И. Б. АБЕЛЬСОН

Рождение логарифмов

ОГИЗ · ГОСТЕХИЗДАТ · 1948

И. Б. АБЕЛЬСОН

РОЖДЕНИЕ ЛОГАРИФМОВ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Г Н. Берман.* Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*

Подписано к печати 7/II 1948 г. Печ. л. $14^1/_2$. Уч.-изд. л. 11,96. Тип. знак. в печ. л. 33 000. Тираж 25 000. Цена 4 руб. А-01692. Заказ № 928.

16-я типография треста «Полиграфкнига» при Совете Министров СССР
Москва, Трёхпрудный пер., 9.

ПОСВЯЩАЕТСЯ ПАМЯТИ
РОСТИСЛАВА НИКОЛАЕВИЧА
БОНЧКОВСКОГО—
ТАЛАНТЛИВОГО МАТЕМАТИКА,
НЕУТОМИМОГО ТРУЖЕНИКА ПРОСВЕЩЕНИЯ
ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО ЧЕСТНОГО РАБОТНИКА,
ПОГИБШЕГО ПОД СТАЛИНГРАДОМ.

ГЛАВА I.

ЛЕСТНИЦА «НА СКОЛЬКО».

1. Арифметическая прогрессия.

Рассмотрим следующий ряд чисел: 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, ... Нетрудно заметить, что каждое число этого ряда получается из предыдущего путём прибавления одного и того же числа 3. Такой ряд чисел называется, как мы знаем, арифметической прогрессией. Числа, входящие в ряд, называются членами прогрессии; постоянная прибавка — «разностью» прогрессии.

Приведём ещё пример. Ряд чисел 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, ... есть арифметическая прогрессия, — здесь первый член равен 25; разность прогрессии равна 4.

Обычно члены прогрессии обозначаются буквами $a_1, a_2, a_3, \ldots$, разность — буквой d. В данном примере: $a_1 = 25$; $a_2 = 29$; $a_3 = 33, \ldots$; $d = 4$; маленькая цифра справа внизу около буквы a указывает порядковый номер члена ряда.

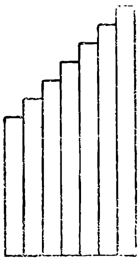
В приведённых примерах каждое последующее число больше предыдущего; такая прогрессия называется возрастающей. Если же последующее число меньше предыдущего, то прогрессия называется убывающей. Например, ряд

$$50,\ 44,\ 38,\ 32,\ 26,\ 20,\ 14$$

есть убывающая арифметическая прогрессия. Здесь разность d — отрицательна, именно $d = -6$.

Арифметическую прогрессию можно представить на чертеже (черт. 1). Здесь каждый член прогрессии представлен прямоугольником. Пусть ширина каждого прямоугольника равна 1 *см*; высоты прямоугольников равны последовательно 15 *см*, 19 *см*, 23 *см*, 27 *см* и т. д., площади этих прямоугольников будут равны соответственно 15 *кв. см*, 19 *кв. см*, 23 *кв. см*, 27 *кв. см* и т. д.

Арифметическую прогрессию можно назвать числовой лестницей «на сколько», так как каждый последующий член «на сколько-то единиц» больше предыдущего. В III главе настоящей книги будет рассмотрена прогрессия другого рода, лестница «во сколько». Изучение свойств этих двух прогрессий и их сопоставление поведёт нас к основной теме книги — к идее *логарифма*.



Черт. 1.

При рассмотрении арифметической прогрессии могут возникнуть следующие два основных вопроса:

1) Как по первым нескольким членам прогрессии определить любой её член, например, a_{30}?

2) Как определить сумму некоторого числа последовательных членов прогрессии, например, сумму 30 членов?

Начнём с первого вопроса. Пусть дана прогрессия 15, 19, 23, 27, 31,... Требуется определить сразу 30-й член этой прогрессии. Обратимся к нашему черт. 1; надо найти высоту 30-го столбика. Эту высоту найдём, если к высоте первого (основного) столбика прибавим высоту подъёма, который даётся 29 ступеньками, ведущими от 1-го к 30-му столбику. Подъём одной ступеньки в нашем примере равен 4 *см*; подъём, образуемый 29 ступеньками, равен $d \cdot 29 = 4 \cdot 29 = 116$ *см*. Поэтому высота 30-го столбика равна: $15 + 4 \cdot 29 = 15 + 116 = 131$ *см*. Таким образом: $a_{30} = a_1 + 4 \cdot 29 = a_1 + d \cdot 29$ или же

$$a_{30} = a_1 + d(30 - 1).$$

Если бы требовалось найти 20-й член прогрессии, то мы написали бы:

$$a_{20} = a_1 + d(20 - 1).$$

Для члена прогрессии с нумером n получаем:

$$a_n = a_1 + d(n - 1). \qquad (1)$$

Приведём пример применения этой формулы. Завод сельскохозяйственных орудий выпустил в январе 800 машин. Затем он стал повышать свою продукцию каждый месяц на 25 машин. Сколько машин завод выпустил в декабре?

В данном случае $a_1 = 800$; $d = 25$; $n = 12$. Согласно формуле, пишем:

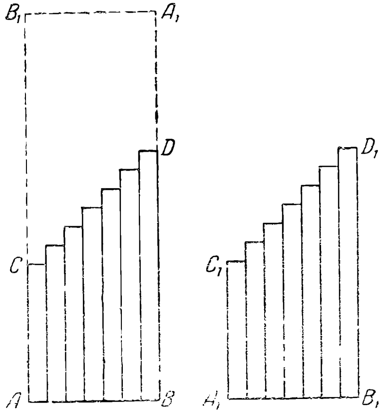
$$a_{12} = a_1 + d \cdot 11; \quad a_{12} = 800 + 25 \cdot 11 = 800 + 275 = 1075.$$

Перейдём ко второму вопросу — нахождению суммы членов прогрессии.

Пусть дана прогрессия 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49. Требуется найти сумму 7 членов этой прогрессии.

Для небольшого числа членов эту задачу можно было бы решить путём простого подсчёта. Но если бы требовалось найти сумму 700 членов, 7000 членов и т. д., то непосредственное сложение потребовало бы много времени. Желательно найти формулу, позволяющую решать такие задачи быстро и легко.

Чтобы получить эту формулу, обратимся к прежней модели. На черт. 2 построена ступенчатая фигура для прогрессии 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49. Ширина каждого столбика равна 1 *см*; длина равна соответственно 25 *см*, 29 *см* и т. д. Очевидно, сумма членов прогрессии численно равна площади фигуры $ACDB$ в квадратных сантиметрах. Построим ещё одну фигуру $A_1C_1D_1B_1$, в точности равную фигуре $ACDB$. Приложим фигуру $A_1C_1D_1B_1$ к фигуре $ACDB$ так, как показано на чертеже пунктиром.



Черт. 2.

В результате получим прямоугольник ABA_1B_1. В этом прямоугольнике длина стороны AB_1 равна сумме

$AC + CB_1 = AC + B_1D_1$. Ширина прямоугольника равна $AB = 7$ *см*. Площадь прямоугольника AB_1A_1B равна $(AC + BD) \cdot AB$; но AC численно равно первому члену прогрессии $a_1 = 25$, BD — последнему её члену $a_n = 49$; основание же AB численно равно числу членов прогрессии $n = 7$. Поэтому получаем: Площадь прямоугольника равна $(25 + 49) \cdot 7$ кв. ед.

Но так как площадь $ACDB$ равна половине прямоугольника, то отсюда заключаем:

$$S = \frac{(25 + 49) \cdot 7}{2},$$

или в общем виде:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}. \qquad (2)$$

Эта формула имеет весьма частые применения в различных отделах математики.

Простейшей арифметической прогрессией является ряд последовательных чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ldots,$$

называемый натуральным рядом. Для нахождения суммы этого ряда, взятого до некоторого числа n включительно, можно применить вышеуказанную формулу. В этом случае $a_1 = 1$, $a_n = n$, а потому:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1 + n)\,n}{2}. \qquad (3)$$

Например,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050.$$

Мы дали вывод основной формулы (2) при помощи геометрической модели. Дадим теперь её вывод арифметическим путём.

Рассмотрим сначала сумму натуральных чисел от 1 до некоторого числа $n - 1$, то-есть сумму первых $n - 1$ натуральных чисел; обозначим эту сумму буквой S:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1).$$

Подпишем под нашим рядом тот же ряд, но в обратном порядке:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1),$$
$$S = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Ясно, что сумма двух членов, один из которых подписан под другим, равна числу n, т. е. сумме первого и последнего членов ряда. Число таких пар равно числу членов исходного ряда, т. е. $n-1$. Следовательно, сумма этих двух совершенно одинаковых рядов $2S$ равна $n(n-1)$, а сумма одного исходного ряда равна:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Просмотрев внимательно ход наших рассуждений, мы убедимся, что он повторяет слово в слово (правда, на другом языке — арифметическом) геометрический вывод, только что детально разобранный нами.

Те же рассуждения можно было бы повторить и для арифметического вывода формулы для суммы членов любой арифметической прогрессии с первым членом a_1, последним a_n и разностью d. Но мы теперь достаточно подготовлены для того, чтобы понять и более формальный, но зато более короткий вывод. Обозначая сумму членов этой прогрессии снова буквой S, будем иметь:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n =$$
$$= a_1 + (a_1 + d) + \ldots + [a_1 + (n-1)d]$$

(каждый член мы заменили его выражением через первый член и разность). Раскроем теперь все скобки и приведём подобные члены:

$$S = na_1 + d[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)].$$

Используя найденное нами выражение для суммы $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$, получим

$$S = na_1 + d\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2na_1}{2} + \frac{dn(n-1)}{2} = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + d(n-1)].$$

Но мы уже видели, что $a_1 + d(n-1)$ равно последнему члену прогрессии, т. е. a_n. Следовательно, в конечном итоге получим:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

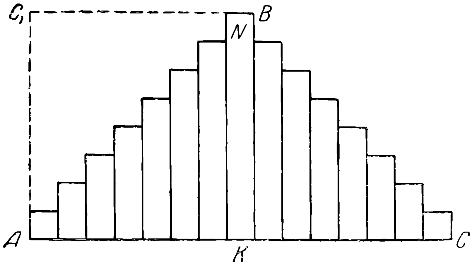
— ту же формулу, которую мы получили геометрическим путём.

Выведем ещё одну специальную формулу, которая будет нам полезна в дальнейшем.

Пусть требуется найти сумму ряда:

$$1+2+3+\ldots+18+19+20+19+18+\ldots+3+2+1.$$

Можно было бы вычислить её по общей формуле, взяв два раза сумму $1+2+3+\ldots+18+19$ и при-



Черт. 3.

бавив число 20. Но задачу можно решить короче, если заданный ряд чисел представить в виде двух строк:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots 18 & 19 & \\ & & & & & & 20. \\ 19 & 18 & 17 & 16 & 15\ldots\ 2 & 1 & \end{array}$$

Мы получим всего 20 столбцов; сумма чисел в каждом столбце равна 20 (последний столбец состоит из одного числа). Поэтому общая сумма равна $20 \cdot 20 = 400$. Это решение можно иллюстрировать чертежом (черт. 3). На чертеже дана ступенчатая фигура; взято $n = 8$.

Площадь фигуры ABC в *кв. см* равна:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1.$$

Если сделать разрез вдоль прямой NK, затем фигуру

NKC повернуть и приложить зубцами к фигуре ABK, то получим квадрат $AKBC_1$ со стороной, равной 8 *см*. Поэтому вышенаписанная сумма равна $8^2=64$.

Общая формула такова:

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1=n^2 \quad (4)$$

2. Египет и Вавилон.

Поскольку в арифметической прогрессии мы имеем дело с простыми вычислениями, касающимися чисел натурального ряда, можно предположить, что люди столкнулись с нею много веков тому назад. И в самом деле, несколько тысячелетий тому назад задачи, связанные с арифметической прогрессией, решались в древнем Египте и Вавилоне.

Мы приведём две такие задачи.

1. *Задача из египетского папируса Райнда* *).

10 мешков зерна разделить между десятью лицами так, чтобы их доли составили арифметическую прогрессию с разностью $d=\frac{1}{8}$ мешка.

Тут же отметим, что в папирусе даётся решение, однако без всякого объяснения. Чтобы понять текст иероглифов папируса, нам придётся сделать одно постороннее замечание. В древнем Египте не знали дробей наподобие наших, а именно, там не знали дробей вида $\frac{5}{8}$, $\frac{17}{21}$, но пользовались только такими дробями, у которых числитель равен 1. Для каждой такой дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ был свой иероглиф. Всякую же другую дробь,

---

*) При раскопках в Египте, среди большого количества религиозных памятников и хозяйственных документов, найдено несколько текстов (написанных на папирусе), посвящённых решению арифметических и геометрических задач. Один из наиболее сохранившихся папирусов такого рода носит название папируса Райнда, по имени учёного, нашедшего его. Он хранится в Британском музее в Лондоне. Интересные папирусы имеются и в древлехранилищах Советского Союза.

например, $\frac{9}{16}$, они представляют как сумму $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$; $\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Это записывается в виде $\bar{2}\ \overline{16}$; $\bar{2}\ \bar{4}\ \bar{8}$.

У египтян существовали особые таблицы для разбивания любой дроби на простейшие. В папирусе Райнда имеется специальная таблица для деления числа 2 на различные числа; например: $2:5=\bar{3}\ \overline{15}$; $2:9=\bar{6}\ \overline{18}$; $2:15=\overline{10}\ \overline{30}$; $2:17=\overline{12}\ \overline{51}\ \overline{68}$.

Вернёмся к поставленной задаче и решим её, пользуясь уже известными нам готовыми формулами.

1-й способ. В данном случае нам известно число членов прогрессии $n=10$, сумма членов прогрессии $s=10$ и разность прогрессии $d=\frac{1}{8}$. Согласно решению папируса, прогрессию будем считать убывающей, т. е. $d=-\frac{1}{8}$.

$$a_{10}=a_1+d\,(10-1);\quad a_{10}=a_1-\frac{1}{8}\cdot 9=a_1-\frac{9}{8}.$$

Подставляем значение a_{10} в формулу для суммы:

$$S=\frac{(a_1+a_{10})n}{2};\quad 10=\frac{\left(a_1+a_1-\frac{9}{8}\right)10}{2};\quad 10=\left(2a_1-\frac{9}{8}\right)5;$$

$$2a_1-\frac{9}{8}=2;\quad 2a_1=3\frac{1}{8};\quad a_1=\frac{25}{16}=1\frac{9}{16};$$

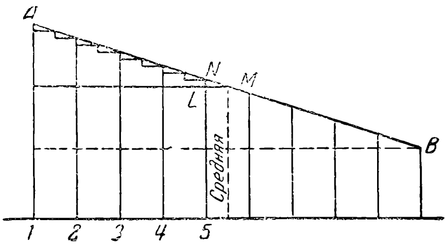
$$a_2=\frac{25}{16}-\frac{1}{8}=\frac{23}{16};\quad a_3=\frac{21}{16}\ \text{ и т. д.}$$

2-й способ. Допустим теперь, что эту задачу нужно было решить много веков тому назад, когда люди не знали ещё этих формул, т. е. решать её нужно было чисто арифметическим способом.

Расположим доли 10 лиц в убывающем порядке. Положим, что эти доли насыпаны в цилиндрические сосуды с одинаковыми основаниями. Столбики-цилиндры с зерном образуют лестницу, а разница между первым и последним столбиками составит 9 ступенек. Средняя величина всех долей, равная 1 мере, находилась бы при этом «посредине» между 5 и 6 столбиками. Разность («средний» — 5-й или 6-й — «средний») равна половине ступеньки, т. е. $\frac{1}{2}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$. Сколько же раз надо к среднему прибавить эту полуступеньку, т. е. сколько раз нужно добавить по $\frac{1}{16}$ меры, чтобы от среднего перейти к наибольшему столбику?

От среднего	до 5-го	. . . . . .	1 полуступенька,
От 5-го	до 4-го	. . . . . .	2 полуступеньки,
От 4-го	до 3-го	. . . . . .	2 полуступеньки,
От 3-го	до 2-го	. . . . . .	2 полуступеньки,
От 2-го	до 1-го	. . . . . .	2 полуступеньки.
	Всего	. . .	9 полуступенек.

Следовательно, чтобы получить высоту 1-го (наибольшего) столбика, надо к средней величине $a_{\text{средн.}}=\frac{10}{10}=1$ прибавить $\frac{1}{16}\cdot 9=\frac{9}{16}$; первый член $a_1=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$. Сказанное поясняется графиком (черт. 4).



Черт. 4.

Средней величине членов прогрессии соответствует высота точки M. Для решения задачи надо определить, на сколько точка A выше точки M. Египетский автор берёт разность высот точек M и N. Эта разность, т. е. длина LN, есть половина разности прогрессии, в нашей задаче равная $\frac{1}{8}:2=\frac{1}{16}$.

Таких отрезков, равных LN, надо от точки M взять 9, чтобы достигнуть высоты точки A, т. е. высота A равна высоте M плюс $\frac{1}{16}\cdot 9$; $a_1=1+\frac{1}{16}\cdot 9=\frac{19}{16}$. (25)

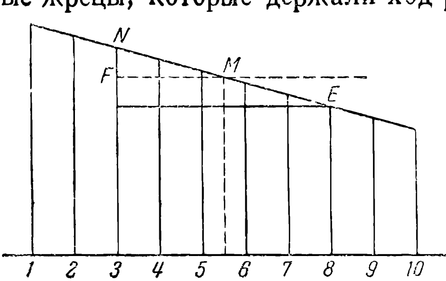
В папирусе Райнда эта задача изложена так:

Пример распределения разностей. Пусть тебе сказано: разделить 10 мер ячменя между 10 человеками; разница между каждым человеком и его соседом составляет $\overline{8}$ *)

*) Вспомним, что так ($\overline{8}$) в Египте обозначалась $\frac{1}{8}$!

меры ячменя. Средняя доля есть 1 мера. Вычти 1 из 10. Остаток 9. Составь половину разницы; это есть $\overline{16}$. Возьми её 9 раз; это даст $\overline{2}\ \overline{16}$. Приложи это к средней доле; вычитай для каждого лица по $\overline{8}$ меры, пока не достигнешь конца».

Затем приводятся все десять долей и делается проверка сложением. Как читатель видит, в папирусе даётся только правило, как следует решить задачу, но нет объяснения хода решения. Повидимому, такую задачу в те времена могли решать только отдельные учёные-жрецы, которые держали ход решения в тайне, а для общего пользования давали готовый рецепт.



Черт. 5.

2. *Задача из древней Вавилонской рукописи* *).

Сумму в $1\frac{2}{3}$ мины $= 100$ шекелей серебра разделить между 10 братьями так, чтобы доли братьев образовали арифметическую прогрессию **). Доля восьмого брата равна 6 шекелям. Найти разность этой прогрессии. Буквально задача изложена так.

«10 братьев; $1\frac{2}{3}$ мины серебра; брат над братом подымается: насколько он подымается, я не знаю. Доля восьмого брата есть 6 шекелей. Брат над братом, насколько он подымается?»

В этой задаче дано: $a_8 = 6$, $n = 10$, $s = 100$, $a_{\text{ср}} = 10$. Определить d.

---

*) Вавилоняне писали палочками на плитках из мягкой глины и потом обжигали свои «документы». Поэтому вавилонские рукописи имеют вид кирпичиков, на которых выдавлены странные клиновидные письмена. Такую «клинопись» учёные сумели почти полностью расшифровать.

**) Вавилонская мина равнялась, примерно, $\frac{1}{2}$ *кг*.

Решение её мы также поясним графиком. Тогда на нашем графике $a_{ср}=10$ есть высота точки M (черт. 5).

Мы дадим здесь решение такое, которое позволило бы понять и решение из вавилонской клинописи. Если к восьмому члену a_8 присоединить a_3, то сумма их будет в 2 раза больше среднего $a_{ср}$, потому что они равно отстоят от крайних членов. Получаем: $a_3+a_8=$ $=2a_{ср}=2\cdot 10$ ед., т. е. сумма высоты точек E и F равна 20 ед. Найдём теперь разность их высот. Так как высота точки E известна, то из этой суммы надо вычесть удвоенную величину a_8; $a_3-a_8=(a_3+a_8)-2a_8$. Но $a_8=6$ ед., тогда $a_3-a_8=20-2\cdot 6=8$ ед.

Итак, разность высот точек F и E найдена. Как же найти высоту одной ступеньки d? Для этого надо найденные 8 ед. разделить на число ступенек, отделяющих указанные точки. Заметим, что число отделяющих ступенек можно было бы найти сразу: $8-3=5$.

Но в первоисточнике этот вопрос решён иначе. Справа от 8-го столбика имеется $1+1=2$ столбика, а потому и 2 ступеньки. Слева от столбика a_3 также. Всего 4 ступеньки. Но ступенек между точками E и F будет не $10-4$, а только $9-4$, так как при общем числе в 10 столбиков промежутков-ступеней будет на 1 меньше, т. е. $10-1=9$. А потому между точками E и F имеется $(10-1)-4=5$ ступенек.

Деля вышенайденную разность высот 8 ед. на 5, получим: $8:5=1\frac{3}{5}=1\frac{36}{60}$, что по вавилонской шестидесятиричной системе записывается в виде 1; 36.

Теперь приведём подлинный вавилонский текст.

«Ты своим способом. Образовано обратное от 10, числа людей, получается 0; 6. 0; 6 на $1\frac{2}{3}$ мины серебра ты умножаешь, и 10 (шекелей) получается. 10 удвой, и 20 получается. 6, долю восьмого, удвой; 12 получается. 12 из 20 вычитается, и 8 получается. 8 удержи в голове. 1 и 1 soapliaam (слово не разобрано) сложи, и 2 получается, 2 удвой, и 4 получается. 1 и 4 ты складываешь, и 5 получается. 5 от 10, числа людей, отнимается, и 5 получается. — Обратное от 5 образуется, и 0; 12 получается. 0; 12 на 8 помножается, и 1; 36 получается.

1; 36 есть то, чем брат подымается над братом».

3. Сумма квадратов и кубов. Вычисление суммы кубов.

Рассмотрим натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, ..., взятых до некоторого значения n, например, до $n = 500$. Пусть каждое из этих чисел возведено в квадрат. Требуется найти сумму всех этих квадратов, т. е. сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 499^2 + 500^2$.

Нас интересует не прямой подсчёт, а формула, дающая возможность легко и быстро найти такую сумму.

Рассматриваемую сумму квадратов кратко записывают так:

$$\sum_{m=1}^{500} m^2.$$

Знак $\sum$ есть греческая буква «сигма». Этим знаком принято обозначать сумму сходных между собой слагаемых. Вместо буквы m надо подставлять последовательно числа ряда 1, 2, 3, ..., до 500. Если имеется n слагаемых, то сумма записывается так: $\sum\limits_{m=1}^{n} m^2$, или короче: $\sum\limits_{1}^{n} m^2$.

В этой книге мы будем записывать такую сумму совсем кратко: $\sum_2$: значок $_2$ должен напоминать, что суммируются вторые степени натуральных чисел.

Рассмотрим вторую задачу, отличающуюся от первой тем, что вместо квадратов суммируются кубы чисел натурального ряда. Для краткости эту сумму обозначим знаком $\sum_3$, т. е. $\sum_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

Получить эту сумму непосредственным вычислением при большом n ещё труднее, чем $\sum_2$.

Из истории математики известно, что задачи этого типа в течение многих веков занимали учёных различных стран. В начале XVII в. Фаульхаберу (1580—1635) удалось найти формулы для сумм степеней $\sum_2, \sum_3, \sum_4, \ldots, \sum_{11}$. Ход его решения не сохранился, но формулы оказались правильными. Великие математики Ферма́ и Паскаль дали общий метод решения этой задачи. До них существовали лишь кустарные приёмы нахождения той или иной отдельной суммы $\sum_k$.

В этой главе мы остановимся именно на отдельных приёмах решения. Трудно установить, кому они принадлежат, так как передавались они из поколения в поколение. При этом начнём со второй задачи, т. е. нахождения суммы кубов $\sum_3$, так как она решается проще.

Решим эту задачу с помощью так называемой таблицы умножения Пифагора, которая каждому знакома с детских лет (черт. 6).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Черт. 6.

Рассмотрим сумму чисел, находящихся на чертеже между двумя жирными линиями например, сумму

$$6+12+18+24+30+36+30+24+18+12+6.$$

Все слагаемые этой суммы делятся на 6. Поэтому их сумму можно записать в виде:

$$6\cdot 1+6\cdot 2+6\cdot 3+6\cdot 4+6\cdot 5+6\cdot 6+6\cdot 5+$$
$$+6\cdot 4+6\cdot 3+6\cdot 2+6\cdot 1,$$

или же так

$$6(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1).$$

Согласно формуле (4) на стр. 11, сумма, стоящая в скобках, равна 6^2. Поэтому вся сумма чисел, лежащих в полосе между жирными линиями, равна $6\cdot 6^2=6^3$.

Сумма чисел, лежащих в полосе между следующими жирными линиями (7, 14, ... , 49, ... , 14, 7) равна:

$$7(1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1)=$$
$$=7\cdot 7^2=7^3.$$

Первая полоса или, лучше сказать, первый «угольник» таблицы Пифагора состоит из одного верхнего левого квадрата и даёт 1^3; вторая полоса даёт 2^3; третья даёт 3^3 и т. д.; последняя полоса даёт 10^3. Значит, сумма всех чисел, стоящих в таблице Пифагора, даёт:

$$\sum_1^{10} m^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3.$$

Но сумму всех чисел таблицы можно сосчитать иначе, а именно — по строкам. Сумма чисел первой строки равна:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10;$$

обозначим её через S_1. Числа второй строки в 2 раза больше соответствующих чисел первой строки; поэтому и сумма их в 2 раза больше, т. е. равна $2S_1$. Числа третьей строки в 3 раза больше соответствующих чисел первой строки. Поэтому их сумма равна $3S_1$; и так далее. Общая же сумма всех чисел таблицы, сложенных по строкам, равна:

$$S_1 + 2S_1 + 3S_1 + \ldots + 9S_1 + 10S_1.$$

Эту последнюю сумму можно представить в виде:

$$S(1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10).$$

Но сумма, стоящая в скобках, также равна S_1; поэтому общая сумма равна

$$S_1 \cdot S_1 = S_1^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10)^2.$$

Таков результат подсчёта по строкам. Этот результат должен быть равен предыдущему, так как складывались те же числа таблицы, хотя и в другом порядке. Поэтому:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10)^2.$$

Рассуждение нисколько не изменится, если вместо пифагоровой таблицы из 10 строк и 10 столбцов рассматривать пифагорову таблицу, имеющую n строк и n столбцов. Получим равенство:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

Левую часть равенства мы выше условились обозначать через $\sum_3$. Сумму чисел натурального ряда $1+2+3+\ldots+n$ можно обозначить через $\sum_1$: значок 1 показывает, что числа натурального ряда взяты в первой степени. Тогда полученная нами формула может быть в сжатой форме записана так:

$$\sum\nolimits_3=(\sum\nolimits_1)^2. \tag{5}$$

Полученное соотношение (5) даёт практическую возможность быстро сосчитать сумму $\sum_3$ до любого заданного значения n. Выше мы хотели вычислить $\sum_3$ при значении $n=500$. Чтобы найти сумму $1^3+2^3+3^3+$ $+\ldots+500^3$, надо вычислить сперва $\sum_1$ по формуле (3):

$$1+2+3+\ldots+499+500=\frac{(1+500)\cdot 500}{2}=125\,250.$$

Далее:

$$\sum\nolimits_3=(\sum\nolimits_1)^2=(125\;250)^2=15\,687\,562\,500.$$

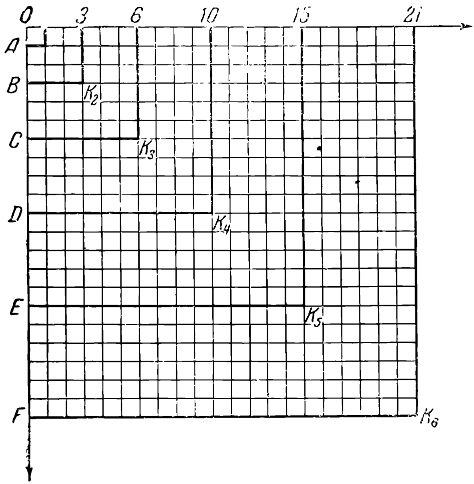
Дадим ещё один вывод формулы (5) при помощи чертежа (черт. 7).

Начиная с точки O, откладываем вертикально вниз последовательно отрезки $OA=1$ ед.; $AB=2$ ед.; $BC=3$ ед.; $CD=4$ ед.; $DE=5$ ед.; $EF=6$ ед. и т. д. Тогда отрезки $OA=1$; $OB=3$; $OC=6$; $OD=10$; $OE=15$; $OF=21$ и т. д. Такие же отрезки откладываем от точки O горизонтально вправо. На этих отрезках строим сеть клеток, равных 1 кв. ед. На нашем чертеже имеется всего $21\times 21=441$ клетка.

Посмотрим, сколько клеток заключается между двумя жирными линиями, границами квадратов. Первый участок содержит всего $1=1^3$ клеток; во втором участке $3^2-1^2=8=2^3$ клеток; в третьем участке содержится $6^2-3^2=36-9=27=3^3$ клеток и т. д. Таким образом оказывается, что между:

0-й и 1-й	жирной	ломаной	. . . .	$1 = 1^3$	клеток
1-й и 2-й	»	»	. . . .	$8 = 2^3$	»
2-й и 3-й	»	»	. . . .	$27 = 3^3$	»
3-й и 4-й	»	»	. . . .	$64 = 4^3$	»
4-й и 5-й	»	»	. . . .	$125 = 5^3$	»
5-й и 6-й	»	»	. . . .	$216 = 6^3$	»

Как видим, число клеток в каждом участке равно кубу нумера участка. Конечно, это не случайно, и можно



Черт. 7.

доказать, что при продолжении таблицы всегда будут получаться последовательные «кубические» числа. Доказательство этого утверждения найдено ещё в сочинении одного арабского математика, жившего около 1000 года нашей эры.

Пусть мы хотим подсчитать число клеток в участке с нумером m. Больший квадрат, содержащий этот участок, имеет в себе:

$$[1+2+3+\ldots+(m-1)+m]^2 \text{ клеток;}$$

меньший квадрат, прилегающий к этому участку, содержит

$$[1+2+3+\ldots+(m-1)]^2 \text{ клеток.}$$

В участке, заключённом между ними, имеется

$$[1+2+\ldots+(m-1)+m]^2 - \\ -[1+2+3+\ldots+(m-1)]^2 \text{ клеток.}$$

Полученное выражение представляет собой разность квадратов вида A^2-B^2; её можно представить в виде произведения $(A+B)(A-B)$.

В данном случае:

$$A+B= \\ =1+2+3+\ldots+(m-1)+m+1+2+3+\ldots+(m-1)$$

или же

$$1+2+3+\ldots+(m-1)+m+(m-1)+\ldots+3+2+1,$$

а это выражение, согласно формуле (4) на стр. 11 равно m^2.

Разность выражений, стоящих в скобках, равна m.

Поэтому искомое число клеток равно $m^2 \cdot m = m^3$. Таким образом, на нашей схеме в участке с нумером m заключается m^3 клеток. Так, девятый участок содержит $9^3=729$ клеток; десятый участок содержит $10^3=$ $=1000$ клеток.

Теперь уже нетрудно доказать формулу (5). Если квадратная схема имеет n участков, то сумма клеток во всех участках равна $1^3+2^3+\ldots+n^3$. Но сторона объемлющего квадрата равна $(1+2+3+\ldots+n)$ ед., а потому квадрат содержит $(1+2+3+\ldots+n)^2$ клеток. Из сравнения обоих результатов получаем прежнюю формулу:

$$\sum\nolimits_3 = \left(\sum\nolimits_1\right)^2.$$

Предлагаем читателю, в виде упражнения, сравнить второй вывод формулы при помощи клеток с первым выводом и установить связь между ними.

Если вместо $\sum_1$ подставить её значение, выраженное через n, то получим значение $\sum_3$, также выраженное через число n.

По формуле 3 мы имели:

$$\sum_1 = 1+2+3+\ldots+n = \frac{(1+n)\,n}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_3 = \sum_1 \cdot \sum_1 = \frac{n\,(n+1)}{2} \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{1}{4}\, n^2\,(n+1)^2.$$

Значит

$$\sum_3 = \frac{1}{4}\, n^2\,(n^2+2\,n+1) = \frac{1}{4}\,(n^4+2\,n^3+n^2),$$

и окончательно

$$\sum_3 = \frac{1}{4}\, n^4 + \frac{1}{2}\, n^3 + \frac{1}{4}\, n^2. \qquad (6)$$

4. Сумма квадратов $\sum_2$ (задача Архимеда).

Перейдём к нахождению суммы квадратов $1^2+2^2+ +3^2+\ldots+n^2$. Решение этой задачи впервые было дано великим греческим математиком Архимедом в сочинении «О спиралях».

Прежде чем изложить решение, данное Архимедом, рассмотрим другое весьма простое и наглядное решение с помощью геометрической модели.

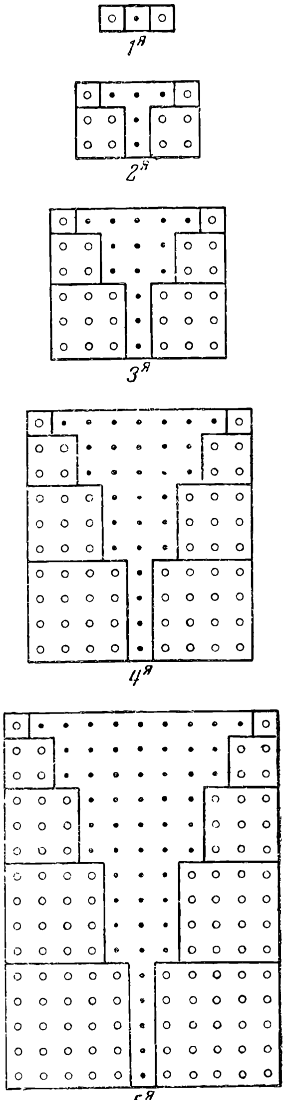
Первое решение. На каждой из прилагаемых прямоугольных схем имеется (черт. 8) по две группы кружков, слева и справа по одинаковому числу. На первой схеме имеется слева и справа по 1 кружку; на второй схеме слева и справа по $1+4=5$ кружков; на третьей — по $1+4+9=14$ кружков; на четвёртой — по $1+4+9+ +16=30$ кружков и т. д.

Каждое слагаемое в этих суммах есть «квадратное» число, как прямо следует из чертежа. Все остающиеся клетки каждой схемы заполнены точками. Оказывается, что в каждой схеме точек посредине имеется столько же, сколько кружков слева или справа.

Прежде всего можно равенство числа кружков и числа точек проверить простым подсчётом для первых нескольких схем. Так, на 2-й схеме — кружков $1+4=5$; точек посредине 5. На 3-й схеме — кружков $1+4+9=14$; точек посредине 14. Но если это равенство подтверждается для всех пяти схем чертежа, то можно ли отсюда заключить, что такое равенство будет сохраняться для схемы с любым нумером n?

Чтобы такое заключение было обоснованным, надо показать, что при переходе от схемы с нумером m к схеме с нумером $m+1$ равенство числа кружков и числа точек сохраняется. Мы разберём переход от нумера $m=5$ к нумеру $m+1=6$; но можно в этом рассуждении вместо числа 5 подставить любое число.

Если перейти от 5-й схемы к 6-й, которую читатель может себе мысленно представить, то с левой и правой стороны прибавится по квадрату, каждый из которых содержит $6^2=36$ кружков. Сколько же прибавится точек? Так как слева и справа новые квадраты будут на 1 клетку шире прежних, то ширина всей схемы увеличится на 2 клетки. Вследствие этого в каждой из строк прежней схемы прибавится по 2 точки, а всего в прежних строках прибавится $(1+2+3+4+5)\cdot 2$ точек. Сверх того, между двумя новыми квадратами появится вертикальная полоска, содержащая 6 точек. Итак, всего прибавится $2\cdot(1+2+3+4+5)+6$ точек или же $1+2+3+4+5+$ $+6+5+4+3+2+1$ точек; согласно специальной формуле (4) это число равно $6^2=36$.



Черт. 8.

Таким образом, при переходе от 5-й к 6-й схеме прибавится по одинаковому числу кружков и точек, а потому и в 6-й схеме число кружков и число точек будут равны.

Подведём итог сказанному. Непосредственным подсчётом мы убеждаемся, что число кружков (слева или справа) и число точек равны для схем с несколькими первыми номерами, например, для $n=1$; 2; 3; 4. Затем доказывается, что при переходе от схемы m-й к схеме $(m+1)$-ой число кружков (слева или справа) и число точек увеличиваются одинаково, т. е. что равенство сохраняется при переходе от m к $(m+1)$. Таким образом, получаем уверенность в том, что равенство имеет место при любом значении n.

Способ доказательства, который мы здесь применили, носит название метода математической индукции.

Теперь нетрудно будет решить поставленную задачу о сумме квадратов $\sum_2$. Вообразим себе схему с нумером n (например, $n=40$). Тогда число кружков на левой стороне схемы равно:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum_1^n m^2$$

или короче $\sum_2$. Столько же будет кружков на правой стороне и, как доказано, столько же будет точек посредине; а потому число всех кружков и точек вместе равно:

$$3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=3\sum_2.$$

С другой стороны, можно подсчитать число всех клеток n-й прямоугольной схемы.

Число строк схемы равно $1+2+3+\ldots+n$; эта сумма равна $\frac{(1+n)n}{2}$. Число столбцов схемы равно $n+1+n=2n+1$. Число всех клеток схемы получим умножением длины на ширину; оно равно произведению:

$$\frac{(1+n)n}{2}\cdot(2n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

Но общее число всех кружков и точек, очевидно, равно числу всех клеток схемы, а потому можно написать равенство:

$$3\sum_2 = \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1),$$

откуда следует:

$$\sum_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (7)$$

Эта формула позволяет быстро произвести подсчёт суммы квадратов для любого значения n. Если, например, $n = 40$, то

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 39^2 + 40^2 = \frac{40 \cdot 41 \cdot 81}{6} = 22\,140.$$

Если взять $n = 100$, то сумма

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 338\,350.$$

Второе решение. Дадим теперь для формулы (7) другой вывод, а именно тот, который принадлежит самому Архимеду.

Доказательство Архимеда основывается на одном вспомогательном равенстве, и надо прежде всего рассмотреть и доказать это равенство.

Напишем подряд первые n чисел натурального ряда и под ними в обратном порядке первые n нечётных чисел (пусть, например, $n = 10$):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

Составим теперь сумму из произведений чисел, стоящих друг под другом:

$$1 \cdot 19 + 2 \cdot 17 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 13 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 9 +$$
$$+ 7 \cdot 7 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 1.$$

Равенство Архимеда говорит, что эта сумма равна сумме квадратов:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2+10^2.$$

В общем виде равенство Архимеда запишется так:

$$1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+\ldots+(n-2)\cdot 5+\\+(n-1)\cdot 3+n\cdot 1=1^2+2^2+\ldots+n^2. \quad (8)$$

Чтобы доказать равенство (8), обратимся к квадратной таблице на черт. 9. Подсчитаем сумму всех чисел таблицы двумя способами.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	8	8
1	2	3	4	5	6	7	7	7	7
1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Черт. 9.

Во-первых, подсчитаем их внутри каждого участка, ограниченного жирными линиями. В первом участке имеется лишь одно число $1=1^2$; сумма трёх чисел, находящихся во втором участке, есть $1+2+1=4=2^2$. Сумма чисел в любом участке легко получается с помощью полученной ранее формулы (4). Например, для шестого участка имеем: $1+2+\ldots+5+6+$ $+5+\ldots+2+1=6^2$. Вообще сумма чисел в каждом участке равна квадрату нумера этого участка. Поэтому общий результат подсчёта во всех участках будет 1^2+2^2+ $3^2+\ldots+10^2$.

Во-вторых, подсчитаем суммы чисел, стоящих в участках, ограниченных пунктирнымм линиями. В первом участке (состоящем из единиц) имеется $2\cdot 10-1=19$ единиц; во втором участке $2\cdot 9-1=17$ двоек; в следующем участке $2\cdot 8-1=15$ троек, и т. д. Результат этого подсчёта даёт сумму $1\cdot 19+2\cdot 17+3\cdot 15+\ldots+8\cdot 5+$ $+9\cdot 3+10\cdot 1$.

Результаты этого и другого подсчёта должны быть равны; тем самым равенство (8) доказано.

Перейдём теперь к выводу формулы для $\sum_2$. Мы будем вести рассуждение для значения $n=10$, но доказательство сохраняет силу для любого значения n. Архимед исходит из простейшей формулы для квадрата суммы:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Он пишет (при $n = 10$) такое равенство 11 раз, а именно:

	В среднем столбце имеем	Прибавим к среднему столбцу	Получим
$(0+10)^2 = 10^2$	0	0	0
$(1+9)^2 = 1^2+2.1.9+9^2$	1.18	1	1.19
$(2+8)^2 = 2^2+2.2.8+8^2$	2.16	2	2.17
$(3+7)^2 = 3^2+2.3.7+7^2$	3.14	3	3.15
$(4+6)^2 = 4^2+2.4.6+6^2$	4.12	4	4.13
$(5+5)^2 = 5^2+2.5.5+5^2$	5.10	5	5.11
$(6+4)^2 = 6^2+2.6.4+4^2$	6. 8	6	6. 9
$(7+4)^2 = 7^2+2.7.3+3^2$	7. 6	7	7. 7
$(8+2)^2 = 8^2+2.8.2+2^2$	8. 4	8	8. 5
$(9+1)^2 = 9^2+2.9.1+1^2$	9. 2	9	9. 3
$(10+0)^2 = 10^2$	10. 0	10	10. 1

В левых частях равенств имеем число 10^2, написанное 11 раз, а потому сумма левых частей равенств даёт $(10+1) \cdot 10^2$ или, в общем случае, $(n+1) \cdot n^2$.

Будем теперь правые части равенств складывать по столбцам. Стоящий слева столбец даёт сумму 1^2+2^2+ $+3^2+\ldots+10^2$. Такую же сумму даёт столбец, стоящий справа. Остаётся сложить числа, стоящие в среднем столбце. На прилагаемой таблице показано, что эту сумму можно представить в виде:

$$1 \cdot 18 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 14 + \ldots + 9 \cdot 2.$$

И вот тут Архимед применяет остроумный приём. Чтобы удобнее подсчитать сумму чисел среднего столбца, он прибавляет к этим числам ряд чисел: $1+2+3+\ldots$ $\ldots+9+10$, чтобы получилась левая часть равенства (8).

Теперь при подсчёте правой части всей таблицы получается:

$$2\sum_2+1\cdot 19+2\cdot 17+3\cdot 15+\ldots+9\cdot 3+10\cdot 1=$$
$$=2\sum_2+1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2+10^2=2\sum_2+\sum_2+3\sum_2.$$

Чтобы не нарушилось равенство, необходимо и к левой части таблицы прибавить сумму $1+2+3+\ldots+10$.

В результате, в левой части равенства получаем:

$$(10+1)\cdot 10^2+(1+2+3+\ldots+10)=$$
$$=(10+1)\cdot 10^2+\frac{(1+10)\cdot 10}{2}.$$

Окончательно равенство примет такой вид:

$$3\sum_2=(10+1)\cdot 10^2+\frac{1}{2}10\,(10+1).$$

Или же, в общей форме, для любого значения n:

$$3\sum_2=(n+1)\cdot n^2+\frac{1}{2}n\,(n+1).$$

Вынося $n\,(n+1)$ за скобки, получаем

$$3\sum_2=n\,(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2};$$

откуда следует:

$$\sum_2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Мы снова пришли к формуле (7).

ГЛАВА II.

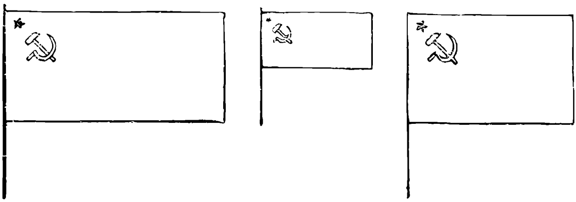
«НА СКОЛЬКО» И «ВО СКОЛЬКО».

1. Отношение двух количеств.

При сравнении двух количеств можно поставить два основных вопроса: 1) на сколько одно из них больше другого; 2) во сколько раз одно больше другого. Например, если одна фабрика выпускает ежедневно 920 пар обуви, а другая—800 пар, то на вопрос: «На сколько продукция первой фабрики больше?», ответ будет: «На 120 пар», так как $920-800=120$. Если же спросить: «Во сколько раз продукция первой фабрики больше продукции второй?», то ответить на этот вопрос будет труднее. Число 920 не делится без остатка на 800, поэтому ответ нельзя дать в виде целого числа, сказав, например, что продукция первой фабрики в 2 или 3 раза больше. Обычно всякое отношение двух однородных количеств обозначается дробью $\frac{A}{B}$, в данном случае $\frac{920}{800}$. Если эта дробь поддаётся сокращению, то величина отношения принимает более простой вид: $\frac{920}{800}=\frac{92}{80}=\frac{46}{40}=$ $=\frac{23}{20}$. Это означает, что если продукцию второй фабрики принять за 20 долей, то продукция первой фабрики составит 23 таких же доли. Однако следует помнить, что дробь $\frac{23}{20}$, выражающая искомое отношение, по существу содержит в себе сопоставление двух чисел, двух величин, и поэтому было бы правильнее писать её в виде пары чисел (23 : 20). Иначе говоря, переход от продукции

800 ед. к продукции 920 ед. равносилен переходу (20 ед. $\to$ 23 ед.) или короче (20 $\to$ 23).

Следует отметить, что на вопрос «во сколько» ответ часто дают в процентах. Так, в нашем примере продукцию второй фабрики (800 пар обуви) можно принять за 100%; тогда разница в 120 пар составит 15%, а потому продукция первой фабрики составит 115%. Хотя и принято говорить, что первая фабрика выпускает обуви на 15% больше, чем вторая, но в самом деле такое процентное вычисление даёт ответ именно на вопрос



Черт. 10.

«во сколько», а не на вопрос «на сколько». На 15% больше, это значит «больше в отношении 115 : 100».

Пример 1. В Сталинской Конституции имеется статья 144, которая касается флага СССР: «Отношение ширины флага к длине 1 : 2». Означает ли это, что установлена определённая величина флага? Конечно, нет. Можно приготовить огромные флаги, флаги средней величины и маленькие флажки, притом так, чтобы все они соответствовали указанному пункту Конституции. Что же выражает это предписание 1 : 2? Оно даёт отношение двух величин, двух отрезков, соотношение длины и ширины.

Если задать длину флага, например, в 3 *м*, то ширина должна быть равна 1,5 *м*. И, наоборот, если известна ширина флага, например, 50 *см*, то длину следует взять равной одному метру. Таким образом, узаконенное отношение 1 : 2 вполне определяет форму флага, но не его величину. Это отчётливо видно на черт. 10: первые два советских флага нарисованы с соблюдением указанного Конституцией отношения сторон; третий флаг взят с отношением сторон 2:3. Форма последнего флага противоречит Конституции.

Пример 2. В саду во время гулянья была устроена лотерея. Выпустили 1000 билетов, из которых выигрышных было 80. Какова вероятность выиграть, купив один билет?

Шансы на выигрыш, очевидно, зависят от отношения числа выигрышных билетов к общему числу всех билетов, т. е. определяются парой чисел 80 : 1000. Это отношение называется вероятностью выигрыша и записывается обычно в виде дроби:

$$p = \frac{80}{1000} = \frac{8}{100} \text{ или } 0{,}08.$$

Если 75 школьников возьмут по билету, то следует ожидать, что из них выиграют $75 \cdot p = 75 \cdot 0{,}08 = 6$ человек.

Если устроить лотерею с 3000 билетов, из которых 240 выигрышных, то шансы на выигрыш не изменяются, так как отношение числа выигрышных билетов к общему числу остаётся прежним:

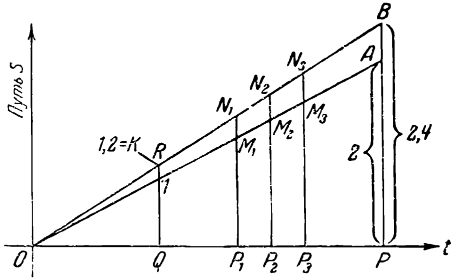
$$\frac{240}{3000} = p = \frac{80}{1000} = 0{,}08.$$

Последний пример отчётливо показывает, что отношение может оставаться неизменным, хотя изменяются числа, определяющие отношение. Это имеет место тогда, когда оба числа, составляющие отношение, умножаются или делятся на одно и то же число. Иначе говоря, отношение $(am : bm)$ равно отношению $(a : b)$.

Пример 3. Пусть два тела начали двигаться одновременно и движутся с постоянной скоростью. Графиком движения того и другого тела будут прямые линии (черт. 11). Через некоторый промежуток времени оказалось, что первое тело прошло 2 *км*, а второе 2,4 *км*. На графике движения этих двух тел представлены прямыми OA и OB, причём OP означает соответствующий промежуток времени.

Ввиду того, что движение того и другого тела совершается равномерно, отношение пройденных расстояний

$\frac{P_1N_1}{P_1M_1}=\frac{P_2N_2}{P_2M_2}=\ldots$ для любого момента времени остаётся одним и тем же. В течение всего процесса движения некоторая величина, а именно величина отношения $\frac{PN}{PM}$, остаётся неизменной. Эту величину можно сделать более наглядной, если из всевозможных пар PM и PN взять такую, где одно из расстояний, именно PM, равно 1 (единице). Пусть отрезок $Q1$ равен 1: тогда отрезок QR равен числу $k=\frac{2,4}{2}=1,2$. Принято вместо отношения (1,2 : 1) писать просто число 1,2. Это число (абстракция от пары чисел) называется величиной отношения или же *коэффициентом отношения*. Пишут кратко: $\frac{PB}{PA}=k=1,2$.



Черт. 11.

Заметим ещё, что отношения количеств $A:B$ и $B:A$ являются взаимно обратными. Их величины выражаются двумя взаимно обратными дробями: $k_1=\frac{m}{n}$; $k_2=\frac{n}{m}$; например, $\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{5}$. Произведение таких двух коэффициентов равно единице. Например:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}=1.$$

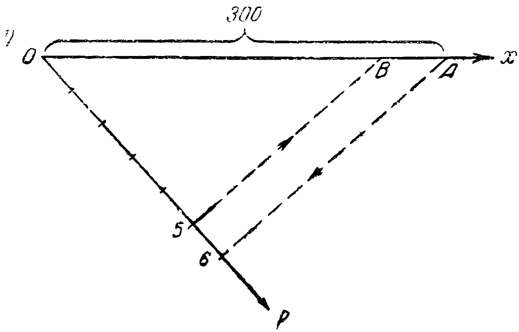
Обратно, если нам известны одно из количеств A (или B) и коэффициент их отношения, то можно определить второе количество B (или A).

Например, $A=300$; $k=\frac{B}{A}$ равно $\frac{5}{6}$. Требуется найти B. Если A содержит 6 долей, то B таких же долей содержит только 5. Надо совершить переход ($6\longrightarrow 5$). Для этого делим величину $A=300$ на 6 равных долей:

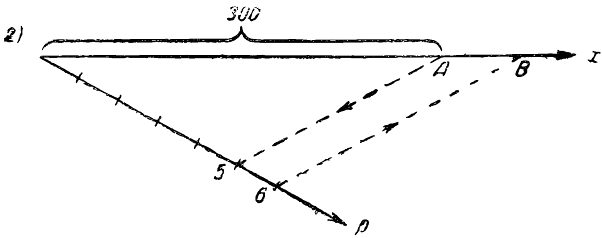
$300:6=50$, и берём 5 таких долей: $50 \cdot 5 = 250$. Наш переход ($6 \rightarrow 5$) состоит из двух простых операций.

Обычно принято записывать иначе: $\frac{B}{A} = k$, откуда $B = Ak$, т. е. надо умножить величину A на коэффициент (дробь) k.

Другой пример. $A = 300$; $\frac{A}{B} = k = \frac{5}{6}$; найти B.



Черт. 12а.



Черт. 12б.

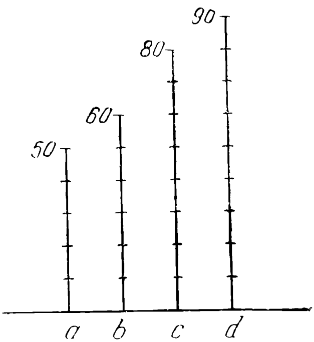
Но если $A:B = \frac{5}{6}$, то $B:A = \frac{6}{5}$. Значит переход от A к B даётся скобкой ($5 \rightarrow 6$). Поступая попрежнему, найдём: $\frac{300}{5} = 60$; $60 \cdot 6 = 360$.

Покажем решение этих двух примеров на графике (черт. 12а и б).

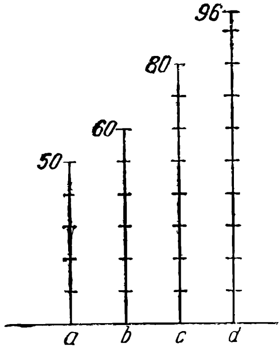
Пусть исходная величина A представлена отрезком OM, взятым вдоль оси Ox. Под некоторым углом к Ox проводим другую ось Op.

В первом случае откладываем вдоль оси Op от начала O шесть произвольных, но равных между собой отрезков. Конец 6-го отрезка соединяем прямой с точкой A. Параллельно полученной прямой $6A$ проводим из конца 5-го отрезка прямую до пересечения с осью Ox в некоторой точке. Эта точка B определит искомый отрезок OB, численно равный искомой величине B.

Во втором случае, графическое изображение перехода $(5 \longrightarrow 6)$ получаем аналогично.



Черт. 13.



Черт. 14.

Если имеются две пары величин: пара a; b и пара c; d, и если при этом отношение k_1 первых $a:b$ равно отношению k_2 вторых $c:d$, то такое равенство $k_1=k_2$, или же $a:b=c:d$ называют пропорцией (кратной пропорцией).

Чтобы лучше уяснить сущность пропорции, полезно сопоставить её с другим соотношением такого же рода. На черт. 13 представлены в виде столбиков четыре числа: $a=50$, $b=60$, $c=80$ и $d=90$. Из них второе на столько больше первого, на сколько четвёртое больше третьего: $60-50=90-80$ или $b-a=d-c$. Такую связь четырёх чисел называют разностной пропорцией. На черт. 14 представлены четыре числа: $a=50$, $b=60$, $c=80$, $d=96$. Здесь второе число во столько раз больше первого, во сколько раз четвёртое больше третьего, а именно, $60:50=96:80$, или $b:a=d:c$. Такую связь четырёх величин, как уже указано, называют кратной пропорцией, или просто пропорцией.

Из следующей таблички видна аналогия, существующая между свойствами разностной и кратной пропорций.

	Разностная	Кратная
	На сколько	Во сколько
	$60-50=90-80$	$60:50=96:80$
I	$b-a=d-c=r$	$b:a=d:c=k$
II	$b=a+r;\ d=c+r$	$b=ak;\ d=ck$
III	$a+d=b+c$	$a\cdot d=b\cdot c$

При сложении двух крайних столбиков (1-го и 4-го) на черт. 13 и двух средних столбиков (2-го и 3-го) получаются одинаковые результаты. Это значит, что в разностной пропорции сумма крайних членов равна сумме средних.

Подобную связь можно установить и между членами кратной пропорции, с той лишь разницей, что здесь вместо суммы следует взять произведения средних и крайних членов. Если величина отношения $b:a$ равна k, то и $d:c=k$; отсюда следует, что $b=ak$; $d=ck$. Произведение крайних членов ad может быть заменено произведением трёх множителей (если вместо d написать ck): $ad=a\cdot(ck)=ack$. Произведение средних также можно представить как произведение (тех же) трёх множителей: $bc=(ak)\cdot c=akc$. Таким образом установлено основное свойство всякой (кратной) пропорции: *произведение крайних членов равно произведению средних.*

2. Комбинирование отношений.

Читателю известно, как отношения применяются при решении задач. Однако эти применения становятся более широкими благодаря тому, что можно из двух, трёх, четырёх,... отношений образовать одно. Поясним это примером.

Пример. Заводоуправление увеличило число станков в 2 раза: в то же время, благодаря принятым мерам рационализации, производительность труда повысилась на 25%. Требуется узнать во сколько раз увеличилась продукция завода.

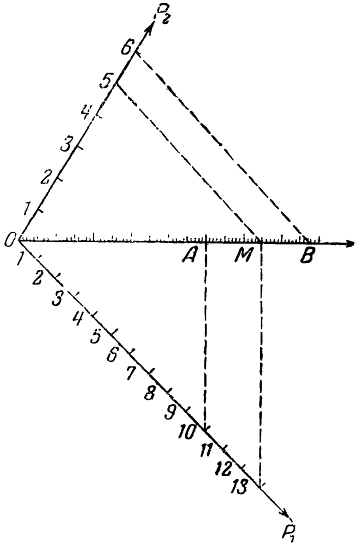
Здесь мы имеем одно увеличение в отношении $(1 \longrightarrow 2)$ и другое в отношении $(100 \longrightarrow 125)$, или $(4 \longrightarrow 5)$. Задача состоит в том, чтобы узнать результат этих двух изменений.

Решим задачу следующим образом. После увеличения числа станков вдвое завод будет выпускать вместо одной единицы продукции две такие единицы. Но повышение производительности труда таково, что вместо каждых 4 единиц выпускается 5. Поэтому надо указанные 2 единицы умножить на коэффициент $\frac{5}{4}$. Получим: $2 \times \frac{5}{4} = 2{,}5$ единицы. В результате вместо 1 единицы будет выпускаться 2,5 единицы. Коэффициенты изменения $k_1 = 2$ и $k_2 = 1\frac{1}{4}$ как бы сливаются в один коэффициент $k = 2\frac{1}{2}$, который, как легко заметить, получился в результате их перемножения.

Допустим теперь, что после этих мероприятий на заводе образовалась группа стахановцев, которая указала новые приёмы работы, повышающие производительность труда еще на 30%. Увеличение на 30% означает изменение в отношении $(100 \longrightarrow 130)$, или же $(10 \longrightarrow 13)$. Надо учесть эту величину нового отношения $k_3 = \frac{13}{10}$, а для этого надо прежнюю продукцию умножить на дробь $\frac{13}{10}$. В результате получим: $2{,}5 \times \frac{13}{10} = 3{,}25$. Итак, окончательно, в результате всех мероприятий выпуск продукции достигает 325% первоначальной продукции. Коэффициент увеличения равен $\frac{13}{4}$. Последний коэффициент $k = \frac{13}{4}$ получился в результате слияния трёх коэффициентов: $k_1 = \frac{2}{1}$; $k_2 = \frac{5}{4}$; $k_3 = \frac{13}{10}$, т. е. в результате их перемножения.

Ввиду того, что задачи, в которых несколько отношений сливаются в одно, часто встречаются в жизненной практике, остановимся на таких задачах подробнее.

Задача 1. Оборот кооператива поднялся за год на 30%; за второй год он поднялся на 20%. На сколько процентов поднялся оборот кооператива за два года?



Черт. 15.

Решение. Примем первоначальный оборот за 100%, или 100 долей. Тогда, после первого повышения, которое выражается отношением $(100 \longrightarrow 130)$, или $(10 \longrightarrow 13)$, т. е. коэффициентом $k_1 = \frac{13}{10}$, оборот будет составлять 130 долей. К новому обороту надо применить второе увеличение в отношении $(100 \to 120)$, или $(5 \to 6)$. Такое изменение даётся коэффициентом $k_2 = \frac{6}{5}$. Перемножаем коэффициенты $130 \cdot \frac{6}{5} = 156$. Вместо 100 долей получается в результате 156, т. е. увеличение на 56%. Окончательный коэффициент $k = \frac{156}{100} = \frac{78}{50} = \frac{39}{25}$ получился путём объединения коэффициентов $k_1 = \frac{13}{10}$ и $k_2 = \frac{6}{5}$.

Вместо такого последовательного умножения можно сразу получить коэффициент увеличения оборота путём перемножения коэффициентов: $\frac{13}{10} \cdot \frac{6}{5} = \frac{39}{25} = \frac{156}{100}$.

Присмотримся внимательнее к тому, что происходит с коэффициентами при их слиянии. При этом разборе воспользуемся черт. 15. Исходная величина представлена отрезком OA; обозначим длину OA через a, Величина первого отношения $k_1=\frac{13}{10}$ означает переход от отрезка OA к отрезку OM. Такое изменение на чертеже достигается при помощи добавочной оси OP_1 с 10 и 13 делениями. К новому отрезку OM надо применить изменение в отношении $(5\to 6)$. С этой целью на чертеже берётся другая ось OP_2 с 5 и 6 делениями; вместо отрезка OM получаем отрезок OB.

Если OA равно 10 долям, то $OM=13$ таким долям. Так как число 13 не делится на 5, то придётся каждый из 13 отрезков, на которые разбит отрезок OM, разделить на 5 мелких долей. Тогда отрезок OM будет содержать 65 мелких долей, а отрезок OA — 50 таких же долей.

Если теперь отрезок OM разделить на 5 равных частей, то в каждой из них будет содержаться $\frac{65}{5}=13$ мелких долей; но в таком случае отрезок OB содержит $13\times 6=78$ мелких долей.

В результате получается, что искомый отрезок OA содержит 50 мелких долей, а отрезок OB — 78 таких же долей. Отношение $\frac{OB}{OA}$ равно $\frac{78}{50}$. Важно отметить, что число 50 получилось в результате того, что сперва отрезок OA был разделён на 10 частей, а затем каждая часть ещё на 5 частей, т. е. OM в конце концов оказался разделённым на 50 частей. Число 50 есть произведение знаменателей обоих коэффициентов $k_1=\frac{13}{10}$ и $k_2=\frac{6}{5}$. Число 78 получилось в результате того, что на оси OP_1 взяли 13 частей, а затем на оси OP_2 взяли 6 частей. Число 78 есть произведение числителей обоих коэффициентов k_1 и k_2.

Итак, новый коэффициент $k=\frac{78}{50}$ получается путём умножения обоих знаменателей и обоих числителей двух данных отношений, т. е. путём перемножения двух дробей. Отсюда вытекает: если к величине a надо применить последовательно два изменения с коэффициентами k_1 и k_2, то вместо них можно применить одно изменение с коэффициентом k, который равен произведению первых двух:

$$k = k_1 \cdot k_2.$$

Так мы получили указанное ранее правило.

Задача 2. Допустим, что один кооператив получил распоряжение поднять цены на 10%, затем, вслед за ним, распоряжение понизить новые цены на 40%. Другой кооператив получил те же два распоряжения, но в обратном порядке: сперва понизить цены на 40%, затем повысить новые на 10%. Будут ли окончательные цены у обоих кооперативов одинаковы? Если нет, то у которого цена будет выше?

Решение. После всего вышесказанного не трудно ответить на поставленный вопрос. В первом случае окончательный коэффициент изменения равен:

$$k = k_1 \cdot k_2 = \frac{11}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{66}{100}.$$

Во втором случае окончательный коэффициент равен:

$$k = k_2 \cdot k_1 = \frac{6}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{66}{100}.$$

Произведение в обоих случаях одно и то же (переместительный закон умножения). Окончательные цены в обоих кооперативах будут одни и те же.

Задача 3. В саду устроена лотерея. Поставлены два сосуда с шарами. В одном сосуде имеется 4 красных и 16 белых, в другом — 6 красных и 14 белых шаров. Каждый играющий вынимает по одному шару из обоих сосудов. Играющий выигрывает, если оба вынутых шара окажутся красными. Каковы шансы на выигрыш?

Примечание. Вынутые шары каждый раз возвращаются в те сосуды, из которых они были взяты, и перемешиваются.

Первое решение. Вероятность вынуть красный шар из первого сосуда определяется отношением $(4:20) = (1:5)$ или дробью $p_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Это означает, что если вынимать шары подряд, например, 100 раз, то из них примерно 20 раз появится красный шар. Чем больше число опытов, тем результат ближе к ожидаемому отношению.

Допустим теперь, что в игре принимают участие 1000 человек. Если они все сначала вынимают шар из первого сосуда, то следует ожидать, что около 200 чел. вынут красный шар. Вынувшие белый шар из игры выбывают.

Остающиеся 200 чел. будут продолжать игру: каждый из них имеет право вынуть шар из второго сосуда. Вероятность вынуть красный шар из второго сосуда определяется отношением (6 : 20) = (3 : 10), или же дробью $p_2=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$. Следовательно, можно рассчитывать, что из 200 чел., удачно получивших красный шар из первого сосуда, только $200\cdot\frac{3}{10}=60$ чел. вынут красный шар также и из второго сосуда. Итак, из 1000 чел., участвующих в игре, лишь около 60 чел. окажутся выигравшими.

Отношение числа выигравших к числу всех играющих есть (60 : 1000), или (6 : 100), т. е. 6%. Таким образом из комбинирования отношений $p_1=\frac{4}{20}$ и $p_2=\frac{6}{20}$ получено новое отношение $p=\frac{6}{100}$. Этот результат вполне согласуется с вышеуказанным правилом сочетания двух коэффициентов: новое отношение равно произведению двух данных:

$$p=p_1\cdot p_2=\frac{4}{20}\cdot\frac{6}{20}=\frac{24}{400}=\frac{6}{100}.$$

Заметим, что результат не изменится, если играющие сперва обратятся ко второму сосуду, а затем к первому.

В т о р о е р е ш е н и е. Перенумеруем все шары в первом сосуде, причём нумера 1—4 поставим на красных шарах, остальные нумера 5—20—на белых. Так же поступим с шарами во втором сосуде: нумера 1—6 поставим на красных, остальные на белых шарах. Если играющий вынимает по одному шару из обоих сосудов, то при этом может появиться любой нумер из первого сосуда в сочетании с любым нумером из второго сосуда,—

нумер одного шара не зависит от нумера другого. Поэтому число всевозможных пар нумеров равно $20 \times \times 20 = 400$. На прилагаемой схеме показаны такие сочетания двух нумеров. В каждой клетке первое число указывает нумер шара из первого сосуда, второе число — нумер шара из второго сосуда. Нет никаких оснований ожидать, что какая-либо пара должна появляться чаще других; поэтому мы считаем, что появление всех пар одинаково возможно.

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6	1; 7	1; 8	. . .	1; 18	1; 19	1; 20
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6	2; 7	2; 8	. . .	2; 18	2; 19	2; 20
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6	3; 7	3; 8	. . .	3; 18	3; 19	3; 20
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6	4; 7	4; 8	. . .	4; 18	4; 19	4; 20
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6	5; 7	5; 8	. . .	5; 18	5; 19	5; 20
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6	6; 7	6; 8	. . .	6; 18	6; 19	6; 20
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	,
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19; 1	19; 2	19; 3	19; 4	19; 5	19; 6	19; 7	19; 8	. . .	19; 18	19; 19	19; 20
20; 1	20; 2	20; 3	20; 4	20; 5	20; 6	20; 7	20; 8	. . .	20; 18	20; 19	20; 20

Какие же из этих пар нумеров дают выигрыш? Очевидно только те пары, в которых первое число не более 4, а второе — не более 6. На прилагаемой схеме они отделены жирной линией. Число этих пар равно $4 \cdot 6 = 24$. Итак, из 400 возможных пар только 24 пары нумеров дают право на выигрыш. Так как вероятность появления всех пар одинакова, то отсюда следует, что шансы на выигрыш определяются отношением $(24 : 400) = (6 : 100)$, или дробью $p = \frac{24}{400} = \frac{6}{100}$. Вместе с тем имеет место равенство: $p = \frac{24}{400} = \frac{4}{20} \cdot \frac{6}{20} = p_1 p_2$. Это равенство ещё раз подтверждает вышеуказанное правило комбинирования отношений.

На последнем примере с полной ясностью вырисовывается тот факт, что результат сочетаний двух отношений не зависит от того, в каком порядке эти отношения взяты. Ведь взять отношения в другом порядке — это значит, вынимать сначала шар из второго сосуда, а уж потом из первого. Такое изменение порядка на нашей схеме отразится лишь в замене строк столбцами и столбцов строками.

Заметим ещё, что такой же ход решения будет иметь задача вычисления вероятностей в случае трёх, четырёх и более сосудов. Если обозначить вероятности вынуть красный шар из одного сосуда буквами $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$, то вероятность вынуть только красные шары из всех сосудов можно определить по формуле $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots$

В заключение рассмотрим две задачи, решения которых покажут, как в более сложных случаях используются понятия «на сколько» и «во сколько».

Задача 4. (Задача Ньютона. Условие задачи имеет искусственный характер, так как трудно представить себе совершенно равномерный прирост травы ежедневно в течение месяца. Но мы всё же приводим задачу: она очень полезна как упражнение.)

На одном лугу, площадью в 20 *га*, паслись 64 коровы и они за 60 дней съели траву, которая первоначально была на лугу, а также ту траву, которая выросла в течение этих 60 дней. На другом лугу в 30 *га* паслись 120 коров и они за 36 дней съели траву, имевшуюся первоначально, а также ту, которая выростала за эти дни. Сколько коров можно пустить на луг площадью в 40 *га*, чтобы они при тех же условиях могли прокормиться 48 дней?

Решение. Прежде всего заметим, что, увеличивая площадь луга в несколько раз, можно и число пасущихся коров увеличить во столько же раз, потому что во столько же раз увеличится и первоначальный запас травы и количество травы, вновь вырастающей. Иными словами, число гектаров площади и число коров прямо пропорциональны.

Поэтому видоизменим условия задачи таким образом, чтобы площадь луга во всех трёх случаях была одинаковой.

В прилагаемой таблице показан результат этого изменения, причём площадь повсюду приводится к 10 *га*.

№ луга	Площадь	Коров	Дней
I	10 *га*	32	60
II	10 *га*	40	36
III	10 *га*	x	48

Если решить задачу в таком виде, т. е. найти значение x для площади в 10 *га*, то для получения окончательного ответа надо будет число x умножить на 4.

Прежде чем перейти к решению задачи, обратим внимание на то, из чего складываются количества корма на лугах. Во-первых, на всех трёх лугах (площадью по 10 *га*) имеется одинаковое первоначальное количество травы. Во-вторых, на лугах происходит равномерный рост травы, и это количество вновь вырастающей травы пропорционально числу дней. В результате общее количество корма на лугах не пропорционально числу дней; в этой непропорциональности и заключается трудность задачи.

Переходим к решению.

1-й способ. Обозначим количество травы, имеющейся первоначально на лугу в 10 *га*, через A; количество травы вновь вырастающей за 1 день, через a. Тогда всё количество корма, которое получат коровы на первом лугу в 60 дней, равно $A+60a$; всё количество корма на втором лугу, которое получат коровы в 36 дней, равно $A+36a$.

Если принять количество травы, которое съедает одна корова в 1 день, за одну порцию, то на первом лугу 32 коровы за 60 дней съедят $32\cdot60=1920$ порций, а на втором лугу 40 коров за 36 дней съедят $40\cdot36=1440$ порций. Итак, мы получаем уравнения:

$$A+60\,a=1920 \text{ порций};$$
$$A+36\,a=1440 \text{ порций}.$$

Из сопоставления этих двух уравнений видно, что в первом случае количество травы на $24a$ больше, так как трава росла на 24 дня дольше. Именно поэтому в первом случае получилось на $1920-1440=480$ порций больше. Отсюда следует, что $24a$ составляют 480 порций:

$$24a=480; \quad a=\frac{480}{24}=20 \text{ (порций)}.$$

Итак, за 1 день на лугу в 10 *га* вырастает трава в количестве 20 порций. Теперь можно определить и первоначальное количество травы. Если, например, взять I луг, то для него $60a=60\cdot20=1200$ порциям, откуда $A=1920-1200=720$ порциям. После того как найдены величины A и a, легко закончить решение задачи. На третьем лугу коровы должны пастись 48 дней; поэтому можно рассчитывать на количество корма $A+48a$ или же $720+48\cdot20=720+960=1680$ порциям.

Значит, имеется 1680 порций на 48 дней неизвестному количеству (x) коров;

откуда:

$$48x=1680; \quad x=\frac{1680}{48}=35,$$

т. е. на III луг (в 10 *га*) можно пустить 35 коров. При тех же условиях на лугу в 40 *га*, можно было бы прокормить $35\cdot4=140$ (коров).

2-й способ. Мы сейчас решили задачу, подсчитывая общее количество корма на лугу в порциях, путём сравнения *«на сколько»* этих количеств корма. Теперь решим нашу задачу, не определяя количества корма в порциях, путём сравнения *«во сколько»* запасов корма. Сравнивая условия на I и II лугах, мы видим, что количества коров относятся между собой как $32:40=4:5$; количества дней относятся как $60:36=5:3$.

Но количество съедаемого корма прямо пропорционально количеству коров и одновременно прямо пропорционально количеству дней. Следовательно, количества корма на I и на II лугу относятся между собой как произведения указанных коэффициентов $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{3}$ (слияние коэффициентов).

$$k=k_1\cdot k_2=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{4}{3}\,.$$

Пользуясь прежними обозначениями, мы запас корма на I лугу обозначим через $A+60a$, на II лугу $A+36a$. Отсюда следует пропорция:

$$\frac{A+60a}{A+36a}=\frac{4}{3}.$$

Эта пропорция означает, что если знаменатель дроби (слева) примем за 3 доли, то числитель будет содержать таких же 4 доли. Отсюда следует, что разность числителя и знаменателя составляет одну долю, т. е. 1 доля $=24a$.

Но тогда числитель равен $24a\cdot 4=96a$. Иными словами, $A+60a=96a$; откуда $A=36a$. Итак мы не определили значений A и a (например, в порциях), но зато узнали соотношение величин A и a.

Количество корма (считая подрастающий) на I лугу равно $A+60a=36a+60a=96a$. Количество корма на III лугу равно $A+48a$ (площадь его — та же, именно 10 *га*, а подрастает трава в течение 48 дней), т. е. $36a+48a=84a$. Следовательно, на I лугу травы (вместе с подрастающей) в $\frac{96a}{84a}=\frac{8}{7}$ раз больше, чем на III. Это отношение, очевидно, не зависит от тех единиц, которыми измеряется количество травы. Если это количество измерять порциями, ежедневно съедаемыми одной коровой, то количество таких порций, доставляемых I лугом, будет составлять $\frac{8}{7}$ количества порций, доставляемого III лугом.

Но на III лугу x коров за 48 дней съедают $48x$ ежедневных порций травы, а на I лугу 32 коровы за 60 дней - $32\cdot 60=1920$ таких порций. Эти 1920 порций составляют $\frac{8}{7}$ от $48x$ порций:

$$1920=\frac{8}{7}\cdot 48x.$$

Отсюда $x=\frac{7\cdot 1920}{8\cdot 48}=35$ коров.

Это — на лугу в 10 *га*. А на лугу в 40 *га* при тех же условиях можно прокормить вчетверо больше, т. е. $35\cdot 4=140$ коров.

Оба приведённых решения, несмотря на употребление букв, чисто арифметические. Они очень поучительны, дают хорошую гимнастику уму, а главное — показывают, как при решении сложных задач используются отношения «на сколько» и «во сколько». Но разумеется, проще и быстрее эту задачу можно решить с помощью алгебры. Приведём третье — алгебраическое — решение задачи Ньютона.

Обозначим искомое количество коров на III лугу через x. Далее, через y обозначим первоначально находившееся на 1 *га* луга число ежедневно потребляемых одной коровой порций травы; а через z обозначим количество тех же порций, ежедневно вырастающих на 1 *га* луга. Тогда первый луг даст нам $20y$ (столько было сначала), да ещё $20 \cdot 60 \cdot z$ (столько на 20 *га* подросло за 60 дней) порций травы. Но, с другой стороны, это количество порций должно равняться произведению числа коров на число дней пастьбы, т. е. должно дать $64 \cdot 60$ порций. Приравнивая друг другу эти количества, получим:

$$20y + 20 \cdot 60z = 64 \cdot 60. \qquad \text{(I луг)}$$

Точно так же составим уравнения для двух других лугов:

$$30y + 30 \cdot 36z = 120 \cdot 36, \qquad \text{(II луг)}$$

$$40y + 40 \cdot 48z = 48 \cdot x. \qquad \text{(III луг)}$$

Понятное упрощение приведёт систему к такому виду:

$$\begin{aligned} y + 60z &= 192, \\ y + 36z &= 144, \\ 5y + 240z &= 6x. \end{aligned}$$

Первые два уравнения вовсе не содержат x и имеют одинаковые коэффициенты при y: они решаются в уме и дают $24z = 48$, т. е. $z = 2$, а отсюда $y = 72$.

Из третьего уравнения имеем:

$$x = \frac{5y + 240z}{6} = \frac{5 \cdot 72 + 240 \cdot 2}{6} = 140.$$

Получается, естественно, тот же ответ, что и при арифметическом решении, но значительно быстрее.

Задача 5. (Индусская задача XII в.) *A* сказал своему другу *B*: «Дай мне 100 монет, и я буду в 2 раза богаче тебя». На это *B* ответил: «Дай мне 10 монет, и я буду в 6 раз богаче тебя». Сколько денег у каждого?

В задаче мы имеем три положения (состояния): исходное фактическое положение (которое требуется определить); то положение, которое получилось бы при выполнении просьбы *A*; и то положение, которое получилось бы при выполнении просьбы *B*.

Предположим, что выполнено желание *A*, т. е. что *B* передал *A* сто своих монет; при этом у *A* оказалось в 2 раза больше, чем у *B*. Примем это положение за исходное. Будем считать искомыми новые суммы *A* и *B*, т. е. решать новую задачу.

Если мы эту новую задачу решим, то перейти к ответу на первоначально поставленную задачу будет нетрудно. Надо будет от *A* отнять 100 монет и прибавить их *B*. Теперь скажем: Если *A* отдаст *B* всего $100+10=110$ монет, то у *A* не только не будет больше в 2 раза, а наоборот — меньше в 6 раз чем у *B*. Итак, нам предстоит решить следующую видоизменённую задачу:

Новая задача. *A* имеет в 2 раза больше чем *B*. Если от *A* отнять 110 монет и передать их *B*, то у *B* окажется в 6 раз больше чем у *A*. Сколько монет имеется у каждого?

Дадим сначала арифметическое решение нашей задачи, очень изящное, но несколько длинное. Рассуждаем так.

Сейчас *A* имеет в 2 раза больше монет чем *B*. Если *B* каким-либо путём получил 110 монет, то для сохранения отношения (2:1) следовало бы лицу *A* прибавить со стороны 220 монет (т. е. пропорционально количествам монет каждого). На самом же деле *A* не только не получает 220 монет, а наоборот, отдаёт 110 монет. Сопоставляя этот действительный случай с указанным предположением, имеем:

вообр.	*B* получает 110 монет; *A* получает 220 монет.
действ.	*B* получает 110 монет; *A* отдаёт 110 монет.

При этом получаются такие соотношения:

вообр.	A имеет в 2 раза больше чем B.
действ.	A имеет в 6 раз меньше чем B.

Примем новое количество монет у B (после получения 110 монет) за 1 долю. Тогда:

вообр.	$B=1$ доля; $A+220$	это даёт	$A \cdot \cdot \cdot$ 2 доли.
действ.	$B=1$ доля; $A-110$		$A \cdot \cdot \cdot \frac{1}{6}$ доли.

Из этого сопоставления заключаем: в верхней строке A имеет на $220+110=330$ монет больше. Эти 330 монет составляют $2-\frac{1}{6}=1\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$ доли. Итак: $\frac{11}{6}$ доли $\doteq 330$; откуда:

$$1 \text{ доля} = 330 : \frac{11}{6} = \frac{330 \cdot 6}{11} = 180,$$

т. е. новая сумма у B равна 180 монет. Отсюда находим прежнюю сумму у B, именно, $180-110=70$. Итак «новая» задача решена: B имеет 70 монет, A — 140 монет.

Переход к исходной задаче. Условие новой задачи получилось при предположении, что выполнено желание A, т. е. что A получил от B 100 монет.

Для того чтобы вернуться к прежнему положению, надо отнять от A и передать B 100 монет. Получим:

$$\text{у } A \cdot \cdot \cdot 140-100=40 \text{ монет},$$
$$\text{у } B \cdot \cdot \cdot 70+100=170 \text{ монет}.$$

Это и есть ответ на задачу.

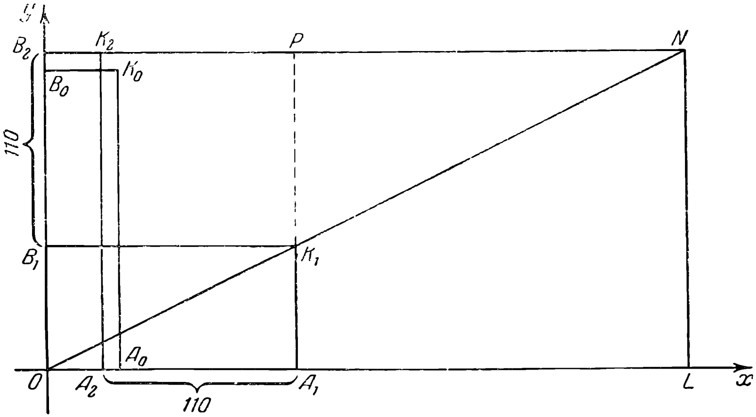
Иллюстрируем теперь решение задачи при помощи чертежа (черт. 16); фактическое положение даётся прямоугольником $OA_0K_0B_0$. Здесь отрезок OA_0 изображает ту сумму денег, которую имел А, а отрезок OB_0 — ту сумму денег, которую имел B. Если исполнить пожелание A, то создалось бы положение, даваемое прямоугольником $OA_1K_1B_1$. Именно это положение мы приняли за исходное во вспомогательной задаче.

Если исходить от положения $OA_1K_1B_1$, то для выполнения пожелания B надо отложить:

$B_1B_2 = +110$ ед. вдоль оси Oy,

$A_1A_2 = -110$ ед. на оси Ox (в направлении справа налево).

Решение вспомогательной задачи можно проследить на графике следующим образом. OA_1 в 2 раза больше чем OB_1. Если отрезок OB_1 получает прибавку $B_1B_2 = 110$ ед., то для сохранения величины угла K_1OA_1



Черт. 16.

(т. е. отношения 2 : 1) следовало бы прибавить к OA_1 отрезок A_1L, равный 220 ед., т. е. перейти к прямоугольнику $OLNB_2$. Мы же, наоборот, отнимаем от OA_1 отрезок $A_1A_2 = PK_2 = 110$ ед. Весь отрезок $NK_2 = NP + PK_2 = 220 + 110 = 330$ ед. Поэтому можно сопоставить два отношения:

$$B_2N + OB_2 = 2:1; \quad B_2K_2 : OB_2 = \frac{1}{6} : 1 .$$

Если отрезок OB_2 (т. е. сумму, которую будет иметь B при исполнении его пожелания) примем за 1 долю, то отрезок $OL = B_2N$ будет равен 2 долям, а отрезок $B_2K_2 = \frac{1}{6}$ доли. Разность $B_2N - B_2K_2 = K_2N$ равна $\frac{11}{6}$ доли и в то же время $K_2N = 330$ ед. Отсюда 1 доля, т. е. отрезок $OB_2 = 180$ ед. и т. д.

Эта задача быстрее решается алгебраически — путём составления следующей системы уравнений:

$$\frac{x+100}{y-100} = \frac{2}{1}; \qquad \frac{x-10}{y+10} = \frac{1}{6},$$

где x и y обозначают неизвестные суммы, бывшие первоначально у A и B.

3. Случай равных отношений.

Мы видели, каким образом несколько заданных отношений соединяются в одно результирующее отношение. Обратимся теперь к рассмотрению того случая, когда заданные отношения все равны между собой, т. е. когда величины отношений совпадают. Иллюстрируем этот случай задачами.

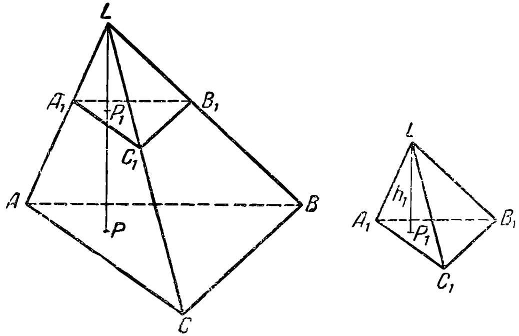
Задача 1. В парке устроена игра. Имеются 5 сосудов, в каждом из которых 60 красных и 40 белых шаров. Каждый играющий вынимает по одному шару из каждого сосуда. Выигрывает и получает премию тот, у кого все 5 вынутых шаров окажутся красными. Сколько премий должна приготовить администрация парка, если предполагается, что в игре примут участие 3000 человек.

Решение. Вероятность вынуть красный шар из одного сосуда выражается отношением (60 : 100) или дробью $p = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}$. Как уже было установлено, в случае нескольких сосудов вероятность выигрыша p равна произведению вероятностей получить красный шар из каждого сосуда в отдельности. Но в данном случае все эти вероятности между собой равны, поэтому искомая вероятность p равна $\frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \left(\frac{6}{10}\right)^5$.

Путём умножения получим: $p = \frac{7776}{100\,000}$. Эта дробь приблизительно равна $\frac{78}{1000}$, или 7,8%.

Полученный результат показывает, что из 1000 играющих в среднем будут выигрывать 78 человек. Если же в игре примут участие 3000 человек, то следует ожидать, что из них выиграют $78 \cdot 3 = 234$ человека.

Так как в действительности могут произойти отклонения в ту или другую сторону, то администрация должна приготовить премии в несколько большем количестве. Вопрос о том, какие возможны отклонения от ожидаемого числа выигрышей и какова вероятность



Черт. 17.

того или иного отклонения, составляет предмет особого раздела математики — теории вероятностей.

Задача 2. Дана пирамида $LABC$ (черт. 17). Высота её LP разделена в отношении $7:3$, считая от вершины. Через точку деления P_1 проведена плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды. Она рассекает пирамиду на две части. Требуется сравнить объёмы обеих полученных частей.

Решение. Верхняя пирамида $LA_1B_1C_1$ является как бы уменьшённой копией пирамиды $LABC$. Такие пирамиды называются подобными. Если высота LP_1 содержит 7 долей, то вся высота LP содержит $7+3=10$ таких же долей, а потому отношение $LP_1:LP$ равно $7:10$. Вследствие подобия тел, таково же будет отношение любых двух сходственных рёбер меньшей и большей пирамид.

Величина же отношения объёмов двух подобных пирамид равна кубу (третьей степени) коэффициента подобия k.

В нашей задаче взято значение $k=\frac{7}{10}$. Поэтому отношение объёмов меньшей и большей пирамиды равно $\left(\frac{7}{10}\right)^3=\frac{343}{1000}$. Поэтому, если объём всей большой пирамиды принять за 1000 долей, то объём верхней части (при сечении) равен 343 долям, а объём нижней части равен $1000-343=657$ долям. Как видим, нижняя часть пирамиды по объёму почти вдвое больше верхней части, хотя высота нижней (3 доли) значительно меньше высоты верхней (7 долей).

4. Гипербола и одно из её важнейших свойств.

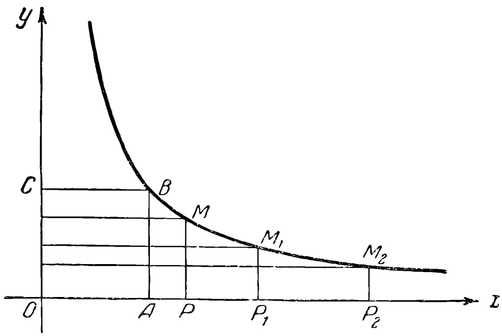
В предыдущей главе мы рассматривали лестницу «на сколько», в следующей главе мы будем изучать лестницу «во сколько».

Целью настоящей главы является выяснение взаимоотношения обоих понятий: на сколько и во сколько. Надо ясно видеть различие обоих понятий, но между ними имеется также внутренняя связь. И вот в математике оказалось возможным связать кратное и разностное отношения таким образом, чтобы они наглядно выступали рядом на одном и том же чертеже. При этом каждому отношению двух чисел $\frac{x_2}{x_1}=k$ ставится в соответствие некоторое другое число $\bar{k}$, и сочетанию двух «во сколько» $k_1 \cdot k_2$ соответствует сочетание двух «на сколько» $\bar{k}_1+\bar{k}_2$. Объяснению этого соответствия, т. е. перехода $k \to \bar{k}$, будет посвящена 5-я глава книги под названием «Что такое логарифм». Здесь же мы дадим новой величине $\bar{k}$ наглядное, почти осязательное, представление в виде некоторой площади, ограниченной сверху кривой линией — гиперболой.

Прежде чем говорить о гиперболе, вспомним, что называют прямой и обратной пропорциональностью.

Две переменные называются пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз, во столько же раз увеличивается и другая величина. Так, пропорциональными являются радиус окружности и её длина; длина пути и работа по поднятию груза и т. д.

Иногда две переменные величины связаны так, что с увеличением одной из них в несколько раз — другая не возрастает, а уменьшается во столько же раз. Такие



Черт. 18.

две величины называются обратно пропорциональными. Таковы, например, число рабочих и число дней, необходимых для кладки стены (чем больше рабочих кладут стену, тем скорее они закончат работу); таковы длина и ширина прямоугольника при заданной его площади (чем больше ширина прямоугольника, тем меньше должна быть его длина); таковы же, наконец, сопротивление проводника и сила электрического тока при постоянном напряжении (чем выше сопротивление проводника, тем меньше сила тока, проходящего через него).

Построим график, показывающий связь двух величин, обратно пропорциональных друг другу. Возьмём две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy (оси координат) (черт. 18). Будем строить прямоугольники, прилегающие к осям координат, так, чтобы площадь каждого из них была равна 1 кв. единице. Если взять

$OA = 1$ единице, то высоту AB придётся взять равной также 1 единице, и мы получим квадрат $OABC$. Если $OP_1 = 2$ единицам, то высоту P_1M_1 придётся взять равной $\frac{1}{2}$ единицы; если $OP_2 = 3$ единицам, то высоту P_2M_2 надо взять равной $\frac{1}{3}$ единицы, и т. д.

Можно построить сколько угодно таких прямоугольников. В самом деле, для всякого отрезка $OP = x$ можно определить соответствующую высоту прямоугольника PM, которую обозначим через y. Горизонтальный отрезок OP называют обычно абсциссой точки M, а вертикальный отрезок PM — ординатой точки M. Произведение абсциссы и ординаты $OP \cdot PM$ должно быть постоянно равным 1:

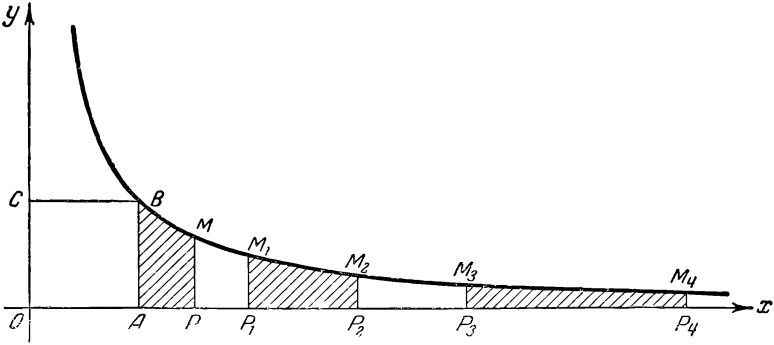
$$xy = 1, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{1}{x}.$$

Если нанести на чертёж весьма большое число произвольно взятых абсцисс и соответствующих им ординат и через концы ординат провести плавную линию, то получим кривую, которая называется «равнобочной гиперболой». Эта кривая даёт возможность наглядно представить себе, как изменяются две переменные, из которых одна обратно пропорциональна другой. Для этого вообразим, что точка P движется по оси Ox вправо: тогда абсцисса $OP = x$ будет возрастать, точка M станет скользить по гиперболе, постепенно спускаясь по ней вниз, но никогда не достигая оси Ox, а ордината PM будет уменьшаться, стремясь к нулю.

Если, наоборот, заставить x уменьшаться, стремясь к нулю, то точка P будет приближаться к точке O, точка M будет подниматься по гиперболе влево, удаляясь от оси Ox; вместе с тем ордината $y = PM$ будет неограниченно возрастать.

Пусть теперь даны какие-нибудь два числа: $x_1 = a$, $x_2 = b$ (пусть, например, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$). Взяв отрезки $OP_1 = x_1$ и $OP_2 = x_2$, построим для них соответствующие ординаты $P_1M_1 = y_1$ и $P_2M_2 = y_2$. Такое построение можно сделать для любой пары чисел x_1, x_2.

Криволинейную площадь $P_1P_2M_2M_1$, т. е. площадь, ограниченную ординатами P_1M_1, P_2M_2, отрезком P_1P_2 и кривой линией M_1M_2 (дугой гиперболы — черт. 19), мы сопоставим с отношением $k=\frac{x_2}{x_1}$. Связь между отношением $\frac{x_2}{x_1}$ и площадью $P_1P_2M_2M_1$ очень любопытна. Оказывается, рассматриваемая площадь обладает важ-

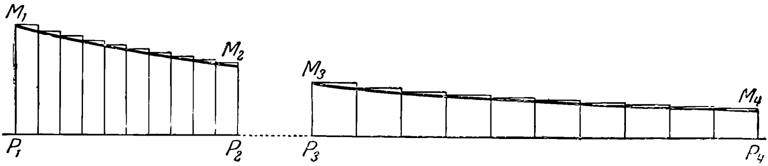


Черт. 19.

ным свойством. Именно, как величина отношения $k=\frac{x_2}{x_1}$ не изменяется, если оба числа x_1 и x_2 умножить на одно и то же число m $\left(\frac{mx_2}{mx_1}=\frac{x_2}{x_1}=k\right)$, так и площадь, построенная на интервале $[x_1 \ldots x_2]$, равна площади, построенной на интервале $[mx_1 \ldots mx_2]$.

Для простоты рассмотрим интервал от $x_1=2$ до $x_2=3$ и интервал от $x_3=4$ до $x_4=6$. Последние два числа в 2 раза больше первых двух. Отложим отрезки $OP_1=x_1$, $OP_2=x_2$, $OP_3=x_3$, $OP_4=x_4$ (черт. 19). Построим на отрезках P_1P_2 и P_3P_4 криволинейные площади $P_1P_2M_2M_1$ и $P_3P_4M_4M_3$. Докажем, что эти площади равны по величине, т. е. содержат одинаковое число квадратных единиц.

Так как эти площади ограничены кривой линией, то доказательство их равенства придётся вести косвенным путём. Представим себе, что интервал P_1P_2 разделён на 10 равных долей: так как $P_1P_2 = 1$ единице, то длина одной доли равна 0,1 единицы. Построим ступенчатую фигуру, как показано на черт. 20 (на нём обе криволинейные трапеции изображены в большем масштабе. чем на черт. 19). Каждый маленький прямоугольник имеет высотой левую ординату, и потому прямоугольники выходят зубцами за кривую линию. Точно такое же построение сделаем для второго огрезка P_3P_4. Длина P_3P_4 равна 2 единицам; длина одной доли будет равна $\frac{2}{10} = 0{,}2$ единицы. Сравнивая любой из десяти прямоугольников второй фигуры с соответствующим



Черт. 20.

прямоугольником первой фигуры (например, 4-й с 4-м, 5-й с 5-м и т. д.), видим, что у второй фигуры ширина прямоугольника в 2 раза больше, но одновременно высота каждого прямоугольника второй фигуры в 2 раза меньше, чем высота соответствующего прямоугольника первой фигуры, как это следует из способа построения гиперболы (см. стр. 53). Итак, соответственные прямоугольники равны по площади. Отсюда следует, что и площадь всей второй ступенчатой фигуры равна площади всей первой ступенчатой фигуры.

Разделим теперь мысленно отрезки P_1P_2 и P_3P_4 каждый на 100 равных долей и построим опять ступенчатые фигуры, каждая из которых на этот раз состоит из 100 прямоугольников. Повторив прежние рассуждения, придём к выводу, что площади этих новых ступенчатых фигур также равны между собой.

Процесс такого одновременного подразделения обоих отрезков P_1P_2 и P_3P_4 можно продолжать как угодно далеко, всё более увеличивая число долей, на которые делятся эти отрезки; каждый раз будем приходить к равенству площадей обеих ступенчатых фигур. Если брать число долей $n = 100$, 200, 400, 800 и т. д., то левая ступенчатая фигура по величине площади подходит как угодно близко к криволинейной площади $P_1P_2M_2M_1$ и одновременно правая — к криволинейной площади $P_3P_4M_4M_3$.

Разность между площадью ступенчатой фигуры и площадью соответствующей «гладкой» фигуры можно сделать меньше любого заданного числа, например, меньше чем 0,000 001, меньше чем 0,000 000 001, и т. д.; для этого нужно лишь достаточно мелко разделить отрезки P_1P_2 и P_3P_4.

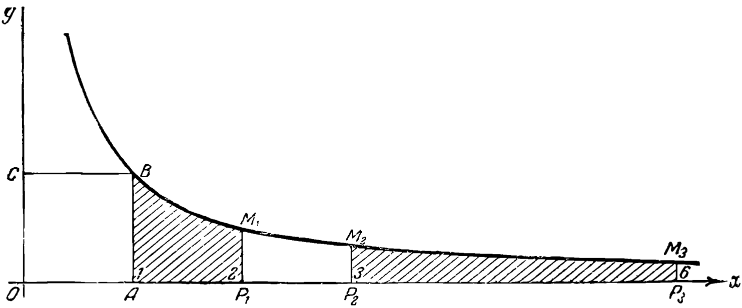
Но площади обеих ступенчатых фигур в процессе их изменения всё время остаются равными между собой, а потому и площади обеих гладких фигур, к которым приближаются наши ступенчатые фигуры, не могут не быть равными между собой.

Мы взяли две криволинейные трапеции, опирающиеся на отрезки [2 ... 3] и [4 ... 6]. Если бы вторую из этих трапеций мы заменили трапецией, построенной на отрезке [6 ... 9], то прямоугольники ступенчатой фигуры, построенной для этой трапеции, были бы в три раза шире и в три раза ниже, чем прямоугольники первой криволинейной фигуры, так что площадь этой криволинейной трапеции была бы такой же, как и у рассмотренных ранее. Ту же площадь, очевидно, будет иметь всякая криволинейная трапеция, построенная на отрезке $[2m \dots 3m]$. Иначе говоря, если изменять границы отрезка $[a \dots b]$, на котором построена криволинейная трапеция, оставляя неизменным отношение $b:a$, то площадь криволинейной трапеции не изменяется.

Во взятом примере отношение большего числа к меньшему равно 3:2. Поэтому обе рассмотренные нами криволинейные площади равны площади, опирающейся на отрезок [1 ... 1,5]; эта последняя является как бы мерой остальных. Но приведённое рассуждение сохраняет силу для любого отношения $x_3 : x_1$.

Итак, каждому отношению двух чисел $\frac{x_2}{x_1} = k$ мы отнесли некоторую другую величину — площадь криволинейной трапеции. Величина k не изменяется при одновременном изменении чисел x_1 и x_2 в одном и том же отношении, но при этом и площадь криволинейной трапеции остаётся неизменной. Площадь трапеции, опирающейся на интервал $[x_1 \ldots x_2]$, как бы сопутствует величине отношения $k = \frac{x_2}{x_1}$. Но как измерить эту площадь?

Приближённо площадь криволинейной трапеции можно вычислить, если сделать весь чертёж на милли-



Черт. 21.

метровой бумаге в большом масштабе; тогда можно подсчитать число квадратиков, заключённых внутри криволинейной площади. Но математика стремится к точности, и в VI главе этой книги читатель узнает формулу, дающую точную величину площади. Здесь же нам важно подчеркнуть, что именно отношение двух чисел $\frac{x_2}{x_1}$, и только оно, определяет величину площади, ограниченной дугой гиперболы $y = \frac{1}{x}$, двумя ординатами и опирающейся на отрезок $[x_1 \ldots x_2]$.

Следствие. Из вышеизложенного можно извлечь следующее неожиданное и весьма важное следствие. Пусть произведение двух чисел $x_1 \cdot x_2$ даёт третье число x_3.

Для конкретности будем считать, что $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=x_1\cdot x_2=2\cdot 3=6$. На черт. 21 отложены соответствующие отрезки

$$OP_1=x_1,\quad OP_2=x_2,\quad OP_3=x_3.$$

Площадь, ограниченную гиперболой и опирающуюся на отрезок [1 ... 6], можно представить как сумму площадей, опирающихся на отрезок [1 ... 3] и на отрезок [3 ... 6]. Но отношение (6:3) равно отношению (2:1), а потому площадь; опирающуюся на отрезок [3 ... 6], можно заменить площадью, опирающейся на отрезок [1 ... 2]. Отсюда следует: криволинейная площадь, ограниченная гиперболой и расположенная на отрезке [1 ... 6], равна сумме площадей, ограниченных той же гиперболой и расположенных на отрезках [1 ... 2] и [1 ... 3]. Вообще, для всяких трёх чисел x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих условию $x_3=x_1\cdot x_2$, площадь, ограниченная гиперболой и лежащая на отрезке $[1\ldots x_3]$, равна сумме площадей, ограниченных той же гиперболой и лежащих на отрезках $[1\ldots x_1]$ и $[1\ldots x_2]$. Этот результат мы вкратце сформулируем так:

Теорема. Криволинейная площадь, ограниченная гиперболой и лежащая на интервале $[1\ldots x_1x_2]$, равна сумме площадей, лежащих на интервалах $[1\ldots x_1]$ и $[1\ldots x_2]$.

В заключение покажем на нашей модели связь между пропорцией кратной (во сколько) и пропорцией разностной (на сколько).

Пусть (черт. 22) имеется пропорция:

$$x_1:x_2=x_3:x_4;$$

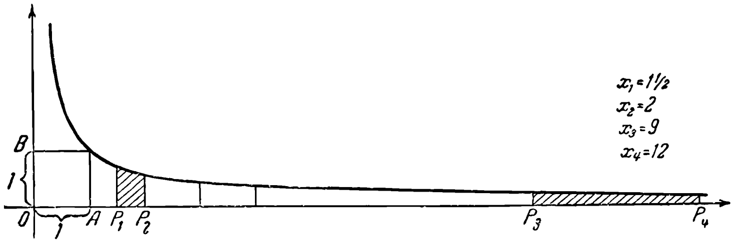
например,

$$1\frac{1}{2}:2=9:12.$$

На чертеже четырём точкам с абсциссами, равными этим числам, соответствуют площади:

на	интервале	$[1\ldots x_1]=s_1$;
»	»	$[1\ldots x_2]=s_2$;
»	»	$[1\ldots x_3]=s_3$;
»	»	$[1\ldots x_4]=s_4$

(Точки с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4 отмечены буквами P_1, P_2, P_3, P_4.) Но согласно изложенному, в силу указанной пропорции, т. е. равенства двух отношений, имеет место равенство площадей на интервалах $[x_1 \ldots x_2]$ и $[x_3 \ldots x_4]$, т. е. равенство $s_2 - s_1 = s_4 - s_3$. Эти разности на чертеже представлены двумя заштрихованными площадками. Итак, мы получили разностную пропорцию чисел s, сопровождающую кратную пропорцию чисел x.



Черт. 22.

5. Три средних.

Мы знаем, что изменение линейных размеров какой-нибудь плоской (двумерной) фигуры, например, сторон треугольника, в некотором отношении $(1 \longrightarrow k)$ сопровождается изменением её площади в отношении $(1 \longrightarrow k^2)$. Можно поставить обратную задачу: зная увеличение площади, например, в отношении $(1 \longrightarrow 9)$, определить увеличение каждой стороны? Если в первой задаче мы некоторый переход или изменение $(1 \longrightarrow k)$ повторяем два раза, то во второй задаче мы процесс перехода как бы «раскалываем» на две половины. Например, увеличение в отношении $(1 \longrightarrow 9)$ можно представить себе как бы составленным из двух равных переходов:

$$(1 \longrightarrow 3) \text{ и } (3 \longrightarrow 9),$$

так как второе отношение равно первому.

Приведём ещё пример. Пусть требуется увеличить добычу угля в шахте N в 2 раза, причём дан срок в 2 года. Тогда через 1 год должно иметь место увеличение $(1 \longrightarrow q)$, через 2 года увеличение $(q \longrightarrow q^2)$. Таким образом q^2 должно быть равно 2. Но если $q^2 = 2$, то $q = \sqrt{2} \approx 1{,}41$. Следовательно, через 1 год увеличение должно составить 41%.

Рассмотрим теперь увеличение не от единицы, а от некоторой величины a до величины b, например, от 16 единиц до 80 единиц. И в этом случае можно поставить вопрос: какова та промежуточная величина (назовём её g), которая «раскалывает» интервал от a до b на два «равных» перехода $(a \longrightarrow g)$ и $(g \longrightarrow b)$, равноценных в вышеуказанном смысле. Можно поступить так. Переход $a \longrightarrow b$, например, $16 \longrightarrow 80$, равносилен некоторому определённому переходу $1 \longrightarrow k$, в данном случае $(1 \longrightarrow 5)$. Этот переход мы раскалываем «пополам»; получим $(1 \longrightarrow 2{,}24)$, потому что $\sqrt{5} \approx 2{,}24$. Прилагаем «половину перехода» к исходной величине a; получим $ak = 2{,}24a$. При этом в результате получится переход

$$a \longrightarrow 2{,}24a$$

$$2{,}24a \longrightarrow 5a = b.$$

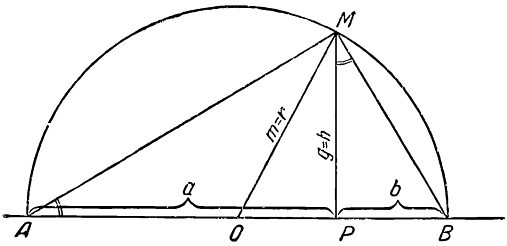
Вставленная промежуточная величина получила название «среднего геометрического» двух данных чисел. Мы получили её, приводя переход $(a \longrightarrow b)$ к переходу $(1 \longrightarrow k)$, где $k = \frac{b}{a}$.

Можно определить среднее геометрическое другим путём. Так как для него имеем переход $(a \longrightarrow x \longrightarrow b)$, где отношения $\frac{x}{a}$ и $\frac{b}{x}$ равны, то можно задачу нахождения x решить с помощью пропорции: $a : x = x : b$, откуда $x^2 = ab$; $x = \sqrt{ab}$.

Это среднее x принято обозначать через g, от слова geometrica, что значит «геометрическая», так как оно встречалось ещё в древности при решении геометрических задач (именно задач на подобие фигур). Итак,

$$a : g = g : b.$$

Рассмотрим пример геометрической иллюстрации величины g. Пусть (черт. 23) вдоль прямой линии от точки P отложены отрезки PA длины a и PB длины b. Из середины O всего отрезка AB опишем полуокружность и в точке P восстановим перпендикуляр PM. Тогда длина PM и будет средним геометрическим g обоих чисел a



Черт. 23.

и b. Как читателю известно из курса геометрии, имеет место пропорция: $AP:PM=PM:PB$; или $a:h=h:b$. А потому высота h является средним геометрическим величин a и b.

Чтобы яснее представить себе связь между средним геометрическим и средним арифметическим, докажем следующую теорему:

Теорема. Среднее геометрическое двух положительных чисел меньше их среднего арифметического *).

Ввиду важности этой теоремы, докажем её тремя способами.

1-й способ. На приведённом сейчас чертеже среднее геометрическое было представлено в виде высоты $PM=h$. Так как сумма обоих чисел $a+b$ равна длине диаметра AB, то полусумма их m равна длине радиуса.

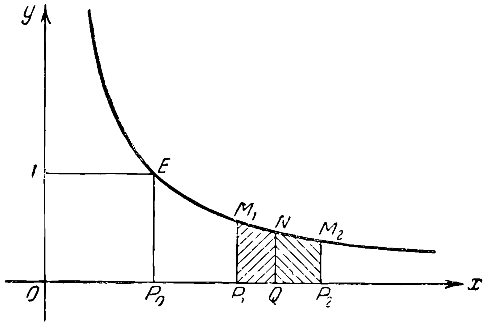
Имеем: $m=OA=OB=OM$.

---

*) Если мы возьмём два одинаковых числа a и $b=a$, то их среднее арифметическое будет равно среднему геометрическому: $\frac{a+a}{2}=\sqrt{a\cdot a}=a$. Чтобы учесть и эту возможность в формулировке указанной теоремы, слово «меньше» заменяют словами «не больше».

Тогда в прямоугольном треугольнике OPM катет PM равен g, гипотенуза OM равна m. Но катет меньше гипотенузы, откуда $g < m$, что и требуется доказать.

2-й способ. Если числа a и b не равны друг другу, то их разность $a-b$ не равна нулю, следовательно,



Черт. 24.

квадрат этой разности есть число положительное, т. е. большее чем нуль:

$$(a-b)^2 > 0.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0.$$

Прибавим к обеим частям этого неравенства по $4ab$; это даст новое неравенство:

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab \quad \text{или} \quad (a+b)^2 > 4ab,$$

что можно иначе записать так:

$$(a + b^2) > (2\sqrt{ab})^2.$$

Но если квадрат одного положительного числа больше чем квадрат другого, то и само первое число больше второго. Следовательно,

$$a + b > 2\sqrt{ab} \quad \text{или} \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$$

что и требуется доказать.

3-й способ. На черт. 24 на оси Ox отложены отрезки $OP_1 = a$, $OP_2 = b$. Пусть среднее геометрическое этих чисел g изобразится отрезком OQ.

Согласно вышедоказанному свойству гиперболы, если имеет место пропорция $OP_1 : OQ = OQ : OP_2$, то криволинейные площади M_1P_1QN и NQP_2M_2 должны быть равны, т. е. ордината QN должна делить площадь $M_1P_1P_2M_2$ пополам. Но если бы точка Q лежала ровно посредине между точками P_1 и P_2, то левая часть площади была бы больше правой, так как гипербола понижается слева направо.

Для того чтобы площадь разделилась пополам, необходимо, чтобы ордината QN была расположена левее середины отрезка P_1P_2. Таким образом, P_1Q должно быть меньше, чем QP_2, т. е. $g - a < b - g$, что и требуется доказать.

Помимо среднего геометрического и среднего арифметического в математике рассматривают ещё одно «среднее», носящее название среднего гармонического. Словесное определение его довольно громоздко; вот оно: «среднее гармоническое двух данных чисел есть число, обратное среднему арифметическому чисел, в свою очередь обратных заданным числам». Легче понять на конкретном примере, как образуется это «среднее»:

Данные числа	Обратные им числа	Среднее арифметическое для обратных чисел	Число, обратное последнему
$a = 20$ $b = 30$	$\frac{1}{a} = a_1 = \frac{1}{20}$ $\frac{1}{b} = b_1 = \frac{1}{30}$	$\frac{a_1+b_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)$	$\dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)}$

Принято обозначать это новое «среднее» буквой h (от французского слова harmonique — гармонический).

Сосчитаем это h для взятых нами чисел 20 и 30:

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{12}; \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{24}; \quad 1:\frac{1}{24}=24.$$

Нетрудно также написать общую формулу для среднего гармонического. Имеем:

$$a_1 = \frac{1}{a}; \quad b_1 = \frac{1}{b}; \quad a_1 + b_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab};$$

$$\frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{a+b}{2ab}; \quad 1 : \frac{a+b}{2ab} = \frac{2ab}{a+b} = h.$$

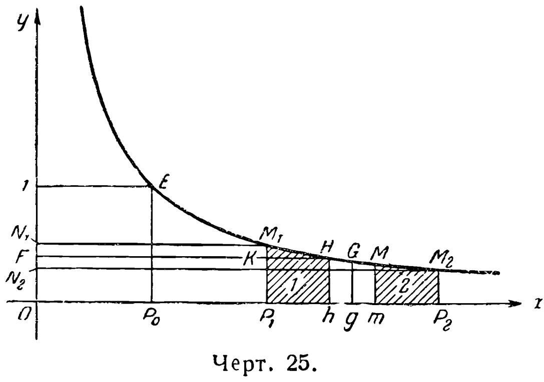
Таким образом среднее гармоническое определяется формулой:

$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Нетрудно видеть, что среднее гармоническое можно определять и таким равенством:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Покажем теперь, как можно построить среднее гармоническое, если пользоваться геометрической моделью



Черт. 25.

отношений. На черт. 25 представлена гипербола, для каждой точки которой произведение $OP \cdot PM = x \cdot y = 1$. Пусть длина $OP_1 = a$, $OP_2 = b$. Тогда длина ординаты P_1M_1 равна $\frac{1}{a} = a_1$; ордината $P_2M_2 = \frac{1}{b} = b_1$. При помощи горизонтальных прямых M_1N_1 и M_2N_2 отложим эти новые отрезки на оси Oy. Для этих обратных величин a_1 и b_1 берём среднее арифметическое, т. е. точку F, лежащую посредине между точками N_1 и N_2. Из точки F проводим горизонтальную прямую до встречи с гиперболой в некоторой точке H; из точки H проводим ординату Hh. Тогда длина отрезка Oh представит собой среднее гармоническое величин a и b.

Сравним теперь все три рассмотренные нами «средние» двух чисел a и b:

1) среднее геометрическое

$$g=\sqrt{a\cdot b};\quad a:g=g:b;\quad g\cdot g=a\cdot b;$$

2) среднее арифметическое

$$m=\frac{a+b}{2};\quad b-m=m-a;\quad m+m=a+b;$$

3) среднее гармоническое

$$h=\frac{2ab}{a+b};\quad \frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right);\quad \frac{1}{h}+\frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Мы предполагаем, что $a<b$ и что оба числа больше 1. Оказывается, что для любых двух неравных положительных чисел средние g, m, h всегда располагаются в определённом порядке.

Выше мы уже показали, что среднее геометрическое g ближе к меньшему числу a. А это означает, что g меньше среднего арифметического m.

Итак $a<g<m<b$.

Остаётся установить положение среднего гармонического. Можно показать, что среднее гармоническое h всегда меньше среднего геометрического g. Для этого достаточно показать, что на черт. 25 ордината hH делит площадь $P_1P_2M_2M_1$ так, что левая часть меньше правой (ранее было показано, что ордината gG делит эту же площадь пополам).

По построению гиперболы имеем: пл. $OP_1M_1N_1=$ $=$ пл. $OhHF=1$ кв. ед.

Отсюда следует, что площади прямоугольников FKM_1N_1 и P_1hHK равны.

Прибавляя к тому и другому прямоугольнику «криволинейный» треугольник KHM_1, получим: криволинейная площадь FHM_1N_1 равна криволинейной площади

P_1hHM_1. Таким же образом можно показать, что криволинейная площадь N_2M_2HF равна криволинейной площади hP_2M_2H.

Из сравнения криволинейных узких площадей FHM_1N_1 и N_2M_2HF следует, что первая площадь меньше второй.

Отсюда следует, что и площадь P_1hHM_1 меньше площади hP_2M_2H. Итак, доказано, что $h < g$. Таким образом установлено расположение всех трёх «средних»:

$$a < h < g < m < b.$$

На черт. 25 отложены пять отрезков, соответствующих этим числам, на оси Ox:

$$OP_1 = a; \quad Oh = h; \quad Og = g; \quad Om = m; \quad OP_2 = b.$$

Приведём в заключение любопытную теорему, связывающую все три «средних».

Теорема. Из трёх средних h, g, m число g есть среднее геометрическое двух других.

Доказательство проще всего провести алгебраическим путём. Мы уже видели, что $m = \frac{a+b}{2}$, $h = \frac{2ab}{a+b}$. Среднее геометрическое чисел m и h равно квадратному корню из их произведения, т. е. $\sqrt{mh}$. Вычислим этот корень:

$$\sqrt{mh} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b}} = \sqrt{ab} = g.$$

А это как раз и нужно было доказать.

С гармоническим средним часто приходится иметь дело школьникам, хотя они и не называют его по имени. Рассмотрим, например, следующую известную всем задачу, по образцу которой решаются многие другие.

Задача. В бассейн ведут две трубы. Первая труба, действуя одна, наполняет его в 2 часа, вторая — в 3 часа. В какое время наполнится бассейн, если обе трубы будут действовать одновременно?

Посмотрим, какую часть бассейна наполняет одна 1-я труба, действуя в течение часа. Раз весь бассейн она наполняет за 2 часа, значит, за 1 час она наполнит его половину, т. е. $\frac{1}{2}$. Точно так же 2-я труба, действуя одна в течение часа, наполнит $\frac{1}{3}$ бассейна. Обе трубы, действуя вместе, наполнят в течение часа $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ бассейна.

Далее рассуждаем так: если $\frac{5}{6}$ бассейна наполняются за 1 час, то $\frac{1}{6}$ наполнится за $\frac{1}{5}$ часа, а весь бассейн — т. е. $\frac{6}{6}$ — за $\frac{1}{5}\cdot 6=\frac{6}{5}$ часа (т. е. за 1 час 12 минут).

Приглядевшись внимательнее к выполненным действиям, мы заметим, что, в сущности, мы нашли половину среднего гармонического данных в условиях задачи чисел, т. е. чисел 2 и 3. Действительно:

$$\frac{h}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 3}{2+3}:2=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}.$$

Читатели без труда докажут самостоятельно следующую физическую теорему: электросопротивление системы, состоящей из двух параллельно соединённых проводников, равно половине среднего гармонического собственных сопротивлений данных проводников.

ГЛАВА III.

ЛЕСТНИЦА «ВО СКОЛЬКО».

1. Геометрическая прогрессия.

Во второй главе книги мы подробно разобрали два способа сравнения величин: «на сколько больше» и «во сколько раз больше». Первый способ связан с вычитанием, второй — с делением.

В первой главе мы рассматривали арифметическую прогрессию, или «лестницу на сколько», т. е. ряд величин, из которых каждая на одно и то же число больше предыдущей. В настоящей главе мы разберём прогрессию другого рода, а именно—лестницу «во сколько». Лестница «во сколько», или геометрическая прогрессия, это — такой ряд чисел, в котором каждое число получается путём умножения предыдущего на постоянный коэффициент k (знаменатель прогрессии).

Примером геометрической прогрессии может служить ряд чисел: 5, 10, 20, ... Здесь $k=2$.

Числа, образующие прогрессию, называются её членами.

Арифметическая прогрессия была известна в самые отдалённые эпохи; о геометрической прогрессии мы находим первые отрывочные замечания в греческой математике лишь немногим более 2000 лет тому назад.

Понять различие между геометрической и арифметической прогрессией можно из следующего примера:

Директоры двух заводов A и B встретились на совещании. Из их беседы выяснилось, что оба завода выпустили за последний год одинаковые количества продукции, а именно по 1000 m металлических изделий. На совещании было решено добиваться дальнейшего роста продукции, причём был намечен ежегодный прирост на 40%.

Директор завода A выполнял задание следующим образом. В первый год после совещания его завод выпустил на 40% больше, чем раньше, т. е. на две пятых, а именно:

$$1000+1000\cdot\frac{2}{5}=1000+400=1400.$$

За второй год завод выпустил ещё на 400 m больше, т. е.

$$1400+400=1800,$$

и так далее. В результате выпуск изделий за последующие 4 года оказался таким:

до совещания	1000,
1-й год	1400,
2-й »	1800,
3-й »	2200,
4-й »	2600.

Директор завода B поступил иначе.

За первый год после совещания он выпустил на 40% больше, чем раньше, т. е.

$$1000+1000\cdot\frac{2}{5}=1400\ m.$$

За второй год директор завода B добился дальнейшего роста производительности труда, и завод выпустил за второй год на 40% больше, чем за первый год:

$$1400+1400\cdot\frac{2}{5}=1400+560=1960\ m.$$

На третий год он составил план по тому же принципу: опять увеличить выработку на 40% по сравнению с предыдущим годом:

$$1960+1960\cdot\frac{2}{5}=1960+784=2744\ m.$$

За четвёртый год завод B дал такую выработку:

$$2744+2744\cdot\frac{2}{5}=2744+1098=3842.$$

В результате выпуск изделий заводом B оказался следующим:

до совещания	1000,
1-й год	1400,
2-й »	1960,
3-й »	2744,
4-й »	3842.

Заметим, что коэффициент увеличения здесь равен $\frac{7}{5}$, так как выпуск каждого года составляет 140% предыдущего года,

$$140\% = \frac{140}{100} = \frac{7}{5}.$$

Через 4 года директоры заводов A и B снова встретились на совещании и сравнили выработку обоих заводов. Оказалось, что завод B выпустил значительно больше изделий, чем завод A.

Завод A сохранял всё время одну и ту же надбавку, равную 400 *т* в год. Завод B сохранял неизменным отношение выработки двух соседних лет, т. е. коэффициент увеличения $k = \frac{7}{5}$.

Представим на графике продукцию того и другого завода (черт. 26).

Приведём ещё один пример.

З а д а ч а. Некто положил в банк 200 руб. В течение 5 лет он не получал денег. Банк в конце каждого года присчитывал 6% к его вкладу. Сколько получит вкладчик через 5 лет?

Р е ш е н и е. Через 1 год вкладчик мог получить:

$$200 + 200 \cdot \frac{6}{100} = 200\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 200 \cdot 1{,}06 = 212 \text{ руб.}$$

Через 2 года он мог получить:

$$212 + 212 \cdot \frac{6}{100} = 212\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 224{,}7 \text{ руб.}$$

Эту сумму можно записать в виде:

$$(200 \cdot 1{,}06) \cdot 1{,}06 = 200 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06 = 200 \cdot (1{,}06)^2.$$

Через 3 года вкладчик мог получить:

$$224{,}7\left(1+\frac{6}{100}\right)=224{,}7\cdot 1{,}06=238{,}2 \text{ руб.};$$

иначе эту сумму можно обозначить так:

$$[200(1{,}06)^2]\cdot 1{,}06=200\cdot(1{,}06)^2\cdot 1{,}06=200\cdot(1{,}06)^3.$$

Через 4 года вкладчик мог получить:

$$238{,}2\cdot 1{,}06=252{,}5 \text{ руб.}$$

Эту сумму запишем ещё так:

$$[200\cdot(1{,}06)^3]:1{,}06=200\cdot(1{,}06)^3\cdot 1{,}06=200\cdot(1{,}06)^4.$$

Через 5 лет вкладчик получит:

$$252{,}5\cdot 1{,}06=267{,}6 \text{ руб.}$$

Эту сумму запишем так:

$$[200\cdot(1{,}06)^4]\cdot 1{,}06=200\cdot(1{,}06)^5.$$

Проделаем то же самое в буквенных обозначениях.

Если начальный вклад обозначим через a_0, а коэффициент ежегодного увеличения вклада через k, то суммы, которые вкладчик может получить в конце первого, второго, третьего и следующих годов, можно записать следующими формулами:

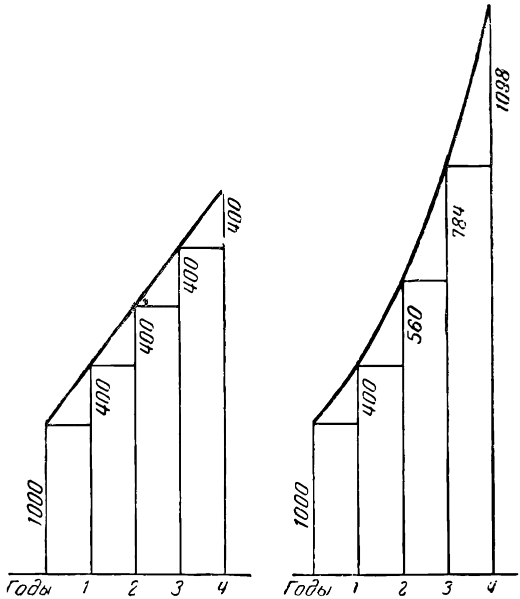
через 1 год:	$a_1=a_0\cdot k,$	$a_1=a_0k;$
через 2 года:	$a_2=a_1\cdot k,$	$a_2=a_0k^2;$
через 3 года:	$a_3=a_2\cdot k,$	$a_3=a_0k^3;$
. . . .	. . . .	. . . .
через 10 лет	$a_{10}=a_9\cdot k,$	$a_{10}=a_0k^{10};$
. . . .	. . . .	. . . .
через n лет	$a_n=a_{n-1}\cdot k,$	$a_n=a_0k^n.$

Равенства первого столбца выражают именно то, что числа представляют собой геометрическую прогрессию, так как величина вклада в конце каждого года равна величине вклада предыдущего года, умноженной на один и тот же коэффициент k.

Равенства второго столбца дают формулу для любого члена прогрессии. Коэффициент k, дающий отношение каждого члена прогрессии к предыдущему, принято обозначать буквой q; его называют «знаменателем» прогрессии. Формула для любого члена прогрессии запишется так:

$$a_n = a_0 \cdot q^n \text{ *)}. \qquad (1)$$

Вычисление a_n по формуле (1) гораздо сложнее, чем вычисление a_n в случае арифметической прогрессии.



Черт. 26.

Пусть, например, $a_0 = 20$, $q = 1{,}08$ и требуется найти a_{30}. Тогда по формуле (1) напишем: $a_{30} = a_0 \cdot q^{30}$. Но как сосчитать $(1{,}08)^{30}$?

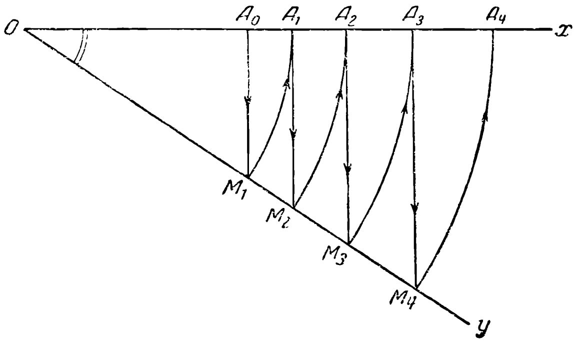
---

*) Заметим тут же, что в учебниках принято эту формулу записывать иначе. У нас первый член прогрессии был обозначен a_0, второй a_1, третий a_2, и т. д В учебниках первый член прогрессии обозначают через a_1, второй—через a_2, третий—через a_3 и т. д., и формула (1) записывается в таком виде:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

причём a_n соответствует нашему a_{n-1}, а a_1 — нашему a_0.

Перемножать 30 раз 1,08 весьма утомительно. Если требуется точный результат, то придётся иметь дело с огромным числом десятичных знаков. Очевидно, в таких случаях округляют получающиеся числа; надо, однако, следить за тем, чтобы эти округления в общем итоге не дали большого отклонения от искомого результата. В настоящее время такие вычисления делают весьма



Черт. 27.

быстро и со значительной степенью точности при помощи таблиц логарифмов, но об этом речь будет дальше.

Покажем теперь, как можно строить геометрическую прогрессию графическим путём. Пусть даны первый член и знаменатель прогрессии, например, $a_0=20$; $q=1,2$.

Откладываем (черт. 27) вдоль горизонтальной оси Ox отрезок $OA_0=a_0$. Способом, указанным во второй главе (черт. 12), увеличиваем отрезок OA_0 в отношении $(1 \longrightarrow q)$, например, в отношении $(1 \rightarrow 1,2)$, и отрезок OA_1, равный $a_0 \cdot q$, откладываем вдоль той же оси Ox (в нашем примере $a_0q=20 \cdot 1,2=24$). Из точки A_0 восставляем перпендикуляр к оси Ox; затем из точки O, как из центра, описываем радиусом, равным OA_1, дугу окружности до встречи с перпендикуляром в некоторой точке M_1. Через точки O и M_1 проводим прямую OY.

Для построения дальнейших отрезков, дающих значения членов геометрической прогрессии, из точки A_1 восставляем перпендикуляр до пересечения с прямой OY

где-нибудь в точке M_2; затем из точки O, как из центра, описываем радиусом, равным OM_2, дугу окружности до встречи с осью Ox в точке A_2. Отрезок OA_2 представляет собой следующий член прогрессии a_0q^2.

Если такого рода переходы совершать дальше $A_2 \to M_3 \to A_3$; $A_3 \to M_4 \to A_4$ и т. д., то на оси Ox отложатся отрезки OA_2, $OA_3, OA_4, OA_5, \ldots$, представляющие последовательные члены геометрической прогрессии aq^2, aq^3, aq^4 и т. д.

Чтобы показать правильность этого построения, надо рассмотреть пары соседних треугольников OA_0M_1 и OA_1M_2. Из их подобия следует:

$$\frac{OM_2}{OA_1} = \frac{OM_1}{OA_0}.$$

Согласно построению, мы имеем $OA_1 = OM_1 = a_0 \cdot q$; $OA_0 = a_0$, поэтому

$$\frac{OM_2}{a_0q} = \frac{a_0q}{a_0} = \frac{q}{1}.$$

Отсюда следует:

$$OM_2 = a_0q^2.$$

Кривая M_2A_2 есть дуга окружности; поэтому OA_2 также равно a_0q^2.

Далее берём треугольники OA_1M_2 и OA_2M_3. Из их подобия следует:

$$\frac{OM_3}{OA_2} = \frac{OM_2}{OA_1},$$

или

$$\frac{OM_3}{a_0q^2} = \frac{a_0q^2}{a_0q} = \frac{q}{1},$$

откуда

$$OM_3 = a_0q^2 \cdot q = a_0q^3.$$

Отрезок OA_3 также равен aq^3, и так далее.

В тех случаях, когда не требуется большой точности, можно пользоваться этим графическим построением.

Если сопоставить определения арифметической и геометрической прогрессий, то можно заметить следующую аналогию между ними. В арифметической прогрессии мы прибавляем одно и то же число для получения следующего члена, в геометрической прогрессии — умножаем для этого на один и тот же коэффициент. В арифметической прогрессии действие сложения играет ту же роль, какую в геометрической прогрессии играет действие умножения. Эта же аналогия находится и в формуле для любого члена прогрессий:

в арифметической прогрессии $a_n = a_0 + dn$ *),
в геометрической прогрессии $a_n = a_0 \cdot q^n$;

умножению разности арифметической прогрессии d на число членов n (многократное сложение) соответствует возведение в степень n знаменателя геометрической прогрессии q (многократное умножение). Между a_0 и dn действие сложения, между a_0 и q^n действие умножения.

Тесную связь между арифметической и геометрической прогрессиями можно иллюстрировать следующим примером.

Рассмотрим геометрическую прогрессию, у которой $a_0 = 2$; $q = 1,2$. Вычисления дают:

$$a_0 = 2;\ a_1 = 2,4;\ a_2 = 2,88;\ a_3 = 3,46;\ a_4 = 4,15;\ a_5 = 4,98, \ldots$$

Строим оси координат и график гиперболы $y = \frac{1}{x}$ (черт. 28). Вдоль оси Ox откладываем от начальной точки O последовательно отрезки:

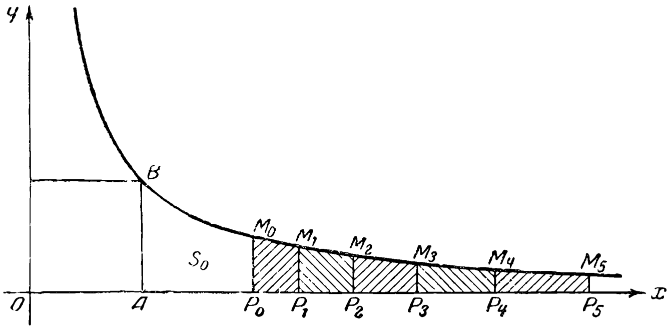
$$OA = 1;\ OP_0 = 2;\ OP_1 = 2,4;\ OP_2 = 2,88;\ OP_3 = 3,46;$$
$$OP_4 = 4,15;\ OP_5 = 4,98.$$

В концах этих отрезков строим ординаты точек гиперболы. Мы получим криволинейную фигуру AP_0M_0B

*) В главе I мы записывали эту формулу несколько иначе. именно так: $a_n = a_1 + d(n-1)$. Здесь мы вводим один лишний член, предшествующий всем остальным, именно a_0; таким образом в прогрессии получается всего не n, а $n+1$ членов. Точно так же и в геометрической прогрессии счёт начинается не с первого, а с нулевого члена. Такая нумерация членов удобнее потому что число последовательных операций (сложений — в случае арифметической, умножений — в случае геометрической прогрессии) получается равным n, а не $n-1$, что заметно упрощает формулы

и ряд криволинейных фигур $P_0P_1M_1M_0$, $P_1P_2M_2M_1$, $P_2P_3M_3M_2$, ...

Во второй главе было доказано, что величина площади таких фигур не зависит от длины отрезков $[a_1 \ldots a_2]$, $[a_2 \ldots a_3]$ и т. д., но только от отношений $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_2}$, ... В данном случае, согласно определению



Черт. 28.

геометрической прогрессии, отношения $\frac{a_2}{a_1}$; $\frac{a_3}{a_2}$; $\frac{a_4}{a_3}$; ... все равны между собой

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = q = 1{,}2.$$

А потому можно утверждать, что все указанные площади (за исключением первой) равны между собой:

пл. $P_0P_1M_1M_0 =$ пл. $P_1P_2M_2M_1 =$ пл. $P_2P_3M_3M_2 = \ldots = S$.

Площадь первой фигуры AP_0M_0B обозначим S_0. Отсюда получаем

площадь на отрезке $[1 \ldots a_0] = S_0$;

» » » $[1 \ldots a_1] = S_0 + S$;

» » » $[1 \ldots a_2] = S_0 + 2S$;

» » » $[1 \ldots a_3] = S_0 + 3S$;

» » » $[1 \ldots a_4] = S_0 + 4S$;

. . . .

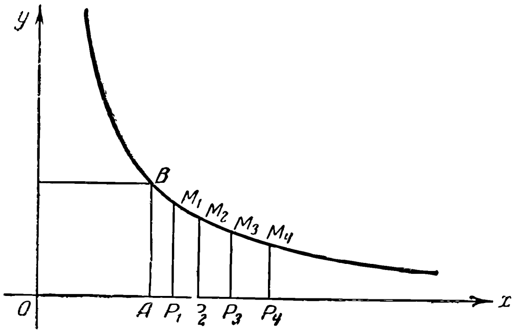
» » » $[1 \ldots a_n] = S_0 + nS$.

Таким образом площади, опирающиеся на эти отрезки, составляют арифметическую прогрессию, в то время как длины отрезков OP_0, OP_1, OP_2, OP_3, ... образуют геометрическую прогрессию. Этим мы установили связь между обеими прогрессиями.

Рассмотрим ещё геометрическую прогрессию, у которой начальный член $a_0 = 1$:

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ \ldots$$

Пусть, например, $q = 1,2$. Если для этой прогрессии построить график (черт. 29), такой как для предыдущей,



Черт. 29.

то получим ряд равных между собою площадей: AP_1M_1B; $P_1P_2M_2M_1$; $P_2P_3M_3M_2$; ....

Получаем:

площадь	на	отрезке	$[1 \ldots 1]$	$= O$;
»	»	»	$[1 \ldots q]$	$= S_0$;
»	»	»	$[1 \ldots q^2]$	$= 2S_0$;
»	»	»	$[1 \ldots q^3]$	$= 3S_0$;
»	»	»	$[1 \ldots q^4]$	$= 4S_0$;
...	...	...	...	...
»	»	»	$[1 \ldots q^n]$	$= nS_0$.

И здесь имеет место соответствие между геометрической прогрессией $OA = 1$; $OP_1 = q$; $OP_2 = q^2$; $OP_3 = q^3$;..., и арифметической прогрессией $0;\ S_0;\ 2S_0;\ 3S_0;\ 4S_0;\ldots$ Связь между геометрической прогрессией длин отрезков и арифметической прогрессией площадей можно формулировать следующим образом: возвышению в степень длины отрезка q соответствует умножение площади S_0 на число n.

Шестое действие арифметики. Как уже отмечалось в первой главе, действие, обратное возвышению в степень, называется извлечением корня. Если, например, $2^7=128$, т. е. 2, умноженное на себя 7 раз, даёт в результате 128, то можно написать: $2=\sqrt[7]{128}$. Если $x^4=52$, то $x=\sqrt[4]{52}$.

На практике часто приходится решать задачи, приводящие к извлечению корня.

Рассмотрим задачу, для решения которой применим наши познания о геометрической прогрессии.

Автомобильный завод в 1945 г. выпускал ежедневно 200 машин. По плану четвёртой пятилетки он должен довести в 1950 г. ежедневный выпуск до 360 машин. Спрашивается: как следует ежегодно повышать выпуск продукции, чтобы процент повышения по отношению к предыдущему году оставался одним и тем же?

Мы знаем, что в этом случае выпуск машин по годам составит геометрическую прогрессию (см. стр. 71, пример в начале главы).

Годы	1945	1946	1947	1948	1949	1950
Выпуск машин	a_0	a_0q	a_0q^2	a_0q^3	a_0q^4	a_0q^5

Нам известно при этом, что

$$a_0=200,\quad a_0q^5=360.$$

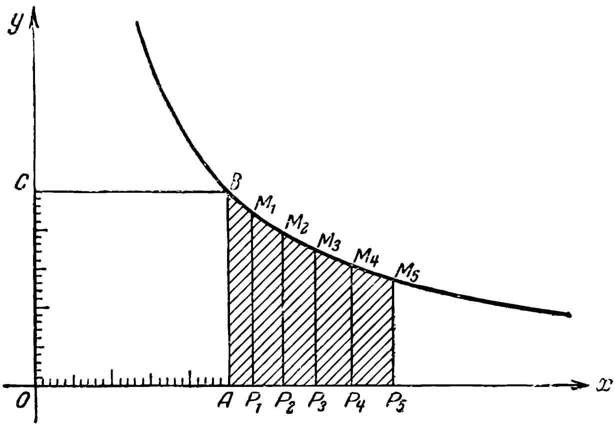
Задача заключается в том, чтобы определить q (коэффициент ежегодного увеличения).

Из написанных равенств следует

$$q^5=\frac{360}{200}=1{,}8,\quad \text{следовательно,}\quad q=\sqrt[5]{1{,}8}.$$

Но знак корня мало помогает делу. Надо уметь его извлечь (вычислить). Паскаль по этому поводу справедливо заметил, что поставить новый математический значок—это всё равно, что приклеить новый ярлык, но этим ещё не разрешается задача. Ведь для вычисления корня пятой степени мы не имеем никаких средств. Недаром в течение многих веков эта задача считалась неразрешимой. Средство для её решения было найдено только в 1614 г., когда шотландский математик Джон Непер опубликовал свои «удивительные таблицы» логарифмов.

Мы же решим эту задачу без помощи логарифмов, пользуясь знакомой нам гиперболой (черт. 30). Чертёж



Черт. 30.

надо сделать в крупном масштабе на миллиметровой бумаге. Отложим на оси Ox отрезок $OA = 1$ и отрезок $OP_5 = 1{,}8$. Если бы на оси Ox были отложены отрезки $OP_1 = q$, $OP_2 = q^2$, $OP_3 = q^3$, $OP_4 = q^4$, то площади, построенные на отрезках AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, должны быть равны между собой.

$$\text{пл. } AP_1M_1B = \text{пл. } P_1P_2M_2M_1 = \text{пл. } P_2P_3M_3M_2 = \\ = \text{пл. } P_3P_4M_4M_3 = \text{пл. } P_4P_5M_5M_4 = S.$$

Вся площадь AP_5M_5B была бы равна $5S$.

Чтобы определить площадь AP_5M_5B подсчитаем число миллиметровых квадратиков сетки, заключённых в пределах этой фигуры. Для получения более точного результата следует учесть число квадратиков, пересечённых дугой гиперболы, считая каждый за половину.

Подсчёт покажет, что в криволинейной площади AP_5M_5B содержится приблизительно 380 квадратиков. Эти 380 квадратиков составляют $5S$; следовательно, S содержит приблизительно $\frac{380}{5}$ квадратиков, т. е. около 76 квадратиков. Теперь остаётся только провести ординату P_1M_1 с таким расчётом, чтобы площадь AP_1M_1B содержала 76 квадратиков. После этого надо измерить длину отрезка OP_1, которая даёт искомую величину q. Она равна приблизительно 1,12. Значит, автомобильный завод должен ежегодно повышать выпуск продукции на 12%.

Конечно, этот способ неточный и громоздкий, однако, он передаёт идею того, как математики справлялись с задачей извлечения корня, т. е. преодолевали трудность шестого действия арифметики.

Позднее будет показано, как составить таблицу, дающую для каждого отрезка $OP = x$ величину соответствующей криволинейной площади $APMB$, лежащей над отрезком $[1...x]$. Имея такую таблицу, уже нет надобности подсчитывать квадратики. Вопросу о составлении таких таблиц (таблиц логарифмов) будет посвящена пятая глава этой книги *).

2. Сумма членов геометрической прогрессии.

Как и в случае арифметической прогрессии, при рассмотрении геометрической прогрессии основными являются два вопроса: 1) найти любой член прогрессии a_n; 2) найти сумму n членов прогрессии. На первый вопрос мы ответили формулой $a_n = a_0q^n$.

Обратимся ко второму вопросу. Пусть имеется прогрессия

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1}.$$

*) Заметим, что в XVII веке были изобретены и другие способы вычисления корней любой степени, например, с помощью рядов. Но для повседневной практики наиболее удобно вычисление с помощью логарифмов.

Возьмём для определённости $n=20$; сумма членов этой прогрессии есть:

$$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{19}=$$
$$=a_0+a_0q+a_0q^2+\ldots+a_0q^{18}+a_0q^{19}.$$

Обозначим эту сумму буквой s. Если умножить все слагаемые суммы на знаменатель q, то получим другую сумму:

$$a_0q+a_0q^2+a_0q^3+\ldots+a_0q^{19}+a_0q^{20},$$

которая равна sq. Эта новая сумма содержит все слагаемые первой суммы, кроме a_0, а также имеет одно добавочное слагаемое a_0q^{20}:

$$a_0+a_0q+a_0q^2+a_0q^3+a_0q^4+\ldots+a_0q^{18}+a_0q^{19}=s,$$
$$a_0q+a_0q^2+a_0q^3+a_0q^4+\ldots+a_0q^{18}+a_0q^{19}+a_0q^{20}=sq.$$

Вычтя из нижнего равенства верхнее, получаем:

$$a_0q^{20}-a_0=sq-s.$$

В этом равенстве неизвестным является сумма s. Решая уравнение, получаем:

$$s=a_0\frac{q^{20}-1}{q-1}.$$

Таким же образом для любого значения получаем формулу:

$$s=a_0\frac{q^n-1}{q-1}. \tag{2}$$

Рассмотрим ещё один вывод формулы суммы членов геометрической прогрессии. Этот вывод интересен тем, что он был предложен древнегреческим математиком Евклидом.

Пусть требуется найти сумму 8 членов прогрессии

$$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=s.$$

Рассмотрим разности между соседними членами прогрессии, т. е. a_1-a_0, a_2-a_1, a_3-a_2, ... Разность a_1- $-a_0$ принято обозначать через Δa_0 (знак Δ — греческая буква «дельта» — не есть множитель, а заменяет слово «прирост», «приращение», которое получает «нулевой» член a_0, чтобы стать равным a_1). Аналогично обозначаются и другие разности.

$$\Delta a_0 = a_1 - a_0 = a_0 q - a_0 = a_0 (q-1) = a_0 (q-1),$$
$$\Delta a_1 = a_2 - a_1 = a_0 q^2 - a_0 q = a_0 q (q-1) = a_1 (q-1),$$
$$\Delta a_2 = a_3 - a_2 = a_0 q^3 - a_0 q^2 = a_0 q^2 (q-1) = a_2 (q-1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta a_6 = a_7 - a_6 = a_0 q^7 - a_0 q^6 = a_0 q^6 (q-1) = a_6 (q-1),$$
$$\Delta a_7 = a_8 - a_7 = a_0 q^8 - a_0 q^7 = a_0 q^7 (q-1) = a_7 (q-1).$$

Последняя строка добавлена для того, чтобы a_7 получило приращение и чтобы разностей было столько же, сколько сумм, т. е. 8.

Из последнего и предпоследнего столбцов вытекает два интересных факта: 1) каждая разность равна соответствующему члену прогрессии, умноженному на одну и ту же величину $(q-1)$; 2) разности составляют геометрическую прогрессию с тем же знаменателем q, только первый член равен $a_0(q-1)$. На черт. 31 наглядно видно, что график членов прогрессии и график членов разностей имеют сходный вид. Здесь взято $a_0 = 0{,}4$; $q = \frac{4}{3}$.

Сложив разности между собой, получим:

$$\Delta a_0 + \Delta a_1 + \dots + \Delta a_7 =$$
$$= a_0 (q-1) + a_1 (q-1) + \dots + a_7 (q-1) =$$
$$= (q-1)(a_0 + a_1 + \dots + a_7) = (q-1) s.$$

Но сумму всех приращений найти нетрудно; все они вместе взятые равны разности между последним членом a_8 и первым a_0. На черт. 31 видно, что они, как ступеньки лестницы, ведут от верхнего конца первого отрезка к верхнему концу последнего.

Отсюда получаем:

$$a_8 - a_0 = (q-1) s = a_0 q^8 - a_0,$$
$$s = a_0 \frac{q^8 - 1}{q - 1} \quad \text{или} \quad s = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Получилась та же формула, которая была выведена другим путём.

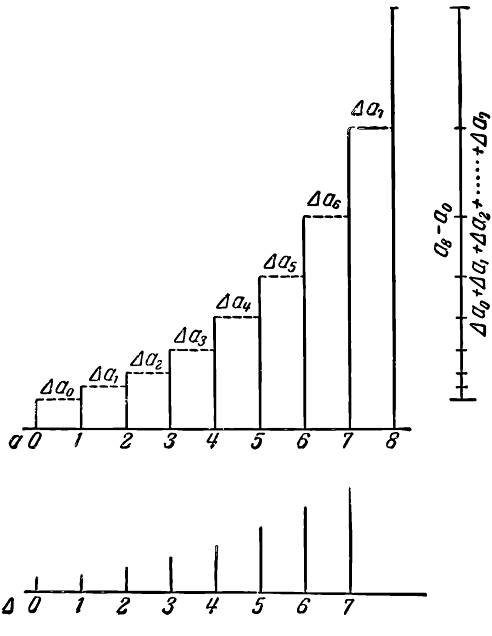
Пример. Сумма членов прогрессии

$$45;\ 45\cdot 1{,}05;\ 45\cdot(1{,}05)^2;\ \ldots;\ 45\cdot(1{,}05)^{20}$$

вычисляется так:

$$s = 45\,\frac{(1{,}05)^{21}-1}{1{,}05-1}.$$

Для того чтобы применить эту формулу, надо уметь вычислить степень $(1{,}05)^{21}$. В последующих главах будет



Черт. 31.

рассказано, каким образом математики научились быстро выполнять эту, казалось бы, громоздкую, работу.

Остановимся вкратце на случае убывающей геометрической прогрессии, т. е. на том случае, когда знаменатель $q < 1$. Если, например, каждый член прогрессии на 15% меньше предыдущего, то $q = \frac{85}{100} = 0{,}85$.

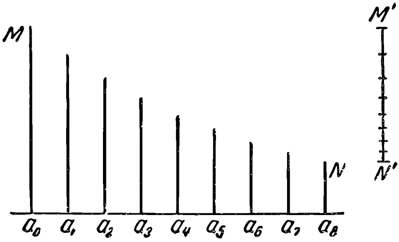
Члены прогрессии будут:

$$a_0;\ a_0\cdot 0{,}85;\ a_0\cdot 0{,}85^2;\ a_0\cdot 0{,}85^3;\ a_0\cdot 0{,}85^4;\ \ldots$$

Требуется найти сумму

$$a_0+a_0\cdot 0{,}85+a_0\cdot(0{,}85)^2+a_0(0{,}85)^3+\ldots+a_0(0{,}85)^{n-1}.$$

Решение покажем на чертеже (черт. 32). Здесь приращения Δa_0, Δa_1, Δa_2; ... отрицательны; заметим ещё,



Черт. 32.

что в этом случае приращения будут убывать по своей численной величине.

По абсолютной величине каждая разность будет равна:

$$\Delta a_0=a_0-a_1=a_0-a_0q=a_0(1-q)=a_0(1-q),$$
$$\Delta a_1=a_1-a_2=a_0q-a_0q^2=a_0q(1-q)=a_1(1-q),$$
$$\Delta a_2=a_2-a_3=a_0q^2-a_0q^3=a_0q^2(1-q)=a_2(1-q),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta a_7=a_7-a_8=a_0q^7-a_0q^8=a_0q^7(1-q)=a_7(1-q).$$

Сумма всех разностей по абсолютной величине равна разности между первым и последним членами (на черт. 32 она представлена отрезком $M'N'$).

$$\Delta a_0+\Delta a_1+\ldots+\Delta a_7=a_0-a_8=a_0(1-q)+a_1(1-q)+$$
$$+\ldots+a_7(1-q)=(1-q)(a_0+a_1+\ldots+a_7)=(1-q)s,$$

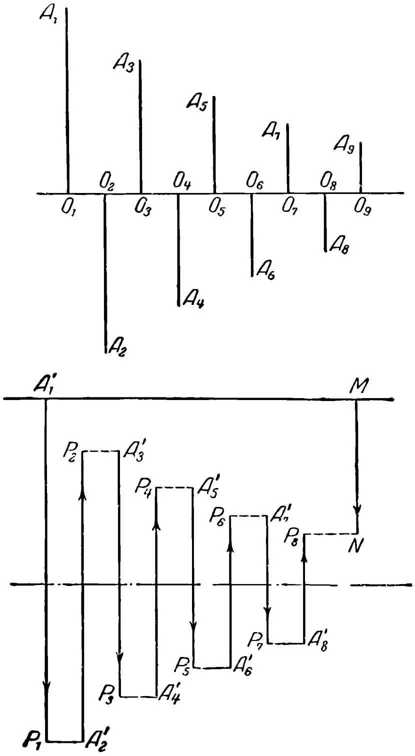
откуда

$$s=\frac{a_0-a_8}{1-q}=a_0\frac{1-q^8}{1-q}.$$

Для любого числа членов получим

$$s = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Эта формула отличается от предыдущей лишь тем, что в числителе и знаменателе знаки изменены на противоположные: с точки зрения алгебры обе формулы одинаковы.



Черт. 33.

Рассмотрим ещё сумму членов геометрической прогрессии особого рода, а именно такой, в которой члены попеременно положительны и отрицательны, например:

$$a_0 - a_0 \cdot 0{,}85 + a_0 \times \times 0{,}85^2 - a_0 \cdot 0{,}85^3 + a_0 \times \times 0{,}85^4 - a_0 \cdot 0{,}85^5 + \ldots$$

Построим график (черт. 33, верхняя половина), в котором положительные члены представлены отрезками, идущими вверх, отрицательные — отрезками, идущими вниз. Будем считать число n чётным; тогда последний отрезок, например, a_8 будет направлен вниз. Как и на черт. 31 и 32 добавим ещё один отрезок a_9.

Допустим, что на черт. 33 какое-нибудь тело перемещается из точки A_1 в точку A_2, затем из точки A_2 в точку A_3 и так далее. Эти приращения будем считать положительными, если они совершаются снизу вверх, и отрицательными — сверху вниз. При этом нас будет интересовать не длина самих перемещений, а разность высот начальной и конечной точек. При перемещении A_1A_2 понижение численно равно сумме отрезков $O_1A_1+O_2A_2$; это перемещение, направленное вниз, изображено на нижней половине черт. 33 отрезком $A_1'P_1$ со стрелкой. Перемещение A_2A_3 изображено отрезком $A_2'P_2$ со стрелкой и так далее. Рассмотрим сумму новых отрезков $A_1'P_1$, $A_2'P_2$, $A_3'P_3, \ldots$, учитывая их знаки. Так как знаки соседних членов противоположны, то сумма первых двух членов $A_1'P_1$ и $A_2'P_2$ будет получаться вычитанием отрезка $A_2'P_2$ из отрезка $A_1'P_2$ и окажется равной расстоянию точки P_2 от горизонтальной линии $A_1'M$ (со знаком минус, так как перемещение, направленное вниз, больше).

Сумма первых трёх членов $A_1'P_1+A_2'P_2+A_3'P_3$ будет равна расстоянию точки P_3 от линии $A_1'M$ (со знаком минус) и т. д. Сумма всех восьми членов с учётом их знаков окажется равной расстоянию последней точки P_8 от линии $A_1'M$, т. е. длине отрезка MN со знаком минус. Итак, сумма S равна минус длине MN (дл. O_1A_1 — дл. $O_9A_9) = -(1-0{,}85^8) = -(1-q^8)$.

Обратимся теперь к нашей основной сумме, т. е. к сумме отрезков O_1A_1, O_2A_2, $O_3A_3, \ldots$ с их знаками. Сравнивая эти отрезки с отрезками $A_1'P_1$, $A_2'P_2$, $A_3'P_3, \ldots$, мы видим, что во-первых, знаки отрезков O_1A_1, O_2A_2, $O_3A_3, \ldots$, противоположны знакам соответствующих отрезков $A_1'P_1$, $A_2'P_2$, $A_3'P_3, \ldots$, во-вторых, отрезки $A_1'P_1$, $A_2'P_2, \ldots$ по своей длине больше соответствующих отрезков O_1A_1, $O_2A_2, \ldots$ в определённом отношении. Найдём величину этого отношения: если принять длину отрезка O_1A_1 за единицу, то длина отрезка O_2A_2 равна 0,85 ед.; длина же отрезка $A_1'P_1$ равна 1,85 ед. Поэтому отношение отрезков $A_1'P_1$ и O_1A_1, если отвлечься от противоположности их направлений, равно (1,85 : 1). Далее, сравним отрезки O_2P_2 и $A_2'P_2$. Длина отрезка O_3A_3 равна 0,85 длины отрезка O_2A_2; длина отрезка $A_2'P_2$ численно равна сумме длин отрезков O_2A_2 и O_3A_3, т. е.:

$$A_2'P_2 = O_2A_2 + O_2A_2 \cdot 0{,}85 = O_2A_2 \cdot 1{,}85.$$

Поэтому отношение отрезков $A_2'P_2$ и O_2A_2 равно опять (1,85 : 1) и так далее. Отсюда следует, что и вся сумма отрезков $A_i'P_i$ больше всей суммы отрезков O_iA_i в отношении (1,85 : 1). Но сумма отрезков $A_i'P_i$ с учётом их знаков уже найдена и оказалась равной

$$-(1-0{,}85^8) = -(1-q^8) = s_1.$$

Чтобы определить искомую сумму прогрессии, надо переменить знак величины S_1 на противоположный и изменить её в отношении (1 : 1.85). Получим:

$$s = \frac{1-0{,}85^8}{1{,}85} = \frac{1-q^8}{1+q};$$

для нечётного числа членов, например, $n = 9$, получили бы:

$$s = \frac{1+q^9}{1+q}.$$

Общая формула будет:

$$s = \frac{1 \pm q^n}{1+q}$$

(в числителе знак плюс в случае нечётного числа членов и знак минус — в случае чётного).

Но в алгебре принято поступать иначе. Если члены прогрессии имеют чередующиеся знаки, то знаменатель прогрессии q считают отрицательным; так в нашем примере $q = -0{,}85$. Рассмотренную нами величину отношения 1,85 можно представить как $1-(-0{,}85)$. Тогда получим:

$$s = \frac{1-(-0{,}85)^8}{1-(-0{,}85)} = \frac{1-q^8}{1-q}.$$

И общая формула будет такова:

$$s = \frac{1-q^n}{1-q},$$

независимо от того, будет ли число членов чётным или нечётным.

Эта формула не отличается от формулы для прогрессии с постоянными знаками.

Пусть дана убывающая геометрическая прогрессия

$$a_0,\ a_0q,\ a_0q^2,\ a_0q^3,\ \ldots,\ a_0q^n;$$

здесь знаменатель прогрессии $q < 1$; очевидно, что при достаточно большом числе n величина членов прогрессии может стать сколь угодно малой.

Если, например, $a_0 = 1$, $q = 0{,}3$, $n = 100$, то $a_n = a_0 q^n = (0{,}3)^{100}$. Количество $(0{,}3)^{100}$ очень мало, так как уже $(0{,}3)^{12} = 0{,}000\,000\,531\,441$, т. е. меньше одной миллионной. Если мы будем значения n ещё больше увеличивать и брать $n = 200$, $n = 300$, и т. д., то количество $(0{,}3)^n$ будет уменьшаться и приближаться к нулю.

Сделаем теперь смелое допущение, что число n членов ничем не ограничено, что прогрессия продолжается бесконечно, и попробуем найти её «сумму». Прежде всего может возникнуть такая мысль: «число слагаемых не ограничено, новые слагаемые «без конца» прибавляются к начальным; повидимому, и сумма их возрастает без конца, т. е. «растёт» до бесконечности». Но оказывается, это не так: если знаменатель прогрессии $q < 1$, то сумма членов прогрессии остаётся конечной, как бы далеко её ни продолжать.

Чтобы это доказать, допустим сперва, что n имеет какое-то определённое большое значение, например, $n = 1000$. На основании формулы (2) можно написать что сумма

$$s_n = a_0 \frac{1-q^n}{1-q} = a_0 \frac{1-q^{1000}}{1-q}.$$

Если, например, $q = \frac{3}{4}$, то

$$s = a_0 \frac{1-(0{,}75)^{1000}}{1-0{,}75}.$$

Эту сумму можно представить как разность двух слагаемых:

$$s_n = a_0 \frac{1}{1-0{,}75} - a_0 \frac{(0{,}75)^{1000}}{1-0{,}75}$$

или

$$s_n = a_0 \frac{1}{1-q} - a_0 \frac{q^n}{1-q}.$$

Так как второе слагаемое — чрезвычайно малая дробь, то, отнимая такую дробь, мы получаем лишь немногим меньше, чем $\frac{a_0}{1-q}$. Чем больше число слагаемых n, тем меньше будет величина, которая отнимается от $\frac{a_0}{1-q}$; эта же последняя величина — постоянная и не зависит от номера n. Если теперь допустить, что число слагаемых n возрастает, и возрастает неограниченно, то количество q^n будет убывать и как угодно близко подходить к нулю. Таким образом величина q^n, а потому и величина $\frac{q^n}{1-q}$, как бы уничтожается, и, в конце концов, результат приближается к дроби $\frac{a_0}{1-q}$.

В данном численном примере:

$$\frac{a_0}{1-0,75}=\frac{a_0}{0,25}=4a_0.$$

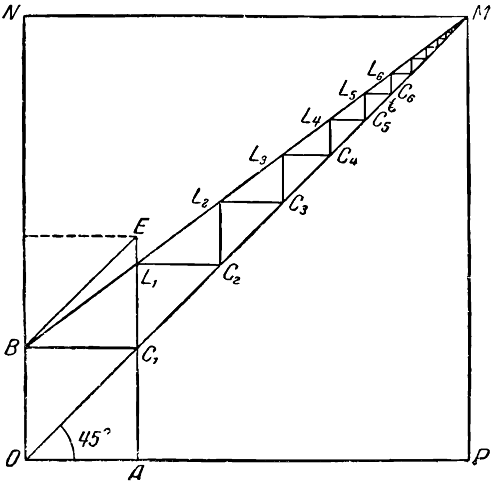
Итак, при $q<1$

$$a_0+a_0q+a_0q^2+a_0q^3+\ldots=\frac{a_0}{1-q}. \qquad (3)$$

Однако равенство это имеет необычный характер, так как в левой его части мы не можем буквально сложить всё «бесконечное множество» слагаемых. Оно выражает лишь то, что чем больше слагаемых левой части мы сложим, тем меньше наша сумма будет отличаться от $\frac{a_0}{1-q}$.

Формула суммы членов бесконечной прогрессии оказалась проще чем для конечной. Именно то слагаемое $\frac{q^n}{1-q}$, которое трудно поддаётся вычислению, теперь отпало, и получилось более простое соотношение.

Дадим теперь вывод формулы (3) графическим способом и покажем эту необычную сумму на чертеже. Берём конкретный пример $a_0=1$, $q=\frac{3}{4}$. График (черт. 34) строится следующим образом. Строим квадрат OAC_1B со стороной, равной 1; $OA=1$; $OB=1$ (например, 1 *дм*). Продолжаем сторону квадрата AC_1 на отрезок C_1L_1, численно равный q $\left(\text{в нашем примере} = \frac{3}{4}\ \textit{дм}\right)$. Затем проводим диагональ OC_1 и прямую BL_1; обе эти прямые продолжаем до их пересечения. Обозначим точку пересечения через M. Затем строится «лестница» следующим образом. Из точки L_1 проводим горизонтальный отрезок L_1C_2 до встречи с диагональю OM; из полученной точки C_2 проводим вертикальный отрезок C_2L_2 до встречи с прямой BM в точке L_2. Далее, из точки L_2—горизон-



Черт. 34.

тальный отрезок L_2C_3; из точки C_3 вертикальный отрезок C_3L_3 и так далее. Этот процесс проведения горизонтальных и вертикальных отрезков никогда не приостановится. В самом деле, где бы мы ни взяли точку на отрезке BM (кроме самой точки M), из неё можно провести горизонтальный отрезок; из полученной точки пересечения — опять вертикальный. Сама точка M является в этом процессе как бы недостижимой; с другой стороны, из графика прямо следует, что точка M находится на конечной высоте и что высота этой «нескончаемой» лестницы $OBC_1L_1C_2L_2C_3L_3C_4L_4$ ... может быть приравнена к отрезку PM.

Прежде всего покажем, что отрезки C_2L_2; C_3L_3; C_4L_4; C_5L_5; ... равны последующим членам нашей геометрической прогрессии $0{,}75^2$; $0{,}75^3$;...

Треугольник $C_1L_1C_2$ равнобедренный; в нём углы C_1 и C_2 равны 45°; поэтому $L_1C_1=L_1C_2=q$. Далее, треугольник $L_1C_2L_2$ подобен треугольнику BC_1L_1. Так как отношение $\frac{L_1C_1}{BC_1}=q$, то и отношение $\frac{C_2L_2}{L_1C_2}=q$. Но $L_1C_2=$ $=L_1C_1=q$. Следовательно, $\frac{C_2L_2}{q}=q$, и отсюда $C_2L_2=q^2$. Далее, треугольник $C_2L_2C_3$ опять равнобедренный; $C_2L_2=L_2C_3$, а потому длина отрезка L_2C_3 также равна q^2. Треугольник $L_2C_3L_3$ подобен треугольнику BC_1L_1; поэтому отношение $\frac{C_3L_3}{L_2C_3}=q$; $\quad C_3L_3=L_2C_3\cdot q=q^2\cdot q=q^3$ и так далее.

В результате, подъём ступенек нашей лестницы определяется равенствами: $OB=1$; $C_1L_1=q$; $C_2L_2=q^2$; $C_3L_3=q^3$; $C_4L_4=q^4$ и так далее. Поэтому сумма нескольких членов прогрессии равна высоте последней взятой ступени над горизонталью OP. Когда число ступеней неограниченно растёт, то вершина лестницы подходит как угодно близко к предельной точке M, «упирается» в точку M. А потому найти «сумму» членов прогрессии — значит определить длину отрезка PM.

Так как фигура $OPMN$ квадрат, то можно его сторону PM заменить стороной MN. Мы найдём длину MN из геометрических свойств чертежа следующим образом. Продолжим отрезок $C_1L=\frac{3}{4}$ единицы до точки E так, чтобы отрезок C_1E был равен 1, и построим треугольник BL_1E. Нетрудно видеть, что треугольник BL_1E подобен треугольнику L_1C_1M, так как у них стороны BE и C_1M параллельны. Далее, треугольник L_1C_1M, очевидно, подобен треугольнику OBM, а потому треугольник BL_1E подобен треугольнику OBM. Из подобия последних двух треугольников мы определим длину стороны MN, т. е. искомую сумму прогрессии.

У подобных треугольников OBM и BL_1E высоты MN и BC_1, опущенные из соответствующих вершин M и B, относятся между собой как сходственные стороны, например, как основания BO и L_1E:

$$\frac{MN}{BC_1}=\frac{BO}{L_1E}.$$

Но из входящих в эту пропорцию четырёх величин три нам известны, а именно: $BC_1=1$ ед.; $BO=1$ ед.; $L_1E=C_1E-C_1L_1=1-q$ $\left(\text{в данном примере } L_1E=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\text{ единицы}\right)$. Поэтому: $MN:1=1:(1-q)$. Согласно основному свойству пропорции, отсюда получаем: $MN=\frac{1}{1-q}$; в нашем примере $\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$. Итак, мы снова получили: $s=\frac{1}{1-q}$.

Если же задаётся прогрессия вида a_0, a_0q, a_0q^2, a_0q^3, то сумма её членов равна $a_0(1+q+q^2+q^3+\ldots)=a_0\frac{1}{1-q}=\frac{a_0}{1-q}$.

Мы получили найденную ранее формулу (3).

Эту формулу можно применить к одному чисто арифметическому вопросу. Пусть задана периодическая десятичная дробь 0,6666..., у которой число десятичных знаков не ограничено. Чему равно численное значение дроби?

Представим заданную дробь в виде суммы

$$\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1\,000}+\frac{6}{10\,000}+\ldots,$$

или же в виде

$$\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{6}{10^4}+\ldots$$

После всего вышесказанного нас не будет пугать то обстоятельство, что ряд тянется без конца. Написанный ряд представляет собой убывающую геометрическую прогрессию. Каждое слагаемое в 10 раз меньше предыдущего, т. е. знаменатель прогрессии $q=\frac{1}{10}=0{,}1$.

Согласно формуле (3), пишем:

$$s=\frac{a_0}{1-q}=\frac{0,6}{1-0,1}=\frac{0,6}{0,9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Таким же образом можно определить значение периодической дроби 0,23232323... Представим эту дробь в виде:

$$\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^3}+\frac{23}{100^4}+\ldots$$

Знаменатель прогрессии в данном случае есть $q=\frac{1}{100}$, а первый член $\frac{23}{100}$. Поэтому сумма

$$s=\frac{a_0}{1-q}=\frac{0,23}{1-0,01}=\frac{0,23}{0,99}=\frac{23}{99}.$$

Если задана смешанная периодическая дробь, например, $0,5(12)=0,51212121212\ldots$, то её можно представить в виде суммы:

$$\frac{5}{10}+\frac{12}{1000}+\frac{12}{1000\cdot 100}+\frac{12}{1000\cdot 100^2}+\ldots$$

Если не считать первое слагаемое, то остальные представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{100}$ и первым членом $a_0=\frac{12}{1000}$. Поэтому значение дроби равно:

$$\frac{5}{10}+\frac{\frac{12}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{5}{10}+\left(\frac{12}{1000}:\frac{99}{100}\right)=\frac{5}{10}+\frac{12}{990}.$$

Рассмотрим ещё бесконечную убывающую прогрессию другого рода, а именно такую, в которой члены прогрессии имеют попеременно знак плюс и минус. Таковой будет, например, прогрессия:

$$1-0,7+0,7^2-0,7^3+0,7^4-\ldots$$

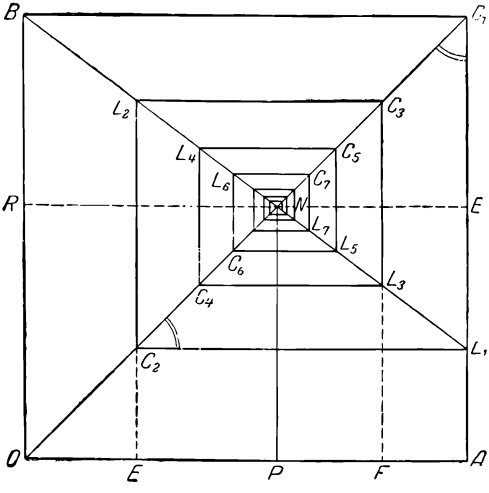
Формулу для «суммы» такой бесконечной прогрессии можно получить из соответствующей формулы для конечной суммы:

$$s = \frac{a_0 \pm a_0 q^n}{1+q}.$$

Так как второе слагаемое в числителе при возрастании как угодно близко подходит к нулю, то им в конце концов можно пренебречь; получим:

$$s = \frac{a_0}{1+q}.$$

И для этого случая можно дать вывод при помощи графика. Мы даём этот график (черт. 35) ещё и потому,



Черт. 35.

что он сыграет большую роль в дальнейшем изложении. Что же касается доказательства формулы, мы ограничимся лишь краткими указаниями. На черт. 35 изображён квадрат OAC_1B со стороной, равной 1. Отрезок $C_1L_1 = q$ $\left(\text{на чертеже } q = \frac{3}{4}\right)$. Из подобия треугольников NC_1L_1 и NC_2L_2 можно найти, что $C_2L_2 = q^2$; далее окажется, что $C_3L_3 = q^3$; $C_4L_4 = q^4$.

Таким образом отрезки OB, C_1L_1, C_2L_2, C_3L_3 и т. д. по абсолютной величине равны членам убывающей геометрической прогрессии

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3 \text{ и т. д.}$$

Если сторонам, направленным вверх, придать знак $+$, а направленным вниз знак $-$, то они образуют бесконечную убывающую прогрессию с переменными знаками

$$1,\ -q,\ +q^2,\ -q^3,\ \ldots$$

На чертеже наглядно видно, что члены прогрессии OB, C_1L_1, C_2L_2, ... всё теснее и теснее подходят к предельной точке N, а величины этих отрезков бесконечно убывают и приближаются к нулю.

Но этого мало, на этом чертеже наглядно видны суммы членов прогрессии и сумма «всей» прогрессии.

Отрезок $AL_1 = EC_2 = 1-q$, т. е. этот отрезок равен сумме (алгебраической) двух первых членов прогрессий. Отрезок $L_2E = FE_3 = EC_2 + C_2L_2 = 1 - q + q^2$ и т. д.

Иными словами, расстояние конечной точки отрезков-членов прогрессии от горизонтали OA представляет собой сумму членов прогрессии. Следовательно, отрезок NP представляет собой сумму «всей» прогрессии.

Чтобы найти значение этой суммы, заметим, что треугольники BNO и C_1NL_1 подобны и $PN = NB$. Из подобия этих треугольников находим:

$$\frac{NR}{NE} = \frac{BO}{C_1L_1}$$

или

$$\frac{s}{1-s} = \frac{1}{q},$$

откуда следуют равенства:

$$sq = 1 - s; \quad 1 = sq + s = s(1+q); \quad s = \frac{1}{1+q}.$$

Если первый член прогрессии не 1, а a_0, то и вся сумма умножится на a_0, и мы получим общую формулу

$$a_0 - a_0q + a_0q^2 - a_0q^3 + \ldots = \frac{a_0}{1+q}.$$

Эта формула примет привычный вид

$$s = \frac{a_0}{1-q},$$

если знаменатель знакопеременной прогрессии считать числом отрицательным.

ГЛАВА IV.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ.

В первой главе были выведены три формулы, дающие возможность найти легко и быстро суммы:

$$\sum\nolimits_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n;$$
$$\sum\nolimits_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2;$$
$$\sum\nolimits_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

Эти формулы были таковы:

$$\sum\nolimits_1 = \frac{1}{2} n (n + 1);$$
$$\sum\nolimits_2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1);$$
$$\sum\nolimits_3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2.$$

Но вторая и третья формулы были получены специально придуманными, искусственными приёмами. Это обстоятельство не нарушает правильности формул. Однако математика, как наука, не удовлетворяется тем, что полученный ответ на задачу правилен. Она ставит требование, чтобы решение задачи было дано в стройной форме; она постоянно стремится улучшить метод исследования. С этой целью математика старается вскрыть связь между отдельными формулами.

В данном случае можно поставить перед собой вопрос: нельзя ли установить связь между формулами для $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$? Если бы удалось это сделать, то можно было бы пытаться вывести формулу для $\sum_4$; затем для $\sum_5$ и т. д. Читатель, вероятно, заметит, что поставленный сейчас вопрос не является частным вопросом, а носит общий характер. Разработка именно таких более общих вопросов и составляет основное содержание математики как науки. Разрешая одни вопросы, математика выдвигает другие, и в этом заключается её поступательное движение. Мы уже указывали в первой главе, что математик Фаульхабер (1580—1635) дал формулы для $\sum_m$ до значения $m=11$.

Перепишем формулы для $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$ в несколько ином виде:

$$\sum\nolimits_1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n;$$
$$\sum\nolimits_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n;$$
$$\sum\nolimits_3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2,$$

и добавим к ним несколько последующих формул Фаульхабера:

$$\sum\nolimits_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n,$$
$$\sum\nolimits_5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2,$$
$$\sum\nolimits_6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n.$$

При сопоставлении этих формул нетрудно заметить, как составлено первое слагаемое. Вероятно, читатель сам сделает заключение, что для суммы $\sum_7$ первый член правой части должен быть равен $\frac{1}{8}n^8$; для $\sum_8$ первый член будет $\frac{1}{9}n^9$. Но верно ли это и остаётся ли это правило неизменным для суммы $\sum_m$ с любым значением m? Ведь мы сделали такое предположение только на основании нескольких приведённых формул, а этого недостаточно. Чтобы высказать общее утверждение, надо вскрыть внутреннюю закономерность в формулах для различных $\sum_m$. Темой настоящей главы и является такое исследование для нескольких первых формул, чтобы на нём проследить общий метод и получить затем возможность вычислить любую $\sum_m$. Следует отметить, что в средние века вопрос о $\sum_m$ носил характер математической загадки, был своего рода спортом, но в настоящее время дело обстоит совсем по иному. Общая формула для $\sum_m$ позволяет с большой лёгкостью получить целый ряд новых результатов.

1. Формула сочетаний.

Чтобы не прерывать в дальнейшем (§ 4) изложения, мы сейчас разберём вывод одной весьма важной формулы. Эта формула играет большую роль в различных отделах математики. Начнём с задачи.

Задача. Из семи кандидатов требуется выбрать трёх делегатов на конференцию. Сколько может быть различных результатов выборов (различных случаев *))?

Решение. Обозначим фамилии кандидатов буквами A, B, C, D, E, F, G. Будем решать задачу постепенно.

Если бы требовалось выбрать только одного делегата, то число вариантов было бы 7, так как может быть выбран любой из семи человек. Пусть требуется выбрать двух делегатов. Если выбрано лицо A, то к нему можно присоединить или B, или C, или D и т. д. Мы получим, таким образом, варианты AB, AC, AD, AE, AF, AG (6 вариантов). Точно так же, если уже выбрано лицо B, то к нему можно присоединить любого из остальных, и получаем опять 6 вариантов. То же самое получится, если первым выбрано лицо C, лицо D и т. д. Если собрать все полученные таким образом возможные пары делегатов, то их можно записать в виде прямоугольной таблицы, приведённой на стр. 100.

В первой строке записаны все пары, в которых первым избранным стоит делегат A; во второй — делегат B и т. д. Всего в таблице 7 строк и 6 столбцов: значит, число возможных пар равно $7 \cdot 6 = 42$. Однако было бы неправильным считать, что и число вариантов (при выборе 2 делегатов из 7 человек) равно 42. В нашей

*) Вместо слов «различные случаи» принято говорить «варианты» от латинского слова varius (вариус) — различный.

таблице много лишних пар. Если взять, например, пару B и F, то легко увидеть, что она вошла в схему два раза: один раз в порядке (BF), другой раз в порядке (FB). Между тем по смыслу задачи порядок, в котором выбраны

AB	AC	AD	AE	AF	AG
BA	BC	BD	BE	BF	BG
CA	CB	CD	CE	CF	CG
DA	DB	DC	DE	DF	DG
EA	EB	EC	ED	EF	EG
FA	FB	FC	FD	FF	FG
GA	GB	GC	GD	GE	GF

делегаты, не должен иметь значения. Так как всякая пара букв входит в таблицу два раза, то искомое число вариантов равно половине найденного числа, т. е. равно

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

Итак, двух делегатов можно выбрать 21 способом.

Для дальнейшего нужно отметить, какие пары из нашей таблицы мы отбросим и какие оставим. Условимся, например, что из двух пар, содержащих одинаковые буквы, мы будем оставлять ту, в которой буквы расположены в алфавитном порядке; например, из двух пар BF и FB мы оставим пару BF.

Перейдём теперь к рассмотрению выборов трёх делегатов. Выпишем в один вертикальный столбец все только что полученные 21 пару. К каждой из этих пар делегатов нужно добавить третьего, т. е. приписать одну из остающихся пяти букв. Получим таблицу (см. стр. 101).

В этой таблице 21 строка и 5 столбцов, содержащих интересующие нас тройки букв: число троек букв равно $21 \cdot 5 = 105 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2}$. Но и на этот раз мы получили много лишних троек. Если, например, взять тройку букв A, D, G, то в нашей таблице она содержится 3 раза. В самом деле: первые две буквы должны быть обязательно в алфавитном порядке. Поэтому в таблице

ABC	ABD	ABE	ABF	ABG
ACB	ACD	ACE	ACF	ACG
ADB	ADC	ADE	EDF	ADG
AEB	AEC	AED	AEF	AEG
AFB	AFC	AFD	AFE	AFG
AGB	AGC	AGD	AGE	AGF
...	...	...	...	...
DGA	DGB	DGC	DGE	DGF
EFA	EFB	EFC	EFD	EFG
EGA	EGB	EGC	EGD	EGF
FGA	FGB	FGC	FGD	FGE

найдутся такие тройки: 1) буква A стоит в конце, остальные две буквы стоят в алфавитном порядке: DGA; 2) буква D стоит в конце, остальные две буквы стоят в алфавитном порядке: ACD; 3) буква G стоит в конце, остальные две буквы стоят в алфавитном порядке: ADG.

Так как каждая тройка букв будет встречаться в таблице 3 раза, то число различных по составу троек, т. е. искомое число вариантов, получим, разделив выше найденное число $105=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2}$ на 3. Значит, число вариантов равно $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3}=\frac{105}{3}=35$. Если напишем ещё в знаменателе множитель 1 (что не изменяет величины дроби), то получим очень удобную для запоминания дробь $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$.

Число вариантов выбора 3 элементов из 7 (в нашем случае 3 делегатов из 7 человек) принято в математике обозначать знаком C_7^3; буква C есть начальная буква французского слова combinaison — комбинация, сочетание. Говорят: найти число сочетаний из 7 элементов по 3. Пишут: $C_7^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$.

Точно так же может быть решена задача: найти число сочетаний из 10 элементов по 3. Получим $C_{10}^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$.

Если требуется найти число сочетаний из 10 элементов по 4, т. е. C_{10}^4, то надо будет построить таблицу из четвёрок букв. Подобно тому, как в таблице из троек букв, в которой первые две буквы каждой тройки были поставлены в алфавитном порядке, каждое сочетание встречалось ровно три раза, так и в таблице из четвёрок букв, в которой первые три буквы стоят в алфавитном порядке, каждое сочетание встречается ровно четыре раза. В самом деле, на конце четвёрки может стоять первая, вторая, третья или четвёртая буквы. Остальные буквы стоят перед ней в определённом порядке.

Таблица, содержащая четвёрки, будет содержать $C_{10}^3\cdot 7$ четвёрок, потому что к каждому сочетанию из трёх букв, расположенных в алфавитном порядке, можно приписать любую, не входящую в эту тройку букву; так как всех элементов 10, то элементов, не входящих в данную тройку, 7, и, следовательно, из всех троек получается $C_{10}^3\cdot 7$ четвёрок.

Но чтобы найти число различных четвёрок, нужно ещё полученное число $C_{10}^3\cdot 7$ разделить на 4: ведь каждая четвёрка встречается в таблице 4 раза. Таким образом,

$$C_{10}^4=C_{10}^3\cdot\frac{7}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Число сочетаний из 20 по 5 может быть получено подобным же образом; оно напишется так: $C_{20}^5=$

$=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$. Эту дробь запишем в другой форме:

$$C_{20}^{5}=\frac{(20-0)(20-1)(20-2)(20-3)(20-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

В этой дроби в числителе столько же множителей, как и в знаменателе.

Нетрудно составить формулу для числа сочетаний из n элементов по k (n и k — любые целые числа, $k<n$):

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}.$$

Следствие. Будем рассматривать, например, числа сочетаний из 8 элементов:

$$C_8^1=\frac{8}{1}=8;\quad C_8^2=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28;\quad C_8^3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=56;$$

$$C_8^4=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70;\quad C_8^5=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=56;$$

$$C_8^6=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28;$$

$$C_8^7=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=\frac{8}{1}=8.$$

Таким образом, $C_8^5=C_8^3$; $C_8^6=C_8^2$; $C_8^7=C_8^1$.

Эти равенства можно вывести и путём рассуждения: например, C_8^5 может означать число вариантов выбора из 8 человек 5 делегатов на конференцию. Но если 5 человек уедут на конференцию, то останутся 3 человека. Каждому новому составу выбранных 5 делегатов соответствует новый состав остающихся трёх, и обратно.

Поэтому вместо того, чтобы выбрать 5 делегатов, уезжающих на конференцию, можно выбирать трёх делегатов, остающихся на месте. Получим то же число вариантов: $C_8^5=C_8^3$. Таким же рассуждением можно показать, что $C_8^6=C_8^2$; $C_{10}^7=C_{10}^3$; $C_{20}^{16}=C_{20}^4$ и т. д.

К полученным числам сочетаний из 8 элементов мы добавим ещё два числа:

1. Число C_8^8, т. е. число сочетаний из 8 элементов по 8; это число, очевидно, равно 1.

2. Число C_8^0. Оно даёт ответ на вопрос: сколько существует различных способов не послать ни одного

делегата на конференцию? Очевидно, только один способ — не посылать никого. Добавив числа C_8^8 и C_8^0, мы получаем полную строку чисел сочетаний из 8 элементов:

$$C_8^0,\ C_8^1,\ C_8^2,\ C_8^3,\ C_8^4,\ C_8^5,\ C_8^6,\ C_8^7,\ C_8^8,$$

или

1	8	28	56	70	56	28	8	1

Группы чисел такого рода могут быть составлены не только для числа 8, но и для любого целого числа. Мы встретимся с ними в настоящей главе при разборе замечательной формулы Паскаля.

2. Таблица Тартальи.

Пусть дан ряд чисел:

$$21,\ 56,\ 126,\ 252,\ 462,\ 792,\ 1287,\ 2002.$$

Если спросить, взяты эти числа случайно или по какому-то определённому правилу, то на этот вопрос ответить будет нелегко. Оказывается, для данного ряда такое правило имеется, но оно глубоко скрыто. Мы его вскроем следующим образом.

Найдём разности между соседними числами; получим ряд:

$$35,\ 70,\ 126,\ 210,\ 330,\ 495,\ 715.$$

Для этого ряда найдём опять разности между соседними числами; получим:

$$35,\ 56,\ 84,\ 120,\ 166,\ 220.$$

Будем продолжать этот процесс нахождения разностей. Получим ряд:

$$21,\ 28,\ 36,\ 45,\ 55,$$

затем следующий:

$$7,\ 8,\ 9,\ 10,$$

т. е. ряд последовательных целых чисел, или арифметическую прогрессию. Если взять ещё раз разности, то получим ряд равных чисел

$$1,\ 1,\ 1.$$

В этом и заключается закономерность выше предложенного ряда чисел.

Все ряды разностей можно сопоставить в одной таблице:

21	56	126	252	462	792	1287	2002
35	70	126	210	330	495	715	
35	56	84	120	165	220		
21	28	36	45	55			
7	8	9	10				
1	1	1					

Нам придётся решать обратную задачу, т. е. переходить от простой арифметической прогрессии к более сложным рядам. Построение таких рядов (более высокого порядка) приводит к так называемой таблице Тартальи-Паскаля.

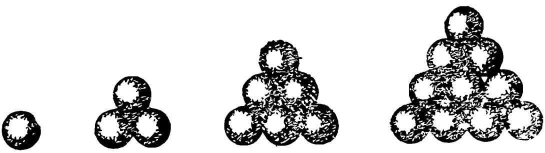
Пусть имеются бильярдные шары в большом количестве. Будем их укладывать на плоскость в виде треугольника; из них можно составить группы, изображённые на черт. 36: 1) из 1 шара; 2) из 3 шаров; 3) из 6 шаров; 4) из 10 шаров, и так далее. Заметим, что при образовании четвёртой группы надо было к третьей группе добавить 4 шара; при образовании пятой группы надо добавить 5 шаров и т. д. Нетрудно видеть, что число всех шаров четвёртой группы равно $1+2+3+4=10$, число шаров пятой группы равно

$1+2+3+4+5=15$. Число групп шаров с номером m равно $1+2+3+\ldots+m$.

Запишем числа шаров каждой группы параллельно с числами натурального ряда (нумерами групп). Получим таблицу:

Нумер группы	Число шаров	Нумер группы	Число шаров
1	1	5	15
2	3	6	21
3	6	7	28
4	10	8	36

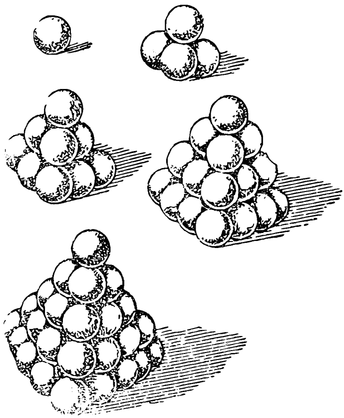
Так как составленные нами группы шаров имеют форму треугольника, то числа, стоящие с правой стороны, получили название «треугольных» чисел.



Черт. 36.

Будем теперь складывать шары в пространственные группы в форме треугольных пирамид (черт. 37). За группой из одного шара идёт такая группа: 3 шара внизу, один над ними, всего 4 шара. Более сложные группы можно получить, если накладывать друг на друга различные плоские группы. Если группу из 6 шаров положить на плоскость в форме треугольника, а плоскую группу из 3 шаров поместить в углублениях над ними, то получим как бы двухэтажную группу, добавив к которой сверху 1 шар, получим пирамиду из 10 шаров (третья пирамида—черт. 37).

Можно продолжить такое построение: надо поместить на плоскость группу из 10 шаров, опять в форме треугольника, и над этим слоем поставить всю предыдущую группу. Получим «четырёхэтажную» группу из $1+3+6+10=20$ шаров. Далее, можно под предыдущую «постройку» подвести фундамент в виде плоской треугольной группы из 15 шаров. Получится группа из $1+3+6+10+15=35$ шаров и т. д. Из этого процесса построения следует, что числа шаров пространственных групп получаются путём сложения одного, двух, трёх и так далее чисел того ряда, который мы выше назвали рядом «треугольных чисел». Поэтому совсем нетрудно дополнить предыдущую таблицу ещё одним, третьим столбцом чисел. Новый ряд чисел получил название «пирамидальных». Числа натурального ряда, треугольные и пирамидальные числа, а также числа, которые мы сейчас получим, носят название фигурных чисел.



Черт. 37.

Числа, стоящие в первом столбце нашей таблицы, назовём фигурными числами первого порядка; числа, стоящие во втором столбце, — фигурными числами второго порядка; наконец, числа третьего столбца — фигурными числами третьего порядка. Мы получили эти числа с помощью геометрических фигур,

Нумер группы	Треугольные числа	Пирамидальные числа	Нумер группы	Треугольные числа	Пирамидальные числа
1	1	1	6	21	56
2	3	4	7	28	84
3	6	10	8	36	120
4	10	20	9	45	165
5	15	35	10	55	220

состоящих из шаров; но их можно получить и иначе. Верхнее число каждого столбца равно единице. Второе число получается путём сложения этой единицы с числом предыдущего столбца, стоящим во второй строке; третье число каждого столбца получается путём сложения второго числа того же столбца с третьим числом предыдущего столбца и т. д.

Хотя уже нельзя строить геометрические фигуры из шаров, числа которых давали бы числа следующего, четвёртого, столбца, однако, подмеченное нами правило даёт возможность построить эти числа: пишем в первом ряду четвёртого столбца 1; к нему прибавляем 4 (второе число третьего столбца), получаем 5 (второе число четвёртого столбца) и т. д.

Вот фигурные числа четвёртого порядка:

$$1,\ 5,\ 15,\ 35,\ 70,\ 126,\ \ldots$$

Ничто не мешает из полученных чисел образовать числа пятого порядка и т. д.

В пятом столбце получим ряд чисел:

$$21,\ 56,\ 126,\ 252,\ 792,\ 1287,$$

о которых шла речь в начале параграфа.

С левой стороны таблицы добавляется ещё один вертикальный столбец, состоящий из одних единиц; числа этого столбца (единицы) называют фигурными числами нулевого порядка. В результате получим таблицу, данную на стр. 109.

Так построенная таблица фигурных чисел впервые встречается в большом сочинении по арифметике Тартальи (1500—1557). Однако систематическое изложение свойств чисел различных порядков было дано лишь в сочинении «Об арифметическом треугольнике» Паскаля (1623—1662).

Укажем теперь на основное свойство полученной таблицы. Из самого способа её составления вытекает следующее: если взять, например, первые 10 чисел второго порядка, то их сумма равна одному десятому числу третьего порядка. Чтобы это показать, заметим, что в третьем столбце второе число 4 равно сумме

Нумер \ Порядок	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	10	15	21
4	1	4	10	20	35	56
5	1	5	15	35	70	126
6	1	6	21	56	126	252
7	1	7	28	84	210	462
8	1	8	36	120	330	792
9	1	9	45	165	495	1287
10	1	10	55	220	715	2002
11	1	11	66	286	1001	3003
12	1	12	78	364	1365	4368

$1+3$; третье число 10 равно $4+6$ или же $1+3+6$ четвёртое число 20 равно $10+10$ или же $1+3+6+10$, т. е. четвёртое число третьего столбца равно сумме первых четырёх чисел второго столбца; пятое число третьего столбца 35 равно $20+15$ или же $1+3+6+$ $+10+15$, т. е. сумме первых 5 чисел второго столбца, и так далее. Поэтому и десятое число третьего порядка равно сумме первых 10 чисел второго порядка. Таким же образом можно показать, что, например, сумма первых 8 чисел третьего порядка равна одному восьмому числу четвёртого порядка.

Общее правило таково: сумма первых n фигурных чисел какого-либо порядка равна одному n-му числу следующего порядка.

Введём следующие обозначения. Число, стоящее на m-й строке и в столбце с нумером k, обозначим через F_m^k; например, 8-е фигурное число второго порядка будет обозначаться через F_8^2; 10-е число третьего порядка F_{10}^3 и т. д.

Тот факт, что сумма первых шести чисел второго порядка равна шестому числу третьего порядка, в этих обозначениях запишется так:

$$F_1^2+F_2^2+F_3^2+F_4^2+F_5^2+F_6^2=F_6^3.$$

Таким образом можно записать, что сумма первых восьми чисел третьего порядка равна восьмому числу четвёртого порядка:

$$F_1^3+F_2^3+F_3^3+F_4^3+F_5^3+F_6^3+F_7^3+F_8^3=F_8^4.$$

Можно записать и общую формулу такого «автоматического» сложения:

$$F_1^k+F_2^k+F_3^k+\ldots+F_{n-1}^k+F_n^k=F_n^{k+1}. \qquad (1)$$

Если бы мы имели в своём распоряжении весьма большую таблицу, то могли бы сразу находить суммы такого рода; например, сумму первых 300 чисел третьего порядка; сумму первых 450 чисел четвёртого порядка и т. д.

Но оказывается, можно производить такое суммирование сразу, не имея огромных таблиц. Можно, например, быстро найти сумму первых 300 слагаемых третьего порядка без таблицы. Для этого, согласно изложенному, достаточно знать только фигурное число F_{300}^4. Но как его узнать? Ответ на этот вопрос даёт формула другого математика Пьера Ферма́ (1601 — 1665). Эта формула впервые встречается в письме, которое Ферма́ писал своему приятелю в 1636 г., т. е. более трёхсот лет назад. Фигурное число F_{300}^4, согласно формуле Ферма́, равно

$$\frac{300\cdot301\cdot302\cdot303}{1\cdot2\cdot3\cdot4}.$$

К выводу формулы Ферма́ мы и перейдём.

3. Формула для любого числа таблицы Тартальи (первый способ).

Решим предварительно такую задачу. Требуется сложить сумму $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots$ (100 слагаемых). Последние слагаемые будут: $99\cdot100\cdot101$; $100\cdot101\cdot102$.

Для нахождения суммы можно применить следующий весьма удобный приём. Сперва умножим все слагаемые на 4.

Получим:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5\cdot 4+$$
$$+4\cdot 5\cdot 6\cdot 4+\ldots+100\cdot 101\cdot 102\cdot 4.$$

Такое увеличение всех слагаемых влечёт за собой и увеличение всей суммы в 4 раза; поэтому результат нового суммирования придётся потом разделить на 4.

Новую сумму будем вычислять постепенно: сперва найдём сумму первых двух слагаемых; к полученному добавим третье слагаемое, затем добавим четвёртое и т. д.

Складываем первые два слагаемых:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 4=1\,(2\cdot 3\cdot 4)+(2\cdot 3\cdot 4)\cdot 4=$$
$$=(2\cdot 3\cdot 4)\cdot 5=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5.$$

К полученному добавим третье слагаемое:

$$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 4=2\,(3\cdot 4\cdot 5)+(3\cdot 4\cdot 5)\cdot 4=$$
$$=(3\cdot 4\cdot 5)\cdot 6=3\cdot 4\cdot 5\cdot 6.$$

К полученному добавим четвёртое слагаемое:

$$3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+4\cdot 5\cdot 6\cdot 4=3\cdot(4\cdot 5\cdot 6)+(4\cdot 5\cdot 6)\cdot 4=$$
$$=(4\cdot 5\cdot 6)\cdot 7=4\cdot 5\cdot 6\cdot 7.$$

Итак, сумма первых четырёх слагаемых

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5\cdot 4+4\cdot 5\cdot 6\cdot 4=$$
$$=4\cdot(1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5\cdot 6)$$

оказалась равной $4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$.

Подметив закономерность суммирования, можно сразу написать, например, сумму первых двадцати слагаемых:

$$4\cdot(1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+19\cdot 20\cdot 21+$$
$$+20\cdot 21\cdot 22)=20\cdot 21\cdot 22\cdot 23.$$

Таким образом напишем сразу сумму первых 100 слагаемых:

$$4\cdot(1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+99\cdot 100\cdot 101+$$
$$+100\cdot 101\cdot 102)=100\cdot 101\cdot 102\cdot 103.$$

Для решения поставленной задачи остаётся полученный результат разделить на 4: получим $\frac{100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103}{4}$. В общем случае, для любого числа слагаемых результат решения задачи запишется так:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + (n-1)\,n\,(n+1) + \\ + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Следует отметить, что все слагаемые состоят из трёх множителей, а сумма содержит четыре множителя; кроме того, появляется множитель: $\frac{1}{4}$.

Таким же способом может быть решена задача нахождения суммы слагаемых такого вида:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + \ldots \\ \ldots + n(n+1)(n+2)(n+3).$$

В данном случае придётся все слагаемые предварительно умножить на 5. Решение может быть проведено в точности так же, как в предыдущем случае; в результате получится:

$$\frac{1}{5}\,n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Вернёмся теперь к таблице Тартальи (в дальнейшем будем её называть таблицей Паскаля; такое название более употребительно). В первом столбце таблицы находятся числа 1, 2, 3, 4, ... Хотя мы знаем формулу для суммы чисел этого ряда, но можем её получить и только что указанным приёмом. Для этого надо предварительно умножить числа ряда на 2. Получим:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + \ldots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 2.$$

Сумма первых двух слагаемых найдётся так:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 2 \cdot (1+2) = 2 \cdot 3.$$

Затем прибавляем третье слагаемое:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 3 \cdot (2+2) = 3 \cdot 4.$$

Далее прибавляем четвёртое слагаемое:

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot (3 + 2) = 4 \cdot 5.$$

Поэтому сумма первых четырёх слагаемых:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 2(1 + 2 + 3 + 4) = 4 \cdot 5.$$

Сумма первых n слагаемых окажется равной

$$n(n+1).$$

Для нахождения суммы основного ряда надо этот результат разделить на 2; получим:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Иначе это равенство можно записать так:

$$F_1^1 + F_2^1 + F_3^1 + F_4^1 + \ldots + F_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Но сумма, стоящая на левой стороне, согласно формуле (1), равна также F_n^2. Отсюда получаем формулу:

$$F_n^2 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}.$$

Выведем теперь формулу для фигурного числа третьего порядка, т. е. F_n^3.

Как известно,

$$F_n^3 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_{n-1}^2 + F_n^2.$$

Для фигурных чисел F_m^2 второго порядка мы только что получили формулу: $F_m^2 = \frac{m(m+1)}{2}$. Поэтому F_n^3 можно представить в виде суммы:

$$1 + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 5}{2} + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Выносся множитель $\frac{1}{2}$ на скобки, получим:

$$F_n^3 = \frac{1}{2}[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)].$$

Но слагаемые, стоящие внутри скобки, мы умеем суммировать:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Отсюда следует, что фигурное число третьего порядка выражается формулой:

$$F_n^3=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}.$$

Для симметрии можно написать:

$$F_n^3=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Теперь уже нетрудно написать формулу для фигурного числа четвёртого порядка:

$$F_n^4=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Самая общая формула для фигурного числа имеет вид:

$$F_n^k=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}.$$

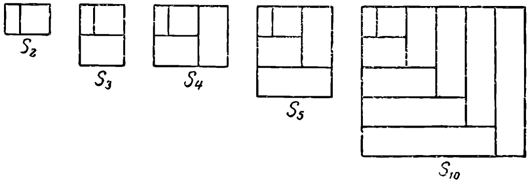
Именно эту формулу сообщал Ферма́ в письме другу в 1636 г.

Дадим теперь геометрическую иллюстрацию к изложенному способу суммирования произведений последовательных чисел натурального ряда. Пусть требуется сложить числа первого порядка, т. е. числа $1+2+3+4+5+\ldots$ $\ldots+n$. Эти числа можно представить прямоугольниками, длина которых равна 1 *см*, 2 *см*, 3 *см*, ..., n *см*, а ширина 1 *см*. Площади (черт. 38) прямоугольников будут равны тем же фигурным числам первого порядка: $1\cdot 1$ *кв. см* $=1$ *кв. см*, $2\cdot 1$ *кв. см* $=2$ *кв. см*, $3\cdot 1$ *кв. см* $=$ $=3$ *кв. см*, $4\cdot 1$ *кв. см* $=4$ *кв. см*.

Условимся повсюду указывать сперва длину, затем ширину.

Согласно вышеизложенному способу удвоим ширину всех этих прямоугольников, т. е. сделаем её равной 2 *см*. Теперь приступаем к последовательному сложению их площадей (черт. 38).

Сумму площадей первых двух прямоугольников получим, приставив второй из них справа к первому; получится прямоугольник площадью в 2×3 *кв. см*; эту площадь обозначим через S_2. К полученному прямоугольнику приставляем снизу третий прямоугольник; в результате получится новый прямоугольник площадью в 3×4 *кв. см*; обозначим его величину через S_3. К полученной фигуре приставляем справа четвёртый прямоугольник, предварительно опрокинув его так, чтобы основанием служила



Черт. 38.

сторона, равная 2 *см*. В результате получим прямоугольную фигуру размером 5×4 *кв. см*; эту величину обозначим через S_4.

Такой процесс последовательного прикладывания справа и снизу новых прямоугольников можно продолжать как угодно далеко. Нетрудно видеть, что, например, сумма 10 прямоугольников представит собой прямоугольник с площадью $S_{10} = 11 \cdot 10$ *кв. см* (черт. 38). Отсюда следует, что сумма $2 \cdot (1+2+3+\ldots+10) = 10 \cdot 11$, или же в общем виде: $2 \cdot (1+2+3+\ldots+n) = n(n+1)$; разделив обе части равенства на 2, получим $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Перейдём к суммированию фигурных чисел второго порядка: их сумма есть $\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 5}{2} + \ldots$ $\ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)]$. Мы отбросим пока множитель $\frac{1}{2}$; впоследствии мы его учтём.

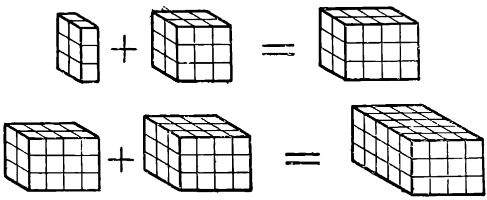
Возьмём прямоугольные параллелепипеды (коробочки), размеры которых указаны в следующей таблице:

	Первый паралл.	Второй паралл.	Третий паралл.	Четвёртый паралл.
Длина	1 *см*	2 *см*	3 *см*	4 *см*
Ширина . . .	2 »	3 »	4 »	5 »
Высота	1 »	1 »	1 »	1 »

Объёмы этих коробочек в кубических сантиметрах выражаются произведениями $1\cdot2$, $2\cdot3$, $3\cdot4$, ... *куб. см*. Увеличим высоту всех коробочек в 3 раза. Получим коробочки таких размеров:

Длина	1 *см*	2 *см*	3 *см*	4 *см*
Ширина . . .	2 »	3 »	4 »	5 »
Высота	3 »	3 »	3 »	3 »

Объёмы этих новых коробочек можно суммировать тем же приёмом, каким мы раньше суммировали пло-



Черт. 39.

щади прямоугольников. Складываем первую и вторую коробочки.

Для этого опрокидываем вторую коробочку так, чтобы её размеры по «порядку» были: $3\times2\times3$ *куб. см*. Приставляем её справа к первой коробочке (черт. 39). Тогда из двух коробочек образуется одна коробка, длина которой будет равна $1+3=4$ *см* и в сумме получим коробку, объём которой $V_2 = 4 \times 2 \times 3$ *куб. см.* К полученной коробке прибавим третью коробку. С этой целью опрокинем её так, чтобы её размеры по порядку были $4 \cdot 3 \cdot 3$ *куб. см.* Приставим эту коробку к предыдущей коробке так, чтобы грани в $3 \cdot 4$ *кв. см* у них слились. Тогда из них сложится новая коробка, объём которой $V_3 = 4 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot (2+3) \cdot 3 = 4 \cdot 5 \cdot 3$ *куб. см.* Так будем продолжать дальше. Наибольшей по размеру стороной у вновь образующихся коробок будут по очереди: длина, ширина, высота; длина, ширина, высота и т. д. В результате складывания получим коробку с объёмом, равным произведению $n(n+1)(n+2)$ *куб. см* (порядок множителей может быть иным, — это не имеет значения). Искомую сумму фигурных чисел F_m^2 получим, разделив результат на 3 и умножив ещё на множитель $\frac{1}{2}$: получим $\frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$; это и есть значение F_n^3.

Дальше итти геометрическим путём мы не можем, так как такой же приём для суммирования чисел F_m^3 требовал бы четвёртого измерения.

Доказав формулу Ферма́, мы могли бы перейти к разрешению вопроса, поставленного в начале главы, к нахождению сумм $\sum_k$. Однако мы сделаем отступление в сторону, а именно: покажем, как совершенно иным путём пришёл Паскаль к той же самой формуле для фигурных чисел F_n^k.

4. Диагонали таблицы и формула Паскаля (второй способ).

В эпоху, когда жили Тарталья, Ферма́ и Паскаль, азартные игры имели большое распространение. Свою таблицу Тарталья составил, имея в виду расчёты при игре в кости, подобные же задачи натолкнули Паскаля и одновременно с ним Ферма́ на исследование новых математических вопросов; их разработка привела к созданию особой ветви математики — теории вероятностей. Одной из таких задач была задача о бросании монеты.

Если 1 раз подбрасывают монету, то может выпасть либо решётка, либо герб. Будем выпадение решётки обозначать нулём, выпадение герба — единицей. Тогда результат одного подбрасывания выразится знаком:

0
1

Если монету подбросить второй раз, то опять может выпасть либо решётка, либо герб, причём любой результат второго бросания монеты может сочетаться с любым результатом первого. Всего получим 4 возможных случая, или, как принято говорить, 4 варианта:

0 0	0 1
1 0	1 1

и

0 1	0 1
1 1	1 1

Объединяя их в одну схему, получим:

Ни одного раза герб	0 0	1 вар.
1 раз герб	1 0 0 1	2 вар.
2 раза герб	1 1	1 вар.

Перейдём к случаю трёх бросаний монеты. В результате третьего бросания опять может выпасть либо решётка, либо герб, и каждый из этих результатов может сочетаться с любым из 4 вариантов результата первых двух бросаний.

Получим две схемы:

0 0 0
1 0 0 0 1 0
1 1 0

0 0 1
1 0 1 0 1 1
1 1 1

Третий столбец показывает результат 3-го бросания. Всего получим $4 \cdot 2 = 8$ вариантов. Их можно распределить по числу выпадений герба. Например, «1 раз герб» встречается два раза на левой схеме и ни одного раза на правой. Соединение одинаковых вариантов (по числу гербов) показано стрелками. Теперь можно все эти 8 вариантов соединить в одну схему.

Получим:

Ни одного раза герб	0 0 0	1 вар.
1 раз герб	1 0 0 0 1 0 0 0 1	3 вар.
2 раза герб	1 1 0 1 0 1 0 1 1	3 вар.
3 раза герб	1 1 1	1 вар.

Подбросим монету в четвёртый раз. Независимо от предыдущих результатов, опять может выпасть либо решётка, либо герб. К полученной схеме, сообразно с этим, можно справа приставить столбец с нулями или столбец с единицами. В результате получим $8 \cdot 2 = 16$ вариантов.

0 0 0 0	0 0 0 1
1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0	1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1
1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0	1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1
1 1 1 0	1 1 1 1

Распределим эти 16 вариантов по числу выпадений герба:

Ни одного раза герб	0 0 0 0	1 вар.
1 раз герб	1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1	4 вар
2 раза герб	1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1	6 вар.
3 раза герб	1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1	4 вар.
4 раза герб	1 1 1 1	1 вар.

Отметим опять, что варианты каждой категории в последней таблице получаются путём соединения вариантов этой категории в левой и правой схеме, ранее указанных. Такое сложение вариантов одной категории можно представить весьма просто, если группу чисел:

1	3	3	1

дающих результаты 3 бросаний, написать 2 раза, затем вторую группу чисел сдвинуть вправо на одну клетку так:

1	3	3	1	
	1	3	3	1

Складывая по вертикалям, получим новую группу чисел, т. е. числа вариантов 4 бросаний:

1	4	6	4	1

Переходя к случаю 5 бросаний, покажем результаты на схеме без объяснений:

0 0 0 0 0	0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1
1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0	1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1
1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0	1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0	1 1 1 1 1

Соединяя оба столбца вместе, получим:

Ни одного раза герб	0 0 0 0 0	1 вар.
1 раз герб	1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1	5 вар.
2 раза герб	1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1	10 вар.
3 раза герб	1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1	10 вар.
4 раза герб	1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1	5 вар.
5 раз герб	1 1 1 1 1	1 вар.

Новые числа вариантов попрежнему можно получить путём своеобразного сложения двух групп чисел—результатов 4 бросаний:

1	4 1	6 4	4 6	1 4	1
1	5	10	10	5	1

Этот процесс подсчёта чисел вариантов можно продолжить. Для случая 6 бросаний получим:

1	5 1	10 5	10 10	5 10	1 5	1
1	6	15	20	15	6	1

Для случая 7 бросаний получим:

1	6 1	15 6	20 15	15 20	6 15	1 6	1
1	7	21	35	35	21	7	1

и так далее.

Выпишем подряд группы чисел, дающие числа вариантов при 1, 2, 3, 4, 5, ... бросаниях:

1	1

1	2	1

1	3	3	1

1	4	6	4	1

1	5	10	10	5	1

1	6	15	20	15	6	1

И так далее.

Расположим эти группы чисел одну под другой. Тогда получим числовой «треугольник».

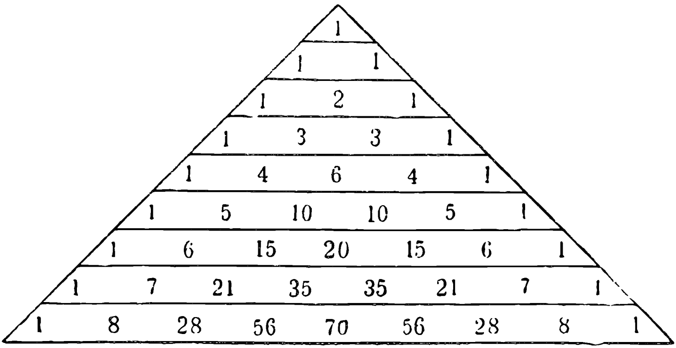


Таблица эта была известна уже очень давно: такая в точности таблица имеется в книге «Драгоценное зеркало четырёх начал» (1303 г.) китайского математика Тшу-Ши-Ки.

Дадим теперь этому «китайскому треугольнику» иное расположение, а именно такое, чтобы единицы шли горизонтально вправо и вертикально вниз. Тогда получим ту форму таблицы, которую рассматривал Паскаль в своей книге. Отсюда произошло название «Арифметический треугольник Паскаля»:

пор / №	0	I	II	III	IV	V			
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	
3	1	3	6	10	15	21	28		
4	1	4	10	20	35	56			
5	1	5	15	35	70				
6	1	6	21	56					
7	1	7	28						
8	1	8							
9	1								

Если эту треугольную таблицу Паскаля сравним с прямоугольной таблицей Тартальи (стр. 109), то убедимся, что треугольник Паскаля есть срезанный вдоль диагонали прямоугольник Тартальи. Таким образом, если мы сумеем написать формулу для любого числа треугольника Паскаля, то можно будет написать формулу и для любого фигурного числа F_n^k.

Но присмотримся к группам чисел, находящихся на диагоналях треугольника. С такими группами чисел мы уже встречались в начале этой главы. Мы, например, имели группу чисел:

1	8	28	56	70	56	28	8	1

Для такой группы чисел в начале этой главы мы получили вполне определённые формулы. Например, при $n=8$:

$$C_8^0=1; \quad C_8^1=8; \quad C_8^2=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28; \quad C_8^3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=56;$$

$$C_8^4=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70; \quad C_8^5=C_8^3=56; \quad C_8^6=C_8^2=28;$$

$$C_8^7=C_8^1=8; \quad C_8^8=1.$$

Таким образом, обнаружилась связь между двумя, казалось бы различными, задачами: задачей с подбрасыванием монеты и задачей о числе сочетаний из n элементов по k. Эта связь не случайна. Здесь в задаче с подбрасыванием монеты ставится вопрос: сколько имеется вариантов того, чтобы при 8 бросаниях монеты герб выпал 2 раза? Ответ — 28 вариантов. Так как выпадение герба могло произойти при любом из 8 бросаний, то, перенумеровав бросания, мы можем свести задачу к такой: сколькими различными способами можно из 8 нумеров выбрать 2?

Но это явно напоминает задачу из § 1: из 8 членов завкома надо выбрать двух делегатов на конференцию: сколько имеется вариантов результата выборов?

В обоих случаях из 8 нумеров надо выбрать 2. В первом случае нумеруются бросания; во втором случае — члены завкома. Естественно, что ответ на обе задачи выражается одним и тем же числом.

Точно так же число 56, лежащее на восьмой диагонали паскалева треугольника, есть число вариантов трёхкратного выпадения герба при 8 бросаниях и в то же время есть ответ на вопрос: сколько имеется вариантов — выбрать 3 человека из 8 человек?

Итак, числа, лежащие на диагоналях паскалевой таблицы, представляют собой числа сочетаний: на 5-й диагонали — сочетаний из 5 элементов; на 6-й диагонали—сочетаний из 6 элементов и т. д. Поэтому для определения чисел, входящих в паскалев треугольник, можно дать такие правила:

Всякое число, лежащее в нулевом столбце, равно 1. Число, лежащее в первом столбце и n-й диагонали, равно $C_n^1 = n$.

Число, лежащее во втором столбце и n-й диагонали, равно

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Число, лежащее в третьем столбце и n-й диагонали, равно $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ и т. д.

Теперь уже нетрудно будет вывести формулу Паскаля для любого фигурного числа. Пусть, например, требуется найти F_6^3. В треугольнике Паскаля оно лежит в 3-м столбце и в 6-й строке. Чтобы можно было воспользоваться формулой сочетаний, надо узнать, на какой диагонали треугольника лежит число F_6^3. С этой целью будем мысленно передвигаться от числа F_6^3 по диагонали влево и вниз. При таком передвижении нижний индекс будет возрастать, а верхний убывать. В данном случае после F_6^3 перейдём к числу F_7^2, затем к числу F_8^1. Дальше передвигаться не нужно, так как именно в первом столбце и значится нумер диагонали. Итак, надо взять число сочетаний из 8 элементов. По скольку элементов? По 3, так как наше фигурное число F_6^3 находится в 3-м столбце:

$$F_6^3 = C_8^3.$$

В общем случае, чтобы найти значение фигурного числа F_n^k, придётся для перехода на 1-й столбец сделать по диагонали $k-1$ перемещений, и нумер диагонали будет $n+k-1$. Поэтому общая формула такова:

$$F_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Это и есть формула Паскаля для фигурных чисел. Остаётся показать, что эта формула даёт то же самое, что и формула Ферма́. Это легко проверить.

По формуле Ферма́	По формуле Паскаля
$F_6^3 = \frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3}$	$F_6^3 = C_8^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}$
$F_8^4 = \frac{8\cdot9\cdot10\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$	$F_8^4 = C_{11}^4 = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$
$F_n^k = \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1\cdot2\ldots k}$	$F_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots n}{1\cdot2\ldots k}$

5. Решение задачи о суммах $\sum_n$.

Теперь мы обладаем достаточно сильными средствами, чтобы решить задачу о суммах $\sum_k$, т. е. найти сумму

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

Для того чтобы найти сумму k-х степеней натурального ряда, мы поступим так. Вместо $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ будем складывать фигурные числа $F_1^k + F_2^k + \ldots + F_n^k$; получим F_{n+1}^k, а затем учтём поправку, которую надо внести в этот результат.

На основании формулы Ферма́, таблицу Тартальи можно представить в таком виде, как на стр. 128.

Будем считать известной сумму $\sum_1$ и начнём с нахождения суммы квадратов $\sum_2$, — например, первой сотни чисел натурального ряда.

Как мы знаем,

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_{100}^2 = F_{100}^3,$$

или короче:

$$\sum_1^{100} F_m^2 = F_{100}^3.$$

Слагаемые этой суммы находятся во втором столбце таблицы. Любое m-е число этого столбца равно $\frac{m(m+1)}{2}$, или, после перемножения, $\frac{m^2+m}{2} = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$. Если

Нул.	I пор.	II пор.	III пор.	IV пор.
1	1	$1=\frac{1\cdot 2}{2}$	$1=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}$	$1=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
1	2	$\frac{2\cdot 3}{2}$	$\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
1	3	$\frac{3\cdot 4}{2}$	$\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
1	4	$\frac{4\cdot 5}{2}$	$\frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
1	5	$\frac{5\cdot 6}{2}$	$\frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
1	6	$\frac{6\cdot 7}{2}$	$\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
1	7	$\frac{7\cdot 8}{2}$	$\frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
1	8	$\frac{8\cdot 9}{2}$	$\frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
1	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$

мы возьмём первые 100 чисел второго столбца, то их можно будет представить в таком виде:

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{2}\cdot 1,$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot 2,$$
$$\frac{1}{2}\cdot 3^2+\frac{1}{2}\cdot 3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{2}\cdot 99^2+\frac{1}{2}\cdot 99,$$
$$\frac{1}{2}\cdot 100^2+\frac{1}{2}\cdot 100$$

Будем складывать отдельно первые слагаемые этих сумм и отдельно вторые слагаемые. Тогда получим:

$$\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2)+\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+100),$$

или $\frac{1}{2}\sum_2+\frac{1}{2}\sum_1$.

С другой стороны, сумма первых 100 фигурных чисел второго порядка равна F_{100}^3 или, в общем виде, F_n^3. Итак, получаем равенство:

$$\frac{1}{2}\sum_2+\frac{1}{2}\sum_1=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

В правой части равенства, после перемножения, получим $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$. Но в равенстве

$$\frac{1}{2}\sum_2+\frac{1}{2}\sum_1=\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n)$$

нам известна сумма $\sum_1$; она равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Следовательно, можно будет определить искомую сумму $\sum_2$ из равенства:

$$\frac{1}{2}\sum_2+\frac{1}{4}(n^2+n)=\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n),$$

или

$$\frac{1}{2}\sum_2+\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}n=\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\sum_2=\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{12}n,$$

или окончательно:

$$\sum_2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.$$

Этот результат по существу совпадает с формулой (7) первой главы.

Перейдём к выводу формулы для $\sum_3$. Теперь мы можем считать уже известными суммы $\sum_1$ и $\sum_2$. Подобно тому, как формулу для $\sum_2$ мы вывели из рассмотрения равенства $\sum_{m=1}^{n} F_m^2 = F_n^3$, мы выведем формулу для $\sum_3$ из суммирования фигурных чисел третьего порядка, т. е. из равенства $\sum_{m=1}^{n} F_m^3 = F_n^4$. Любое m-е число третьего порядка определяется формулой:

$$F_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{m^3+3m^2+2m}{6} = \frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m.$$

Поэтому, если, например, требуется найти сумму первых 100 чисел третьего столбца таблицы Паскаля, то можно эти числа представить следующей таблицей:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{6}\cdot 1^3 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{3}\cdot 1,\\
\frac{1}{6}\cdot 2^3 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 + \frac{1}{3}\cdot 2,\\
\frac{1}{6}\cdot 3^3 + \frac{1}{2}\cdot 3^2 + \frac{1}{3}\cdot 3,\\
\frac{1}{6}\cdot 4^3 + \frac{1}{2}\cdot 4^2 + \frac{1}{3}\cdot 4,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{1}{6}\cdot 99^3 + \frac{1}{2}\cdot 99^2 + \frac{1}{3}\cdot 99,\\
\frac{1}{6}\cdot 100^3 + \frac{1}{2}100^2 + \frac{1}{3}\cdot 100.
\end{array}$$

Складывая отдельно первые, вторые и третьи члены, получим:

$$\frac{1}{6}(1^3+2^3+3^3+\ldots+99^3+100^3)+$$
$$+\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+99^2+100^2)+$$
$$+\frac{1}{3}(1+2+3+\ldots+99+100),$$

или же короче: $\frac{1}{6}\sum_3 + \frac{1}{2}\sum_2 + \frac{1}{3}\sum_1$.

Вся эта сумма равна:

$$F_{100}^4 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Или, в общем виде

$$F_n^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24}.$$

Итак, мы получим равенство:

$$\frac{1}{6}\sum\nolimits_3 + \frac{1}{2}\sum\nolimits_2 + \frac{1}{3}\sum\nolimits_1 = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24},$$

или

$$4\sum\nolimits_3 + 12\sum\nolimits_2 + 8\sum\nolimits_1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n.$$

Подставляя в левую часть вместо $\sum_1$ и $\sum_2$ их значения

$$\sum\nolimits_1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \qquad \sum\nolimits_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

получим:

$$4\sum\nolimits_3 + 12\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) + 8\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) =$$
$$= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n,$$

или

$$4\sum\nolimits_3 + 4n^3 + 6n^2 + 2n + 4n^2 + 4n = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n;$$

откуда следует:

$$\sum\nolimits_3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Эта формула совпадает с формулой (6) первой главы.

Ничто не мешает двигаться и дальше по тому же пути; этот способ даёт возможность получать $\sum_4$, $\sum_5$ и т. д., в то время как искусственные приёмы предыдущей главы для этой цели оказываются непригодными.

Правда, выкладки будут становиться всё более длинными и утомительными, но никаких принципиальных затруднений на этом пути встретиться не может. При желании можно вывести все 11 формул Фаульхабера и даже превзойти его результаты, получив несколько дальнейших формул.

ГЛАВА V.

ЧТО ТАКОЕ ЛОГАРИФМ?

1. Таблица Бюрги.

Как известно, инженеры и техники всех стран пользуются счётной линейкой для быстрых практических вычислений. Если посмотреть на счётную линейку, то бросается в глаза, что деления на ней расставлены неравномерно: по мере продвижения к правому краю линейки деления идут всё чаще и чаще. Чтобы понять, каким образом устроена линейка, надо знать, по какому принципу ставятся на ней деления, какая закономерность лежит в основе неодинаковых расстояний между ними. Но объяснить это — значит дать, хотя бы в основных чертах, теорию логарифмов.

Коснёмся сначала истории вопроса. Уже у старых французских математиков Орезма (1328 — 1382) и Шюкэ (его книга вышла в свет в 1489 г.) мы находим сопоставление арифметической и геометрической прогрессий. Вполне отчётливо это сопоставление высказано в «Общей арифметике» Михаила Штифеля, вышедшей в 1544 г. Штифель рассматривал различные степени одного и того же числа, например, такой ряд: $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$; ..., и составил таблицу:

2	4	8	16	32	64	128
1	2	3	4	5	6	7

Эту таблицу он продолжил и влево. Так как в верхнем ряду, если подвигаться влево, числа каждый раз уменьшаются в два раза, то дальше пойдут числа: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}$.

В нижнем ряду, при передвижении влево, числа уменьшаются на 1; получаются новые числа: $0; -1, -2; -3; -4; \ldots$

В результате он дал таблицу:

$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Если перемножить какие-нибудь два числа верхнего ряда, например, 4 и 32 ($4 \cdot 32 = 128$), то, параллельно с этим умножением, происходит сложение соответственных «нижних» чисел: $2+5=7$. Это происходит потому, что

$$4=2^2;\ 32=2^5;\ 4 \cdot 32=2^2 \cdot 2^5=(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)=2^7.$$

Ещё один пример. Произведение $\frac{1}{8} \cdot 128$ даёт 16. Соответственные нижние числа будут: -3, 7, 4, причём $(-3)+7=4$.

В своей «Арифметике» Штифель пишет:

умножению	чисел геометрической прогрессии отвечает в арифметической прогрессии	сложение
делению		вычитание
возвышению в степень k		умножение на k
извлечению корня степени k		деление на k

Свои замечания Штифель заканчивает такими словами: «Можно было бы написать целую книгу об этих замечательных свойствах числовых рядов, однако, здесь я этим ограничусь и пройду мимо с закрытыми глазами».

Приблизительно через 70 лет после выхода в свет книги Штифеля, его идея была воплощена в жизнь в виде таблиц для вычислений одновременно и независимо друг от друга двумя математиками: швейцарцем Бюрги и шотландцем Непером. При этом Непер ввёл самое понятие логарифма и высказал ряд глубоких мыслей, сыгравших немалую роль в дальнейшем развитии математики.

Мы начнём с таблиц Бюрги, так как они проще. Бюрги составил их в период 1603—1611 гг.; напечатаны они были в Праге в 1620 г.

Чтобы понять основную мысль Бюрги, лучше всего нам самим составить таблицу, подобную его таблице. Для этого рассмотрим геометрическую прогрессию со знаменателем $q=1{,}01$ и начальным членом $a_0=1$:

$1;\ 1{,}01;\ 1{,}01^2;\ 1{,}01^3;\ 1{,}01^4;\ \ldots;\ 1{,}01^n;\ 1{,}01^{n+1};\ \ldots$

Ниже помещена таблица, в которой имеются значения 240 членов этой прогрессии. Каждый может сам составить такую таблицу. Если например

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{65}=1{,}909,$$

то следующим числом таблицы будет

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{66}=1{,}909\cdot 1{,}01.$$

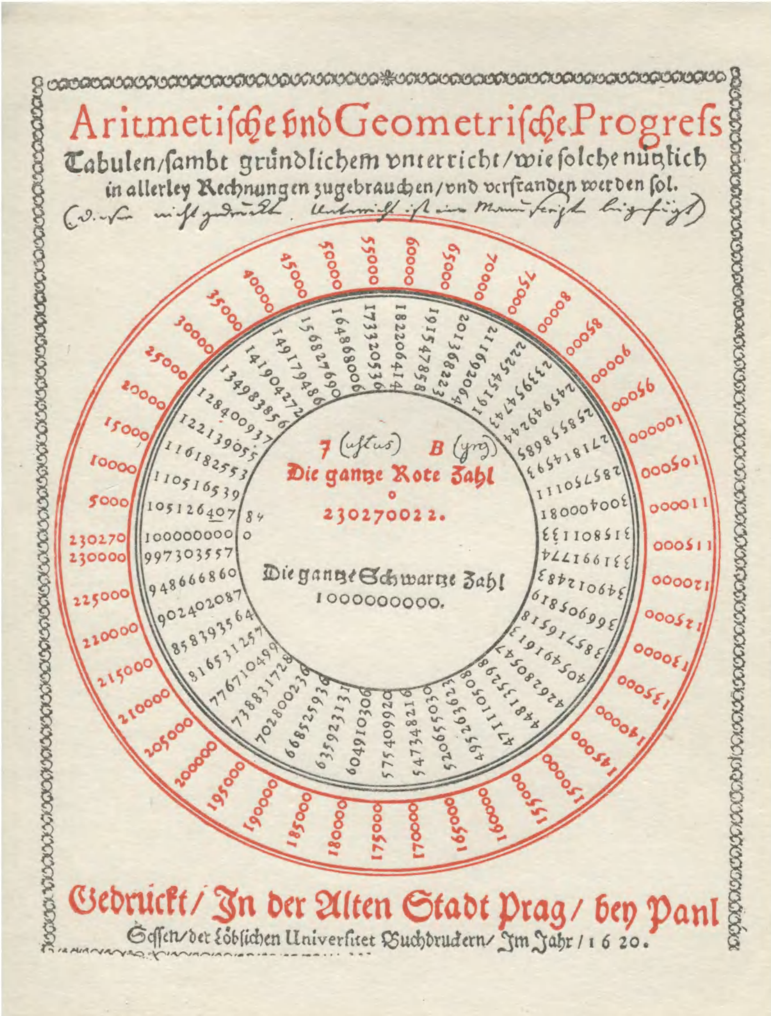
Умножаем, как обычно:

$$1{,}909\cdot 1{,}01=1{,}909+1{,}909\cdot 0{,}01,\ \text{т. е.}$$

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{l}1{,}909\\ 0{,}01909\end{array}\\ \hline 1{,}92809\approx 1{,}928.\end{array}$$

Следующее число будет $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{67}$, т. е.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{l}1{,}928\\ 0{,}01928\end{array}\\ \hline 1{,}94728\approx 1{,}947.\end{array}$$


Aritmetische vnd Geometrische Progress
Tabulen/sambt gründlichem vnterricht/wie solche nützlich
in allerley Rechnungen zugebrauchen/vnd verstanden werden sol.
5000 10000 15000 20000 25000 30000 35000 40000 45000 50000 55000 60000 65000 70000 75000 80000 85000 90000 95000 100000 105000 110000 115000 120000 125000 130000 135000 140000 145000 150000 155000 160000 165000 170000 175000 180000 185000 190000 195000 200000 205000 210000 215000 220000 225000 230000 230270
100000000 105126407 110516539 116182553 122139055 128400937 134983856 141904272 149179486 156827690 164880096 173320536 182206414 191547858 201368223 211692064 222545191 233954743 245949244 258558685 271814593 285754011 300400081 315801133 331991774 349012483 366905819 385716518 405491617 426280547 448135298 471110508 495263623 520655030 547348216 575409920 604910306 635923131 668525936 702800236 738831728 776710499 816531257 858393564 902402087 948666860 997303557
84
0
Die gantze Rote Zahl
0
230270022.
Die gantze Schwartze Zahl
1000000000.
Gedruckt/ In der Alten Stadt Prag/ bey Paul
Sessen/der Löblichen Universitet Buchdruckern/ Im Jahr/1620.

При составлении таблиц встречается затруднение: как производить округление последних цифр? Ведь округляя первые числа ряда, мы этим самым влияем на последующие, и, может быть, незначительные погрешности в начале таблицы дадут большие отклонения в конце её. Чтобы избежать ошибки, приходится составлять такие «округлённые» таблицы с 7 или 8 десятичными знаками, и лишь потом оставлять в них 3 десятичных знака, как у нас. Но здесь мы не можем войти в обсуждение этих деталей. Прилагаемая таблица носит лишь учебный, вспомогательный характер.

В дальнейшем мы узнаем формулы, которые позволяют:

1) эти таблицы вычислять весьма быстро,

2) составлять другие (принципиально точные) таблицы.

Покажем теперь, как, имея под руками такую таблицу, можно производить с большой экономией времени различные вычисления, правда, лишь с некоторым приближением.

Пусть требуется умножить 1,872 на 1,563. Посмотрев на таблицу, видим, что этим числам отвечают нумера $n_1 = 63$; $n_2 = 45$ *). Складываем эти нумера: $n_1 + n_2 = 63 + 45 = 108 = n_3$. Этому нумеру n_3 в таблице соответствует число 2,929. Поэтому $1,872 \cdot 1,563 = 2,929$. Объяснение следует из равенства:

$$(1,01)^{63} \cdot (1,01)^{45} = (1,01)^{108}.$$

При этом, как видим, числа n (нумерà) складываются; числа $(1,01)^n$ перемножаются.

Но не всегда вычисления проходят гладко. В таблице очень многие числа отсутствуют; точнее говоря, в таблице мы имеем только определённую сеть чисел. Как же поступить, если надо производить действия над промежуточными числами?

Пусть, например, надо умножить 5,19 на 1,87. Этих чисел в таблице нет. Единственное, что остаётся сде-

*) Чтобы найти нумер по данному числу, мы в таблице находим число, сверху таблицы прочитываем десятки нумера (и сотни, если они есть), а в крайнем левом столбике—единицы.

	1—10	21—30	41—50	61—70	81—90	101—110	121—130	141—150	161—170	181—190	201—210	221—230
1	1,010	1,232	1,504	1,835	2,238	2,732	3,333	4,067	4,963	6,056	7,389	9,017
2	1,020	1,244	1,519	1,853	2,260	2,759	3,366	4,108	5,013	6,117	7,463	9,107
3	1,030	1,256	1,533	1,872	2,283	2,787	3,400	4,149	5,063	6,178	7,538	9,198
4	1,040	1,269	1,548	1,890	2,306	2,815	3,434	4,190	5,114	6,240	7,613	9,290
5	1,050	1,282	1,563	1,909	2,329	2,843	3,469	4,232	5,165	6,302	7,690	9,383
6	1,061	1,295	1,579	1,928	2,352	2,871	3,504	4,274	5,216	6,365	7,767	9,477
7	1,072	1,308	1,595	1,947	2,376	2,900	3,539	4,317	5,268	6,429	7,845	9,572
8	1,083	1,321	1,611	1,966	2,400	2,929	3,574	4,360	5,321	6,493	7,923	9,668
9	1,094	1,334	1,627	1,986	2,424	2,958	3,610	4,404	5,374	6,558	8,002	9,765
10	1,105	1,348	1,644	2,006	2,448	2,987	3,646	4,448	5,428	6,624	8,081	9,862

	11—20	31—40	51—60	71—80	91—100	111—120	131—140	151—160	171—180	191—200	211—220	231—240
1	1,116	1,361	1,660	2,026	2,472	3,017	3,682	4,492	5,482	6,690	8,162	9,959
2	1,127	1,375	1,677	2,046	2,497	3,047	3,719	4,537	5,537	6,757	8,244	10,06
3	1,138	1,389	1,693	2,067	2,523	3,077	3,756	4,582	5,592	6,825	8,326	10,16
4	1,149	1,403	1,710	2,087	2,548	3,108	3,794	4,628	5,648	6,893	8,409	10,26
5	1,160	1,417	1,727	2,108	2,573	3,140	3,832	4,675	5,705	6,961	8,494	10,36
6	1,172	1,431	1,744	2,129	2,599	3,172	3,870	4,723	5,762	7,031	8,579	10,46
7	1,184	1,445	1,761	2,150	2,525	3,204	3,909	4,770	5,820	7,101	8,665	10,56
8	1,196	1,459	1,779	2,171	2,651	3,236	3,948	4,818	5,878	7,172	8,752	10,67
9	1,208	1,474	1,797	2,193	2,677	3,268	3,987	4,866	5,937	7,244	8,839	10,78
0	1,220	1,489	1,317	2,216	2,705	3,300	4,027	4,914	5,996	7,316	8,928	10,89

лать, — это брать, вместо заданных чисел, ближайшие к ним числа таблицы. Конечно, тогда и результат будет лишь приближённым, не говоря уже о том, что самые таблицы дают приближённые значения $(1{,}01)^n$.

Число 5,19 лежит между 5,165 и 5,216; ему соответствует число n_1, лежащее между 165 и 166; берём $n_1 = 165\frac{1}{2}$; вместо числа 1,87 берём 1,872; соответствующее число $n_2 = 63$. Тогда $n_1 + n_2 = 165\frac{1}{2} + 63 = 228\frac{1}{2}$.

Результат будет заключаться между 9,668 и 9,765; если взять среднее между ними число, то получим 9,716. Произведя обычное умножение, получим 9,7053.

Ошибка значительная*), но какая быстрота в вычислении! Если же необходима бо́льшая точность, то следует построить более подробные таблицы. Сам Бюрги построил таблицы степеней $\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^n$. Тогда при перемножении $5{,}19 \cdot 1{,}87$ результат в первых четырёх десятичных знаках будет точным. По этому поводу заметим, что отличие новой, современной, математики от старой, например, от древнегреческой, состоит в том, что во многих вопросах современная математика сначала как будто идёт на уступки, отказываясь от точного результата; но затем, путём углублённого анализа, добивается такого способа, который даёт возможность решить задачу с любой степенью точности, и таким обходным путём она достигает совершенной точности. Поэтому читатель должен терпеливо отнестись к этим неточным вычислениям, помня о том, что недостаток может быть восполнен и будет восполнен (стр. 166).

Рассмотрим теперь деление чисел; это действие обратно умножению.

Пусть надо разделить 9,52 на 2,95. Соответственные нумера:

$n_1 = 226\frac{1}{2}$; $n_2 = 109$. Вычитаем: $226\frac{1}{2} - 109 = 117\frac{1}{2}$; результат даётся соответствующим числом таблицы: 3,220.

---

*) Для многих задач техники такая точность вполне достаточна.

Объясняется это равенством:

$$(1{,}01)^{226\frac{1}{2}} : (1{,}01)^{109} = (1{,}01)^{117\frac{1}{2}}.$$

Перейдём к более сложному действию — возвышению в степень. Пусть надо найти $1{,}16^7$. Для числа 1,16 соответствующее «левое» число (нумер) n есть 15. Умножаем $15 \cdot 7 = 105$. «Левому» числу $n = 105$ соответствует число таблицы 2,843. Поэтому имеем приближённое равенство: $1{,}16^7 \approx 2{,}84$.

Объяснение таково:

$$1{,}16 \approx (1{,}01)^{15}; \quad 1{,}16^7 = (1{,}01^{15})^7 = 1{,}01^{15\cdot 7} = 1{,}01^{105}.$$

При возвышении $(1{,}01^n)$ в 7-ю степень показатель n умножается на число 7. Таким образом, возвышение в степень k, благодаря таблице, заменяется умножением на число k.

Как уже упоминалось, возвышение в степень иногда называют пятым действием арифметики. Перейдём теперь к шестому действию, к извлечению корня.

Если $(1{,}01^n)^k = 1{,}01^{nk}$, то обратно $\sqrt[k]{1{,}01^n} = 1{,}01^{\frac{n}{k}}$.

Пусть требуется извлечь $\sqrt[5]{8{,}4}$. Так как 8,4 есть $(1{,}01)^{214}$, то $\sqrt[5]{8{,}5} = \sqrt[5]{1{,}01^{214}}$, т. е. $1{,}01^{\frac{214}{5}} = 1{,}01^{43}$; «левому» числу (нумеру) 43 в таблице соответствует число 1,533. Поэтому $\sqrt[5]{8{,}4} = 1{,}53$. Извлечение корня степени k приводится к делению «левого» числа на число k.

Подведём итоги. При вычислениях с помощью таблицы Бюрги производится:

вместо умножения $A \cdot B$	сложение $n_1 + n_2$
вместо деления $A : B$	вычитание $n_1 - n_2$
вместо возвышения в k-ю степень A^k	умножение $n_1 \cdot k$
вместо извлечения корня k-й степени $\sqrt[k]{A}$	деление $n_1 : k$

Если расположить все шесть действий по ступеням

III	возвышение в степень	извлечение корня
II	умножение	деление
I	сложение	вычитание

то можно сказать, что при вычислениях с помощью таблиц Бюрги мы действия второй ступени сводим к действиям первой ступени, а действия третьей ступени — к действиям второй. Важно ещё отметить, что это понижение на одну ступень делает возможным производить шестое действие — извлечение корня, которое иным путём выполнять нелегко.

Сам Бюрги за начальный член прогрессии a_0 взял не 1, а число $10^8 = 100\,000\,000$ (сто миллионов); знаменатель прогрессии у него равен $\left(1+\frac{1}{10\,000}\right)$. Поэтому у него каждое число больше предыдущего на $\frac{1}{10\,000}$ этого предыдущего. «Левые» числа таблицы, т. е. числа n, Бюрги берёт увеличенными в 10 раз; этот факт, по существу, значения не имеет. Числа $10n$, представляющие собой арифметическую прогрессию, у Бюрги были отпечатаны красным шрифтом; числа геометрического ряда, т. е. $10^8 \cdot \left(1+\frac{1}{10\,000}\right)^n$ — чёрным шрифтом. Поэтому, если все чёрные числа таблицы Бюрги разделить на 10^8, а все красные разделить на 10, то его таблица принципиально не будет отличаться от нашей. Но таблица Бюрги, конечно, давала возможность производить гораздо более точные вычисления, чем построенная нами таблица.

Читатель может составить себе представление о ней по прилагаемой фотографии одной из её страниц.

Бюрги продолжает свою таблицу до тех пор, пока исходное число 10^8 не оказывается увеличенным в 10 раз, т. е. до $10^9 = 1\,000\,000\,000$ (тысяча миллионов). И Бюрги, как и нам, приходилось, конечно, округлять последние

	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
0	100000000	100501227	101004966	101511230	102020032	102531384	103045299	103561790
10	····10000	····11277	····15067	····21381	····30234	····41637	····55603	····72141
20	····20001	····21328	····25368	····31524	····40437	····51891	····65909	····82501
30	····30003	····31380	····35271	····41687	····50641	····62146	····76216	····92861
40	····40006	····41433	····45374	····51841	····60846	····72402	····86523	103603221
50	····50010	····51487	····55429	····61226	····71052	····82662	····96832	····13581
60	····60015	····61543	····65584	····72158	····81259	····92918	103107141	····23941
70	····70021	····71599	····75691	····82309	····91467	102603577	····17452	····34305
80	····80028	····81656	····85799	····92468	102101676	····13438	····27264	····44660
90	····90036	····91714	····95907	101602627	····11887	····23699	····38077	····55035
100	100100045	100601773	101106017	····12787	····22098	····33961	····48391	····65392
110	····10055	····11834	····16220	····22949	····32310	····44225	····58705	····75261
120	····20066	····21895	····26235	····33111	····42523	····54489	····69021	····86131
130	····30078	····31957	····36352	····43274	····52738	····64755	····79338	····96501
140	····40091	····42030	····46465	····53328	····62953	····75011	····89656	103706871
150	····50105	····52084	····56580	····63604	····73169	····85289	····99955	····17741
160	····60120	····62150	····66696	····73770	····83386	····95557	103210295	····27613
170	····70136	····72216	····46812	····83938	····91605	102705827	····20616	····37986
180	····80153	····82283	····86930	····94106	102203814	····16097	····30938	····48364
190	····90171	····92351	····97045	101704275	····14045	····26369	····41261	····58734
200	100200190	100701410	101200168	····14446	····24366	····36642	····51585	····69115
210	····10210	····12491	····17215	····24617	····34488	····46915	····61910	····73407
220	····20231	····22562	····27411	····34790	····44717	····57190	····72237	····82865
230	····30253	····32634	····37522	····44963	····54926	····67466	····83564	103800244
240	····40276	····42707	····47657	····55138	····65162	····77742	····92892	····10624
250	····50300	····52782	····52782	····65313	····75388	····88020	103303221	····21005
260	····60325	····62850	····67902	···· 5490	····85616	····98299	····13552	····31387
270	····70351	····72933	····78095	····85662	····95845	102808579	····23883	····41770
280	····80378	····83011	····88162	····95846	102306274	····18860	····34216	····52155
290	····90406	····93189	····98291	101806025	····16305	····29142	····44549	····62541
300	100300435	100803168	101308421	····10200	····26536	····39425	····54883	····72925
310	····10465	····13248	····18552	····26387	····36769	····49708	····65219	····83314
320	····20496	····23330	····28684	····36570	····47003	····59993	····75555	····92202
330	····30328	····33412	····38817	····46754	····57237	····70279	····85893	103904091
340	····40562	····43496	····48950	····56939	····67473	····80566	····96232	····14481
350	····50596	····53580	····53085	····67174	····77710	····90855	103406571	····24872
360	····60631	····63665	····69221	····77311	····87947	102901144	····16912	····35265
370	····70662	····73752	····79358	····87499	····98186	····11434	····29254	····45659
380	····80704	····83839	····89496	····97687	102408476	····21725	····37596	····56052
390	····90742	····93927	····99635	101907872	····18667	····32017	····47940	····66443
400	100400721	100904017	101409775	····18068	····28905	····42310	····58285	····76826
410	····10821	····14107	····19916	····28260	····30151	····52604	····62621	····87242
420	····20862	····24199	····30052	····38452	····49396	····62903	····78971	····97641
430	····30904	····34191	····40201	····48646	····59641	····73196	····89326	104008043
440	····40948	····44384	····50345	····58841	····69887	····83493	····99674	····12443
450	····50991	····54479	····60489	····69037	····80133	····93791	103510024	····28841
460	····61037	····64574	····70636	····79234	····90381	103004091	····20375	····39247
470	····71083	····74671	····80783	····89432	102500630	····14291	····30720	····40651
480	····81136	····8476	····90931	····99631	····10880	····24691	····41081	····60051
490	····91178	····94867	101501080	102009831	····21131	····34905	····51435	····70465
500	100501227	101004966	····11230	····20032	····31384	····45299	····61790	····80816

Страница из таблиц Бюрги.

десятичные знаки. Он высчитал, что если взять показатель $n = 23\,027$, то число $10^8 \cdot (1{,}0001)^{23027}$ будет меньше чем 10^9; если же взять $n = 23\,028$, то число $10^8 \cdot (1{,}0001)^{23028}$ будет больше чем 10^9. Несмотря на то, что таблица Бюрги гораздо точнее, чем построенная нами, однако, и у нас $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{231} = 9{,}959$, а $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{232} = 10{,}06$; таким образом, лестница «во сколько», со знаменателем $q = 1{,}0001$, не так уж сильно отличается от такой же лестницы при $q = 1{,}01$.

Полезно отметить для дальнейшего, что в таблице Бюрги высота 10 000-й ступеньки равна

$$10^8 \cdot \left(1+\frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} = 27\,181\,459;$$

иначе говоря,

$$\left(1+\frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} = 2{,}7181459.$$

В нашей таблице имеется

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}705.$$

И то и другое число близко к некоторому числу, имеющему важное значение в математике,—к числу e. С этим числом $e = 2{,}71828\ldots$ мы ещё встретимся.

2. Гигантский труд (таблица Непера).

Таблицы, составленные Непером, гораздо обширнее и точнее таблиц Бюрги. Сверх того, Непер подарил нам новую блестящую идею: он построил новый тип связи двух переменных, новую функциональную зависимость. Эта идея прекрасна сама по себе, как замечательное теоретическое достижение, и вместе с тем, она теснейшим образом связана с практическими вычислениями; таким образом получилось гармоническое сочетание теории и практики. Однако существо идеи Непера мы изложим в следующем параграфе. Здесь же мы рассмотрим, как Непер составил свои трудоёмкие таблицы. Это рассмотрение покажет нам, какое необычайное трудолюбие требовалось, чтобы в 1614 году подарить современникам «Описание удивительной таблицы логарифмов», над которыми он трудился около 20 лет. Приведём несколько строк из предисловия Непера к его труду.

«Уведомление. Так как вычисление этой таблицы, которое должно было бы выполняться при участии многих вычислителей, сделано трудом одного человека, то не удивительно, если в неё вкрались многие ошибки. Произошли ли эти ошибки вследствие утомления вычислителя или по небрежности типографа, за них прошу извинения у благосклонных читателей.

Однако, если я увижу, что учёным приятна польза этого изобретения, то может быть в скором времени я дам объяснение способа, как улучшить это сочинение, чтобы трудом многих вычислителей выпустить его в свет более точно исполненным, чем было возможно для одного. Ничто сначала не бывает совершенным».

Это обещанное сочинение с объяснением способа составления таблиц появилось в свет в 1619 г., уже после смерти автора.

Переходим к изложению того, как Непер составил свои «удивительные» таблицы. Прежде всего отметим, что таблицы Непера состоят из трёх последовательно составленных пар прогрессий, подводящих к окончательной таблице.

В отличие от таблиц Бюрги, у Непера геометрическая прогрессия не возрастает, а убывает. Знаменатель прогрессии у него ещё ближе к 1, чем у Бюрги: у Бюрги мы имели $q=1+\frac{1}{10^4}$, у Непера же $q=1-\frac{1}{10^7}$. Таким образом, каждый последующий член ряда меньше предыдущего на одну десятимиллионную часть его. Мы получаем прогрессию, весьма медленно убывающую. Идеалом был бы непрерывно изменяющийся числовой ряд, и мы в следующем параграфе увидим, что Непер уже имел в своём воображении идею (образ) такого непрерывного изменения.

Сначала составляется 1-я вспомогательная таблица. Берётся пара рядов: геометрическая лестница и ариф-

Gr. 9

9 min	Sinus	Logarithmi	+ Differentia −	logarithmi	Sinus	
0	1564345	18551174	18427293	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	18408484	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	18389707	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	18370964	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	18352253	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	18333576	126196	9874597	55
6	1581581	18441594	18314933	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	18296324	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	18277747	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	18259203	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	18240692	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	18222213	129001	9871827	49
12	1598812	18333237	18203765	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	18185351	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	18166969	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	18148619	130888	9869964	45
16	1610297	18261663	18130301	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	18112014	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	18093758	132313	9868557	42
19	1618909	18208323	18075533	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	18057328	133268	9867616	40
21	1624649	18172924	18039177	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	18021047	134226	9866671	38
23	1630389	18137654	18002948	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	17984880	135187	9865722	36
25	1636129	18102511	17966842	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	17948835	136152	9864770	34
27	1641868	18067495	17930859	136636	9864293	33
28	1644738	18050034	17912913	137121	9863815	32
29	1647607	18032604	17894997	137607	9863336	31
30	1650476	18015207	17877114	138093	9862856	30 min Gr. 80

80

Страница из таблиц Непера.

метическая лестница. За нулевой член первой взято: $y_0 = 10^7 = 10\,000\,000$; знаменатель $q = 1 - \frac{1}{10^7}$. Имеем: $y_m = y_0 q^m$, где $m = 1, 2, 3, \ldots, 99, 100$.

Нумера членов	Члены геометрического ряда
0	10 000 000, 000 000 0 1, 000 000 0
1 . . .	9 999 999, 000 000 0 999 999 9
2 . . .	9 999 998, 000 000 1 999 999 8
3 . . .	9 999 997, 000 000 3 999 999 7
4 . . .	9 999 996, 000 000 6
. . . . . .	. . . .
. . . . . .	и так далее до
100	9 999 900, 000 495 0

Последнее число близко к целому числу 9 999 900, отношение которого к начальному числу 10^7 есть $\frac{99\,999}{100\,000} = 1 - \frac{1}{10^5}$.

Какой же арифметический ряд будет соответствовать этому геометрическому? Самому первому (нулевому) члену y_0 Непер ставит в соответствие 0 (нуль).

$$\left\| \begin{matrix} y_0 & y_0 q & y_0 q^2 & y_0 q^3 & \ldots & y_0 q^{99} & y_0 q^{100} \\ 0 & \alpha & 2\alpha & 3\alpha & \ldots & 99\alpha & 100\alpha \end{matrix} \right\|.$$

Основная задача состояла в следующем: какое число α соответствует члену $y_1 = y_0\, q = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 9\,999\,999$, т. е. какова разность соответствующей арифметической прогрессии? Ведь в дальнейшем будет проще: мы α умножим на 2, на 3, на 4 и т. д. И вот Непер взял для α значение, удовлетворяющее неравенству:

$$1 < \alpha < 1{,}000\,000\,1\,000\,000\,1.$$

Почему Непер выбрал именно это значение, читатель узнает в конце следующего параграфа (§ 3).

Отсюда, умножая указанные границы величины α последовательно на 2, 3, 4, 5, ..., получим границы для 2-го, 3-го, 4-го, 5-го членов арифметического ряда.

Таким образом Непер нашёл границы для величины, соответствующей 100-му члену геометрического ряда: $100 < x_{100} < 100,0000\,1\,00\,00001$, так что имеет место соответствие

$$x_{100} \longleftrightarrow y_{100} = 99\,999\,00,\ 0004950.$$

За приближённое значение x_{100} Непер, естественно, принимает полусумму найденных границ и получает:

$$x_{100}\ (\text{соответ. } y_{100} = 9999900,\ 0004950) = 100,\ 0000050.$$

В настоящее время, пользуясь точной формулой в виде ряда, можно получить:

$$x_{100} = 100,00000\ 5\,000000\ 333.$$

Неперу было желательно округлить значение y и подсчитать соответствующее значение x.

В следующем параграфе (§ 3) читатель узнает, как он, благодаря своей блестящей теоретической идее, справился с этим затруднением.

После подсчёта Непер находит такой ответ:

$$100,\ 005\ 0000\ 495.$$

В дальнейшем мы будем называть числа y_i геометрического ряда «обычными» числами, а соответствующие им числа x_i арифметического ряда «искусственными», или же логарифмами.

Затем Непер приступает к составлению II вспомогательной таблицы. Теперь он составляет геометрическую лестницу с бóльшими уступами, т. е. со знаменателем q, более отличным от 1. Попрежнему за начальный член берётся число $y_0 = 10^7$; за следующий член берётся только что найденный последний член предыдущей таблицы с округлением, т. е. число 9 999 900. Его отношение к начальному равно:

$$\frac{9\,999\,900}{10\,000\,000} = \frac{99\,999}{100\,000} = 1 - \frac{1}{10^5}.$$

Это и есть знаменатель q геометрического ряда II таблицы. Эта новая прогрессия доводится до 50-го члена, т. е. до числа $y_0 q^{50} = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^5}\right)^{50}$. Результаты вычисления приведём в том виде, в каком они даны в таблицах Непера. Дело в том, что (как позднее выяснилось) Непер допустил небольшую ошибку в вычислениях, и поэтому данные им значения несколько отклоняются от тех, которые он должен был получить.

Нумера членов	Члены геометрического ряда
0	10 000 000, 000 000 1 000, 000 000
1 . . .	9 999 900, 000 000 99, 999 000
2 . . .	9 999 800, 001 000
. . . . . .	. . . .
. . . . . .	. . . . и так далее до
50 . . .	9 995 001, 222 927

Если бы Непер не сделал ошибки, то последнее число таблицы получилось бы иным, а именно: 9 995 001, 224 804. Так как все дальнейшие вычисления Непера основаны на приведённом ошибочном значении y_{50}, то оказалось, что, несмотря на всё трудолюбие Непера, последний, седьмой, знак в его таблицах неверен.

Как и раньше, и во II таблице имеем соответствие двух рядов:

$$\begin{matrix} y_0 & y_0 q & y_0 q^2 & y_0 q^3 & \ldots\ldots & y_0 q^{49} & y_0 q^{50} \\ 0 & \beta & 2\beta & 3\beta & \ldots\ldots & 49\beta & 50\beta \end{matrix}$$

Здесь, умножая β на 50, Непер находит:

$$x_{50} = 5000,\ 02500.$$

Последнее число II таблицы мало отличается от «круглого» числа 9 995 000. Поэтому и здесь Непер ищет число арифметического ряда, соответствующее круглому числу $y = 9\,995\,000$. Он находит:

$$(y = 9\,995\,000) \longleftrightarrow (x = 5001,2485357).$$

Отношение этого числа y к первоначальному 10^7 равно $\frac{1999}{2000} = 1 - \frac{1}{2000}$. А потому Непер имеет возможность построить новую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1 - \frac{1}{2000}$; при этом опять $y_0 = 10^7$.

Здесь берётся только 20 членов:

Нумера членов	Члены геометрического ряда
0	10 000 000, 000 000 5 000, 000 000
1 . . .	9 995 000, 000 000 4 997, 500 000
2 . . .	9 990 002, 500 000 4 995, 001 250
3 . . .	9 985 007, 498 750
. . . .	. . . .
. . . .	и так далее до
20 . . .	9 900 473, 578 080

Как и выше, имеет место соответствие:

$$\left\| \begin{matrix} y_0 & y_0 q & y_0 q^2 & y_0 q^3 & \ldots & y_0 q^{19} & y_0 q^{20} \\ 0 & \gamma & 2\gamma & 3\gamma & \ldots & 19\gamma & 20\gamma \end{matrix} \right\|.$$

Находим $\gamma \cdot 20 = 5001,2485357 \cdot 20 = 100024,970774$.

Этому x_{20} соответствует $y_{20} = 9900473,578080$.

Переходя к «округлённому» числу $y = 9\,900\,000$, Непер получает соответствие:

$$(\text{число } y = 9\,900\,000) \longleftrightarrow (\text{число } x = 100\,503,3210291).$$

Но последнее круглое число, по отношению к начальному $y_0 = 10^7$, составляет долю-дробь $\frac{9\,900\,000}{10\,000\,000} = \frac{99}{100} = 1 - \frac{1}{100}$.

Итак, когда отношение двух «обычных» чисел y_i оказалось равным $1 - \frac{1}{100}$, то соответствующая дистанция (разность) «искусственных» чисел x_i равна 100 503,2321. Добавим ещё из предыдущего (из II таблицы), что когда отношение «обычных» оказалось равным $1 - \frac{1}{2000}$, то разность «искусственных» чисел x_i равна 5001, 248.

Эти два основных результата Непер кладёт в основание последней (4-ой) фундаментальной таблицы, которую он называет Tabula radicalis. Её расположение и характер можно видеть из следующей схемы:

Столбец 1-й		Столбец 2-й	
числа y_i	логарифмы x_i	числа y_i	логарифмы x_i
10 000 000, 0000	0	9 900 000,9000	100 503, 3
9 995 000, 0000	5 001, 2	9 895 050,0000	105 504, 6
9 990 002, 5000	10 002, 5	9 890 102,4750	110 505, 8
9 985 007, 4987	15 003, 7	9 885 157,4237	115 507, 1
и так далее до		и так далее до	
9 900 473, 5780	100 025, 7	9 801 468,8423	200 528, 2

Столбец 69-й	
Числа y_i	Логарифмы x_i
5 048 858, 8900	6 834 225, 8
5 046 334, 4605	6 839 227, 1
5 043 811, 2932	6 844 228, 3
5 041 289, 3879	6 849 229, 6
и так далее до	
4 998 609, 4034	6 934 250, 8

Начальные числа 1-го, 2-го, 3-го, ... столбцов составляют убывающий геометрический ряд со знаменателем $\frac{99}{100}=1-\frac{1}{100}$; внутри же каждого столбца имеется прогрессия со знаменателем $\frac{1999}{2000}=1-\frac{1}{2000}$.

Дадим теперь сводную таблицу, позволяющую обозреть связь всех четырёх таблиц Непера:

x	y
0	$d_0=c_0=b_0=a_0=$ 10 000 000,000 0000
	−1 000 0000
1	$a_1=$ 9 999 999,000 0000
	− 999 9999
2	$a_2=$ 9 999 998,000 0001
	− 999 9998
3	$a_3=$ 9 999 997,000 0003
	− 999 9997
4	$a_4=$ 9 999 996,000 0006
.	. . . .
.	. . . .
100	$b_1=a_{100}=$ 9 999 900, 000 4950
. . .	. . . .
. . .	. . . .
200	$b_2=a_{200}=$ 9 999 800, 0 01 0000
. . .	. . . .
5000	$c_1=\{\ b_{50}=a_{5000}=$ 999 5001, 224 804
5001	$a_{5001}=$ 999 5000, 225 304
	b_{50} = 999 5000
5002	$a_{5002}=$ 999 4999, 225 804
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
100 503,3	$d_1=c_{20}=b_{1000}=a_{100000}=\{$ 990 0473, 5780
	990 0000
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
	$d_2=c_{40}=b_{2000}=a_{200000}=$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
6 834 225,8	$d_{68}=c_{1360}=b_{68000}=a_{6800000}=$ 504 8858, 8900
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
6 934 250,8	$d_{69}=c_{1380}=b_{69000}=a_{6900000}=$ 4 998 609, 4 034

Радикальная таблица доведена до числа 4 998 609, 4034, близкого к половине начального числа $y_0 = 10^7$. И здесь снова Непер переходит к круглому числу $5 \cdot 10^6$ и находит соответствующее ему число x.

(обычное число $y = 5\,000\,000$) $\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$ (искусств. число $x = 6\,931\,469,\ 22$).

Вот скольких трудов стоило Неперу нахождение «искусственного» числа x, соответствующего «обычному» числу $y = \frac{1}{2} \cdot 10^7$ $\left(x - \text{логарифм числа } \frac{1}{2}\right)$. Если эту гигантскую двойную «лестницу» продолжить дальше, то можно было бы от $\frac{1}{2}$ дойти до $\frac{1}{4}$, при этом последнее искусственное число x удвоится, т. е.: числу $\frac{y_0}{4}$ будет соответствовать число $x = 2 \cdot 6931469 = 13\,862\,938$.

Если числа y_i дойдут до $\frac{1}{8}$ y_0, то для соответствующего x получим $3 \cdot 6931469$ и т. д.

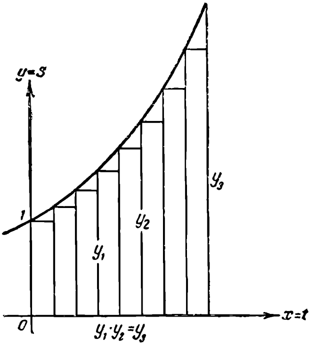
Непер имел терпение продолжить эти свои вычисления и дойти в процессе уменьшения чисел y_i до 1, т. е. до $\frac{1}{10^7}$ исходного числа. В результате получилась такая таблица:

Отношение к числу y_0	Соответств. x	Отношение к числу y_0	Соответств. x
1 : 2	6 931 469,22	$1 : 10^3$	69 077 527,02
1 : 4	13 862 938,44	$1 : 10^4$	92 103 369,36
1 : 8	20 794 407,66	$1 : 10^5$	115 129 211,70
1 : 10	23 025 842,34	$1 : 10^6$	138 155 054,04
$1 : 10^2$	46 051 684,68	$1 : 10^7$	161 180 896,38

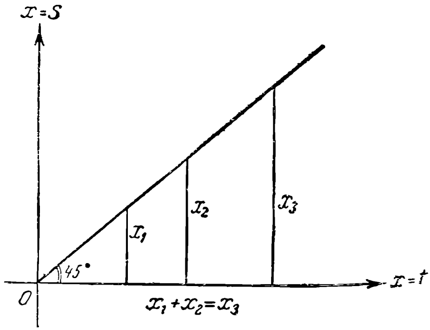
3. Идея Непера.

Прежде чем перейти к рассмотрению «точных» таблиц, представим графически связь обеих прогрессий, которые заданы таблицами типа Бюрги или Непера.

На черт. 40 слева ординаты представляют собой последовательные члены y_i геометрической прогрессии, а ординаты на черт. 41—соответствующие члены арифметической прогрессии. Раньше мы рассматривали эти ряды чисел отвлечённо, чисто арифметически. Теперь будем представлять себе, что вдоль горизонтальной оси откладывается время (например, в часах), а по верти-



Черт. 40.



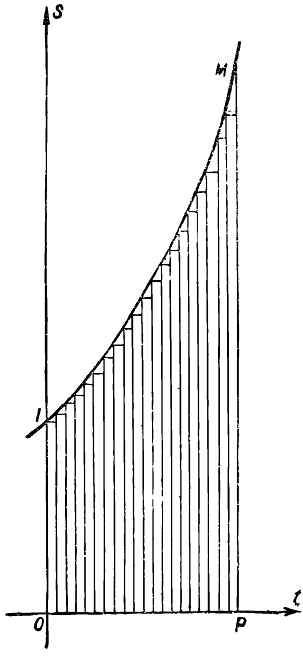
Черт. 41.

кальной—длина пройденного расстояния (например, в метрах). Рассматривая прогрессию

$$1,\ 1+\frac{1}{100},\ \left(1+\frac{1}{100}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{100}\right)^3,\ \ldots,$$
$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^m,\ \left(1+\frac{1}{100}\right)^{m+1},$$

положим расстояния между соседними ординатами, т. е. приращения Δt, равными $\frac{1}{100}$ единицы времени (часа).

Основная взаимосвязь обоих рядов, которой мы пользовались выше, на нашем графике означает следующее. Умножению двух ординат $y_1 \cdot y_2 = y_3$ на черт. 40 соответствует сложение двух ординат $x_1 + x_2 = x_3$ на черт. 41. Теперь обратимся к черт. 42, где изображена прогрессия такого же типа, как на черт. 40, но деления Δt на горизонтальной оси взяты более мелкими (например, меньшими в 4 раза). Если мысленно представить себе ряд дальнейших графиков геометрического ряда, в котором деления Δt становятся всё меньше и меньше, то ступенчатая линия будет как бы сглаживаться, приближаться к некоторой гладкой кривой линии. В конце концов (в пределе) должна получиться идеально гладкая линия (этого положения мы не доказываем, так как доказательство было бы слишком сложным).



Черт. 42.

Непер брал весьма мелкие деления $\Delta t = \frac{1}{10^7}$, но это его не вполне удовлетворяло. Он упорно стремился найти такую идеально гладкую кривую, которая давала бы возможность производить абсолютно точные вычисления. Задержимся ещё немного на рассмотрении ступенчатого графика. Этот график обладает важными свойствами, которые мы определим несколько ниже. Соединим верхние концы соседних ординат прямолинейными отрезками; на языке механики это будет означать, что на каждом малом промежутке времени Δt движение является равномерным. Теперь можно поставить вопрос: по какому закону изменяется скорость рассматриваемого движения? В самом начале движения скорость равна 1; угол наклона первого прямолинейного отрезка составляет 45° с горизонталью. Так как при значении $n = 100 \left(\Delta t = \frac{1}{100}\right)$, приращение ординаты Δy каждый раз равно $\frac{1}{100}$ данной ординаты, т. е. $\Delta y = \frac{1}{100}$, то отсюда следует: если в каком-нибудь месте (в какой-либо момент) ордината оказалась, например, в 2 раза больше начальной ординаты ($y_0 = 1$), то и наклон прямолинейного отрезка *), соединяющего конец этой ординаты с концом следующей, также будет в 2 раза больше, чем у начальной ординаты y_0. И вообще, если из двух каких-либо ординат y_1 и y_2 вторая в несколько раз больше первой, например, в 3 раза, то и наклон исходящего от неё отрезка будет в 3 раза больше. На языке механики это означает, что скорость движения в момент $x_2 = t_2$ в 3 раза больше, чем скорость движения в момент $x_1 = t_1$. Но ордината означает длину пройденного пути. Поэтому наше «кусочно-равномерное» движение обладает следующим свойством.

Если в момент t_2 длина пути s_2 в несколько раз больше, чем длина пути s_1 в момент t_1, то и скорость v_2 в момент t_2 во столько же раз больше скорости v_1 в момент t_1. Отсюда мы приходим к важнейшему свойству движения, представленного нашим графиком:

1-е свойство. Скорость кусочно-равномерного движения, изображённого на черт. 40, изменяется пропорционально длине пройденного пути. Это свойство можно записать следующей формулой $v = ks$, где k — коэффициент пропорциональности.

Примечание. При нашем построении коэффициент k равен 1, т. е. получается, что скорость v численно равна длине пути s.

Однако следует помнить, что поскольку наш график не является гладкой линией, то указанная закономерность, даже при весьма мелких долях Δt, относится всё-таки к отдельным моментам времени, где начинаются промежутки Δt. Ниже мы перейдём к идеально гладкой кривой, причём основным требованием будет сохранение свойства 1-го для любого момента, т. е. в течение всего процесса движения. Покуда же мы имеем скачкообразное изменение скорости, наподобие передвижения минутной стрелки на больших городских часах.

2-е свойство. Если взять на горизонтальной оси Ot группу соседних делений Δt, например, группу с номерами 30—50, или 40—60, или 70—90, то увеличе-

*) Т. е. тангенс угла, образованного этим отрезком с горизонтальным направлением (направлением оси Ox).

ние ординаты за такой соединённый интервал времени:

$$y_{30} \to y_{50};\quad y_{40} \to y_{60};\quad y_{70} \to y_{90} \text{ и т. д.,}$$

т. е. величина отношения $\frac{y_{50}}{y_{30}} = \frac{y_{60}}{y_{40}} = \frac{y_{90}}{y_{70}}$ остаётся постоянной.

Поясним это численным примером. Согласно нашей таблице типа Бюрги на стр. 137 имеем для 17 делений приближённо: $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{17} = 1{,}3$. Это означает, что если мы от какой-либо ординаты, например, $y_1 = 2$, отодвинемся вправо на 17 делений, то придём к ординате y_2, равной 2,6 ед. Если исходить от ординаты $y_3 = 5$ ед., то через 17 делений придём к ординате $y_4 = 6{,}5$ ед. и т. д.

Итак, при постоянной длине перемещения вдоль оси Ox, или Ot, кратное отношение ординат сохраняется:

$$(y_{\text{крайняя}} : y_{\text{начальная}}) = \text{const. *)}.$$

3-е свойство. Обратимся ещё раз к черт. 41, где представлен равномерный рост арифметической прогрессии, начиная от нулевого значения. Здесь предполагаемый переход от ступенчатой линии к плавной получается сам собой, если соединить концы ординат: прямая линия и есть гладкая. У нас взят для простоты угол наклона в 45°, так что ордината x численно равна абсциссе t (равномерное движение со скоростью 1 *м/час*).

Как уже неоднократно говорилось, связь обеих прогрессий заключается в том, что умножение каких-либо двух ординат $y_1 \cdot y_2$ для моментов t_1 и t_2 графика на черт. 40 сопровождается сложением ординат $x_1 + x_2$ для тех же моментов графика на черт. 41, т. е.

$$\boxed{y_1 \cdot y_2 = y_3 \ldots \text{параллельно} \ldots x_1 + x_2 = x_3.}$$

Сделаем теперь следующее замечание. На черт. 40 и 41 представлены две «лестницы». Но что касается черт. 41, то на нём ордината всё время остаётся чи-

---

*) Const.—начало латинского слова constans (кόнстанс), что значит «постоянная» (величина).

сленно равной абсциссе, т. е. постоянно длина пути $s=x$ равна времени t. А потому, хотя мы принципиально и исходим из сопоставления двух прогрессий, можно сэкономить в чертежах, а именно, отказаться от черт. 41 и заменить его абсциссой черт. 40. Таким образом черт. 40 будет заключать в себе обе прогрессии, причём арифметическая будет представлена абсциссой, а геометрическая — ординатой.

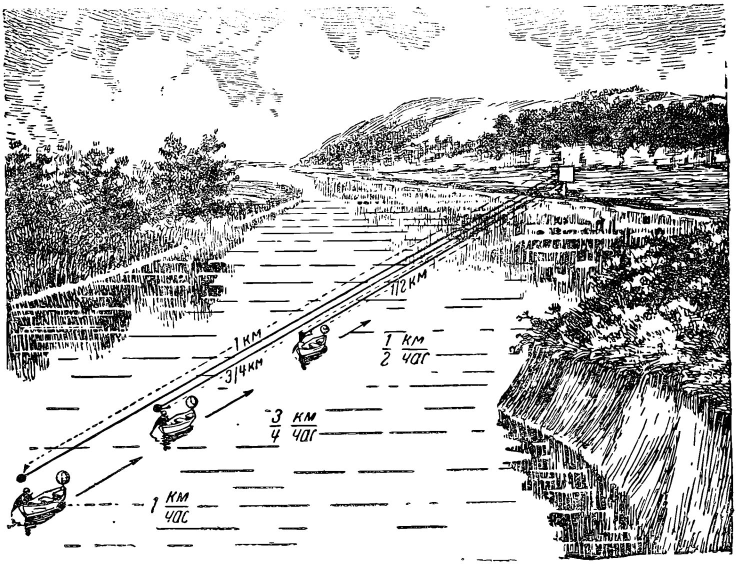
Пусть теперь имеется график типа черт. 40 с чрезвычайно мелкими делениями Δt, так что на-глаз он неощутимо отличается от предполагаемой идеально гладкой кривой, к которой мы стремимся. Исходя из вышеизложенного, мы приходим к следующему определению логарифма, которое впервые было введено в математику Непером.

В таком графике логарифмом данного числа — ординаты y — служит абсцисса x; или же: логарифм пройденного пути s есть протекшее время t: $\log s = t$.

Но Непер в своём определении логарифма пошёл дальше этого, а именно, он пользуется уже представлением идеально гладкой кривой, или же, на языке механики, движением с плавно изменяющейся скоростью.

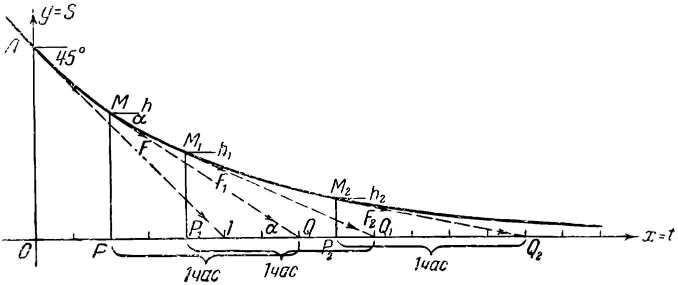
Именно в этом переходе к пределу заключается главная идея Непера. Надо иметь в виду, что во времена Непера ещё не существовало анализа бесконечно-малых. Этот анализ был дан позднее; ещё позднее, на основе анализа бесконечно-малых, развилось понятие дифференциального уравнения. Непер же ещё в 1614 г. в своей книге вводит понятие о логарифме, исходя по существу из дифференциального уравнения. Перейдём теперь непосредственно к изложению теории Непера, несколько видоизменив её для удобства изложения.

Рассмотрим движение лодки, приближающейся к берегу, причём скорость лодки постоянно меняется и определяется специальным законом. Пусть в начальный момент $t=0$ расстояние лодки до берега $s=1$ *км*, и пусть в этот момент и скорость равна 1 *км/час*. Далее, закон движения требует, чтобы в любой момент скорость была численно равна длине расстояния до берега (черт. 43). Это означает: если в некоторый момент расстояние равно, например, $\frac{3}{4}$ *км*, то в это мгновение и скорость равна $\frac{3}{4}$ *км/час*, так что, если бы эта скорость не изменялась, лодка дошла бы до берега через 1 час. Если в другой момент расстояние лодки до берега оказалось бы равным, например, 0,4 *км*, то в этот момент и скорость её была бы равна 0,4 *км/час*, так что, если бы



Черт. 43.

с этого момента лодка стала двигаться «по инерции», то она дошла бы до берега опять через 1 час. Чтобы твёрдо усвоить себе этот специальный закон движения, представим себе, что у лодочника имеется дальномер, автоматически показывающий длину оставшегося расстояния до берега, и что показание стрелки дальномера автоматически передаётся тормозному колесу, регулирующему скорость. Движение, задуманное Непером, должно быть таковым, чтобы составленные для него график пути и график скорости совпадали. Интересно отметить, что при указанном законе движения лодочник никогда не достигнет берега: он может проездить всю свою жизнь, и ему всегда «остаётся ехать ещё 1 час». Движение по этому специальному закону мы будем в дальнейшем для сокращения называть «движением Непера». Ввиду трудности усвоения новой идеи, мы дадим здесь графическое изображение этого движения, но следует подчеркнуть, что во времена Непера



Черт. 44.

ещё никто не пользовался методом координат (он введён позднее Декартом), что в те времена идея функциональной зависимости двух переменных была ещё мало распространена даже в среде учёных-математиков.

Но конкретно поставленная задача — из связи двух рядов чисел создать новый, совершенно точный, инструмент счёта — воздействовала на мысль Непера так, что он невольно вышел за рамки старой, неподвижной, математики и рванулся далеко вперёд к той новой, уже диалектической, математике, которая через 200 лет была оформлена и сейчас преподаётся студентам под названием «Теория дифференциальных уравнений». Закон движения, придуманный Непером, в настоящее время без труда может быть уяснён всякому школьнику, если пользоваться графиком движения (см. черт. 44).

Если движение равномерное, то скорость движения, как известно, на графике представляется тангенсом (tg) угла наклона прямой линии, т. е. тангенсом угла, образованного данной прямой и направлением оси Ox.

Если же движение — неравномерное и, следовательно, графиком его служит кривая линия, то мгновенная скорость его представляется как тангенс угла наклона касательной в соответствующей точке графика.

При этом берётся угол, составляемый с осью Ox (или Ot) и отсчитываемый против движения часовой стрелки. Если расстояние от начальной точки уменьшается, как в случае нашего лодочника, то угол будет отрицательным, и его следует брать от оси $Ox \equiv Ot$ по часовой стрелке. На нашем графике мы имеем ряд стрелок-касательных $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{M_1F_1}$, $\overrightarrow{M_2F_2}, \ldots$, и пусть они составляют с горизонталью углы $\measuredangle hMF$, $\measuredangle h_1M_1F_1$, $\measuredangle h_2M_2F_2 \ldots$ Тангенсы этих углов, т. е. $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, дающие величину мгновенной скорости в моменты t, t_1, $t_2, \ldots$, в силу указанного специального. закона движения, должны быть численно равны соответствующим ординатам $PM = y$, $P_1M_1 = y_1$, $P_2M_2 = y_2, \ldots$

Таким образом, для каждой точки M кривой графика, или же для каждого момента движения, имеет место равенство

$$\operatorname{tg} \measuredangle hMF = \text{длине } PM,$$

т. е. $\operatorname{tg}\alpha = y$, или же

$$\text{скорость } v = \text{длине пути } s; \; v(t) = s.$$

Ещё раз подчёркиваем, что указанное равенство имеет место *в любой точке кривой графика на всём её протяжении*, подобно тому, как наш лодочник должен всё время следить за дальномером и поворачивать колесо скоростей. Вышеуказанное правило движения — «лодочнику всегда остаётся ехать в течение одного часа» на нашем графике означает, что отрезки PQ, P_1Q_1, $P_2Q_2, \ldots$ все равны 1 (Q_i означает точку пересечения касательной с осью $Ox \equiv Ot$). Поясним это свойство геометрически. В прямоугольном треугольнике MPQ катет PQ равен катету PM, умноженному на $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е. $PQ = PM \cdot \operatorname{ctg}\alpha$; или $PQ = y \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}$. Но по основному закону: $\operatorname{tg}\alpha = y$; откуда $PQ = 1 = \text{const}$.

Самое остроумное в изобретении Непера заключается в том, что «движение Непера» в его время ещё не было известно, или, говоря геометрическим языком, никто раньше не видел и не предполагал существования кривой линии (графика), обладающей такими свойствами. Здесь не решалась частная задача: для такой-то данной линии доказать такое-то свойство, или найти новое свойство, исследовать её. Здесь наоборот, требовалось придумать, как бы создать, «новую» линию, исходя из такого-то свойства касательной в каждой точке этой «предполагаемой» линии. Эта новая постановка вопроса — составить функцию, исходя из дифференциального уравнения — имела огромное значение и в самой математике, и в её приложениях к естествознанию. И решение проблемы удалось Неперу именно потому, что он исходил из вполне конкретной задачи и подходил к ней с вполне определённой целью — сделать геометрическую прогрессию непрерывно изменяющейся.

Читатель может подумать, что кривая линия Непера прилагается только к вычислению логарифмов. Однако это не так: кривая Непера имеет широкое применение в технических науках: в электротехнике, теплотехнике и т. д. Приведём пример. Если поместить горячее тело, положим, кастрюлю с кипятком, в холодное помещение, например в сарай, где температура y° постоянно равна нулю, то тело будет охлаждаться. Нетрудно сообразить, что процесс охлаждения происходит не всё время одинаково быстро; если, например, в начале температура тела была 80°, а через некоторое время 20°, то отдача тепла в начальный момент происходит быстрее, чем во второй. Зависимость скорости отдачи тепла от разности температур тела и среды весьма сложна. Но предположим, как первое приближение, что между указанными величинами, т. е. разностью температур ($y^\circ - 0$) и скоростью отдачи тепла $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ *), имеет ме-

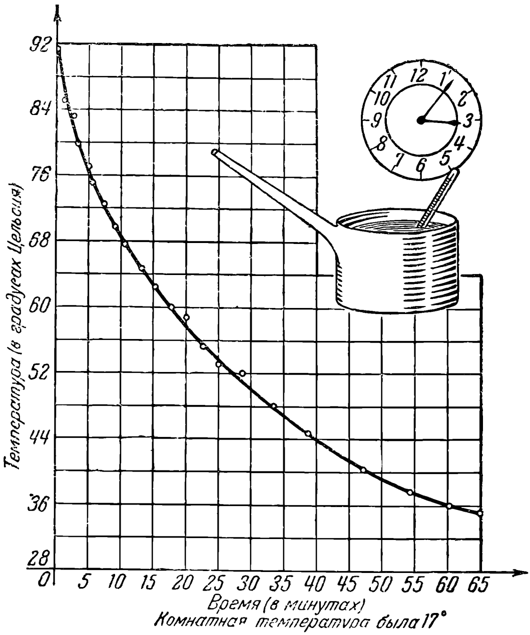
*) Здесь, как и на стр. 153, Δ (дельта) не есть множитель; это *знак* разности, т. е. знак, указывающий, что берётся разность двух значений переменной величины:

$$\Delta y = y_2 - y_1; \qquad \Delta t = t_2 - t_1.$$

сто прямая пропорциональность, т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -ky,$$

где k — коэффициент пропорциональности, а знак (—) указывает на убывание температуры y. Если произве-



Черт. 45.

сти опыт с охлаждением и результаты опыта записать графически, то окажется, что линия графика имеет такой же вид, как наш график движения Непера.

И здесь переменный наклон касательной пропорционален ординате. Следовательно, закон изменения температуры будет таким же, как и в «движении Непера». График охлаждения горячей кастрюли изображён на черт. 45.

Введём некоторое, не очень существенное, видоизменение нашего графика. Будем рассматривать движение материальной точки (лодки или шарика) не к нулевой точке пути, а наоборот, от неё, начиная с точки, находящейся на расстоянии $s_0 = 1$ от нулевой, и далее в том же направлении. В остальном закон движения остаётся прежним, т. е. скорость в любой момент численно равна величине пройденного пути.

Кривая (график) при этом остаётся прежней, но расположена она будет иначе: при возрастании времени t расстояние от нулевой точки будет увеличиваться, т. е. при движении по оси абсцисс вправо, ординаты будут возрастать (черт. 46). Нетрудно видеть, что прежний чертёж (черт. 44) представляет собой левую часть нового (черт. 46), рассматриваемого в обратном направлении, т. е. если от нуля (точки O на оси Ox) вести отсчёт времени в отрицательную сторону (влево).

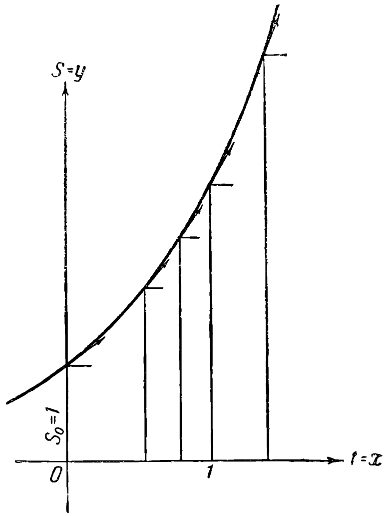
В дальнейшем изложении будем придерживаться этой последней схемы.

Если допустить, что «кривая Непера», или график «движения Непера», уже имеется, то, изменив соответствующим образом его масштабы, можно будет пользоваться этой кривой для практического нахождения логарифмов чисел. Например, чтобы найти $\log 3$, откладываем на оси Oy отрезок, равный 3 ед.; через конец его проводим параллель до встречи с графиком и из полученной точки пересечения N проводим вертикаль до встречи с осью $Ox \equiv Ot$ в некоторой точке Q; тогда длина $OQ = x$ равна $\log y$. Но как построить такую кривую?

Как это часто бывает в математике, мы делаем допущение, что кривая уже имеется, и выводим из этого факта дальнейшие следствия. В результате будет получен ряд формул, по которым можно будет производить точные расчёты, а проводя рассуждения обратным путём, точно построить саму кривую.

Ещё раз обращаем внимание читателя на то, что до Непера такой функции — называемой теперь логарифмом — не было известно.

Чтобы пояснить сущность открытия логарифмов Непера, приведём аналогию. Вообразим на минуту (хоть это не реально), что ни один человек не видел окружности, а знал бы только правильные многоугольники и то свойство их, что перпендикуляры в их серединах всегда пересекаются в одной точке (O). Затем явился бы учёный и сказал: «Вообразите такую кривую, что при движении вдоль неё материальной точки направление движения (стрелка касательной) постоянно составляет прямой угол с отрезком OM, соединяющим эту точку с некоторой постоянной точкой (O) внутри кривой».



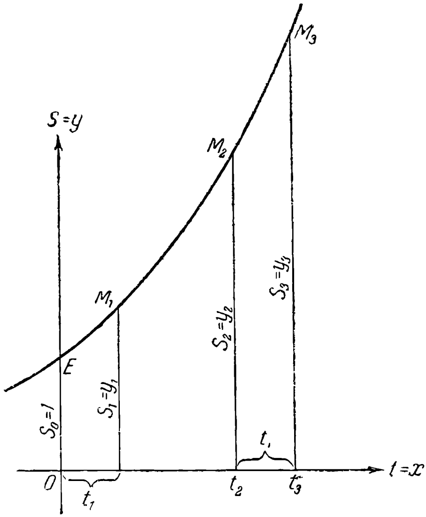
Черт. 46.

Построенная по этому принципу кривая оказалась бы «нашей» обычной окружностью, но получена она была бы, исходя не из наглядных представлений, но из чисто теоретических соображений. При построении графика движения Непера мы осуществляем идею такого же рода. При этом получается новая кривая с особыми свойствами.

Эта кривая оказалась необычайно полезной. В ней поразительно сочетаются глубокая идея с прекрасным средством техники вычислений.

Выше мы рассматривали два свойства, вытекающих из сопоставления двух прогрессий. Перейдём теперь к неперовой кривой. Первое её свойство, характеризующее быстроту возрастания кусочно-прямолинейной линии, не придётся теперь выводить: оно лежит в существе новой кривой и служит принципом её построения. Второе её свойство — при равных перемещениях по горизонтальной оси отношение крайних ординат справа и слева остаётся постоянным — здесь также сохраняется. Покажем это, не входя в детальное и строгое доказательство. При этом будем пользоваться понятиями механики.

Пусть в некоторый момент времени $t=t_1$ (нет необходимости знать его величину) шарик в движении Непера достиг точки, находящейся на расстоянии 1,3 ед.



Черт. 47.

от нулевой точки. Напомним, что в начальный момент $t=0$ расстояние $s=1$. На графике (черт. 47) положение в этот момент t_1 показано точкой B, где $P_1B=1{,}3$. Пусть, кроме того, известно, что в момент $t=t_2$ шарик в движении Непера оказался на дистанции 4 ед. от начальной точки.

На графике его положение показано точкой M, где $P_2M=4$.

Дадим шарику двигаться дальше ещё в течение t_1 единиц времени. Какова будет конечная, достигнутая шариком дистанция P_3N?

По существу эта задача не отличается от вышерассмотренной. Раньше (стр. 152), в случае ступенчатого или кусочно-прямолинейного графика при равных промежутках возрастание «во сколько» оставалось постоянным.

Допуская, что при мельчайшем дроблении, т. е. при $\Delta t \to 0$, кусочно-прямолинейная ломаная плавным образом переходит в гладкую кривую Непера, естественно предположить, что указанное свойство остаётся в силе. Это означает следующее: если дистанция за первые t_1 часа изменилась с 1 *м* на 1,3 *м*, то за такой же интервал времени t_1, начиная с момента $t=t_1$, дистанция $s=4$ должна возрасти в том же отношении, т. е. должна иметь место пропорция $1:1{,}3=4:s_3$; откуда $s_3=4\cdot 1{,}3=5{,}2$. Пропорция эта выглядит так:

$$1\ \underbrace{\text{метр} \to 1{,}3}_{\text{за } t_1}\ \text{метра} = 4\ \underbrace{\text{метра} \to 5{,}2}_{\text{за } t_1}\ \text{метра}.$$

Полученный результат можно пояснить ещё так. Закон движения единообразен: пройдя дистанцию, равную 4 *м*, шарик, начиная от момента $t=t_1$, продолжает движение с мгновенной скоростью 4 *м/час* так же, как в начальный момент, начиная с дистанции $s=1$ *м*, шарик движется со скоростью 1 *м/час*. Во втором случае происходит как-бы увеличение масштаба (соответственно дистанции), но характер возрастания длины пути остаётся прежним.

Поэтому и расстояние, пройденное за интервал времени от $t=t_2$ до $t=t_2+t_1$, будет также в 1,3 раза больше.

Итак, длина ординаты P_3N_3 с абсциссой $t_3=t_2+t_1$ равна произведению ординат $y_1 \cdot y_2$ или $s_1 \cdot s_2$.

Если $y_1 \cdot y_2 = y_3$ или $s_1 \cdot s_2 = s_3$, то параллельно с этим

$$x_1+x_2=x_3 \text{ или же } t_1+t_2=t_3.$$

Мы узнаём основное свойство логарифмов.

П р и м е ч а н и е: Самое слово «логарифм» — греческое. Оно составлено из двух слов: logos — отношение и arithmos — число. Логарифм есть таким образом «число, измеряющее отношение».

Всякой паре чисел $y_2:y_1=y_4:y_3=y_6:y_5=\ldots=k$, имеющей равное отношение, отвечает одно и то же число $\log k$.

На графике — «кривой Непера» — каждая пара ординат, имеющих данное отношение (например, 1,3:1), отстоит друг от друга на одно и то же расстояние, считаемое по горизонтали, по оси $Ox \equiv Ot$; в этом случае:

$$\log \frac{y_2}{y_1} = \log \frac{y_4}{y_3} = \log \frac{y_6}{y_5} = \ldots = \log 1{,}3.$$

Теперь мы можем разъяснить (см. § 2, стр. 146), каким образом Непер в своём труде выбрал число, соответствующее первому, после нулевого, члену геометрического ряда $y_1 = 10^7 \cdot q = 10^7(1 - 10^{-7})$. Дело в том, что при сопоставлении обеих прогрессий Непер по существу имел в виду непрерывное изменение переменных «y» и «x», а не только ступенчатое. И согласно вышеприведённому определению логарифма он предполагает, что убывание величины $y_0 = 10^7$ происходит по закону «пропорционального изменения», а следовательно, числа арифметического ряда должны непрерывно и равномерно расти с постоянной скоростью, принимаемой за единицу. Поэтому величина α, т. е. значение 1-го члена арифметического ряда, должно означать количество протекшего времени, требуемого для перехода $y_0 \to y_1 = y_0(1 - 10^{-7})$. Как же измерить точно это количество времени? Полное решение вопроса было найдено позднее (1668) Меркатором, о чём читатель узнает в следующей главе. Непер не знал ещё фактов теории, позднее найденных другими математиками. Но идея новой закономерной связи была им правильно схвачена, и ему удалось несложными, но не лишёнными остроумия, средствами решить поставленную задачу.

Он рассуждал так. Если примем, что скорость будет оставаться постоянной и равной начальной, то времени для прохождения первого интервала пути понадобилось бы меньше, чем уходит фактически. Если же принять, что скорость постоянно равна мгновенной скорости в конце этого интервала (конечной скорости), то времени понадобилось бы больше, чем фактически. Непер высчитывает и ту и другую величину времени, а затем берёт среднее между ними.

Согласно принципу движения Непера, имеет место пропорция:

$$\frac{\text{колич. времени (конечн. скорость)}}{\text{колич. врем. (нач. скорость)}} = \frac{\text{скорость начальная}}{\text{скорость конечная}} =$$
$$= \frac{\text{нач. длина пути}}{\text{конечн. длина пути}} = \frac{10^7}{10^7 \cdot (1-10^{-7})} = \frac{1}{1-0{,}000\,0001}$$

Если начальную скорость принять за единицу, то для прохождения первой единицы расстояния понадобится количество времени α, удовлетворяющее неравенству: $1<\alpha<\frac{1}{1-10^{-7}}$. Последняя дробь может быть представлена как сумма геометрической прогрессии. Тогда получим неравенство:

$$1<\alpha<1+10^{-7}+(10^{-7})^2+(10^{-7})^3+\ldots,$$

откуда

$$1<\alpha<1{,}000\,000\ \ 1\,000\,0001.$$

Непер берёт число, среднее между границами, т. е. принимает приближённо:

$$\alpha=1{,}000\,000\,50.$$

В настоящее время можно, пользуясь «ключом» Меркатора (см. следующую главу), определить быстро α с любой степенью точности. Тогда окажется, что значение α, принятое Непером, точно до 14-го десятичного знака. Такая точность является достаточной, чтобы обеспечить в таблицах, построенных Непером, 7 правильных цифр. И если таблицы Непера оказались не вполне правильными (в последнем знаке), то причиной тому была не теоретическая ошибка, а техническая ошибка в вычислениях (см. выше, стр. 147).

Аналогично вычислению α, Непер пользуется интерполяцией *) для нахождения логарифма «круглого» числа, когда ему известен логарифм числа, близкого

---

*) Интерполяцией называется вычисление промежуточных значений величины, некоторые значения которой даны в таблице. Простейшим и наиболее распространённым видом интерполяций является интерполяция при помощи пропорции.

к круглому. Отметим, что у Непера при убывании числа y логарифм x возрастает. Для интерполяции Непер пользуется неравенством:

$$(\text{при } n_1 < n_2)\ 10^7 \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_2} < \Delta(\log n_1) < 10^7 \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_1};$$

здесь $\Delta(\log n_1)$ означает приращение логарифма, т. е. разность $\log n_1 - \log n_2$.

Поэтому, когда в конце 1-ой вспомогательной таблицы (см. выше, стр. 145) Непер получил:

$$\log 9\,999\,900,\,000\,4950 = 100{,}000\,0050,$$

и ему потребовалось определить логарифм весьма близкого «круглого» числа 9 999 900, то ему достаточно было воспользоваться своим «искусством» интерполяции. А именно, достаточно в только что приведённой формуле принять:

$$n_1 = 9\,999\,900; \quad n_2 = 9\,999\,900{,}000\,4950,$$

чтобы получить искомую поправку (приращение) логарифма: $\log n_1 - \log n_2 = \Delta(\log n_2) = 0{,}000\,49500495$; отсюда Непер получил: $\log 9\,99900 = 100{,}0005\,0000\,495$. Без этого результата Непер не мог бы составить следующей вспомогательной таблицы, где требовалось значение $\log(1 - 10^{-5})$.

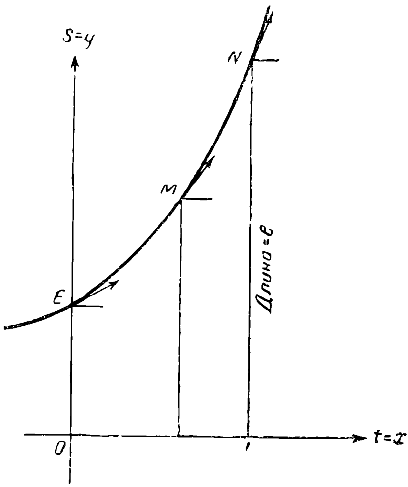
4. Число Непера.

В предыдущем параграфе мы достаточно подробно выяснили характер движения, изучением которого занимался Непер. Параллельно с этим мы рассматривали кривую, представляющую график этого движения. Но всего сказанного недостаточно для того, чтобы на этой основе производить какие-либо вычисления. Для таких вычислений необходимо знать хотя бы одну пару значений t_1 и s_1, т. е. знать расстояние движущегося тела от начальной точки для определённого момента времени $t = t_1$ (кроме начальной пары значений $t = 0$, $s = 1$). Геометрически это означает, что для построения кривой Непера необходимо знать координаты ещё какой-нибудь её точки. Например, если знать, что при $t = 1{,}6$ часа

$s=5$ *м*, то можно было бы вычислить расстояния для любого момента времени, т. е. установить, скажем, что при $t=0{,}8$, $s=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{5}$; при $t=0{,}4$, $s=5^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{5}$; при $t=3{,}2$ часа, $s=5^2=25$ и т. д.

Но откуда взять такую пару чисел? Ведь нам известен только характер кривой — внутренний закон движения. Самой кривой ещё нет, а потому нельзя производить даже приближённых расчётов, какие можно было бы сделать, если бы имелся график.

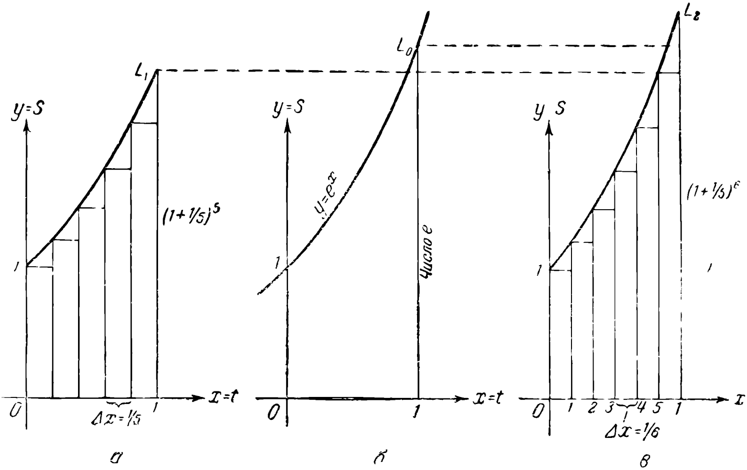
Положение в этом случае сходно с тем, в каком оказался бы вычислитель, который захотел бы определить длину окружности, зная закон её построения, но не имея перед собой её чертежа.



Черт. 48.

При разыскании пары чисел, соответствующих друг другу в движении Непера, естественно искать значение s, отвечающее значению $t=1$, или, выражаясь языком механики: искать расстояние от начальной точки, на котором окажется движущееся тело спустя 1 час после начала движения (черт. 48).

Идеальным решением вопроса было бы «схватить», т. е. точно указать число, выражающее это расстояние. Но если это невозможно, то полным решением можно считать и такое, когда удаётся как угодно сблизить границы, между которыми должно находиться искомое число. Эта постановка вопроса вполне аналогична той, которая имеет место при нахождении числа π. Там исходят из определения: $\frac{\text{площадь круга}}{\text{квадрат диаметра}}=\frac{\pi}{4}$. Здесь расстояние тела от начальной точки спустя 1 час после начала движения обозначается числом «e». И подобно тому, как число π — площадь круга при радиусе, равном единице, является общим пределом площадей вписанных и описанных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон, — так и число e может быть получено при помощи построения двух рядов чисел: один ряд состоит из возрастающих чисел, приближающихся к



Черт. 49.

числу e снизу, со стороны меньших значений, а другой — из чисел убывающих и приближающихся к числу e сверху, со стороны бо́льших значений.

Это может быть истолковано в образах механики следующим путём. Если представить себе движение, более медленное, чем движение Непера, и другое движение, более быстрое, то движение Непера окажется предельным случаем для движений 1-го и 2-го рода.

Рассмотрим более подробно эти оба типа движения.

Движение 1-го рода (черт. 49,*а*). Разделим единицу времени (1 час) на n равных долей, например, на 10 долей. Как и в движении Непера, пусть тело, например, шарик, начинает движение от начального расстояния $s_0 = 1$, и пусть начальная скорость равна 1 *м/час*.

Дадим шарику равномерно двигаться с этой скоростью в течение $\frac{1}{10}$ часа. За этот промежуток времени шарик пройдёт расстояние, равное $\frac{1}{10}$ *м*, и в конце этого промежутка окажется на расстоянии $1\frac{1}{10}$ *м* от начальной точки. Пусть в момент $t_1=\frac{1}{10}$ часа шарик неожиданно получает новую скорость, численно равную расстоянию шарика от начальной точки в этот момент, т. е. равную $1\frac{1}{10}$ *м/час*, и пусть он движется с этой новой скоростью равномерно в течение $\frac{1}{10}$ часа. За второй промежуток времени он пройдёт расстояние, равное $1\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$ *м*. В результате в момент $t_2=\frac{2}{10}$ часа он окажется на расстоянии

$$1\frac{1}{10}+1\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=1\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{10}\right)=\left(1\frac{1}{10}\right)^2 \text{ м}$$

от начальной точки. В момент $t_2=\frac{2}{10}$ часа шарик мгновенно приобретает новую скорость, снова численно равную достигнутому в этот момент расстоянию от начальной точки, т. е. $\left(1\frac{1}{10}\right)^2$ *м/час*, и будет двигаться равномерно с этой скоростью в течение 3-го промежутка времени от $t=\frac{2}{10}$ до $t=\frac{3}{10}$ часа. За этот третий промежуток времени шарик пройдёт расстояние $\left(1\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}$ *м* и таким образом окажется в момент $t_3=\frac{3}{10}$ часа на расстоянии, равном

$$\left(1\frac{1}{10}\right)^2+\left(1\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}=\left(1\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{10}\right)=\left(1\frac{1}{10}\right)^3,$$

или

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^3 \text{ м}$$

от начальной точки; так будем поступать и далее.

Как видно, расстояния (дистанции) движущегося шарика от начальной точки в последовательные моменты времени составляют геометрическую прогрессию:

$$s_0=1,\quad s_1=\left(1+\frac{1}{10}\right),\quad s_2=\left(1+\frac{1}{10}\right)^2,\quad s_3=\left(1+\frac{1}{10}\right)^3,$$
$$s_4=\left(1+\frac{1}{10}\right)^4,\ \ldots$$

Описанное сейчас движение, очевидно, является более медленным сравнительно с движением по закону Непера: там скорость движения изменяется непрерывно, всё время возрастая, здесь же она возрастает скачками лишь в отдельные мгновения, в конце 10-х долей часа, оставаясь постоянной в течение каждого промежутка.

Конечно, число долей $n=10$, на которое было раздроблено время движения, взято лишь в качестве примера. С таким же успехом можно было бы взять значения $n=20$; $n=40$; $n=80$ и т. д.

При переходе от значения $n=10$ к значению $n=20$, расстояние, проходимое шариком за тот же интервал времени, увеличится. Это вполне понятно: во втором случае скорость будет чаще изменяться в сторону увеличения. Пользуясь формулами, это увеличение можно подсчитать точно. Так, при $n=10$ расстояние шарика от начальной точки в момент $t=\frac{1}{10}$ часа равно $\left(1+\frac{1}{10}\right)$ *м*; при $n=20$ в тот же момент $t=\frac{1}{10}$ расстояние его будет равно $\left(1+\frac{1}{20}\right)^2=1+2\cdot\frac{1}{20}+\left(\frac{1}{20}\right)^2=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{400}$ *м*, а эта величина больше чем $1+\frac{1}{10}$ *м*.

Точно так же $\left(1+\frac{1}{40}\right)^{40}$ больше, чем $\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20}$; $\left(1+\frac{1}{80}\right)^{80}>\left(1+\frac{1}{40}\right)^{40}$ и так далее.

Получается, таким образом, ряд неравенств, выражающих всё увеличивающееся расстояние, проходимое шариком за 1 час при увеличении числа «скачков скорости» его движения.

Казалось бы, что увеличивая n до бесконечности, мы и для величины $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, т. е. для проходимого шариком за 1 час расстояния, будем получать сколь угодно большие значения.

Однако такое заключение будет ошибочным. Покажем это.

При нашем подходе снизу, со стороны меньших значений, скорость движения меньше, чем она должна была бы быть при движении по принципу Непера. А именно, если шарик будет двигаться равномерно с достигнутой скоростью хотя бы в течение $\frac{1}{100}$ секунды, то пройденное им расстояние будет меньшим, чем по неперову закону, где скорость его беспрерывно возрастает. Чтобы окончательно решить вопрос об ограниченности или неограниченности величин $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при безграничном возрастании n, рассмотрим теперь движение другого рода, более быстрое, чем неперово. В определении числа e это новое движение будет играть такую же роль, как описанные многоугольники при нахождении площади круга. Это новое движение охарактеризуем следующим образом.

Движение 2-го рода (черт. 49,*в*). Расставим вдоль линии движения (для простоты — прямолинейного) ряд точек, как бы ряд шлагбаумов, на расстояниях от начала, равных $\left(1+\frac{1}{10}\right)$, $\left(1+\frac{1}{10}\right)^2$, $\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$, ..., $\left(1+\frac{1}{10}\right)^9$, $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$, $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{11}$. Здесь добавлена ещё одна дополнительная точка, для цели, которая станет ясной из дальнейшего. Предположим теперь (фантазия!), что внутри движущейся материальной точки, внутри шарика, находится разумное существо, которое может регулировать его скорость. Это существо из каждой точки деления пути движения (шлагбаума) смотрит «вперёд» на следующую точку; например, в точке пути $\left(1+\frac{1}{10}\right)^2$ смотрит на следующий шлагбаум с пометкой

$\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$ и на интервале пути $\left(1+\frac{1}{10}\right)^2, \ldots, \left(1+\frac{1}{10}\right)^3$ *м* направляет шарик с постоянной скоростью

$$v=\left(1+\frac{1}{10}\right)^3 \text{ м/час},$$

т. е. со скоростью, численно равною показанию следующего шлагбаума.

Далее, в точке пути $s=\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$ наш «водитель» смотрит на следующий шлагбаум с пометкой $\left(1+\frac{1}{10}\right)^4$ и придаёт шарику на этом интервале пути скорость, равную $\left(1+\frac{1}{10}\right)^4$ *м/час* и т. д.

Ясно, что в этом случае шарик будет всё время двигаться со скоростью, большей, чем следовало бы по принципу Непера, так как теперь скорость постоянно будет численно большей, чем расстояние шарика от начальной точки. Равенство $v=s$, т. е. скорость = длине пути в отдельные мгновения, при переходе шлагбаумов, существенного значения не имеет. А потому и длина пути, пройденного при таком движении, будет большей, чем при неперовом.

Подсчитаем путь, проходимый за 1 час при новом движении. С этой целью узнаем, сколько времени требуется шарику для прохождения расстояния между двумя соседними шлагбаумами.

Возьмём для примера интервал пути $\left(1+\frac{1}{10}\right)^2 \ldots$ $\ldots \left(1+\frac{1}{10}\right)^3$. Расстояние здесь равно:

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^3-\left(1+\frac{1}{10}\right)^2=\left(1+\frac{1}{10}\right)^2\left(1+\frac{1}{10}-1\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}.$$

Скорость равна показанию последующего шлагбаума, т. е. $\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$ *м/час*. Поэтому промежуток времени будет равен $\dfrac{\left(1+\frac{1}{10}\right)^{3}\cdot\frac{1}{10}}{\left(1+\frac{1}{10}\right)^{3}}=\dfrac{\frac{1}{10}}{1+\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}:\frac{11}{10}=\frac{1}{11}$ часа. Для следующего интервала пути $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{3}\ldots\left(1+\frac{1}{10}\right)^{4}$ расстояние равно $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{4}-\left(1+\frac{1}{10}\right)^{3}=\left(1+\frac{1}{10}\right)^{3}\cdot\frac{1}{10}$. Деля это расстояние на скорость, равную $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{4}$, получим опять $\frac{1}{11}$ часа, т. е. промежуток времени остаётся прежним. Итак, на каждую дистанцию между шлагбаумами при движении II рода тратится не $\frac{1}{10}$ часа, а $\frac{1}{11}$ часа.

Поэтому за 1 час наш шарик сумеет пройти не 10, а 11 дистанций, т. е. в конце 1 часа времени шарик окажется на расстоянии $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{11}$ *м*. Можно доказать, как выше было доказано для движения 1-го рода, что в случае движения 2-го рода длина пути, пройденного за 1 час, будет уменьшаться, если увеличивать в 2, 4, 8 раз число долей, на которое делится интервал времени в 1 час. Расстояние, действительно проходимое за 1 час по закону Непера, мы выше обозначили через e. Сопоставляя теперь движение 1-го рода, движение Непера и движение 2-го рода, получаем неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}<e<\left(1+\frac{1}{10}\right)^{11}. \qquad \text{(черт. 49)}$$

Такое же неравенство можно написать для случая $n=20$; $n=40$ и т. д. На черт. 49 положено $n=5$. Таким образом, получаем для любого значения n:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Если теперь увеличивать n до бесконечности, то количество, стоящее слева, и количество, стоящее справа, будут неограниченно сближаться, подобно тому, как это имеет место для площадей вписанного и описанного многоугольников. Это можно показать так: отношение правого числа к левому равно $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, а это количество при неограниченном увеличении n стремится к 1. Общий предел чисел слева и чисел справа и есть число e, иногда называемое «неперовым числом», хотя Непер его и не рассматривал. Полезно отметить, что если для числа e принять приближённое значение $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$, то относительная погрешность будет меньше 1%, так как при $n=100$ число справа равно $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{101}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)$ или $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}+$ $+\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\cdot\frac{1}{100}$, т. е. на 1% больше числа слева, равного $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$, а искомое число e заключено между ними. Взяв $n=1000$, т. е. приняв $e\approx\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$, мы сделаем относительную погрешность, меньшую $\frac{1}{1000}$. Таким образом, мы не только можем приближённо высчитать число e, но и знаем при этом заранее границу совершаемой погрешности.

Добавим теперь некоторые сведения, касающиеся числа e, без доказательства. Гораздо позднее, через 130 лет после смерти Непера, великий математик Эйлер в своем сочинении «Введение в Анализ бесконечно малых» (1748 г.) дал замечательную формулу для числа e:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots \text{ и т. д.}$$

до бесконечности.

Приблизительно $e=2{,}72$; точнее $e=2{,}718$ и так далее. Сама буква «e» выбрана позднее, именно как начальная буква фамилии Euler.

Мало того: оказалось, что имеет место ещё более замечательное равенство. Длина пути s, проходимого при неперовом движении за любое число t часов, равна: $s=1+\frac{t}{1}+\frac{t^2}{1\cdot 2}+\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$ до бесконечности. Эта последняя формула даёт решение проблемы: она определяет s, как функцию от t: $s=f(t)$. Но для целей настоящей книги важнее решить обратную задачу, определить обратную функцию, т. е. найти формулу, позволяющую выразить время t через длину пути s.

Эта обратная зависимость, обратная функция, и называется логарифмом. Обозначим её временно особым знаком: $t=\psi(s)$. Определить существо этой обратной функции — это значит ответить на вопрос: как найти то количество времени, которое требуется, чтобы шарик при неперовом движении оказался на данном расстоянии s от начальной точки пути. Покуда мы знаем только, что

$$\text{при } s=1 \quad t=\psi(1)=0,$$
$$\text{при } s=e \quad t=\psi(e)=1.$$

Отсюда видно, что число «e» играет исключительно важную роль в теории логарифмов. Если за 1 час шарик в неперовом движении проходит $e\approx 2{,}72$ *м*, то за 2 часа он пройдёт $e^2=(2{,}72)^2$ *м*, за 3 часа e^3 *м*, за $\frac{1}{2}$ часа $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ *м*, за $\frac{1}{5}$ часа $e^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{e}$ *м* и т. д.

В начальный момент $t=0$ расстояние s_0 равно 1 *м*. Если время отсчитывать назад, то при $t=-1$ час длина пути $s=\frac{1}{e}$ *м*; при $t=-2$, $s=\frac{1}{e^2}$ *м* и т. д. Следует, однако, отметить, что сам изобретатель неперова движения — Джон Непер — не разработал своей теории настолько, чтобы специально рассматривать число «e». Его целью было создать таблицы, которые облегчили бы человечеству технику вычислений. Этой цели он достиг в значительной степени.

В заключение дадим более точное значение e: $e=2{,}7\ 1828\ 1828\ 4590\ 45\ldots$

Нам необходимо ещё остановиться на одном практически важном вопросе. Если при теоретическом рассмотрении вопроса само собой, как мы видели, всплыло особое число e, то при применении таблиц Непера к вычислениям столкнулись с особой ролью числа 10 в нашем десятичном счислении. Ведь если у нас сейчас получилось, что $t=\psi(e)=1$, $t=\psi(e^2)=2$, $t=\psi(e^3)=3,\ldots$ или, как обычно пишут: $\log e=1$, $\log(e^2)=2$, $\log(e^3)=3$, то естественно появляется мысль, нельзя ли добиться того, чтобы, сообразуясь с нашей десятичной системой, видоизменить зависимость $t=\psi(s)$ и получить соотношения вида

$$\psi(10)=1,\ \psi(10^2)=2,\ \psi(10^3)=3,\ \ldots$$

Всякий ученик знает, какие удобства для практики вычислений представляет система логарифмов с основанием, равным 10.

Имея целью такое преобразование, напомним, что, как видно из § 3, практическая применимость всего изобретения Непера основана на соответствии двух рядов чисел: расстояния s_i и протекшего времени t_i при движении особого рода, и при этом:

$$\begin{array}{lll} \text{Числа I-го рода } A,\ B & \text{перемножаются:} & A\cdot B=P, \\ \qquad\qquad\quad\ \ \downarrow\ \ \downarrow & & \downarrow\ \ \ \downarrow\ \ \ \downarrow \\ \text{а числа II-го рода } \alpha,\ \beta & \text{складываются:} & \alpha+\beta=\gamma. \end{array}$$

Но если все числа II-го рода (искусственные) одновременно умножить на один и тот же коэффициент «k», то указанное соответствие: (умножение чисел A) $\longleftrightarrow$ (сложение чисел α) не нарушится. Теперь только будет:

$$\text{когда } A\cdot B=P, \text{ то одновременно}$$
$$k\alpha+k\beta=k\gamma.$$

Таким образом, мы можем при переходе к десятичной системе оставить по существу нетронутым принцип движения Непера, но отсчёт протекающего времени вести в ином масштабе, например, считать «новую минуту» в $2\frac{1}{2}$ раза больше «старой». Как же перейти к новой единице «обычных» чисел y — к числу «10»? Уже при рассмотрении таблицы Бюрги отмечено, что

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{23027}<10<\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{23028}.$$

На языке механики это означает: если шарик выходит из начальной точки $s_0 = 1$ *м* со скоростью 1 *м/час*, и если скорость изменяется каждую $\frac{1}{10\,000}$ часа, то дистанция 10 *м* (от нулевой точки) будет достигнута между 23027 и 23028 моментами, т. е. между $\frac{23\,027}{10\,000}$ и $\frac{23\,028}{10\,000}$ часа. Движение по Бюрги не совсем точное, движение по Неперу точнее, но даже если рассматривать идеальное движение по закону Непера, то и тогда оказывается по точному подсчёту, что дистанция «10 *м*» достигается в момент $t = 2{,}3026$ часа. Теперь можно принять «2,3026 часа» за «новый 1 час». Старый час был «натуральной» единицей времени, новый час будет «искусственной» единицей, специально придуманной для целей, важных практически, но не связанных с внутренней сущностью теории логарифмов. Этот новый час был фактически введён, и в результате вместо старых, неперовых, натуральных логарифмов вошли в употребление новые, так называемые «десятичные» логарифмы. Если пользоваться графическим изображением неперова движения, то рассматриваемое нами преобразование сводится к укорочению в определённом масштабе (1 : 2,3026) оси Ot или же Ox (черт. 50). Поясним это таблицей:

Натуральные, настоящие логарифмы при основании $e = 2{,}718$	«Ненастоящие», но удобные в практике логарифмы при основании 10

$$\text{Если } \log A = \alpha \ \text{ (стар. час.)} \rightarrow \text{то } {}_{(10)}\log A = \frac{\alpha}{2{,}3026} = 0{,}4342\,\alpha$$

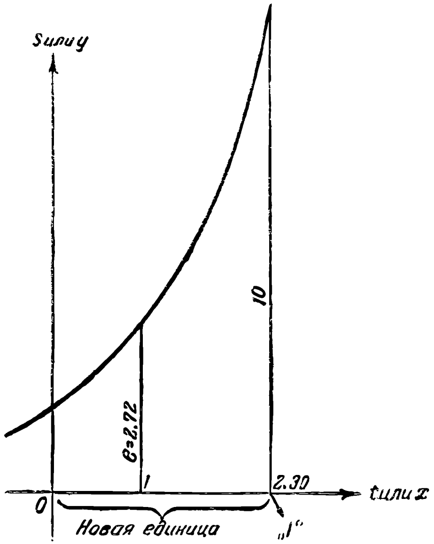
$$\text{то } \log B = 2{,}3026\ \beta \leftarrow \text{если } {}_{(10)}\log B = \beta \ \text{ (новых часов)}$$

Таким образом, переход от логарифмических таблиц с одним основанием к таблицам с другим основанием совершается при помощи переходного коэффициента, наподобие перехода от франка к доллару:

$$1 \text{ доллар} = 5\frac{1}{4} \text{ франка}; \ 1 \text{ франк равен } \frac{4}{21} \text{ доллара}.$$

Непер построил огромные таблицы, дающие значения логарифмов для последовательного ряда чисел (у него — для синусов). Труды Непера стали известны Бриггу.

Генри Бригг (1561 — 1630 гг.) задумал составить более точные таблицы, а именно, с 14 десятичными знаками. В ходе работы ему пришлось с особенной точностью и тщательностью определить логарифмы некоторых отдельных, так сказать, «основных» чисел, например log 2 и log 10. При этом Бригг применил весьма остроумные приёмы.



Черт. 50.

Помимо этого, способ вычисления Бригга имеет глубокое принципиальное значение. Поэтому весьма важно с ним ознакомиться: это даст нам возможность ещё глубже проникнуть в существо понятия логарифма.

Мы видели, что $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Следовательно, имеем ряд приближённых равенств:

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx e; \quad \left(1 + \frac{1}{200}\right)^{200} \approx e;$$

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx e; \quad \ldots;$$

при этом равенство тем ближе к точному, чем больше n. Отсюда следует, что и обратно:

$$\sqrt[100]{e} \approx 1+\frac{1}{100}, \quad \sqrt[200]{e} \approx 1+\frac{1}{200}, \quad \sqrt[1000]{e} \approx 1+\frac{1}{1000}$$

и так далее. Если теперь выберем для n чрезвычайно большое значение и если обозначим $\sqrt[n]{e}=1+\alpha$, $\sqrt[2n]{e}=1+\beta$, то с весьма малой (относительной) погрешностью можно принять, что $\alpha=2\beta$, или $\beta=\frac{1}{2}\alpha$.

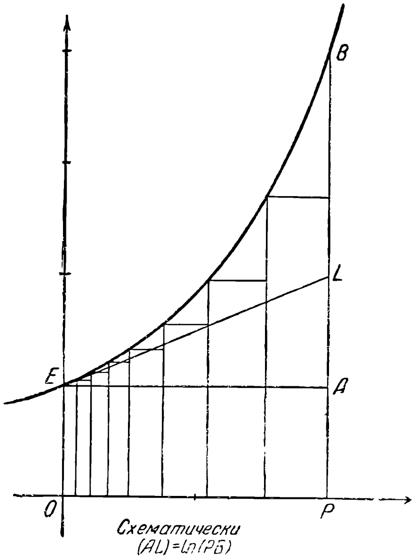
В самом деле, имеет место равенство: $1+\alpha=(1+\beta)^2=$ $=1+2\beta+\beta^2$, а так как β чрезвычайно мало, то величиной β^2 можно пренебречь. Итак, приходим к заключению: $\sqrt[n]{e} \approx 1+\frac{1}{n}$. Это — приближённое равенство особого рода, а именно: будучи приближённым, оно может стать сколь угодно близким к точному при неограниченном увеличении n. В результате, увеличивая n в несколько раз, мы во столько же раз уменьшаем надбавку над единицей, равную $\frac{1}{n}$. Получается, что число n и надбавка обратно пропорциональны. Это соотношение не совсем точное, но оно тем точнее, чем больше n. Говорят, что оно «асимптотически точное».

Перейдём опять к модели движения. Если 1 час времени, в течение которого достигается расстояние $e=2{,}718\ldots$, мы мысленно разделим, например, на 10^6 (миллион) равных долей, то этим мы для величины пути s получаем «лестницу» из 10^6 ступенек, причём высота 1-ой ступеньки (после нулевой) $\sqrt[10^6]{e}-1=$ $=\overline{1+\alpha}-1$ как раз равна $\frac{1}{10^6}$ *м* (приближённо). Пусть теперь другая материальная точка, выйдя из точки $s=1$, так же за $\frac{1}{10^6}$ долю часа прошла $\frac{1}{10^6}$ *м* и продолжает равномерное движение с той же скоростью ($=1$ *м/час*): за 1 час она прошла бы расстояние $s=\frac{1}{10^6}\cdot 10^6=1$ *м* (черт. 51).

Будем теперь исходить от числа, равного $e^2=(2{,}718\ldots)^2$. Требуется для $s=e^2$ найти соответствующее время t (в данном случае мы, на основании вышеизложенного, знаем ответ: t должно быть равно 2. Но нам нужна схема рассуждения с тем, чтобы наметить путь нахождения t при любом значении s).

С этой целью мы построим мысленно геометрическую лестницу с таким же числом $n=10^6$ ступеней, как и раньше. Первая после нулевой ступенька ряда будет теперь равна

$$\sqrt[10^6]{e^2}=(\sqrt[10^6]{e})^2=$$
$$=(1+\alpha)^2\approx 1+2\alpha.$$



Черт. 51.

Если теперь избыток над единицей, т. е. величину 2α, умножить опять на 10^6, то получим уже не $\frac{1}{10^6}\cdot 10^6$, а $\frac{2}{10^6}\cdot 10^6=2$ единицы. На языке механики это означает, что второй шарик (см. выше) при равномерном движении со скоростью 1 *м/час* прошёл бы расстояние, равное 2 *м*, иными словами, расстояние $s=e^2$ достигается за 2 часа. Итак, при $s=e^2$ $t=2$; аналогично при $s=e^3$ $t=3$; при $s=e^{1\frac{1}{4}}$ $t=1\frac{1}{4}$ часа и так далее.

Приведённое рассуждение позволяет теперь разъяснить придуманный Бриггом оригинальный путь нахождения значения t при любом s, т. е. нахождения логарифма любого числа A. Способ Бригга—следующий (черт. 51).

Пусть, например $A=5$. Представим себе, что при неперовом движении материальная точка достигла за неизвестный промежуток времени $t=x$ расстояния

$s=5$ (при начальном $s_0=1$). Найти $\log 5$, это значит — найти x.

На основании изложенного поступаем так.

Извлекаем из 5 корень весьма высокой степени. Проще всего извлекать последовательно один за другим квадратный корень:

$$\sqrt{A},\ \text{потом}\ \sqrt{\sqrt{A}}=\sqrt[4]{A},\ \text{потом}\ \sqrt{\sqrt[4]{A}}=\sqrt[8]{A},$$

и так далее. Если, например, извлекать квадратный корень 10 раз подряд, то получим корень $2^{10}=1024$-й степени.

Получив значение корня $\sqrt[1024]{A}=1+\alpha$, надо полученный «излишек» α умножить на 1024. Итак, приближённо:

$$\log A=(\sqrt[1024]{A}-1)\cdot 1024.$$

Можно получить более точный результат, вычислив

$$(\sqrt[2048]{A}-1)\cdot 2048;$$

ещё точнее будет $(\sqrt[4096]{A}-1)\cdot 4096$ и так далее... Теоретически рассуждая, можно получить результат, сколь угодно близкий к точному, если неограниченно увеличивать n.

Таким образом «в пределе» получаем абсолютно точное равенство:

$$\log A=\lim(\sqrt[n]{A}-1)\cdot n\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Но эта же формула практически полезна и тогда, когда, не переходя к пределу, вычисляют логарифм приближённо.

Интересно отметить трудолюбие и упорство Бригга. Например, для нахождения $\log 10$ он извлекал квадратный корень из 10 подряд 54 раза и получил такое значение:

$$\sqrt[2^{54}]{10}-1=0{,}000\,000\,000\,000\,000\,127\,819\,149\,320\,032\,35$$

(32 десятичных знака).

5. Логарифм как площадь.

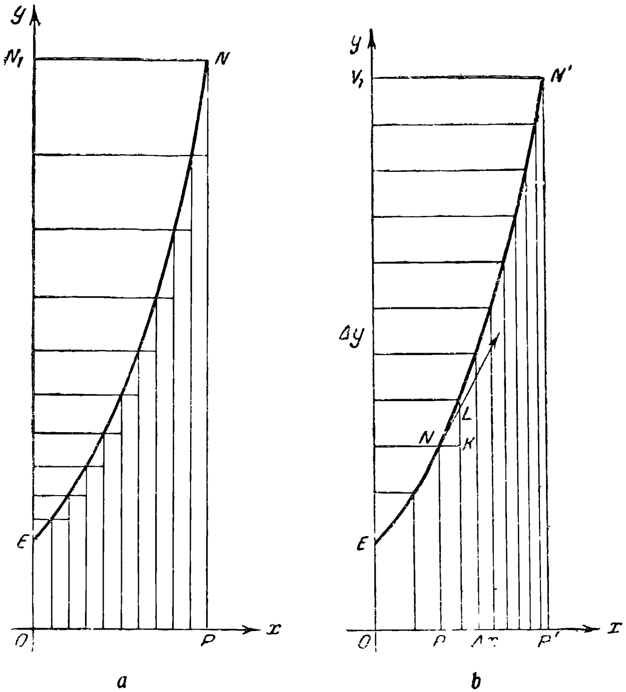
В § 3 мы рассматривали движение по особому закону, и особая связь переменных, времени $t=x$ и длины пути $s=y$, дала нам новую функцию — логарифм. В § 4 мы ввели специальное число, а именно — значение длины пути s при значении $t=1$, и обозначили эту длину через «e». Число e даёт возможность производить вычисления для отдельных изолированных значений x. Естественно поставить вопрос: нельзя ли найти формулу (рецепт), позволяющую быстро и легко по данному значению s найти соответствующее значение t?

Оказывается, это возможно: вся следующая глава будет посвящена выводу такой формулы (ключ Меркатора). Но в порядке подготовки к этому выводу, мы сначала должны дать совершенно другое истолкование той связи, той функциональной зависимости, которая существует между переменными величинами s и t.

В настоящем параграфе мы покажем, что если величину s представить в виде абсциссы, то величина t (т. е. логарифм) может быть представлена в виде некоторой криволинейной площади. На прилагаемом чертеже (черт. 52, a) ордината $PN=y=s$ означает достигнутое движущейся точкой расстояние от начальной точки, абсцисса $OP=x=t$ — протекшее время. По некоторым соображениям, которые будут выяснены дальше, длину ординаты PN следует брать меньшей, чем 2 ед.; возьмём, например, её равной 1,8 ед. Как найти соответствующее значение абсциссы t или x?

С этой целью разделим (черт. 52, b) длину пройденного пути от $s=1$ до $s=1{,}8$ на равные доли и будем для каждой такой доли подсчитывать требуемый для её прохождения промежуток времени.

Для очень мелкого элемента пути $\Delta s=\Delta y$ скорость можно приближённо считать постоянной и равной, например, расстоянию до начала этого элемента (или же до конца его). Если дистанция $[1 \ldots 1{,}8]$ разделена, например, на 80 равных долей, то, считая на элементах пути $[1 \ldots 1{,}01]$; $[1{,}01 \ldots 1{,}02]$; $[1{,}02 \ldots 1{,}03]$; $\ldots$, [1,56 ... 1,57]; [1,57 ... 1,58]; ..., [1,79 ... 1,80] скорость соответственно равной 1 *м/час*; 1,01 *м/час*; 1,02 *м/час*, ..., 1,56 *м/час*; 1,57 *м/час*, ..., 1,79 *м/час* и постоянной на каждом элементе пути, найдём, что



Черт. 52.

затраченные на их прохождение промежутки времени будут равны:

$$\frac{0,01}{1},\ \frac{0,01}{1,01},\ \frac{0,01}{1,02},\ \ldots,\ \frac{0,01}{1,56},\ \frac{0,01}{1,57},\ \ldots,\ \frac{0,01}{1,78},\ \frac{0,01}{1,79}.$$

Сумма всех этих промежутков времени:

$$t = x = \frac{0,01}{1} + \frac{0,01}{1,01} + \frac{0,01}{1,02} + \ldots + \frac{0,01}{1,78} + \frac{0,01}{1,79},$$

или в более общей записи:

$$\frac{\Delta y}{y_0}+\frac{\Delta y}{y_1}+\frac{\Delta y}{y_2}+\ldots+\frac{\Delta y}{y_{n-2}}+\frac{\Delta y}{y_{n-1}}$$

даёт приближённое значение всего интервала времени. Результат будет точнее, если разделить дистанцию [1 ... 1,8] на 800 равных долей, на 8000 равных долей и т. д. Чем больше число долей n, тем точнее результат. Рассматриваемые суммы принято записывать в виде $\sum\limits_{1}^{80}\frac{\Delta y}{y_i}$ или $\sum\limits_{1}^{800}\frac{\Delta y}{y_i}$ и т. д. При нашем стремлении получить совершенно точное значение всего интервала времени $t=x$, мы должны неограниченно увеличивать число n долей. Таким образом, искомая величина представляется нам, как предел суммы $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1}^{n}\frac{\Delta y}{y_i}$.

Этот предел суммы получил в математике название интеграла и особое обозначение:

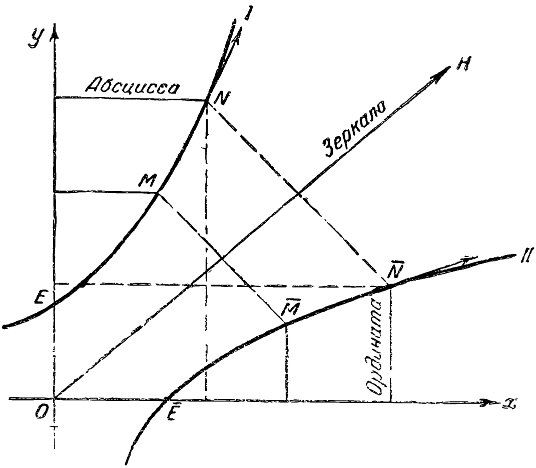
$$t=x=\int\limits_{1}^{1,8}\frac{dy}{y}.$$

Для дальнейшего будет полезно сделать некоторое преобразование того графика движения Непера, который мы до сих пор рассматривали. Цель этого преобразования такова: так как мы по данной длине пути s отыскиваем время t, то будет удобнее, чтобы исходная величина s была откладываема по горизонтали, а искомая величина t — по вертикали.

Вообразим себе (черт. 53) зеркало, поставленное перпендикулярно к плоскости чертежа вдоль прямой OH, биссектрисы координатного угла. Тогда, вычертив на том же чертеже зеркальное отражение первоначального графика, мы увидим, что каждой точке M прежнего графика будет отвечать некоторая точка $\overline{M}$ нового. Нетрудно видеть, что абсциссе точки M отвечает равная ей ордината точки $\overline{M}$, и наоборот, т. е.

$$\overline{x}=y, \quad \overline{y}=x.$$

Каков будет закон построения новой кривой $\bar{E}\bar{N}$? Если для первой (I) кривой наклон её (т. е. тангенс угла касательной с горизонталью) был численно равен ординате y, то у новой кривой наклон будет иметь обратное значение: касательная ко второй (II) кривой симметрична с касательной к первой (I) относительно



Черт. 53.

биссектрисы OH. Если, например, в точке M имеем $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{5}$ то в симметричной гочке $\bar{M}$ имеем $\operatorname{tg}\bar{\alpha}=\frac{5}{8}$, так как

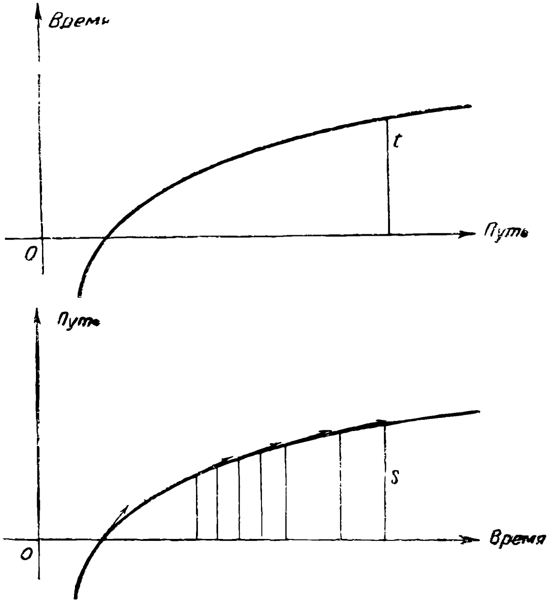
$$\operatorname{tg}\bar{\alpha}=\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

И если для первой (I) кривой мы имеем закономерность $\operatorname{tg}\alpha=y$, то для второй (II) кривой, казалось бы имеет место соотношение $\operatorname{tg}\bar{\alpha}=\frac{1}{y}$. Но это — неправильно: дело в том, что при отражении в зеркале «ордината» переходит в «абсциссу», а потому величину y в точке N следует заменить величиной x в точке $\bar{N}$

В результате, для любой точки $\bar{N}$ второй (II) кривой имеет место равенство:

$$\text{угловой коэффициент касательной } \operatorname{tg}\bar{\alpha} = \frac{1}{x}.$$

После того как прежняя (I) кривая Непера была отражена в зеркале, мы имеем уже новую (II) кривую



Черт. 54.

и в дальнейшем мы сосредоточим внимание именно на ней.

Она получила название логарифмической, так как для неё по горизонтали откладываются обычные числа (путь), а по вертикали логарифм (т. е. протекшее время).

Для дальнейших выводов будет целесообразно переменить роли «пути» и «времени». А именно, будем и новую кривую рассматривать как график движения другого типа (черт. 54) и, как обычно принято, считать, что вдоль горизонтальной оси откладывается протекшее время t, а вдоль вертикальной—длина пройденного пути s. Только что выведенное свойство II кривой можно, отбрасывая чёрточки над буквами, записать так: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{x}$. Так как тангенс угла наклона касательной означает скорость, то движение нового типа можно характеризовать следующим образом.

Воображаемый путник в момент $t = 1$ (час) только выходит из начальной точки; путник всё время держит в руках часы; в начале каждой доли времени (например, каждой секунды) путник, посмотрев на часы (например, показывающие 1,2 часа), мгновенно находит обратное значение $\left(\text{например, } \frac{1}{1{,}2}\right)$, т. е. вместо t берёт $\frac{1}{t}$, и движется со скоростью $v = \frac{1}{t}$ в течение взятой доли времени. Весь подсчёт, рассмотренный нами выше, вида

$$\frac{\Delta y}{y_0} + \frac{\Delta y}{y_1} + \frac{\Delta y}{y_2} + \ldots + \frac{\Delta y}{y_{n-2}} + \frac{\Delta y}{y_{n-1}}$$

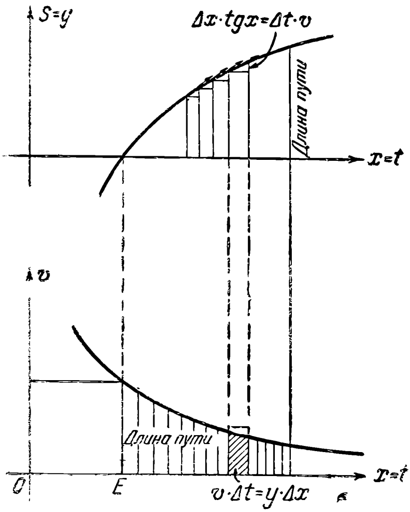
остаётся прежним, но теперь мы берём не приращения пути Δy, а приращения времени Δx, и не делим на скорость y, а умножаем на новую скорость $v = \frac{1}{x}$. Поэтому получим новую сумму вида

$$\frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta x}{x_1} + \frac{\Delta x}{x_2} + \ldots + \frac{\Delta x}{x_{n-2}} + \frac{\Delta x}{x_{n-1}}.$$

Для точного подсчёта нам попрежнему надо будет взять предел такой суммы, т. е. интеграл:

$$\int\limits_1^{1,8} \frac{dx}{x}, \quad \text{или} \quad \int\limits_1^{1,8} \frac{1}{x}\,dx.$$

Выполним ещё одно—последнее - геометрическое преобразование для искомой величины (т. е. логарифма). А именно, для последнего рассмотренного движения, когда переменная скорость в любой момент t численно равна обратному значению $\frac{1}{t}$, построим график скоростей. Оставляя неизменной ось $Ox \equiv Ot$, будем откладывать вдоль оси Oy не длину пути, а скорость. Читатель, вероятно, встречал такой график скорости в курсе физики (черт. 55). Тогда, в силу закона рассматриваемого движения, графиком скорости будет служить уже знакомая нам по предыдущим главам гипербола



Черт. 55.

$$y = v = \frac{1}{t} = \frac{1}{x}.$$

Элемент пути теперь представится в виде произведения ординаты $\frac{1}{x}$ на малое приращение абсциссы $\Delta x = \Delta t$, т. е. узким прямоугольником:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t = y \cdot \Delta x = \frac{1}{x} \cdot \Delta x$$ (= площади узкого прямоугольника).

Совокупность площадей таких тонких, элементарных прямоугольников даст в пределе некоторую криволинейную площадь. Величина этой суммарной площади численно будет равна искомой длине пути, т. е. логарифму.

На черт. 55 одновременно показаны: на верхнем графике—элементы пути в виде приращений ординаты:

$$\Delta y = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

на нижнем графике—те же элементы пути в виде узких прямоугольников. Правда, на верхнем чертеже элементы пути представлены отрезками, т. е. геометрической величиной первого измерения, а внизу—площадкой, т. е. величиной второго измерения, но численно те и другие величины постоянно остаются соответственно равными.

Мы имеем здесь различие геометрического изображения при одном и том же арифметическом содержании.

Но вторая форма более наглядна, более осязательна, она ближе нашему чувственному восприятию. Поэтому в последнее время некоторые учёные предложили, чтобы и в школе ученикам разъяснять логарифм наглядно в виде площади, а именно так:

Определение. Логарифмом некоторого числа z называется величина криволинейной площади, ограниченной сверху дугой гиперболы и взятой на интервале $[1 \ldots z]$.

Эта площадь замещает ординату y логарифмической кривой, о которой шла речь выше. И если раньше основное свойство, связывающее числа y_i с их логарифмами x_i, записывалось в виде:

$$\text{при} \quad y_1 \cdot y_2 = y_3 \qquad x_1 + x_2 = x_3 ,$$

то теперь это же основное свойство примет следующую форму:

$$\text{пл.}\,[1 \ \ldots \ z_1] + \text{пл.}\,[1 \ \ldots \ z_2] = \text{пл.}\,[1 \ \ldots \ z_1 \cdot z_2].$$

Это — как раз то свойство площади, ограниченной дугой гиперболы и прямолинейными отрезками, о котором шла речь во II главе. Но если раньше это свойство геометрической модели логарифма появилось как бы неожиданно, случайно и было лишь слабо связано с понятием отношения двух чисел, то теперь оно представляется как звено в общей теории, оно вплетается в общую сеть закономерностей, причём в основе всей теории лежит идея Непера.

В заключение этой главы скажем несколько слов о привычном, «школьном» определении логарифма.

Мы видим (стр.178), что при неперовом движении $\log e = 1$, $\log (e^2) = 2$, $\log (e^3) = 3$ и т. д. Если x — рациональное число, т. е. если он равняется дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, то и в этом случае $\log (e^x) = x$. Таким образом логарифм степени числа e равняется показателю степени, в которую возводится число e. В случае бригговых логарифмов вместо числа e приходится рассматривать степени числа 10.

Мы приходим к привычному определению логарифма: *логарифмом числа N по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить N.* Это определение хорошо тем, что позволяет очень просто вывести все нужные формулы и быстро перейти к практическим вычислениям. В силу этих причин его кладут в основу школьного изложения теории логарифмов.

Но здесь нужно сделать важное замечание. При неперовом движении (движении непрерывном) время может принимать не только рациональные, но и иррациональные значения. Так, например, при $t=\sqrt{2}$ непременно найдётся соответствующее ему значение расстояния s (именно в силу непрерывности движения). В этом случае, как и в случае рационального значения t, пишут $s=e^t=$ $=e^{\sqrt{2}}$, получая *совершенно естественно* иррациональные степени числа e. Меняя масштаб неперовой кривой (стр. 178), можно столь же естественно получить степень с иррациональным показателем при любом основании a, например, при $a=10$.

Мало того. Формула, данная на стр. 177, которую можно записать так:

$$s=e^t=1+\frac{t}{1}+\frac{t^2}{1\cdot 2}+\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots,$$

позволяет легко вычислить, с какой угодно степенью точности, любую степень числа e, независимо от того, рационален или иррационален её показатель.

Если же, как это делается обычно в школе, дать формальное определение логарифма, не обосновывая при этом учения об иррациональных показателях, то всё учение о логарифмах окажется построенным на песке.

ГЛАВА VI.

КЛЮЧ МЕРКАТОРА.

Целью настоящей главы является вывод формулы, позволяющей вычислить логарифм какого угодно числа с любой степенью точности. Формулу эту впервые вывел Меркатор (вывод её будет дан в §§ 3 и 4 настоящей главы).

Однако этот вывод не возможен без предварительного знания другой формулы, которая была известна задолго до Меркатора. Она играет исключительно важную роль в математике и во всех её приложениях (в механике, физике и т. д.).

Эта формула явилась результатом продолжительной работы многих учёных XVI века, которые с различных сторон подходили к её выводу. Среди этих учёных следует отметить имена Галилея, Кавальери, Ферма́, Паскаля, Кеплера, Валлиса. Сейчас мы имеем возможность вывести её весьма просто, если воспользуемся формулами для $\sum_k$ (суммы степеней чисел натурального ряда), полученными в I и IV главах. Так мы и поступим в § 2 настоящей главы. Но чтобы дать представление читателю о тех крайне извилистых путях, которыми различные учёные шли к её нахождению, мы предварительно в § 1 рассмотрим вывод этой формулы, принадлежащий Кавальери (1591 (?) — 1647 г.)

1. «Неделимые» Кавальери.

Кавальери думал, что площадь любой плоской фигуры, например, площадь параллелограмма, можно представить себе составленной из бесчисленного множества тончайших линий, приложенных одна к другой. Эти линии настолько тонки, что дальше их делить невозможно, и потому их назвали «неделимыми». Добавим, что Кавальери аналогично этому представлял себе, что прямая линия может быть составлена из бесчисленного множества точек; что фигура трёх измерений может быть составлена из бесчисленного множества плоских фигур. В настоящее время мы знаем, что такая точка зрения является неправильной. Однако в этом параграфе мы рассмотрим, как Кавальери, пользуясь этим неправильным представлением, пришёл к весьма важному и правильному результату, а именно, определил значение интеграла $\int\limits_0^b x^2 dx$ (не используя, разумеется, самого понятия интеграла, которое было придумано позже).

Теорема: «Пусть дан параллелограмм $AEGC$ и в нём проведена диагональ EC. Тогда «все квадраты» *) параллелограмма относятся ко «всем квадратам» треугольника AEC, как 3 : 1».

Пусть параллелограмм $AEGC$ (черт. 56) получается путём последовательного приложения (суммирования, сложения) бесчисленного множества тончайших линий одной к другой, например, линий, равных и параллельных AC. Таких линий может быть сотни тысяч, миллионы и т. д. Берём теперь сумму квадратов длин этих линий. Теоремой утверждается, что сумма квадратов всех этих линий, составляющих параллелограмм, относится к сумме квадратов всех «составляющих» линий треугольника AEC или треугольника ECG, как 3 : 1, или, обозначая сумму квадратов длин этих прямых через греческую букву $\sum$, имеем, согласно теореме, что

$$\sum(AEGC) = 3\sum(AEC).$$

Для доказательства теоремы делаем дополнительное построение: проводим прямую линию BF, где B — середина AC, F — середина EG. Пусть RV — одна из прямых.

---

*) Под словами: «все квадраты» Кавальери подразумевает сумму квадратов длин линий, из бесчисленного множества которых составляется площадь параллелограмма.

параллельных AC. Прямая RV делится диагональю EC на две части: RT и TV. Пусть

$$RT = x, \quad TV = y, \quad AC = a, \quad AB = \frac{1}{2}a = b, \quad ST = z.$$

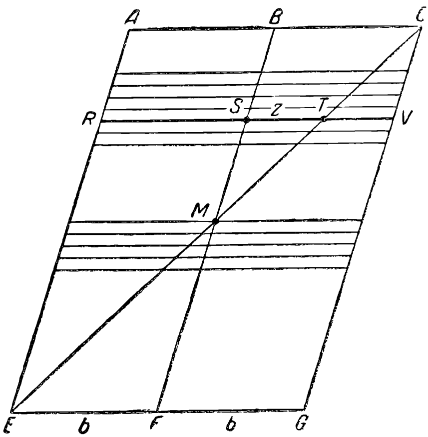
Тогда

$$RT = RS + ST = b + z, \quad TV = b - z.$$

При движении прямой RV сверху вниз, до точки M, RT больше TV, ниже точки M — наоборот: TV больше RT. Для доказательства своей теоремы Кавальери пользуется следующим тождеством:

$$RT^2 + TV^2 = x^2 + y^2 = (b + z)^2 + (b - z)^2 = 2b^2 + 2z^2.$$

$$x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2. \quad (1)$$



Черт. 56.

Это равенство (1), справедливое для любого отдельного положения прямой RV, Кавальери «суммирует» для «всех» возможных её положений при движении её сверху вниз, от положения AC до положения EG. Выражаясь грубо, если таких положений прямой, таких ниток, из которых «соткана» площадь параллелограмма, будет, например, миллион, то он складывает миллион слагаемых слева и миллион слагаемых справа:

$$\sum x^2 + \sum y^2 = \sum 2b^2 + \sum 2z^2. \quad (2)$$

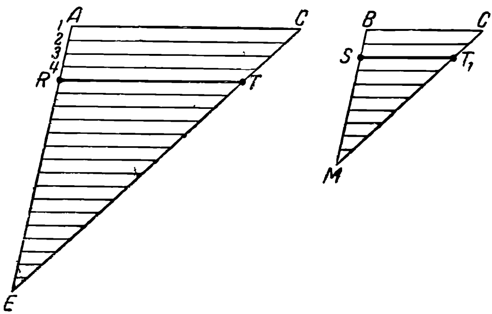
Результат суммирования $\sum x^2$ «всех» квадратов и есть искомая величина, которую обозначим через $[AEC]$ или $\mathfrak{X}$.

Вторая сумма $\sum y^2$, т. е. сумма квадратов хорд TV, или $[ECG]$, очевидно, равна предыдущей сумме $[AEC]$.

Итак, в левой стороне равенства (2) имеем $2[AEC] = 2\mathfrak{X}$. Следует помнить, что сама сумма $\mathfrak{X}$ бесконечно велика, но Кавальери, по существу, ищет не эту сумму, растущую до бесконечности, а отношение этой суммы к сумме квадратов длин всех хорд RV в параллелограмме $AEGC$, также растущей до бесконечности. Обратимся теперь к правой части равенства (2). Сумму $\sum b^2$ легко можно сравнить с суммой $\sum a^2$ для параллелограмма. А именно, $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$; поэтому

$$\sum b^2 = \sum \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} \sum a^2 = \frac{1}{4} [AEGC].$$

Перейдём теперь к суммированию $\sum z^2$, произведённому вдоль всей высоты AE. Нетрудно видеть, что



Черт. 57.

в результате получится сумма квадратов хорд ST внутри треугольника BMC плюс такая же сумма внутри треугольника EMF.

Ввиду симметрии указанных двух треугольников, две последние суммы квадратов равны. Сравним теперь $[BMC]$ с основной суммой $[AEC] = \mathfrak{X}$, отыскиваемой Кавальери (черт. 57).

Каждая хорда меньшего треугольника AEC в два раза меньше соответствующей хорды большего треугольника AEC: $S_1T_1 = \frac{1}{2} RT$; квадрат меньшей хорды $(S_1T_1)^2$ в 4 раза меньше квадрата соответствующей хорды большего треугольника $(RT)^2$. Сверх того, если расстояния между соседними хордами брать одинаковыми у обоих треугольников, то и число хорд у меньшего треугольника будет в 2 раза меньше числа хорд большего треугольника *). В результате «сумма всех квадратов» хорд треугольника BMC в 8 раз меньше «суммы всех квадратов» хорд треугольника AEC. Подведём итог суммирования левой и правой части основного равенства:

$$\sum x^2 + \sum y^2 = 2\sum b^2 + 2\sum z^2 .$$

Имеем, согласно введённым обозначениям:

$$2[AEC] = 2[AEFB] + 2[BMC] + 2[EMF],$$

или

$$2[AEC] = 2\cdot\frac{1}{4}[AEGC] + 4[BMC],$$

или

$$2[AEC] = \frac{1}{2}[AEGC] + 4\,\frac{1}{8}[AEC],$$

или

$$2\mathfrak{X} = \frac{1}{2}[AEGC] + \frac{1}{2}\mathfrak{X} .$$

Из этого равенства определяем искомое $\mathfrak{X} = [AEC]$:

$$\frac{3}{2}\mathfrak{X} = \frac{1}{2}[AEGC],$$

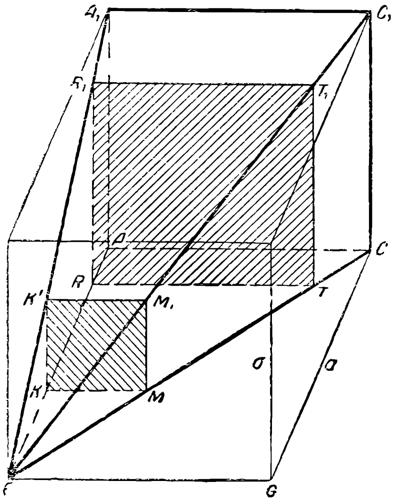
откуда окончательно:

$$\mathfrak{X} = [AEC] = \frac{1}{3}[AEGC].$$

Полученный результат можно пояснить на следующей пространственной модели (черт. 58). Для простоты, заменим основной параллелограмм $AEGC$ квадратом со стороной a. Представим себе, что в треугольнике EAC проведено множество равноотстоящих, параллельных между собой, отрезков RT (параллельно AC). На каждом из этих отрезков строим квадрат $RR'T'T$, лежащий

*) Не следует забывать, что хорды, о которых идёт речь, являются «неделимыми». При счёте с этими неделимыми следует соблюдать особую осторожность, чтобы не сделать при этом ошибки.

в плоскости, перпендикулярной к плоскости EAC. Вершины R' и T' этих квадратов будут лежать соответственно на прямых EA' и EC'. По идее Кавальери «сумма всех» этих квадратов, т. е. сумма величин второго измерения, даёт объём пирамиды $EAA'C'C$, т. е. величину третьего измерения. Эта «сумма» выше нами была обозначена через $[EAC]$.



Черт. 58.

Сделаем такое же построение для отрезков типа RV в квадрате $EAGC$; все эти отрезки должны быть параллельны (и равны) AC. Нетрудно видеть, что «сумма всех» квадратов $RR'V'V$ даст, по идее Кавальери, объём куба $EACGE'A'C'G'$; объём этот численно равен a^3. Таким образом, теорема Кавальери утверждает, что объём пирамиды с основанием $AA'C'C$ и высотой EA равен трети куба с тем же основанием и равной высоты.

В настоящее время содержание теоремы Кавальери и соответствующей теоремы из учебника геометрии лучше всего может быть выражено формулой интегрального исчисления:

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3.$$

2. Площадь «под» параболой.

Рассмотрим выражение x^2. Если x означает переменное количество, то и величина x^2 будет переменной. Если x получает последовательно значения 1, 2, 3, 4, ..., то x^2 будет принимать значения 1, 4, 9, 16, ... Переменному x можно давать и промежуточные значения, например: 1; $1\frac{1}{2}$; 2; $2\frac{1}{2}$; 3, ... ; тогда x^2 будет соответственно равен 1; $2\frac{1}{4}$; 4; $6\frac{1}{4}$; 9, ...

Обозначим x^2 через y, т. е. положим $y=x^2$. Значения переменных x и y можно расположить в виде прилагаемой таблицы:

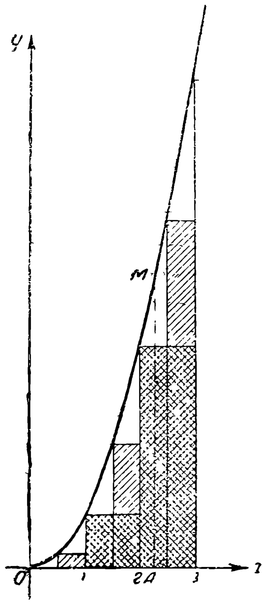
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$
y	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$

Если считать, что переменное x изменяется непрерывно и, возрастая, принимает последовательно все возможные числовые значения, то y будет изменяться также непрерывно. Связь между обеими переменными удобно представить графически (черт. 59).

Если x непрерывно возрастает, то точка A — конец отрезка OA, изображающего число x,—движется по оси Ox вправо, постепенно удаляясь от точки O. Если для каждого значения x (для каждого возможного положения точки A) построить ординату AM, равную соответствующему значению y, то концы этих ординат будут лежать на плавной кривой линии, называемой *параболой*; так как x^2 есть вторая степень от x, то эту параболу называют также параболой второй степени.

Пусть на чертеже имеется парабола $y=x^2$. Задача, которую мы теперь хотим решить, состоит в определении площади, ограниченной отрезками OA и AM и криволинейной дугой параболы OM (площади «под» параболой).

В течение многих веков учёные пытались решить задачу об определении площадей, ограниченных некоторыми кривыми линиями, но их попытки оставались безуспешными. Некоторые удачные результаты получил древнегреческий математик Архимед, но в позднейшие века произошёл застой в развитии математики, и даже приёмы Архимеда были забыты. Новое оживление наступило в XVI и XVII веках, когда начала зарождаться так называемая высшая математика. В исследованиях учёных того времени — Кеплера, Валлиса, Ферма́, Паскаля, Барроу, Лейбница, Меркатора, Маклорена и других — определение площадей и объёмов, ограниченных кривыми линиями и поверхностями, занимало центральное место. Трудность этой задачи состоит в том, что кривая линия, ограничивающая площадь, искривлена даже в своих мельчайших частях, а потому такую площадь нельзя разбить на треугольники, прямоугольники и другие фигуры, ограниченные прямыми линиями. Пробовали найти выход в том, чтобы мысленно разделить площадь на «бесконечное» множество полосок, как это делал Кеплер, или пользовались «неделимыми», как Кавальери, но эти рассуждения с бесконечностями отличались крайней туманностью, и математика была вынуждена от них отказаться.



Черт. 59.

Правильное решение вопроса было найдено тогда, когда отказались от лобовой атаки и пошли обходным путём. Ключ к разрешению задачи для параболы второй степени дала выведенная нами формула для $\sum_2$.

Решим задачу сперва для случая, когда отрезок на оси Ox есть $[0 \ldots 1]$. Разделим этот интервал (черт. 60) на некоторое число равных долей, например, на 20, и построим ординаты y для значений x:

$$0, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \frac{3}{20}, \ldots, \frac{18}{20}, \frac{19}{20}.$$

Длина соответственных ординат y будет:

$$0, \frac{1}{20^2}, \frac{4}{20^2}, \frac{9}{20^2}, \ldots, \frac{18^2}{20^2}, \frac{19^2}{20^2}.$$

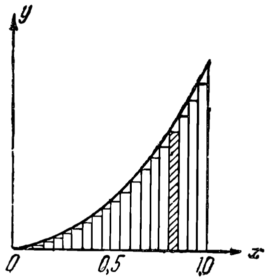
Построим ступенчатую фигуру, как показано на чертеже.

Ширина каждой прямоугольной полоски равна $\frac{1}{20}$ ед. Площадь полоски с нумером m будет равна: $\frac{m^2}{20^2}\cdot\frac{1}{20}$ кв. ед. Площадь всей ступенчатой фигуры будет равна:

$$\left(\frac{1^2}{20^2}+\frac{2^2}{20^2}+\frac{3^2}{20^2}+\ldots+\frac{18^2}{20^2}+\frac{19^2}{20^2}\right)\cdot\frac{1}{20}=$$
$$=\frac{1}{20^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+18^2+19^2).$$

Если отрезок $[0\ldots 1]$ на оси Ox разделим на большее число равных долей, например на 100 ($n=100$), то получим для площади ступенчатой фигуры значение

$$\frac{1}{100^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+98^2+99^2).$$



Черт. 60.

Но, очевидно, при увеличении числа долей n, величина площади ступенчатой фигуры делается всё ближе и ближе к искомой криволинейной площади. Это ясно видно на черт. 59, на котором заштрихованная в клетку площадь есть площадь ступенчатой фигуры при $n=3$, а площадь всей заштрихованной фигуры есть площадь ступенчатой фигуры при $n=6$.

Если допустить, что число долей n растёт неограниченно, и если при этом величина площади ступенчатой фигуры

$$\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]$$

будет приближаться к некоторому постоянному числу, то это предельное число и даст искомую площадь криволинейной фигуры. Но как сосчитать сумму квадратов, если взять $n=1000$; $n=10\,000$ и так далее? Формула для $\sum_2$ даёт выход из этого затруднения.

Чтобы удобнее было применить формулу для $\sum_2$, добавим к выражению, стоящему в скобках, ещё одно слагаемое n^2. От этого сумма увеличится на величину $\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}$; если же n неограниченно возрастает, то величина дроби $\frac{1}{n}$ стремится к нулю, а потому результат от прибавления этой дроби в пределе не изменится. Получим выражение:

$$\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=\frac{1}{n^3}\sum\nolimits_2.$$

Но мы имели

$$\sum\nolimits_2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.$$

Поэтому площадь ступенчатой фигуры вместе с дополнительным слагаемым $\frac{1}{n}$ равна:

$$\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.$$

Если, например, взято $n=1000$, то площадь равна:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 1\,000}+\frac{1}{6\cdot 1\,000\,000}\text{ кв. ед.}$$

Если взять значение $n=10\,000$, то площадь будет равна:

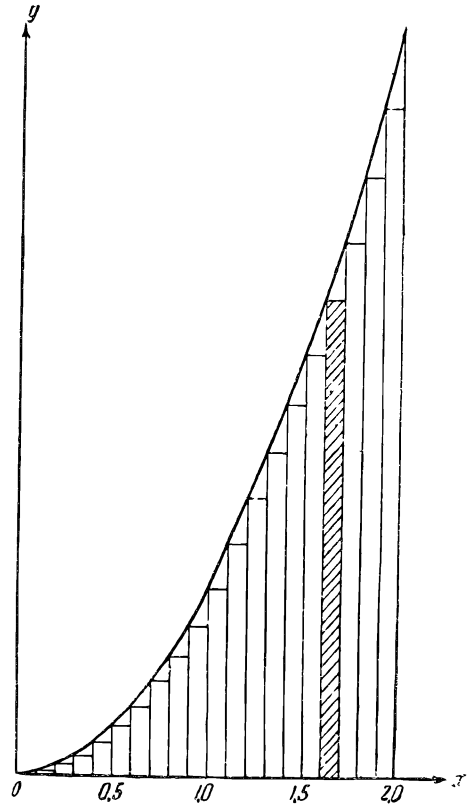
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 10\,000}+\frac{1}{6\cdot 100\,000\,000}\text{ кв. ед.}$$

и т. д.

Если число n увеличивать всё больше и больше, то в выражении $\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$ второе слагаемое, а тем более третье, будет приближаться к нулю, а всё выражение в целом — к постоянному числу, равному $\frac{1}{3}$. Отсюда заключаем, что точная величина площади, ограниченной параболой $y=x^2$, ординатой и отрезком $[0\ldots 1]$, равна $\frac{1}{3}$ кв. единицы.

Перейдём теперь к случаю, когда парабола взята не на отрезке $[0\ldots 1]$, а на большем отрезке, например, на отрезке $[0\ldots 2]$. Мы имеем в виду перейти в дальнейшем к любому отрезку $[0\ldots b]$ (черт. 61).

Сравним площадь «под» параболой на отрезке [0... 2] с площадью «под» параболой на отрезке [0 ... 1]. Будем производить с новой площадью те же операции, как с прежней. Разделим отрезок [0 ... 2] сперва на 20 равных долей, затем на 100 долей, на 1000 долей и т. д. и будем делать одновременно то же самое с прежней площадью на отрезке [0 ... 1]. Если оба отрезка [0 ... 1] и [0 ... 2] разделены на равное число долей и построены соответствующие фигуры, то ширина полосок одного и того же нумера в обеих ступенчатых фигурах будет различной: во второй фигуре она будет в 2 раза больше. Высота каждой полоски во второй фигуре будет в 4 раза больше, чем высота полоски с тем же нумером в первой фигуре, так как, при увеличении x в 2 раза, $y = x^2$ увеличивается в 4 раза. Поэтому площадь каждой полоски второй фигуры будет в 8 раз больше, чем площадь соответствующей полоски первой фигуры. А так как это отношение (8 : 1) остаётся постоянным для всех пар полосок с одинаковым нумером, то и вся вторая ступенчатая фигура в 8 раз больше первой ступенчатой фигуры. При даль-

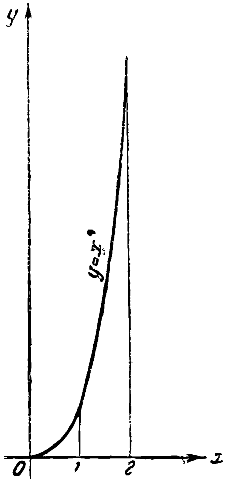


Черт. 61.

нейшем увеличении числа n отношение (8 : 1) остаётся неизменным, поэтому точная площадь второй криволинейной фигуры также в 8 раз больше, чем точная площадь первой криволинейной фигуры (на черт. 60 и 61 эти соотношения не вполне выдержаны).

Мы взяли для второй фигуры интервал [0 ... 2]. Если бы мы взяли для неё интервал [0 ... 7], то получили бы, что её площадь больше площади на интервале [0 ... 1] в 343 раза: $7^3 = 343$.

Так как площадь, лежащая на интервале [0 ... 1], как мы показали, равна $\frac{1}{3}$ кв. ед., то для площади, лежащей на любом интервале [0 ... b], площадь равна $\frac{1}{3} b^3$ кв. ед. Это и есть решение нашей задачи.



Черт. 62.

Таким же путём решим задачу определения площади «под» параболой $y = x^3$, параболой третьей степени (черт. 62).

Опять-таки сначала решим задачу для интервала [0 ... 1]. Попрежнему делим отрезок $OP = x$ на n равных долей. Если взять $n = 100$, то последовательные значения абсциссы $OP = x$ будут:

$$0, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \ldots, \frac{99}{100},$$

а соответствующих ординат y:

$$0, \frac{1}{100^3}, \frac{2^3}{100^3}, \frac{3^3}{100^3}, \ldots, \frac{99^3}{100^3}.$$

Площади прямоугольных полосок будут равны:

$$0, \frac{1}{100^3} \cdot \frac{1}{100}, \frac{2^3}{100^3} \cdot \frac{1}{100}, \frac{3^3}{100^3} \cdot \frac{1}{100}, \ldots,$$

$$\frac{m^3}{100^3} \cdot \frac{1}{100}, \ldots, \frac{99^3}{100^3} \cdot \frac{1}{100},$$

т. е.

$$0,\ \frac{1}{100^4},\ \frac{2^3}{100^4},\ \frac{3^3}{100^4},\ \ldots,\ \frac{m^3}{100^4},\ \ldots,\ \frac{99^3}{100^4}\ \text{кв. ед.}$$

Вся площадь ступенчатой фигуры окажется равной

$$\frac{1}{100^4}(1^3+2^3+3^3+\ldots+99^3).$$

Если n — произвольное число, то рассматриваемая площадь равна:

$$\frac{1}{n^4}[1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3].$$

Как и раньше, заменим эту величину другой, весьма мало от неё отличающейся:

$$\frac{1}{n^4}[1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3].$$

В скобках стоит сумма кубов:

$$\sum\nolimits_3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

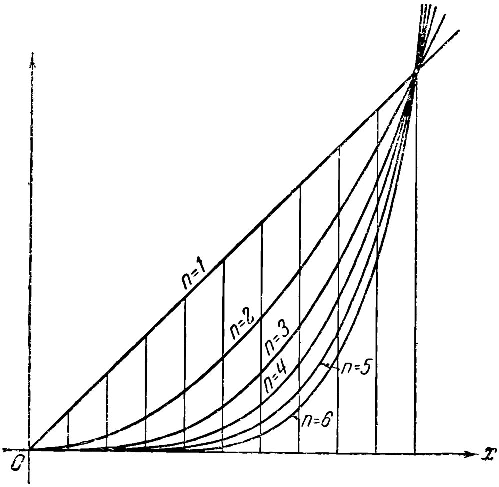
Поэтому площадь ступенчатой фигуры равна:

$$\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}.$$

Чем больше число долей n, тем меньшую роль играют второе и третье слагаемые. При неограниченном возрастании числа n второе слагаемое, а тем более третье, стремятся к нулю. А потому искомая криволинейная площадь равна $\frac{1}{4}$ кв. ед. Этот результат является уже совершенно точным.

Как и раньше, рассмотрим ещё общий случай задачи, когда отрезок на оси Ox будет не $[0\ldots1]$, а какой-нибудь $[0\ldots b]$, например, $[0\ldots3]$.

Опять сравниваем прямоугольные полоски ступенчатой фигуры на интервале $[0\ldots1]$ с полосками фигуры, построенной на интервале $[0\ldots3]$ при одном и том же значении n. У второй фигуры ширина полосок в 3 раза больше, а высота в $3^3=27$ раз больше, чем у первой. Поэтому площади прямоугольных полосок у второй фигуры в $3^4 = 81$ раз больше, чем у первой. Значит, и вся площадь второй ступенчатой фигуры в 81 раз больше площади первой ступенчатой фигуры. При безграничном возрастании n обе ступенчатые фигуры переходят в конце концов в криволинейные фигуры, и для последних сохраняется отношение площадей (81 : 1).



Черт. 63.

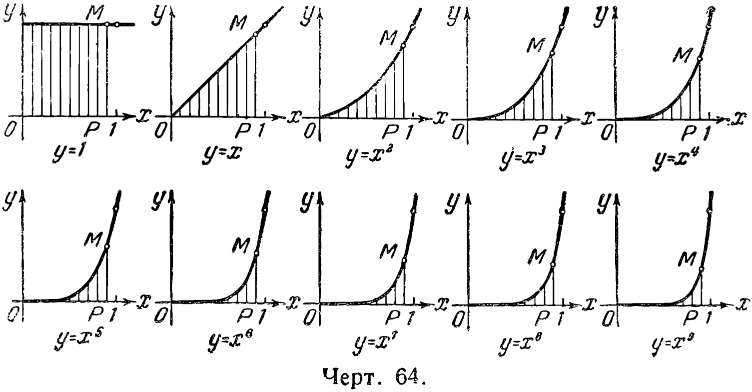
Так как площадь, связанная с параболой $y = x^3$ и лежащая на интервале $[0 \ldots 1]$, равна $\frac{1}{4}$ кв. ед., то для площади, лежащей на интервале $[0 \ldots b]$, получаем величину $\frac{1}{4} b^4$ кв. ед.

Переходя к параболам более высокой степени (на черт. 63 изображены дуги парабол $y = x^n$ на интервале $[0 \ldots 1]$ при разных значениях n, например $y = x^4$, $y = x^5, \ldots$), можно теперь без колебаний утверждать, что площадь «под» параболой $y = x^4$ на интервале $[0 \ldots b]$ равна $\frac{1}{5} b^5$ кв. ед.; площадь «под» параболой $y = x^5$ на том же интервале равна $\frac{1}{6} b^6$ и т. д.

Теорема: Площадь «под» кривой $y=x^n$ на интервале $[0 \ldots b]$ равна $\frac{b^{n+1}}{n+1}$ кв. ед., или $\int\limits_0^b x^n\,dx=\frac{b^{n+1}}{n+1}$. Эту формулу мы в дальнейшем будем называть формулой Валлиса, в сочинении которого (1655 г.) она была оригинальным образом доказана и обобщена для случая дробного показателя.

3. Меркатор находит ключ.

Как было выше указано, задачей настоящей главы является вывод формулы, дающей возможность находить логарифмы быстро и с любой степенью точности.



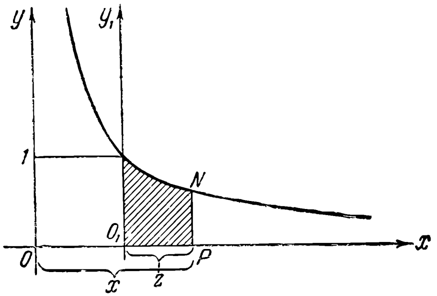
Черт. 64.

Положение таково. С одной стороны, логарифм есть величина площади, ограниченной гиперболой и некоторыми прямыми, и у нас нет никаких средств подсчёта такой криволинейной площади, если не считать кустарного и неточного подсчёта клеточек на миллиметровке. С другой стороны, мы имеем последовательный ряд парабол $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$, ... и так далее.

К этому ряду для полноты добавляют ещё параболу 1-й степени, т. е. прямую $y=x$ и параболу нулевой степени $y=x^0=1=\text{const}$. (см. черт. 64).

Для каждой из этих парабол мы, благодаря доказанной формуле Валлиса, умеем быстро и абсолютно точно определить величину криволинейной площади на участке $[1 \ldots b]$. Отсюда естественно является мысль: нельзя ли свести задачу о площади «под» гиперболой к задаче о площади «под» параболой?

Около 1686 г. математику Николаю Меркатору из Голштинии случайно удалось, путём несложного преобразования, найти естественное решение этой задачи *).



Черт. 65.

На черт. 65 имеем гиперболу, график функции $y=\frac{1}{x}$.

Теперь, оставляя ось Ox прежней, перенесём ось Oy на единицу вправо в положение $O_1 y_1$. Если точка N, взятая на гиперболе, имела раньше абсциссу $OP=x$, то новая абсцисса будет O_1P; обозначим её через z. Тогда $z=x-1$ или же $x=1+z$. Уравнение нашей линии (гиперболы) $y=\frac{1}{x}$ принимает вид: $y=\frac{1}{1+z}$. Если, например, $OP=1{,}8$ ед., и искомый логарифм был выше обозначен как $\int\limits_1^{1,8}\frac{1}{x}\,dx$, то теперь мы должны его обозначить как $\int\limits_0^{0,8}\frac{1}{1+z}\,dz$, так как новая абсцисса z изменяется от значения 0 до значения 0,8. И вот Меркатор (в этом решающий шаг!) привлекает формулу суммы убывающей геометрической прогрессии. А именно, мы знаем

*) И до Меркатора было известно несколько решений задачи о площади «под гиперболой», но все они были сложны и искусственны.

из III главы, что:

$$1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+\ldots \text{ до беск.} = \frac{1}{1+z}.$$

Казалось бы эта формула нужна для того, чтобы сложное выражение бесконечной суммы преобразовать в простое, стоящее справа. Меркатор же, наоборот, заменяет простую дробь $\frac{1}{1+z}$ бесконечным знакопеременным рядом, расположенным по степеням буквы z. Он получает:

пл. «под» гиперболой ($\equiv$ логарифм) $=$

$$= \int_0^{0,8} (1-z+z^2-z^3+\ldots)\,dz.$$

Стоящий справа знак интеграла, как мы уже знаем, означает площадь, а уравнения

$$y=1,\ y=-z,\ y=z^2,\ y=-z^3,\ \ldots$$

означают параболы последовательных степеней. Итак, «ключ» Меркатора, который он применил для открытия незнакомой замкнутой шкатулки — это замена площади гиперболы рядом площадей последовательных парабол. Во времена Меркатора формула площади для параболы $\int_0^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1} b^{n+1}$ была уже хорошо известна. Что же касается того, что ряд парабол тянется неограниченно далеко (до бесконечности), то Меркатор об этом мало беспокоился. Примерно через 150 лет после него математикам стоило многих трудов доказательство того, что при этом переходе сразу к несметному множеству площадей парабол мы не совершаем ошибки, одним словом, логически-строгое доказательство далось нелегко. Но в ту эпоху, когда жил Меркатор, так же как и юным читателям этой книги, можно было не входить в эти тонкости и беззаботно попеременно прибавлять и вычитать площади последовательных парабол:

$$\int\limits_0^{0,8} \frac{1}{1+z}\,dz = \int\limits_0^{0,8} 1 \cdot az - \int\limits_0^{0,8} z \cdot dz + \int\limits_0^{0,8} z^2 \cdot dz - \int\limits_0^{0,8} z^3 \cdot dz + \ldots =$$

$$= 0,8 - \frac{0,8^2}{2} + \frac{0,8^3}{3} - \frac{0,8^4}{4} + \frac{0,8^5}{5} - \ldots \text{ кв. ед.}$$

Эти последовательные площадки под параболами $y = z^0$, $y = z^1$, $y = z^2$, $y = z^3$, ..., $y = z^9$ можно видеть на черт. 64. Конечно, значение $z = 0,8$ взято лишь в качестве примера. Можно написать в общем виде:

$$\text{площадь «под» гиперболой } [1 \ldots \overline{1+z}] =$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ldots$$

Но слева мы имеем, согласно определению в конце V главы, $\log(1+z)$. Окончательная формула такова:

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ldots$$

или, изменяя букву,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Весьма полезно будет продумать и геометрическую сторону вывода. На черт. 66 показано, каким образом происходит графическое «сложение» парабол. Пусть, например, $y_{(2)}$ означает сумму $y_0 - y_1 + y_2 = 1 - x + x^2$; аналогично $y_{(3)} = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 = 1 - x + x^2 - x^3$; и так далее.

Рекомендуем читателю, пользуясь чертежом, проследить и убедиться, что площадь «под» суммарной кривой $y_{(3)}$ равна алгебраической сумме:

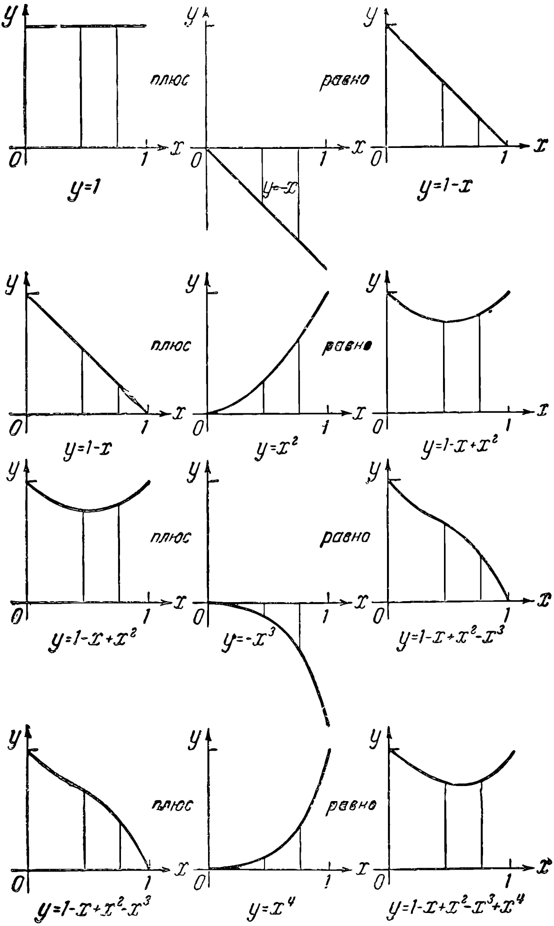
$+$ пл. «под» кривой $(y = 1)$,

$-$ пл. «под» кривой $(y = x)$,

$+$ пл. «под» кривой $(y = x^2)$,

$-$ пл. «под» кривой $(y = x^3)$.

Путём последовательного прибавления всё новых и новых парабол можно добиться того, чтобы суммар-



Черт. 66.

ная парабола $y_{(n)}$ на всём протяжении отличалась от гиперболы сколь угодно мало.

И если дробь $\frac{1}{1+x}$ есть предел суммы ряда $1-x+$ $+x^2-x^3+x^4-\ldots$ при неограниченном увеличении числа слагаемых, то в геометрической модели можно, путём накапливания всё новых и новых парабол, получить кривую, почти совпадающую с гиперболой.

Коротко выражаясь: гипербола есть предельная кривая при графическом сложении парабол, когда $n \to \infty$.

При этом, однако, следует сделать оговорку, что значение x должно быть меньшим чем 1, так как мы умеем находить сумму (точнее — предел суммы) лишь для убывающей прогрессии, когда знаменатель прогрессии $q=x<1$.

Заметим ещё, что расхождение между суммарной кривой $y_{(n)}$ и гиперболой увеличивается, если вдоль оси Ox передвигаться вправо, и оно больше всего у правого конца интервала $[0 \ldots x]$. Но можно доказать, что если отброшен хотя бы мельчайший отрезок в правом конце интервала $[0 \ldots 1]$, например, если взять интервал $[0 \ldots 0{,}99]$ или $[0 \ldots 0{,}9995]$, то можно расхождение между $y_{(n)}$ и гиперболой сделать сколь угодно малым, если только взять число n парабол достаточно большим.

Весьма интересным является вопрос: что же происходит, если, передвигаясь вправо вдоль оси Ox, подойти вплотную к краевой точке $x=1$?

В правой части равенства

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots$$

последовательные суммы s_n будут попеременно давать 0 или 1. Геометрически это означает, что правый конец суммарной кривой $y_{(n)}$ будет совершать колебания $(0 \leftrightarrow 1)$, т. е. предела $y_{(n)}$ при $x=1$ не существует. В левой части равенства мы получаем попросту «среднее» значение $\frac{1}{2}$. Получается разрыв между левой и правой частью равенства.

Современная математика уделяет много внимания и таким необычным «разрывным» функциям. Нам проще всего будет отказаться от небольшой частицы в правом конце интервала, т. е. взять, например, вместо [0 ... 1] интервал [0 ... 0,999].

Итак, если считать, что x означает правильную дробь, то можно свободно пользоваться формулой Меркатора.

Имеем, например:

$$\log 1{,}3 = \log(1+0{,}3) = \frac{0{,}3}{1} - \frac{0{,}3^2}{2} + \frac{0{,}3^3}{3} - \frac{0{,}3^4}{4} + \ldots$$

$$\log 1{,}32 = \frac{0{,}32}{1} - \frac{0{,}32^2}{2} + \frac{0{,}32^3}{3} - \frac{0{,}32^4}{4} + \ldots$$

и т. д.

Покажем, как, пользуясь этой формулой, можно сравнительно быстро составить таблицы логарифмов. Сама формула

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

удобна только для вычисления логарифмов чисел, близких к единице, например, для вычисления $\log 1{,}01$; $\log 1{,}05$; $\log 1{,}1$ и тому подобных. Если мы захотим вычислить логарифмы целых чисел: $\log 2$, $\log 3$ и т. д., то формулу Меркатора придётся немного преобразовать.

Совершенно такими же рассуждениями, как формула для $\log(1+x)$, выводится формула и для $\log(1-x)$. Вот эта формула:

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Нас не должно удивлять, что получилось выражение, имеющее при положительном x отрицательное значение: ведь при положительном x разность $1-x$ меньше единицы, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.

Вычтем теперь последнее соотношение из соотношения Меркатора:

$$
\begin{array}{rl}
\log(1+x) = & x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \\
- \\
\log(1-x) = & -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots \\
\hline
\log(1+x)-\log(1-x) = & 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right).
\end{array}
$$

Заменяя разность логарифмов логарифмом частного, получим необычайно важную в практическом отношении формулу:

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right). \qquad (*)$$

Разумное применение этой формулы требует некоторой сообразительности. Чтобы найти логарифмы целых чисел первого десятка, мы найдём сперва логарифмы двух дробей: $\frac{3}{2}$ и $\frac{4}{3}$.

Каков должен быть x в формуле (*), если нужно вычислить $\log\frac{3}{2}$? Его легко найти из уравнения:

$$\frac{3}{2}=\frac{1+x}{1-x},$$

откуда $x=\frac{1}{5}$.

Итак:

$$\log\frac{3}{2}=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\ldots\right).$$

Вычислим логарифм с 10 верными знаками. Для этого в промежуточных вычислениях будем брать 12 верных знаков. Для упрощения выкладок в каждом слагаемом умножим числитель и знаменатель на 2 в той степени, в которой пятёрка входит в знаменатель этого слагаемого. Получим:

$$\log\frac{3}{2}=2\left(\frac{2}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{1000}+\frac{64}{10^6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{128}{10^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{512}{10^9}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{11}\cdot\frac{2048}{10^{11}}+\ldots\right).$$

Вот что дают простые вычисления, требующие никак не больше получаса:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{10} &= 0{,}2 \\
\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{1000} &= 0{,}002\,666\,666\,667 \\
\frac{64}{10^6} &= 0{,}000\,064 \\
\frac{1}{7}\cdot\frac{128}{10^7} &= 0{,}000\,001\,828\,571 \\
\frac{1}{9}\cdot\frac{512}{10^9} &= 0{,}000\,000\,056\,889 \\
\frac{1}{11}\cdot\frac{2048}{10^{11}} &= 0{,}000\,000\,001\,862 \\
\frac{1}{13}\cdot\frac{8192}{10^{13}} &= 0{,}000\,000\,000\,063 \\
\frac{1}{15}\cdot\frac{32768}{10^{15}} &= 0{,}000\,000\,000\,002 \\
\hline
\text{сумма} &= 0{,}202\,732\,554\,054 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \times 2 \\
\hline
\log\frac{3}{2} &= 0{,}405\,465\,108\,108.
\end{aligned}
$$

Во всех промежуточных вычислениях мы сохраним 12 знаков, хотя последний может быть и неверен: сами члены вычислены приближённо, а сложение приближённых чисел ведёт к увеличению возможной ошибки. Кроме того, мы отбросили длинный «хвост»; впрочем слагаемые этого «хвоста» убывают быстрее, чем члены геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$ и первым членом $\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{5^{17}}$, а сумма этой прогрессии так мала, что и на двенадцатый знак результата не может оказать влияния.

Теперь вычислим $\log\frac{4}{3}$. Здесь мы получим ряд, члены которого убывают значительно быстрее, чем у предыдущего. Для вычисления с 12 верными знаками в этом случае достаточно взять всего 6 членов. Правда, знаменатели здесь будут не такие «круглые», как в предыдущем примере, так что на вычисление потребуются те же полчаса.

Находим x из уравнения $\frac{4}{3}=\frac{1+x}{1-x}$.

Получаем $x=\frac{1}{7}$. Следовательно:

$$\log\frac{4}{3}=2\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{7^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{7^{11}}+\ldots\right).$$

Далее располагаем действия, как в предыдущем примере:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= 0{,}142\,857\,142\,857\\
\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3} &= 0{,}000\,971\,817\,298\\
\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5} &= 0{,}000\,011\,899\,815\\
\frac{1}{7^8} &= 0{,}000\,000\,173\,466\\
\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{7^9} &= 0{,}000\,000\,002\,753\\
\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{7^{11}} &= 0{,}000\,000\,000\,045\\
\hline
\text{Сумма} &= 0{,}143\,841\,036\,234\\
&\qquad\qquad\qquad\quad \times 2\\
\hline
\log\frac{4}{3} &= 0{,}287\,682\,072\,468.
\end{aligned}$$

Имея $\log\frac{3}{2}$ и $\log\frac{4}{3}$ находим сразу $\log 2$: именно $2=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$; следовательно,

$$\log 2=\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}$$

Выполняем сложение:

$$\begin{array}{r}
0{,}405\,465\,108\,108\\
+\;0{,}287\,682\,072\,468\\
\hline
0{,}693\,147\,180\,576
\end{array}.$$

Благодаря тому, что мы выполняли ряд действий над приближёнными числами, мы могли накопить ошибки. За 10 верных знаков после запятой можно ручаться во всяком случае:

$$\log 2 = 0{,}693\,147\,180\,6.$$

Попутно получаем логарифмы чисел 3, 4, 6, 8 и 9:

$$\log 3 = \log \frac{3}{2} \cdot 2 = \log \frac{3}{2} + \log 2 = 1{,}098\,612\,288\,7,$$

$$\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 \qquad = 1{,}386\,294\,361\,2,$$

$$\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 = 1{,}791\,759\,469\,2,$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 \qquad = 2{,}079\,441\,541\,7,$$

$$\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 \qquad = 2{,}197\,224\,577\,3.$$

Чтобы вычислить $\log 5$, лучше всего предварительно вычислить $\log \frac{81}{80}$. В этом случае $x = \frac{1}{161}$ и для получения верных 12 знаков достаточно взять 3 члена ряда:

$$\log \frac{81}{80} = 2\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{161^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{165^5}\right) \text{ (12 верных знаков).}$$

Вычисление даёт:

$$\log \frac{81}{80} = 0{,}012\,422\,519\,998.$$

Но с другой стороны:

$$\log \frac{81}{80} = \log 3^4 - \log 5 \cdot 2^4 = 4 \log \frac{3}{2} - \log 5,$$

откуда

$$\log 5 = 4 \log \frac{3}{2} - \log \frac{81}{80}.$$

Логарифм числа $\frac{3}{2}$ был вычислен нами выше; $\log \frac{81}{80}$ мы сейчас нашли. Простая выкладка даёт:

$$\log 5 = 1{,}609\,437\,912\,4 \text{ (сохраняем 10 знаков).}$$

Прибавив $\log 2$, найдём $\log 10$:

$$\log 10 = 2{,}302\,585\,093\,0 \text{ (10 знаков)}$$

Десятки	Единицы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972	2,3026
1	2,3979	2,4349	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444	2,9957
2	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673	3,4012
3	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636	3,6889
4	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918	3,9120
5	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775	4,0943
6	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341	4,2485
7	4,2627	4,2767	2,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694	4,3820
8	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886	4,4998
9	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951	4,6052

Насколько всё это проще остроумных, но утомительных вычислений Непера и Бригга!

До сих пор речь шла о вычислении натуральных логарифмов. Но мы знаем, что десятичные логарифмы получаются из натуральных простым умножением последних на постоянное число, т. е. на одно и то же число для всех логарифмов. Но $\log 10 = 2{,}302\,585\,093\ldots$, а $\log_{10} 10 = 1$. Значит, чтобы получить десятичные логарифмы, нужно найденные нами натуральные логарифмы умножить на

$$K = \frac{1}{2{,}302\,585\,093\,0\ldots} = 0{,}434\,294\,481\,9\ldots$$

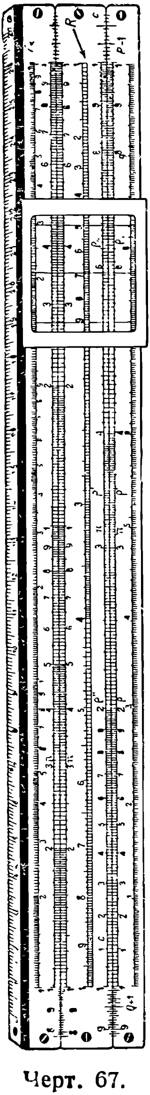
Остаётся выполнить не такие уж сложные умножения.

Вот четырёхзначная таблица натуральных логарифмов, которую читатель без труда мог бы составить сам, пользуясь «ключом Меркатора» (см. стр. 218).

4. Принцип устройства счётной линейки.

Счётная линейка есть инструмент, позволяющий без таблиц логарифмов делать те же вычисления, которые делаются при помощи этих таблиц. При этом вычисления производятся гораздо быстрее, но не столь точно. Достаточно взглянуть не счётную линейку (черт. 67), чтобы видеть, что деления на ней необычные: ряд чисел 1,1; 1,2; 1,3; ...; 2; 2,1; 2,2; ... сгущается по мере передвижения вправо. Как расставлены эти деления? Именно эта необычная расстановка делений и скрывает в себе таблицу логарифмов, а сама линейка является как бы осязаемым результатом всей изложенной теории. Прежде чем дать объяснение устройства линейки, нам придётся сделать небольшое отступление.

Та таблица логарифмов, которая приведена на стр. 218, является основной. Но допустим, что кто-нибудь вздумает умножить все значения логарифмов на некоторое постоянное число, например на $k = 2$, или на $k = 3{,}5$, или на $k = 0{,}016$. Можно ли будет пользоваться новой



Черт. 67.

таблицей? Оказывается, ею можно будет пользоваться с таким же успехом, как и основной. Докажем это.

Пусть в основной таблице числам A, B, $C, \ldots, P, Q$ соответствуют значения логарифмов, равные $a, b, c, \ldots, p, q$. Все применения логарифмов основаны на таком свойстве:

если

$$A \cdot B = Q,$$

то

$$\log A + \log B = \log Q,$$

или

$$a + b = q.$$

В видоизменённой таблице числам $A, B, C, \ldots, P$, будут соответствовать значения логарифмов ak, bk, $ck, \ldots,$ pk, qk. Так как числа $a, b, c, \ldots, q$ удовлетворяют равенству $a + b = q$, то по новой таблице будем иметь:

$$\log A + \log B = ak + bk = (a + b)\,k = qk.$$

В новой же таблице qk есть $\log Q$. Поэтому и в новой таблице:

$$\log A + \log B = \log Q.$$

Можно подтвердить сказанное и чертежом, на котором возможность изменить все значения логарифмов в одинаковом отношении становится очевидной (черт. 68). Если все ординаты точек M уменьшить в k раз, т. е. вместо гиперболы MB взять линию CN, имеющую ординаты соответственно в k раз меньше, то и любая площадь P_0PMB окажется уменьшённой в k раз, если её заменить площадью P_0PNC.

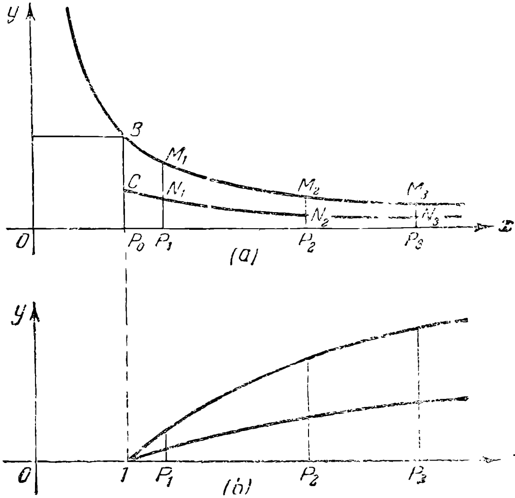
Если для основной гиперболы, при условии $x_1 \cdot x_2 = x_3$ имеет место равенство:

$$\text{пл. } P_0P_1M_1B + \text{пл. } P_0P_2M_2B = \text{пл. } P_0P_3M_3B.$$

то и для новой линии CN будет соблюдаться равенство:

$$\text{пл. } P_0P_1N_1C + \text{пл. } P_0P_2N_2C = \text{пл. } P_0P_3N_3C.$$

Очевидно, можно и увеличить все ординаты, и взять кривую линию, идущую выше, чем основная линия BM. Такая возможность распоряжаться всей таблицей, т. е. умножать все логарифмы на постоянный коэффициент,



Черт. 68.

оправдывает тот факт, что наряду с изложенной системой логарифмов—неперовой или «натуральной»—получила большое распространение другая система логарифмов—десятичная. Исторически она появилась позднее натуральной, и интересно отметить, что её первый составитель Бригг при её составлении советовался с изобретателем натуральных логарифмов—Непером. Новая десятичная система получается, если все значения логарифмов основной системы умножить на постоянный коэффициент, приблизительно равный 0,43429 ... (см. конец предыдущего параграфа и стр. 180).

Преимущества десятичной системы логарифмов читателю известны из курса алгебры. В таблице на стр. 222 даны уже десятичные логарифмы.

Число	Десятичный логарифм	Число	Десятичный логарифм	Число	Десятичный логарифм	Число	Десятичный логарифм
1,1	0,0414	1,9	0,2788	3,4	0,5315	6,5	0,8129
1,2	0,0792	2	0,3010	3,6	0,5563	7	0,8451
1,3	0,1139	2,2	0,3424	3,8	0,5798	7,5	0,8751
1,4	0,1461	2,4	0,3802	4	0,6021	8	0,9031
1,5	0,1761	2,6	0,4150	4,5	0,6532	8,5	0,9294
1,6	0,2041	2,8	0,4472	5	0,6990	9	0,9542
1,7	0,2304	3	0,4771	5,5	0,7404	9,5	0,9777
1,8	0,2553	3,2	0,5051	6	0,7782	10	1

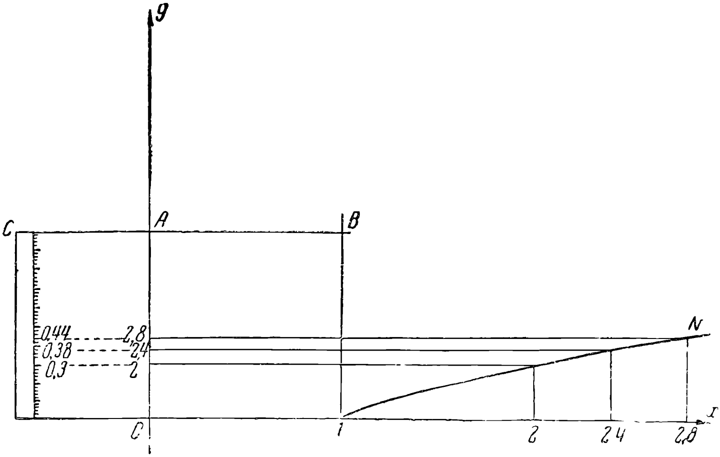
Перейдём теперь к объяснению устройства счётной линейки. На черт. 69 вдоль оси Ox размечены деления

$$1;\ 1,2;\ 1,4;\ \ldots;\ 2,6;\ 2,8;$$

соответственные ординаты представляют собой десятичные логарифмы.

Будем проектировать отмеченные точки логарифмической кривой на вертикальную ось Oy. Тогда получим на этой оси сеть неравностоящих точек, как показано на черт. 69; на этом чертеже рядом с отрезком OA поставлен другой вертикальный отрезок, на котором нанесены обычные деления.

Остроумие изобретателя счётной линейки заключается в том, что он обходится без всего этого чертежа. Он оставляет одну только вертикальную ось OA, но ставит на ней не обычные числа, а против точки N ставит длину соответствующей абсциссы $OP=x$. Таким образом на отрезке OA откладываются ординаты y, а записываются соответствующие абсциссы x. Например, откладывается длина $ON=y=\lg 1,2=0,079$, а против этой точки помечается число $x=1,2$; откладывается длина $y=\lg 1,8=0,255$, а помечается число $x=1,8$ и так далее. Если оба отрезка OA и OC положить в горизонтальном положении, то получим нижнюю часть счётной линейки. Уже эта часть счётной линейки представляет собой в сжатом виде таблицу логарифмов, приблизительно с тремя десятичными знаками. В самой нижней части имеется обычная линейка с 500 делениями; если каждое мелкое деление мысленно разделить пополам, то будем иметь 1000 равных долей единицы, т. е. длины линейки. Если требуется, например, узнать lg 2,8, то надо сосчитать, сколько делений имеется от



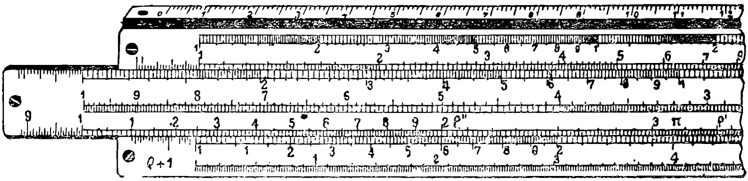
Черт. 69.

левого края до точки, помеченной 2,8; в данном случае будет 447 делений, т. е. lg 2,8 = 0,447. Таким же образом найдём: lg 2,4 = 0,380; lg 3,6 = 0,556 (приблизительно) и так далее.

Но этого мало. Счётная линейка позволяет механизировать процесс умножения и деления. Для этой цели служит средняя часть линейки — «движок»; на нижней его строке имеется точная копия только что рассмотренной шкалы. Поясним, как при помощи этого движка автоматически производится умножение двух чисел.

Пусть требуется перемножить два числа, например, 1,4 и 3. Отодвигаем движок настолько, чтобы его начальное деление приходилось против пометки 1,4 на неподвижной шкале (черт. 70). На шкале движка отыскиваем пометку 3. Тогда против пометки 3 на неподвижной шкале найдём число 4,2, которое и есть произведение двух заданных чисел. Чем это объясняется?

Перемещением движка мы произвели сложение двух отрезков. Первый отрезок на неподвижной шкале, от пометки 1 до пометки 1,4, по своей длине фактически равен не 1,4 ед., а lg 1,4, т. е. 0,146 единицы; этот факт можно проверить по обычной линейке, расположенной в самом низу прибора. Далее, второй отрезок,



Черт. 70.

взятый нами на движке от пометки 1 до пометки 3, по своей длине фактически равен не 3 ед., а $\lg 3 = 0{,}477$ единицы. Мы произвели сложение обоих отрезков:

$$0{,}146 + 0{,}477 = 0{,}623.$$

Какую же пометку мы прочитаем, если отойдём от левого края линейки на 0,623 её длины?

Имеем:

$$0{,}146 = \lg x_1; \quad 0{,}477 = \lg x_2,$$
$$0{,}623 = \lg x_1 + \lg x_2.$$

Но основное свойство логарифмов гласит:

При умножении чисел $x_1 \cdot x_2$ их логарифмы складываются. Значит, и обратно: при сложении логарифмов соответствующие им числа перемножаются:

$$\lg x_1 + \lg x_2 = \lg (x_1 \cdot x_2),$$

а потому:

$$0{,}623 = \lg x_1 + \lg x_2 = \lg 1{,}4 + \lg 3 = \lg (1{,}4 \cdot 3) = \lg 4{,}2.$$

А это и означает, что после сложения обоих отрезков мы найдём пометку 4,2. Таким образом сложение отрезков, взятых на обеих шкалах, автоматически сопровождается умножением чисел, помеченных в концах этих отрезков.

Мы не будем останавливаться на других действиях, которые можно производить с помощью счётной линейки, так как нам здесь важно было лишь установить принцип её устройства.

Если бы читателю было предложено самому построить линейку, то он мог бы справиться с этим заданием. Для этой цели ему пришлось бы составить таблицу логарифмов, такую, как на стр. 118 или 222, а это он сумеет сделать, если воспользуется формулой Меркатора:

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

Для того же, чтобы узнать, откуда взялась эта формула, ему пришлось прочитать и продумать почти весь материал нашей книги. Теперь необычно расположенные деления на счётной линейке уже не будут казаться загадкой. Читатель знает, как рассчитать местоположение этих делений, чтобы шкала могла служить удобным инструментом для вычислений.

5. Чему равно число π?

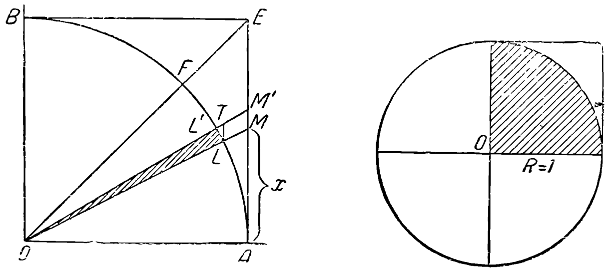
Мы воспользуемся результатами последнего параграфа, чтобы ответить на вопрос, интересующий миллионы школьников, изучающих геометрию, а именно — нельзя ли найти сколь угодно точное значение числа π?

Дело в том, что ответ на этот вопрос даётся рассуждением, совершенно аналогичным тому, которое мы делаем при выводе формулы Меркатора.

Число π определяем, как отношение площади круга радиуса $R=1$ к площади квадрата со стороной, равной 1.

Или короче, π есть площадь круга при радиусе, равном 1. Очевидно, достаточно будет найти площадь четверти круга, так как: зная величину $\frac{1}{4}\pi$, можно узнать и искомое π.

Разделим отрезок касательной, равный 1, на n равных долей, например: $n=10$; $n=100$; $n=200$ и т. д. Чем больше число делений n, тем результат ниже указываемого подсчёта будет точнее. Пусть одно из делений прямой AE (черт. 71) будет MM'; концы отрезка MM' соединим с центром O. Проведя $LT \parallel AE$ образуем треугольник OLT, подобный треугольнику OMM'. Примем здесь без доказательства, что при неограниченном



Черт. 71.

возрастании числа n можно сектор OLL' заменить треугольником OLT; точнее: предел суммы малых треугольников OLT даёт в точности искомую площадь четверти круга.

По свойству подобных треугольников имеем:

$$\frac{\text{пл. } \Delta OLT}{\text{пл. } \Delta OMM'} = \left(\frac{OL}{OM}\right)^2 = \frac{OL^2}{OM^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

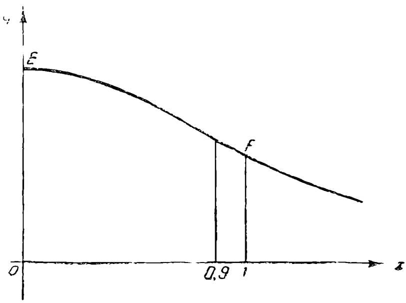
откуда пл. $\Delta OLT = (\text{пл. } \Delta OMM') \cdot \dfrac{1}{1+x^3}$.

Но площадь $\Delta OMM' = \frac{1}{2}\,(MM') \cdot$ высоту $OA = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot 1 = \frac{\Delta x}{2}$. Здесь Δx означает величину малого приращения длины $AM = x$ при переходе от точки M к точке M'.

Отсюда получаем: пл. $\Delta OLT = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$. Чтобы найти площадь четверти круга, мы должны взять удвоенную площадь сектора OAF, а потому, умножая полученное выражение на 2, будем иметь:

$$\frac{1}{4}\text{ пл. круга} = \frac{\pi}{4} = \sum_{1}^{n} \frac{\Delta x}{1+x^2},$$

где суммирование долей Δx идёт от нуля (точка A) до 1 (точка E). Точная величина $\frac{1}{4}\pi$ есть предельное число, к которому приближается величина этой суммы при неограниченном возрастании числа n её слагаемых. Как в предыдущем параграфе, мы этот предел запишем в виде $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ (интеграл по переменному x, где x изменяется от 0 до 1). Если начертить график функции $y = \frac{1}{1+x^2}$, то величину интеграла можно представить, как криволинейную площадь, ограниченную сверху графиком указанной функции. Здесь мы видим пример преобразования одной площади, четверти круга, в другую криволинейную площадь (черт. 72). Вышепроизведённая замена сектора OLL' треугольником OLT была неточной, но переход к пределу (интегралу) ликвидировал эту неточность, и новая криволинейная площадь $OEF1$ в точности равна искомой площади четверти круга.



Черт. 72.

Как же найти величину новой криволинейной площади? Мы постараемся найти её косвенным путём, а именно, следуя приёму, применённому Меркатором. Нетрудно видеть, что дробь, стоящая под знаком интеграла, т. е. $\frac{1}{1+x^2}$, не отличается по форме от дроби

$\frac{1}{1+x}$, с которой мы имели дело выше. Там открытие Меркатора заключалось в том, что он заменил эту дробь геометрической прогрессией:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$$

Здесь мы поступим аналогично и напишем:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots,$$

т. е. новую кривую линию заменим «алгебраической суммой» парабол чётной степени. И опять, как раньше, искомая площадь будет равна алгебраической сумме (точнее, пределу суммы) площадей «под» параболами:

$$y=1,\ y=-x^2,\ y=x^4,\ y=-x^6,\ldots \text{ и т. д.}$$

Согласно основной формуле Валлиса, имеем:

$$\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3},\quad \int_0^b x^4\,dx=\frac{1}{5}b^5,\quad \int_0^b x^6\,dx=\frac{1}{7}b^7 \text{ и т. д.}$$

Если верхняя граница «b» была бы меньше 1, то заключение было бы безукоризненно *).

В случае $b=1$, имеем:

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3},\quad \int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{5},\quad \int_0^1 x^6\,dx=\frac{1}{7}, \text{ и т. д.}$$

---

*) Например, площадь нашей фигуры на интервале $[0\ldots 0{,}9]$ равна сумме ряда: $1-\frac{0{,}9^2}{2}+\frac{0{,}9^4}{4}-\frac{0{,}9^6}{6}+\ldots$ Но в нашей задаче $b=1$, и мы не можем написать равенства $\frac{1}{1+(+1)^2}=\frac{1}{2}=$ $=1-1^2+1^4-1^6+1^8-\ldots$ (см. выше. стр. 212). Рамки настоящей книги не позволяют войти в обсуждение этого интереснейшего вопроса, но можно доказать (теорема Абеля), что и при переходе к значению $b=1$, равенство остаётся правильным.

Поэтому:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

При этом, чем больше взять слагаемых, тем точнее будет результат. Но эта величина выражает площадь четверти круга, которую мы обозначим через $\frac{1}{4}\pi$. Отсюда получаем равенство:

$$\frac{1}{4}\pi = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots$$

Это равенство впервые было получено математиком и философом Лейбницем, и сообщено им в переписке Ньютону. Ньютон много раньше получил целый ряд аналогичных результатов, но случайная находка Лейбница закрепила за его именем этот ряд для числа π. Высчитывать число π по этой формуле было бы неудобно; для этого в настоящее время применяют другие ряды. Но в принципе мы получили возможность определить значение π с любой степенью точности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
27	18 снизу	$(7+4)^2$	$(7+3)^2$	Ред.
49	5 »	B_2N+OB_2	$B_2N : OB_2$	»
121	3 »	0 0 1 1 1	1 0 1 1 1	»
121	2 »	1 1 1 1 1	0 1 1 1 1	»
146	14 »	100,005 000 049 5	100,000 500 049 5	»
179	6 »	$e=2,718$	$e=2,718...$	»

Абельсон. Зак. 928

Цена 4 руб.