или мнимыми) $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$, находящимися в соответствии, по крайней мере, с одной действительной точкой $(x_1, \ldots, x_m)$ области $\mathfrak{R}$ при помощи соотношения

$$|\bar{x}_i - x_i| < \delta_t \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{127}$$

где t по-прежнему представляет собой переменную x_m.

Из каждой точки, вообще говоря, комплексной, окрестности δ_t можно провести геодезические в различных направлениях. Рассмотрим, в частности, такие, для которых

$$|\bar{\mu} - \mu| < k\delta_t$$

(k — положительная постоянная), где $\bar{\mu}$ — значение любой из величин $\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_{m-1}}{dt}, \frac{ds}{dt}$ и μ — соответствующее значение для действительного направления, обращенного назад, которое подходящим образом выбрано в соседней действительной точке, принадлежащей к $\mathfrak{R}$. Близость определяется уравнением (127). Такие направления можно также назвать «обратными направлениями в $\overline{\mathfrak{R}}$». Ясно (благодаря предыдущим замечаниям относительно $\frac{d\theta}{dt}$), что для такого направления аргумент величины $\left(-\frac{d\xi_m}{dt}\right)$ будет по абсолютному значению меньше k' (k' — некоторая положительная постоянная). Видно, что если k взять достаточно большим, то мы всегда получим обратное направление (в произвольной точке окрестности (δ_t)), если выберем для дифференциалов нормальных переменных действительные значения, удовлетворяющие неравенству

$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \ldots + d\xi_{m-1}^2 \leqslant d\xi_m^2,$$
$$d\xi_m > 0.$$

Геодезические, имеющие обратное направление (безразлично, действительное или комплексное), назовем «обратными геодезическими». Более того, допустим, что при таком изменении [1]) независимой переменной аргумент величины dt всегда заключен между $-k'$ и k'. Конечно, то же самое будет выполнено для аргумента разности двух значений t на этом пути, и можно найти верхнюю грань (постоянную) отношения длины произвольной дуги на этом пути на плоскости комплексной переменной t к длине ее хорды, или к ее проекции на действительную ось.

---

[1]) В качестве независимой переменной в системе (L) мы берем величину t, умножив обе части каждого уравнения на

$$\frac{ds}{dt} = 1 \bigg/ \left(\frac{s}{2}\frac{\partial A}{\partial p_m}\right).$$

Каждую точку, которой можно достичь, если провести из точки a обратную геодезическую, при ограничении, налагаемом на изменение t, о котором говорилось ранее, назовем точкой, от которой *зависит* a.

198. Представляется существенным изменить первоначальное определение (δ_t) (уменьшая соответствующим образом значение δ_t, на что мы имеем право) так, чтобы для любой точки a окрестности (δ_t) все точки из области зависимости точки a принадлежали также окрестности (δ_t).

Это можно получить при помощи известных результатов в связи с основной теоремой Коши о дифференциальных уравнениях. Действительно, известно, что если $(y_1, y_2, \ldots)$ и $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots)$ — два решения одной и той же канонической дифференциальной системы с независимой переменной t и с N неизвестными функциями, и если ε_0 — верхняя грань абсолютных значений разностей $\bar{y}_i - y_i$ при $t = \bar{t}_0$, то отсюда можно получить аналогичную верхнюю грань ε_1, относящуюся к $t = t_1$, с помощью формулы

$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0 e^{NAT},$$

где T есть длина пути от t_0 до t_1, а A — положительная постоянная, которую можно найти, если известна конечная область, где все неизвестные и все правые части дифференциальных уравнений являются регулярными [1]).

Из этой теоремы видно, что область (δ_t) удовлетворяет искомому условию, если взять δ_t в зависимости от t таким образом, чтобы $\delta_t e^{2mAat}$ убывало (где через a обозначена вышеупомянутая верхняя грань отношения длины пути интегрирования на плоскости t к его хорде). Например, если δ'_t — это выбранная в первый раз функция, рассматривавшаяся ранее, то через δ_t обозначим минимум величины $\delta'_t e^{-2mAa(t-t')}$ для t, изменяющегося от нуля до t'.

198'. Перенесем последнее ограничение на область (δ_t), рассматривая только значения t, аргумент которых заключен между $-k'$ и $+k'$ (определение области для других координат остается тем же самым). Точка из области зависимости какой-либо точки области при этом новом определении останется в области, если два значения t находятся на одном и том же радиусе-векторе, проходящем через начало координат в плоскости t.

199. Эти геометрические особенности представляют собой единственную трудность в нашем рассуждении. Вводя произвольную функцию F от x или от x и a, голоморфную в $\mathfrak{R}$, можно легко построить аналитическую функцию от a, голоморфную в (δ_t), которая совпадает с интегралом (77) в действительных точках (т. е. внутри $\mathfrak{R}$).

---

[1]) Величина A есть верхняя грань абсолютных значений первых частных производных от правых частей (см. дополнительное замечание к книге II).

Видно, что такое продолжение дается интегралом

$$I = c \iint d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1} \int_0^1 KF\, d\lambda, \tag{82''}$$

записанным в п. 174, где η изменяются в действительной области (81), а переменная λ описывает действительный отрезок (0, 1), так что переменная t должна изменяться от точки c до начала вдоль прямого отрезка. Пп. 199 и 199′ показывают, что если a находится внутри (δ_t), то то же самое будет справедливо для любой точки x, соответствующей такой системе значений η и λ.

Итак,— и это существенно,— если F определено в области (δ_t), то выражение (82″) также определено в той же области и является в ней голоморфным по тем же причинам, что и ранее.

Более того, если обозначить через $\varphi(|t|)$ максимум абсолютного значения F, когда t принимает все значения, для которых $|t| = \mathrm{const}$, и через K' обозначить произведение $\frac{1}{m-1}\Omega_{m-2}$ на $\max K_1$, то получим

$$|I| < K' \int_0^{|c|} \varphi(|t|)\, dt, \tag{120'}$$

т. е. неравенство, соответствующее формуле (120) п. 194.

200. С учетом этого не составит никакого труда определение u во всей области (δ_t), которая дается уравнением (127). Прежде всего, сама величина H в силу расчетов книги II является голоморфной в вышеупомянутой области (ограниченной при необходимости соответствующим образом). Итак, мы видим, что каждый из интегралов (119) определен и является голоморфным в области (δ_t). Более того, при помощи тех же самых рассуждений, что и в п. 194 (при помощи неравенства (120′)), видно, что такие приближения сходятся. Наконец, видно, что эта сходимость является равномерной и, следовательно, благодаря известной теореме предел также является аналитической функцией, что и требовалось доказать.

Чтобы дать доказательство, эквивалентное доказательству Э. Э. Леви, нужно показать тем же самым методом аналитичность самой функции $\mathfrak{V}$. Тем не менее мы не будем этого делать, потому что возникают новые трудности, которых нет в эллиптическом случае (очевидно, из-за формы области, которую мы обозначали через $(a)(x)$, если попытаться расширить ее путем добавления комплексных точек).

201. Отметив это, мы снова откажемся от предположения, что коэффициенты являются аналитическими (само собой разумеется, их регулярность предполагается всегда).

В силу этой регулярности коэффициентов и вследствие хорошо известной основной теоремы Вейерштрасса каждый из них можно аппроксимировать многочленом с любой точностью и даже сделать это так, чтобы аппроксимация была справедливой при дифференцировании вплоть до порядка, при котором допускается существование производных [1]).

---

[1]) Результаты, полученные при более общих условиях в мемуаре Тонелли (Rendic. Circ. Mat. Palermo, t. XXIX, 1910, p. 1—36), вытекают из тех же самых методов, которые использованы при доказательстве теоремы Вейерштрасса. Действительно, во многих из них аппроксимирующий полином для непрерывной функции от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ выражается через интеграл, имеющий форму

$$\Pi_n = \iiint F(z_1, z_2, \ldots, z_m) P_n(z_1 - x_1, z_2 - x_2, \ldots, z_m - x_m)\, dz_1 dz_2 \ldots dz_m.$$

При этом полином P_n ($n = 1, 2, \ldots$) таков, что:

1) для всякой системы фиксированных значений $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ (кроме системы значений $Z_1 = Z_2 = \ldots = 0$) $P_n(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ стремится к нулю при $1/n$, стремящемся к нулю, и притом равномерно, когда $Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots$ остается больше сколь угодно малого фиксированного положительного числа h;

2) интеграл

$$\iiint P_n dZ_1 dZ_2 \ldots dZ_m,$$

распространенный по фиксированной области, содержащей начало координат (форма области безразлична в силу условия 1) стремится к 1.

В качестве P_n можно взять, например, полином Валле-Пуссена — Ландау, обобщенный Тонелли на случай нескольких переменных

$$P_n = \frac{1}{K_n}\left[1 - \lambda^2 \sum_i (z_i - x_i)^2\right]^n.$$

Здесь λ — обратная величина максимального линейного размера области, а K_n равно

$$K_n = \frac{\Omega_{m-1}}{\lambda^m} \int_0^1 (1 - \rho^2)^n \rho^{m-1} d\rho = \frac{\Omega_{m-1}}{\lambda^m} \mathrm{B}\left(n + 1, \frac{m}{2}\right).$$

Если мы теперь захотим вычислить от этих выражений производную любого порядка k, а именно:

$$D_{k_1 k_2} \ldots = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots},$$

то нужно продифференцировать P_n под знаком $\iiint$ по x или, что одно и то же, по z и умножить на $(-1)^k$. Но если соответствующая производная функции F существует и является непрерывной, то можно выполнить интегриро-

202. Мы придем к требуемому заключению, а именно, что решение, построенное в пп. 192—195, удовлетворяет заданным условиям, если скомбинируем вышеприведенный результат с результатами, полученными для аналитического случая (пп. 174—180), и исследуем прежде всего порядок непрерывности (книга I, п. 19 и след.) наших выражений по отношению к функциям, которые представляют собой коэффициенты уравнений[1]). Этот вопрос в ряде случаев может представить интерес. В отношении него, точно так же как и в п. 18 книги I, выражения в форме степенных рядов не дают никаких сведений, в то время как его можно решить с помощью расчетов п. 193 и следующих.

Мы увидим, что величины, построенные в цитированных пунктах, являются непрерывными до некоторого конечного порядка по отношению к рассматриваемым коэффициентам. Другими словами, если заменить рассматриваемые коэффициенты другими, имеющими с ними близость рассматриваемого порядка, и если

$$\mathfrak{F}_1(u) = \sum A'_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B'_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C'u = f \qquad (\mathrm{E}_1)$$

есть новое уравнение, полученное таким образом, то вышеупомянутые величины очень мало отличаются друг от друга независимо от того, выведены ли они из (E) или из (E_1). Так будет, например, при замене коэффициентов аппроксимирующими полиномами, построенными в соответствии с тем, что было сказано в предыдущем пункте.

Первый вопрос этого рода относится к построению геодезических и, следовательно, величины Г. С этой точки зрения ответ дается в дополнительном замечании к книге II. Мы видим, что всякая геодезическая, исходящая из точки a и относящаяся к характеристической форме $\mathcal{A}_1$ уравнения (E_1), будет проходить очень близко от соответствующей геодезической, относящейся к форме $\mathcal{A}$, если так назвать, например, геодезическую, которая имеет

вание по частям и преобразовать результат к виду

$$\iiint D_{k_1k_2} \ldots FP_n(z_1 - x_1, z_2 - x_2, \ldots, z_m - x_m)\, dz_1 dz_2 \ldots dz_m,$$

добавив члены, соответствующие пределам интегрирования.

Наконец, если предположить (как в случае вышеупомянутого полинома Валле-Пуссена — Ландау), что предыдущее условие 1) выполняется не только для величины P_n, но также для ее производных любого порядка, меньшего k, то члены, соответствующие пределам интегрирования, стремятся к нулю, и предел $D_{k_1k_2} \ldots \Pi_n$ можно получить, поступая с $D_{k_1k_2} \ldots F$ так же, как с самой величиной F. Это представляет собой искомый результат.

[1]) Аналогичные методы использовались для эллиптических уравнений. См. Lichtenstein, Abhandl. Ak. Berlin (1911) (Anhang).

ту же касательную в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Более того, изменение будет очень мало для частных производных координат x в любой точке этой геодезической по параметрам, которые ранее назывались $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ и, следовательно, для функционального определителя J. Поскольку этот функциональный определитель отличен от нуля и (по крайней мере, если исключена некоторая окрестность точки a) больше по абсолютному значению фиксированного положительного числа во всей области $\mathfrak{R}$, в том случае, если он вычисляется для уравнения (E), то он остается таковым, если исходить из приближенных уравнений (E_1) при условии, что аппроксимация достаточно хороша. Этот факт очень важен для нас, так как можно считать, что *расчеты справедливы в одной и той же области независимо от того, исходим ли мы из уравнения* (E) *или из уравнения* (E_1).

Очевидно также, что в данном случае Γ и M также меняются слабо.

Тот же самый результат распространяется на последовательность величин V_h $(h = 1, 2, \ldots, m_1 - 2)$ в силу формул, которые их определяют, так же как и на

$$V_{m_1-1} = \mathfrak{B}_{(0)},$$

если порядок дифференцируемости коэффициентов достаточно высок (искомые производные, как было сказано, аппроксимируются соответствующими производными аппроксимирующих полиномов).

Также очень мало изменяется величина, которую мы назвали H (и ее производные до некоторого порядка в соответствии с требуемым порядком аппроксимации коэффициентов). Это становится ясно при исследовании выражений для различных членов H, которые вычисляются так, как было сказано в пп. 177—180 и которые являются интегралами, содержащими начальные данные u_0, u_1, f, функции V и $\mathfrak{B}_{(0)}$ и их производные до некоторого конечного порядка.

Это применимо также к «ядру» ψ интегрального уравнения (117), что сразу же ясно из его выражения (см. примечание к п. 192).

Исходя из этой же точки зрения, мы можем теперь установить непрерывность u. Такая непрерывность, достигнутая для первого приближения (119), а именно для

$$u^{(0)} = H,$$

в действительности выполняется для каждого из последующих приближений (поскольку она имеет место для ψ). Итак, сходимость этих приближений является равномерной, каким бы ни было уравнение (E_1) и какой бы ни была точка a. Это доказывает требуемое заключение. Функция u аппроксимируется соответствующим решением u' уравнения (E_1), и эта аппроксимация является равномерной [1]) по координатам a. Если близость, по предположению, имеет довольно высокий порядок, то первые и вторые производные также аппроксимируются [2]) соответствующими производными u'.

203. Требуемое заключение получается без всяких затруднений. Для начала займемся определенным уравнением (E_1), коэф-

---

[1]) Эта равномерность вытекает из предыдущего. Можно, впрочем, сделать уточнения. Мы уже выписывали мажоранты для величин

$$|H|, \iint |\psi(x;\ a)|\, dS_t,\ |W_a^{(n)}|,$$

а именно H_1, K_1, $H_1\,(k_1c)^n/n!$ соответственно. Пусть теперь

$$H' = H + \delta H,\ \ \psi' = \psi + \delta\psi,\ \ W'^{(n)} = W^{(n)} + \delta W^{(n)}$$

будут для нового уравнения (E_1) величинами, аналогичными H, ψ, W с мажорантами

$$|\delta H| < h_1,\quad \left|\iint \delta\psi(x;\ a)\, dS_t\right| < k_1,\quad |\delta W_x^{(n)}| < W_1^{(n)}(t).$$

Правая часть в двух первых неравенствах постоянна, а в третьем зависит только от t. Рекуррентные соотношения (119′) вместе с выражением (119″) без труда дают величину этой третьей мажоранты

$$w_1^{(n)}(c) = (H_1 + h_1)\,\frac{[(K_1 + k_1)\,c]^n}{n!} - H_1\frac{(k_1c)^n}{n!}.$$

Откуда, суммируя по n,

$$\sum_n w_1^{(n)}(c) = (H_1 + h_1)\,e^{(K_1+k_1)c} - H_1e^{K_1c}.$$

Эта величина, ограничивающая сверху $|\delta u|$, стремится к нулю одновременно с h_1 и k_1 и не зависит от a (если заменить c верхней гранью).

[2]) Производная по a_i в левой части (119′) содержит член $\iiint W_x^{(n-1)}\frac{\partial\psi}{\partial a_i}\,dT_x$ и член $\iint$, соответствующий изменению области (a) (см. уже упоминавшиеся формулы нашего Cours d'analyse, t. I, 354). И тот, и другой ограничены верхней гранью (W_x). В первом она множится на верхнюю грань величины

$$\iiint_{(a)}\left|\frac{\partial\psi}{\partial a_i}\right| dT_x,$$

во втором (в интеграле, распространенном по поверхности коноида с вершиной в точке a) — на верхнюю грань интеграла

$$\iint |\psi(x;\ a)|\, d\tau_\gamma.$$

Здесь подынтегральное выражение остается ограниченным на всем коноиде, согласно выражению для $d\tau_\gamma$, вычисленному в п. 177 (при $\mu = 0$). Все производные этой величины, следовательно, по абсолютному значению меньше, фициенты которого A'_{ik}, B'_i, C' будут полиномами, аппроксимирующими величины A_{ik}, B_i, C соответственно. Мы получим величину u', которая является решением соответствующей задачи, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{F}_1(u') = \sum A'_{ik} \frac{\partial^2 u'}{\partial x_i \partial x_k} + \sum B'_i \frac{\partial u'}{\partial x_i} + C'u' = f$$

вместе с условиями (C_3) Коши. Но если заставить изменяться аппроксимирующие коэффициенты A'_{ik} и т. д. так, что их порядок близости (выбранный соответствующим образом) с соответствующими коэффициентами (E) станет бесконечным, то u_1 будет стремиться к u, а $\mathfrak{F}_1(u')$ к $\mathfrak{F}(u)$. Эта последняя величина, следовательно, с необходимостью равна f.

204. То же самое доказательство непрерывности применимо к условиям Коши, поскольку аналитическая задача постоянно удовлетворяет им.

Если речь идет только о том, чтобы построить значение u согласно методам п. 192 и следующих, беря в качестве a точку, расположенную на S, то результат ясен сразу же. Для такого положения точки a все интегралы $\iiint$ исчезают и u с необходимостью равно H. Это значение H для уравнения (E_1) и, следовательно (благодаря непрерывности), для уравнения (E) может быть только соответствующим значением u_0, поскольку мы знаем, что задача Коши, относящаяся к аналитическому уравнению (E_1), имеет решение, и это непосредственно проверено в п. 181.

чем $H_2 \frac{|K_1 c|^{n-1}}{nn!}$, где H_2 — постоянная, которую можно взять одной и той же и для (E) и (E_1).

Чтобы вычислить вторую производную $\frac{\partial^2 W_a^{(n)}}{\partial a_i \partial a_k}$, удобно ввести в выражение $\frac{\partial W^{(n)}}{\partial a_i}$ переменные η, λ (п. 174). По отношению к этим переменным область интегрирования в каждом из только что рассмотренных членов $\iiint$ или $\iint$ является фиксированной, а именно: $\eta_1^2 + \ldots + \eta_{m-1}^2 \leqslant 1$ (или $= 1$ для (m — 1)-кратного интеграла, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$). Поскольку, с другой стороны, x являются регулярными функциями переменных η, λ и a, то сразу же видно, что каждая из вторых производных $W^{(n)}$ ограничена величиной $H_3 (K_1 c)^{n-2}/(n-2)!$. Величина H_3 по-прежнему — константа, не зависящая не только от x, но и от a, которая остается одной и той же независимо от того, как выбрано уравнение (E_1).

Но, как и ранее, смысл вопроса иной. Условия Коши предполагают непрерывность u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в окрестности поверхности S. Первое из них, к примеру, означает, что если a приближается к определенной точке P, принадлежащей S, то величина u_a, вычисленная при помощи нашего метода, стремится к $(u_0)_P$. Итак, согласно предыдущему, можно считать, что величина u_a, построенная для уравнения (E), получается путем предельного перехода из аналогичной величины u'_a, выведенной из уравнения (E_1). Нужно быть уверенным, что предел u_a при a, стремящемся к S, является тем же самым, что и предельное значение u'_P, когда (E_1) бесконечно мало отличается от (E), другими словами, когда два предельных перехода можно поменять местами. Для этого достаточно (это хорошо известно) убедиться в том, что первый из них (соответствующий изменению коэффициентов) сходится равномерно (в частности, в окрестности S), и именно это мы только что установили. То же имеет место для второго условия (C_2).

Итак, *доказано*, что *задача имеет решение*, которое дается формулами (29) или (29′) (как и в аналитическом случае), причем определяется формулой (126).

205. Можно частично распространить предыдущие рассуждения на величину $\mathfrak{V}$. Можно доказать, как и выше, что:

1) $\mathfrak{V}$ есть предел соответствующей величины, относящейся к (E_1), по крайней мере для любой пары точек x и a таких, что $\Gamma(x; a)$ положительно и не равно нулю;

2) эта величина (по крайней мере при том же самом ограничении) удовлетворяет уравнению $\mathfrak{G} = 0$ (как функция от x) и $\mathfrak{F} = 0$ (как функция от a).

Нет никакого сомнения в том, что эти заключения также справедливы при $\Gamma(x; a) = 0$. При этом $\mathfrak{V}$ регулярно даже в этом случае и принимает значение $\mathfrak{V}_0$ (что выполняется в аналитическом случае, что было необходимо ранее для элементарного решения). Другими словами $\mathfrak{V}_{(I)}$ и $\mathfrak{V}_{(II)}$ обращаются в нуль одновременно с Γ. Строгое доказательство, однако, затруднительно для $\mathfrak{V}_{(II)}$ по геометрическим причинам, на которые мы уже намекали. Область, которую мы называли $(a)(x)$, даст новые особенности для очень малого $\Gamma(x; a)$ из-за того, что некоторые характеристики, исходящие из точки x, пройдут очень близко от точки a и что другие пересекают под очень малыми углами характеристический коноид, исходящий из точки a.

206. Результат, полученный для m четного, сразу же дает соответствующий результат для m нечетного благодаря методу спуска. Функции V и $\mathfrak{V}$, обозначавшиеся до сих пор через V' и $\mathfrak{V}'$, строятся при $m = 2m_1 + 2$ так, как было изложено ранее. Значение v при $m = 2m_1 + 1$ находится по формулам (62), (65) (пп. 164, 165).

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

В пп. 182—184 мы видели, что величина $\mathfrak{H}(e)$ исключается из расчетов, так что мы можем обойтись без интеграла

$$\int \mathfrak{H}(e)\, d\Omega_{m-2}.$$

Интересно, однако, определить его значение.

Итак, имеем (что хорошо известно и очевидно вследствие изотропности)

$$\int e_i e_k d\Omega_{m-2} = 0 \qquad (i \neq k),$$

$$\int e_1^2 d\Omega_{m-2} = \int e_2^2 d\Omega_{m-2} = \ldots = \int e_{m-1}^2 d\Omega_{m-2} = \frac{1}{m-1}\Omega_{m-2}.$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл имеет значение

$$\frac{1}{m-1}\Omega_{m-2}(\mathfrak{H}_{11} + \mathfrak{H}_{22} + \ldots + \mathfrak{H}_{m-1,\, m-1}). \tag{1}$$

Остается выразить его при помощи коэффициентов форм H, H', с учетом преобразования (78) п. 172.

Для этого нужно только ввести величину

$$\Sigma' A^{ik} H'_{ik},$$

образованную из коэффициентов A^{ik} квадратичной формы для производных и из коэффициентов H'_{ik} квадратичной формы для координат [1]). Известно, что это выражение инвариантно относительно любого линейного преобразования типа (78). Когда такое преобразование выбрано (что мы предполагаем) так, что формула $\Sigma' H_{ik} x^i x^k$ сводится к сумме отрицательных квадратов

$$-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_{m-1}^2,$$

то соответствующая форма $\Sigma' A^{ik} p_i p_k$ сводится к сумме положительных квадратов переменных, а инвариант (2) есть с точностью до знака не что иное, как множитель, стоящий в скобках (1). Так как каждая из величин A^{ik} есть алгебраическое дополнение дискриминанта формы H, деленное на значение $D = \frac{1}{\Delta}$ этого дискриминанта, то имеем

$$\mathfrak{H}_{11} + \mathfrak{H}_{22} + \ldots + \mathfrak{H}_{m-1,\, m-1} = -\sum{}' A^{ik} \frac{\partial H_{ik}}{\partial t} = \\ = -\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial t}.$$

---

[1]) На языке абсолютного дифференциального исчисления первая форма относится к ковариантным переменным, вторая — к контравариантным переменным. Величины A^{ik} образуют тензор, дважды контравариантный, H'_{ik} — тензор, дважды ковариантный, а (2) есть свертка (скалярное произведение) двух этих тензоров.

Другая величина, которая оказалась исключенной из расчетов в п. 185, якобиан J координат x по нормальным переменным X или, по крайней мере, совокупность членов первого порядка разложения его в ряд,— легко выводится из рассмотрения дискриминанта D метрической формы $\boldsymbol{H}$. По отношению к нормальным переменным коэффициенты метрической формы постоянны с точностью до членов второго порядка, что известно со времен Римана [1]). Следовательно, дискриминант D' формы нужно считать постоянным с точностью до членов второго порядка в окрестности точки a, так что якобиан J приближенно равен

$$\sqrt{\frac{D'}{D}}=\sqrt{\frac{D_a}{D_x}}=\frac{\rho_a}{\rho_x}=\sqrt{\frac{\Delta_x}{\Delta_a}}\,.$$

[1]) См. его классическую работу «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», § 11.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА И ПЕРЕВОДЧИКА

К стр. 8. При переводе мы заменили слово «трансверсаль» словом «конормаль» в соответствии с принятой в настоящее время терминологией.

К стр. 11. Имеется в виду теорема Коши — Ковалевской. Далее автор использует именно это название.

К стр. 50. В литературе принят термин «фундаментальное решение».

К стр. 68. В оригинале — линейный полином.

К стр. 71. В оригинале — формула Грина.

К стр. 118. Другой вид фундаментального решения приводится в [3].

К стр. 145. Аппарат современной теории обобщенных функций позволяет по-иному подойти к данному вопросу. О применении обобщенных функций в математической физике см., например, в [1,2].

К стр. 191. В оригинале — синтез полученного решения.

К стр. 274. По поводу задачи Коши на многообразиях непространственного типа см. [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Владимиров, Обобщенные функции в математической физике. М., «Наука», 1976.
2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции. Вып. 1—3, Физматгиз, 1961.
3. Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1964.

БИБЛИОГРАФИЯ ОСНОВНЫХ РАБОТ, ПОСВЯЩЕННЫХ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Книга Адамара в сильной степени способствовала появлению дальнейших исследований в области гиперболических дифференциальных уравнений. Гиперболические уравнения второго порядка, как линейные, так и нелинейные, были подробно исследованы в работах Ю. Шаудера [1] и С. Л. Соболева [2]. В 1937 г. И. Г. Петровский [3] ввел понятие гиперболической системы и доказал для нее корректность задачи Коши. Другие подходы к исследованию гиперболических уравнений и систем были даны позднее в работах Ж. Лере [4] и Л. Гординга [5,15]. Систематическое изложение этих результатов и их обобщение содержится в книге Л. Хермандера [6]. В развитии и применении теории обобщенных функций к дифференциальным уравнениям с частными производными большую роль сыграли работы С. Л. Соболева [2] и Л. Шварца [7]. Разрывные решения исследованы в статье О. А. Олейник [8] и в книге Б. Л. Рождественского и Н. Н. Яненко [9]. По поводу краевых задач для гиперболических систем см. [10, 11]. Многие вопросы теории гиперболических уравнений изложены в книге С. Мизохаты [12]. В последние годы ряд исследований был посвящен изучению слабо гиперболических (т. е. обладающих кратными характеристиками) уравнений и систем [13], а также вопросу о распространении разрывов решений [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schauder, Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Fund. Mat., 24, 213—246, 1935.
2. S. Soboleff, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques. Матем. сб., 1 (43), 1, 1936.
3. I. Petrowsky, Über das Cauchysche Problem für Systeme von partielle Differenzialgleichungen. Матем. сб., 2 (44), 815—870, 1937.
4. J. Leray, Hyperbolic differential equations. Lecture notes, Princeton, 1951—1952.
5. L. Gårding, Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients. Acta Math., 85, 1—62, 1951.
6. Л. Хермандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., «Мир», 1965.
7. L. Schwartz, Théorie des distributions, I, II. P., 1950, 1951.
8. О. А. Олейник, Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. УМН, 12, № 3, 1957.
9. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., «Наука», 1968.
10. X. О. Крейс, Смешанная задача для гиперболических систем. Сб. «Математика», 14, 4, 98—115, 1970.

11. Р. Сакамото, Смешанная задача для гиперболических уравнений, I, II. Сб. «Математика», **16**, I, 62—99, 1972.
12. С. Мизохата, Теория уравнений с частными производными. М., «Мир», 1977.
13. Петков В. М., Иврий В. Я., Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений. УМН, **29**, 5, 3—70, 1974.
14. Л. Хермандер, Теоремы единственности и волновые фронты для решений линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами. Математика (сб. пер.), **17**, 6, 82—110, 1973.
15. Л. Гординг, Задача Коши для гиперболических уравнений. М., ИЛ, 1961.

Жак Адамар

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М., 1978 г., 352 стр. с илл.

Редактор *В. В. Абгарян*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректоры *О. А. Сигал, Л. С. Сомова*

ИБ № 11127

Сдано в набор 09.02.78. Подписано к печати 31.05.78.
Бумага 60×90 1/16, тип. № 1. Обыкновенная гарнитура.
Высокая печать. Условн. печ. л. 22. Уч.-изд. л. 22,46. Тираж 8000 экз.
Заказ № 173. Цена книги 1 р. 90 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука», Москва, Г-99,
Шубинский пер., 10