Азбука науки

для юных гениев

Вильгельм Аренс

Математические игры

Азбука науки
для юных гениев

Вильгельм Аренс

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Москва
ЦЕНТРПОЛИГРАФ

УДК 51-8
ББК 22.1
А80

12+

Разработка серийного оформления
И.А. Озерова

Wilhelm Ahrens. Mathematische Spiele

Аренс, В.
А80 Математические игры / В. Аренс ; [пер. Б.Д. Каминский]. — М.: ЗАО Центрполиграф, 2018. — 159 с., ил. — (Азбука науки для юных гениев).

ISBN 978-5-9524-5246-6

Вышедшая в начале XX века, в кажущемся теперь таким далеким 1924 году, и высоко оцененная известным популяризатором наук Яковом Исидоровичем Перельманом, книга «Математические игры» немецкого ученого д-ра Вильгельма Аренса снова доступна читателям. В ней увлеченному предметом любознательному исследователю представится возможность познакомиться с неустаревающими упражнениями для ума, полезными и интересными как для юных читателей, знакомых с алгеброй и геометрией, так и для взрослых. Описанные игры, тренирующие внимательность, гибкость ума и логическое мышление, послужат как отличной подготовкой для решения более сложных задач, так и отличным развлечением в часы досуга.

УДК 51-8
ББК 22.1

ISBN 978-5-9524-5246-6

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Автор этой книги, д-р Аренс, приобрёл в Германии заслуженную известность своими исследованиями в области математических игр; ему принадлежит обширный двухтомный труд «Математические развлечения и игры», в котором область эта разработана с исчерпывающей полнотой и строгой научностью[1]. Предлагаемая книга под сходным заглавием, принадлежа перу выдающегося знатока предмета, не имеет, однако, цель строго математической разработки рассматриваемых ею вопросов. Её задача — дать читателю приятное, занимательное чтение из области математических игр; соответственно этому, теория игр разбирается в ней по возможности общедоступно, без углубления в область отвлечённых обоснований.

Настоящий перевод, весьма тщательно и продуманно выполненный Б.Д. Каминским, сделан с 4-го немецкого издания, значительно переработанного по сравнению с предшествовавшими. Переработка подлинника состояла в исключении из книги тех глав и мест, чтение

[1] Тому же автору принадлежат, сверх того, следующие более мелкие сочинения: «Старое и новое из области занимательной математики» (1918), «Забава и дело в математике» (1919) и «Анекдоты о математиках».

которых могло бы затруднять читателя-нематематика[1], в соответствующем изменении общего характера изложения, в пополнении текста новым, более живым материалом и в значительном увеличении числа иллюстраций (до 78). Особенно занимательно и свежо написана отсутствовавшая в прежних изданиях глава о математических софизмах, весьма поучительная для читателей с первоначальной подготовкой из алгебры и геометрии.

Во многих местах книги автором предлагаются лёгкие упражнения с целью дать читателю возможность убедиться в правильном усвоении изложенного и помочь самостоятельно разобраться в новом вопросе. Задачи весьма несложны, и решение их не может затруднить внимательного читателя. В конце книги приведены ответы и необходимые указания.

При сравнительно небольшом объёме эта книга, благодаря мастерскому изложению, вмещает довольно значительный материал, охватывая всё то из области «классических» математических игр, что может быть предложено широкому кругу читателей. В качестве приятного и поучительного чтения, изощряющего гибкость ума, приучающего к сосредоточенной работе мысли ради систематических поисков решения и, следовательно, хорошо подготавливающего к более серьёзным научным занятиям, настоящая книга германского математика принесёт несомненную пользу нашей любознательной молодёжи.

Я. Перельман

---

[1] Русский переводчик, со своей стороны, также удалил ряд длиннот в тексте и упростил изложение некоторых мест.

ВВЕДЕНИЕ

Под игрой мы понимаем занятие, не преследующее определённой практической цели, но служащее для нашего удовольствия, развлечения, вообще — приятного препровождения времени; мы говорим об игре детей, игре музыканта, игре в театре и т. д. Тому, что игра имеет большое образовательное значение, наше определение нисколько не противоречит; больше того: в известном смысле даже науку называют иногда игрой.

Предлагаемая книга содержит одни лишь игры, причём предполагается, что читатель может играть и один. Правда, часть из них, при практическом осуществлении, требует участия по крайней мере ещё одного лица, так что некоторые игры приобретают характер состязания, но это вовсе не является обязательным.

Если сам играющий, приступая к играм, и не преследует определённой цели, то многие игры, в том числе и предлагаемые нами, в конце концов преследуют некоторую цель. Достижение этой цели в одних играх, главным образом основанных на «счастье», зависит исключительно от случая, в других — от навыка и умственной деятельности. Во многих играх (биллиард) достигаемый результат зависит от всех указанных факторов, причём, в зависимости от обстоятельств, один из них получает преобладание над другим.

Математической игрой называют такую, которая в своём процессе требует умственной деятельности и применения методов и умозаключений, употребляемых в математике. Математический характер игры будет тем полнее, чем больше преобладают в ней математические рассуждения и правила. В математическом обосновании игры, как и в самой математике, технический язык, в виде знаков и формул, не является такой частью, без которой нельзя обойтись. Эти знаки и формулы созданы лишь для экономии мысли и потому безусловно необходимы человеческому уму для сложных вопросов, встречающихся в математических дисциплинах. Ограниченному человеческому уму часто бывает даже трудно проникнуть в скрытые истины той или иной дисциплины без помощи духовных костылей — формул и знаков. Более того: удачный выбор внешних знаков иногда является решающим для дальнейшего развития какой-либо математической дисциплины. Но для разбираемых в этой книге игр мы можем, без ущерба, не пользоваться символическим языком математики; исключением является лишь последняя глава, занимающая в этой книге особое положение.

Сущность математической игры легче всего выясняется на примере. Возьмём игру «Ним», описываемую нами в главе VI. Эта простая игра имеет и сравнительно простую теорию, которую можно изложить, не пользуясь математическими символами, хотя теория эта носит чисто математический характер. Эта же теория показывает, что существует способ, наверняка ведущий к выигрышу; причём начинающий игру первым же ходом может обеспечить себе победу. Знание одним игроком этой теории даёт ему такое превосходство перед своим, хотя бы опытным противником, какое имеет европейское войско, вооружённое по последнему слову техники, перед толпой дикарей, вооружённой луками и стрелами. Если оба игрока знают математическую теорию игры и играют безошибочно, то исход игры зависит лишь от начального положения, и тем самым она приобретает уже характер игры на «счастье»; самый же процесс в данном случае для них совершенно не интересен, потому что по начальному положению они могут заранее определить, кто из них выиграет. В качестве игры «Ним» может прельщать нас лишь до тех пор, пока мы не знаем её математической теории; но интерес, который она вызывает, заключается именно в её остроумной математической теории.

Следует заметить, что с математической точки зрения наибольший интерес представляют задачи сравнительно несложные. Для сложных игр, среди которых, по своему образовательному значению, первое место занимает шахматная игра, трудно, да едва ли и возможно, найти исчерпывающую теорию, охватывающую все частные случаи, теорию, которая для каждой мыслимой позиции дала бы возможность найти абсолютно лучший ход и выиграть начинающему или, ещё лучше, при безошибочной игре обоих игроков, сыграть вничью. Неоднократные попытки применить математику к изучению шахматной игры не увенчались успехом, да вряд ли это и возможно, поскольку в понятие «теория» мы вкладываем данное выше определение. В самом деле: что следует вообще понимать под математическим обоснованием шахматной игры? Математическая теория шахматной игры должна была бы отличаться от обычной тем, что, при данном расположении шахмат, в круг её рассмотрения должны были включаться *все* ходы, возможные при этом положении; но это выходит за пределы осуществимого. Достаточно, например, указать, что число всех возможных положений после первых двух ходов, сделанных обеими сторонами, превосходит 70 000; в это число входят, конечно, как правильные, так и относительно неправильные комбинации. Поэтому понятно, что нам кажется невозможным (хотя бы в этом случае) достигнуть исчерпывающего решения или какого-либо значительного упрощения посредством математических методов. Если же простые и очевидные ходы шахматных фигур, шах и т. д. заменить сложными формулами и действиями над ними, то, пожалуй, окажется прав Шопенгауэр, сказавший, что математик подобен здоровому человеку, отрубившему себе ноги и заменившему их деревянными, — фразу, объясняемую враждебностью Шопенгауэра к математике и непониманием её. Вполне исчерпывающее рассмотрение всех возможных комбинаций для искусного шахматного игрока было бы бесцельной тратой времени и сил, тем более что его опытный взгляд сразу отбрасывает ошибочные или не имеющие значения ходы и сосредоточивает всё своё внимание на тех, которые кажутся ему наиболее целесообразными и могущими привести к более важным последствиям. Искусный шахматист подобен путешественнику, попавшему в незнакомый большой город, который, для ознакомления с ним, ограничивается осмотром главных улиц и наиболее выдающихся достопримечательностей; между тем другой решает не оставлять города до тех пор, пока не ознакомится со всеми улицами и не осмотрит всех домов. При таком внимательном осмотре он, может быть, увидит такие достопримечательности, которые первый не успел заметить, но часто будет попадать в тупые переулки и затратит много времени, а может, застрянет в городе и навсегда. Таким образом, шахматная игра, несмотря на то что в ней случай и проворство рук не играют роли, является игрой, правда, умственной, чисто логической, но вовсе не математической. Шахматная игра потому и привлекает до сих пор внимание многих, что, несмотря на многолетнюю давность, она всё же сохранила свою юношескую свежесть благодаря бесчисленному множеству комбинаций, которые не поддаются исчерпывающему обоснованию.

Примером игры на шахматной доске, имеющей законченную теорию, может служить игра, известная под названием «Волк и овцы». Для этой, несравненно более простой и значительно менее интересной игры можно разобрать все случаи, которые могут представиться; причём игрок, который ведёт фигуры, обозначающие овец, должен непременно выиграть. Доказательство состоит в составлении списка, исчерпывающего все случаи, и в расположении их в известном порядке, так что для каждого из них можно сразу указать правильные ходы. С математической точки зрения, эта игра, впрочем, не представляет интереса, так как здесь не приходится применять чисто математические приёмы; методы её обоснования походят более на статистические, чем на математические.

Глава I

ПРЫГАНЬЕ ВЗАПУСКИ

Начнём со следующей, весьма простой игры. Лицо *A* называет какое-нибудь число, не превышающее 10; его партнёр *B* называет большее число, отличающееся от первого не менее чем на 1, но не более чем на 10. Затем *A* снова называет число, которое превышает второе не менее чем на 1 и не более чем на 10 и т. д. Выигравшим считается тот, кто первый назовёт число 100. Всегда ли это возможно и если возможно, то кто выигрывает и каким образом?

Нагляднее игру эту можно представить следующим образом. Два мальчика *A* и *B*, каждый из которых может прыгнуть на расстояние не свыше 10 футов[1], сговорились поочерёдными прыжками пройти путь в 100 футов, соблюдая следующие условия: каждый прыжок не может быть меньше 1 фута; мальчик *A* начинает игру; *B* прыгает с того места, на которое прыгнул *A*; последний прыгает с того места, куда попал *B*, и т. д. Если при этом пройденное в один прыжок расстояние составляет дробное число футов, то вместо него берётся ближайшее меньшее целое число (например, вместо $5^3/_4$ берётся 5 футов). Выигравшим считается тот, кто первый достигнет конца пути.

После нескольких попыток играющие заметят, что выигрывает всегда тот, кто первый очутится на 89-м футе

[1] 1 фут — 30,48 см. (*Примеч. ред.*)

(рис. 1). Действительно, если, например, *А* достигнет 89-го фута, то расстояние, отделяющее его противника *В* от конечной цели, превосходит величину наибольшего прыжка (10 футов) на 1 фут. Поэтому *В* не может очередным прыжком достигнуть цели; с другой же стороны, по правилам игры он обязан прыгнуть не меньше чем на 1 фут. Он может попасть на 90-й, 91-й, 92-й или, в крайнем случае, на 99-й фут, но каждый раз *А* имеет возможность одним прыжком попасть на 100-й фут.

Рис. 1

Но если достижение 89-го фута обеспечивает выигрыш, то на 89-й фут попадет, очевидно, тот, кто раньше достигнет 78-го. Таким же образом, на 78-й попадает достигший 67-го и т. д. Получаем ряд чисел: 100, 89, 78, 67 ... 34, 23, 12 и, наконец, 1. На эти-то числа, разделённые промежутком в 11, должен становиться желающий выиграть. Значит, выиграть возможно и выигрывает тот, кто начинает игру. В первый прыжок он должен пройти 1 фут, в следующий — попасть на 12-й, затем на 23-й, 34-й ... 78-й, 89-й и, наконец, на 100-й.

Очевидно, игра эта может быть видоизменена: можно, например, взять иную длину пути или же иные численные значения для максимальных и минимальных прыжков. Числа, на которые должен становиться выигрывающий, отделены друг от друга промежутком, равным сумме чисел, выражающих максимальный и минимальный прыжок (в нашем случае 10 + 1 = 11). Если длина пути случайно окажется кратным упомянутого промежутка, то выигрыш будет обеспечен уже не за первым (*А*), а за вторым (*В*) игроком. Например, если длина пути равна 99 футам, а остальные условия прежние, то, как бы *A* ни начал, *B* первым прыжком может попасть на 11; вторым на 22... девятым на 99 и, следовательно, должен выиграть.

Вопрос 1. Длина пути равна 200 футам; остальные условия прежние. *A* ошибочно рассчитал, что для выигрыша он должен, как и прежде, попасть на 1; как должен *B* продолжать игру, чтобы выиграть?

Вопрос 2. Кто выиграет, если максимальный прыжок для каждого определён в 8 футов, минимальный — в 1 фут, длина пути 90 футов, и как должен поступать выигрывающий?

Вопрос 3. Кто выиграет, если максимальный прыжок составляет 17 дециметров, минимальный 1 дециметр, а длина пути равна 15 метрам?

Вопрос 4. Кто выиграет, если максимальный прыжок составляет 10 футов, минимальный 3 фута и длина пути равна 182 футам?

Вопрос 5. Максимальный прыжок определён в 9 футов, минимальный — в 2; длина пути равна 100 футам. Выигравшим считается тот, кто заставит противника достигнуть конца пути (100) или перепрыгнуть через этот конец[1]. Кто из играющих окажется выигравшим?

---

[1] В этом случае не делается различия между достижением цели и переходом за неё, между тем, как, например, в 4-м вопросе, различие это имеет существенное значение.

Глава II
ИГРА В ПЯТНАДЦАТЬ

§ 1. ИСТОРИЯ И ОПИСАНИЕ ИГРЫ

В 80-х годах XIX столетия в Германии получила широкое распространение «Игра в пятнадцать». На рис. 2 изображён в уменьшенном виде экземпляр этой игры в ящике, в котором находится 15 специально приготовленных квадратных костяшек.

Впервые игра эта появилась в Америке в 1878 г. Говорят, её остроумный изобретатель был известен в шахматном мире как выдающийся составитель задач. Сразу же после появления игра распространилась во всех цивилизованных странах английской культуры под названием «Fifteenth Puzzle» («Игры в 15»), германской культуры — «Boss Puzzle» («Игры Босса») и у французов под названием «Jeu du taquin» («Такен»).

С первого же года в неё стали играть с большим азартом, никакая игра до той поры не пользовалась подобным успехом. Говорят, в Гамбурге даже у пассажиров дилижансов можно было видеть небольшие ящички с 15 костяшками. Хозяева торговых контор приходили в отчаяние от увлечения служащих этой игрой и принуждены были вывесить объявления с запрещением играть в неё в рабочие часы. Устраивались турниры этой игры и т. п. Даже в зале Рейхстага, как рассказывает Зигмунт Гюнтер, выдающийся географ,

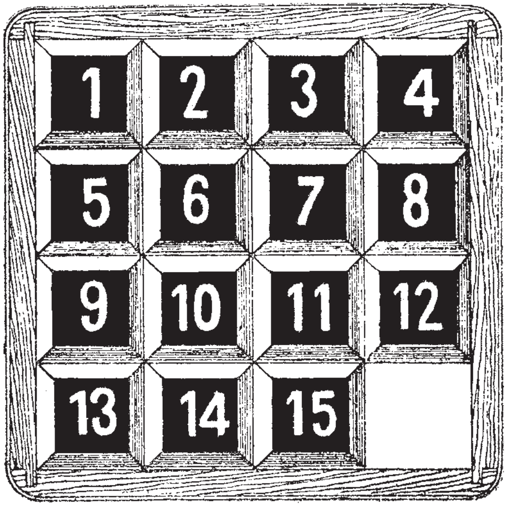


Рис. 2

математик и либеральный политик, можно было видеть депутатов, которые, слушая речи, одновременно развлекались этой игрой.

Игра состоит в следующем: *15 квадратных костяшек, пронумерованных цифрами от 1 до 15, расположены в произвольном порядке в квадратном ящичке. 16-е место ящичка остаётся свободным. Требуется последовательным передвижением костяшек на пустое место с мест смежных расположить их в порядке, указанном на рис. 2*[1].

Как увидим дальше, во многих случаях невозможно достигнуть указанного, так называемого нормального расположения костяшек; в таких случаях мы будем на-

[1] В современное данному изданию (начало XXI века) время стал популярным вариант этой игры, когда вместо расположения цифр в определённом порядке требуется сложить определённую картинку, «разрезанную» по квадратикам. Такие игры чаще всего не позволяют вынимать квадратики из поля, из-за чего игру невозможно привести в «неразрешимое» положение. (*Примеч. ред.*)

зывать задачу неразрешимой. Возможность или невозможность решения зависит исключительно от первоначального расположения костяшек. Как же узнать по расположению костяшек, разрешима или неразрешима задача, и как, в первом случае, решить её?

§ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Прежде чем ответить на эти вопросы, условимся различать места, или клетки, ящичка, обозначая их номерами, соответствующими рис. 2 (от 1 до 16). Например, место 4 постоянно обозначает клетку, которую на рис. 2 (т. е. при нормальном расположении костяшек) занимает костяшка с номером 4, а место 16 — нижнюю клетку справа, которая на рис. 2 остаётся свободной. Далее горизонтальные ряды клеток будем называть строками, а вертикальные — столбцами; будем различать первую, вторую, третью и четвёртую строки, считая сверху вниз; столбцы также будем именовать первый, второй, третий, четвёртый, считая слева направо.

Возьмём случайное расположение костяшек и попытаемся, посредством передвижений, получить их нормальное расположение (рис. 2). Будем поступать следующим образом: положим костяшку 1 на место 1 (если только она случайно не находится уже там) и затем, не трогая костяшки 1, поставим костяшку 2 на место 2. Нетрудно убедиться, что этого легко достичь сравнительно небольшим числом ходов. Тогда, не трогая первой строки, можно передвинуть костяшки 3 и 4 в клетки 3-го и 4-го столбцов, если, конечно, костяшки эти раньше не находились в них. Во всяком случае, мы должны допустить, что костяшки 3 и 4 могут быть так или иначе передвинуты на места, находящиеся в последних двух столбцах, и что одновременно в этих столбцах может оказаться и свободное место. Если костяшки 3 и 4 случайно не оказались на нужных местах, мы можем привести их туда исключительно путём передвижений внутри восьмиклеточного поля последних двух столбцов. Нет необходимости рассматривать эти ходы для всех возможных случаев, достаточно остановиться на наиболее неблагоприятном, когда костяшка 3 находится на месте 4, а костяшка 4 — на месте 3. Пусть наше восьмиклеточное поле двух последних столбцов имеет расположение, указанное на рис. 3.

При всех ходах костяшек, при расположении, указанном на рис. 3, мы не будем трогать 6-ю и 14-ю костяшки, так как в них нет необходимости; таким образом, мы ограничиваем себя шестью клетками, что не помешает нам достичь цели. Если бы мы пожелали ограничиться четырьмя верхними клетками, из которых одна свободна, мы не могли бы достичь цели (дальше мы ещё к этому вернёмся), т. е. не могли бы привести костяшки 3 и 4 на нормальные места. От расположения костяшек на рис. 3 легко перейти к расположению их как на рис. 4, если все пять костяшек шестиклеточного поля дважды, а 5-ю костяшку даже трижды передвинуть против часовой стрелки.

Передвижением костяшек, находящихся в четырёх средних клетках, легко перейти от расположения костяшек на рис. 4 к расположению на рис. 5. Теперь передвинем все пять костяшек верхнего шестиклеточного поля по часовой стрелке так, чтобы костяшка 4 очутилась на месте 3. Получим расположение костяшек как на рис. 6, а затем, передвигая костяшки внутри четырёх средних клеток, поставим костяшку 3 на место 7 (рис. 7). Последнее расположение костяшек 3 и 4 (рис. 7) является типичным.

Итак, рассмотрев этот особенно неблагоприятный случай, мы видим, что расположение костяшек на

4	3
12	8
5	
6	14

Рис. 3

8	5
3	
4	12
6	14

Рис. 4

8	5
4	3
12	
6	14

Рис. 5

4	8
12	5
	3
6	14

Рис. 6

4	8
3	
5	12
6	14

Рис. 7

рис. 7 всегда достижимо; отсюда легко получить такое расположение, при котором костяшка 4 займёт место 4 и костяшка 3 — место 3. Следовательно, первая строчка ящичка приведена в нормальный порядок, и её мы больше трогать не будем.

Существенным в этом приёме было то, что у нас было шестиклеточное поле с одной свободной клеткой, благодаря чему мы имели возможность не только передвигать последовательно пять костяшек в этом поле, но и три костяшки среднего четырёхклеточного поля (внутри названного шестиклеточного) с одной свободной клеткой. Лишь сочетанием этих двух видов передвижений возможно было достичь существенных изменений в расположении костяшек. Если ограничиться исключительно четырёхклеточным полем, то после всех возможных ходов картина, по существу, осталась бы прежняя.

Таким же путём можно привести в нормальный порядок и *вторую* строку; при этом все ходы выполняются лишь в последних трёх строках, костяшки же первой строки остаются на месте, и достигнутый там нормальный порядок не нарушается. Прежде всего легко передвинуть костяшки 5 и 6 на их нормальные места (на 5 и 6 — рис. 2); затем в шестиклеточном поле костяшки 7, 8, 11, 12, 15, 16 (рис. 2) совершают передвижения, подобные ходам, изображённым на рис. 3—7. Здесь мы можем применить рассуждения, применённые выше к рис. 3—7; правда, мы теперь имеем лишь шестиклеточное поле, но выше мы сами себя ограничили им и убедились, что этого вполне достаточно. Таким образом, указанным на рис. 3—7 способом можно привести костяшки 7 и 8 на нормальные места и тем достигнуть в верхних двух строках правильного расположения.

В последних двух строках прежде всего передвигают костяшку 13 на место 9 и костяшку 9 на место 10, аналогично тому, как мы раньше передвинули 3 и 1 (рис. 7) и получили типичное расположение; но теперь придётся оперировать в двух последних *строках,* в то время как выше мы имели дело с двумя последними *столбцами.* Затем переводят костяшки 13 и 9 на их нормальные места. Теперь остаётся шестиклеточное поле с местами 10, 11, 12, 14, 15, 16; после передвижения изложенным способом костяшек 10 и 14 на их нормальные места у нас останется лишь четырёхклеточное поле с костяшками 11, 12, 15 и со свободной клеткой. Передвигая эти костяшки, можно привести костяшку 15 на её нормальное место, и свободным останется место 16. Костяшки 11 и 12 могут оказаться либо на их нормальных местах, либо костяшка 12 на месте 11, а костяшка 11 — на месте 12. В первом случае задача решена; во втором — имеем расположение как на рис. 8. Итак, мы пришли к следующему выводу:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	11
13	14	15	

Рис. 8

Из случайного первоначального расположения костяшек можно прийти либо к нормальному, либо к расположению, указанному на рис. 8.

На вопрос, возможно ли от первоначального расположения перейти, по желанию, и к нормальному, и к расположению на рис. 8, мы пока ответа не дадим, а ограничимся указанием, что *в каждом* случае одно из указанных расположений достижимо.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГРЫ

Будем исходить из определённого первоначального расположения (рис. 9). Будем читать цифры этой фигуры в порядке, которого мы и раньше придерживались, т. е. в каждой строке — слева направо, а строки — сверху вниз. Мы видим, что костяшка 1 занимает своё нормальное место. Следующая же за ней костяшка 4 находится, как будем говорить, *до* двух костяшек, которые при нормальном расположении находились бы раньше неё, — мы имеем в виду костяшки 3 и 2. Будем говорить, что костяшка 4 даёт два отступления относительно нормального порядка. Таким же образом костяшка 7, стоящая *до* костяшек 3, 5, 2, 6, имеет четыре отступления; костяшка 13, стоящая *до* костяшек 11, 10, 2, 12, 6, имеет пять отступлений и т. д. Для всего ящика мы имеем, таким образом:

1	4	7	9
3	5	8	14
15	13	11	10
2	12	6	

Рис. 9

0 + 2 + 4 + 5 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 5 + 3 + 2 + 0 + + 1 = 38 отступлений относительно нормального порядка. Эта общая сумма отступлений даёт возможность усмотреть, достижимо ли нормальное расположение рис. 2 или нет: именно, если общее число отступлений чётное (в нашем случае 38), то возможно получить нормальное расположение костяшек — задача разрешима. Напротив, если общее число отступлений нечётное, то нормальное расположение не получается — задача неразрешима. При этом предполагается, что свободное место находится внизу справа, т. е. в клетке 16. Вместо громоздкого выражения «отступление от нормального расположения» будем в дальнейшем употреблять принятый в математике термин «инверсия»[1]. Условие для возможности решения задачи, данное выше без доказательств, мы можем теперь выразить следующим образом:

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы от данного расположения костяшек со свободным местом 16 можно было перейти к нормальному (рис. 2), является то, чтобы общее число всех инверсий данного расположения было чётным.

Чтобы убедиться в верности сказанного, поставим вопрос: как изменяется общее число всех инверсий от передвижения 1 костяшки на свободное место? Ответ весьма прост: когда костяшка передвигается в горизонтальном направлении, число инверсий от такого передвижения не меняется. Что произойдёт, когда костяшка передвигается в вертикальном направлении? Такое передвижение обозначает, что костяшка отодвигается назад или вперёд на три места, в зависимости от того, переводят ли её вверх или вниз. Пусть пере-

[1] В современной математике термин «инверсия» определяет разные понятия в разных частях, или разделах, математики. Используемое здесь значение термина характерно для области математики, называемой комбинаторикой. (*Примеч. ред.*)

двигаемая костяшка имеет номер x, а три костяшки, через которые она как бы перепрыгивает, — номера a, b, c (a, b, c и x — числа в пределах от 1 до 15). Тогда могут представиться такие случаи:

1) x больше каждого из чисел a, b, c;

2) x меньше каждого из чисел a, b, c;

3) x больше двух чисел из a, b, c и меньше третьего;

4) x больше одного из числа a, b, c и меньше двух остальных.

В первом случае, когда костяшка x становится раньше костяшек a, b, c, число инверсий увеличивается на 3; когда же костяшка x становится позади костяшек a, b, c, отпадают три инверсии. Таким образом, в первом случае, от передвижения костяшки x число инверсий меняется — либо увеличивается на 3, либо уменьшается на 3.

Второй случай сходен с первым: здесь также общее число инверсий либо увеличивается, либо уменьшается на 3.

В третьем случае, когда костяшка x становится раньше костяшек a, b, c, число инверсий, во-первых, увеличивается на 2, так как x оказывается раньше двух чисел, меньших его; во-вторых, оно уменьшается на 1, так как x оказывается перед числом, большим его. В итоге общее число инверсий увеличивается на 1. Когда x становится впереди костяшек a, b, c, общее число инверсий уменьшается на 1. Итак, в третьем случае общее число инверсий изменяется на 1.

В четвёртом случае число инверсий также изменяется на 1. Следовательно, от передвижения костяшки в вертикальном направлении число инверсий меняется или на 3, или на 1, т. е. увеличивается или уменьшается на одно из этих чисел. Полученный результат выразим так:

Горизонтальное передвижение костяшки не изменяет общего числа инверсий, вертикальное — изменяет его на нечётное число (на 1 или на 3).

Предположим, что на свободном месте находится воображаемая костяшка с номером 16. В таком случае мы можем сказать, что каждый отдельный ход, т. е. передвижение костяшки на соседнее свободное место, равносилен замене воображаемой костяшки 16 действительно передвигаемой костяшкой. Если костяшка 16, как было предположено, находится в клетке 16, то, чтобы к концу игры она оказалась на том же месте, необходимо, чтобы число таких замен было чётное; в самом деле, каждый ход — в горизонтальном или вертикальном направлении — должен как бы уничтожиться другим ходом в противоположном направлении, лишь тогда костяшка 16 вернётся на своё прежнее место. *Число ходов, необходимое для перехода от одного расположения к другому с той же самой свободной клеткой, должно быть чётным; и очевидно, число горизонтальных ходов, как и вертикальных, взятое само по себе, тоже должно быть чётным.*

Подведём итоги. От первоначального расположения костяшек со свободным местом 16 можно перейти к конечному расположению, с тем же свободным местом, путём чётного числа горизонтальных и вертикальных ходов. Первые не меняют числа инверсий; вторые, напротив, меняют их *каждый раз* на нечётное число, так что в конечном счёте — ввиду того что число вертикальных ходов чётное, — общее число инверсий изменяется *на чётное* число. Первоначальное расположение костяшек со свободной клеткой 16 можно привести и к любому другому с тем же свободным местом, но лишь в том случае, когда общее количество инверсий одного отличается от общего количества другого на *чётное* число. Этот переход безусловно невозможен, когда разность между числами инверсий *нечётная*. Общее же число инверсий нормального расположения (рис. 2) равно нулю. Число инверсий для расположения на рис. 8 равно 1 (костяшка 12 стоит впереди костяшки 11). Отсюда, между прочим, следует, что расположение на рис. 8 не может быть приведено к нормальному и что, обратно, нормальное расположение не может быть приведено к расположению на рис. 8. Легко усмотреть, что всякое расположение может быть приведено к нормальному только в том случае, когда общая сумма инверсий — число *чётное*. Последнее условие является *необходимым* для перехода к нормальному расположению; оно является и условием *достаточным*. В самом деле, из предыдущего следует, что всякое первоначальное расположение с чётным числом инверсий *не* может быть приведено к расположению на рис. 8 (с нечётным числом инверсий). Выше же было показано, что каждое расположение приводится либо к нормальному (рис. 2), либо к расположению рис. 8; поэтому данное расположение с чётным числом инверсий *всегда* можно привести к нормальному виду. С другой стороны, расположения с нечётным числом инверсий всегда могут быть приведены к расположению на рис. 8; к нормальному же они приведены быть не могут; но одно из конечных расположений для них всегда достижимо. Во всех так называемых неразрешимых случаях расположение на рис. 8 — и только оно одно — всегда возможно. Этим данное выше правило доказано в полном объёме, и вопрос, оставленный в конце § 2 открытым, получил ответ, а именно: никогда одно и то же расположение не может быть приведено, по желанию, и к нормальному, и к расположению на рис. 8, но лишь к одному из них.

Расположения, при которых задача становится неразрешимой, могут объяснить тот исключительный интерес, который «Игра в пятнадцать» вызвала при своём появлении. Игрок, которому более или менее легко давались разрешимые случаи, не зная теории игры, думал, что и в других случаях, при настойчивости и усердии, он в конце концов решит задачу.

Вопрос 6. Разрешима ли задача, данная на рис. 10?

В качестве примера разберём расположение костяшек, получающееся из нормального, если в каждой строке расположить костяшки в обратном порядке, оставив свободное место внизу справа (см. рис. 11). Сумма инверсий будет нечётной (в каждой из верхних строк шесть инверсий, в нижней — три); следовательно, расположение на рис. 11 нельзя привести к нормальному, но можно привести к расположению на рис. 8.

В рассмотренных до сих пор задачах предполагалось, что свободное место при нормальном расположении находится в клетке 16. Если дано расположение с иным свободным местом, и мы желаем узнать, разрешима ли в данном случае задача, то прежде всего совершим передвижения таким образом, чтобы свободное место оказалось в клетке 16. Например, при расположении на рис. 12, мы последователь-

5	6	7	8
1	2	3	4
9	10	13	14
15	12	11	

Рис. 10

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
15	14	13	

Рис. 11

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Рис. 12

но передвигаем костяшки 1, 2, 3, 7, 11, 15, чтобы клетка 16 стала свободной. Это новое расположение имеет девять инверсий, а потому не может быть приведено к нормальному виду, но лишь к расположению на рис. 8.

Нетрудно понять, что если какое-либо расположение приводится к другому, то и обратно — последнее может быть приведено к первому. В самом деле: каким образом первое расположение приводится ко второму? Путём ряда «ходов», т. е. посредством целого ряда замен воображаемой костяшки 16 соседними костяшками. Например, первое расположение может быть приведено ко второму тем, что костяшка 16 последовательно заменяется костяшками *a*, *b*, *c* ... *m*, *n*, *r, s*. Костяшка 16, таким образом, находилась рядом с *a*, а затем с *b*, с *c* ... с костяшкой *r* и с костяшкой *s*. Поэтому мы можем исходя из второго расположения вернуться к первому, перемещая костяшки в обратном порядке, т. е. костяшку 16 заменить костяшкой *s*, затем костяшкой *r* и т. д., пока не придём к первоначальному расположению. Отсюда следует, что, например, расположение на рис. 8 может быть приведено к расположению на рис. 11 или 12, потому что последние, мы видели, могут быть приведены к расположению на рис. 8. Так как все расположения с нечётным числом инверсий можно перевести в расположение на рис. 8, а это последнее — в расположение на рис. 11 или 12, то всякое расположение с нечётным числом инверсий можно перевести в расположение двух последних фигур. Далее, из только что установленного принципа обратимости одного расположения в другое следует, что любое расположение с чётным числом инверсий может быть приведено в любое другое с чётным же числом инверсий и что сказанное относится и к расположениям с нечётным числом инверсий. Мы приходим, таким образом, к следующему:

Все расположения со свободным местом в клетке 16, имеющие чётное число инверсий, образуют группу такого рода, что любые два расположения этой группы могут быть переведены одно в другое; в частности, они могут быть приведены в нормальное расположение. Точно так же все расположения со свободным местом в клетке 16, имеющие нечётное число инверсий, образуют вторую группу переводимых друг в друга расположений; в частности, все расположения этой группы могут быть переведены в расположение на рис. 11 или 12. Расположение одной группы не может быть переведено в расположение другой; в частности, расположения второй группы не могут быть приведены к нормальному виду.

Глава III
СОЛИТЕР

§ 1. ПРАВИЛА ИГРЫ. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рис. 13 представляет существенную часть этой игры: игральную доску с 33 отверстиями (гнёздами), в которые можно вставлять колышки (или шарики).

О происхождении этой игры нет достоверных сведений. Во всяком случае, она почтенного возраста, свидетельством чего служит упоминание её в летописи, найденной в 1710 году в Лейпциге. Экземпляр

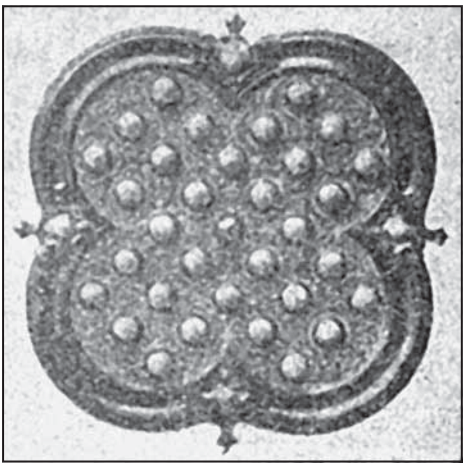


Рис. 13

игры был найден в одной из коллекций, причём на крышке был изображён её предполагаемый изобретатель — отшельник, погруженный в эту игру.

В Германии из разнообразных форм этой игры получила преобладание игра с 33 отверстиями (гнёздами), из которых одно, по крайней мере в начале игры, остаётся свободным. Расположение отверстий указано на рис. 14.

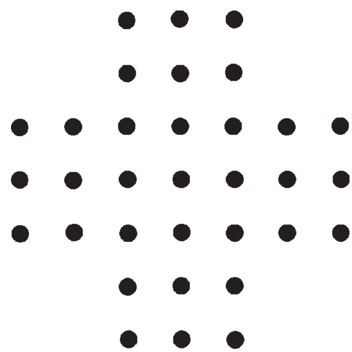


Рис. 14

Мы будем отличать отверстия друг от друга обозначениями, подобными обозначениям клеток шахматной доски; соответственно этому будем изображать каждое отверстие квадратной клеткой, часто и называя его просто клеткой. Таким образом, каждому отверстию (рис. 15) соответствуют две цифры: первая показывает, в каком вертикальном ряду или столбце оно находится (столбцы считаются слева направо); вторая показывает, в каком горизонтальном ряду или строке находится отверстие, причём строки считаются снизу вверх.

Правило игры. *Если из трёх отверстий, находящихся в одном горизонтальном или вертикальном ряду, два соседних снабжены колышками, а третье, непо-*

		37	47	57		
		36	46	56		
15	25	35	45	55	65	75
14	24	34	44	54	64	74
13	23	33	43	53	63	73
		32	42	52		
		31	41	51		

Рис. 15

средственно примыкающее к одному из них, пустое, то колышек из отверстия, не прилегающего к пустому, переносится в пустое отверстие, а колышек примыкающего (среднего) вынимается и откладывается в сторону.

Процесс вынимания и перенесения колышка из одной клетки в другую будем для краткости называть ходом. Если отверстие 44 пустое, то возможен один из следующих ходов: $\frac{24}{44}$, $\frac{46}{44}$, $\frac{64}{44}$, $\frac{42}{44}$. Здесь каждый ход изображён в виде дроби: числитель показывает, из какого отверстия переносится колышек, знаменатель — куда этот колышек вставляется. В дальнейшем мы будем все ходы обозначать такими дробями. У числителя и знаменателя подобной дроби должны быть одинаковы или первые, или вторые цифры; неодинаковые же разнятся на 2; цифра, заключённая между этими двумя неодинаковыми цифрами, и цифра, повторяющаяся в числителе и знаменателе, вместе изображают отверстие, из которого вынут колышек и отложен в сторону; в приведённых выше примерах такими отверстиями являются: 34, 45, 54, 43.

Цель игры состоит в том, чтобы указанными выше ходами последовательно вынуть из 32 отверстий все колышки за исключением одного, причём вначале свободным отверстием может быть среднее (44) или какое-либо другое; отверстие же, в котором должен оказаться последний колышек, задаётся заранее.

Само собою разумеется, что вначале могут быть заполнены и не все 32 отверстия, а только часть игральной доски; например, колышки могут образовать какую-либо фигуру, квадрат, крест и т. п., причём в остальном задача остаётся прежней, т. е. требуется удалить все имеющиеся на доске колышки за исключением одного.

§ 2. ЗАДАЧА С НЕЗАПОЛНЕННОЙ ДОСКОЙ

Рассмотрим несколько задач, в которых только часть игральной доски занята и требуется удалить все находящиеся на доске колышки за исключением одного. Для каждого случая мы даём фигуры, образуемые колышками, придерживаясь введённого прежде обозначения клеток, занятых колышками; остальная часть доски может быть читателем восстановлена по рис. 15.

I. Крест из девяти колышков

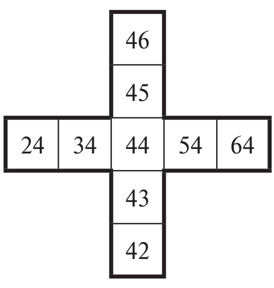


Рис. 16

Решение:

$\frac{43}{41}, \frac{45}{43}, \frac{24}{44}, \frac{44}{42},$

$\frac{64}{44}, \frac{41}{43}, \frac{43}{45}, \frac{46}{44}.$

II. Треугольник

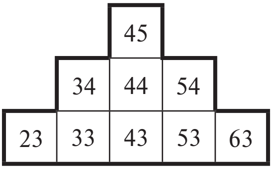


Рис. 17

Решение:

$\frac{53}{55}, \frac{55}{35}, \frac{33}{53}, \frac{63}{43},$

$\frac{44}{42}, \frac{35}{33}, \frac{23}{43}, \frac{42}{44}.$

III. Крест

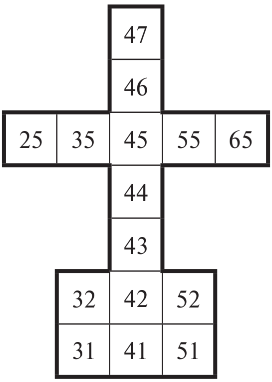


Рис. 18

Решение:

$\frac{31}{33}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{41}{42},$

$\frac{33}{53}, \frac{63}{43}.$

Теперь получается фигура задачи I, лишь передвинутая на доске параллельно самой себе.

IV. Пирамида

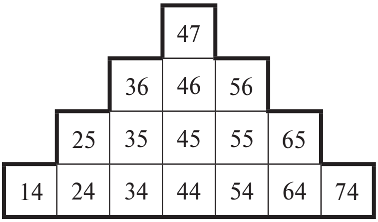


Рис. 19

Решение:

$\frac{55}{53}, \frac{74}{54}, \frac{53}{55}, \frac{55}{57},$

$\frac{57}{37}, \frac{35}{33}, \frac{14}{34}, \frac{33}{35},$

$\frac{36}{56}, \frac{44}{46}, \frac{56}{36}, \frac{25}{45},$

$\frac{37}{35}, \frac{35}{55}, \frac{65}{45}.$

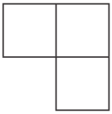


Рис. 20

Разумеется, не все подобные задачи разрешимы; ограничимся простейшим примером такого рода, когда вначале заполнены колышками лишь три клетки, в положении, указанном на рис. 20. При первой же попытке решить эту задачу читатель убедится, что, где бы ни была расположена фигура, ему удастся удалить только один колышек и к концу игры останутся ещё два.

§ 3. ИГРА С ЗАПОЛНЕННОЙ ДОСКОЙ

Но обыкновенно, как было сказано в § 1, все 32 колышка находятся на доске, причём любое произвольно выбранное отверстие остаётся свободным — будем называть его начальным. Требуется последовательно удалить все колышки, за исключением одного; отверстие, в котором должен оказаться этот последний, указано заранее. Отверстие это будем называть конечным. Чтобы понять решение этой задачи, называемой основной, рассмотрим ряд её частных случаев, отличающихся друг от друга начальными и конечными отверстиями. Вероятно, они покажутся читателю произвольно выхваченными из большого числа возможных случаев; но последующее (§ 4) покажет, что в нашем случае нет произвола; игры подобраны так, что ими исчерпываются все разрешимые случаи основной задачи.

I. Начальное отверстие — 44, конечное — 44.

$$\frac{64}{44}\ \frac{56}{54}\ \frac{44}{64}\ \frac{52}{54}\ \frac{73}{53}\ \frac{75}{73}\ \frac{43}{63}\ \frac{73}{53}\ \frac{54}{52}\ \frac{35}{55}\ \frac{65}{45}$$

$$\frac{15}{35}\ \frac{45}{25}\ \frac{37}{35}\ \frac{57}{37}\ \frac{34}{36}\ \frac{37}{35}\ \frac{25}{45}\ \frac{46}{44}\ \frac{23}{43}\ \frac{31}{33}\ \frac{43}{23}$$

$$\frac{51}{31}\ \frac{52}{32}\ \frac{31}{33}\ \frac{14}{34}\ \frac{34}{32}\ \frac{13}{33}\ \frac{32}{34}\ \frac{34}{54}\ \frac{64}{44}.$$

II. Начальное отверстие — 44, конечное — 74.

Ходы те же, что и в задаче I, но последний ход заменяется ходом $\frac{54}{74}$.

III. Начальное отверстие — 74, конечное — 74.

Первый ход задачи II заменяем ходом $\frac{54}{74}$.

IV. Начальное отверстие — 74; конечное — 47.

$$\frac{54}{74}\quad\frac{52}{54}\quad\frac{44}{64}\quad\frac{73}{53}\quad\frac{74}{54}\quad\frac{54}{52}\quad\frac{51}{53}\quad\frac{31}{51}\quad\frac{32}{52}\quad\frac{43}{63}\quad\frac{51}{53}$$

$$\frac{63}{43}\quad\frac{34}{32}\quad\frac{13}{33}\quad\frac{15}{13}\quad\frac{43}{23}\quad\frac{13}{33}\quad\frac{32}{34}\quad\frac{56}{54}\quad\frac{75}{55}\quad\frac{54}{56}\quad\frac{57}{55}$$

$$\frac{37}{57}\quad\frac{36}{56}\quad\frac{45}{65}\quad\frac{57}{55}\quad\frac{65}{45}\quad\frac{24}{44}\quad\frac{44}{46}\quad\frac{25}{45}\quad\frac{45}{47}.$$

V. Начальное отверстие — 74, конечное — 14.
Первые 24 хода — как в задаче IV, а затем:

$$\frac{34}{36}\quad\frac{55}{35}\quad\frac{57}{55}\quad\frac{25}{45}\quad\frac{55}{35}\quad\frac{36}{34}\quad\frac{34}{14},$$

VI. Начальное отверстие — 54, конечное — 54.

$$\frac{56}{54}\quad\frac{75}{55}\quad\frac{54}{56}\quad\frac{74}{54}\quad\frac{53}{55}\quad\frac{73}{53}\quad\frac{43}{63}\quad\frac{51}{53}\quad\frac{63}{43}\quad\frac{33}{53}\quad\frac{41}{43}$$

$$\frac{53}{33}\quad\frac{23}{43}\quad\frac{31}{33}\quad\frac{43}{23}\quad\frac{13}{33}\quad\frac{15}{13}\quad\frac{25}{23}\quad\frac{34}{32}\quad\frac{13}{33}\quad\frac{32}{34}\quad\frac{45}{25}$$

$$\frac{37}{35}\quad\frac{57}{37}\quad\frac{34}{36}\quad\frac{37}{35}\quad\frac{25}{45}\quad\frac{56}{36}\quad\frac{44}{46}\quad\frac{36}{56}\quad\frac{56}{54}.$$

VII. Начальное отверстие — 54, конечное — 57.

Последний ход задачи VI заменяется ходом $\frac{55}{57}$.

VIII. Начальное отверстие — 57, конечное — 57.

Первый ход задачи VII заменяется ходом $\frac{55}{57}$.

IX. Начальное отверстие — 54, конечное — 24.

Первые 27 ходов задачи VI, затем: $\frac{56}{54}\ \frac{54}{34}\ \frac{46}{44}\ \frac{44}{24}$.

X. Начальное отверстие — 57, конечное — 24.

Первый ход задачи IX заменяется ходом $\frac{55}{57}$.

XI. Начальное отверстие — 57, конечное — 51.

Первые 6 ходов, как в задаче X; следующие 24 хода получаются из последних 24 ходов задачи VI, зеркальным отражением относительно горизонтальной средней линии.

XII. Начальное отверстие — 24, конечное — 24.

$$\frac{44}{24}\ \frac{36}{34}\ \frac{15}{35}\ \frac{34}{36}\ \frac{37}{35}\ \frac{57}{37}\ \frac{56}{36}\ \frac{45}{25}\ \frac{37}{35}\ \frac{25}{45}\ \frac{32}{34}\ \frac{13}{33}\ \frac{34}{32}\ \frac{31}{33}\ \frac{51}{31}\ \frac{52}{32}$$

$$\frac{43}{23}\ \frac{31}{33}\ \frac{23}{43}\ \frac{54}{56}\ \frac{75}{55}\ \frac{73}{75}\ \frac{45}{65}\ \frac{75}{55}\ \frac{56}{54}\ \frac{64}{44}\ \frac{44}{42}\ \frac{63}{43}\ \frac{42}{44}\ \frac{14}{34}\ \frac{44}{24}.$$

XIII. Начальное отверстие — 55, конечное — 55.

$$\frac{53}{55}\ \frac{73}{53}\ \frac{75}{73}\ \frac{65}{63}\ \frac{52}{54}\ \frac{73}{53}\ \frac{54}{52}\ \frac{51}{53}\ \frac{31}{51}\ \frac{32}{52}\ \frac{43}{63}\ \frac{51}{53}\ \frac{63}{43}\ \frac{45}{65}\ \frac{57}{55}\ \frac{65}{45}$$

$$\frac{35}{55}\ \frac{47}{45}\ \frac{55}{35}\ \frac{25}{45}\ \frac{37}{35}\ \frac{45}{25}\ \frac{15}{35}\ \frac{13}{15}\ \frac{23}{25}\ \frac{34}{36}\ \frac{15}{35}\ \frac{36}{34}\ \frac{33}{53}\ \frac{34}{54}\ \frac{53}{55}.$$

XIV. Начальное отверстие — 55, конечное — 52.

Последний ход задачи XIII заменяется ходом $\frac{54}{52}$.

XV. Начальное отверстие — 52, конечное — 52.

Первый ход задачи XIV заменяется ходом $\frac{54}{52}$.

XVI. Начальное отверстие — 52, конечное — 25.

Первые 28 ходов такие же, как в задаче XV, остальные: $\frac{43}{23}\ \frac{44}{24}\ \frac{23}{25}$.

Само собой, что для каждой разобранной задачи возможны и другие решения. Приведённые нами — без особых преимуществ. Предлагая их, мы имели в виду только интересы удобства; несомненно, что среди других решений есть и более изящные.

Более ясными и наглядными являются следующие решения задачи I:

$$\frac{42}{44}\ \frac{63}{43}\ \frac{51}{53}\ \frac{43}{63}\ \frac{23}{43}\ \frac{44}{42}\ \frac{31}{33}\ \frac{41}{43}\ \frac{43}{23}\ \Bigg\|\ \frac{13}{33}\ \frac{34}{32}\ \frac{15}{13}$$

$$\frac{25}{23}\ \frac{13}{33}\ \frac{32}{34}\ \Bigg\|\ \frac{73}{53}\ \frac{54}{52}\ \frac{75}{73}\ \frac{65}{63}\ \frac{73}{53}\ \frac{52}{54}\ \Bigg\|\ \frac{45}{65}\ \frac{57}{56}$$

$$\frac{37}{57}\ \frac{54}{56}\ \frac{57}{55}\ \frac{65}{45}\ \frac{46}{44}\ \frac{44}{24}\ \frac{36}{34}\ \frac{24}{44}$$

(двумя вертикальными чертами отделены группы ходов, на которые естественно распадаются решения).

§ 4. ТЕОРИЯ ИГРЫ

Мы дадим теорию игры без строгих математических доказательств, имея в виду лишь главнейшие выводы. Назовём конгруэнтными такие две клетки, от одной из которых можно перейти к другой путём одного или нескольких «перепрыгиваний» через две промежуточные в горизонтальном и вертикальном направлениях. Например, клетки 15 и 45 (рис. 15) — конгруэнтны, так как от 15 легко перейти к 45, пропустив две находящиеся между ними клетки (25 и 35); клетки 45 и 42 конгруэнтны по той же причине; клетки же 42 и 15 конгруэнтны потому, что от первой можно перейти ко второй двукратным перепрыгиванием через две клетки (клетка 45 является в данном случае как бы мостом). Далее будем считать, что каждая клетка конгруэнтна сама себе. *Математически можно доказать, что для игральной доски с 33 клетками решение разобранной в предыдущем параграфе основной задачи возможно лишь тогда, когда начальное и конечное отверстие заданы так, что они конгруэнтны в указанном выше смысле.*

Только что указанное условие для возможности решения основной задачи, а именно конгруэнтность начального и конечного отверстий, есть не только необходимое условие, но и достаточное (т. е., если это условие выполняется, основная задача всегда разрешима).

Шестнадцать примеров, приведённые в § 3, заключают решения всех возможных разрешимых случаев основной задачи. Это видно из следующего. Прежде всего заметим, что рис. 14 при вращении на один или несколько прямых углов сам с собой совпадает. Далее, рис. 14 симметричен относительно средней горизонтальной и средней вертикальной линий, так что половины, на которые эти линии делят фигуру, при наложении совпадают. Поэтому клетки, совпадающие при наложении и вращении, эквивалентны для нашей задачи, в результате получаются следующие группы эквивалентных между собою клеток:

1) 13; 15; 37; 57; 75; 73; 51; 31.
2) 14; 47; 74; 41.
3) 25; 36; 56; 65; 63; 52; 32; 23.
4) 24; 46; 64; 42.
5) 35; 55; 53; 33.
6) 34; 45; 54; 43.
7) 44.

Задача II § 3 решена при начальном отверстии 44 и конечном — 74; поэтому легко получить решение задачи с начальным отверстием 44 и конечным 14, так как замена первой задачи второй равносильна отражению относительно средней вертикальной линии (или наложению левой половины рис. 14 на правую). Решение задачи с первоначальным отверстием 45 и конечным 75 прямо получается из задачи VII § 3 (начальное отверстие 54, конечное — 57), так как замена второй задачи первой соответствует вращению рис. 14 на четверть окружности против часовой стрелки и последующему отражению относительно средней вертикальной линии.

Имея решение задачи с начальным отверстием *a* и конечным *b*, сразу же можно получить решение задачи с начальным отверстием *b* и конечным — *a*. Именно, если схему решения первой задачи перевернём, т. е. напишем дроби в обратном порядке (с конца к началу), мы сразу получим решение второй задачи. Отказываясь от общего доказательства, можем убедиться в справедливости сказанного на примере доски, более простой, чем наша обычная (рис. 21). Пусть A — начальное отверстие, а E — конечное; тогда решение основной задачи будет: $\frac{E}{A}, \frac{D}{B}, \frac{A}{E}$. Если напишем эти дроби в обратном порядке, получим: $\frac{A}{E}, \frac{D}{B}, \frac{E}{A}$ — решение следующего случая основной задачи: E — начальное отверстие и A — конечное. Две задачи, у которых начальное и конечное отверстия заменены одно другим, называются «сопряжёнными».

Среди 16 задач § 3 имеются 7 таких, у которых начальное отверстие является одновременно и конечным; причём каждое из этих 7 отверстий принадлежит к одной, и только к одной, из 7 групп эквивалентных клеток (с. 36), являясь как бы представителем определённой группы, — как видно из следующего сопоставления:

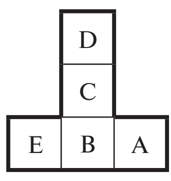


Рис. 21

№ группы эквивалентных клеток	Выбранная из группы клетка	№ соответствующей задачи
1	57	VIII
2	74	III
3	52	XV
4	24	XII
5	55	XIII
6	54	VI
7	44	I

Таким образом, исходя из решений § 3 можно сказать, что основная задача, при *одинаковых* начальных и конечных отверстиях, для всех 33 клеток может считаться исчерпанной. Остаются лишь те случаи, когда начальные и конечные отверстия *различны*, при этом, повторяем, решения для таких задач существуют лишь тогда, когда указанные отверстия конгруэнтны в объяснённом выше смысле.

Теперь мы должны рассмотреть всевозможные комбинации из двух различных, но конгруэнтных друг другу клеток. Начнём со средней клетки доски, т. е. с клетки 44, которая в нашем подразделении на группы образует особую группу, именно седьмую (с. 36). Легко усмотреть, что все клетки, конгруэнтные клетке 44, образуют группу 2 (с. 36) и что клетки этой группы также между собой конгруэнтны и не имеют себе конгруэнтных в других пяти группах. Группы 2 и 7 образуют совокупность такого рода, что если принять за начальное отверстие одну из клеток этой совокупности, то необходимо и за конечное отверстие взять клетку той же совокупности, иначе основная задача не будет разрешима. Очевидно, внутри указанной совокупности возможны следующие отличные друг от друга случаи (при неодинаковых начальных и конечных отверстиях):

Начальное отверстие	**Конечное отверстие**
44	74
74	47
74	12

Решения этих задач даны в § 3 под обозначениями II, IV и V. Если к ним присоединить ещё задачи I и III с одинаковыми начальными и конечными отверстиями (44 и 74 — клетки совокупности), то мы исчерпаем все различные случаи, возможные внутри совокупности, образуемой из групп 2 и 7. Все решения других случаев внутри этой совокупности легко получаются из этих пяти решений путём применения симметрии (вращения и наложения) и сопряжённости (начальное отверстие заменяется конечным, а конечное — начальным).

Таким же образом и группы 1, 4 и 6 образуют совокупность, причём не все её клетки друг другу конгруэнтны, но всякая клетка, конгруэнтная какой-либо её клетке, обязательно входит в состав этой совокупности. Различные случаи, которые могут представиться внутри этой совокупности, исчерпываются задачами VI—XII § 3. Наконец, группы 5 и 3 образуют третью совокупность, которая исчерпывается задачами XIII—XVII § 3.

Вопрос 7. Найти решение следующего случая: начальное отверстие — 14, конечное — 41.

Вопрос 8. Найти решение следующего случая: начальное отверстие — 52, конечное — 55.

Вопрос 9. Найти решение следующего случая: начальное отверстие — 46, конечное — 13.

Глава IV
УДВОЕНИЯ

§ 1. РЯД СТЕПЕНЕЙ ЧИСЛА 2

Древняя арабская легенда рассказывает об изобретателе шахматной игры следующее. Изобрёл он эту прекрасную игру для развлечения индийского царя, который пришёл от неё в такой восторг, что пожелал щедро вознаградить изобретателя. На вопрос царя изобретатель ответил: «Я желал бы, чтобы на первую клетку шахматной доски положено было одно пшеничное зерно, на вторую — два и затем всё время удваивали бы число зёрен последующих клеток, пока не будет достигнута последняя клетка; всё количество зёрен, полученных таким образом, прошу отдать мне». Но выяснилось, что для удовлетворения этой просьбы, исполнить которую царь охотно было согласился, не хватит хлеба не только в амбарах царя, но и во всей стране. Когда царю сообщили об этом, он сказал изобретателю: «Остроумие твоей просьбы ещё более достойно удивления, чем талант, который ты выказал в изобретении игры».

Действительно, в шахматной доске 64 клетки (8×8); понадобилось бы чудовищное 20-значное число, чтобы выразить общее количество зёрен на всех 64 клетках. Число это:

$$18446744073709551615.$$

Его было бы достаточно, чтобы покрыть сплошь зёрнами всю земную поверхность слоем в сантиметр. Числа при удвоении возрастают от клетки к клетке очень быстро и к концу доски принимают неимоверно большие значения. Этим быстрым возрастанием чисел при непрерывно продолжающемся их удвоении остроумно воспользовалась некогда мюнхенская газета «Немецкая трибуна». Не зная, как бороться с цензурными притеснениями, газета продолжала печатать вычеркнутые цензором статьи. Понятно, она была оштрафована, и так как продолжала всё же печатать неразрешённые статьи, то денежный штраф с каждым днём удваивался. Наконец, «Трибуна» напечатала статью, в которой объявила, что министерство изыскало средство быстро погасить весь государственный долг: для этого достаточно лишь всё время продолжать удваивать штрафы. Шутка эта вызвала всеобщий смех, и правительству пришлось отказаться от взыскания штрафа, достигшего к тому времени огромной суммы.

Но вернёмся к задаче о пшеничных зёрнах шахматной доски. Напишем для каждой клетки (начиная с первой) число соответствующих ей зёрен и получим ряд чисел, начинающийся так: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768 (мы привели числа лишь для первой четверти шахматной доски). Числа этого ряда, из которых каждое получается из предыдущего умножением его на 2 (например, $8 \times 2 = 16$), называют степенями числа 2; число 2 есть первая степень 2, число 4 — вторая, число 8 — третья степень и т. д. Записывают это так: $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$ и т. д. По аналогии, первое число вышеприведённого ряда, именно 1, назовём нулевой степенью 2 и напишем $2^0 = 1$.

Впереди ряда степеней числа 2, т. е. до числа 1, с которого начинается этот ряд, напишем ещё одну единицу; теперь ряд таков: 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32... В этом новом ряду *каждое число равно сумме всех предшествующих чисел;* например 8 = 1 + 1 + 2 + 4. Если это имеет место для начала ряда, например до 8, то это будет справедливо и для всех следующих чисел, в чём читатель может убедиться при таком способе записи:

$$\underbrace{1,\ 1,\ 2,\ 4,}_{8}\ 8,\ 16...$$

Нужно лишь принять во внимание, что за числом 8, по закону образования нашего ряда, идёт 8 × 2 = 16, за 16 идёт 16 × 2 = 32 и т. д. Если взятую нами на помощь единицу опустим, то сумма чисел, предшествующих 8, будет равна не этому числу, а 7, т. е. числу 8, уменьшенному на единицу. Отсюда приходим к следующему выводу:

В ряду степеней числа 2 каждое число на единицу больше суммы всех предшествующих чисел.

Поэтому на 64-ю клетку шахматной доски пшеничных зёрен придётся одним больше, чем на все остальные 63 клетки, вместе взятые. Отсюда если бы мы пожелали вычислить общее число зёрен, приходящихся на все 64 клетки, то вместо того, чтобы складывать все 64 числа нашего ряда, могли бы вычислить число зёрен последней 64-й клетки. Уменьшенное на 1, число это сразу дало бы нам сумму зёрен остальных 63 клеток.

§ 2. ОСОБОЕ ПРИМЕНЕНИЕ РЯДА СТЕПЕНЕЙ ЧИСЛА 2

Набор разновесок равноплечих весов обыкновенно содержит (на Западе) следующие гирьки:

1 г, 2 г, 2 г, 5 г, 10 г, 20 г, 20 г, 50 г;

по тому же принципу к ним часто присоединяются гири меньшего или большего веса. Имея набор разновесок, содержащий указанные восемь гирь, можно взвешивать все грузы от 1 до 110 граммов.

Решим теперь такую задачу:

Как взвесить те же грузы при помощи возможно меньшего числа гирь и какими гирями придётся для этого воспользоваться?

Мы предполагаем здесь, что одна чашка весов предназначена исключительно для взвешиваемого груза, так что на неё гири не кладутся. Набор разновесок, по условию, должен взвешивать тела в 1 грамм, а следовательно, в нём должна быть и гиря в 1 г[1]. Для взвешивания тела в 2 г необходимо иметь или ещё одну гирю в 1 г, или отдельно гирю в 2 г. Второе для нас выгоднее, так как, имея одну гирю в 1 г и другую в 2 г, можно взвесить не только груз в 1 и 2 г, но и груз в 3 г = 1 г + 2 г. Поэтому мы выбираем для искомого набора прежде всего две гири: в 1 г и в 2 г. Чтобы иметь возможность взвесить груз в 4 г, необходимо ввести или ещё 1 г, или вторую гирю в 2 или 3 г, или, наконец, гирю в 4 г. Читатель, мы полагаем, ни на одну минуту не усомнится в выборе третьей гири. В самом деле, с гирями в 1 г, 2 г и 2 г можно взвешивать грузы от 1 до 5 г; с гирями же в 1 г, 2 г и 4 г — груз от 1 до 7 г включительно (5 = 4 + 1; 6 = 4 + 2; 7 = 4 + 2 + 1). Продолжая рассуждать таким образом, мы придём к выводу, что в качестве четвёртой гири выгоднее всего взять гирю в 8 г, так как четырьмя гирями в 1 г, 2 г, 4 г и 8 г можно уже взвешивать груз от 1 до 15 г, а именно:

---

[1] Если гири можно класть на обе чаши весов, то можно взвесить груз в 1 г, не имея граммовой гири, именно, положив, например, на одну чашку 3 г, а на другую взвешиваемый груз вместе с 2 г. При таком взвешивании можно обойтись ещё меньшим числом гирь, чем указано в решении задачи, но такого рода взвешивание мы здесь рассматривать не будем.

$$9 = 8 + 1$$
$$10 = 8 + 2$$
$$11 = 8 + 2 + 1$$
$$12 = 8 + 4$$
$$13 = 8 + 4 + 1$$
$$14 = 8 + 4 + 2$$
$$15 = 8 + 4 + 2 + 1$$

Затем пятой гирей у нас будет гиря в 16 г. Полученный таким образом ряд чисел 1, 2, 4, 8, 16 есть не что иное, как хорошо знакомый нам из предыдущего параграфа ряд степеней числа 2. В самом деле, если продолжить наши рассуждения, то придём к числам того же ряда, именно к 32, 64, 128 и т. д. Последнее обстоятельство легко себе уяснить: посредством гирь в 1 г, 2 г, 4 г и 8 г можно взвесить, как было показано, груз от 1 до 15 г включительно. Представим себе, что мы производим все эти 15 взвешиваний одно за другим; если при каждом взвешивании мы к гирям, лежащим на чаше весов, добавим гирю в 16 г, то получим, вместо взвешиваний от 1 до 15 г, взвешивания от 17 до 31 г. Для взвешивания 31 г понадобятся все пять гирь (1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г), но взвесить 32 г этими гирями, очевидно, не удастся. Из предыдущего параграфа мы знаем свойство, каким обладает каждое число нашего ряда: сумма нескольких первых чисел его на 1 меньше числа следующего за последним из них. Поэтому понятно, что пятью гирями в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г мы можем самое большее взвесить груз в 31 г, так как их сумма должна быть на 1 меньше числа, следующего за 16 в ряду степеней числа 2. Присоединяя к нашим пяти гирям гирю в 32 г, мы, очевидно, сможем взвесить любое число граммов до 63 включительно. Наконец, присоединяя ещё гирю в 64 г, мы получим семь гирь в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г, с которыми можно взвесить любой груз, не превышающий 127 г.

Таким образом, получается, что указанными семью гирями можно взвесить больший груз, чем когда мы пользуемся упомянутым ранее набором из восьми гирь, которыми можно взвесить лишь грузы до 110 г.

Во избежание недоразумений следует заметить, что такие гири, численная величина которых совпадает с числами ряда степеней двух, всё-таки неудобны, по причине, на которой мы останавливаться не будем[1].

Из решения заданной в этом параграфе задачи легко извлечь чрезвычайно важное предложение, которое нам пригодится в дальнейшем и которому мы дадим следующую формулировку:

Каждое число может быть представлено в виде суммы степеней числа 2 и притом так, что каждая степень входит в эту сумму не более одного раза[2].

Вопрос 10. Не будет ли набор разновесок в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 33 г, 65 г, которым можно взвесить также 128 г и 129 г, более выгоден, чем набор в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г и 64 г?

Вопрос 11. Какими гирями (в минимальном числе) можно заменить набор разновесок в 1 г, 2 г, 2 г, 5 г, 10 г, 20 г, 20 г, 50 г, 100 г, 200 г, 200 г?

§ 3. ОТГАДЫВАНИЕ ЗАДУМАННЫХ ЧИСЕЛ И ПРЕДМЕТОВ

Данное в конце предыдущего параграфа предложение, что всякое число можно представить в виде суммы различных степеней числа 2, имеет применение в

---

[1] Имеется в виду простое неудобство счёта: числа, кратные 5 и 10 (как в наборе из восьми гирь), проще считать, чем степени двух. (*Примеч. ред.*)

[2] Это утверждение, по своей сути, является утверждением «существует двоичная система счисления» — система, на которой работают обыкновенные компьютеры и о которой рассказывают в современных школах на уроках информатики. (*Примеч. ред.*)

многочисленных играх и задачах, которые основаны на так называемом двоичном счислении. Некоторыми из них мы и займёмся в этом и следующем параграфах[1]. Ради краткости числа ряда 1, 2, 4, 8... будем впредь называть основными числами.

I. Отгадывание задуманного числа

Несколько лиц в отсутствие А задумывают число; А берётся отгадать его при условии, что лицо Б, находящееся с остальными в комнате, поможет ему, расположив в некотором порядке взятые для игры монеты.

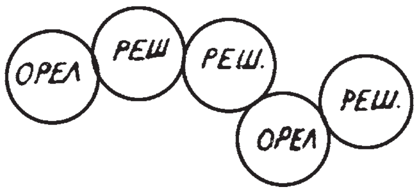


Рис. 22

А и Б предварительно сговариваются, что орёл монеты означает ноль, а решка — различные степени числа 2, именно, 1 — если решётка стоит на первом месте слева, 2 — если на втором, 4 — на третьем, 8 — на четвёртом и т. д. Б представляет задуманное число как сумму основных чисел 1, 2, 4, 8... Если, например, лицо Б образовало из монет фигуру, указанную на рис. 22, то это означает следующее. Первая монета слева показывает, что первое основное число (т. е. 1) должно быть опущено, так как монета лежит орлом вверх; напротив, второе и третье основные числа (т. е.

[1] Впрочем, некоторые игры V и VI гл. также основаны на двоичном счислении.

2 и 4) должны быть приняты во внимание, так как вторая и третья монета лежат вверх решкой; четвёртое основное число (8) надо пропустить; пятое (16) следует принять во внимание. *Задуманное* число равно 2 + 4 + 16 = 22, которое А и провозглашает изумлённым присутствующим.

II. Отгадывание задуманной картинки

На большом картоне нарисовано 32 различных изображения, в 4 ряда по 8 в каждом. Лицо А предлагает лицу X задумать одну из картинок и берётся её отгадать.

Кроме большого картона с 32 рисунками, называемого основным картоном, лицо А имеет ещё 5 небольших карточек; на каждой из них воспроизведены 16 рисунков основного картона (2 ряда по 8 в каждом). А показывает лицу X один за другим эти небольшие карточки, каждый раз спрашивая, нет ли на них задуманного рисунка. На основании получаемых ответов А отгадывает задуманный рисунок.

Очевидно, что сущность игры не изменится, если заменить 32 рисунка 32 различными числами, от 1 до 32 включительно. Первый рисунок заменяется числом 1, второй — 2, последний — числом 32; причём 8 рисунков первой строки сверху обозначаются числами от 1 до 8 слева направо, 8 рисунков второй строки сверху — числами от 9 до 16 тоже слева направо и т. д. Каждое из чисел 1—31 может быть представлено в виде суммы основных чисел 1, 2, 4, 8, 16 (последнее число 32, которое также есть основное число, мы пока не будем принимать во внимание). Далее, будем предполагать, что каждое из чисел 1, 2, 3... 31 представлено в виде суммы основных чисел, например, число 23 в форме 1 + 2 + 4 + 16. Получим 31 сумму. Можно ли узнать, сколько среди них имеется сумм, содержащих основное число 1? Очевидно, что 1 входит в качестве слагаемого во все суммы, изображающие нечётные числа, т. е. 1, 3, 5, 7 ... 31. Таких чисел всего 16, поэтому единица входит в 16 сумм.

Эти 16 нечётных чисел, или соответствующие им рисунки, нанесены на одной из пяти карточек. Но не только основное число 1 входит в нашу 31 сумму 16 раз; нетрудно убедиться, что каждое из остальных основных чисел — 2, 4, 8 или 16 — также входит в них 16 раз; например, основное число 16 входит во все суммы чисел от 16 до 31. Поэтому на второй из пяти карточек наносятся числа, содержащие в качестве слагаемого основное число 2, или соответствующие им рисунки. Таким же образом для основных чисел 4, 8, 16 приготавливаются остальные три карточки. Число 32, или соответствующий ему рисунок, не входит ни в одну из этих карточек. Пять карточек, с нанесёнными на них в возрастающем порядке числами, имеют

I	II	III	IV	V
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Рис. 23

вид, изображённый на рис. 23. Заменив в них числа соответствующими им рисунками, расположенными в 2 горизонтальных ряда по 8 в каждом, мы получим 5 карточек, о которых говорилось в начале этого параграфа.

Если лицо X укажет, что задуманный им рисунок находится, например, на карточках II, III и V и отсутствует на I и IV, то лицо A будет рассуждать следующим образом. Числа каждой из карточек, как сказано, содержат в качестве слагаемого соответственно числа 1, 2, 4, 8, 16 (на нашем рис. 23 на каждой карточке верхнее число и есть соответствующее ему основное число). Поэтому задуманному рисунку соответствует число, содержащее в качестве слагаемых второе, третье и пятое основные числа, т. е. 2, 4 и 16, но не содержащие первого и третьего из них (1 и 8).

Задуманный рисунок занимает на основном картоне 2 + 4 + 16 = 22-е место.

Если же задуманный рисунок не находится ни на одной из небольших карточек, то это означает, что он занимает последнее, т. е. 32-е место на основном картоне.

§ 4. БАШНЯ ЛЮКА

Игра, придуманная французским математиком Люка, состоит из доски с тремя вертикально вставленными в неё палочками; на одной из них нанизаны пирамидально одна на другую несколько (у нас восемь) круглых пластинок различной величины.

Игра заключается в том, что требуется перенести все пластинки на одну из свободных палочек, причём одним ходом (приёмом) можно переносить лишь одну пластинку, имея право накладывать её только на большую, но никак не меньшую, ранее перенесённую.

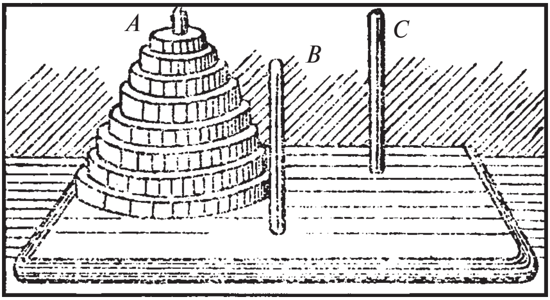


Рис. 24

Естественно, цели нужно достигнуть возможно меньшим числом ходов, избегая ненужных перенесений.

Пусть *C* — та палочка, на которую должны быть перенесены пластинки, а *A* — палочка, на которой в начале игры они находятся, как показано на рис. 24. Начнём игру лишь с двух пластинок, удалив все остальные. Тогда верхнюю меньшую пластинку придётся перенести на палочку *B*, затем нижнюю большую — на палочку *C* и, наконец, меньшую с палочки *B* на палочку *C*.

Имея лишь две пластинки, мы, таким образом, можем достигнуть цели всего только двумя перемещениями. Если же взять три пластинки — мы их назовём числами 1, 2, 3 (считая сверху), то прежде, чем трогать самую большую пластинку 3, необходимо перенести пластинки 1 и 2 на одну из палочек *B* и *C*, выбрав её так, чтобы потом пластинку 3 можно было перенести на *C*. Поэтому *C* должна остаться свободной, т. е. пластинки 1 и 2 придётся сперва перенести на *B*. Это достигается тремя перемещениями, а именно пластинка 1 переносится с *A* на *C*, пластинка 2 — с *A* на *B* и, наконец, пластинка 1 — с *C* на *B*. По существу, здесь мы решили задачу с двумя пластинками, которые требовалось только перенести на *B*, а не на *C*. Затем переносим пластинку 3 с *A* на *C*; теперь уже остаётся перенести пластинку 1 и 2 с *B* на *C*, что опять достигается тремя перенесениями (пластинка 1 с *B* на *A*, пластинка 2 — с *B* на *C*, пластинка 1 — с *A* на *C*). При трёх пластинках необходимо, следовательно, семь перенесений. Легко предвидеть число перемещений с большим числом пластинок. Чтобы перенести четыре пластинки с *A* на *C*, придётся прежде всего пластинки 1, 2 и 3 перенести с *A* на *B* (7 перенесений), затем пластинку 4 — с *A* на *C* (1 перенесение) и, наконец, пластинки 1, 2 и 3 — с *B* на *C* (7 перенесений), следовательно, всего понадобится 15 перенесений. Итак, для перемещения четырёх пластинок придётся решить прежде всего задачу с тремя пластинками, т. е. аналогичную предыдущей, где лишь *B* и *C* поменялись ролями. Поэтому если решение предыдущей задачи начиналось с «пластинка 1 переносится с *A* на *C*», то это начнётся с «пластинка 1 переносится с *A* на *B*». Присоединяя сюда первую задачу, мы можем составить следующую таблицу для первого перемещения:

при 2 пластинках: пластинка 1 переносится с *A* на *B*
при 3 пластинках: пластинка 1 переносится с *A* на *C*
при 4 пластинках: пластинка 1 переносится с *A* на *B*.

Так как при каждом увеличении числа пластинок на 1 палочки *B* и *C* меняются ролями, то всегда первый ход либо начинается так: «пластинка 1 переносится с *A* на B» либо же: «пластинка 1 переносится с *A* на *C*»; и первый случай бывает при чётном числе пластинок, второй же — при нечётном. Называя *C* конечной, а *B* вспомогательной палочкой, мы можем сказать:

При нечётном числе пластинок игра начинается с переноса меньшей пластинки на конечную палочку, а при чётном числе пластинок — на вспомогательную.

Это правило, легко запоминающееся, имеет большое значение в практике игры; смешение же этих двух случаев безусловно исключается, если ещё принять во внимание, что в наиболее простом случае, с одной пластинкой, правило очевидно само по себе.

Для числа требуемых перенесений мы получили:

при 1 пластинке — 1 перенесение
при 2 пластинках — 3 перенесения
при 3 пластинках — 7 перенесений
при 4 пластинках — 15 перенесений.

Полагая, что читатель отгадал закон образования числа перенесений, мы подойдём к этому вопросу с более удобной точки зрения. Спросим себя: сколько из 15 перенесений, необходимых для игры с четырьмя пластинками, приходится на пластинку 1, 2, 3, 4? Из трёх перенесений, необходимых для игры с двумя пластинками, два перенесения приходятся на пластинку 1 и одно на 2. Это мы запишем так:

2 пластинки:
Пластинка 1 .... 2 перенесения
Пластинка 2 .... 1 перенесение
И т о г о .... 3 перенесения

При трёх пластинках решение расчленяется на три ступени: перенесение пластинок 1 и 2 с *A* на *B*, пластинки 3 — с *A* на C и пластинок 1 и 2 с *B* на C. Отсюда видно, что перенесение двух пластинок (1 и 2) происходит дважды, поэтому число перенесений этих пластинок удваивается по сравнению с ранее разобранным случаем. Имеем:

3 пластинки:
Пластинка 1 .... 4 перенесения
Пластинка 2 .... 2 перенесения
Пластинка 3 .... 1 перенесение
И т о г о .... 7 перенесений

4 пластинки:
Пластинка 1 .... 8 перенесений
Пластинка 2 .... 4 перенесения
Пластинка 3 .... 2 перенесения
Пластинка 4 .... 1 перенесение
И т о г о .... 15 перенесений

Числа перенесений отдельных пластинок, считая снизу вверх (1, 2, 4, 8 в последнем случае), суть степени числа 2; и не только в этих простейших случаях, но и в более сложных, как нетрудно убедиться постепенным переходом от одного случая к следующему. При таком переходе числа перенесений предыдущего столбца удваиваются и снизу приписывается 1. Общее число перенесений в каждом отдельном случае на 1 меньше ближайшей степени числа 2[1]; например, при пяти пластинках общее число перенесений равно 31 ($2^5 - 1 - 32 - 1$).

Вопрос 12. Сколько понадобится всех перенесений для семи пластинок? Сколько перенесений придётся в этом случае на пластинку 1 и на пластинку 5?

[1] У которой показатель степени равен числу пластинок.

Глава V
МЕЛЕДА

В Лейпцигском музее имеется замечательная игра китайского происхождения, изображённая на рис. 25. Верхняя часть её состоит из челнока в форме ножниц с соединёнными концами и девяти колец; металлические части всей игры сделаны из жёлтой меди. Эта остроумная игра известна в Европе с XIX в. и в различных государствах носит разные названия. Мы назовём её меледой. Для лучшего уяснения сущности игры возьмём вместо китайского экземпляра с девятью кольцами более простой с меньшим числом колец. На рис. 26 дано схематическое изображение меледы с пятью кольцами. Устройство и сущность игры заключаются в следующем:

Каждое из пяти колец, надетых на челнок, прикреплено посредством проволоки к пластинке (на нашем рисунке пластинка обозначена буквой а). Каждая проволока проходит через челнок; кроме того, проволока, прикреплённая к какому-либо кольцу, проходит внутрь соседнего, находящегося от него влево, за исключением первой проволоки (на рис. 26 первая слева). Требуется снять с челнока всю систему колец вместе с пластинкой.

Читатель, незнакомый с теорией игры, наверное, возьмёт прежде всего в левую руку рукоятку челнока, а правой будет тянуть все кольца к концу челнока, в

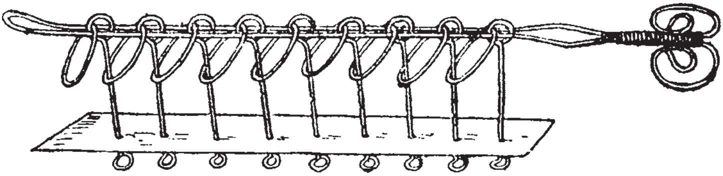


Рис. 25

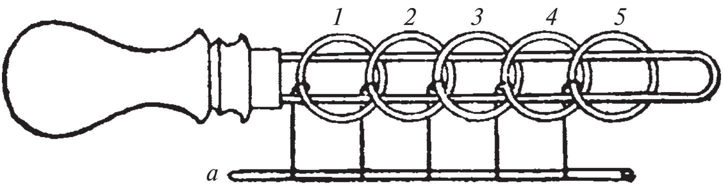


Рис. 26

результате все кольца повиснут на одной из дуг челнока; в конце концов читатель убедится, что выбранный им способ не достигает цели, а лишь спутывает проволоки. На самом же деле легко заметить, что отдельные кольца могут быть спущены с челнока вниз; при этом они снимаются с него, а затем пропускаются между его дугами. Возникает вопрос: в каком порядке следует производить эти манипуляции с кольцами, чтобы поскорее отделить челнок от колец с пластинкой? Желая спустить 5-е кольцо, следует его прежде всего снять с челнока, а затем продеть между дугами последнего. Если желают спустить 4-е кольцо, то снимают одновременно с челнока 4 и 5, а затем 4-е кольцо продевается между дугами, 5-е же надевается обратно на челнок. Если же желают спустить 4-е и 5-е кольца вместе, то их снимают сразу с челнока, затем одновременно же продевают между дугами. Процесс освобождения челнока от 1-го кольца будем называть спусканием, а обратную манипуляцию — поднятием; при этом обозначим кольца номерами, указанными на рис. 26. Нетрудно убедиться в справедливости следующего правила:

Кольцо может быть поднято или спущено, когда следующее за ним справа надето на челнок, а остальные, находящиеся по ту же сторону, уже спущены; только последнее кольцо (5) при всяких положениях может быть поднято или спущено.

Пусть нам дано расположение колец, изображённое на схеме:

1	2	3	4	5
O		O		
	O		O	O,

где черта обозначает челнок, кружки над ней — кольца поднятые (надетые); кружки под ней — кольца спущенные. В таком случае кольцо 2 может быть поднято, потому что следующее за ним кольцо (3) находится на челноке, а кольца (4 и 5), следующие за последним (3), спущены. Напротив, кольца 1 и 3 не могут быть спущены, а кольцо 4 не может быть поднято; но если поднять последнее (5) кольцо, то удастся поднять и кольцо 4.

Чтобы решить нашу основную задачу, а именно спустить с челнока все кольца, следовало бы прежде всего спустить кольцо 1, так как в дальнейшем мы его сможем исключить из рассмотрения, а удаление оставшихся четырёх колец представляет, понятно, ту же основную задачу, но с меньшим числом колец. Но чтобы спустить кольцо 1, согласно нашему правилу, необходимо, чтобы кольцо 2 было на челноке, а кольца 3, 4 и 5 — спущены. Для спуска кольца 3 необходимо, чтобы кольцо 4 было на челноке, а кольцо 5 спущено. Следовательно, мы приходим к выводу, что для спуска кольца 3 необходимо получить такое расположение колец, при котором кольцо 4 находится на челноке, а кольцо 5 спущено. Поэтому, взяв челнок с надетыми пятью кольцами, спускаем кольцо 5, тогда нам не представит труда спуск кольца 3. Получим такое расположение колец:

1	2	3	4	5
О	О		О	
		О		О.

Чтобы спустить кольцо 4, необходимо (по нашему правилу) прежде всего поднять кольцо 5 и затем одновременно спустить кольца 4 и 5 так, как было указано выше. Получим уже такое расположение колец:

1	2	3	4	5
О	О			
		О	О	О,

необходимое, как было сказано, для того, чтобы можно было спустить кольцо 1. В результате имеем следующее расположение:

1	2	3	4	5
	О			
О		О	О	О.

Теперь можно уже исключить из рассмотрения кольцо 1. Далее, постараемся спустить кольцо 2, для чего необходимо поднять кольцо 3. Но это возможно лишь тогда, когда поднято кольцо 4, а последнее достигается поднятием кольца 5. Поэтому необходимо прежде всего поднять одновременно кольца 4 и 5, а это, как было сказано выше, возможно. Получим такое расположение:

```
 1  2  3  4  5
    O     O  O
______________.
 O     O
```

Для поднятия кольца 3 необходимо спустить кольцо 5, так что последовательно получим следующие два расположения:

```
 1  2  3  4  5         1  2  3  4  5
    O     O       и       O  O  O
______________       ______________
 O     O     O         O           O.
```

Но для спуска кольца 2 нужно не только чтобы кольцо 3 было на челноке, но и чтобы кольца 4 и 5 были спущены, для чего необходимо поднять кольцо 5; в результате получим расположение:

```
 1  2  3  4  5
    O  O  O  O
______________.
 O
```

Это расположение есть по существу начальное расположение нашей игры с четырьмя кольцами. От этого же расположения спусканием колец 4 и 5 переходим к такому:

```
 1  2  3  4  5                     1  2  3  4  5
    O  O                                 O
______________ , а от него к      ______________
 O        O  O                     O  O     O  O,
```

чем исключается из рассмотрения и кольцо 2. Для спуска кольца 3 необходимо поднять кольцо 4, а для этого необходимо, в свою очередь, поднять кольцо 5; поэтому мы поднимаем одновременно кольца 4 и 5 и получаем расположение:

$$\begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5\\ &&\text{O}&\text{O}&\text{O}\\ \hline \text{O}&\text{O}&&& \end{array}$$

(начальное расположение игры с тремя кольцами). От этого расположения переходим к такому:

$$\begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5\\ &&\text{O}&\text{O}&\\ \hline \text{O}&\text{O}&&&\text{O} \end{array}\text{, затем к }\begin{array}{ccccc} 1&2&3&4&5\\ &&&\text{O}&\\ \hline \text{O}&\text{O}&\text{O}&&\text{O}. \end{array}$$

Подняв кольцо 5 и спустив одновременно кольца 4 и 5, отделим, наконец, систему колец от челнока. Задача, таким образом, решена.

Обратно, чтобы вновь надеть все кольца на челнок, приходится повторить те же манипуляции, но в обратном порядке, заменяя слово «спуск» словом «поднятие», а слово «поднятие» — словом «спуск». А именно:

1. Поднятие 4 и 5.
2. Спуск 5.
3. Поднятие 3.
4. Поднятие 5.
5. Спуск 4 и 5.
6. Поднятие 2.
7. Поднятие 4 и 5.
8. Спуск 5.
9. Спуск 3.
10. Поднятие 5.
11. Спуск 4 и 5.
12. Поднятие 1.
13. Поднятие 4 и 5.
14. Спуск 5.
15. Поднятие 3.
16. Поднятие 5.

От математического обоснования предыдущих выводов мы вынуждены здесь отказаться. Заметим лишь, что эта теория тесно связана с теорией ряда степеней 2 (с. 46). Исходя из неё можно доказать, что избранный нами способ решения задачи — самый короткий. Этот способ решения, применённый нами к частному случаю игры, а именно — с пятью кольцами, требует 16 операций, считая одновременное поднятие или спуск двух последних колец (4 и 5) за *одну* операцию. Математическая теория этой игры даёт возможность определить наименьшее число операций для любого числа колец. Здесь мы даём лишь таблицу числа таких операций для сравнительно небольшого числа колец.

Число колец	**Число операций**
2	1
3	4
4	7
5	16
6	31
7	64
8	127
9	256
10	511
11	1024
12	2047
20	524287

При 65 кольцах наименьшее число требуемых операций выражается 20-значным числом, на 1 большим числа всех пшеничных зёрен шахматной доски (с. 40).

Вопрос 13. Каково должно быть начальное положение пяти колец, при котором потребуется наибольшее число операций, чтобы снять с челнока все кольца? Сколько операций потребуется в этом случае?

Глава VI
НИМ

§ 1. ОПИСАНИЕ ИГРЫ И КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЕЁ ТЕОРИИ

Происхождение этой игры неизвестно. В неё издавна играли в некоторых американских школах; на американских ярмарках можно было иногда видеть даже группы взрослых, играющих в неё. В Германии эта игра была известна чаще под названием «Фан-Тан». Но так как этим именем в Китае называют другую, очень азартную игру, весьма там популярную, нам пришлось заимствовать у американского математика другое название, данное в заголовке настоящей главы.

Для этой игры берётся обыкновенно некоторое количество однородных предметов, например спичек или камешков. Играют двое. Начинают с того, что образуют, например, из камешков три кучки, каждая из которых содержит не более 7, но не менее 1 камешка (мы могли бы выбрать вместо 7 другое число, но остановились на нём ради простоты изложения). Один из играющих берёт из какой-либо кучки произвольное число камешков, хотя бы 1, но может взять и все или, например, 5, 3 и т. д. В пределах одной кучки и только одному играющему предоставлена, таким образом, полная свобода; выбор кучки также свободен, но играющий не может брать камешки одновременно из двух или трёх кучек. Затем *второй из играющих со своей стороны по тем же правилам продолжает игру, причём может остановить свой выбор или на кучке, из которой взял первый, или на другой. Так попеременно продолжают игру, пока имеются камешки. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень.*

Каждое изъятие камешков будем для сокращения называть ходом. Математическая теория игры покажет, что один из играющих должен непременно выиграть. Выиграет сделавший первый ход или его партнёр, зависит исключительно от начального положения камней.

Отдельные стадии, на которые распадается игра, вполне характеризуются числом камешков в каждой из трёх кучек. Если в начале или посреди игры одна кучка содержит 1 камешек, вторая — 4, третья — 6, мы запишем это так: 1, 4, 6 — говоря, что рассматриваемая стадия игры имеет позицию 1, 4, 6. При этом (по причинам, указанным ниже) ряд определённых позиций, именно

1, 2, 3	2, 4, 6	3, 4, 7
1, 4, 5	2, 5, 7	3, 5, 6
1, 6, 7		

(Система I),

мы будем называть особенными, а остальные — например, 1, 4, 6 или 3, 4, 4 — обыкновенными. Читатель, конечно, поймёт, что число обыкновенных позиций значительно больше числа особенных. Если, например, в одной кучке 2 камешка, в другой — 4, то позиция будет особенной лишь в том случае, когда в третьей кучке их будет 6. Во всех остальных случаях, т. е. когда в третьей кучке имеется 1, 2, 3, 4, 5 или 7 камешков, позиция будет обыкновенной, потому что в системе I мы находим позицию 2, 4, 6, но не 2, 4, 1, или 2, 4, 2, или 2, 4, 3 и т. д. Если убрана целая кучка, то называют особенными позициями лишь те, у которых оставшиеся кучки содержат одинаковое количество камешков; все остальные позиции с двумя кучками, содержащими неодинаковое количество камешков, будут обыкновенными. Позиции с одной кучкой мы будем называть также обыкновенными. Таким образом, к особенным позициям системы I необходимо присоединить следующие особенные позиции:

0, 1, 1	0, 4, 4	0, 6, 6
0, 2, 2	0, 5, 5	0, 7, 7
0, 3, 3		

(Система II),

а также позицию 0, 0, 0, доставляющую победу игроку, достигшему её. Включая последнюю, мы имеем, таким образом, 15 особенных позиций, в то время как простой подсчёт показывает, что обыкновенных позиций всего 105. Для особенных позиций имеем следующие два предложения, которые будут доказаны в § 2:

1) *От особенной позиции нельзя одним ходом перейти к такой же особенной, но можно перейти лишь к обыкновенной.*

2) *От обыкновенной позиции можно одним ходом перейти к одной из многих обыкновенных же, но, кроме того, по крайней мере к одной из особенных.*

В дальнейших параграфах мы увидим, что особенные позиции дают возможность играющему выиграть. Поэтому данные только что два предложения приводят к следующему правилу игры:

Игрок должен стремиться своим ходом достичь особенной позиции. Если её достиг, например, игрок А, то Б своим ходом может перейти от этой особенной позиции лишь к обыкновенной, согласно предложению 1. Тогда А (предложение 2) может её превратить опять в особен-

ную и т. д. Таким образом, игрок А своими ходами будет получать одну за другой особенные позиции и в результате неизбежно выиграет.

§ 2. ОБОСНОВАНИЕ ТЕОРИИ ИГРЫ

Нетрудно убедиться в справедливости данных в предыдущем параграфе двух предложений. Для этой цели рассмотрим отдельные частные случаи. Для доказательства *первого предложения* разберём особенную позицию *системы II,* например 0, 5, 5. Легко понять, что ближайшим ходом она необходимо должна превратиться в обыкновенную позицию. Ведь при этом одна из оставшихся кучек может совсем исчезнуть или число её камешков может уменьшиться и тем самым стать меньше второй, поэтому позиция 0, 5, 5 может перейти в 0, 0, 5 или, например, в 0, 2, 5; но последние позиции по нашему определению — обыкновенные. Таким образом, особенная позиция системы II каким бы то ни было ходом переводится в обыкновенную, что и соответствует предложению 1. Но это же предложение будет справедливо и для позиции системы I; чтобы доказать это, рассмотрим позицию 2, 5, 7. Если ближайшим ходом мы уберём одну из кучек, то наша позиция перейдёт в обыкновенную, так как оставшиеся кучки будут содержать неравное число камешков. Остаётся рассмотреть тот случай, когда ближайшим ходом мы уменьшаем число камешков одной кучки, так что их останется попрежнему 3. Если уберём 1 камешек из первой кучки, то вновь образовавшаяся позиция 1, 5, 7 — обыкновенная, так как в списке особенных позиций системы I, содержащих число 1, нет содержащих одновременно 5 и 7 (система I, первый столбец). При уменьшении же числа камешков второй кучки в первой, во всяком случае, будет по-прежнему 2, а в третьей — 7. Но в системе I имеется 1 позиция, содержащая одновременно 2 и 7 камешков, именно позиция 2, 5 и 7, которую мы и рассматриваем. Поэтому при уменьшении второй кучки получается обыкновенная позиция. Рассуждая таким же образом, можно убедиться, что при уменьшении третьей кучки получается опять-таки обыкновенная позиция.

Читатель, наверное, уже сам догадался, в чём тут суть. Система I особенных позиций составлена так, что два числа каждой позиции, например 3 и 7 позиции 3, 4, 7, входят одновременно лишь только в последнюю и нет другой, которая содержала бы 3 и 7. С другой стороны, каждая пара чисел, например 2 и 5, непременно входит в одну, и только одну, из позиций системы I, а именно в 2, 5, 7. Нам ещё придётся вернуться к более глубокому изучению системы I, а теперь, для наглядного её представления, воспользуемся следующим примером. Пусть числами 1, 2 ... 7 обозначены члены игорного клуба, где играют в скат — игра, возможная только при трёх партнёрах; назовём этих членов так: первого — Ивановым, второго — Улановым, третьего — Капустиным, четвёртого — Сидоровым, пятого — Петровым, шестого — Матвеевым, седьмого — Александровым. Комбинациям трёх чисел системы I здесь соответствуют партии в скат трёх членов клуба. Система I содержит только 7 позиций; пусть эти 7 позиций соответствуют 7 дням недели, т. е. из членов клуба каждый вечер недели играют лишь трое. Составим теперь расписание игры в клубе, положив в основание систему I:

Воскресенье:	Иванов, Уланов, Капустин (1, 2, 3).
Понедельник:	Уланов, Сидоров, Матвеев (2, 4, 6).
Вторник:	Капустин, Сидоров, Александров (3, 4, 7).
Среда:	Иванов, Сидоров, Петров (1, 4, 5).
Четверг:	Уланов, Петров, Александров (2, 5, 7).
Пятница:	Капустин, Петров, Матвеев (3, 5, 6).
Суббота:	Иванов, Матвеев, Александров (1, 6, 7).

Легко заметить следующее: каждый член клуба играет одинаковое число раз в неделю, а именно 3 раза. При этом каждый из них играет лишь 1 раз в неделю с каждым из остальных: в первый вечер с какими-либо двумя, во второй — с двумя другими, в третий — с двумя остальными[1]. Например, Капустин играет в воскресенье, вторник и пятницу, в воскресенье с Ивановым и Улановым, во вторник с Сидоровым и Александровым, в пятницу с Петровым и Матвеевым. Этого достаточно для наглядного изображения системы I.

Постараемся теперь объяснить второе предложение. Первая его часть, заключающаяся в том, что обыкновенная позиция одним ходом может быть приведена к другой обыкновенной, например 1, 2, 5 — в 1, 2, 4, или в 1, 2, 2, или в 1, 2, 1, или в 1, 2, 0, не нуждается в доказательстве. Остаётся доказать вторую часть предложения, а именно, что всякая обыкновенная позиция может быть приведена одним лишь ходом по крайней мере к особенной. Легче всего доказывается это для двух кучек. Пусть, например, имеется позиция 0, 4, 7; чтобы получить из неё особенную позицию, следует лишь в обеих кучках уравнять число камешков, что и достигается уменьшением большой на 3 камешка; тогда имеем позицию 0, 4, 4. Если в обыкновенной позиции имеется только одна кучка, так что позиция имеет, например, вид 0, 0, 4, то само собой разумеется, что ближайшим ходом следует убрать и эту кучку; получается особенная позиция 0, 0, 0, означающая выигрыш взявшего кучку[2]. Если имеется обыкновенная позиция с тремя кучка-

[1] Здесь не принимается во внимание, как распределяются вечера какого-либо члена — следуют ли они один за другим подряд или в каком-либо ином порядке.

[2] Читатель видит, что присоединение позиции 0, 0, 0 к особенным позициям не произвольное, а имеет глубокое основание в самой сущности игры.

ми, например 3, 6, 7, то ни в коем случае не следует убирать целую кучку. В данном случае надо лишь какую-либо кучку уменьшить. Если мы пожелаем уменьшить число камешков первой кучки, то числа 6 и 7 останутся без изменения. Единственной же особенной позицией, в которую входят одновременно 6 и 7, является 1, 6, 7, поэтому необходимо уменьшить число камешков первой кучки с 3 до 1. Таким же образом придём к выводу, что вторую кучку следовало бы уменьшить с 6 до 4 или третью — с 7 до 5, чтобы получить соответственно особенные позиции 3, 4, 7 и 3, 6, 5. В данном случае ближайшим ходом можно перейти от обыкновенной к особенной тремя способами. В общем же случае такие возможности не всегда предоставляются; для нас же достаточно, если имеется хотя бы *одна* такая возможность. Возникает вопрос: всегда ли предоставится такая возможность? Если мы не ответим на него, то в нашем доказательстве будет большой пробел. С другой стороны, исчерпывающий ответ заставит нас углубиться в математическую теорию игры. Читатель, не интересующийся ею, может её пропустить и прямо перейти к § 3.

Следовало бы уже раньше ответить на вопрос: чем, собственно, отличается особенная позиция от обыкновенной и каким образом могут быть получены особенные позиции, в частности позиции системы I? Чтобы ответить на этот вопрос, прежде всего напомним читателю о ряде степеней числа 2 (с. 42), начинающемся с 1 и в котором каждое число начиная со 2-го равно удвоенному предшествующему: 1, 2, 4, 8, 16... Для дальнейшего нам понадобится лишь начало ряда ...1, 2, 4. Напомним только, что любое число может быть представлено в виде суммы чисел этого ряда (с. 45); числа от 1 до 7, которые для нас в данном случае наиболее важны, могут быть представлены так:

$$
\begin{array}{l}
\quad\ 4\quad 2\quad 1 \\
\hline
1 = \ 1 \\
2 = \ 2 \\
3 = \ 2 + 1 \\
4 = 4 \\
5 = 4 + \ 1 \\
6 = 4 + 2 \\
7 = 4 + 2 + 1.
\end{array}
$$

Числа 4, 2, 1 ради краткости будем называть основными числами (с. 46). Возьмём какую-либо позицию системы I, например 3, 4, 7, и подпишем её числа одно под другим в виде сумм основных чисел:

$$
\begin{array}{l}
3 = \ 2 + 1 \\
4 = 4 \\
7 = 4 + 2 + 1.
\end{array}
$$

По правую сторону знаков равенства (=) каждое из основных чисел в каждом столбце входит 2 раза. Вообще, во всякую позицию системы I, числа которой представлены в виде сумм основных чисел, каждое основное число входит либо *два*, либо *ни одного раза*. Примером второго случая может служить особенная позиция 2, 4, 6:

$$
\begin{array}{l}
2 = \ 2 \\
4 = 4 \\
6 = 4 + 2,
\end{array}
$$

в которую основные числа 2 и 4 входят по 2 раза, а основное число 1 — ни одного. Но *никогда* основные числа не входят во все суммы особенной позиции *1 или 3 раза*; если же это случается, то позиция непременно должна быть обыкновенной. Что «особенные» позиции системы II обладают тем же свойством по отношению к основным числам, видно из того, что каждая из них, если не принимать во внимание 0, состоит из двух равных чисел, так что это свойство выполняется само собой. Но все позиции систем I и II не только обладают указанным свойством, присущим вообще особенным позициям, но они и *единственные,* имеющие это свойство. Взяв какую-либо «обыкновенную» позицию, — следовательно, не находящуюся в системах I и II, — можно убедиться, что она не имеет указанного свойства. Возьмём, например, позиции 1, 2, 4 и 3, 6, 7, не принадлежащие к системам I и II, и представим их числа в виде сумм основных чисел:

$$\begin{array}{llll}
1 = & \phantom{4 + 2 + {}}1 & \qquad 3 = & \phantom{4 + {}}2 + 1 \\
2 = & \phantom{4 + {}}2 & \qquad 6 = & 4 + 2 \\
4 = & 4 & \qquad 7 = & 4 + 2 + 1.
\end{array}$$

В первой основные числа 1, 2, 4 встречаются лишь по 1 разу; во второй числа 4 и 1 — по 2, а основное число 2 — 3 раза. Обе позиции не обладают требуемым свойством. Ради полноты заметим, что позиция 0, 0, 0 также удовлетворяет установленному свойству, а потому мы имеем вполне законное основание причислить её к особенным.

Определение основной позиции этим исчерпано. Теперь мы знаем, что если три её числа представить в виде сумм основных чисел, то все три суммы, вместе взятые, содержат каждое основное число или 2 раза, или ни одного. На частных же примерах мы убедились, что все особенные позиции действительно обладают этим характерным для них свойством, чего нельзя сказать об обыкновенных.

Придадим теперь данному определению несколько иную форму и ответим на выше поставленный вопрос (с. 67) о способе получения всех особенных позиций. Пусть, например, мы исходя из данного нами определения особенных позиций ищем такую, которая содержит числа 3 и 5. Требуется найти её третье число. Мы можем написать:

$$3 = \quad 2 + 1$$
$$5 = 4 \quad + 1.$$

Так как эти две суммы содержат 4 и 2 по 1 разу, а 1 — 2 раза, то третье число искомой позиции должно содержать основные числа 4 и 2 по 1 разу, а основное число 1 — ни одного раза; следовательно, третье число равно 4 + 2 = 6. Полученная позиция 3, 5, 6 удовлетворяет требованию данного нами определения особенной позиции, а потому она особенная. Она находится среди позиций системы I. Таким образом, для каждых двух данных чисел можно найти одно, и *только одно*, третье число, которое с данными двумя образует особенную позицию: позиция 3, 5, 6 есть единственная «особенная» позиция, в которую числа 3 и 5 входят совместно. Нам теперь легко заполнить пробел, допущенный в рассуждениях с. 67. Там мы без особенных к тому оснований утверждали, что характерным свойством позиций системы I является следующее: для каждых двух чисел среди этих позиций имеется только одна, в которую они одновременно входят. Теперь же это свойство доказано вполне. Мы могли бы для каждых двух чисел ряда 1, 2, 3 ... 7 найти третье число, образующее с ними особенную позицию, подобно тому как сделали это для чисел 3 и 5. Выписав все полученные таким образом позиции системы I и присоединив к ним позиции системы II, мы получили бы все особенные позиции. Для образования позиций системы I нет надобности перебирать все комбинации по два числа ряда 1, 2, 3 ... 7. Следует лишь заметить, что если бы мы исходили не из пары чисел 3, 5, а из пары 3, 6, то указанным выше приёмом мы пришли бы, конечно, к числу 5, т. е. получили бы ту же особенную позицию 3, 5, 6; поэтому мы можем игнорировать комбинацию 3, 6, раз для этих двух чисел особенная позиция (3, 5, 6) уже найдена. Во всяком случае, указанным выше способом легко получить все позиции системы I и убедиться, что, кроме позиций систем I и II и 0, 0, 0, никакие другие свойствами особенных не обладают.

Из предыдущего легко понять, каким образом можно от обыкновенной позиции перейти к особенной. В самом деле: пусть дана обыкновенная позиция. В таком случае по крайней мере одно из основных чисел 4, 2, 1 входит в неё 1 или 3 раза — иначе она была бы особенной. Например, позиция 3, 6, 7 содержит 2 раза основное число 4, 3 раза — 2, 2 раза — 1:

$$\begin{aligned} 3 &= \phantom{4 + {}} 2 + 1 \\ 6 &= 4 + 2 \\ 7 &= 4 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Легко понять, что при переходе от этой позиции к особенной нет надобности менять число четвёрок. Точно так же нет нужды в изменении числа единиц. Напротив, желая удовлетворить условие, которому подчиняется особенная позиция, мы должны число двоек уменьшить на одну. Для этой цели достаточно уменьшить число камешков какой-либо кучки на 2: либо уменьшить число камешков первой с 3 до 1, либо второй с 6 до 4, либо третьей с 7 до 5. В первом случае получается особенная позиция — 1, 6, 7; во втором — 3, 4, 7; в третьем — 3, 5, 6. Эти три позиции мы получили выше из непосредственного рассмотрения позиций системы I (с. 62). Рассмотрим ещё в качестве примера позицию, о которой мы упомянули на с. 66, именно 1, 2, 4:

$$\begin{array}{rccc} 1 = & & & 1 \\ 2 = & & 2 & \\ 4 = & 4. & & \end{array}$$

Первое основное число, не удовлетворяющее известному нам условию особенной позиции, есть число 4 (читатель, должно быть, заметил, что мы рассматриваем раньше число 4, потом 2, а затем лишь 1). Так как эта позиция содержит основные числа 2 и 1 по 1 разу, то число 4, при переходе к особенной позиции, придётся заменить 2 + 1. Во вновь полученную позицию число 4 совсем не войдёт, а 2 и 1 войдут по 2 раза. Практически это означает, что для перехода от обыкновенной позиции 1, 2, 4 к особенной придётся из третьей кучки убрать один камешек; получим особенную позицию 1, 2, 3. Для последнего случая существует лишь один переход к особенной позиции (для предыдущего — три), так как можно лишь уменьшать кучки, а не увеличивать, причём одним ходом мы имеем право уменьшать лишь одну *кучку,* но не более. Поэтому мы должны были наибольшее основное число 4, входящее в позицию 1, 2, 4, совершенно устранить и к основным числам 2 и 1, входящим также по 1 разу, присоединить ещё одну двойку и одну единицу. Таким образом, мы убедились, что переход от обыкновенной позиции к особенной всегда возможен[1], чем вполне доказано предложение второе § 1 настоящей главы (с. 63).

---

[1] Переход от обыкновенной к особенной позиции возможен во всех случаях, когда наибольшее основное число входит в позицию 1 или 3 раза, а некоторые или все остальные основные числа входят по 1 разу, так как наибольшее основное число больше суммы всех предыдущих основных чисел.

§ 3. ТЕХНИКА ИГРЫ

Предыдущие рассуждения дают возможность установить правила, которыми следует руководствоваться при игре, хотя, в сущности, они были уже даны, правда, без доказательств, в конце § 1. Так как обыкновенных позиций значительно больше, чем особенных, то произвольно взятые три кучки камешков[1] в большинстве случаев образуют обыкновенную позицию. Начинающий игрок А своим первым ходом превратит начальную позицию в особенную; второй игрок В может эту особенную позицию превратить лишь в обыкновенную; затем А может последнюю превратить в особенную и т. д. Игрок А будет последовательно переходить от одной «особенной» позиции к другой такой же и в результате выиграет[2]. Таким образом, если произвольно взятая начальная позиция — обыкновенная (что, как было сказано, большей частью и бывает), то выигрывает начинающий; если же начальная позиция особенная, то выигрывает при правильной игре второй игрок.

Как протекает на самом деле игра, легче увидеть на частном примере; ходы мы пронумеруем, указывая для каждого играющего позицию, достигнутую им данным ходом.

Начальная позиция: 4, 5, 6

	A		B
1)	3, 5, 6	примерно	3, 5, 4
2)	1, 5, 4	примерно	1, 4, 4.

[1] Начальное положение выбирается играющими или по жребию, или же иным путём; в крайнем случае они могут попросить постороннее лицо, незнакомое с теорией игры, выбрать начальное положение.

[2] Поэтому особенные позиции, к которым, естественно, должен стремиться каждый играющий, называют также правильными, а обыкновенные — неправильными.

Игрок А, если он желает выиграть, должен убрать последний камень первой кучки, тогда образуется особенная позиция с двумя кучками с одинаковым числом камешков (система II), следовательно:

3) 0, 4, 4 примерно 0, 2, 4.

Игрок А должен теперь взять из второй (большей) кучки столько камешков, чтобы число последних в обеих кучках стало опять одинаковым; следовательно:

4) 0, 2, 2 примерно 0, 1, 2
5) 0, 1, 1 примерно 0, 1, 0
6) 0, 0, 0.

Разумеется, мы отнюдь не обязаны ограничиваться максимальным числом 7; мы могли бы установить другой максимум для числа камешков в каждой кучке. И если мы выбрали за такое число 7, то руководствовались лишь соображениями удобства: чтобы не затемнять сущности игры большими числами. Читатель сможет сам, руководствуясь соображениями § 2, составить систему особенных позиций и для другого максимального числа камешков каждой кучки. Например, если одна кучка содержит 7 камешков, другая — 9, то для получения особенной позиции с числами 7 и 9 придётся представить 7 и 9 в виде суммы основных чисел, в состав которых теперь войдёт, кроме 1, 2 и 4, ещё число 8:

$$\begin{aligned} 7 &= 4 + 2 + 1 \\ 9 &= 8 + \phantom{2 + {}} 1. \end{aligned}$$

Третье число должно быть равно 8 + 4 + 2 = 14; следовательно, особенная позиция, содержащая числа 7 и 9, есть 7, 9, 14. Если, например, максимальное число камешков каждой кучки — 15, то путём продления прежней системы I получим такую систему особенных позиций:

1, 2, 3	2, 4, 6	3, 4, 7	4, 8, 12
1, 4, 5	2, 5, 7	3, 5, 6	4, 9, 13
1, 6, 7	2, 8, 10	3, 8, 11	4, 10, 14
1, 8, 9	2, 9, 11	3, 9, 10	4, 11, 15
1, 10, 11	2, 12, 14	3, 12, 15	
1, 12, 13	2, 13, 15	3, 13, 14	
1, 14, 15			

5, 8, 13	6, 8, 14	7, 8, 15
5, 9, 11	6, 9, 15	7, 9, 14
5, 10, 15	6, 10, 12	7, 10, 13
5, 11, 14	6, 11, 13	7, 11, 12

Сюда следует, понятно, присоединить систему всех позиций, содержащих два одинаковых числа.

Для игры можно взять не только три кучки, но и больше; мы на этом останавливаться не будем, хотя теория игры и в этих случаях мало отличается от изложенной. Можно было бы изменить правило игры, предположив, что проигравшим считается тот, кто принуждён будет взять последний камень. И в этом случае теория в своих существенных чертах не меняется, хотя несколько усложняется, и на ней мы останавливаться не будем.

Вопрос 14. Одна кучка содержит 7 камешков, другая — 25. Сколько камешков должна содержать третья кучка, чтобы позиция была особенной?

Вопрос 15. Кто выигрывает при начальной позиции 3, 17, 18 (предполагается, что оба партнёра играют правильно)?

Вопрос 16. Имеется лишь одна кучка в 25 камешков; каждый из двух партнёров имеет право одним ходом убирать не более 4 камешков. Кто выигрывает — первый или второй?

Глава VII
ХОД КОНЯ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ИСТОРИЯ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

На обыкновенной шахматной доске с 64 клетками в начале игры расположены, как известно, 32 фигуры. Все фигуры могут, таким образом, занять половину шахматной доски. Различные авторы использовали последнее обстоятельство для следующей игры: пусть половина доски заполнена шахматными фигурами, расположенными в любом порядке; требуется одним конём в произвольной, но непрерывной последовательности снять с доски все фигуры.

В шахматной игре снять фигуру какой-либо другой — значит поставить последнюю на место первой. Конь, который должен снять все фигуры одну за другой, сам, понятно, в начале игры должен занимать одну из 32 клеток. Обычным ходом шахматного коня он должен начиная со своей клетки последовательно перебывать на всех остальных (т. е. в 31-й) клетках, не становясь более одного раза на одну и ту же клетку и не переходя на вторую половину доски.

Впоследствии задача эта приняла более общую форму, а именно: *конь в произвольной, но непрерывной последовательности должен обойти уже все 64 клетки шахматной доски.* Эта задача в настоящее время известна под названием «Ход коня». В середине XVIII столетия задача эта была ещё мало известна. Даже величайший математик того времени Леонард Эйлер ничего не слышал о ней до тех пор, пока она не была ему предложена для решения на одном заседании научного общества. После этого она, благодаря Эйлеру, получила широкое распространение, и уже его молодой современник фон Кемпелен (1734—1804), изобрётший шахматный автомат, применил последний для её решения.

Отдельный ход коня, как известно, состоит в том, что конь со своей клетки передвигается (безразлично, в какую сторону) либо на две клетки в горизонтальном и затем на одну клетку в вертикальном направлении, либо же, наоборот, на две клетки в вертикальном и на одну в горизонтальном. О двух клетках, обладающих тем свойством, что от одной из них можно перейти конём к другой, говорят, что они связаны ходом коня. Максимальное число клеток, связанных ходом коня с данной клеткой, как нетрудно понять, не превосходит 8. Это видно на рис. 27, где заштрихованная клетка есть данная, т. е. та, на которой вначале находится конь, а 8 клеток, внутри которых поставлены крестики, связаны с ней ходом коня. Эта фигура представляет, конечно, лишь часть всей 64-клеточной шахматной

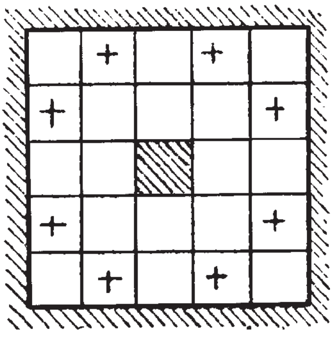


Рис. 27

доски. Если конь находится на клетке ближе к краю доски, то других клеток, связанных с первой ходом коня, может оказаться 6, 4 или 3. В том же случае, когда конь поставлен на одну из угловых клеток, то других, связанных с ней ходом коня, окажется лишь 2.

На нашей фигуре мы не сделали различия между чёрными и белыми клетками; в дальнейшем мы их пока не будем различать. Читателю нетрудно понять, что если на рис. 27 заштрихованная чёрная клетка, то все 8 клеток, связанные с ней ходом коня, будут белые, и наоборот. Следовательно, конь с каждым ходом меняет цвет клетки: если вначале он находится на белой клетке, то ближайшим ходом перейдёт на чёрную, с чёрной опять на белую и т. д.

Первую клетку, занимаемую конём, будем называть начальной, последнюю — просто последней, а обе вместе — конечными. Если конечные клетки связаны ходом коня так, что от последней клетки конь одним ходом может вернуться на начальную, то ход коня называют замкнутым, в противном случае — незамкнутым, или открытым.

§ 2. ПРИМЕРЫ ХОДА КОНЯ

Число возможных различных ходов коня (т. е. обходов всей доски) до сих пор еще не определено; во всяком случае, оно весьма велико. Поэтому мы ограничимся разбором лишь немногих примеров. Прежде всего разберём в несколько изменённом виде задачу, о которой упоминалось в начале предыдущей главы, а именно задачу обойти конём сначала половину шахматной доски, а затем, перейдя с её последней клетки на вторую половину, обойти и её. Такой двойной ход коня изображён на рис. 28. Решение этой задачи приписывается Эйлеру. Клетки на этой фигуре обозначены числами, указывающими порядок, в каком конь последовательно их проходит; читатель, конечно, замечает, что конь сначала обошёл нижнюю половину доски, а затем лишь верхнюю.

Этот ход коня, кроме того, будет замкнутым, т. е. в данной задаче возможен переход коня с последней клетки (64) на начальную (1); следовательно, клетки 64 и 1 связаны ходом коня. Этим фактом существования *одного* замкнутого хода коня уже доказано, что при любой начальной клетке всегда существует по крайней мере один ход коня, и притом замкнутый. Например, чтобы получить ход коня, когда за начальную клетку взята клетка 19, достаточно клетки 19—64 обойти в прежнем порядке, как указано на рис. 28, затем перейти конём с 64-й на 1-ю и, наконец, обойти клетки 1—19 опять в прежней последовательности. Но этим же доказано, что при любой начальной клетке возможны самое меньшее два хода коня, так как каждый замкнутый ход даёт возможность получить другой обходом клеток в противоположном направлении. Например, из данного на рис. 28 хода коня с направлением (1, 2,

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Рис. 28

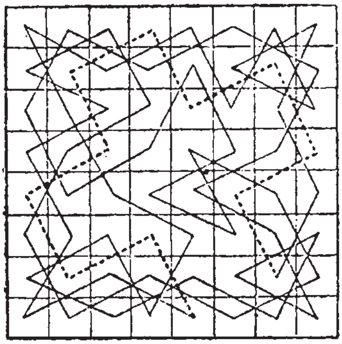


Рис. 29

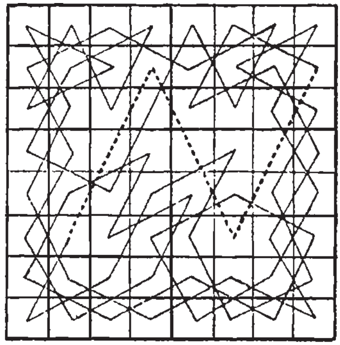


Рис. 30

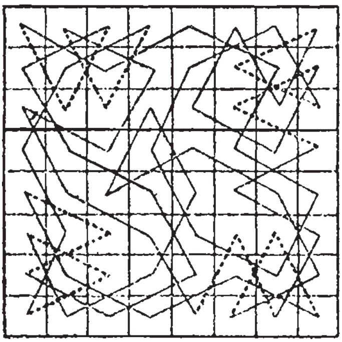


Рис. 31

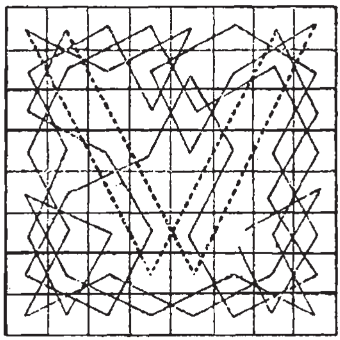


Рис. 32

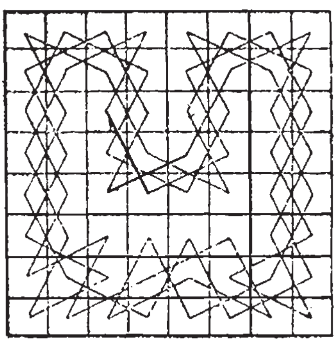


Рис. 33

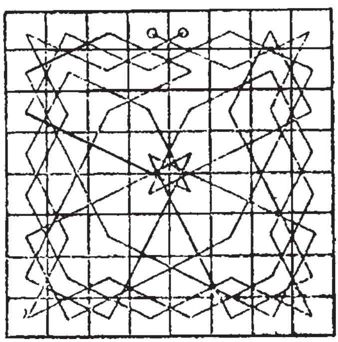


Рис. 34

3 ... 64, 1) можно получить другой ход в противоположном направлении (1, 64, 63 ... 2, 1).

Диаграммы ходов коня большей частью имеют чрезвычайно запутанную линию; достигнуть полной симметрии при их построении вообще невозможно, что вытекает из сущности самой задачи, хотя любители приложили немало труда для получения более или менее изящных диаграмм, но только некоторым из них удалось достигнуть положительных результатов. Наиболее замечательные примеры такого рода диаграмм представлены на рис. 29—34, из которых на рис. 29 изображён крест, на рис. 30 — буква *N* (Napoleon), на рис. 31 — 4-кратное *W*, на рис. 33 — двойное *V*, похожее на герб, а рис. 33 в целом представляет нечто вроде вазы, наконец, на рис. 34, особенно симметричном, — нечто вроде цветка. Все эти ходы коня замкнутые, только последний открытый.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЁМЫ ОБРАЗОВАНИЯ ХОДОВ КОНЯ

Познакомим читателя с весьма удобным правилом для получения ходов коня, часто применяемым на практике.

Когда конь находится на какой-либо клетке, то ближайшим ходом, как было сказано выше, можно перейти на одну из клеток, связанных с первой ходом коня. Из них выбирают ту, которая связана ходом коня с наименьшим количеством свободных клеток, так как есть опасение, что впоследствии не удастся на неё попасть, и она окажется совсем отрезанной. Для клетки же, связанной ходом коня с большим количеством свободных клеток, имеется, понятно, большая возможность быть впоследствии достигнутой. Если же можно попасть только на такие клетки, которые связаны ходом коня с одинако-

вым числом других клеток, то безразлично, на какую из них станет конь.

На практике это правило имеет большое значение, так как даже произвольно начатый ход коня, когда значительная часть клеток была уже занята без соблюдения этого правила, может быть всё же доведён до конца. Пусть, например, нами начат ход коня, причём уже заняты 40 клеток (рис. 35) без соблюдения указанного правила. Если при дальнейших отдельных ходах мы будем руководствоваться данным правилом, то всё-таки нам удастся закончить ход коня так, как показано на рис. 36.

Остановимся несколько подробнее на том, как при помощи нашего правила возможно от рис. 35 перейти к 36; причём, ради простоты, будем обозначать клетки шахматной доски числами рис. 36. Клетка 40, как видно из рис. 35, есть последняя клетка бесланового движения коня по шахматной доске. Начнём теперь применять наше правило. С клетки 40 конь может перейти на следующие: 41, 43, 45, 59 и 49. Из них клетка 43 имеет три свободных выхода на 42, 44 и 60;

	21	34	9		19	32	7
35	10		20	33	8		18
22						6	31
11	36					17	
	23			40		30	5
37	12	25		27			16
24		2	39	14		4	29
1	38	13	26	3	28	15	

Рис. 35

54	21	34	9	58	19	32	7
35	10	55	20	33	8	57	18
22	53	64	59	56	45	6	31
11	36	49	46	63	60	17	44
50	23	52	61	40	47	30	5
37	12	25	48	27	62	43	16
24	51	2	39	14	41	4	29
1	38	13	26	3	28	15	42

Рис. 36

клетка 45 также имеет три свободных выхода на 44, 58 и 46; и столько же выходов имеют клетки 59 и 49. Напротив, клетка 41 имеет лишь два открытых выхода, именно: 42 и 43. Мы приходим к выводу, что клетка 41 из всех других свободных клеток, связанных ходом коня с клеткой 40, имеет наименьшее число свободных выходов; поэтому, согласно правилу, мы должны перевести коня с клетки 40 на 41. Для следующего отдельного хода коня с клетки 41 приходится рассматривать лишь две возможности: переход на 42 и на 48. Из них клетка 48 имеет пока четыре свободных выхода, именно: на 47, 63, 49 и 51; напротив, клетка 42 имеет только один свободный ход, а именно на 43. Поэтому теперь конь должен перейти с клетки 41 на клетку 42. Если бы мы этого не сделали, а перевели бы коня с клетки 41 на клетку 48, то впоследствии могли бы достигнуть клетки 42, пройдя предварительно 43, но тогда выход с клетки 42 был бы отрезан. Следовательно, клетка 42 должна была бы быть пропущена или же быть последней в ходе коня. С клетки 43 можно перейти либо к 44, либо к 60; последние имеют по три свободных выхода. Поэтому, согласно правилу, мы можем из них выбрать какую угодно. Если выберем 44, то затем нам придётся занять клетку 45, так как последняя имеет только два свободных выхода, между тем как клетки 47 и 57, связанные ходом коня с клеткой 44, имеют по три таких выхода. Таким образом доводят ход коня до конца.

Вопрос 17. Взяв за начальную клетку левую конечную на рис. 36 и сделав произвольные 36 ходов, продолжить ход коня, руководствуясь правилом этого параграфа.

Только что изложенный способ позволяет закончить уже начатый ход коня, и в этом отношении он является весьма ценным. Но он не имеет строгого теоретического обоснования, а поэтому иногда может не привести к цели. Мы займёмся теперь двумя другими методами решения интересующей нас задачи. Этими методами нельзя закончить любой начатый ход коня, но зато они дают наглядную картину того, как составить с самого начала такой ход. Обращаясь к первому методу, мы, прежде всего, представляем себе шахматную доску, разделённую на внутренний квадрат с 16 клетками и на внешнюю рамку с 48 клетками (рис. 37). Далее, клетки каждой из этих двух частей делим на такие четыре группы (класса), что конь может, начав с любой клетки такого класса, обойти все его клетки. На рис. 37 мы это разделение клеток представили наглядно; клетки одного и того же класса обозначены одной и той же буквой, и начерчены диаграммы некоторых классов. Мы могли бы построить диаграммы всех восьми классов: 4 внутренние (мы их обозначим для краткости: *a′, b′, c′, e′*) по 4 клетки в каждой; 4 внешние (*a, b, c, e*) по 12 клеток в каждой.

Первый метод заключается в том, что конь проходит последовательно все восемь диаграмм; при этом вну-

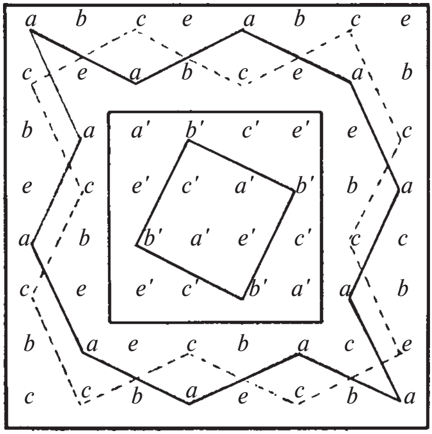


Рис. 37

тренние и внешние диаграммы чередуются (т. е. конь раньше проходит, например, внутреннюю, с неё переходит на внешнюю, с последней на непройденную внутреннюю, а затем опять на внешнюю и т. д.). Чередование может быть произвольным, но не разрешается переход с диаграммы (например, a) на диаграмму (a′), обозначенные одной и той же буквой; следовательно, исключаются следующие переходы: a—a′, b—b′, c—c′ и e—e′. Весьма часто встречающийся ход коня получается по схеме a—e′—c—b′—e—a′—b—e′ (рис. 38).

В только что изложенном методе мы разделили 16 клеток внутреннего квадрата на 4 группы (по 4 клетки в каждой), или, как мы впредь будем говорить, на четверные ходы. Два таких четверных хода *b′* и *c′* (их диаграммы) имеют форму квадрата, два других (*a′* и *e′*) — форму ромба.

Мы можем для всей шахматной доски провести такое же подразделение, именно: разделим сперва всю доску на четыре равные части (квадраты) по 16 клеток в каждой, затем каждый квадрат делим на вышеупомянутые четверные ходы. Четыре клетки, принадлежа-

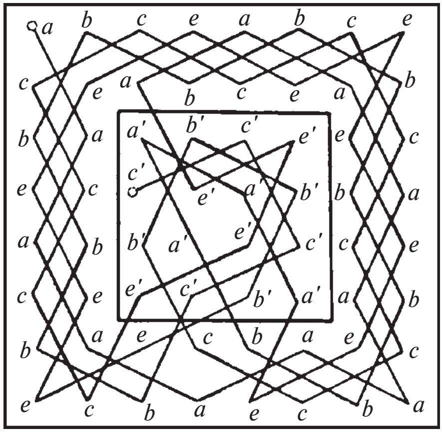


Рис. 38

щие к одному и тому же четверному ходу, будем обозначать одной и той же буквой; например, буквой *a* обозначены (рис. 39) четыре клетки одного четверного хода, буквой *C* — другого, буквой *E′* — третьего и т. д. Но для обозначения клеток четверных ходов, имеющих в наших четырёх квадратах одинаковое расположение, мы вводим одну и ту же букву, беря в одном случае малую букву (*a*), в другом — большую (*A*), в третьем и четвёртом — те же буквы, но со штрихом (*a′* и *A′*). Причём мы обозначили четверные ходы, имеющие форму ромба, гласными буквами (*A* и *E*), а четверные ходы, имеющие форму квадрата, — согласными (*B* и *C*).

Можно все четверные ходы, обозначенные одной и той же буквой (например, *A*, *a*, *A′* и *a′*), соединить в один общий ход в 16 клеток. Например, если начертить ромбы *A*, *a*, *A′*, *a′*, то легко понять, что можно их соединить в один непрерывный ход. Для этого достаточно лишь удалить по одной стороне в каждом ромбе, заменяя удалённую сторону переходом коня с одного ромба на другой; четыре удалённые стороны, как не-

A	B	C	E	a	b	c	e
C	E	A	B	c	e	a	b
B	A	E	C	b	a	e	c
E	C	B	A	e	c	b	a
a′	b′	c′	e′	A′	B′	C′	E′
c′	e′	a′	b′	C′	E′	A′	B′
b′	a′	e′	c′	B′	A′	E′	C′
e′	c′	b′	a′	E′	C′	B′	A′

Рис. 39

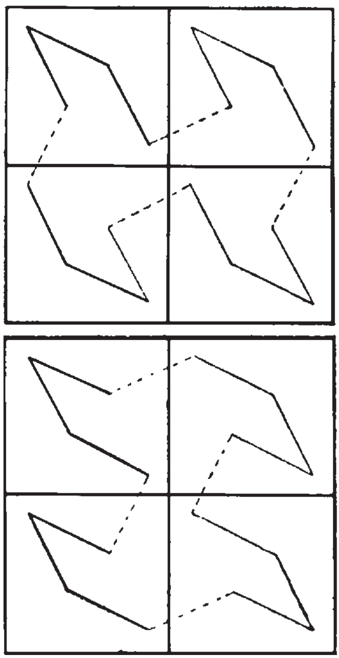


Рис. 40

трудно убедиться, друг другу параллельны. В каждом ромбе можно, понятно, удалять лишь стороны, обращённые к соседнему квадрату. Так как у каждого ромба имеются только две стороны, прилегающие к квадратам, то четверные ходы *A*, *a*, *A′*, *a′* могут быть соединены в один ход двояким образом, как видно на рис. 40.

Таким образом, мы имеем два хода *A* (ради краткости выражения мы будем говорить так), два хода *B*, два хода *C* и два хода *E*. Ходы *A* и *E*, составленные из ромбов, называют гласными ходами; ходы *B* и *C*, составленные из квадратов, — согласными. *Для получения полного хода коня следует лишь связать четыре хода, а именно: один A, один B, один C и один E. Причём*

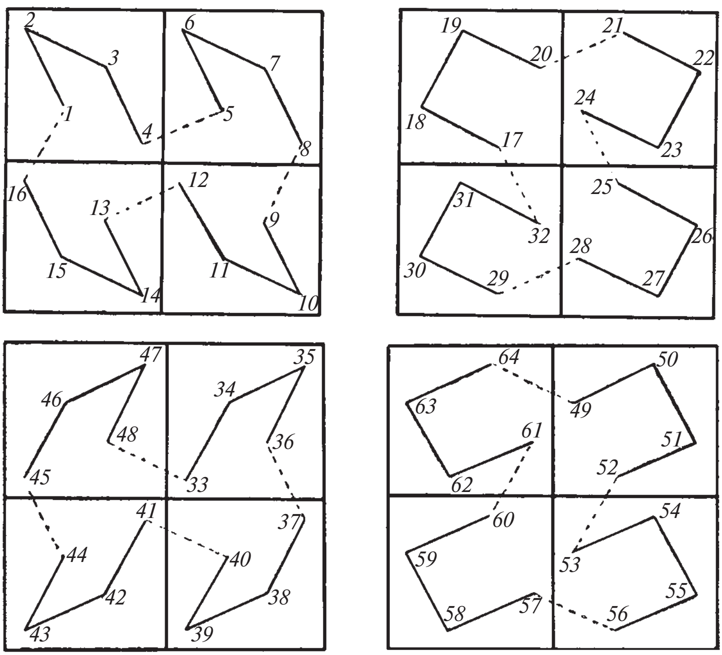


Рис. 41

нужно следить за тем, чтобы не было непосредственного перехода от гласного хода к гласному же или от согласного к согласному, так как читатель на рис. 39 может видеть, что ни одна из клеток *A*, *a*, *A′*, *a′* не связана ходом коня ни с одной клеткой *E*, *e*, *E′* и *e′*; то же относится и к клеткам согласных ходов. Напротив, от гласного хода можно перейти конём к согласному, и можно наши четыре хода, содержащие по 16 клеток, соединить в порядке *A*—*B*—*E*—*C* друг с другом. Но в таком случае получается ход коня. Рис. 41 показывает, как получается в данном случае полный ход коня; причём числа указывают порядок отдельных ходов коня.

Само собою, задача о ходе коня может быть задана и на другой какой-либо доске, не шахматной: на прямоугольной или иной формы, хотя в этих случаях задача может оказаться и неразрешимой. Но на таких задачах мы здесь останавливаться не будем.

§ 4. МАГИЧЕСКИЕ ХОДЫ КОНЯ

Особенно интересны те формы полного хода коня, когда суммы чисел, указывающие, в каком порядке конь переходит с одной клетки на другую, и расположенные в одной горизонтальной строке или в одном вертикальном столбце, равны одному и тому же числу. Такие ходы коня, обладающие свойствами магических квадратов (которые мы рассмотрим в следующей главе), называют магическими или полумагическими. Такими ходами коня много занимались любители, и ими были подобраны многие интересные случаи. Как сказано выше, суммы чисел, находящихся в одной и той же строке или одном и том же столбце, равны одному и тому же числу; легко подсчитать, что суммы эти должны быть равны 260.

50	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	25	34	15	38	260
10	49	64	21	40	13	36	27	260
61	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
59	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	55	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Рис. 42

Данная на рис. 42 схема магического[1] хода коня составлена русским теоретиком шахмат Янишем. Этот ход коня замечателен не только тем, что удовлетворяет обычному условию магического хода коня, но и тем, что является замкнутым. Кроме того, он симметричен, так как при повороте на 180 градусов первая половина доски (1—32) переходит во вторую (32—64). Замечательно то, что он составлен из двух замкнутых ходов по 32 клетки в каждом, так как клетка 1 связана ходом коня с 32, а клетка 33 — с 64.

[1] Собственно говоря, слово «магический» здесь не вполне подходит, так как сумма чисел диагоналей не равна сумме чисел, находящихся, например, в первой строке. Магические ходы коня в полном смысле слова, по-видимому, невозможны, по крайней мере, до сих пор они никем не были составлены.

Глава VIII
МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

На своей известной гравюре «Меланхолия» Альбрехт Дюрер, выдающийся математик и автор труда по геометрии, в аллегорической фигуре изображает искания и стремления в физико-математических науках. Эта женская фигура, сидящая в пытливой задумчивости, окружена геометрическими телами (шар, многогранник) и разнообразными приборами для измерения, взвешивания и т. д. На этой гравюре фигурирует не только геометрия, но и арифметика. Над головой женской фигуры находится числовой квадрат, который воспроизведён отдельно на рис. 43. В его 16 клетках помещены числа от 1 до 16; из них мы 2 средних числа нижней строки напечатали жирным шрифтом, так как взятые вместе они изображают год,

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	**15**	**14**	1

Рис. 43

1514-й, в который появилась гравюра. Эти 16 чисел расположены в квадрате так, что сумма чисел любого горизонтального ряда или строки, например третьего: 9, 6, 7, 12 — равна всегда 34. Это число получится также, если сложить числа какого-либо вертикального ряда или столбца — например, первого слева: 16, 5, 9, 4. Точно так же сумма чисел каждой диагонали, а именно 16, 10, 7, 1 и 13, 11, 6, 4, равна 34. *Числовой квадрат, обладающий тем свойством, что сумма чисел каждого горизонтального, вертикального и диагонального ряда равна одному и тому же числу, называют магическим квадратом.* Конечно, предполагается, что числа, находящиеся в клетках магического квадрата, образуют последовательный ряд идущих друг за другом целых чисел. Например, в квадрате на рис. 43 — 1, 2, 3 ... 16. Причём предполагается, что этот ряд всегда начинается с 1, если предварительно не указывается, что он должен начаться с другого числа. Часто постоянная сумма получается не только от сложения чисел, находящихся в одном и том же ряду квадрата, но от сложения чисел того же квадрата, подобранных иным образом. Например, в квадрате Дюрера, разделённом на четыре квадрата, содержащих по четыре клетки, сумма чисел каждого квадрата также равна 34; сумма чисел квадрата, содержащего четыре внутренние клетки, также равна 34; сумма четырёх чисел, находящихся в углах квадрата (16, 13, 4, 1), опять равна 34; далее, сумма чисел квадрата четверного хода 5, 2, 12, 15 и четверного хода 3, 8, 14, 9 тоже равна 34; далее, тому же числу равны суммы чисел ромбов четверного хода 16, 11, 1, 6 и 13, 10, 4, 7 и т. д. Отсюда видно, что магический квадрат обладает замечательными свойствами, чем объясняется его древняя связь с мистикой и суевериями. О связи магических квадратов с обычаями и верованиями людей того времени мы поговорим ещё в § 5 этой главы.

§ 2. ДЕВЯТИКЛЕТОЧНЫЙ МАГИЧЕСКИЙ КВАДРАТ

Шестнадцатиклеточный квадрат Дюрера не является примером самого простого магического квадрата, так как имеются такие квадраты, содержащие и $3 \times 3 = 9$ клеток. Читатель сам понимает, что мы должны исключить из рассмотрения магические квадраты с $2 \times 2 = 4$ клетками. Постараемся теперь составить магический квадрат с девятью клетками, т. е. разместить числа 1, 2 ... 9 в клетках рис. 45 так, чтобы сумма каждого из горизонтальных, вертикальных и диагональных рядов была постоянно равна одному и тому же числу. Как велика должна быть эта сумма — вот вопрос, на который следует ответить прежде всего. Мы получим ответ скорее, если все девять чисел дважды подпишем одно под другим, но в противоположных направлениях, т. е. напишем так:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 44

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Так как сумма каждой пары чисел, подписанных одно под другим, равна 10, то сумма чисел обоих рядов равна 90, а каждого — 45. Итак, сумма первых девяти целых чисел равна 45. Но в нашем 9-клеточном квадрате всего три строки (или три столбца), поэтому сумма чисел всех трёх строк (или трёх столбцов) равна 45. Следовательно, на каждую строку или на каждый столбец приходится 15. Значит, постоянная сумма, которую нам надо было определить, равна 15.

Теперь нам предстоит девять чисел от 1 до 9 разместить в квадрате так, чтобы каждый из восьми рядов — 3 строк, 3 столбцов и 2 диагоналей — имел эту постоянную сумму 15. Легко убедиться, что можно составить следующие восемь, и только восемь, сумм по 15 из чисел 1—9, из которых каждая содержит по три слагаемых:

1, 5, 9;	1, 6, 8;	2, 4, 9;	2, 5, 8;
2, 6, 7;	3, 4, 8;	3, 5, 7;	4, 5, 6.

В эти восемь троек чаще всех других чисел входит число 5, а именно 4 раза, поэтому не трудно понять, что число 5 должно быть помещено во внутренней клетке искомого магического квадрата, так как эта клетка входит в четыре ряда (рис. 45), обладающих тем свойством, что сумма чисел каждого ряда равна определённому числу — 15. Далее, эти восемь троек заключают в себе каждое чётное число (2, 4, 6, 8) 3 раза, а каждое нечётное (1, 3, 7, 9) — по 2 раза. Но так как угловые клетки магического квадрата принадлежат одновременно трём рядам — строке, столбцу и диагонали (сумма чисел каждого ряда равна 15), то в них должны быть упомянутые четыре чётных числа. Наоборот, четыре средние клетки двух внешних строк и двух внешних столбцов должны быть заняты нечётными числами. Если предположить, что верхняя левая угловая клетка занята числом 2, то в нижней правой угловой клетке придётся поместить число 8, иначе сумма чисел диагонали не будет равна 15. Для двух других угловых клеток остаются, таким образом, лишь числа 4 и 6. Предположим, что мы заняли числом 4 верхнюю правую угловую клетку; тогда нам придётся число 6 поместить в нижней левой угловой клетке. В таком случае остаётся оставшиеся нечётные числа 1, 3, 7 и 9 разместить по средним клеткам, имея в виду, что сумма чисел каждого столбца или строки должна быть равна 15. Получаем магический квадрат, изображённый на рис. 46.

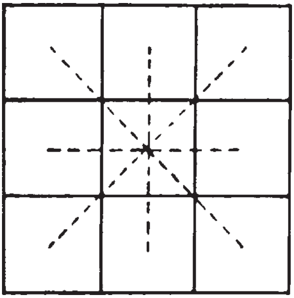


Рис. 45

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Рис. 46

Но нетрудно понять, что наша задача имеет восемь решений: каждое из четырёх чисел — 2, 4, 6, 8 — может занять верхнюю левую угловую клетку (например, 6); число же нижней правой угловой клетки зависит, конечно, от выбора числа для верхней левой угловой ($15 - 5 - 6 = 4$); но при определённом выборе последнего числа (6) для двух других угловых клеток остаются остальные два чётных числа (2 и 8), которые мы можем разместить в них двояким образом (либо 2 в нижней левой и 8 в верхней правой, либо наоборот). Таким образом, для каждого чётного числа 2, 4, 6, 8, помещённого в верхнюю левую клетку, имеются два решения; следовательно, решений имеется всего восемь. Из магического квадрата на рис. 46 можно следующим образом получить остальные семь решений. Повернув этот квадрат на каждый из углов 90°, 180°, 270°, получим прежде всего три решения, которые вместе с квадратом на рис. 46 составят четыре решения. Отображением в зеркале этих четырёх квадратов получим остальные четыре решения. Но впредь квадраты, полученные путём вращения и отображения данного квадрата, мы не будем считать отличными от последнего; таким образом, мы можем в указанном смысле считать, что существует только один магический квадрат с числами 1, 2 ... 9.

Вопрос 18. В вилле Албани в Риме имеется вделанный в мрамор магический квадрат с 9×9 клетками, заполненными числами от 1 до 81. Чему равна сумма чисел, находящихся в одном ряду?

§ 3. ОБЩИЙ МЕТОД ОБРАЗОВАНИЯ МАГИЧЕСКОГО КВАДРАТА С НЕЧЁТНЫМ ЧИСЛОМ КЛЕТОК

Квадраты более чем с четырьмя клетками могут быть всегда заполнены соответствующими числами так, чтобы из них образовались магические квадраты. Задача образования магических квадратов значительно легче для квадратов с нечётным, чем с чётным числом клеток. Поэтому мы прежде всего займёмся изложением общего приёма образования магических квадратов с нечётным числом клеток. С сущностью этого приёма легче всего ознакомиться на частном примере, а именно на квадрате с $5 \times 5 = 25$ клетками. 25 чисел, которые должны быть размещены по 25 клеткам этого квадрата, мы запишем следующим образом:

Схема

$1 = 1$	$2 = 2$	$3 = 3$
$6 = 1 \times 5 + 1$	$7 = 1 \times 5 + 2$	$8 = 1 \times 5 + 3$
$11 = 2 \times 5 + 1$	$12 = 2 \times 5 + 2$	$13 = 2 \times 5 + 3$
$16 = 3 \times 5 + 1$	$17 = 3 \times 5 + 2$	$18 = 3 \times 5 + 3$
$21 = 4 \times 5 + 1$	$22 = 4 \times 5 + 2$	$23 = 4 \times 5 + 3$

$4 = 4$	$5 = 5$
$9 = 1 \times 5 + 4$	$10 = 1 \times 5 + 5$
$14 = 2 \times 5 + 4$	$15 = 2 \times 5 + 5$
$19 = 3 \times 5 + 4$	$20 = 3 \times 5 + 5$
$24 = 4 \times 5 + 4$	$25 = 4 \times 5 + 5.$

В этой схеме одно под другим стоят те числа, которые при делении на 5 имеют один и тот же остаток: в первом столбце — имеющие остаток 1, во втором — 2 и т. д., наконец, в последнем — имеющие остаток 0. Числа, имеющие при делении на 5 остаток 0 (т. е. делящиеся нацело на 5), мы по причинам, которые будут указаны позднее, изобразили как числа с остатком 5. В одних и тех же *строках* нашей схемы находятся числа, имеющие при делении на 5 одно и то же частное: в первых строках — числа меньшие 5 и само число 5 (первое их слагаемое 0, как говорят, кратно 5, ибо, например, $2 = 0 \times 5 + 2$); во вторых — числа, имеющие частное 1 (первое их слагаемое однократно 5); в третьих — имеющие частное 2 (первое их слагаемое двукратно 5); в четвёртых — имеющие частное 3 (первое их слагаемое трёхкратно 5); наконец, в пятых — имеющие частное 4 (первое их слагаемое четырёхкратно 5). Полагая, что не произойдёт недоразумений, мы в дальнейшем будем употреблять слова «схема», «число с остатком четыре» (одно из чисел из 4-го столбца) и «трёхкратное 5».

Прежде чем перейти к образованию магического квадрата, постараемся решить следующую весьма лёгкую задачу. Положим, что надо разместить наши 25 чисел в 25 клетках квадрата так, чтобы суммы чисел горизонтальных рядов (т. е. строк) были бы равны одному и тому же числу. Последнее число, как нетрудно понять, должно быть равно $\frac{25\times25}{2\times5}=65$ (см. с. 93). Эта частичная задача легче нашей основной, потому что в ней нет требования относительно сумм чисел вертикальных и диагональных рядов: ведь, в сущности, она заключается в разделении 25 чисел на пять групп по пять чисел в каждой (нас не интересует порядок чисел в каждой группе), причём сумма чисел каждой такой группы должна равняться одному и тому же числу (65). Такое подразделение мы получим, если из вышеприведённой схемы будем отбирать по пять чисел так, чтобы любые два числа такой пятёрки *не принадлежали одновременно ни одной и той же строке и ни одному и тому же столбцу*. В самом деле, в сумму любых таким образом выбранных пяти чисел, находящихся в различных столбцах, входят все остатки 1, 2, 3, 4 и 5 и лишь по 1 разу; но так как все эти пять чисел находятся в различных строках, то в эту сумму, кроме остатков 1, 2, 3, 4, 5, входят: нулькратное 5, однократное 5, двукратное 5, трёхкратное 5 и четырёхкратное 5. Для примера возьмем пять чисел, находящихся в диагональном ряду нашей схемы; эти числа принадлежат различным строкам и различным столбцам схемы, поэтому они образуют группу с постоянной суммой (65):

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
7 &= 1 \times 5 + 2 \\
13 &= 2 \times 5 + 3 \\
19 &= 3 \times 5 + 4 \\
25 &= 4 \times 5 + 5.
\end{aligned}$$

В эту группу пяти чисел входят все пять кратных (нулькратное, однократное и т. д.) и пять остатков. Легко понять, что таких групп имеется только пять, так как и чисел имеется всего 25. В сумму чисел каждой группы входят по 1 разу каждое кратное и каждый остаток; поэтому-то суммы чисел всех пяти групп равны между собой. Эта сумма должна быть равна сумме всех кратных и всех остатков, именно $(1 \times 5 + 2 \times 5 + 3 \times 5 + 4 \times 5) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$; в результате получается, конечно, число 65.

Примером второй такой группы может служить следующая:

$$
\begin{aligned}
2 &= 2 \\
8 &= 1 \times 5 + 3 \\
14 &= 2 \times 5 + 4 \\
20 &= 3 \times 5 + 5 \\
21 &= 4 \times 5 + 1.
\end{aligned}
$$

Эти числа опять содержат по 1 разу каждое кратное и по 1 разу каждый остаток, поэтому и их сумма равна 65.

Вот ещё одна группа:

$$
\begin{aligned}
3 &= 3 \\
10 &= 1 \times 5 + 5 \\
12 &= 2 \times 5 + 2 \\
16 &= 3 \times 5 + 1 \\
24 &= 4 \times 5 + 4.
\end{aligned}
$$

И эта группа содержит все кратные и все остатки лишь по 1 разу; другими словами, все пять чисел этой группы принадлежат различным столбцам и различным строкам схемы. Мы можем легко получить из оставшихся 10 чисел ещё две такие группы. Если мы выпишем пять чисел каждой группы в одну строку, то получим следующее подразделение 25 чисел на пять групп, удовлетворящих выше поставленному условию:

1	7	13	19	25
2	8	14	20	21
3	10	12	16	24
4	6	15	18	22
5	9	11	17	23

Мы получили квадрат, удовлетворяющий относительно горизонтальных рядов требованию магического квадрата — постоянству сумм, так как сумма чисел каждой строки равна одному и тому же числу (65). Это постоянство суммы каждой строки квадрата вытекает из того, что в каждой из них находятся числа, из которых любые два не принадлежат одновременно ни одному горизонтальному или вертикальному ряду схемы. Суммы же чисел каждого из столбцов квадрата не удовлетворяют основному требованию магического квадрата. Путём перестановки чисел каждой строки вряд ли нам удастся удовлетворить этому требованию, так как при расположении чисел каждой из пяти групп мы никакой системы не придерживались. Можно было бы, конечно, образовать квадрат, *столбцы* которого удовлетворяли бы условию постоянства сумм, подобно тому как мы только что образовали квадрат, *строка* которого ему удовлетворяет. Но в этом нет надобности, тем более что поворотом уже полученного квадрата на 90° получается такой квадрат. Мы приблизимся к нашей цели — получению магического квадрата, если постараемся расположить все 25 чисел так, чтобы не только в каждую строку, но также и в каждый столбец одновременно входили все остатки и все кратные. Для этого впишем 25 чисел нашей схемы в 25-клеточный квадрат, снабжённый ещё четырьмя террасами, как показано на рис. 47. Числа первой строки нашей схемы (1, 2, 3, 4, 5) заполняют первую диагональ, идущую вверх слева направо; числа второй строки (6, 7 ... 10) заполняют в том же направлении диагональ, параллельную первой, и т. д. *Сущность предлагаемого нами приёма заключается в том*, *что каждая терраса вдвигается в квадрат так*, *чтобы её основание совпало с противоположной стороной квадрата*. Тогда числа, вписанные в террасы, заполняют пустые клетки квадрата. Получаемый таким способом квадрат (рис. 48) и есть искомый магический.

Строки и столбцы квадрата, образованного указанным приёмом, удовлетворяют нашему основному условию, так как каждая строка и каждый столбец квад-

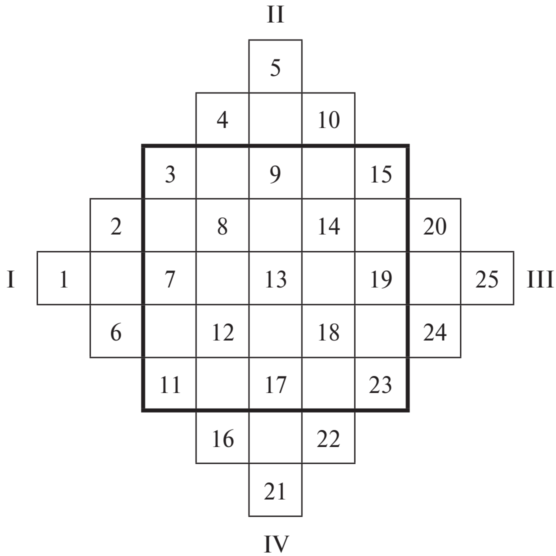


Рис. 47

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Рис. 48

рата (рис. 48) содержат все остатки и все кратные, и притом только по 1 разу. Если обратимся, например, к числам 6, 7, 8, 9, 10 (рис. 47), то увидим, что 7, 8, 9 находятся в верхних трёх строках 25-клеточного квадрата, число же 6, при вдвигании террасы I, займёт клетку четвёртой строки, в то время как число 10 займёт клетку пятой строки, при вдвигании террасы II. Следовательно, числа 6, 7, 8, 9, 10, обладающие тем свойством, что все они в нашей схеме однократны 5, распределяются по пяти различным строкам квадрата на рис. 48. Значит, в каждой его строке находится одно число однократное 5.

На том же рис. 47 легко усмотреть, что пять чисел — 6, 7, 8, 9, 10 — распределяются по различным столбцам рис. 48 (7, 8, 9 находились в первых трёх столбцах рис. 47, число 10 вдвиганием террасы II займёт клетку в четвёртом, а число 6 вдвиганием террасы I займёт клетку в пятом). Следовательно, каждый столбец также содержит по одному однократному 5 числу. Понятно, что можно применить те же рассуждения для другого какого-либо ряда на рис. 47, например для ряда 21, 22, 23, 24, 25, содержащего все числа нашей схемы, четырёхкратные 5. Так же как и в предыдущем случае, легко убедиться, что эти пять чисел распределяются по пяти разным строкам и по пяти разным столбцам квадрата на рис. 48. Следовательно, каждая строка и каждый столбец этого квадрата содержат лишь по одному числу, четырёхкратному 5. Вообще, таким же образом можно убедиться, что в каждую строку и в каждый столбец нашего квадрата каждое кратное входит только по одному разу. Но нетрудно понять, что это правильно также и для остатков. Например, ряд чисел 2, 7, 12, 17, 22, составляющих диагональ на рис. 47, идущую вниз слева направо, посредством вдвиганий соответствующих террас, распределятся по пяти различным строкам и пяти различным столбцам квадрата на рис. 48. Но так как числа 2, 7, 12, 17, 22 имеют одинаковые остатки 2, то опять-таки в каждой строке и в каждом столбце квадрата на рис. 48 должно находиться по одному — и только одному — числу с остатком 2. Это рассуждение правильно не только для остатка 2, но и для любого другого.

Этим доказано, что каждая строка и каждый столбец квадрата на рис. 48 содержат лишь по одному разу каждый остаток и каждое кратное. Следовательно, суммы чисел каждой строки и каждого столбца равны одному и тому же числу, а именно 65.

Остаётся проверить, образуют ли обе диагонали ту же сумму. Одна из них содержит числа 3, 8, 13, 18, 23 (рис. 48), эти числа имеют различную кратность. Следовательно, в диагональ входит по одному числу каждой кратности. Но эти числа имеют одинаковые остатки, а именно 3. Сумма же всех остатков равна такому же числу, а именно 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, какому равно произведение среднего[1] числа 3 на 5. Поэтому сумма чисел этой диагонали также равна 65. Другая диагональ (11, 12, 13, 14, 15) содержит, верно, все остатки, но зато её числа, принадлежащие к одной и той же строке схемы, имеют одинаковую кратность. Но их кратность есть среднее из всех кратных, поэтому сумма чисел второй диагонали также равна 65 (1 + 2 + + 3 + 4 + 5 = 15; (2 × 5) × 5 = 50; 15 + 50 = 65). Таким образом, квадрат на рис. 48 обладает всеми свойствами магического квадрата.

Вопрос 19. Составьте по этому же способу магический квадрат из 49 клеток.

§ 4. КВАДРАТЫ С ЧЁТНЫМ ЧИСЛОМ КЛЕТОК

Образование магических квадратов с чётным числом клеток значительно труднее, чем с нечётным. Поэтому мы здесь ограничимся более простым случаем,

---

[1] Это справедливо лишь для числа 5 или для другого *нечётного* числа. По этой и по другим причинам, которые легко понять, но которых мы здесь касаться не будем, изложенный способ образования квадрата верен лишь для нечётного квадрата.

когда число клеток в каждом ряду не только чётно, но и делится без остатка на 4. Следовательно, мы разберём лишь те магические квадраты, у которых число клеток в каждом ряду равно 4, 8, 12, 16... В качестве примера разберём квадрат с 8 × 8 (64) клетками. Прежде всего впишем в клетки квадрата числа от 1 до 64 в их натуральном порядке, как показано на рис. 49. Каждой клетке (или каждому числу) сопоставим противолежащую (противолежащее) следующим образом: например, третьей клетке четвёртого столбца слева, в которой находится число 20, соответствует, как противолежащая, третья клетка *снизу* четвёртого столбца *справа* — в этой клетке находится число 45. Сумма чисел, находящихся в этих двух клетках, равна 65; вообще, сумма любой пары противолежащих чисел равна тому же числу (65). В самом деле, в двух противолежащих клетках находятся числа, одинаково удалённые от концов ряда 1, 2 ... 62, 63, 64; ведь 20 настолько удалено от 1, насколько 45 от 64. Если все числа ряда 1, 2, 3 ... 62, 63, 64 выписать в одну строку и подписать над ней этот же ряд в обратном порядке:

1, 2, 3 ... 62, 63, 64
64, 63, 62 ... 3, 2, 1,

то нетрудно, как и раньше (с. 93), убедиться, что сумма чисел, равностоящих от концов ряда, всегда равна 65.

Число 1 противолежит на рис. 49 числу 64; число 10 — числу 55 и т. д.; вообще если число находится в том же диагональном ряду, что и числа 1 и 10, то противолежащее ему число находится в том же ряду. Это верно и для второго диагонального ряда, именно: число 8 «противолежит» числу 57; 15 — числу 50 и т. д. Поэтому восемь чисел, находящихся в одной и той же диагонали, делятся на четыре пары противолежащих чисел. Но сумма чисел такой пары, как мы видели,

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Рис. 49

равна 65, поэтому сумма восьми чисел каждой диагонали равна 65 × 4 = 260. Читателю нетрудно вычислить, что последнему числу должна быть равна сумма каждого ряда (строки, столбца и диагонали) искомого магического квадрата! Итак, диагонали при натуральном расположении чисел на рис. 49 уже удовлетворяют основному условию магических квадратов. Читатель должен был это предвидеть, так как если (рис. 49) наименьшее число (1) сложить с наибольшим (64), десятое по величине с начала сложить с десятым по величине с конца и т. д., то в каждом случае получается такое среднее значение (65), что в результате сложения этих пар получается постоянное число (260).

Однако *строки* и *столбцы* на рис. 49 не удовлетворяют основному требованию магических квадратов: сумма чисел первой строки значительно меньше, а сумма чисел последней значительно больше постоянной суммы чисел каждого ряда искомого квадрата. Но мы можем суммы чисел первой и последней строк уравнять, приняв во внимание, что первая сумма настолько меньше требуемой 65 × 4 = 260, насколько вторая больше её. Сумма чисел этих двух строк равна $65 \times 8 = 260 \times 2$, так как они содержат восемь пар противолежащих чисел. Легко понять, что разность между каким-либо числом последней строки и находящимся над ним числом первой строки постоянно равна 56. Следовательно, суммы этих строк сравняются, если мы четыре числа первой строки заменим четырьмя находящимися под ними числами последней строки: например, заменой 1, 2, 3, 4 числами 57, 58, 59, 60 или 1, 2, 7, 8 числами 57, 58, 63, 64. После такой замены сумма каждой строки (1 и 8) будет равна 260. В подобной же зависимости находятся вторая и предпоследняя строки, и суммы этих строк можно уравнять указанным образом, так что каждая сумма в конце концов будет равна 260. То же относится к любой паре строк, находящихся на одинаковом расстоянии от крайних, поэтому мы соответствующими заменами можем получить квадрат, все восемь строк которого удовлетворяют основному требованию магических квадратов. Но этому требованию не будут удовлетворять столбцы и, вообще говоря, диагонали, так как последние, удовлетворяя ему вначале (см. выше), при происшедших перестановках могли измениться и уже перестать удовлетворять этому требованию.

Сумма чисел, находящихся в каждом столбце, при всех изложенных перестановках не меняется, так как при этом каждое число остаётся в своём же столбце, хотя порядок чисел последнего изменяется. Мы можем теперь по отношению к столбцам применить те же рассуждения, какие были применены выше по отношению к строкам, и убедиться, что можно уравнять суммы, например, первого и последнего столбцов путём взаимной замены четырёх чисел первого четырьмя числами последнего. В результате таких замен сумма чисел каждого столбца окажется равной 260, а сумма чисел каждой строки, рассматриваемой как целое, не изменится, так как каждое число останется в своей же строке. Предположим, что в результате первых перестановок (чисел строк) число 1 заняло клетку числа 57, в результате же вторых перестановок (чисел столбцов) число 1 с клетки 57 очутится в клетке 64; таким образом, в итоге число 1 перейдёт со своей начальной клетки в противолежащую.

Этот пример мы привели не потому, что намерены проследить последовательные положения каждого числа при всех перестановках, а с целью показать, что после них каждое число может быть переведено в клетку, противолежащую той, которую оно занимало вначале. С другой стороны, мы знаем, что при перестановках происходит следующее: половина чисел, например, первой строки переводится в последнюю строку, а из последней стоящие под ними числа — в освободившиеся клетки первой. Но это не значит, что перемещаемое число последней строки должно занять освободившееся место первой строки, стоящее как раз над ним; нет, оно может занять любое из освободившихся мест. Точно так же перемещаемое число первой строки может занять любое из освободившихся мест последней. Кроме того, мы видели, что 1 при дальнейших перемещениях может оказаться в 64-й клетке. Поэтому мы можем четыре числа, например 1, 2, 7, 8, первой строки заменить четырьмя числами последней 57, 58, 63, 64, но 1 — не числом 57, 2 — не 58, 7 — не 63, 8 — не 64, а 1 — числом 64, 2 — числом 63, 7 — 58, 8 — 57, т. е. каждое из чисел 1, 2, 7, 8 заменяется противолежащим ему числом. Но этой заменой приводятся в надлежащий порядок и соответствующие столбцы.

Теперь возникает вопрос: как узнать, какую половину чисел первой строки следует заменить соответствующей половиной последней, какую половину второй заменить соответствующей половиной предпоследней и т. д., таким образом, чтобы вместе с этим одновременно были произведены необходимые перемещения в столбцах.

Укажем на наиболее простой приём. *Делят весь квадрат с рис. 49 на 16 частей по 4 клетки в каждой, как указано на рис. 50 (где a и b обозначают квадраты, содержащие 4 клетки), и затем заменяют либо все числа квадратов a, либо все числа квадратов b числами им противолежащими.* Легко понять, что при этом способе половина чисел каждого столбца и каждой строки заменяются противолежащими. Далее, читатель, вероятно, сам заметил, что при перемещениях на рис. 49, в которых меняют свои места лишь противолежащие числа, числа каждой диагонали остаются в ней же, так как в каждой диагонали находятся лишь противолежащие числа. Поэтому суммы чисел диагоналей, которые уже при натуральном расположении чисел 1—64 на рис. 49 были равны одному и тому же числу 260, остаются неизменными и тем самым удовлетворяют после перемещений на рис. 50 по-прежнему основному требованию магических квадратов, Таким образом, по указанному выше способу мы получим квадрат, все строки, столбцы и диагонали которого удовлетворяют этому требованию. Если произвести замены в квадратах на рис. 50, то получим магический квадрат, изображённый на рис. 51.

Если число клеток каждого ряда квадрата не делится без остатка на 4, то общее число его клеток не делится

a	b	b	a
b	a	a	b
b	a	a	b
a	b	b	a

Рис. 50

64	63	3	4	5	6	58	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	7	59	60	61	62	2	1

Рис. 51

на 16; поэтому разделение квадрата на 16 частей, как на рис. 50, невозможно. Поэтому наш способ составления магического квадрата, например, для квадрата с $10 \times 10 = 100$ клетками более не применим. Но мы на этом и ему подобных случаях останавливаться не будем, так как приёмы их составления весьма сложны.

Вопрос 20. Составить магический квадрат с $12 \times 12 =$ $= 144$ клетками.

§ 5. МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ НА АМУЛЕТАХ

В конце § 1 было сказано, что появление магических квадратов тесно связано с суевериями и предрассудками. Эта связь и объясняет происхождение названия «магический». Остановимся на этом несколько подробней.

Как известно, в XVI и XVII столетиях имела широкое распространение так называемая астрология — мнимая наука, основанная на том суеверии, что все события на земле и судьбы людей находятся в зависимости от положения звёзд и, особенно, планет; по ним даже пытались предсказывать события и будущее человека. Астрологи обожествляли планеты и давали им имена наиболее популярных в древности богов. В докоперниковой системе насчитывалось семь планет, именно: Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер, Сатурн[1]. Между этими семью планетами, с одной стороны, и магическими квадратами, с другой, астрологи установили тесную связь: к Сатурну, наиболее отдалённой планете, они отнесли магический квадрат с наиболее возможно меньшим числом клеток, именно с девятью; поэтому квадрат, изображённый на рис. 46 (с. 95), прежде часто называли «Tabula Saturni» — таблицей Сатурна. Соответственно этому Юпитеру, планете, ближайшей к Сатурну, соответствует магический квадрат с 16 клетками, как ближайший к квадрату с 9 клетками и т. д. В результате получается следующая таблица, устанавливающая связь между планетами и магическими квадратами:

Планета	**Магический квадрат**	
	Число клеток	**Сумма чисел ряда**
Сатурн	$3 \times 3 = 9$	15
Юпитер	$4 \times 4 = 16$	34
Марс	$5 \times 5 = 25$	65
Солнце	$6 \times 6 = 36$	111
Венера	$7 \times 7 = 49$	175
Меркурий	$8 \times 8 = 64$	260
Луна	$9 \times 9 = 81$	369

[1] В те времена понятие «планеты» было очень схожим с понятием «звёзды» и обозначало все небесные тела. Сейчас же выделяют звёзды, например – наше Солнце, планеты – несветящиеся твёрдые или газовые тела, вращающиеся вокруг звёзд, и спутники – вращающиеся в свою очередь уже вокруг планет, как наша Луна. (*Примеч. ред.*)

Эти магические квадраты наносились на амулеты, так что каждому из них приписывали свойства бога, имя которого носила планета, соответствующая нанесённому на этот амулет квадрату. По квадрату, находящемуся на амулете, последнему давали и название: например, амулет с квадратом из 16 клеток называли амулетом Юпитера. На рис. 52—59 (с. 112) даны изображения обеих сторон четырёх из семи амулетов. Амулет Сатурна, изображённый здесь, хранится в Венской коллекции монет и медалей, остальные амулеты, относящиеся к XVII и XVIII столетиям, хранятся в других коллекциях (например, амулет Юпитера — в Берлинском собрании монет).

О магических квадратах, изображённых на этих амулетах, можно сказать следующее.

Квадрат Сатурна имеет такую же форму, как и квадрат на рис. 46 (с. 95); квадрат Юпитера можно получить из квадрата Дюрера (рис. 43, с. 91), если в последнем переставить строки в обратном порядке (т. е. первую заменить четвёртой, вторую — третьей, третью — второй, четвёртую — первой) и затем переставить два внутренних столбца; квадрат Марса можно разделить на 5 частей, из которых внутренняя образует квадрат, содержащий все 13 нечётных чисел, а каждая из 4 остальных частей содержит по 3 чётных числа, образуя треугольник у одной из вершин квадрата. Числа на квадрате амулета Венеры изображены в древнееврейских знаках, встречающихся очень часто на всякого рода амулетах[1]; читатель, ответивший на вопрос 19 (с. 103), может получить квадрат амулета Марса, если полученный им квадрат он повернёт на 90° по часовой стрелке и затем заменит числа древнееврейскими обозначениями. Таким же образом полу-

[1] Но в противоположность обычному способу древнееврейского письма десятки стоят слева (не справа) от единиц.

Рис. 52

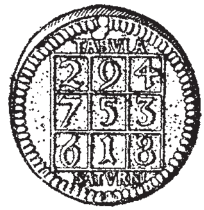


Рис. 53

Рис. 54

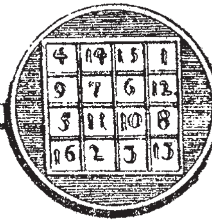


Рис. 55

Рис. 56

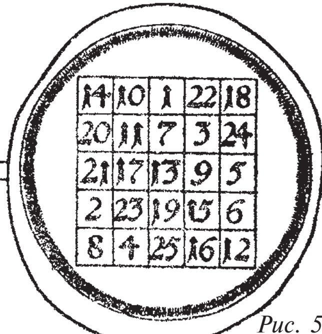


Рис. 57

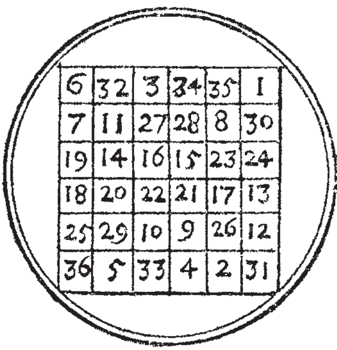


Рис. 58

Рис. 59

чается магический квадрат Луны, а именно составляют магический квадрат с 81 клетками по способу, указанному в § 3, и затем его поворачивают на 90° по часовой стрелке. Сторону каждого амулета, на которой изображён магический квадрат, называют обратной стороной, а другую сторону — передней. На передней стороне обычно изображено божество соответствующей планеты и выгравировано его имя. Например, на передней стороне амулета Сатурна выгравирован бог Сатурн в виде садовника с лопатой, одним из его многочисленных атрибутов; на амулете Юпитера изображён Юпитер в задумчивой позе с открытой книгой в руках; Марс — как воин — с мечом и щитом, бог Солнца — как царь, сидящий на троне, с короной и скипетром; Венера — нагая, с длинными развевающимися волосами, стоящая рядом с Купидоном, держит в правой руке стрелу; Меркурий — с его знаменитым жезлом в правой руке, с крыльями на плечах, шляпе и башмаках. Наконец, на передней стороне амулета Луны изображена карта Луны, на которой можно заметить маленькую женскую фигуру — это богиня Луна с полумесяцем в руках, на той же стороне имеется надпись большими буквами LUNA.

Более подробно останавливаться на описании амулетов планет мы не станем. Добавим только следующее: на передней стороне амулета Венеры, кроме самой богини и Купидона, изображены Весы и Телец; согласно учению астрологов, оба созвездия зодиака являются домами Венеры. То же значение имеют Овен и Скорпион для амулета Марса (рис. 56) и Лев — для Солнца (рис. 59).

Следует заметить, что не только на амулетах планет, но и на другого рода амулетах встречаются магические квадраты. Один из них, пользующийся у индусов-магометан большой популярностью, предназначен для изгнания злых духов и чертей. Магический квадрат, изображённый на этой фигуре, есть не что иное, как квадрат с рис. 46 (с. 95), повёрнутый на 180°, числа которого увеличены на 540.

Вторым примером такого амулета может служить документ, свидетельствующий о суевериях, связанных с Первой мировой войной. Этот документ представляет собой грамоту на арабском языке, долженствующую служить талисманом против неприятельских пуль. Он найден на поле брани у убитого солдата, по всей вероятности, индуса. На этом талисмане, кроме молитв на арабском языке, здесь нас мало интересующих, имеются три группы чисел, из которых каждая расположена в виде квадрата. Первый из них, содержащий девять клеток, представляет магический квадрат в полном смысле этого слова; в наших числовых обозначениях он имеет такой вид:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Этот квадрат есть зеркальное изображение квадрата с рис. 46 (с. 95). Он может быть получен также из квадрата с рис. 46 путём перестановки крайних столбцов. Из обоих 16-клеточных квадратов найденного документа один содержит в каждой строке и в каждом столбце одни и те же четыре числа, а именно самые меньшие чётные: 2, 4, 6, 8, играющие особенную роль в числовых суевериях Востока; в этом квадрате сумма чисел каждой строки и каждого столбца также равна одному и тому же числу (20). Этот квадрат, конечно, не магический в строгом смысле этого слова, но он является простейшим примером фигурного расположения чисел. Третий квадрат имеет такую же структуру, как и предыдущий, — состоит из 16 клеток, но, вместо четырёх чисел, в клетки вписаны четыре арабских имени бога.

Вопрос 21. Увеличить все числа квадрата Дюрера (рис. 43, с. 91) или квадрата Юпитера (рис. 53) на одно и то же число так, чтобы сумма чисел каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали была равна 1914 — году, имевшему роковое значение в истории человечества. Как велико это число?

Глава IX
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ

I. Половина равна целому

Д о к а з а т е л ь с т в о: Известно, что

$$a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b).$$

Так как эта формула верна для любых значений a и b, то она верна и для $b = a$, или, что то же самое, при замене в ней числа b числом a; тогда мы имеем:

$$a^2 - a^2 = (a + a) \times (a - a).$$

Левую часть этого равенства мы можем написать так: $a \times (a - a)$, в результате имеем:

$$a \times (a - a) = (a + a) \times (a - a).$$

Если мы разделим обе части последнего равенства на сомножитель $(a - a)$, то получим

$$a = a + a,$$

следовательно,

$$a = 2a$$

или

$$\frac{a}{2} = a,$$

что и требовалось доказать.

Таким же образом можно доказать:

II. Все числа равны между собой

Доказательство: Пусть a и b — два любых числа. Мы предполагаем, что они — различные числа и что число a больше числа b. Обозначим разность чисел a и b через c, т. е.

$$a - b = c$$

или

$$a = b + c.$$

Умножив обе части этого равенства на $(a - b)$, имеем:

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc.$$

Если член ac правой части этого равенства перенести в левую или, что то же самое, отнять от обеих частей равенства по ac, то получим:

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc.$$

Это равенство можно преобразовать так:

$$a \times (a - b - c) = b \times (a - b - c).$$

В обе части этого равенства входит один и тот же сомножитель ($a - b - c$); разделив на него, получим:

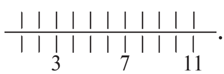
$$a = b,$$

т. е. два любых числа a и b равны между собой, что и требовалось доказать.

III. Все числа равны между собой. Второе доказательство

Читатель, вероятно, вопреки вышеприведённому доказательству, всё же не верит, что все числа равны между собой. Более всего смущают его, конечно, следствия, вытекающие отсюда: уничтожение различия между многим и немногим, между бедностью и богатством, между большим и меньшим. Поэтому, чтобы окончательно убедить читателя, приведём *второе доказательство* полученного выше результата.

Пусть a и b — два произвольных числа; мы опять предполагаем, что одно из них больше другого. В таком случае всегда существует число, находящееся посередине между числами a и b. Например, если взятые числа — 3 и 11, то таким числом будет 7:



Обозначим это срединное число для a и b, или, как говорят, среднеарифметическое чисел и через d; тогда имеем:

$$a + b = 2d$$

(для нашего примера: $3 + 11 = 2 \times 7$).

Из этого равенства следует:

$$b = 2d - a$$
$$2d - b = a.$$

Перемножив последние два равенства, получим:

$$2db - b^2 = 2da - a^2.$$

Если вычтем последнее равенство из равенства

$$d^2 = d^2,$$

то получим:

$$d^2 - 2db + b^2 = d^2 - 2da + a^2$$

или

$$(d - b)^2 = (d - a)^2.$$

Если извлечём квадратный корень из обеих частей этого равенства, то получим:

$$d - b = d - a,$$

т. е. при вычитании из числа d числа b получается такое же число, какое получится при вычитании из того же числа d числа a; следовательно, $b = a$, что и требовалось доказать.

Но если читатель всё-таки нам и теперь не поверит, то, во всяком случае, не будет оспаривать верность следующего равенства:

$$3 - 1 = 6 - 4.$$

Помножив обе части его на (–1), получаем равенство, опять не вызывающее сомнений:

$$1 - 3 = 4 - 6$$

(каждая часть этого равенства равна –2). Если прибавить к обеим частям последнего по $^9/_4$, то получается:

$$1 - 3 + {^9/_4} = 4 - 6 + {^9/_4}$$

или, что то же самое:

$$(1 - {^3/_2})^2 = (2 - {^3/_2})^2.$$

Если извлечь из обеих частей этого равенства квадратный корень, то получается:

$$1 - {^3/_2} = 2 - {^3/_2},$$

отсюда прибавлением к обеим частям по $^3/_2$ получим:

$$1 = 2.$$

Но если 1 = 2, то, прибавив к обеим частям уже этого равенства по 1, имеем:

$$2 = 3,$$

откуда посредством прибавления к обеим частям по 1:

$$3 = 4 \text{ и т. д.}$$

Следовательно, 1 = 2 = 3 = 4..., чем мы доказали, что все целые числа между собой равны.

IV. Ноль больше любого числа

Доказательство: Пусть a — произвольное положительное число, сколь угодно большое. Понятно, что число $(a - 1)$ во всяком случае меньше числа a, что записывают, как известно, в форме неравенства[1]:

$$a - 1 < a.$$

Если обе части этого неравенства умножим на $(-a)$, то получим:

$$-a^2 + a - a^2.$$

Прибавив к обеим частям по a^2, придём, наконец, к такому неравенству:

$$a < 0.$$

Этим мы получили следующее предложение: *Любое положительное, даже сколь угодно большое число меньше нуля,* что мы и хотели доказать.

Следовательно, если a означает капитал миллионера или даже миллиардера A, то последнее неравенство показывает, что этот капитал меньше капитала *0* человека, ничего не имеющего. Если b, c, d и т. д. обозначают соответственно капиталы миллионеров или миллиардеров B, C, D и т. д., то на основании последнего неравенства имеем:

$$a < 0; b < 0; c < 0; d < 0...$$

---

[1] Неравенство $x < y$ означает, что число x меньше числа y, и наоборот, неравенство $y > x$ означает, что число y больше числа x. Для последующего необходимо знание такого рода записи.

Сложив эти неравенства, получим:

$$a + b + c + d + \ldots < 0.$$

Следовательно, человек, ничего не имеющий, богаче всех миллионеров и миллиардеров, вместе взятых. Результат поистине невероятный, но непосредственно вытекающий из данного здесь математического доказательства.

V. Если число *p* меньше другого *q*, то $n \times p < q$ при любом чётном *n*

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть число p положительно ($p > 0$) и меньше второго числа q, следовательно, $p < q$. Умножив обе части этого неравенства на p, получим $p^2 < pq$. Вычитая из обеих частей последнего неравенства по q^2, будем иметь:

$$p^2 - q^2 < pq - q^2$$

или

$$(p + q) \times (p - q) < q \times (p - q).$$

Разделив это неравенство на $(p - q)$, получим:

$$p + q < q.$$

Сложим это неравенство с нашим первоначальным $p < q$. Получается, что $2p + q < 2q$. Вычтя из обеих частей последнего неравенства по q, мы будем иметь, что $2p < q$. Следовательно, при всех обстоятельствах удвоенное p (т. е. $2p$) меньше q. Точно так же, как из неравенства $p < q$ получили $2p < q$, из неравенства

$2p < q$ легко получить $4p < q$, а из последнего — $8p < q$ и т. д. Таким образом, наше утверждение доказано.

VI. Четверть больше половины

Доказательство[1]: Если читатель не согласен с предыдущими утверждениями, то он, во всяком случае, согласится с нами, что дважды взятая величина больше самой этой величины. Поэтому

$$2 \log a > \log a$$

или

$$\log a^2 > \log a.$$

Если положить, что $a = {}^1/_2$, то имеем:

$$\log {}^1/_4 > \log {}^1/_2.$$

Но, как известно, большему логарифму соответствует и большее число, поэтому

$${}^1/_4 > {}^1/_2,$$

что и требовалось доказать.

VII. В математике нет мнимых чисел, а только вещественные

Доказательство[2]: Так называемые мнимые числа имеют форму $a \times i$, где a — вещественное число,

---

[1] Предполагается, что читатель знаком с теорией логарифмов.
[2] Предполагается, что читатель знаком с теорией комплексных чисел.

а i — мнимая единица $\sqrt{-1}$. Поэтому, чтобы доказать, что в математике все мнимые числа вещественны, достаточно доказать, что мнимая единица вещественна. С этой целью умножают обе части равенства

$$\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$$

на $\sqrt{-1}$, получается:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x} = i\sqrt{-x} = \\ &= i.(i.\sqrt{x}) = \\ &= i^2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Разделив обе части этого равенства на $\sqrt{x}$, получим $i^2 = 1$, следовательно, $i = \sqrt{1}$. Таким образом, доказано, что i — вещественное число.

VIII. Существуют треугольники с двумя прямыми углами и одним острым

Д о к а з а т е л ь с т в о: На рис. 60 начерчен треугольник такого рода, именно: ΔAEF. Этот треугольник получен следующим образом. Две окружности M и N

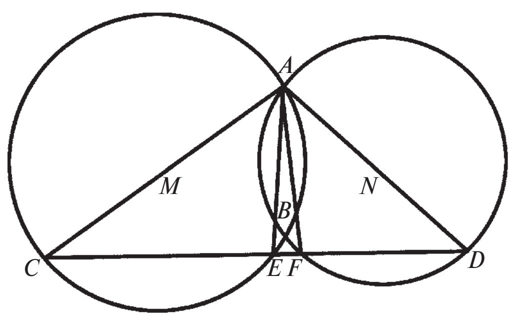


Рис. 60

пересекаются в двух точках *A* и *B*. Из одной точки пересечения, именно *A*, проведены диаметры *AMC* и *AND*. Прямая *CD*, соединяющая точки *C* и *D*, пересекает обе окружности в точках *E* и *F*. Соединив *A* с *E* и *F*, получим Δ*AEF*. Углы *AFD* и *AEC* — прямые, как вписанные углы, опирающиеся соответственно на диаметры *AND* и *AMC*. Поэтому их смежные углы *AFE* и *AEF* также прямые. Итак, в Δ*AEF* два прямых угла и один острый, что и требовалось доказать.

IX. Все треугольники равнобедренны

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть проведена в треугольнике *ABC* (рис. 61) биссектриса угла *C* и из середины *D* противолежащей ему стороны *AB* восстановлен перпендикуляр. Биссектриса и этот перпендикуляр пересекутся в точке *N*. Если теперь опустить из точки *N* перпендикуляры *NE* и *NF* на стороны *AC* и *BC* и соединить *N* с точками *A* и *B*, то:

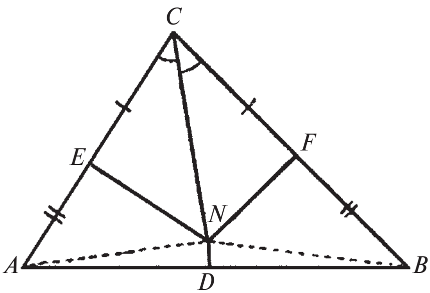


Рис. 61

1) *AND* = *BND* (треугольник *AND* равен треугольнику *BNE*), потому что *AD* = *BD*, *ND* = *ND*, а углы *ADN* и *BDN*, заключённые между ними, равны, как прямые.

Из равенства этих треугольников следует, что $AN = BN$.

2) $ECN = FCN$, потому что угол ECN = углу FCN, $CN = CN$ и углы при E и F прямые.

Из равенства этих треугольников следует, что $CE = CF$ и $FN = FN$.

3) $AEN = BFN$, потому что $AN = BN$ (по 1), $EN = FN$ (по 2) и углы при E и F прямые.

Из равенства этих треугольников следует, что $AE = BF$.

В силу равенства второй пары треугольников отрезки CE и CF (отмеченные на рис. 61 *одной* чёрточкой) между собой равны, в силу же равенства третьей пары треугольников отрезки AE и BF (отмеченные *двумя* чёрточками) также между собой равны. Отсюда вытекает, что сторона AC равна BC, т. е. всякий треугольник ABC — равнобедренный.

Точно так же, как мы доказали равенство сторон AC и BC треугольника ABC, можно, понятно, доказать равенство сторон AC и AB, отсюда следует: *все треугольники равносторонни*.

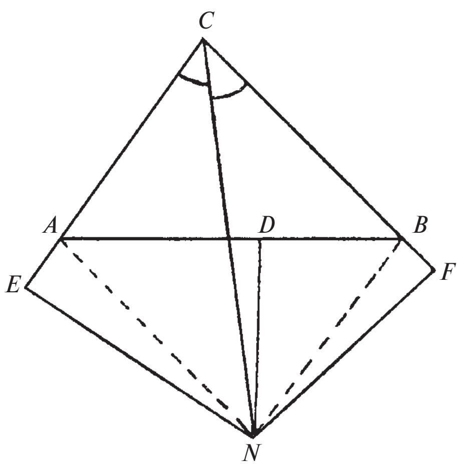


Рис. 62

Если точка пересечения *N* биссектрисой *CN* и перпендикуляра *DN* находится не внутри треугольника, а вне его (рис. 62), то всё-таки придём к прежнему выводу. Стоит только в этом случае дословно повторить вышеприведённое доказательство с одним только изменением в конце его, а именно в конце рассматривать *AC* не как сумму отрезков *CE* и *EA*, а как их разность: то же самое относится и к другой стороне *CB* треугольника. Результат получится прежний: $AC = BC$, т. е. что треугольник *ABC* равнобедренный, и затем нетрудно прийти к выводу, что этот треугольник и равносторонний.

X. 65 = 64 = 63

Всякий шахматист знает, что шахматная доска состоит из 64 клеток: из восьми рядов по восемь клеток в каждом. Здесь мы ему покажем доску такой же площади, как и его шахматная доска, но с 65 клетками такого же размера, как и клетки его доски.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Разрежем его шахматную доску на четыре части, как указано на рис. 63. Затем

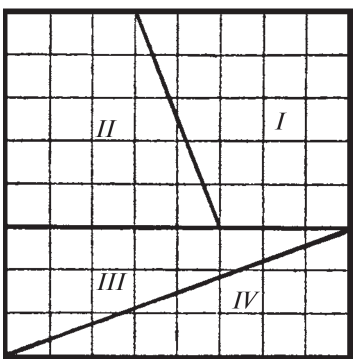


Рис. 63

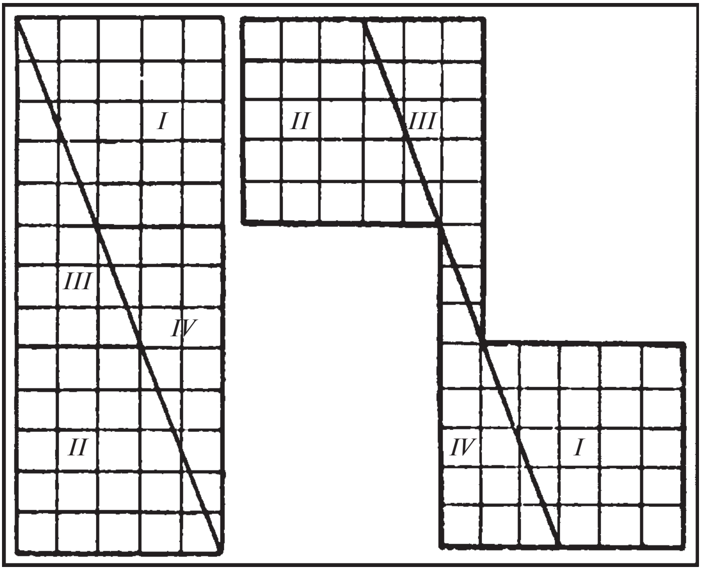


Рис. 64

сложим эти части, как показано на рис. 64 слева. Получится прямоугольник, содержащий 5 × 13 = 65 таких же клеток, какие содержит шахматная доска на рис. 63, что и требовалось доказать.

Из обеих частей полученного таким образом равенства 65 = 64 вычтем по 1, тогда получим, что 64 = 63; вторая часть равенства, указанного в заголовке, доказана. Но можно без труда непосредственно доказать, что 64 = 63. Для этой цели четыре части I, II, III и IV на рис. 63 складывают, как показано на рис. 64 справа. Тогда эти четыре части, вместе составлявшие раньше (рис. 63) 64 клетки, образуют фигуру, содержащую лишь 63 клетки такого же размера, как и клетки на рис. 64.

Из равенства чисел 65, 64, 63, естественно, вытекает равенство всех чисел, результат для нас не новый, полученный раньше иным путём.

XI. Сумма параллельных сторон трапеции равна нулю[1]

Д о к а з а т е л ь с т в о: Продолжим обе параллельные стороны трапеции (рис. 65) $BC = b$ и $AD = a$ в противоположные стороны; причём BC продолжим до точки F так, чтобы $CF = a$, сторону же AD до точки E так, чтобы

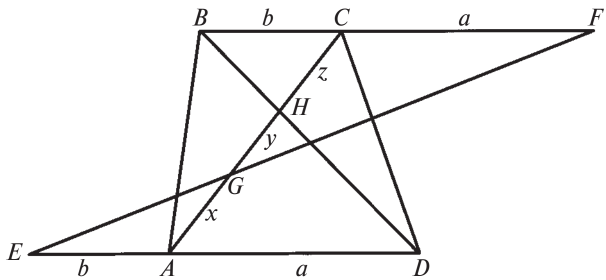


Рис. 65

$AE = b$. Затем соединяем прямой точки E и F и проводим диагонали BD и AC трапеции. Диагональ AC делится пересекающими её прямыми BD и EF на части, которые, как показано на фигуре, обозначены соответственно буквами x, y и z. Нетрудно убедиться, что треугольники BHC и AHD подобны; также подобны и треугольники EGA и CGF. Из подобия первой пары треугольников имеем:

$$\frac{b}{a} = \frac{z}{x + y},$$

из подобия же второй пары треугольников имеем:

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{y + z}.$$

[1] Заимствовано из книги Литцмана и Трира «Где ошибка».

Эти две пропорции могут быть представлены так:

$$\frac{b}{a}=\frac{z}{x+y}=\frac{x}{y+z} \qquad \text{(равенство I).}$$

Из пропорции $\frac{z}{x+y}=\frac{x}{y+z}$ почленным вычитанием обоих отношений, как известно, получается[1]:

$$\frac{z}{x+y}=\frac{x}{y+z}=\frac{z-x}{x-z};$$

поэтому на основании равенства I имеем:

$$\frac{b}{a}=\frac{z-x}{x-z}=-1.$$

Если же $\frac{b}{a}=-1$, то это означает, что $b=-a$ или $b+a=0$, что и требовалось доказать.

XII. Все окружности имеют одинаковую длину

Д о к а з а т е л ь с т в о: Представим себе два скреплённых друг с другом круга с общим центром (рис. 66)

[1] Если имеется пропорция $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, то из неё вытекает, как известно, такая: $\frac{m}{p}=\frac{n}{q}$. Из последней вычитанием из обеих частей по 1 получим $\frac{m}{p}-1=\frac{n}{q}-1$, или $\frac{m-p}{p}=\frac{n-q}{q}$, или $\frac{m-p}{n-q}=\frac{p}{q}$ и, следовательно, $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}=\frac{m-p}{n-q}$. Поэтому мы можем сказать, что из пропорции $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ почленным вычитанием членов отношений получаются пропорции $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}=\frac{m-p}{n-q}$. В тексте мы такого же рода преобразование произвели над пропорцией $\frac{z}{x+y}=\frac{x}{y+z}$.

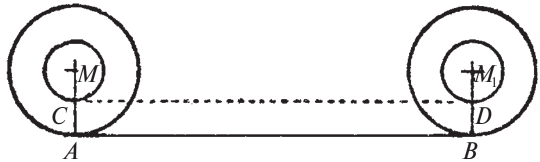


Рис. 66

или, иными словами, круглый диск с начерченным на нём меньшим концентрическим кругом. Пусть этот диск катится в плоскости по прямой линии. Предположим, что диск, сделав один оборот, пройдёт расстояние *AB* вдоль прямой, по которой он катится. Понятно, что отрезок *AB* равен длине окружности диска. В промежуток времени, в течение которого диск пройдёт расстояние *AB*, т. е. совершит полный оборот, начерченный на нём меньший круг совершит тоже лишь один оборот. Понятно, что отрезок *CD*, по которому меньший круг как бы катился, равен как раз длине его окружности. Но очевидно, что отрезки *AB* и *CD* равны между собой (*ABCD* — прямоугольник). Отсюда приходим к выводу, что длины окружностей у обоих кругов одинаковы, что и требовалось доказать.

XIII. Внутри круга имеется только одна точка, а именно центр. Все остальные точки, кажущиеся нам внутренними, на самом деле лежат на окружности

Доказательство: Пусть нам кажется, что точка *C* находится внутри круга (рис. 67). Проведём диаметр *AMB,* проходящий через эту точку *C*. Теперь построим такую точку *D*, чтобы она с точкой *C* гармонически делила отрезок *AB*. Затем из середины *F* отрезка *CD* восстановим перпендикуляр; последний пересекает окруж-

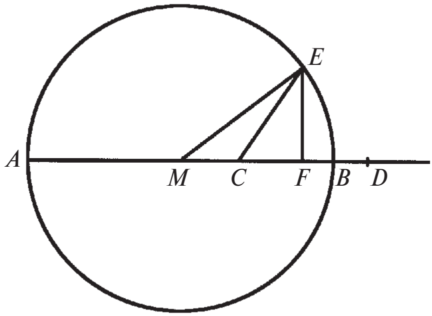


Рис. 67

ность в точке E. Наконец, соединим эту точку с точками M и C. По известному предложению[1] имеем:

$$MC \times MD = MA^2 \qquad \text{(равенство I).}$$

Но так как

$$MC = MF - CF$$
$$\text{и } MD = MF + FD = MF + CF,$$

то равенство I можно представить в такой форме:

$$(MF - CF) \times (MF + CF) = MA^2$$

или

$$MF^2 - CF^2 = MA^2 \qquad \text{(равенство II).}$$

---

[1] Читатель, которому это предложение неизвестно, может убедиться в верности его следующим образом. Если A, C, B, D суть гармонические точки, это означает, что верна следующая пропорция: $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$, которую можно написать так: $\frac{AM + MC}{AM - MC} = \frac{MD + AM}{MD - AB}$. Затем путём применения почленного сложения и вычитания (см. примеч. на с. 130) к этой пропорции получим $\frac{AM}{MC} = \frac{MD}{AM}$, откуда: $AM^2 = MC \times MD$.

Но, применяя теорему Пифагора, имеем:

$$MF^2 + FE^2 = ME^2$$
$$\text{и } CF^2 + FE^2 = CE^2,$$

следовательно,

$$MF^2 - CF^2 = ME^2 - CE^2$$

или

$$MF^2 - CF^2 = MA^2 - CE^2 \quad \text{(равенство III).}$$

Из равенств II и III, в которых левые части одинаковы, следует:

$$MA^2 = MA^2 - CE^2,$$

т. е.

$$CE = 0.$$

Следовательно, точка C совпадает с точкой E, т. е. лежит на окружности, что и требовалось доказать.

XIV. Ахиллес и черепаха

Греческому философу Зенону Элейскому приписывают много софизмов, из которых наиболее известен следующий. Быстроногий Ахиллес догоняет медленно движущуюся черепаху, от которой его отделяет известное расстояние. Догонит ли он черепаху? Зенон отвечает: «Нет. Так как пока Ахиллес достигнет положения S, в котором раньше к началу движения находилась черепаха, то последняя успеет доползти до точки S_1; когда же Ахиллес достигнет положения S_1, то опять-таки черепаха успеет дойти до точки S_2 и т. д.». Таким образом, каждый раз, когда Ахиллес достигнет точки, которой раньше достигла черепаха, последняя передвинется к этому моменту на некоторое расстояние, и Ахиллес, известный своей скоростью бега, никогда не догонит черепахи[1].

XV. Из теории вероятности

Кто знаком с простейшими принципами теории вероятности, тот, конечно, понимает, что она даёт широкое поле для ошибочных заключений и выводов. В заключение мы приведём подобный пример, данный известным путешественником по Африке Франциском Гальтоном, всесторонне образованным человеком, изучавшим антропологию, метеорологию, географию, археологию и т. д.

В одной компании заинтересовались следующим вопросом. *Три монеты бросаются несколько раз. Какой процент всех бросаний составляют те случаи, при которых у всех монет выпадет орёл или решка?* Один из присутствующих (*А*) рассуждает так: «В сущности, всё равно — бросать ли в каждом случае все три монеты одновременно или одну за другой. Поэтому для большей наглядности предположим, что в каждом отдельном случае монеты бросаются одна за другой. Я бро-

[1] Мы дали этому софизму форму, в какой он исторически сложился. Современный Зенон, для более наглядной иллюстрации основной мысли, вероятно, смог бы облечь его в другую форму. Обычно на софизм Зенона возражают, что Ахиллес будет приближаться к черепахе всё ближе и ближе и наконец перешагнёт через неё. Более наглядно читатель может себе представить этот софизм, если заменит Ахиллеса и черепаху двумя паровозами, движущимися по одному и тому же рельсовому пути в одном и том же направлении. Причём предполагается, что локомотивы отделены друг от друга некоторым расстоянием и что впереди идущий локомотив имеет значительно меньшую скорость, чем идущий сзади. По софизму Зенона задний локомотив никогда не нагонит переднего.

саю первую: выпадет либо орёл, либо решка. Теперь бросаю вторую. Как велика вероятность, что вторая монета упадёт той же стороной, что и первая? Понятно, что она равна $^1/_2$. Теперь бросаю третью монету; вероятность того, что она упадёт той же стороной, что и первые две монеты, равна половине вероятности выпадения этих двух монет одной и той же стороной, т. е. половине от половины. Следовательно, вероятность того, что все три монеты выпадут одной и той же стороной, равна $^1/_4$, т. е. возможно, что из всех бросаний 25% придётся на тот случай, который нас интересует». — «Я не согласен, — отвечает второй (*B*). — Ваше предположение, что бросание монет одну за другой равносильно одновременному, неверно и привело вас к ложному заключению. Можно убедиться в неправильности полученного вами результата следующим образом. Я бросаю одновременно все три монеты; понятно, что самое меньшее — две монеты упадут одной и той же стороной. Вероятность того, что и третья монета упадёт той же стороной, очевидно, равна $^1/_2$. Следовательно, вероятность интересующего нас случая равна $^1/_2$, т. е. из всех бросаний 50% придётся на этот случай».

Кто прав, *A* или *B*? Или, может, оба не правы?

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ

Глава I

Вопрос 1. *B* (второй) должен прыгнуть сначала с 1 на 2, затем на 13, 24, 35, 46 и т. д. Следовательно, после первого прыжка он должен становиться на места, отделённые друг от друга промежутками в 11.

Вопрос 2. *B* может выиграть, если он первым прыжком достигнет 9, а затем будет становиться на места, отделённые друг от друга промежутком 9, т. е. на 18, 27, 36 и т. д., пока не достигнет 90.

Вопрос 3. Выиграет *A,* если он сначала станет на 6, затем на 24, 42, 60, 78, 96, 114, 132 и, наконец, на 150.

Вопрос 4. Выиграет *B,* если он первым прыжком станет на 13, затем будет становиться на места, отделённые промежутками в 13 (26, 39, 182).

Вопрос 5. Выиграет, конечно, тот, кто первым достигнет 98 или 99, так как его противник — при минимальном прыжке в 2 фута — ближайшим прыжком либо достигнет конца пути, либо перейдёт его. Следовательно, *A* мог бы выиграть, достигнув 98, если бы он мог вначале попасть на 10 и затем становиться на места, отделённые промежутками в 11. Но он одним прыжком не может достигнуть 10, так как максимальный прыжок не может превосходить 9. Точно так же *A* ни в коем случае не может достигнуть 99, так как для этого он должен раньше достигнуть 11. Как бы *A* ни начал, *B* может первым прыжком достигнуть 11, затем передвигаться каждый раз на 11, пока не достигнет 99; *A* принуждён будет перепрыгнуть через конец пути и, следовательно, в итоге проиграет. Для *B*, кроме этого, всегда возможного способа выиграть, существует и другой, но не всегда достижимый. Если *B* первым прыжком попадёт на 10, что не всегда возможно, то он может последовательными передвижениями на 11 достигнуть 98 и тем самым заставить *A* или достигнуть конца пути, или его перейти. Второй способ выигрыша невозможен тогда, и только тогда, когда *A* первым прыжком станет на 9. Первый же способ, как сказано, возможен при всех обстоятельствах, как бы *A* ни начал.

Глава II

Вопрос 6. Общее число всех инверсий равно 23, поэтому задача неразрешима.

Глава III

Вопрос 7. Задача симметрична задаче IV § 3, из которой легко получается схема решения.

Вопрос 8. Задача сопряжена с задачей XIV § 3.

Вопрос 9. Очевидно, что задача аналогична задаче X § 3. В самом деле, путём поворота на 90° по часовой стрелке комбинации 46, 13 (46 — начальное, 13 — конечное отверстие) можно свести к комбинации 64, 37. Отсюда можно путём отражения относительно средней вертикали перейти к 24, 57, затем перестановкой начального и конечного отверстий: 57, 24 (задача X). Таким образом, заданная задача симметрична сопряжённой с задачей X § 3.

Глава IV

Вопрос 10. Нет; так как мнимое преимущество такого набора разновесок достигается ценой невозможности произвести взвешивание в 32 и 97 г (32 плюс 65).

Вопрос 11. Набором разновесок, данным в задаче, можно взвесить от 1 до 610 г включительно. 11 его гирь можно заменить следующими десятью: 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г, 128 г, 256 г, 512 г, которыми можно взвешивать до 1023 г.

Вопрос 12. Понадобятся всего 127 перенесений; причём из них на пластинку 1 придётся 64, на пластинку же 5 — только 4. Первое перенесение будет: 1 с *A* на *C*.

Глава V

Вопрос 13. Начальное положение колец, при котором все они находятся на челноке, понятно, не является наиболее неблагоприятным для отделения колец от челнока. Наиболее неблагоприятным случаем для пяти колец является следующее начальное положение:

```
1   2   3   4   5
O
-------------------
    O   O   O   O,
```

так как сперва придётся последние четыре кольца поднять на челнок. Для этого понадобятся столько же операций, сколько их необходимо для отделения колец от челнока, когда первое находится внизу, а остальные наверху, т. е. 7 операций. К последним, конечно, надо присоединить 16 операций, необходимых для отделения колец при нормальном первоначальном их расположении. Таким образом, начальное положение

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \mathrm{O} & & & & \\ \hline & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}$$

требует 23 операции.

Глава VI

Вопрос 14. Основными числами для этой задачи являются: 1, 2, 4, 8, 16.

$$7 = 4 + 2 + 1$$
$$25 = 16 + 8 + 1;$$

поэтому третье число должно быть равно $16 + 8 + 4 + 2 = 30$. Следовательно, искомая особенная позиция: 7, 25, 30.

Вопрос 15. Выиграет второй, так как первоначальная позиция есть особенная. В самом деле

$$3 = 2 + 1$$
$$17 = 16 + 1$$
$$18 = 16 + 2.$$

Вопрос 16. Эта задача, очевидно, принадлежит к задачам главы I. Согласно изложенной в ней теории, при правильной игре должен выиграть второй: он должен первым ходом убрать из кучки столько камешков, чтобы последние вместе с камешками, убранными первым игроком, составляли число 5; при втором ходе — 10, при третьем — 15, при четвёртом — 20, при пятом — 25.

Глава VII

Вопрос 17. Согласно данному нами правилу, продолжение игры от клетки 37 до клетки 46 возможно, только как указано на рис. 68. С клетки 46, согласно тому же правилу, можно стать конём либо на клетку 47, либо на 49. Если, как мы это сделали, с клетки 46 стать на клетку 47, то в дальнейшем (опять-таки согласно правилу) до клетки 51 мы можем продолжить игру только так, как указано на рис. 68. С клетки 51 коня можно поставить с одинаковым правом как на 52, так и на 54. Если мы выберем клетку 52, то следующие ходы, без сомнения, должны быть до клетки 59 такими, как указано на рис. 68. С клетки 59 можно перейти либо на 60, либо на 64. Выбрав 60, мы должны будем закончить задачу опять-таки как указано на рис. 68. Полученный нами

56	17	34	1	54	19	50	3
35	12	55	18	33	2	53	20
16	57	32	13	64	51	4	49
11	36	15	58	27	48	21	52
38	31	26	63	14	59	46	5
25	10	37	28	47	22	43	60
30	39	8	23	62	41	6	45
9	24	29	40	7	44	61	42

Рис. 68

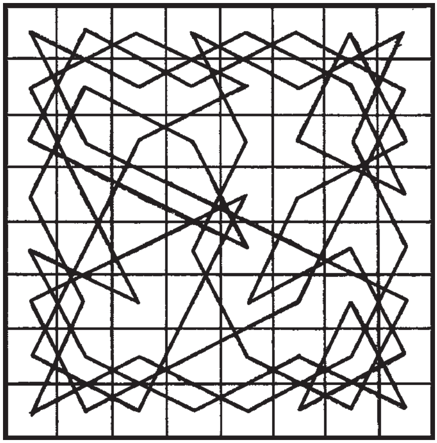


Рис. 69

ход коня, хотя он составлен приблизительно на $^3/_5$ по рис. 34 (с. 80), не имеет уже такой красивой формы, как рис. 34, что видно из его диаграммы (рис. 69). Вообще, ходы, образованные по нашему правилу, никогда не отличаются красотой. Но наш ход коня на этот раз замкнутый (конечные клетки соединены пунктирной линией), в то время как ход коня на рис. 34 — незамкнутый.

Глава VIII

Вопрос 18. Выписав все числа от 1 до 81 в два ряда один под другим, можно сразу же получить, что сумма чисел обоих рядов равна 82 × 81. Следовательно, сумма чисел одного ряда равна $\frac{82 \times 81}{2}$. Поэтому сумма чисел каждого из девяти рядов магического квадрата равна: $\frac{82 \times 81}{2 \times 9} = 369.$

Вопрос 19. Рис. 70.

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38		46

Рис. 70

Вопрос 20. Путём замены чисел квадратов *b* (рис. 50) им противолежащими получается следующий магический квадрат:

1	2	3	141	140	139	138	137	136	10	11	12
13	14	15	129	128	127	126	125	124	22	23	24
25	26	27	117	116	115	114	113	112	34	35	36
108	107	106	40	41	42	43	44	45	99	98	97
96	95	94	52	53	54	55	56	57	87	86	85
84	83	82	64	65	66	67	68	69	75	74	73
72	71	70	76	77	78	79	80	81	63	62	61
60	59	58	88	89	90	91	92	93	51	50	49
48	47	46	100	101	102	103	104	105	39	38	37
109	110	111	33	32	31	30	29	28	118	119	120
121	122	123	21	20	19	18	17	16	130	131	132
133	134	135	9	8	7	6	5	4	142	143	144

Рис. 71

Вопрос 21. На 470.

Глава IX
Раскрытие софизмов

I. Включительно до равенства

$$a \times (a - a) = (a + a) \times (a - a)$$

все наши рассуждения безошибочны, безупречны. Это равенство выражает, что два произведения, из которых каждое содержит по два сомножителя, равны между собой; причём в каждое произведение входит один и тот же сомножитель, а именно $(a - a)$. Следовательно, мы имеем равенство такой формы:

$$x \times z = y \times z.$$

В общем случае из такого равенства следует, что $x = y$, так как если два произведения, содержащие по два сомножителя, равны между собой и в каждое из них входит по одинаковому сомножителю, то и вторые сомножители должны быть также равны между собой: так, 3×7 может быть равно только 3×7, но отнюдь не 5×7. Если, например, имеется равенство $x \times 7 = 3 \times 7$, то из него непременно следует, что $x = 3$. Исключение составляет тот случай, когда одинаковый сомножитель, входящий в оба произведения, равен нулю: $3 \times 0 = 5 \times 0$. Следовательно, равенство

$$x \times z = y \times z$$

удовлетворяется, когда $z = 0$, при каких угодно значениях x и y, как равных, так и неравных между собой. Как из равенства $3 \times 0 = 5 \times 0$ нельзя заключить, что $3 = 5$, так из равенства $x \times z = y \times z$, когда $z = 0$, нельзя прийти к выводу, что $x = y$. Но мы как раз последнее и сделали при доказательстве софизма. В самом деле, в оба произведения равенства

$$a \times (a - a) = (a + a) \times (a - a)$$

входит сомножитель $(a - a)$, равный 0, между тем мы в тексте пришли к ложному выводу, что и вторые сомножители равны между собой, именно: $a = a + a$. Короче выражаясь, *мы разделили обе части равенства на ноль* — операция, как теперь видно, невозможная.

II. Здесь мы так же, как в пункте I, делили обе части на 0, а именно на $a - b - c$; последнее же выражение потому равно нулю, что по предположению, сделанному вначале,

$$a - b = c.$$

Ошибка, происходящая вследствие деления на 0, неоднократно применяется различными авторами при составлении арифметических софизмов.

Мы приводим здесь выписку из давно позабытой газеты под названием «Математическая газета за кружкой пива». Автор забавно использовал для своей статьи библейское предание об изгнании Адама и Евы из рая:

1. И сказал Бог Адаму: «Смотри, я отдаю в руки твои весь математический рай.

2. На всякие числа в раю ты будешь делить.

3. А на ноль — не дели на него: ибо ноль — есть творение владыки мрака».

4. Змей был хитрее всех зверей полевых. И сказал он жене: «Почему не делите вы на все числа рая?»

5. И сказала жена змею: «Муж мой делит на все числа, кроме нуля, ибо ноль есть творение владыки мрака».

6. И сказал змей жене: «Нет, ноль не творение мрака, но если будете делить на него, то откроются глаза ваши и узнаете добро и зло».

7. И увидела жена, что на ноль хорошо делить, что ноль приятен для глаз, ибо даёт знание. И сказала мужу своему: «Дели же. Разве не видишь, что равенства и уравнения этим упрощаются».

8. И Адам, скрепя сердце, разделил, и открылись глаза его и одновременно наполнились слезами.

9. Но Бог сказал Адаму: «Ты нарушил мой запрет.

10. Поэтому я изгоняю тебя из математического рая.

11. В поте лица своего будешь ты решать уравнения и выискивать доказательства; ты не будешь верить никакому утверждению, пока оно не доказано».

III. До равенства $(d - b)^2 = (d - a)^2$ включительно наши рассуждения верны. Из равенства двух выражений, однако, не следует, что и квадратный корень из одного выражения равен квадратному корню из другого, так как квадратный корень из числа, как известно, имеет два значения, отличающиеся друг от друга знаками; если, например, A и B друг другу равны, то квадратный корень из A не равен прямо квадратному корню из B, но равен одному из двух значений последнего. Из равенства $(d - b)^2 = (d - a)^2$ мы не имеем права, как мы это сделали, прийти непосредственно к выводу, что $d - b = d - a$, но мы можем лишь сказать, что $d - b$ равно

$$\text{либо } + (d - a),$$
$$\text{либо } - (d - a).$$

Какое же из этих двух значений взять для $d - b$, нетрудно узнать. Если из двух чисел a и b большее число есть b, то d, как среднее арифметическое этих чисел, меньше b, но больше a. Поэтому разность $d - b$ отрицательна, $a - d - a$ — положительна. Следовательно, мы не можем принять, как мы это сделали в тексте, что

$$d - b = +(d - a),$$

а должны непременно принять, что

$$d - b = -(d - a).$$

Последнее равенство отнюдь не приводит к ложному выводу; из него следует, что

$$d - b = -d + a$$

и дальше

$$2d = a + b,$$

т. е. мы приходим к тому же равенству, от которого мы исходили в рассуждениях софизма III (с. 117).

IV. Неравенство $a - 1 < a$, от которого мы исходили, конечно, неоспоримо. Но что неверно и что привело нас к ложному выводу — это умножение обеих частей неравенства на отрицательное число $(-a)$. Можно умножать обе части *равенства* на одно и то же отрицательное число, но нельзя умножать на такое же число *неравенство*, как показывает следующий пример. Если мы умножим обе части неравенства $1 < 2$ на (-2), то получим, что $-2 < -4$, неравенство, очевидно, неверное, так как (-2) не меньше, а больше (-4). В самом деле, если A должен 2 рубля, то он обладает бóльшим капиталом, чем лицо B, имеющее долг в 4 рубля (если читателю это трудно себе представить, то пусть он предположит, что эти лица заработали по 5 рублей и затем уплатили свой долг; тогда у A останется денег (3) больше, чем у B (1).

На самом же деле когда мы умножаем обе части неравенства $1 < 2$ на число (-2), то мы должны одновременно знак $<$ заменить знаком, ему противоположным, т. е. знаком $>$. Таким образом, получим, что $-2 > -4$, но не $-2 < -4$. Точно так же когда неравенство $a - 1 < a$ умножается на $(-a)$, то получим:

$$-a^2 + a > -a^2,$$

$$\text{но не } -a^2 + a < -a^2.$$

Но из неравенства $-a^2 + a > -a^2$ вытекает, что $a > 0$ — результат отнюдь не неожиданный, так как положительное число больше нуля.

V. В IV мы пришли к ложному выводу от того, что по умножении обеих частей неравенства на отрицательное число не переменили знак неравенства на обратный. Здесь мы имеем почти то же самое: делим обе части неравенства на отрицательное число $p - q$ ($p < q$, значит, $p - q$ отрицательно). Деление неравенства на отрицательное число допустимо в том случае, когда одновременно с делением знак неравенства заменён обратным ему знаком. Тогда получим не $p + d < d$, но $p + q > q$; неравенство, само собой очевидное.

VI. В этом софизме мы исходили из того положения, что произведение некоторого числа на 2 больше самого числа. Но это положение верно лишь для *положительных чисел*. Если A имеет капитал в 2 раза больший капитала B, то естественно, что капитал A больше капитала B; но если эти лица имеют только одни долги и долг A в 2 раза больше долга B, то капитал A меньше капитала B (см. с. 147). Но $\log a$ при $a = {}^1/_2$ не положительное, а отрицательное число, поэтому неравенство

$$2 \log a > \log a$$

при $a = {}^1/_2$ — неверное; оно верно для всякого a, большего 1.

VII. Этот софизм основывается, как и софизм III, на том, что из двух значений квадратного корня выбирается не то, какое следовало бы выбрать. Если верно выбирать знаки квадратного корня, то придём к равенству: $-\sqrt{x} = i^2\sqrt{x}$ (но не к равенству: $\sqrt{x} = i^2\sqrt{x}$), из которого следует, что $i^2 = -1$. Вообще, оперируя с мнимыми числами, можно, как преднамеренно, так и вопреки желанию, прийти к ошибочным заключениям. Например, из равенства $i^4 = 1$, в справедливости которого никто не сомневается, можно путём извлечения квадратного корня получить неверное равенство $i^2 = 1$; на самом же деле из двух значений квадратного корня из единицы (± 1) следует взять в данном случае не $+\sqrt{1}$, а $-\sqrt{1} = -1$, так что в результате получим: $i^2 = -1$.

VIII. Читателю нетрудно догадаться, что чертёж на рис. 60 начерчен умышленно неправильно, благодаря чему мы и пришли к ложному выводу. В самом деле, представим себе, что точка B соединена с точками C и D; тогда углы CBA и ABD, как углы, опирающиеся на диаметр, прямые. Кроме того, они имеют общую вершину B и общую сторону BA, поэтому две их другие стороны составляют одну прямую CBD. Следовательно, прямая, соединяющая точки C и D, непременно должна проходить через B, точку пересечения двух окружностей.

IX. Этот софизм основан на неправильно начерченных рис. 61 и 62. Прежде всего рассмотрим рис. 61: биссектриса какого-либо угла треугольника и перпендикуляр, восстановленный из середины противоположной стороны его, пересекаются *не внутри*, как на рисунке, а *вне* треугольника. В этом легко убедиться, если опишем около треугольника круг (рис. 72). В самом деле, биссектриса угла C, продолженная до пересечения с окружностью круга, должна в точке пересечения N делить дугу ANB пополам, так как равные вписанные углы (угол ACN = углу BCN) опираются на равные дуги; значит, дуга AN равна дуге BN. С другой стороны, по известному предложению, перпендикуляр, восставленный из середины хорды AB, делит дугу ANB, стягиваемую этой хордой, также пополам, иными словами, этот перпендикуляр проходит через точку N. Таким образом, и биссектриса, и перпендикуляр проходят через точку N. Но так как вообще две прямые линии пересекаются только в одной точке, то точка N и есть та единственная точка, в которой пересекаются биссектриса угла C и перпендикуляр, восстановленный из середины стороны AB.

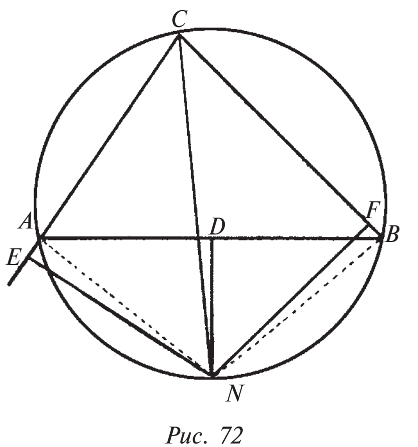


Рис. 72

Таким образом, доказано, что биссектриса и перпендикуляр на рис. 61 пересекаются не внутри, а вне треугольника.

Остаётся рассмотреть рис. 62 (с. 126), на котором биссектриса и перпендикуляр пересекаются вне треугольника. Только что было доказано, что четырёхугольник *ACBN* вписан в окружность, проходящую через вершины треугольника *ABC* (рис. 72), поэтому каждая его пара противоположных углов в сумме равна (двум прямым углам); следовательно, угол *CAN* + + угол *CBM* = 2*d*. Исключая тот случай, когда *ABC* действительно равнобедренный и когда, следовательно, каждый из углов *CAN* и *CBN* прямой (в этом случае *CN* — диаметр), мы должны прийти к выводу, что один из этих углов острый, а другой — тупой. Поэтому они не могут быть, как на рис. 62, одновременно внешними углами прямоугольных треугольников (ΔNAE и ΔNBF). Только один из этих углов, а именно тупой (на рис. 72 — *CAN*), является внешним углом прямоугольного треугольника (ΔNAE), другой же — острый (на рис. 72 *CBN*) — внутренним углом соответствующего прямоугольного треугольника (*NBF*). Следовательно, основание одного из перпендикуляров *NF* и *NE* (а именно *NF*) должно находиться на соответствующей стороне (*BC*), а основание другого (*NE*) — на продолжении соответствующей ему стороны (*AC*).

Если применить для чертежа рис. 72 те же рассуждения, какие были проведены для чертежей на рис. 61 и 62, то и теперь, как прежде для неправильных чертежей, получим

$$CE = CF$$
$$\text{и } AE = BF,$$

но разница будет заключаться в том, что сторона *CA* равна разности отрезков *CA* и *AE*, а другая сторона *CB* равна, напротив, сумме отрезков CF и FB. Но теперь мы имеем следующее равенство:

$$CF + BF = CE + AE,$$

из которого отнюдь не вытекает, что $CB = CA$, а что

$$CB = CA + 2AE.$$

Последнее равенство показывает, что обе стороны CB и CA треугольника не равны между собой и что большая сторона, в данном случае CB, больше меньшей стороны CA на удвоенный отрезок AE.

X. Ошибка здесь заключается в том, что при прикладывании друг к другу кусков I и IV рис. 63 (с. 127), как указано на рис. 64 (с. 128), получается линия ABC (рис. 73), но не прямая, а ломаная, имеющая изгиб у точки B.

В самом деле, если бы линия ABC была прямая, то должна была иметь место пропорция:

$$AD : BE = DC : EC$$

или

$$5 : 3 = 13 : 8,$$

которая, очевидно, не верна, так как произведение крайних её членов (40) не равно произведению средних (39). То же можно сказать о кусках II и III. Следовательно, на рис. 64 (с. 128) слева начерчено преднамеренно неправильно. Если правильно сложить куски I, II, III, IV, то получится фигура (см. рис. 73), внутри которой будет отверстие, имеющее форму весьма узкого параллелограмма. Площадь последне-

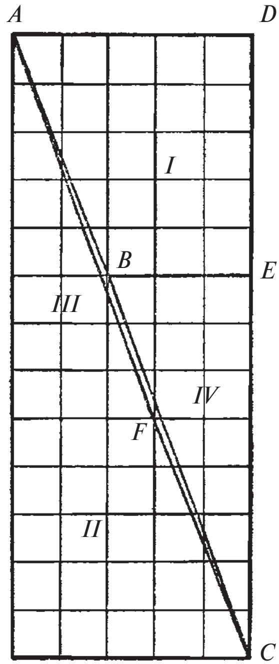


Рис. 73

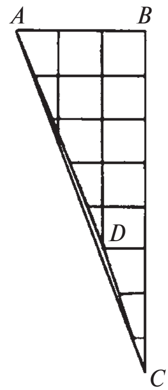


Рис. 74

го как раз равна площади одного из квадратиков на рис. 63. Площадь этого параллелограмма и есть площадь той 65-й клетки, которую мы на нашем неправильном чертеже (рис. 64) незаметно для читателя присоединили к 64 клеткам на рис. 63, как бы скрыли, что куски I и IV отделяются от кусков III и IV пустым местом.

Так же обстоит дело и с рис. 64 справа. Длинная косая линия на нем при правильном чертеже образует в двух местах изгибы. Часть, обозначенная на рис. 64 числом III, при правильном построении имела бы вид *ABCD*, как на рис. 74, и, следовательно, линия *ADC* не прямая, а ломаная. Если бы *ADC* была прямой (а не ломаной), то из рис. 74 можно было бы получить неверную пропорцию: 3 : 2 = 8 : 5. Прямая, соединяющая точки *A* и *C*, проходит вне четырёхугольника *ADCB*, и не последний, а треугольник *ACB* равновелик куску III рис. 63. Поэтому когда в рис. 64 слева мы треугольник *ABC* фактически заменили четырёхугольником *ABCD*, то этим мы как бы отрезали от куска III рис. 64 треугольник *ADC*. При переходе от рис. 63 к рис. 64 эта утайка треугольника производится дважды: сумма площадей этих двух треугольников как раз равна площади одной клетки рис. 63.

XI. Этот софизм вытекает из того, что мы принимаем $\frac{z-x}{1-x-z}$ равным 1 при любых значениях x и z. Вообще, $\frac{z-x}{x-z}=-\frac{x-z}{x-z}=-1$ во всех тех случаях, когда разность $(x - z)$ отлична от 0. Но когда $x - z = 0$, то и $z - x = 0$, и наше выражение $\frac{z-x}{x-z}$ в этом случае оказывается неопределённостью вида 0 – 0. С этим случаем мы здесь как раз и имеем дело. Из пропорции $\frac{z}{x+y}=\frac{x}{y+x}$ получаем $(y + z) = x\,(x + y)$, или $yz + z^2 = x^2 + xy$, или $x^2 - z^2 + xy - yz = 0$, или $(x + z)\,(x + z) + y(x - z) = 0$, или $(x - z) - (x + y + z) = 0$. Это равенство требует, чтобы произведение двух сомножителей $(x - z)$ и $(x + y + z)$ было бы равно 0. Но это возможно лишь тогда, когда один из сомножителей равен 0. Но $x + y + z$ равно отрезку *AC*, поэтому необходимо, чтобы $x + z$ равнялось 0.

XII. Этот софизм основывается на том, что на самом деле только больший круг, а не меньший, катится по прямой. Если бы меньший круг катился по прямой, то он совершил бы полный оборот значительно раньше, чем он докатился бы до точки D[1].

XIII. Так как A, C, B, D суть четыре гармонические точки, то $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$. Но $AD > AC$, поэтому и $BD > BC$. Точка F есть середина отрезка MD; следовательно, точка F должна находиться вправо от B, т. е. точка F лежит вне окружности. И только неправильный чертёж (рис. 67) мог привести нас к этому софизму.

XIV. Предположим ради удобства, что Ахиллес и черепаха двигаются по прямой линии. Причём пусть Ахиллес двигается со скоростью 100 м/мин, а черепаха со скоростью, составляющей $^1/_{10}$ скорости Ахиллеса, т. е. со скоростью 10 м/мин. Пусть первоначальное расстояние между Ахиллесом и черепахой равно 100 м. Когда Ахиллес по истечении минуты достигнет первоначального положения S черепахи, последняя за этот промежуток времени пройдёт расстояние в 10 м, до точки S_1, вследствие чего Ахиллесу понадобится еще $^1/_{10}$ минуты, чтобы оказаться в точке S_1. Но в течение этой $^1/_{10}$ минуты черепаха продвинется на 1 м до точки S_2, поэтому Ахиллесу теперь понадобится $^1/_{100}$ минуты, чтобы достичь S_2. За это же время черепаха пройдёт 1 дм до S_3. Ахиллесу понадобится $^1/_{1000}$ минуты, чтобы достичь S_3 и т. д. Итак, согласно рассуждениям Зенона, составится промежуток времени, равный 1 минуте + $^1/_{10}$ минуты + $^1/_{100}$ минуты + $^1/_{1000}$ минуты + $^1/_{10\,000}$ минуты + ..., в пределах которого Ахиллес действительно не догонит черепахи. Но как велик этот промежуток времени? Приведённый только что ряд может быть представлен

[1] Кривая, описываемая точкой большой окружности при нашем движении, называется обыкновенной циклоидой. Кривая, описываемая точкой меньшей окружности, называется укороченной циклоидой.

так: $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \ldots$ минут, или 1,1111... минут, или, по известному предложению о периодических десятичных дробях, $1^1/_9$ минуты. Итак, промежуток времени, на который простираются рассуждения Зенона, охватывает $1^1/_9$ минуты. В пределах этого промежутка времени Ахиллес действительно не догонит черепахи, хотя расстояние между ними будет становиться все меньше и меньше, и к концу этого промежутка оно станет столь малым, что окажется меньше любой сколь угодно малой длины. Последнее происходит оттого, что слагаемые ряда $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots$, выражающего промежуток времени, по мере удаления от начала всё уменьшаются и уменьшаются. Но расстояние, меньшее сколь угодно малой длины, очевидно, равно нулю, т. е. по истечении $1^1/_9$ минуты Ахиллес догонит черепаху и затем при дальнейшем их движении в ближайший же момент он её опередит.

XV. Рассуждения B неверны; напротив, рассуждения A верны. При одном бросании трёх монет одинаково возможен один из следующих восьми случаев (*O* — обозначает орёл, *p* — решку):

1) *OOO*	3) *OpO*	5) *pOO*	7) *ppO*
2) *OOp*	4) *Opp*	6) *pOp*	8) *ppp*.

Следовательно, из восьми равновозможных случаев лишь два (первый и последний) благоприятствуют выпадению монет с одной и той же стороной, поэтому вероятность этого события равна $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Рассуждения лица B основывались на том, что благоприятных случаев для нашего события столько же, сколько и неблагоприятных. Но он упустил из виду следующее обстоятельство: если, например, на двух монетах при бросании оказалось *O*, на третьей же *p*, то эта возможность представляется не 1 раз, а 3, именно во 2-м, 3-м и 5-м случаях нашей таблички, так как *р* может оказаться либо на третьей монете, либо на второй, либо на первой. То же самое относится и к комбинации, при которой на двух монетах выпадает *р,* на третьей — *О* (4-й, 6-й и 7-й случаи). В противоположность этому, благоприятные случаи *О О О* и *р р р* возможны лишь по 1 разу. Следовательно, опять-таки неблагоприятных случаев оказывается в 3 раза более, чем благоприятных.

Гальтон попытался проверить полученный нами результат на опыте. Для этой цели он воспользовался тремя игральными костями, предположив, что выпадение чётного числа равносильно выпадению орла, а нечётного — решки. Он бросал эти кости 120 раз; причём оказалось, что кости показывали одновременно чётные или одновременно нечётные числа в 28 случаях. По теории таких случаев должно было быть 30.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Для возрастной категории 12+

Научно-популярное издание

Азбука науки для юных гениев

Аренс Вильгельм

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Ответственный за выпуск *Л.И. Янцева*
Редактор *К.В. Федорченко*
Научный редактор *А.М. Вервальд*
Художественный редактор *Е.Ю. Шурлапова*
Технический редактор *Н.В. Травкина*
Ответственный корректор *Т.В. Соловьева*

Подписано в печать 20.04.2018.
Формат $84 \times 108^{1}/_{32}$. Бумага типографская. Гарнитура «Ньютон».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 6,76.
Тираж 2 000 экз. Заказ №

ЗАО «Центрполиграф»
121471, Москва, Можайское ш., 29/2

WWW.CENTRPOLIGRAF.RU

Отпечатано в ОАО «Рыбинский дом печати»
152901, Ярославская обл., г. Рыбинск, ул. Чкалова, 8
e-mail: printing@yaroslavl.ru www.printing.yaroslavl.ru

Азбука науки
для юных гениев

Вильгельм Аренс

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Вышедшая в начале XX века, в кажущемся теперь таким далеким 1924 году, и высоко оцененная известным популяризатором наук Яковом Исидоровичем Перельманом, книга «Математические игры» немецкого ученого д-ра Вильгельма Аренса снова доступна читателям. В ней увлеченному предметом любознательному исследователю представится возможность познакомиться с неустаревающими упражнениями для ума, полезными и интересными как для юных читателей, знакомых с алгеброй и геометрией, так и для взрослых. Описанные игры, тренирующие внимательность, гибкость ума и логическое мышление, послужат как отличной подготовкой для решения более сложных задач, так и отличным развлечением в часы досуга.

ISBN: 978-5-9524-5246-6

9 785952 452466

ЦЕНТРПОЛИГРАФ